

Problemas de la independencia en el realismo matemático: *Problemas filosóficos de los números*

Mauricio Algalan Meneses.

23-02-2015

Resumen

Existen diversos tipos de realismo matemático. Desde una perspectiva filosófica, en la mayoría de los casos, los realistas asumen algunas o todas de las siguientes tesis: 1) Existen los objetos matemáticos; 2) Los objetos matemáticos son abstractos y 3) Los objetos matemáticos son independientes a agentes, lenguajes y prácticas. En este trabajo discutiré algunos problemas con respecto al tercer punto, referente a la independencia entre el lenguaje y los objetos matemáticos. La independencia del lenguaje implica que, sin importar el lenguaje que se utilice, el objeto matemático será el mismo. En mi opinión, se puede problematizar esta idea de independencia; y para mostrar esto presentaré algunos ejemplos en los sistemas de numeración indoarábigo y romano, en los que el lenguaje parece incidir en el entendimiento y las operaciones aritméticas de los números naturales. Con esto se abre la puerta a otras maneras posibles de entender la relación entre los pretendidos objetos matemáticos y los lenguajes que los describen.

1. Introducción

El realismo matemático es una posición filosófica que de acuerdo a Shapiro y a Linnebo en general, sostiene algunas de las siguientes posiciones acerca de la naturaleza del conocimiento matemático (Shapiro 1997, Introduction) (Linnebo 2013):

1. *Existencia*: Los objetos matemáticos existen. Es la concepción de que las matemáticas están formadas por objetos y que existen independientemente de los humanos o alguna otra entidad. A este concepto lo denominaré como “E”.
2. *Abstracción*: Los objetos matemáticos están fuera del espacio y tiempo. Para el realismo, que los objetos sean abstractos implica que se ven poco afectados, o nunca son afectados por el tiempo y el espacio. A este concepto lo denominaré como “A”.
3. *Independencia*: Los objetos matemáticos son independientes de los agentes, prácticas o convenciones, así como a los lenguajes propios de la disciplina. Se entiende que existen objetos que son tratados por diferentes lenguajes, personas o la práctica matemática que los creó y que siguen siendo el mismo objeto. A este concepto lo denominaré como “I”.

El realismo que sostenga “E” y “A”, es un realismo ontológico; y se llama realismo en valor de verdad (truth-value) aquel que sostiene “I” (Shapiro 1997, Introduction). Aquel realismo que sostiene las tres tesis, “E” “A” “I”, se llama realismo platónico o platonismo matemático (Linnebo 2013).

En el trabajo que desarrollaré a continuación pondré en duda “I”, además de que el concepto de “A” se modifica, desde mi punto de vista al dudar de “I”; y solo sostengo “E” de manera parcial. Mi postura puede considerarse como un realismo en aplicación. A continuación explicaré con más detalle mi propuesta de realismo.

1.1. Realismo en aplicación

Considero que los objetos matemáticos existen, dado que es posible al ser humano proponerlos y estudiarlos; tal y como al desarrollar un objeto o aplicación del mundo físico se planifican las características que debe tener y después se implementan. Es la concepción y desarrollo de un estudio matemático lo que le da a los trabajos de esta disciplina, su práctica, la existencia como un objeto.

En mi propuesta, los objetos matemáticos tienen las siguientes características:

1. Los objetos matemáticos existen debido a que los humanos trabajan en ellos. Considero que los objetos matemáticos existen, pero éstos dependen de la cognición humana colectiva y las comunidades de matemáticos interesados en dichos objetos (Barabashev 1997). Sin embargo, a pesar de que dependen en buena medida de los humanos; una vez que estos objetos han sido generados, están más allá del control de sus creadores. Del mismo modo en que los países existen debido a que los humanos los crearon, de esa forma existen los objetos matemáticos. En la historia de las matemáticas existen ejemplos de objetos que fueron polémicos y que se dudó de su existencia, como los números negativos o los imaginarios (Robles 1993, Cap. II, Anex. A Cap. II); además de otros ejemplos en los cuales el desarrollo de un objeto continuó,

aunque sus autores o una comunidad dejaron de creer en dichos objetos, como el matemático L. S. Pontryagin quien criticó las matemáticas abstractas, en especial la topología que en un principio desarrolló (Barabashev 1997). En el primer caso, podemos establecer que expresar una idea matemática es insuficiente para declarar real un objeto, justo como declarar la independencia es insuficiente para que un país exista; y en la segunda observamos que una vez aceptado, el objeto parece tener una existencia propia, así si dos países están en conflicto, siguen existiendo aunque los dos niegan la existencia del otro. Sin embargo esa existencia tampoco es eterna, justo como pensar en un país que deja de existir porque carece de habitantes; los objetos matemáticos tampoco pueden existir sin matemáticos.

