¿Es posible saber el valor de verdad de la Hipótesis del Continuo? (Is possible knowt the truth value of Continuum Hypothesis?)

Conference Paper · June 2017

1 author:

Mauricio Algalan Meneses
Universidad Panamericana

¿Es posible saber el valor de verdad de la Hipótesis del Continuo?

Algalan Meneses Mauricio

Introducción

La Hipótesis del Continuo (HC) es la suposición de que dado el primer transfinito, $\aleph_0$, el cardinal de los naturales; el siguiente cardinal, $\aleph_1$, es el cardinal de los números reales. La Hipótesis Generalizada del Continuo es que dado un transfinito $\aleph_n$, el siguiente transfinito es el conjunto potencia de dicho transfinito $\aleph_{n+1} = \mathcal{P}(\aleph_n)$.

Desde la teoría intuitiva de conjuntos cantoriana se ha tratado conocer si en dicha teoría se sigue HC. Sin embargo Cantor no pudo probar HC.

Tiempo después Gödel y Cohen probarán que HC es independiente a la teoría de conjuntos ZF ó ZFC, si se acepta elección. Después del trabajo de Cohen, Gödel planteo un programa para extender, axiomáticamente, ZFC con el cual se pudiera conocer sí en ZFC HC se sigue, o se sigue $\neg$HC.

Hoy en día aun se desconoce una extensión HC ó $\neg$HC en ZFC.

Gutiérrez plantea que de hecho posiblemente hoy en día no hay extensión axiomática filosóficamente adecuada que pueda determinar si en ZFC se sigue HC ó $\neg$HC. Desde la perspectiva de Gutiérrez, dado que no existe una extensión adecuada en ZFC para determinar HC, se puede decir que HC es *absolutamente indecidible*.

Esta conferencia se tratara de entender los conceptos de *absoluta indecidibilidad* planteada por Gutiérrez, el porqué considera que sucede esto con respecto a HC en ZFC y algunas posibles soluciones que podrían explorarse.

Niveles de indecidibilidad y la indecidibilidad de HC

Gutiérrez plantea 3 niveles de indecidibilidad:

1. α es indecidible sí: en un sistema particular α y $\neg\alpha$ son consistentes con el sistema.

2. α es *absolutamente indecidible* sí: en un sistema particular y sus extensiones axiomáticas α y $\neg\alpha$ son consistentes con el sistema y sus extensiones.

3. α es *absolutamente indecidible a un sistema* sí: en un sistema, en sus extensiones axiomáticas y con cambio de lógica, y sus combinaciones, α y $\neg\alpha$ son consistentes con el sistema, con sus extensiones y con los cambios de lógica que se hagan.

Para Gutiérrez si bien se puede proponer cualquier extensión y lógica eso no significa que sea adecuada para dicho sistema. Desde su punto de vista, toda ampliación axiomática debe en un principio ser adecuada a la práctica; y en última instancia tener una postura filosófica que lo respalde.

En su trabajo analiza dos posturas, la primera es la posición del grupo CABAL y la segunda es el trabajo de Feferman. En ambas el Dr. Gutiérrez que actualmente los axiomas de ZFC hacen indecidible HC.

Pero lo que pone en duda Gutiérrez es que tanto el grupo CABAL como el trabajo de Feferman sean capaces de encontrar un estensión axiomática, filosóficamente adecuada, que pueda decidir HC, ya sea que HC sea consistente con ZFC o que $\neg$HC sea consistente con HC.

Desde su perspectiva, ya que existe la duda que alguno de estos grupos encuentre una extención axiomática para HC, posiblemente HC *es absolutamente indecidible* con respecto a ZFC.

Para más información consulte el capítulo 2 de [**?**].

Caracteristicas de la absoluta indecidibilidad de HC.

Gutiérrez establece que HC es *absolutamente indecidible* por lo siguiente:

- Es independiente al sistema ZFC.

- Es independiente a diferentes extensiones axiomáticas de ZFC y considera que posiblemente no habrá extensiones axiomáticas filosóficamente adecuadas que decidan HC.
- Pero no puede establecerse que sea *absolutamente indecidible a un sistema* porque solo se ha tomado en cuenta ZFC, y sus extensiones y lógica clásica; pero no emos establecido que en otros sistemas y/o en otras lógicas, como segundo orden ZFC2; existan axiomatizaciones, o puedan existir axiomatizaciones que decidan HC.

Criticas a los criterios de evaluación de axiomas.

Para Gutiérrez al absuluta indecidibilidad se da a partir de que los criterios de selección del grupo CABAL y Feferman son inadecuados para elegir una extensión axiomática sobre otra que pueda decidir HC. Para dicha crítica utiliza la *filosofía segunda* propuesta por Maddy.

