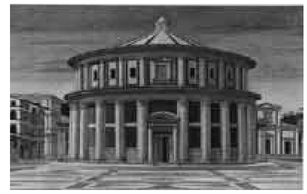
2012 Isonomia
Rivista online di Filosofia
Università di Urbino



Fondamenti geometrici e problemi filosofici dello spazio-tempo

Dalla relatività generale alla teoria delle supercorde

Luciano Boi

École des Hautes Études en Sciences Sociales, Centre de Mathématiques (Paris)

luciano.boi@ehess.fr

«Recent experimental data on binary pulsars confirms through general relativity that Riemannian geometry works well as a model for space-time on a sufficiently large scale. However, it is not clear [Riemann, 1854] whether this geometry is adequate for the description of the small-scale structure of space-time. The Planck length: $l_p = (Gh/c^3)^{1/2}\ 10^{-33}$cm, is considered as a natural lower limit for the precision at which coordinates of an event in space-time make sense. [Non-commutative geometry entail] a new notion of a geometric space where *points* do not play the central role, thus giving much more freedom for describing the small scale texture of space-time.» (A. Connes, 1998)

«La topologia è una dinamica delle trasformazioni che unisce ciò che l'uomo discretezza per i suoi (egoistici) bisogni e che Dio ha separato per i suoi (incomprensibili) fini.» (Autore anonimo, contemporaneo)

Abstract

The answer to some of the longstanding issues in the 20th century theoretical physics, such as those of the incompatibility between general relativity and quantum mechanics, the broken symmetries of the electroweak force acting at the subatomic scale and the missing mass of Higgs particle, and also those of the cosmic singularity and the black matter and energy, appear to be closely related to the problem of the quantum texture of space-time and the fluctuations of its underlying geometry. Each region of space landscape seem to be filled with spacetime weaved and knotted networks, for example, spacetime has immaterial curvature and structures, such as topological singularities, and obeys the laws of quantum physics. Thus, it is filled with potential particles, pairs of virtual matter and anti-matter units, and potential properties at the quantum scale. For example, quantum entities (like fields and particles) have both wave (i.e., continuous) and particle (i.e., discrete) properties and behaviors. At the quantum level (precisely, the Planck scale) of space-time such properties and behaviors could emerge from some underlying (dynamic) phase space related to some field theory. Accordingly, these properties and behaviors leave their signature on objects and phenomena in the real Universe. In this paper we consider some conceptual issues of this question.

1. Introduzione: alcune grandi questioni della fisica attuale

Tre grandi problemi concettuali (si potrebbe anche dire metafisici) ci appaiono centrali nella fisica contemporanea. (i) Un problema fondamentale è il carattere non-locale degli enti fisici che caratterizzano le teorie dei campi quantistici, e altresì la natura globale delle strutture matematiche che modellano le proprietà di questi stessi enti. (ii) C'è poi il problema dell'origine dell'universo e di come spiegare la singolarità (fisica e topologica) iniziale. Esiste oggi non uno ma una pluralità di modelli cosmologici che sono stati proposti per descrivere l'origine del nostro universo e le leggi della sua espansione spaziale ed evoluzione temporale. (iii) C'è infine la questione importantissima che riguarda la natura e struttura dello spazio-tempo; si tratta di comprendere se esso è una realtà data a priori oppure se emerge dalla dinamica stessa dei fenomeni fisici, e di capire anche l'influenza che le fluttuazioni quantistiche possono avere sulla geometria e la topologia dello spazio-tempo. Alcune riformulazioni recenti delle teorie quantistiche di campo, e in particolare le teorie della gravità quantistica, ci portano a considerare due possibili nuovi scenari della fisica: (a) il carattere emergente dello spazio-tempo dalla dinamica inerente a una specifica teoria quantistica di campo, (b) e la compresenza di più strutture matematiche in una stessa teoria fisica che descrive i fenomeni alle scale atomica e subatomica.