2. El lenguaje es parte del objeto matemático, y entiendo por lenguaje, a los símbolos y reglas de utilización de los símbolos con que los matemáticos trabajan. Aparte de los lenguajes escritos, los lenguajes matemáticos incluyen a los diagramas y otro tipo de representaciones gráficas. Considero que el lenguaje en el que se expresan las operaciones no es neutral con respecto a los aspectos ontológicos o epistémicos a los que se está refiriendo ese lenguaje, por lo cual, no creo que sea posible sostener, simplemente, que dos lenguajes matemáticos son equiparables, iguales, o que denotan al mismo objeto.
3. Considero a los objetos matemáticos como abstractos por razones prácticas. Sin embargo, dado que los objetos matemáticos tienen un origen, pueden ser localizados en el tiempo, y como sostengo que dependen del lenguaje tienen también una localización en el espacio; además de que participan en la cognición de las matemáticas. ¿Entonces por qué considerarlos como abstractos? Porque en la práctica matemática existen ejemplos de estabilidad y un largo uso, v. gr. los símbolos de diferencial dx e integral \int que fueron introducidos por Leibniz y que siguen utilizándose actualmente (C. H. Edwards 1979, Cap. 9). La abstracción viene dada porque en el periodo de vida humano estos símbolos pocas veces cambian y sólo en los símbolos de las prácticas más nuevas se observa el fenómeno de cambio.

Dada mi propuesta con respecto al tipo de existencia de los objetos matemáticos, presentaré a continuación la postura de quienes sostienen "I" para, posteriormente, proponer una crítica.

1.2. Razones para sostener "I"

Existen varias razones por las cuales tanto filósofos como matemáticos sostienen "I"; no todos argumentan a favor o en contra de "I"; muchos solamente asumen esta postura. Sin embargo, sí encontramos en la literatura algunos argumentos para sostenerla:

1. Los historiadores matemáticos sostienen "I". Los historiadores asumen una posición filosófica y la transmiten en sus estudios, así tienden a considerar y a utilizar la notación que más les convenga (Barabashev 1997) (Muntersbjorn 2003). Por ejemplo un texto de Barabashev sostiene "I" para utilizar la notación moderna al realizar un texto de historia de las matemáticas.
2. Los símbolos o el lenguaje son inocuos para el resultado. Es la posición que sostiene que sólo importa el resultado de una operación sin importar el lenguaje en que se exprese la misma (Barabashev 1997). Otra forma de considerar lo anterior es sostener que la cognición matemática se lleva internamente y esto hace que los resultados sean independientes del lenguaje (Cruz 2008).
3. Los símbolos son atajos para otros conceptos. Matemáticos y filósofos consideran que los símbolos del lenguaje matemático son convenciones, los cuales funcionan como atajos (Macbeth 2012b). Esta posición parece asumir que el lenguaje matemático es vacío epistémicamente.
 - a) Los símbolos matemáticos son equivalentes al lenguaje natural. Algunos matemáticos consideran que los símbolos matemáticos pueden traducirse o son equivalentes a frases del lenguaje natural, como un atajo conveniente del lenguaje natural. Un ejemplo de esto es decir que x^2 es más conveniente que x cuadrada o que $x \in A$ es más compacto que x es un elemento del conjunto A (Macbeth 2012b).

2. Problemas de "I"

Existe la posibilidad de que al aceptar "I" estemos dando por hecho que distintas representaciones denotan intereses matemáticos comunes, sin considerar o analizar cuidadosamente que efectivamente sea así. En mi opinión, deberíamos realizar consideraciones históricas, epistémicas o de otro tipo, que nos permitan inferir que los distintos lenguajes matemáticos hacen referencia a los mismos objetos.

Aunque estos podrían parecer asuntos menores, considero que en matemáticas al cambiar las notaciones existe la posibilidad de que estemos alterando la historia de las matemáticas y que los historiadores se estén convirtiendo en matemáticos (Barabashev 1997). Este mismo fenómeno le puede pasar al filósofo.

Muntersbjorn considera que este fenómeno hace que los estudiosos de la historia matemática se vean impelidos o atraídos a minimizar las diferencias entre notaciones y considerarlas iguales y crear historias a modo. A este fenómeno se le conoce como *Wigh history* (Muntersbjorn 2003). Es decir, aceptar "I" sin haber estudiado a fondo las implicaciones de un lenguaje o notación matemática puede alterar la historia y profundidad de las matemáticas, haciendo una historia *Wigh* matemática.

Considero que además de estas razones otro problema que surge con la “I”, es que históricamente podemos tratar adductivamente (de lo que tengo a lo que tuve) un problema y analizar los orígenes de una notación o disciplina matemática viéndola desde la perspectiva actual, sin considerar o eliminando una perspectiva deductiva-inductiva (de lo que se tenía a lo que se tiene). Tendemos a olvidar que para el momento en que fue creada, descubierta o sembrada, existían una serie de factores que limitaban esa notación o disciplina, no solo matemáticos sino también filosóficos, además de situaciones externas a las estrictamente matemáticas o de la visión de las matemáticas y su filosofía. Un ejemplo de esto es el Cálculo y las notaciones que de éste hicieron Newton y Leibniz, las cuales, si las analizamos sin cuidado podemos pensar que son iguales; sin embargo, cada autor tenía un punto de vista diferente sobre esta disciplina, concibieron de manera diferente el cálculo, además de que existían tensiones entre el Continente e Inglaterra (C. H. Edwards 1979, Cap. 9) entre otros factores que la suposición de “I” tiende a hacer menores.

