L'analyse axiomatique et l'attitude par rapport au risque - Axiomatic Analysis and Risk Attitude

Jean Baccelli *

Résumé

Cette note épistémologique porte sur le statut, en théorie de la décision, des concepts d'attitude par rapport au risque. À première vue, l'analyse axiomatique ne les exploite pas, ce qui reflète une certaine neutralité des modèles de décision au sujet de l'attitude par rapport au risque. Mais un examen plus poussé met en valeur la *variation conditionnelle* et le *renforcement* de l'attitude par rapport au risque, qui rattachent les concepts d'attitude par rapport au risque à l'analyse axiomatique.

This epistemological note examines the status of risk attitude concepts in decision theory. At first sight, axiomatic analysis does not rely on those concepts, which illustrates a certain neutrality of decision models regarding risk attitudes. Further analysis, however, highlights the importance of the *conditional variation* and the *strengthening* of risk attitudes, which establishes the axiomatic significance of risk attitude concepts.

Classification JEL : B41, D81

THEMA, Université de Cergy-Pontoise, 33 boulevard du Port, 95011 Cergy-Pontoise (jean.baccelli [at] gmail.com). L'auteur remercie de leurs commentaires un rapporteur anonyme, Mikaël Cozic, Éric Danan, Raphaël Giraud et tout particulièrement Michèle Cohen et Philippe Mongin. L'auteur est seul responsable, cependant, de toute erreur ou omission. Cet article a été préparé avec le soutien de l'École Normale Supérieure - Ulm (ANR-10-LABX-0087 IEC et ANR-10-IDEX-0001-02 PSL) puis de l'Université de Cergy-Pontoise.

1 L'analyse axiomatique de la décision dans le risque

Une branche de la théorie de la décision analyse le choix dans le risque. Elle se concentre sur les circonstances dans lesquelles un décideur fait face à des options lui offrant des perspectives aléatoires, mais de loi de probabilité connue, sur un ensemble de résultats possibles. Tel est le cas, par exemple, dans certains jeux de hasard (cartes, dés ou roulettes) et dans toute situation pouvant être comprise sur leur modèle. Il est notoire que cette partie de la théorie de la décision traite, notamment, d'*attitudes par rapport au risque*. Écrite dans la veine épistémologique, cette note examine, à la lumière de résultats déjà existants, la place que ces concepts occupent dans la théorie.

Dans le risque comme ailleurs, la théorie de la décision a pour objectif essentiel d'analyser les modèles de décision. Un modèle peut se résumer à une forme numérique d'évaluation des options. Il est attendu des théoriciens qu'ils la dissèquent en la caractérisant par un petit groupe de propriétés élémentaires, à savoir, par les propriétés des préférences d'un décideur qui l'appliquerait. Cela nécessite principalement de prouver un théorème de représentation montrant comment la forme numérique d'évaluation ne fait que refléter certains aspects structurels des préférences. Par là, la théorie de la décision relève essentiellement de la théorie du mesurage [1] et se consacre à un type d'analyse que l'on rattache, plus largement, à la méthode axiomatique [2]. L'*analyse axiomatique* permet de confronter les modèles de décision les uns aux autres : ils se comparent mal directement, mais leur traduction dans la langue commune de la préférence permet d'identifier ce qui les différencie véritablement.

On peut dès lors estimer que, pour la théorie de la décision, les propriétés de la préférence les plus importantes sont celles qui permettent de distinguer les uns des autres, par l'analyse axiomatique, les modèles de décision. Cette

1. Cf. par exemple Krantz *et al.* [1971] et les volumes ultérieurs de cette série.
2. L'affiliation mériterait d'être discutée en détail (cf. Mongin [2003]).

note se propose d'apprécier, suivant ce critère, le statut des concepts d'attitude par rapport au risque. Tout d'abord, nous en rappelons les définitions techniques. Puis nous rassemblons, dans un premier temps volontairement naïf de la discussion, des observations indiquant que l'analyse axiomatique n'exploite pas ces idées. Nous relevons notamment, à ce stade, que le partage fondamental entre *utilité espérée* et *utilité non-espérée* ne se laisse apparemment pas concevoir en termes d'attitude par rapport au risque. Nous constatons cependant, dans un second temps de la discussion, qu'une considération plus attentive des concepts en cause mène à d'autres observations : à deux titres au moins, l'analyse axiomatique s'appuie sur l'attitude par rapport au risque pour distinguer les uns des autres les modèles de décision. Ces observations mieux informées mènent à nuancer plutôt qu'à remettre en cause les précédentes, mais elles ouvrent de nouvelles perspectives théoriques.

2 L'analyse axiomatique sans l'attitude par rapport au risque ?

Cette note se placera dans le cadre mathématique suivant. On se donnera C, un intervalle réel fermé et borné. $\Delta(C)$ désignera l'ensemble des distributions de probabilité sur C ayant un support fini, δ_c renvoyant à la loi certaine en c. On appellera C l'ensemble des *résultats* et $\Delta(C)$ l'ensemble des *loteries*. On se donnera une relation de préférence $\succcurlyeq$ sur $\Delta(C)$, $\succ$ et $\sim$ renvoyant à la préférence stricte et à l'indifférence. On supposera que $\succcurlyeq$ est complète, transitive, continue dans la topologie de la convergence faible et qu'elle respecte [3] la dominance stochastique de premier ordre. Par une convention propre à cette note, on appellera *préférence classique* une telle relation. Les conditions ainsi retenues ne sont pas les plus générales. D'une part, la théorie de la décision se développe aussi relativement à un ensemble

3. On retiendra la définition stricte de cette propriété, qui implique la croissance stricte de la préférence dans les résultats : pour tous $c, c' \in C$, si $c > c'$, alors $\delta_c \succ \delta_{c'}$.