2. Strutture geometriche dello spazio-tempo; sulla relazione tra geometria e fisica

Negli ultimi tre decenni la nostra concezione dello spazio e dello spazio-tempo si è arricchita notevolmente e ha conosciuto dei cambiamenti profondi grazie all'introduzione di un insieme di nuove strutture matematiche non puntuali, non lineari e non-commutative, che formano quella che oggi viene chiamata *geometria quantica*. Queste strutture sono al cuore delle teorie di *gauge* non-abeliane, che sono riuscite nell'intento di unificare le particelle con i campi e la geometria dello spazio-tempo con la dinamica dei fenomeni fisici tramite la descrizione e il modellamento delle interazioni fondamentali per mezzo di certi gruppi di trasformazioni (gruppi di Lie compatti) e delle loro rappresentazioni. La costruzione allargata del modello standard della fisica, che ingloba l'interazione elettrodebole (forza elettromagnetica più forza debole) e l'interazione forte, è infatti interamente fondata sull'idea di gruppo di simmetria e di spazio con connessione sul quale esso agisce. Se però, da un lato, un simile modello descrive profondamente e in modo coerente le interazioni fisiche dovute alle tre forze fondamentali esistenti in natura, dall'altro, esso è incapace di spiegare la forza di gravitazione e, di conseguenza, di inglobare la relatività generale in un'immagine unitaria del mondo fisico. I tentativi fatti negli ultimi anni per unificare le forze elettrodebole e forte del modello standard nella teoria quantistica dei campi di *gauge* con la forza gravitazionale della relatività generale hanno prodotto, dagli anni Settanta in poi, una serie di sviluppi teorici fondamentali. La teoria delle supercorde e la geometria non-commutativa appaiono tra i più significativi e profondi, sia sul piano delle strutture matematiche che esse hanno contribuito a scoprire o a chiarire, che su quello dei nuovi concetti filosofici introdotti.

L'idea filosofica di fondo sottostante a queste teorie, e in particolare alla teoria delle supercorde, consiste nell'estendere l'idea dello spazio-tempo quadridimensionale della relatività generale a dimensioni superiori, idea che fu proposta nella seconda metà degli anni Venti del secolo scorso dal fisico Theodor Kaluza e dal matematico Oscar Klein, ripresa e sviluppata in seguito, agli inizi degli anni Settanta, dalla teoria della Supergravità. Nella teoria delle supercorde, si tratta in particolare di pensare i nostri spazi a tre e quattro dimensioni come degli oggetti geometrici immersi in un superspazio che comporta una o più dimensioni supplementari (per l'esattezza sei dimensioni spaziali che si aggiungono alle tre dello spazio usuale e al tempo della relatività). Queste dimensioni "nascoste" potrebbero avere un'influenza sulla gravità a piccolissime distanze, e quindi aiutare a capire il comportamento di certi fenomeni dovuto alla supposta natura quantistica della gravitazione alla scala della lunghezza di Planck.

Giova ricordare che all'origine dei tentativi di unificazione delle forze attraverso la geometria cui si è appena accennato (che in realtà risalgono ai lavori di Riemann e Clifford della seconda metà dell'Ottocento), c'era la necessità di spiegare il conflitto tra la relatività generale di Einstein e la meccanica quantistica di Bohr e Heisenberg. Due possibilità sono state considerate. La prima è stata l'elaborazione di una teoria relativista consistente dei fenomeni quantistici, ed è quello che ha cercato di fare Einstein dagli anni Trenta del secolo scorso proponendo diverse generalizzazioni della teoria del trasporto parallelo di Tullio Levi-Civita e dell'oggetto geometrico di connessione di Elie Cartan che includevano dei cambiamenti arbitrari delle metriche – ma come si sa, tali tentativi non hanno dato i risultati sperati. L'altra possibilità ha favorito l'elaborazione di un nuovo quadro matematico capace di inglobare sia le forze quantistiche, che la gravitazione. Si tratta dell'approccio sviluppato in particolare da Hermann Weyl (1929) e ripreso da C. N. Yang e R. L. Mills (1954), che ha tentato fin dall'inizio di geometrizzare prima la forza elettromagnetica, poi le forze deboli e forti nel contesto delle teorie di *gauge* abeliane e non-abeliane.