De estos cuestionamientos surgen las siguientes preguntas.

- ¿Hacemos una historia a modo de las matemáticas aceptando “I”?
- ¿Alteramos las propiedades de los objetos?
- Y más importante aún ¿Aceptar “I” no provocará que cambiemos la naturaleza de los objetos matemáticos o que entendamos las propiedades que tienen incorrectamente?

Para responder estas preguntas, a continuación cuestionaré las tres tesis con las cuales se defiende o sostiene “I”. Empezaré cuestionando la última tesis y terminaré haciendo un breve análisis de como los historiadores de la matemática suelen presentar sus trabajos.

2.1. El lenguaje y los símbolos matemáticos tienen valor epistémico

Cuando utilizamos el lenguaje matemático, a veces utilizamos el lenguaje natural para entender mejor una operación, un ejemplo es decir *cinco más siete es igual a doce*, pero es difícil argumentar que todo lenguaje matemático es traducible a una expresión en lenguaje natural. Conforme la complejidad de los conceptos matemáticos cambia, también cambia nuestra capacidad para traducir al lenguaje natural los enunciados matemáticos.

Esta confusión se puede dar porque existen enunciados matemáticos que son fácilmente traducibles como $x \in A$ pero es más difícil traducir $p = (x, y) | p \in x^2 + y^2 = 1$, esta expresión puede traducirse de varias formas, como *p es un punto de circunferencia de radio uno* o *p es una dupla de números que están en el conjunto de puntos de la circunferencia unitaria*; mientras que la primera traducción se acerca más a un punto de vista desde la geometría analítica, la segunda es más conjuntista. Esto parece indicar que una expresión cambia de traducción al lenguaje natural de acuerdo a la disciplina matemática que estemos estudiando.

Otro ejemplo son los números negativos, así aunque expresemos naturalmente *menos tres* este concepto es carente de sentido aunque conozcamos los números negativos, necesitamos tanto el contexto como el concepto de los números negativos. Sin el contexto, la expresión *menos tres* puede expresar tanto un número negativo como una resta. Cuando expresamos matemáticamente -3 solo necesitamos el concepto de número negativo o el de números enteros y la expresión matemática, en el ejemplo el símbolo $-$ parece tener un valor epistémico importante. Con esto quiero mostrar que la traducción al lenguaje natural depende tanto de la expresión matemática como del concepto que expresa.

El siguiente ejemplo que exploraré es un ejemplo híbrido entre matemáticas y su aplicación. Cuando se estudian circuitos que involucran capacitores y bobinas eléctricas se utilizan diversas técnicas matemáticas; en estos circuitos es de especial interés la frecuencia f y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, en el análisis matemático que se hace de estos circuitos tanto f como ω pueden adquirir valores negativos, sin embargo esto carece de sentido, tanto en términos físicos como en lenguaje natural. En (LePage 1980) explica lo siguiente con respecto a los valores negativos de f y ω :

Entonces ¿Cuál es el significado de ω y f cuando se convierten en números negativos? “No es posible una interpretación física” ya que la frecuencia es por definición los ciclos o radianes por segundo (LePage 1980, Pag. 10). Énfasis mío.

En este ejemplo ω aparte de denotar un concepto, también influye en la concepción del mismo, siendo difícil o imposible traducirlo a otros lenguajes fuera del ámbito del análisis matemático en el que se presentan estos circuitos. Desde mi punto de vista tratar de traducir y entender el concepto de *menos frecuencia* al lenguaje natural o que la frecuencia adquiere valores negativos es complicado, porque no hay una forma de correlacionar este concepto con alguna interpretación física.

Con estos ejemplos quiero sugerir que los símbolos $-$, f y ω cumplen varios propósitos y no son simples símbolos o convenciones, también transmiten información sobre los conceptos que estamos utilizando, en los tres casos estos símbolos transmiten el concepto de números negativos y en el caso de f y ω los conceptos de radianes y números reales.

Un último punto que tocaré en este apartado es que asumir que los símbolos matemáticos son una variedad del lenguaje natural, haría que estos se convirtieran en un supralenguaje equivalente a todos los lenguajes naturales en los que se practican las matemáticas.

2.2. El lenguaje matemático es importante o participa en el resultado de una operación. Los problemas filosóficos de los números

La concepción de que el lenguaje es inocuo a los resultados viene dada, desde mi punto de vista, porque consideramos que si los lenguajes tienen algunas funciones parecidas, pensamos que estos lenguajes son isomorfos, iguales o creemos que deter-

minan un mismo objeto. El isomorfismo lo garantizamos a partir de funciones parecidas, sobre todo si éstas son epistémicas, despreciando aquellas que son diferentes o minimizando el papel que el acceso epistémico, o de otro tipo, desempeña.