C quelconque, par exemple fini. D'autre part, quoique la plupart des modèles de décision renvoient à des types particuliers de préférences classiques, ce n'est pas le cas de tous [4]. Mais ces conditions suffiront pour notre discussion. Elles impliquent le fait suivant [5], qui aurait pu servir à les introduire : pour chaque loterie P, il existe un unique résultat c tel que $P \sim \delta_c$. On nommera c l'*équivalent certain* de P pour le décideur caractérisé par $\succcurlyeq$, ce que l'on symbolisera en écrivant $EC(P) = c$.

2.1 Les concepts d'attitude par rapport au risque

Rappelons d'abord les définitions techniques des attitudes par rapport au risque. Elles suivent toutes la même structure : il s'agit de spécifier un type de *réduction du risque* susceptible d'être offert au décideur et d'indiquer s'il y est favorable. La réduction du risque la plus intuitive est *totale* et on dira qu'elle est offerte au décideur s'il a le choix entre une loterie P et son espérance mathématique, notée $E(P)$. Considérant une telle réduction du risque, on dit [6] d'un décideur qu'il a de l'*aversion faible pour le risque* si, pour toute loterie P, $\delta_{E(P)} \succcurlyeq P$. Inversant la direction de la préférence, on obtiendra la définition du *goût faible pour le risque* et l'on parlera de *neutralité par rapport au risque* si c'est l'indifférence qui prévaut. Comme l'on suppose classique la préférence, on aurait ici pu introduire ces idées en comparant l'espérance mathématique et l'équivalent certain de P, puisque $\delta_{E(P)} \succcurlyeq P$ si et seulement si $\delta_{E(P)} \geq EC(P)$.

Ces attitudes sont qualifiées de *faibles* parce qu'elles sont relatives à une réduction du risque très particulière, car totale. Pour introduire les attitudes *fortes* par rapport au risque, il faut préciser ce que l'on considère comme

4. Les modèles de la décision motivée par le *regret*, par exemple, renvoient à des préférences intransitives donc non-classiques (cf. Fishburn [1982] et Loomes et Sugden [1982]).

5. Cela suit d'un théorème de Debreu [1964]. Une fonction d'équivalent certain n'est autre qu'un représentant particulier d'une fonction d'utilité continue sur $\Delta(C)$.

6. Nous nous conformons à la terminologie française de Cohen et Tallon ([2000], p. 640).

le cas général d'une réduction, potentiellement partielle, du risque. On dira que P est reliée à Q par une réduction *générique* du risque[7], ce que l'on symbolisera en écrivant $P\ RR_G\ Q$, si, énumérant le support de P comme $\{c_1, ..., c_n\}$, il existe des loteries $\{L_1, ..., L_n\}$ telles que :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} P(c_i) L_i \text{ avec } \ E(L_i) = c_i \text{ pour chaque } \ i = 1, ..., n. \tag{1}$$

Par exemple, $P = (\frac{1}{2} : 15, \frac{1}{2} : 5)$ est reliée à $Q = (\frac{1}{4} : 25, \frac{3}{4} : 5)$ de la manière définie, $L_1 = (\frac{1}{2} : 25, \frac{1}{2} : 5)$ et $L_2 = (1 : 5)$ permettant l'identification recherchée. La réduction *totale* du risque (RR_T) correspond au cas particulier où $P = \delta_{E(Q)}$, comme quand on compare Q à $P' = (1 : 10)$, la définition ci-dessus s'appliquant alors avec $L = Q$. Considérant le cas d'une réduction générique du risque, on dit d'un décideur qu'il a de l'*aversion forte pour le risque* si, pour toutes les loteries P et Q telles que $P\ RR_G\ Q$, $P \succcurlyeq Q$. On dira qu'il a du *goût fort pour le risque* ou qu'il est *neutre par rapport au risque*[8] s'il faut, dans l'énoncé précédent, inverser la direction de la préférence ou la remplacer par l'indifférence. Des définitions alternatives en termes d'équivalents certains auraient là aussi été envisageables, puisque $P \succcurlyeq Q$ si et seulement si $EC(P) \geq EC(Q)$.

Entre le cas générique et le cas d'une réduction totale du risque, plusieurs spécifications intermédiaires sont envisageables. Nous n'en considérerons ici qu'une, qui revient à imposer que la réduction du risque soit *monotone* (RR_M). Techniquement, elle requiert que, de deux loteries reliées par une réduction générique du risque, les intervalles inter-quantiles de celle qui est la moins risquée soient tous plus courts que ceux de l'autre[9].

7. Nous autorisant à réécrire les loteries suivant le principe de l'identification des loteries simples et composées, nous introduisons ici, sous une forme élémentaire, le concept fondamental d'*étalement à moyenne constante*, dû à Rothschild et Stiglitz [1970].

8. Il est superflu de relativiser la neutralité par rapport au risque aux différents types de réduction du risque au sens où, par transitivité de $\succcurlyeq$, toutes les variantes sont équivalentes.