Le teorie di *gauge* hanno un profondo significato geometrico, giacché si basano sui concetti fondamentali di spazio fibrato (o fibrato principale) e di connessione con curvatura; questi concetti generalizzano la nozione di spazio euclideo. Se M è una varietà differenziabile che rappresenta un modello di spazio-tempo, e se in ciascun punto p di M si trova definito un sistema fisico con lo spazio di stati interni $\varphi^{-1}(p)$, allora una connessione sopra un oggetto geometrico (uno spazio) è una regola o un processo che permette di trasportare il sistema lungo le curve tracciate sulla varietà M. L'immagine geometrica che sta alla base della teoria di *gauge* rappresenta uno schema matematico tra i più profondi che si conoscano in fisica, dal momento che permette la descrizione di un universo idealizzato nel quale si considerano solo un piccolo numero di interazioni fondamentali. Per esempio, un campo gravitazionale è una connessione che "vive" nello spazio dei gradi interni di libertà di un giroscopio; la connessione permette di seguire l'evoluzione del giroscopio nello spazio-tempo. Anche un campo elettromagnetico è una connessione nello spazio dei gradi interni di libertà di un elettrone quantico, e la connessione permette di seguire l'evoluzione dell'elettrone nello spazio-tempo. Un campo di Yang-Mills è a sua volta una connessione nello spazio dei gradi interni di libertà di un quark. L'idea essenziale è che lo stato interno della materia, in ciascun punto e a ogni istante nello spazio-tempo, descrive una connessione nel fibrato principale. La materia agisce sulla connessione imponendo delle limitazioni alla sua curvatura (in altre parole, condizionando il tipo di deformazioni che la curvatura conferisce allo spazio), e la connessione a sua volta agisce sulla materia forzandola a propagarsi per trasporto parallelo lungo le "linee-universo" (le traiettorie del sistema fisico). Per questo, le celebri equazioni di Einstein del 1915-16 che descrivono il campo gravitazionale, quelle di Dirac che descrivono l'interazione tra il campo elettromagnetico e l'elettrone (una particella dotata di spin), e infine quelle di Yang-Mills che descrivono le interazioni dovute a tutte le forze fondamentali della natura tranne la gravità, sono esattamente l'espressione e la realizzazione di questa idea.

I concetti di *fibrato principale* e di *connessione* sono così diventati tra i costituenti più importanti della fisica. Le teorie quantistiche di *gauge* (o teorie di Yang-Mills) sono infatti costruite a partire dall'idea che a ogni entità fondamentale della teoria fisica corrisponde un concetto della geometria e topologia differenziali; questi concetti possono essere di natura locale, come la curvatura, o globale, come il fibrato principale. Così, ad esempio, l'intensità del campo elettromagnetico s'identifica con la curvatura della connessione; l'integrale d'azione corrisponde essenzialmente alla misura globale della curvatura; certi invarianti topologici e algebrici appartenenti alla teoria delle classi caratteristiche possono essere associati alla descrizione della carica della particella nel senso di Yang-Mills. Più generalmente, esiste una corrispondenza diretta tra i concetti della teoria dei campi quantistici di *gauge* e quelli della teoria geometrica e topologica dei fibrati.