En esta sección utilizaré a los numerales o números romanos e indoarábigos para criticar la noción de "I".

Consideramos que $III = 3$ ó $V = 5$ pero ¿Qué tanto la propiedad epistémica de contar hace ontológicamente iguales a los numerales o los sistemas de numeración?

Esto habla más bien de un interés epistémico en común o similar, más que de un mismo objeto. En este sentido, decir que los numerales romanos e indoarábigos sean isomorfos, iguales o que denoten el mismo objeto es equivalente a decir que dos especies biológicas son iguales solo porque cumplen la misma función. Con esta analogía quiero destacar el siguiente punto:

Tal vez, las propiedades, tanto epistémicas como de otro tipo, sean necesarias para determinar si dos o más lenguajes denotan un mismo objeto o son isomorfos matemáticamente, pero no es claro que éstas sean suficientes para hacerlo. En el caso de los números, la propiedad epistémica de contar es la propiedad por la cual llegamos a conocer a los números (Robles 1993, Cap. II) y gracias a esta propiedad se considera que los numerales romanos e indoarábigos se refieren al mismo objeto; sin embargo, en mi opinión, esto es insuficiente.

Una manera de justificar que, aunque los numerales cambien hablamos del mismo objeto, es decir que los objetos tienen propiedades numéricas, pero esto nos lleva a otro problema, ¿cómo estamos seguros de que los números son una propiedad de los objetos o que el contar es una propiedad derivada de ellos?

Un problema con decir que son los objetos los que tienen las propiedades numéricas es que, para algunos autores, la designación de un objeto es lo que nos permite contar dicho objeto, así el contar es una habilidad derivada de reconocer un objeto más que del objeto mismo (Robles 1993, Cap. II). Aunque pueda percibir varios objetos, es muy poco probable que los pueda contar sin que antes reconozca los objetos o que reconozca que son objetos individuales. Sin el concepto de hoja, me sería difícil contar las hojas de una planta y sin el concepto de objeto, unidad o cosa tampoco puedo contar la diversidad. Así decir que los objetos tienen propiedades numéricas o que estos me permiten o aseguran el contar, me lleva al problema filosófico entre percibir un objeto vs reconocer un objeto.

Por otro lado, asegurar que los numerales son iguales porque contar es una habilidad propia de los humanos o de los animales que nos está dada, tiene el problema de que la habilidad del contar parece depender de que haya una manera de denotar los números y que ésta está ligada además a necesidades específicas, al parecer epistémicas y sociales, como la economía (Cruz 2008). Esto sugiere que es el lenguaje, aunado a una necesidad, lo que permite el reconocimiento de los números y con ello el contar. El reconocimiento de los números depende de un proceso híbrido entre el lenguaje, parte externa, y la cognición humana, parte interna (Cruz 2008). Sin el lenguaje, la habilidad para contar se ve mermada.

Dado lo anterior es difícil argumentar que la igualdad de distintos sistemas de números viene dada por la naturaleza de los objetos y tampoco se puede justificar como una habilidad dada, o innata, de los humanos. Es en las grandes sociedades organizadas y con necesidades económicas que se desarrollan los lenguajes (Cruz 2008). Estas necesidades parecidas crean soluciones parecidas, sin embargo tampoco podemos decir que son iguales sin hacer un análisis matemático profundo, intuir y probar matemáticamente son cosas diferentes.

Otro argumento que se puede dar a favor de "I" es decir que los lenguajes mantienen la ontología de los objetos matemáticos aunque los lenguajes cambien sus propiedades epistémicas o procedimentales, sin embargo las notaciones pueden cambiar la ontología de los objetos matemáticos. Siguiendo con nuestro ejemplo de comparar numeraciones, existe una diferencia ontológica importante entre los sistemas posicionales, indoarábigos, de aquellos que no lo son, romanos. Por ejemplo, la forma en que representamos los números indoarábigos incide en nuestra capacidad de pensar en ellos como inacabables, en cambio, en otros sistemas de numeración la idea es menos obvia (Gardiner 2002, Cap. II.5) o está oculta; y en algunos otros sistemas de numeración contamos con un límite para contar. Así, la idea de que los números naturales \mathbb{N} son infinitos tiene que ver con la forma en que funciona el lenguaje, con lo cual estamos ante dos conjuntos distintos: en el caso de los números romanos estamos ante un conjunto finito, (inicialmente los romanos sólo podían representar hasta el cien mil (Ore 1948, Cap. 1) (Ifráh 2000, Cap. 16)); mientras que en el caso de los números indoarábigos estamos ante un conjunto potencialmente infinito (Gardiner 2002, Cap. II.5).

Una de las razones para aceptar la independencia de los objetos matemáticos es la suposición de que sólo importan los resultados y no las operaciones. Sin embargo las diferencias de notación pueden cambiar el desarrollo matemático de una disciplina, y con ello las propiedades epistémicas del lenguaje utilizado.