9. Pour chaque loterie P, soit $F_P : \mathbb{R} \to [0, 1]$ sa fonction de répartition et $F_P^{-1} :]0, 1[\to \mathbb{R}$ sa fonction de répartition inverse généralisée. On dira que $P\ RR_M\ Q$ si $P\ RR_G\ Q$ et si, pour tout $0 < p < q < 1$, $F_P^{-1}(q) - F_P^{-1}(p) \leq F_Q^{-1}(q) - F_Q^{-1}(p)$. Ce type

Par exemple, reprenant les loteries P et Q précédentes, on vérifie que P n'est pas moins risquée que Q en ce sens là, mais qu'elle le serait relativement à $Q' = (\frac{1}{2} : 20, \frac{1}{2} : 0)$ (la définition générique s'appliquant alors avec $L_1 = (\frac{3}{4} : 20, \frac{1}{4} : 0)$ et $L_2 = (\frac{1}{4} : 20, \frac{3}{4} : 0)$). Considérant le cas d'une réduction monotone du risque, on dira, par une convention propre à cette note, qu'un décideur a de l'*aversion modérée pour le risque* si, pour toutes les loteries P et Q telles que $P\ RR_M\ Q$, $P \succcurlyeq Q$. Inversant la direction de la préférence dans l'énoncé précédent, on définira le *goût modéré pour le risque*.

Toutes ces définitions forment un groupe de concepts reliés de manière systématique. Deux remarques l'illustreront. Premièrement, comme elles concernent plusieurs types de réduction du risque dont les uns sont des cas particuliers des autres, les diverses formes d'aversion ou de goût pour le risque sont reliées du point de vue logique. Un décideur averse au risque au sens fort, par exemple, doit aussi l'être au sens modéré et au sens faible. Cependant, nous y reviendrons, les réciproques ne valent pas en général : un décideur peut favoriser les réductions totales du risque sans en favoriser toutes les réductions partielles. Deuxièmement, on dit qu'il s'agit de concepts d'attitude d'*absolue* car l'on peut définir un concept d'attitude *comparative* par rapport au risque, qui aurait pu servir à les introduire et les excède en généralité. Dans les conditions particulières retenues ici [10], on dira que le décideur D est *plus averse au risque que* le décideur D' si pour toute loterie P, $EC_D(P) \leq EC_{D'}(P)$. S'agissant de chaque type de réduction du risque, un décideur manifestant de l'aversion ou du goût pour le risque n'est autre qu'un décideur plus ou moins averse au risque qu'un décideur neutre à ce sujet. Cependant, nous y reviendrons aussi, un décideur pourra être plus ou moins averse au risque qu'un autre alors que ni l'un ni l'autre ne manifeste aucune des attitudes absolues précédemment répertoriées. C'est en ce sens

de réduction du risque admet d'autres définitions équivalentes à celle retenue ici, cf. par exemple Chateauneuf *et al.* ([1997], p. 29).

10. On peut définir l'attitude comparative par rapport au risque dans des conditions beaucoup plus générales, cf. Yaari [1969] et à sa suite Bommier *et al.* ([2012], s. 3).

que le concept comparatif est plus général que les concepts absolus.

2.2 L'apparente neutralité des modèles de décision au sujet de l'attitude par rapport au risque

À première vue, l'analyse axiomatique n'exploite pas les idées précédentes. C'est ce que suggèrent les théorèmes de représentation traditionnels de la théorie de la décision dans le risque. Ils peuvent être présentés en deux temps. Un premier temps est commun : il s'agit de construire une représentation numérique générale, comme dans le certain. Cette étape est ici acquise, puisque si $\succcurlyeq$ est classique, il existe[11] une fonction $v : \Delta(C) \to \mathbb{R}$, continue et croissante dans C, telle que l'on vérifie :

$$P \succcurlyeq Q \Leftrightarrow v(P) \geq v(Q), \ \ \forall P, Q \in \Delta(C). \tag{2}$$

Une fonction d'équivalent certain est, par exemple, un représentant de v. Un second temps précise la forme de v propre à chaque modèle de décision. La détermination la mieux connue est celle de *l'utilité espérée* : la fonction v est alors linéaire dans les probabilités, c'est-à-dire telle que pour tous $P, Q \in \Delta(C)$, tout $\alpha \in [0,1]$, $v\left[\alpha P + (1-\alpha)Q\right] = \alpha v(P) + (1-\alpha)v(Q)$. Pour cela, il faut ajouter aux propriétés classiques de la préférence le respect de l'indépendance au sens de von Neumann et Morgenstern (VNM) : pour tous $P, Q, R \in \Delta(C)$, pour tout $\alpha \in]0,1]$, $P \succcurlyeq Q$ si et seulement si $\alpha P + (1-\alpha)R \succcurlyeq \alpha Q + (1-\alpha)R$. La plupart des autres modèles de la décision dans le risque, ceux de *l'utilité non-espérée*, reposent sur des affaiblissements logiques du respect de l'indépendance VNM. Il peut être restreint aux cas où $R = P$ et $R = Q$, ce qui correspondra à la propriété d'*intermédiarité*, illustrée par le modèle de *l'aversion à la déception*[12]. Il peut aussi être res-

11. Le respect de la dominance stochastique de premier ordre n'intervient pas dans l'établissement de ce résultat là.

12. Cf. Gul [1991]. S'agissant de la propriété d'intermédiarité (*betweenness* en anglais) en général, cf. par exemple Chew [1989].

treint aux cas où la combinaison avec R préserve le rang que le décideur attribue par sa préférence aux résultats de P et de Q, ce qui correspondra à l'affaiblissement *co-monotone* de l'indépendance VNM, illustré par le modèle de *l'utilité dépendante du rang*[13]. Parmi beaucoup d'autres[14], ces deux généralisations sont celles qui ont été le plus explorées dans la littérature.