È il caso di sottolineare che la relatività generale è stata la prima realizzazione importante di questo programma di geometrizzazione della fisica. Una delle sue caratteristiche fondamentali è di ammettere, per i fenomeni a scala macroscopica (cioè dell'intero universo) che essa spiega con grande precisione, l'esistenza di un gruppo matematico di simmetrie che lasciano localmente invarianti le leggi di quegli stessi fenomeni. In altre parole, si può effettuare qualsiasi trasformazione del sistema di coordinate curvilinee nell'intorno di un punto dato in questo stesso spazio-tempo, e definito mediante una metrica pseudo-riemanniana di tipo iperbolico, senza che le leggi fisiche dei fenomeni ne risultino alterate. Il che significa che le simmetrie della relatività generale non hanno un significato globale. Per *simmetria globale* si intende una simmetria per via della quale una trasformazione può essere eseguita uniformemente su tutti i punti dello spazio, mentre nel caso di una *simmetria locale,* ciascun punto è trasformato indipendentemente l'uno dall'altro. La teoria della relatività generale, cosi come la teoria elettromagnetica di Maxwell, è dunque una teoria di *gauge* locale. In effetti, il fatto che intervengano dei campi materiali indica chiaramente che la geometria dello spazio-tempo, caratteristica dei fenomeni a larga scala studiati dalla relatività generale, si trova a essere condizionata dalla più o meno grande densità di materia presente nel campo. La simmetria sulla quale si fonda la relatività generale non riguarda tanto un campo fisico che si propaga attraverso lo spazio e il tempo, quanto la stessa struttura geometrica dello spazio-tempo. Detto diversamente, la relatività generale non considera le cosiddette simmetrie interne, che concernono le proprietà dei campi quantistici come la fase, la carica, ecc., né considera le interazioni tra le particelle e gli altri campi quantistici della materia alla scala subatomica. Il punto importante è che l'insieme dello spazio-tempo della relatività ristretta e dello spazio interno della meccanica quantistica presenta una struttura matematica molto più ricca di quella rispettiva di ogni singola teoria: si tratta, più precisamente, di una struttura di spazio fibrato nel quale le trasformazioni del gruppo di simmetrie interne – un gruppo di Lie non-abeliano – generano degli spostamenti lungo le fibre, e i campi di *gauge* corrispondono alle connessioni di Cartan.

3. Le equazioni fondamentali della fisica del Novecento: una ricerca della natura profonda dello spazio-tempo

Descriviamo brevemente il contenuto e il significato di tali equazioni. Cominciamo dalle equazioni di campo di Hilbert-Einstein che collegano la curvatura alla distribuzione di materia. Tali equazioni furono introdotte da Einstein per determinare la curvatura dello spazio-tempo in funzione della densità di materia, dell'energia e della pressione, rappresentati tramite il tensore impulso-energia T. Possiamo anche dire, in breve, che tali equazioni descrivono la forza fondamentale di gravitazione nei termini della curvatura dello spazio-tempo generata dalla materia e dall'energia. Esse costituiscono la generalizzazione ultima della gravitazione newtoniana. Possiamo scriverle come:

$$R - {}^{1}/_{2}\, g\, R + g = \Lambda(8\pi G/c^{2})T \tag{3.1}$$

dove R è il tensore di curvatura di Ricci, R è la curvatura scalare, cioè la traccia di R, g è il tensore metrico, Λ è la costante cosmologica, T è il tensore impulso-energia, c è la velocità della luce, e G è la costante di gravitazione universale. Precisiamo che il tensore g descrive la metrica dello spazio-tempo ed è un tensore simmetrico 44, che quindi ha dieci componenti indipendenti; date le quattro coordinate utilizzate, le equazioni indipendenti si riducono a sei. Il termine g è interpretato come un contributo al tensore energia-impulso, piuttosto che un termine aggiuntivo al tensore di Einstein. Le equazioni di Einstein in assenza di campi materiali: $T_{ij} = 0$, si riducono a

$$R_{ij} - 1/2 g_{ij} R = 0, \tag{3.2}$$

da cui, alzando l'indice i, saturando con l'indice j e tenendo conto che $g_i^{\,i} = {}_i^{\,i} = 4$, si ricava $R = 0$, quindi le equazioni di Einstein nel vuoto sono

$$R_{ij} = 0. \tag{3.3}$$

Quest'ultima equazione, che ammette certamente come soluzioni $R^{i}_{\;jhk} = 0$, cioè la connessione piatta, non ammette solo questa soluzione, ma diverse altre soluzioni (dette anche "metriche"). Le equazioni di campo che forniscono un legame tra i campi materiali e la struttura riemanniana, dovranno essere del tipo

$$G_{ij} = T_{ij}, \tag{3.4}$$

dove G_{ij} è un tensore metrico da determinarsi opportunamente. Il tensore G_{ij}, che da ora in poi chiameremo *tensore di Einstein*, può essere determinato imponendo le seguenti condizioni: (1) si deve annulare quando la connessione è piatta. Questo implica che tra le soluzioni del vuoto ci deve essere lo spazio-tempo di Minkowski; (2) si deve poter costruire a partire solo dal tensore di curvatura e dal tensore metrico; (3) deve essere lineare nel tensore di curvatura; (4) deve essere simmetrico e a divergenza nulla, dovendo, per l'equazione $G_{ij} = T_{ij}$, essere uguale a un tensore con quelle caratteristiche. La non linearità e la conservazione dell'energia e del momento sono due delle più importanti proprietà delle equazioni di Einstein. La natura non lineare delle equazioni di