Las operaciones aritméticas en los números o numerales indoarábigos pueden ser reducidas a la implementación de un proceso que es bastante repetitivo. Un ejemplo de esto es que podemos sumar cantidades diferentes con la misma operación, como lo es $50 + 20 = 70$ en esta suma la única operación que realizamos es $5 + 2 = 7$, en las notaciones posicionales la suma puede ser simplificada a unas cuantas operaciones básicas, así sumar $5931 + 1248$ puede dividirse en cuatro sencillas sumas, $5 + 1$, $9 + 2$, $3 + 4$, $1 + 8$, cualquier suma puede ser dividida a la operación de sumar solo aquellas cantidades que tienen la misma posición. En el caso de la resta se sigue el mismo procedimiento, solo tenemos que restar las cifras que tienen la misma posición $5931 - 1248 = 5 - 1$, $9 - 2$, $3 - 4$, $1 - 8$ (Gardiner 2002, Cap. II.5). El caso de la resta es menos evidente, ya que muchas veces tenemos un problema de restar cantidades en las cuales el primer operador es menor, en ese caso lo que se hace es aumentar la base del operador y disminuir en uno la siguiente cifra superior o aumentar en uno la cifra inferior $5931 - 1248 = 5 - 1$, $8 - 2$, $12 - 4$, $11 - 8$ ó $5931 - 1248 = 5 - 1$, $9 - 3$, $13 - 5$, $11 - 8$, este proceso solo se puede realizar si existe una cifra a la izquierda que se pueda modificar, en general $n - m$ es válida *sii* $n > m$ y parece ser algo exclusivo de los sistemas posicionales.

En el caso de los números romanos las operaciones aritméticas son mucho más cercanas a lo que ahora conocemos como

manejo de cadenas. Así, la suma de $XXIII + XV$ se realiza juntando los caracteres de ambos números $XXIII XV$ y después arreglando de mayor a menor los números $XXIII XV = XXVIII$; en caso de que alguna cifra se pueda convertir a su equivalente sustractivo se realiza dicha conversión $VII + II = VIII = IX$. Existe un caso especial, el de las cifras sustractivas, que se soluciona de dos formas, convirtiéndolas a las unidades anteriores $IV = IIII$ o se ponen en un lugar especial y se observa si puede quitarse el elemento sustractivo $IV + I = V$ (Detlefsen, Erlandson, Heston y Young 1976).

Las operaciones de resta se realizan quitando o cancelando cadenas, se comparan las cadenas de números y aquellas cadenas iguales se eliminan, el proceso sigue hasta que alguna de las dos cadenas de números se agote. Siguiendo con el ejemplo $XXIII - XV = [\cancel{X}XXIII][\cancel{X}V] = [XIII][V]$, en estas cadenas de números romanos todavía podemos cancelar elementos de las mismas, ya que $X = VV$ así continuamos con el proceso $[\cancel{X}VIII][\cancel{X}] = [VIII]$ dando como resultado de la operación $XXIII - XV = VIII$ (Detlefsen, Erlandson, Heston y Young 1976). De haber elementos sustractivos antes de realizar la resta se convierten a los símbolos anteriores para poder realizarla y el resultado también se convierte en un elemento sustractivo en caso de requerirlo. Una observación importante es que en el caso de la resta de numerales romanos, el orden de los números queda sin importancia, ya que solo es necesario que una de las cadenas quede vacía; en el caso de los números romanos parece ser que $XXIII - XV = XV - XXIII = [\cancel{X}V][\cancel{X}XXIII] = [\cancel{X}][\cancel{X}VIII] = VIII$. El único resultado inválido que podemos obtener es si $n = m$, ya que no hay numeral romano para el cero.

En sí, la diferencia es pequeña, ya que ambos sistemas pueden reproducir la operación aritmética de la resta, sin embargo esta operación puede ser la razón por la cual el sistema de numeración indoarábigo llevó a la implementación de los números enteros. Es probable que la notación sí esté interviniendo el resultado, ya que al tratar de resolver las operaciones inválidas el concepto de número negativo se hizo presente (Cruz y Smedt 2013).

Quiero añadir a estas diferencias, la diferencia más comentada de los números romanos e indoarábigos, el número cero 0. Con el número cero, se ha hecho *vox pópuli* decir que éste determina sistemas de numeración más desarrollados. Pero más allá de repetir un referente conocido, quiero explorar lo que el cero aporta a los sistemas de numeración y las dificultades que presenta para considerar isomorfos a dichos sistemas.

El cero tiene propiedades distintas a las de los otros números naturales, esto hace que sea más difícil aprender el concepto de cero 0 que el resto de los números naturales (Cruz y Smedt 2013), esto supone que el cero es un concepto complicado, y sin la notación necesaria, dicho concepto difícilmente se desarrolla; tal vez es por esto que el cero es un elemento que a veces está ausente de los sistemas de numeración, como en el caso romano.