Cette seconde étape des théorèmes de représentation est cruciale au sens où elle doit faire apparaître ce qui différencie les modèles de décision. Or, les concepts d'attitude par rapport au risque n'y apparaissent manifestement pas[15]. Ce fait ne paraît pas susceptible d'être modifié dans d'autres axiomatisations équivalentes, car il ne semble pas y avoir de liaison systématique entre telle ou telle attitude par rapport au risque et tel ou tel modèle de décision. Certes, il y a bien une implication nette. Si un décideur aux préférences classiques est neutre par rapport au risque, alors il suit la règle de l'utilité espérée[16] - ce qui veut aussi dire, par contraposition, qu'un décideur qui s'éloigne de l'utilité espérée ne saurait être neutre par rapport au risque. Mais la réciproque n'est pas valable, puisque l'on sait assez qu'un décideur appliquant la règle de l'utilité espérée peut, par exemple, être averse au risque. Par ailleurs, aucun modèle classique de la décision dans le risque n'impose quelque attitude par rapport au risque que ce soit, au sens où tous s'accommodent de préférences ne tombant dans *aucune* des catégories absolues précédemment répertoriées[17].

Le décalage entre les attitudes par rapport au risque et le registre de

13. Cf. par exemple Chateauneuf [1999], pour ce modèle et l'affaiblissement comonotone.

14. Cf. par exemple Cerreia-Vioglio *et al.* [2015] pour une proposition récente qui ne se réduit ni à l'une, ni à l'autre des deux généralisations mentionnées.

15. Si l'analyse axiomatique de la décision dans le risque ne fait pas explicitement intervenir l'attitude par rapport au risque, celle de la décision dans l'*incertain* met en avant l'*attitude par rapport à l'incertain* (cf. par exemple Cerreia-Vioglio *et al.* [2011]).

16. On vérifie alors que $P \succcurlyeq Q$ ssi $E(P) \geq E(Q)$ ssi $E(\alpha P+(1-\alpha)R) \geq E(\alpha Q+(1-\alpha)R)$ ssi $\alpha P+(1-\alpha)R \succcurlyeq \alpha Q+(1-\alpha)R$, pour tout triplet $P, Q, R \in \Delta(C)$ et pour tout $\alpha \in]0,1]$.

17. L'affirmation est justifiée par les caractérisations des attitudes par rapport au risque dans les différents modèles de décision, cf. par exemple Chateauneuf *et al.* ([1997], s. 3.2). Précisons que les attitudes fortes par rapport au risque ont été caractérisées pour des préférences classiques en général, quel qu'en soit le modèle retenu (cf. Chew et Mao [1995]).

l'analyse axiomatique peut être illustré plus concrètement. On présente d'ordinaire le partage entre utilité espérée et utilité non-espérée à partir des paradoxes d'Allais (cf. Allais [1953]). On renvoie ainsi à certaines préférences qui semblent naturelles, mais qui ne respectent pas l'indépendance VNM : c'est pour pouvoir les intégrer que les modèles de l'utilité non-espérée explorent ses affaiblissements logiques. Les *préférences paradoxales*, comme nous les nommerons, sont censées illustrer ce que l'utilité espérée a de restrictif. Si les attitudes par rapport au risque jouaient un rôle axiomatique crucial, on devrait donc pouvoir leur rapporter les préférences paradoxales, qui sont rappelées ci-après.

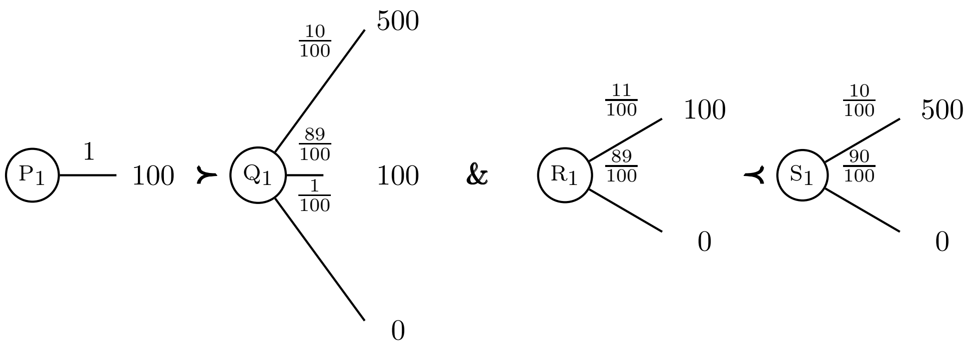

FIGURE 1 – LE PREMIER PARADOXE D'ALLAIS

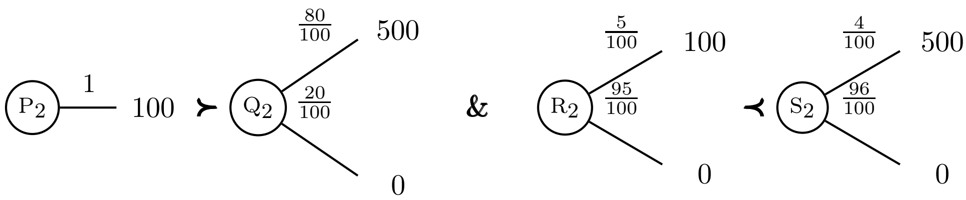

FIGURE 2 – LE SECOND PARADOXE D'ALLAIS

Il ne semble y avoir que peu de liens entre les préférences paradoxales et les attitudes par rapport au risque. Certes, si $\succcurlyeq$ est classique, on vérifie que la préférence $P_1 \succ Q_1$ ou $P_2 \succ Q_2$ est incompatible avec n'importe quel type de goût pour le risque[18]. Mais l'observation est peu instructive dans la mesure