ISSN 2037-4348 | Febbraio 2012 | pp. 1-37

campo delle relatività generale le distingue da altre equazioni note, in particolare dalle equazioni di Maxwell che sono lineari nei campi elettrico e magnetico (e nella carica e distribuzione di corrente), nonché dalla equazione di Schrödinger in meccanica quantistica che è lineare nella funzione d'onda.

L'*equazione di Dirac* è tra le equazioni più importanti della meccanica quantistica e della teoria quantistica dei campi. Essa ha contribuito a rivoluzionare l'immagine che si aveva del mondo quantico grazie all'introduzione di una serie di nuovi concetti ed enti matematici e fisici (quali positrone, antimateria, energia negativa, particella virtuale, monopolo magnetico, ecc.) che sono diventati elementi essenziali della fisica teorica. Più precisamente, l'equazione di Dirac, che descrive in modo relativisticamente invariante il moto delle particelle a spin semi-intero (fermioni), nasce come tentativo di ovviare agli inconvenienti generati dall'equazione di Klein-Gordon. Tale equazione, infatti, non solo aveva soluzioni ad energia negativa, ma soprattutto presentava una difficoltà nell'interpretazione della funzione d'onda, la quale portava a densità di probabilità che potevano anche essere negative o nulle. Dirac partendo proprio dall'equazione di Klein-Gordon:

(3.5) $$(\partial\partial + m^2) = 0$$

propone una sorta di radice quadrata di quest'ultima, che risulterà anch'essa scritta in unità naturali. In breve, il procedimento seguito da Dirac consistette nello scegliere una base matriciale composta da tre matrici di Pauli con l'aggiunta dell'identità: questa è una base completa dello spazio di matrici 22, ma se si pone = *I*, si può verificare che, ad esempio, $x + x = 2x = 0$, ma ciò non è possibile, perché la matrice x è sicuramente non nulla. Per ovviare a questo inconveniente fu allora necessario passare a una dimensione maggiore, cosa che Dirac fece costruendo delle matrici 44. Ponendo poi:

(3.6) $$0,\ i\ i$$

l'equazione viene scritta con le matrici di Dirac:

(3.7) $$(i\partial + m) = 0$$

dove

(3.8) $$\partial = \partial/\partial \mathrm{x}$$

mentre i è l'unità immaginaria. In questo modo le soluzioni dell'equazione del moto sono dei vettori a quattro componenti: una soluzione particolare prende il nome di *spinore di Dirac*. Inoltre la densità di probabilità, in questo modo, risulta sempre positiva:

$$(x, t) = \sum\nolimits^{3}_{i=0} i\ (x, t)^2 \geq 0. \qquad (3.9)$$

Non si riesce, però, a eliminare le energie negative, che restano quindi come possibili autovalori della funzione. Per interpretare questo risultato dell'equazione, Dirac propose l'idea secondo cui esiste un "mare" di fermioni, alcuni dei quali sono in un livello eccitato e dunque hanno un'energia positiva, ma in tale "mare" esistono delle lacune (dei "buchi") che sono di energia negativa; quando una particella in uno stato eccitato incontra una lacuna, ecco che cade in uno stato non eccitato emettendo della radiazione elettromagnetica (un fenomeno simile alla diseccitazione di un atomo in cui un elettrone cade in un livello energetico più debole emettendo un fotone, sempre che nella nuvola elettronica dell'atomo esista una lacuna). Tale fenomeno è molto simile all'annichilazione di una particella con un'antiparticella, come per esempio l'annichilazione di un elettrone con un positrone, con conseguente emissione di due fotoni, che può essere descritto dall'equazione di Dirac, là dove l'antiparticella viene descritta dalla soluzione dell'equazione di Dirac con energia positiva. In un certo senso, si può affermare che Dirac predisse l'esistenza dell'antimateria e il fenomeno dell'annichilazione della materia, sebbene le sue idee sull'esistenza del "mare" di fermioni siano state rigettate dalla comunità scientifica perché portavano a delle incongruenze interne alla teoria.