Como se mencionó anteriormente, una de las razones para sostener "I" es que el lenguaje poco interviene en los resultados de una operación y éstas se pueden despreciar siempre y cuando el resultado sea el mismo; el caso del cero muestra que las operaciones cambian y en ese caso, las diferencias pasan de ser despreciables a ser diferencias que deben tomarse en cuenta cuando tratamos de hacer isomorfos o iguales a los sistemas de numeración; en este caso a los números romanos e indoarábigos.

Una de las primeras operaciones y/o propiedades nuevas que adquieren los números naturales cuando se añade al cero como un número natural es la posibilidad de contar la nada o el conjunto que está vacío \emptyset ; además la suma adquiere la propiedad del neutro aditivo $a + b = a$. Con estas dos propiedades diferentes la pregunta es ¿Cómo consideramos iguales a sistemas con propiedades diferentes? La igualdad, isomorfismo o denotación de un mismo objeto matemático parece ser más una posición filosófica que un estudio de los sistemas numéricos. Analizando los puntos anteriores, es difícil argumentar que es una propiedad de los objetos, percibir vs reconocer; tampoco se puede considerar algo dado a los animales o a la especie, ya que depende del lenguaje y las actividades humanas; las propiedades epistémicas y de desarrollo matemático cambian; y sobre todo un cambio de notación puede hacer que la misma concepción de los números, en términos ontológicos cambie.

Continuando con los cambios que sufren los sistemas de numeración cuando agregamos el numeral cero, tenemos distintas reconstrucciones que se hacen de los números naturales y, en algunos casos, las reconstrucciones que incluyen el cero parecen ser incompatibles entre ellas mismas.

Las reconstrucciones más conocidas son las de von Newman y la de Zermelo, en ellas se utiliza la teoría de conjuntos para explicar cómo se generan los números. Ambas reconstrucciones empiezan de la misma manera, la de von Newman $0 = \emptyset, 1 = \{0\} = \{\emptyset\}$ y la de Zermelo $0 = \emptyset, 1 = \{0\} = \{\emptyset\}$; pero una vez superados los primeros números difieren sustancialmente ya que los números se generan en von Newman de la siguiente manera $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$; mientras que la de Zermelo continúa de la siguiente manera $2 = \{\{\emptyset\}\}, 3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$ (Benacerraf 1965).

En el trabajo de (Benacerraf 1965) se sugiere que estas reconstrucciones son incompatibles ya que tienen diferentes propiedades; en la reconstrucción de von Newman tenemos que $2 \in 5$; mientras que en la de Zermelo se da que $2 \notin 5$. El comportamiento de los numerales romanos es más cercano a la reconstrucción de von Newman ya que $II \in V$ porque $V = IIIII$.

Para asegurar que estamos ante el mismo objeto tendríamos que probar antes lo siguiente:

$$n \in \mathbb{N}, n = \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots \quad \& \quad z \in \mathbb{N}, z = \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots \quad \& \quad r \in \mathbb{N}, r = I, II, III, \dots \quad \& \quad n = z = r$$

Sin embargo, como mencioné anteriormente, parece ser que $n \neq z$ por lo que existe la posibilidad de que $n \neq r, z \neq r$ dejándonos sin un criterio para declarar un isomorfismo.

Para finalizar examinaré la posibilidad de que exista un sistema generador más primitivo que permita explicar las diferencias entre las diferentes reconstrucciones de los números naturales y sus representaciones. Quienes quieran sostener esto, deben responder antes a algunos cuestionamientos.

En primer lugar se debería saber si existe un sistema primitivo que pueda dar cuenta de todas y cada una de las reconstrucciones matemáticamente hechas y sus lenguajes utilizados, y después probar que dichas reconstrucciones, así como los lenguajes utilizados son isomorfos o equivalentes. Sin embargo existe la posibilidad de que aunque el sustrato exista, si es que

existe, las reconstrucciones sean diferentes.

Un ejemplo de esto son los lenguajes de computadora. En la computación existen diferentes lenguajes de computadora con los cuales se crean programas para la computadora y muchos lenguajes de programación pueden crear programas para la misma computadora, siendo éste el equivalente al sustrato generador o al sistema primitivo generador. Pero este hecho tampoco permite declarar a los lenguajes de programación isomorfos o iguales, aunque para el fin último, los lenguajes de programación sean indistinguibles.

Los lenguajes de computadora son utilizados según las necesidades del programador para que el programa resultante tenga distintas propiedades de acuerdo a ciertas necesidades del mismo programa. Así, aunque un programa se pueda realizar con dos lenguajes diferentes se escoge uno de acuerdo a lo que se necesite del programa. Del mismo modo parece ser que sucede en matemáticas, aunque el sustrato generador, o el lenguaje primitivo, de los números naturales existiera y permitiera dar cuenta de las diferencias de los lenguajes y símbolos utilizados, esto es insuficiente para declarar iguales a los sistemas aunque reproduzcan los usos comunes de los números o sistemas de numeración, como el contar. Del mismo modo en que el experto de computación utiliza y considera diferentes a los lenguajes de computadora, los expertos en matemáticas, así como los filósofos de las matemáticas, deberíamos ser más cautos al declarar la igualdad o isomorfismo de los sistemas de numeración, ya que estos tienen diferentes propiedades, tanto epistémicas como ontológicas y si bien pueden considerarlas así para el uso común, el contar, el experto necesita más que una propiedad para trabajar y considerar la igualdad como un hecho consumado.