18. Prouvons-le pour le second paradoxe. Si tel n'était pas le cas, alors $Q_2 \succcurlyeq \delta_{E(Q_2)}$; or

où elle n'aborde pas le cœur du sujet, qui est *la conjonction de préférences* $P_1 \succ Q_1$ et $R_1 \prec S_1$ ou $P_2 \succ Q_2$ et $R_2 \prec S_2$. Or, pour ne mentionner que les deux cas extrêmes, une telle conjonction s'avère compatible tant avec le fait d'être fortement averse au risque, qu'avec celui de ne pas même être faiblement averse au risque [19]. Dès lors, quoique l'on veuille souvent décrire les paradoxes d'Allais en termes d'attitude par rapport au risque [20], la liaison, examinée relativement aux définitions techniques de référence, ne semble pas résister à l'examen.

Suivant l'interprétation la plus intéressante, ce décalage vis-à-vis du registre axiomatique indique que les modèles de décision sont *neutres* au sujet de l'attitude par rapport au risque. L'histoire de l'utilité espérée met ce point de vue en perspective. On peut rétrospectivement défendre que le modèle est apparu, en réaction au paradoxe de Saint Pétersbourg, pour autoriser l'aversion pour le risque tout autant que la neutralité par rapport au risque, et qu'une des avancées majeures permises par son axiomatisation a été de faire comprendre qu'il autorisait aussi le goût pour le risque [21]. Les attitudes par rapport au risque apparaissent ainsi comme divers *goûts* que chaque modèle de décision peut intégrer. Ces goûts comptent pour le micro-économiste car ils déterminent, par exemple, la demande d'assurance ou les choix de portefeuille. Ils concernent moins essentiellement le théoricien de la décision si l'on estime que, par-delà son intérêt pour les questions micro-économiques, sa tâche principale est d'analyser axiomatiquement le cadre des différents modèles de décision dans lesquels de telles questions peuvent être traitées.

$E(Q_2) = 400$ donc de $P_2 \succ Q_2$ il suivrait que $\delta_{100} \succ \delta_{400}$ - contredisant la croissance de $\succcurlyeq$.

19. Soit D, D', relevant du modèle de l'utilité dépendante du rang, et dont les préférences sont caractérisées par $u(c) = \sqrt{c}$, de pair avec $w_D(p) = 1 - \sqrt{1-p}$, $w_{D'}(p) = \frac{\sqrt{p}}{(\sqrt{p}+\sqrt{1-p})^2}$. Ils auront tous deux les préférences paradoxales mais (par Chew *et al.* [1987] et Chateauneuf et Cohen [1994]) D sera fortement averse au risque, D' ne le sera pas même faiblement.

20. Cf. par exemple Kahneman et Tversky ([1979], p. 267).

21. S'agissant du paradoxe de Saint Pétersbourg, cf. Seidl [2013]. La compatibilité entre le goût pour le risque et le modèle de l'utilité espérée, qui avait préalablement été niée par Marshall, a été soulignée dès Friedman et Savage [1948].

3 L'attitude par rapport au risque dans l'analyse axiomatique

Ces observations doivent être nuancées, car elles n'exploitent pas toutes les ressources offertes par les concepts d'attitude par rapport au risque.

Premièrement, repartons de l'idée d'équivalent certain, qui permet notamment de définir l'attitude comparative par rapport au risque. Il est naturel de s'intéresser, plus généralement, aux équivalents certains *conditionnels*[22]. On les notera $ECC(P,\ \cdot\ )$ et les déterminera ainsi : $ECC(P, R) = c$ si, pour un $\alpha \in [0, 1]$ et une loterie Q, $R = \alpha P + (1-\alpha)Q$ et $R \sim \alpha\delta_c + (1-\alpha)Q$. On considère désormais P comme l'une des composantes d'une loterie complexe R, l'équivalent certain conditionnel de P dépendant ainsi, en général, de la composante Q. Le respect de l'indépendance VNM interdit la variation avec Q, le nouveau concept d'équivalent certain se ramenant alors à l'ancien. Mais tel n'est pas le cas quand l'indépendance VNM n'est pas respectée.

Munis de cette nouvelle idée, revenons aux cas d'Allais. On parle aussi, à leur sujet, d'effet de conséquence commune et d'effet de rapport commun. Tel est le cas car les loteries spécifiées s'analysent comme nous l'illustrons.