L'idea di una *teoria di gauge* appare per la prima volta in un lavoro di Hermann Weyl del 1918. Nel tentativo di unificare la relatività generale di Einstein con l'elettromagnetismo di Maxwell, Weyl ipotizzò che la *Eichinvarianz* (o invarianza al variare della scala di misura) poteva essere anche una simmetria locale della teoria della relatività generale: purtroppo gli sviluppi di questa congettura hanno portato a risultati fisicamente inaccettabili. Tuttavia dopo l'avvento della meccanica quantistica, Weyl, Fock e London scoprirono che quella stessa idea, sviluppata alla luce dei nuovi concetti (cambiare il fattore di scala con una quantità complessa e sostituire la trasformazione di scala con una trasformazione di fase, cioè una simmetria di *gauge* $U(1)$) spiegava elegantemente l'effetto di un campo elettromagnetico sulla funzione d'onda di una particella quantistica elettricamente carica. Questa fu la prima teoria di *gauge* nella storia della fisica. Nei primi anni Cinquanta, tentando di mettere ordine nel gran caos di fenomeni ancora non spiegati della fisica delle particelle elementari, Yang e Mills scoprirono teorie di *gauge* non-abeliane (1954) come modelli per comprendere l'interazione forte che tiene insieme i nucleoni nei nuclei degli atomi. Generalizzando l'invarianza di *gauge* dell'elettromagnetismo, essi cercarono di costruire una teoria basata sull'azione di gruppo di simmetria non-abeliano $SU(2)$ sul doppietto di isospin formato da protoni e neutroni che fosse simile alla teoria di Weyl, Fock e London sull'azione del gruppo $U(1)$ sui campi spinoriali dell'elettrodinamica quantistica. Più precisamente, al livello della teoria elettromagnetica classica formulata da Maxwell, si sostituisce il gruppo abeliano di *gauge* $U(1)$ dell'elettromagnetismo con un gruppo compatto di *gauge* G. La definizione della curvatura associata alla connessione deve dunque essere modificata e diventa così $F = dA + A\,A$ (dove A sta per la connessione di *gauge* $U(1)$, cioè il potenziale elettromagnetico, localmente una 1-forma sullo spazio-tempo, per cui la curvatura del tensore del campo elettromagnetico è la 2-forma $F = dA$, e le equazioni di Maxwell in assenza di cariche e correnti prendono la forma: $0 = dF = d * F$, dove $*$ designa l'operatore duale di Hodge. In effetti, Hodge ha introdotto la sua nota teoria delle forme armoniche come una generalizzazione delle soluzioni delle equazioni di Maxwell. Queste ultime sono così sostituite dalle equazioni di Yang-Mills, $0 = d_A F = d_{\mathrm{A}} * F$, dove d_A indica l'estensione *gauge*-covariante delle derivate esteriori. Le equazioni classiche di Maxwell possono ora essere scritte sotto la forma di equazioni variazionali della lagrangiana di Yang-Mills:

$$L = 1/4g^2 \int \mathrm{Tr}\, F *F, \tag{3.10}$$

dove Tr designa una forma quadratica invariante sopra l'algebra di Lie del gruppo compatto di *gauge* G. Le equazioni di Yang-Mills sono non-lineari, contrariamente alle equazioni di Maxwell. Analogamente alle equazioni di Einstein per il campo gravitazionale, si conoscono poche soluzioni esatte delle equazioni elettromagnetiche classiche. Tuttavia le equazioni di Yang-Mills hanno alcune proprietà in comune con le equazioni di Maxwell: in particolare, esse forniscono una descrizione classica delle onde elettromagnetiche senza massa che viaggiano alla velocità della luce.