Los criterios de evaluación del grupo CABAL están basados en parte por el programa de Gödel, quien tiene una visión realista en valor de verdad y ontología de la teoría de conjuntos, quería que la teoría de conjuntos fuera lo más cercano a la *real*, y probablemente que hubiera solo una teoría de conjuntos. Gutiérrez, basado en Maddy, dice que la forma de seleccionar axiomas por el grupo CABAL tiene las las siguientes características:

- Mediante criterios internos que recuperaran una pretensión pre-teórica de la teoría de conjuntos, en este caso la jerarquía acumilativa. De estos destacan:
    - Maximalidad, aporte más elementos o se pueda reconstruir la más elementos con la axiomatización propuesta.
    - Resuelva problemas abiertos.
    - Consistencia con el resto de la teoría o sistema axiomático.
- Mediante criterios externos, apelando a los objetivos de la teoría de conjuntos. Para evaluar los axiomas se puede hacer mediante:
    - Tienen consecuencia verificables en la teoría.
    - Permiten nuevos y poderosos méodos para resolver la teoría.
    - Implican conjeturas previas.
    - Implican resultados *naturales* en la teoría.
    - Establecen conexiones intra-teóricas fuertes.
    - Permite dar luz a viejos problemas.

Gutiérrez comenta que existe un problema de acceso espitémico en la postura realista gödeliana debido al concepto que utiliza *intuición* en varios sentidos, crítica realiza Maddy al proyecto gödeliano. Gutiérrez también comenta que Maddy justifica la extensión de axiomas, pero, aquellos que justifica, no resuelven HC.

Considera que Maddy si bien se basa en la práctica matemática como justificación de los axiomas, primero solo toma los del grupo CABAL, y no otros, además de que para el algunas justificaciones parecen proceder de su anterior postura, realista gödeliana, más que ser justificados en la práctica. Para Gutiérrez la selección de axiomas de manera externa puede verse afectada por las prácticas de un grupo en específico, que o bien no resuelva cosas de interés a otros grupos, o nos equivoquemos en la selección de la teoría exitosa. Para Gutiérrez actualmente no hay forma de elegir que tradición es la adecuada, porque todas tienen resultados exitosos.

Feferman considera que los axiomas se pueden seleccionar de dos formas:

- Fundamentales: nos dan el márco teórico de una teoría.
- Estructurales: nos dan la estructura de la teoría y son los importantes. La forma en que se evalúan estos es:
    - La necesidad de los axiomas se debe dar en la práctica cotidiana matemática.
    - La búsqueda de nuevos axiomas solo está justificada para decidir sobre proposiciones indecidibles que tengan impacto en la ciencia, matemática aplicada.
    - Los criterios propios de la disciplina son los únicos adecuados para decidir sobre los axiomas.
    - Nuevos axiomas parecen requerir justificación externa por lo que no estarían bien justificados.

Para Feferman no existe una razón para buscar nuevos axiomas que resuelvan HC; es un seduoproblema ya que no se requiere ésta, o su negación en la matemática aplicada.

Gutiérrez considera que los criterios de selección de Feferman son inadecuados porque: se basa en un modelo cuestionable, matemática aplicada, que en muchos casos no se sabe cuando deja de ser aplicada para ser pura. Considera que la teoría de conjuntos debe estar al servicio de otras ciencias, cuando Gutiérez considera que la teoría de conjuntos es una rama de la matemática propia y sus propios intereses validan la búsqueda de nuevos axiomas.

Por estas razones comenta que la selección de axiomas para extender ZFC está comprometida, filosóficamente, y en este sentido HC se vuelve *absolutamente indecidible*.

Posibles salidas a la absoluta indecidibilidad.

Comento brevemente las posibles salidas que se pueden dar ante el problema planteado.

La primera es ignorar HC, se puede trabajar en ZFC sin necesidad de que exista una axiomatización que decida HC. El costo es que no sabremos HC.

Otra posibilidad es cambiar de lógica, como segundo orden, $\Omega-$Lógicas, o Lógicas de proposiciones de longitud infinita. Sin embargo esto nos lleva a cuestionar nuestra la filosofía de fondo; un ejemplo es cuestionar la pertinencia del finitismo en el método axiomático de Hilbert, el cual consideraba que se debía construir nuestros sistemas de manera finitaria.

Se podría también decidir que HC si es parecida a el quinto postulado y decidir que hay varios tipos de teoría de conjuntos. Un primer problema es que dependiendo de la postura filosófica, se puede considerar incorrecto que existan dos teorías de conjuntos igualmente válidas, al menos Gödel parece querer solo una. Otra cuestión es que HC no parece aportar nuevos elementos a la teoría de conjuntos, su utilidad como axioma está comprometida.

Como se puede observar por el momento parece ser que Gutiérrez tiene razón y por el momento HC no se puede decidir, por lo que el valor de verdad de HC parece que no se podrá conocer por el momento.