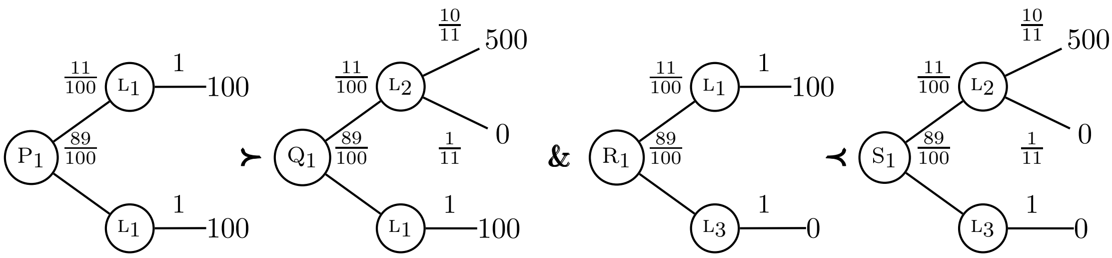

FIGURE 3 – DÉCOMPOSITION DU PREMIER PARADOXE D'ALLAIS

22. Le concept a été introduit par Machina ([1982], p. 288). Les propriétés classiques de la préférence impliquent qu'il existe une fonction d'équivalent certain conditionnel.

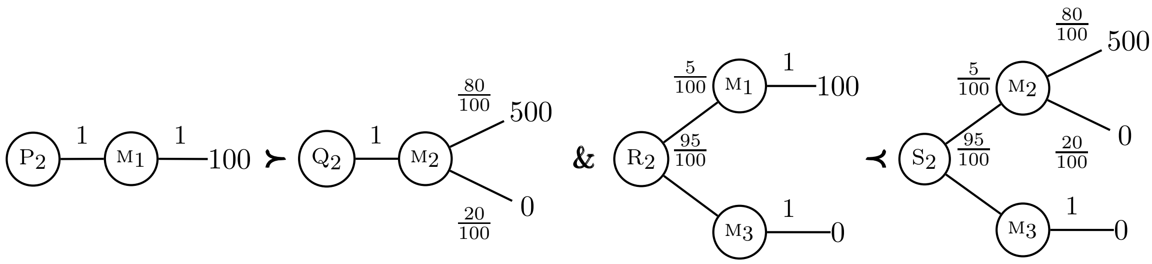

Figure 4 – décomposition du second paradoxe d'Allais

On déduit des premières préférences paradoxales que $ECC(L_2, Q_1) < 100$ et $ECC(L_2, S_1) > 100$. L'équivalent certain conditionnel de L_2 varie selon que l'on combine L_2 avec L_1, qui promet un résultat important, ou avec L_3, qui laisse repartir bredouille. La comparaison des équivalents certains conditionnels indique que le sujet paradoxal est *plus averse au risque* dans le premier cas que dans le second. On ressaisit ainsi, mais rigoureusement, une intuition répandue face au paradoxe : autant se montrer plus joueur quand il n'y a rien à perdre. Dans le second cas, les préférences paradoxales impliquent que $ECC(M_2, M_2) = EC(M_2) < 100$ et $ECC(M_2, S_2) > 100$. Ici, tout simplement, l'équivalent certain conditionnel de M_2 diffère de son équivalent certain. Dans les deux cas, les préférences paradoxales illustrent ce que nous nommerons une *variation conditionnelle de l'attitude par rapport au risque.*

L'observation dépasse les seuls cas d'Allais. Il s'avère équivalent d'imposer à des préférences classiques le respect de l'indépendance VNM ou l'invariance des équivalents certains conditionnels : la direction facile de l'équivalence a déjà été indiquée, l'autre demande une démonstration qui a été produite (cf. Chew et Epstein [1989] et Chew *et al.* [1993]). Ses auteurs établissent que les principaux modèles de l'utilité non-espérée peuvent eux aussi être coulés dans ce moule : la manière dont ils contraignent les préférences classiques sont autant de façons de *régler la variation des équivalents certains conditionnels*, c'est-à-dire la variation conditionnelle de l'attitude par rapport au risque. À ce titre, l'attitude par rapport au risque intervient au stade crucial des constructions axiomatiques. Il s'agit alors de spécifier des attitudes *comparatives*, quelles que soient les attitudes *absolues* des décideurs. En effet, selon ses équivalents certains conditionnels, on peut dire d'un décideur qu'il manifeste plus d'aversion pour le risque dans telle condition, plus de goût pour le risque dans telle autre, alors même que prises ensemble ces attitudes comparatives ne dessinent aucune attitude absolue répertoriée.

Non que les attitudes absolues n'intéressent jamais, pour elles-mêmes, l'analyse axiomatique. Au contraire, deuxièmement, repartons des différents types de réduction du risque et considérons, par exemple, des décideurs qui y sont favorables. Nous avons noté qu'être favorable à la réduction totale du risque ne nécessitait pas que l'on en apprécie aussi des réductions partielles. L'importance du sujet apparaît nettement quand on le présente dans le format des paradoxes d'Allais. Supposons qu'un décideur soit faiblement averse au risque et considérons la variation suivante sur le second paradoxe.

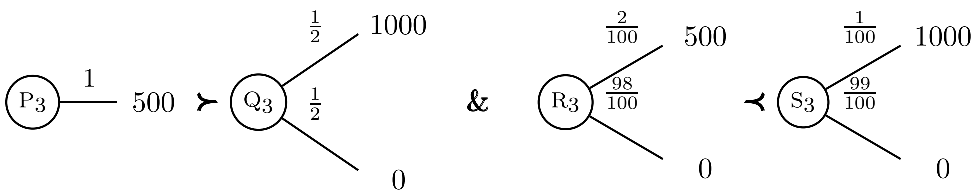

Figure 5 – variation sur le second paradoxe d'Allais

On vérifie que $P_3\ RR_G\ Q_3$, $R_3\ RR_G\ S_3$, $P_3\ RR_T\ Q_3$ mais non $R_3\ RR_T\ S_3$. Le décideur est favorable à la réduction totale du risque mais pas à toutes ses réduction partielles, ce qui entre en conflit avec le respect de l'indépendance VNM. Il en ira de même pour d'autres attitudes sélectives par rapport au risque. Par exemple, supposons le décideur favorable à la réduction monotone du risque et considérons la variation suivante sur le premier paradoxe[23].