3. La rottura epistemologica operata dalla meccanica quantistica: dal concetto di sostanza a quello d'interazione

Si può riassumere un'idea filosofica fondamentale della fisica contemporanea, messa in luce grazie soprattutto alla meccanica quantistica, dicendo che è ormai impossibile attribuire una realtà indipendente alle particelle elementari o ai modelli teorici che servono a rappresentarle. Ovvero, la materia ha perso il suo statuto di *entità puramente materiale* (di natura *ontologica*) ed è stata sostituita dal concetto d'*interazione* (che esprime una connessione stretta fra forze fisiche la cui azione è condizionata dal mondo geometrico in cui "vivono"). Tale interazione è dunque concepita come processo dinamico piuttosto che come entità sostanziale. Cinque idee introdotte dalla meccanica quantistica hanno cambiato profondamente il nostro modo di concepire la realtà fisica.

1) La prima introduce un'indeterminazione fondamentale (spaziale e temporale) nella descrizione fisica delle particelle elementari alle scale atomica e subatomica. Vale a dire che è impossibile, per esempio, conoscere simultaneamente e con precisione la loro posizione e velocità nello spazio. È importante aggiungere che nella meccanica quantistica, la velocità e la posizione di una particella sono, innanzitutto, degli operatori non-commutativi agenti su uno spazio di Hilbert H, e diverse nozioni classiche, come quella di "traiettoria di una particella" perdono la loro validità. È questo il contenuto delle cosiddette *relazioni d'indeterminazione* enunciate da Heisenberg nel 1927. Bisogna aggiungere che tale principio d'indeterminazione vale sia per l'energia, che per la durata di una particella. Riferendosi a questo fatto, certi fisici hanno parlato di fluttuazioni quantistiche. Le fluttuazioni dell'energia permettono l'esistenza di particelle "reali" (ossia osservate in laboratorio) e di particelle "virtuali" (la cui osservazione è invece molto difficile), di materia e di antimateria, e ciò avrebbe come conseguenza che simmetria e asimmetria sono entrambe caratteristiche fondamentali della fisica microscopica.

2) La seconda idea afferma che non esiste alcun oggetto fisico microscopico che possa essere determinato in modo univoco e definitivo, per il fatto che la sua descrizione dipende principalmente dagli strumenti di misura e dallo stesso osservatore. Questo fa si che tale descrizione è di natura più operazionale e probabilista che di natura oggettiva ed esatta nel senso della fisica classica. Il carattere approssimato della conoscenza che

possiamo avere dei sistemi quantistici è strettamente legato alle relazioni d'indeterminazione (già menzionato) e al *principio di sovrapposizione*. L'aver chiarito una simile connessione costituisce uno degli apporti maggiori della meccanica quantistica, poiché esso ha profondamente modificato la visione che si aveva fino ad allora della relazione fra l'osservatore e il fenomeno osservato (fra il soggetto e l'oggetto). Si sostiene, infatti, che un qualsiasi oggetto fisico o anche un fenomeno fisico complesso, sufficientemente "sensibile" affinché esso dipenda essenzialmente dalle fluttuazioni quantistiche, non può essere concepito in un solo stato quasi-classico, ma come se "esistesse" in più stati distinti contemporaneamente. Secondo una formulazione leggermente diversa di questo principio, si può dire che due stati qualsiasi possono combinarsi (in realtà, la combinazione può avvenire in un numero infinito di modi) ed essere formati da stati che presentano delle caratteristiche intermedie rispetto a quelle dei due singoli stati che formano la combinazione. In particolare, se un evento è vero in uno degli stati e falso nell'altro, allora sarà indefinito nello stato risultante dalla sovrapposizione dei due stati. Si tratta di un enunciato che chiaramente contraddice il senso comune e smantella alcuni principi della fisica classica, in particolare il principio di non contraddizione che ne è alla base.

3) La terza idea mette in luce la natura discontinua della struttura dello spazio alla scala quantica della fisica. Essa è fondamentalmente legata al fatto che quantità come l'energia, lo spin, la carica, ecc., sono delle grandezze quantizzate, vale a dire le cui variazioni avvengono solo in modo discontinuo per quantità distinte e multiple di un valore elementare. In più, come si è già ricordato, lo spazio alla scala subatomica è soggetto alle fluttuazioni quantistiche delle particelle elementari. Un tale fatto suggerisce l'idea che possa esistere un certo tipo di sovrapposizione non lineare delle differenti topologie che caratterizzano lo spazio-tempo. La struttura dello spazio-tempo alle scale atomica e subatomica potrebbe perciò rivelarsi molto diversa da quella che comunemente chiamiamo una varietà liscia o differenziabile, come, per esempio, la varietà riemanniana su cui è fondata la relatività generale.