Desde mi punto de vista, siempre y cuando excluyamos el cero, las únicas propiedades de los números o sistemas de numeración que son equivalentes son el contar y la suma, así como sus propiedades derivadas; pero una vez incluyendo el cero, también esas propiedades son puestas en duda. Son con estas propiedades con las que hemos declarado el isomorfismo de los números, sistemas de numeración o numerales. Sin embargo existe la posibilidad de que estemos ante distintas soluciones de algunas necesidades epistémicas básicas y que este hecho nos haya bastado para decretar la igualdad o isomorfismo de los sistemas de numeración.

2.3. El problema del *presentismo*

Cuando se estudia la historia de las matemáticas, existen dos formas de presentar estos trabajos; el *anticuarismo* que es la presentación de los trabajos con una notación lo más cercana posible a la desarrollada en los momentos en que se hizo un trabajo matemático; y el *presentismo*, que es la presentación de la notación como se utiliza actualmente (Barabashev 1997); algunos estudiosos consideran que las dos formas de presentar dicha notación son equivalentes o que dejan intacto el trabajo realizado por los matemáticos de aquella época (Barabashev 1997) (Cruz y Smedt 2013) (Muntersbjorn 2003). En este trabajo también se ha hecho uso de la notación presentista para analizar algunos puntos del tema. Creo que si bien se utiliza la notación presentista por razones prácticas, ya que los símbolos matemáticos pueden representar una carga cognitiva importante (Cruz y Smedt 2013), esto es insuficiente para declarar que ambas notaciones son equivalentes y con ello establecer también la postura de "I".

El cómo representar un sistema matemático es un problema si se necesita realizar un estudio matemático histórico, ya que la notación del momento en que se creó el desarrollo matemático puede diferir notablemente de la actual. (Barabashev 1997), hace un análisis de las ventajas y desventajas de la forma de presentar un lenguaje matemático, tanto presentista como anticuarista, sin embargo ambas posturas hacen nimias las diferencias que pueden producirse por cambiar las notaciones de un lenguaje matemático, la pregunta es ¿Estamos ante una petición de principio o ante una postura filosófica fuerte?

El mismo trabajo de Barabashev sugiere que se está ante una postura filosófica fuerte, a lo largo del texto sostiene que el ser un historiador presentista viene ligado a sostener una postura realista y tal vez platónica de las matemáticas (Barabashev 1997), y con ello la suposición de "E", "A", e "I". Sin embargo suponer y probar en matemáticas son cosas distintas, como lo mostró la suposición de que la geometría euclídea era la única geometría posible. Esto es de particular importancia porque podemos caer en el error histórico y crear una historia a modo o Wigh de las matemáticas, con las cuales se justifique la posición realista/platónica.

En los trabajos de Muntersbjorn, podemos observar que sí se pueden cambiar las propiedades de los procedimientos y objetos matemáticos cuando se introduce una notación moderna (Muntersbjorn 1999). Quiero hacer notar que un cambio de notación puede, en el mejor de los casos, cambiar algunas de las propiedades de un método u objeto matemático, como el rango en el cual es válido; y en el peor, darle propiedades epistémicas y ontológicas que no tenía.

Un problema del presentismo y de utilizar las notaciones actuales es que esto puede influir en la concepción de que las matemáticas actuales están ligadas con las prácticas anteriores, un presentismo mal llevado puede ocultar los grandes golfos que hay entre las prácticas, posiciones filosóficas y los logros matemáticos de la antigüedad (Muntersbjorn 2003). Creo que ésta es una de las razones por las cuales se ven igualdades o isomorfismos en donde probablemente no existan y se declaren iguales prácticas matemáticas hechas con distintas notaciones, como representar una ecuación mediante lenguaje natural con los sistemas de Viète y Descartes sin antes analizar con profundidad las implicaciones y alcances de estos sistemas.

Creo que el presentismo nos permite realizar un análisis abductivo de la historia y conceptos matemáticos, sin embargo el hecho de que lo podamos realizar no indica que podamos hacer el mismo procedimiento deductivo-inductivo y con ello equiparar y postular la posición realista/platónica.

Si bien el presentismo es una herramienta didáctica, esto no lo hace garante o justificación para sostener "I". Creo que muchas de las objeciones que he presentado en este trabajo vienen derivadas de un presentismo mal llevado o de una interpretación errónea de los procedimientos matemáticos debido a que suponen que las prácticas matemáticas actuales son las mismas o muy parecidas a las que antiguamente se realizaban.