23. À quelques adaptations près, elle vient de Vergnaud [1997].

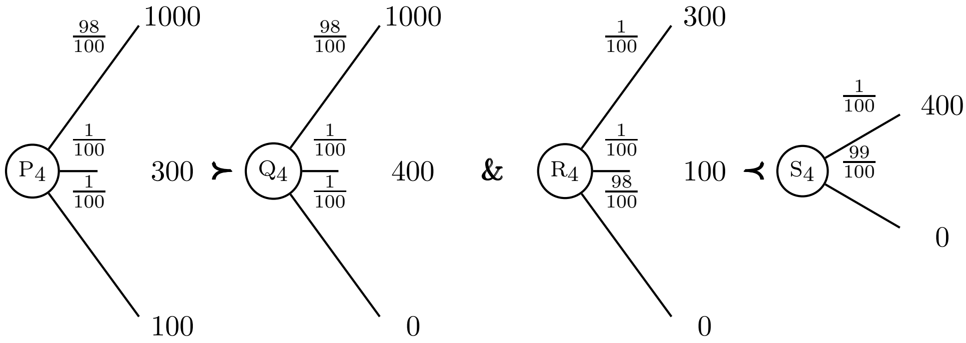

Figure 6 – variation sur le premier paradoxe d'Allais

On vérifie que $P_4 \; RR_G \; Q_4$, $R_4 \; RR_G \; S_4$, $P_4 \; RR_M \; Q_4$ mais non $R_4 \; RR_M \; S_4$. Ces préférences entrent en conflit avec le respect de l'indépendance VNM car le décideur opte pour la réduction du risque si elle est monotone mais n'apprécie pas pour autant toutes les réductions plus faibles du risque.

Ces types sélectifs d'attitude par rapport au risque constituent une cause suffisante, mais non nécessaire de manquement au respect de l'indépendance VNM [24]. Ce cas particulier, cependant, est remarquable. Il illustre un sujet intéressant l'analyse axiomatique, que nous nommerons le *renforcement de l'attitude par rapport au risque*. Le modèle de l'utilité espérée en impose la forme la plus extrême : un décideur favorable aux réductions totales du risque doit aussi, s'il suit la règle de l'utilité espérée, en favoriser *toutes* les réductions partielles. Aucun autre modèle, à notre connaissance, n'impose une telle rigidité [25]. D'autres modèles cependant en imposent des formes moins extrêmes. Par exemple, le modèle *dual* de l'utilité espérée, qui correspond à une forme particulière d'utilité dépendante du rang, impose qu'un décideur faiblement averse au risque le soit aussi modérément, sans imposer qu'un décideur modérément averse au risque le soit aussi fortement [26]. L'exemple

24. Par exemple, un décideur relevant du modèle de l'utilité dépendante du rang et dont les préférences seraient caractérisées par $u(c) = \sqrt{c}$ et $w(p) = p^3$ ne respectera pas l'indépendance VNM, alors qu'il favorisera la réduction du risque sous toutes ses formes.

25. Pour des préférences classiques, elle pourrait être caractéristique de l'utilité espérée sous une condition significativement plus faible que le respect de l'indépendance VNM.

26. Le modèle dual a été introduit par Yaari [1987]. Röell ([1987], p. 150) a démontré

apprend aussi que la rigidité extrême de l'utilité espérée ne tient pas à ce que ce modèle soit doté d'un seul paramètre (une fonction d'utilité), puisque tel est aussi le cas du modèle dual (une fonction de transformation des probabilités). En général, le modèle de l'utilité dépendante du rang dispose de deux paramètres (une fonction d'utilité et une fonction de transformation des probabilités) et peut distinguer tant les attitudes faibles des attitudes modérées, que les modérées des fortes [27]. Pour bien apprécier cette flexibilité, il faudrait savoir s'il existe un modèle de la décision dans le risque doté de plus d'un paramètre qui impose une forme ou une autre du renforcement qui nous occupe. La question, à notre connaissance, est ouverte, du fait notamment du peu de résultats de caractérisation des attitudes modérées par rapport au risque hors de la branche co-monotone de l'utilité non-espérée [28].

Les résultats existants, cependant, suffisent à illustrer comment l'analyse axiomatique exploite les concepts d'attitude *absolue* par rapport au risque. Ils servent à différencier les modèles de décision dans la mesure où ceux-ci renforcent, à divers degrés, l'attitude absolue par rapport au risque, excluant ainsi par construction certaines attitudes sélectives par rapport au risque.

4 Conclusion

L'analyse axiomatique ne semble d'abord pas traiter d'attitude par rapport au risque. À mieux y regarder, cependant, la variation conditionnelle et le renforcement de l'attitude par rapport au risque l'intéressent directement. Les modèles de la décision dans le risque ne sont, en définitive, que partiellement neutres au sujet de l'attitude par rapport au risque ; c'est ce qui permet

que dans ce cadre, les attitudes faibles et les attitudes fortes cessaient d'être équivalentes.

27. Cf. par exemple Chateauneuf *et al.* ([1997], p. 36).

28. En particulier, à notre connaissance, aucun résultat de ce type n'a encore été prouvé dans la branche de l'utilité non-espérée reposant sur la propriété d'intermédiarité (*betweenness*), dont les modèles sont dotés de plus d'un paramètre. Un tel résultat serait instructif car cette branche et la branche co-monotone sont distinctes, n'ayant en commun que l'utilité espérée, cf. Chew et Epstein ([1989], p. 208).

de rattacher les concepts introduits pour la décrire à l'analyse axiomatique. Pour évaluer plus finement encore le statut de ces concepts en théorie de la décision, un travail plus développé devrait se placer dans d'autres conditions que celles qui ont été retenues ici et s'intéresser, notamment, à des relations de préférence non-classiques et à des ensembles quelconques de résultats.

5 Bibliographie

Allais, M. (1953) : "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine," *Econometrica*, 21(4), 503–546.

Bommier, A., A. Chassagnon, et F. Le Grand (2012) : "Comparative Risk Aversion : A Formal Approach With Applications to Saving Behavior," *Journal of Economic Theory*, 147(4), 1614–1641.

Cerreia-Vioglio, S., D. Dillenberger, et P. Ortoleva (2015) : "Cautious Expected Utility and the Certainty Effect," *Econometrica*, 83(2), 693–728.

Cerreia-Vioglio, S., F. Maccheroni, M. Marinacci, et L. Montrucchio (2011) : "Uncertainty Averse Preferences," *Journal of Economic Theory*, 146(4), 1275–1330.

Chateauneuf, A. (1999) : "Comonotonicity Axioms and Rank-Dependent Expected Utility Theory for Arbitrary Consequences," *Journal of Mathematical Economics*, 32(1), 21–45.

Chateauneuf, A., et M. Cohen (1994) : "Risk Seeking with Diminishing Marginal Utility in a Non-Expected Utility Model," *Journal of Risk and Uncertainty*, 9(1), 77–91.

Chateauneuf, A., M. Cohen, et I. Meilijson (1997) : "New Tools to

Better Model Behavior Under Risk and Uncertainty – An Overview," *Finance*, 18(1), 25–46.

Chew, S. H. (1989) : "Axiomatic Utility Theories with the Betweenness Property," *Annals of Operations Research*, 19(1), 273–298.

Chew, S. H., et L. Epstein (1989) : "A Unifying Approach to Axiomatic Non-Expected Utility Theories," *Journal of Economic Theory*, 49(2), 207–240.

Chew, S. H., L. Epstein, et P. Wakker (1993) : "A Unifying Approach to Axiomatic Non-Expected Utility Theories : Correction and Comment," *Journal of Economic Theory*, 59(1), 183–188.

Chew, S. H., E. Karni, et Z. Safra (1987) : "Risk Aversion in the Theory of Expected Utility With Rank Dependent Probabilities," *Journal of Economic Theory*, 42(2), 370–381.

Chew, S. H., et M. H. Mao (1995) : "A Schur Concave Characterization of Risk aversion for Non-Expected Utility Preferences," *Journal of Economic Theory*, 67(2), 402–435.

Cohen, M., et J.-M. Tallon (2000) : "Décision dans le risque et l'incertain : l'apport des modèles non additifs," *Revue d'économie politique*, 110(5), 631–682.

Debreu, G. (1964) : "Continuity Properties of Paretian Utility," *International Economic Review*, 5(3), 285–293.

Fishburn, P. (1982) : "Nontransitive Measurable Utility," *Journal of Mathematical Psychology*, 26(1), 31–67.

Friedman, M., et L. Savage (1948) : "The Utility Analysis of Choices Involving Risk," *The Journal of Political Economy*, 56(4), 279–304.

GUL, F. (1991) : “A Theory of Disappointment Aversion,” *Econometrica*, 59(3), 667–686.

KAHNEMAN, D., ET A. TVERSKY (1979) : “Prospect Theory : An Analysis of Decision Under Risk,” *Econometrica*, 47(2), 263–291.

KRANTZ, D., R. LUCE, P. SUPPES, ET A. TVERSKY (1971) : *Foundations of Measurement, Volume I : Additive and Polynomial Representations*. New York : Academic Press.

LOOMES, G., ET R. SUGDEN (1982) : “Regret Theory : An Alternative Theory of Rational Choice Under Uncertainty,” *The Economic Journal*, 92(368), 805–824.

MACHINA, M. (1982) : ““Expected Utility” Analysis Without the Independence Axiom,” *Econometrica*, 50(2), 277–323.

MONGIN, P. (2003) : “L’axiomatisation et les théories économiques,” *Revue économique*, 54(1), 99–138.

RÖELL, A. (1987) : “Risk Aversion in Quiggin and Yaari’s Rank-Order Model of Choice under Uncertainty,” *The Economic Journal*, 97, 143–159.

ROTHSCHILD, M., ET J. STIGLITZ (1970) : “Increasing Risk : I. A Definition,” *Journal of Economic Theory*, 2(3), 225–243.

SEIDL, C. (2013) : “The St. Petersburg Paradox at 300,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 46(3), 1–18.

VERGNAUD, J.-C. (1997) : “Analysis of Risk in a Non-Expected Utility Framework and Application to the Optimality of the Deductible,” *Finance*, 18(1), 155–167.

YAARI, M. (1969) : “Some Remarks on Measures of Risk Aversion and on their Uses,” *Journal of Economic Theory*, 1(3), 315–329.

——— (1987) : “The Dual Theory of Choice under Risk,” *Econometrica*, 55(1), 95–115.