3. Conclusiones

Presentaré a continuación las conclusiones de mi trabajo:

1. El lenguaje matemático parece estar ligado a los conceptos matemáticos que se desarrollan con él, interviniendo en el resultado del mismo, dándole posibilidades de expansión y haciéndolo epistémicamente relevante.
2. El lenguaje puede implicar posiciones ontológicamente relevantes. Distintos lenguajes pueden ser mutuamente excluyentes ontológicamente hablando, v. gr. finito vs infinito.
3. Los símbolos matemáticos parecen ser más que un apócope de otros conceptos, ya que llevan información relevante y participan de la epistémia matemática, como mencioné anteriormente, y puede ser erróneo considerar al lenguaje matemático un equivalente del lenguaje natural, ya que puede haber conceptos intraducibles en los dos lenguajes y además, se haría del lenguaje matemático un supralenguaje que estaría encima de todos los lenguajes naturales.
4. Un presentismo mal llevado puede suponer que existen conexiones epistémicas y de procedimientos que quedan fuera del planteamiento original del lenguaje y símbolos matemáticos. Además de que existe la posibilidad de que estemos imponiendo propiedades epistémicas y ontológicas que los autores originales nunca sostendrían.
5. Puede ser que el isomorfismo, igualdad o denotación de un mismo objeto se dé más por la postura propia del filósofo/historiador/practicante matemático, que por un estudio exhaustivo de los objetos en cuestión y queda poco claro que aquellas propiedades con las cuales decretamos este isomorfismo, sean las determinantes o las que nos permitan justificar plenamente dicho isomorfismo.

De las siguientes conclusiones parece ser que se responden afirmativamente las preguntas que planteo como problemas de "I":

- ¿Hacemos una historia a modo de las matemáticas aceptando "I"? Existe la posibilidad de que la posición filosófica altere la historia de las matemáticas.
- ¿Alteramos las propiedades de los objetos? Podemos cambiar las propiedades epistémicas de un objeto así como los procedimientos que de éste se derivan.
- ¿Aceptar "I" no provocará que cambiemos la naturaleza de los objetos matemáticos o que entendamos las propiedades que tienen incorrectamente? Sí existe la posibilidad de que las propiedades ontológicas cambien o de que estemos ante objetos diferentes. Como el hecho de que los sistemas de numeración cambian la propiedad de ser contables finitamente, a infinitamente contables \mathbb{N} , e incluso si desarrollamos más a infinitamente incontables o innumerables, como lo son los números reales \mathbb{R} .

Añadiré que, si el realismo/platonismo tiene razón, este mundo sería muy triste ya que si la igualdad o el isomorfismo se dan solo porque se cumplen las mismas necesidades; una sopa instantánea fría sería igual a una buena cena, ya que ambas cumplen la misma función, la de satisfacer el hambre.

Agradecimientos

Agradezco a Jacobo Asse por su ayuda con las citas bibliográficas.

Referencias

- Barabashev, A. G. (1997). *In Support of Significant Modernization of Original Mathematical Texts (in Defense of Presentism)*. *Philosophia Mathematica*, tomo 5(1) págs. 21–41.
- Benacerraf, P. (1965). *What Numbers Could Not Be*. *Philosophical Review*, tomo 74(1) págs. 47–73.
- C. H. Edwards, J. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag.
- Cruz, H. D. (2008). *An Extended Mind Perspective on Natural Number Representation*. *Philosophical Psychology*, tomo 21(4) págs. 475–490.
- Cruz, H. D. y Smedt, J. D. (2013). *Mathematical Symbols as Epistemic Actions*. *Synthese*, tomo 190(1) págs. 3–19.
- Detlefsen, M., Erlandson, D., Heston, J. y Young, C. (1976). *Computation with roman numerals*. *Archive for History of Exact Sciences*, tomo 15(2) págs. 141–148. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00348497>.
- Gardiner, A. (2002). *Understanding Infinity The Mathematics of Infinite Processes*. Dover Publications, Inc.
- Ifrah, G. (2000). *The Universal History of Numbers*. Jon Wiley & Sons.

- LePage, W. R. (1980). *Complex Variables and the Laplace Transforms for Engineers*. Dover Publications, Inc.
- Linnebo, Ø. (2013). *Platonism in the Philosophy of Mathematics*. En Zalta, E. N., ed., *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Macbeth, D. (2012a). *Diagrammatic Reasoning in Frege's Begriffsschrift*. *Synthese*, tomo 186(1) págs. 289–314.
- Macbeth, D. (2012b). *Seeing How It Goes: Paper-and-Pencil Reasoning in Mathematical Practice*. *Philosophia Mathematica*, tomo 20(1) págs. 58–85.
- Muntersbjorn, M. M. (1999). *Naturalism, Notation, and the Metaphysics of Mathematics*. *Philosophia Mathematica*, tomo 7(2) págs. 178–199.
- Muntersbjorn, M. M. (2003). *Representational Innovation and Mathematical Ontology*. *Synthese*, tomo 134(1-2) págs. 159–180.
- Ore, O. (1948). *Number Theory and its History*. McGraw Hill.
- Robles, J. A. (1993). *Las ideas matemáticas de George Berkeley*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Shapiro, S. (1997). *Structure and Ontology*. Oxford University Press.