4) La quarta idea fondamentale riguarda la natura essenzialmente instabile delle particelle subatomiche che agiscono nel mondo quantico. Le particelle sono innanzitutto instabili perché hanno una vita, in qualche modo una storia: esse nascono, interagiscono con i campi e altre particelle in certe condizioni, poi "consumano" la loro energia e così

muoiono (si annichilano o si disintegrano come il neutrino, particella d'antimateria di carica nulla). Di conseguenza, non si può più parlare di perennità, di vita eterna, di proprietà assolute nel caso del mondo quantico (alla scala di Planck). Infatti, dopo che due particelle hanno interagito esse non sono più le stesse: il processo dell'interazione modifica la loro identità ed anche la loro costituzione. In altre parole, il fatto che due (o più) particelle interagiscano fa in modo che esse scambino dei "quanti" di energia (cioè delle quantità discrete, per esempio, dei "pacchetti" di fotoni nel caso della radiazione luminosa), e più generalmente delle forze. Ed è precisamente questo scambio di forze, trasmesso dalle cosiddette particelle "messaggere" (altre particelle agiscono invece per conferire una massa), che permette la creazione di nuove particelle, e dunque di nuove forme di materia. La sola cosa che si conserva nel corso delle interazioni tra particelle che avvengono per scambio di forze, sono i "quanti". Un oscillatore meccanico o qualsiasi altro sistema fisico più complesso che irradia o che assorbe un'onda, non può né perdere né acquistare dell'energia in modo continuo, ma unicamente per quanti (cioè per quantità discrete), il che significa che la variazione di questa energia è una grandezza fissata, e questo spiega perché nel 1900 Planck abbia introdotto la celebre costante $\hbar$ nella sua equazione $\Delta E = \hbar f$.

5) La quinta idea rivoluzionaria che prima la meccanica quantistica poi le teorie quantistiche dei campi hanno contribuito a mettere in luce, è che ciò che veniva chiamata nella fisica classica fino a Maxwell la *materia*, che veniva sempre identificata con la quantità di massa di un corpo fisico, non ha affatto una realtà sostanziale unica e assoluta. Già il fisico scozzese rigettò la nozione di particella materiale considerata come un punto massiccio che si spostava nello spazio, e la sostituì con quella di un oggetto che chiamò *campo*, in cui le proprietà fisiche e geometriche coesistono e s'influenzano a vicenda. Secondo la teoria di Maxwell, non ha più senso parlare dell'esistenza di particelle isolate e massicce, ma di un campo la cui struttura geometrica e le cui proprietà fisiche (che non possono più essere concepite separatamente dalla struttura geometrica dello spazio in cui il campo agisce) si trasmettono a tutti i corpi e ai sistemi fisici all'interno del campo. Einstein introdurrà un cambiamento ancora più radicale nella nostra visione della realtà fisica, per il fatto di avere associato qualsiasi forma di materia a una forma di energia. Sia prima la meccanica quantistica, nella formulazione che ne diedero Heisenberg, Schrödinger, Pauli e Dirac tra il 1925 e il 1929, che in seguito l'elettrodinamica quantisti-

ca e la teoria dei campi di *gauge*, sviluppate a partire dai primissimi anni Cinquanta del secolo scorso, rispettivamente da Schwinger, Tomonaga, Feynman e Dyson, e da Yang e Mills (teoria di *gauge* da cui è poi nato il modello standard di Ward-Salam-Weinberg che unifica la forza elettrodebole – forza nucleare debole più l'elettromagnetismo – con la forza nucleare forte), abbandoneranno completamente l'idea che guardava a una particella elementare come a una realtà fisica indipendente dalle interazioni che le permettono di scambiare delle forze e altre proprietà fisiche (come le simmetrie interne e i numeri quantici).

Il punto nodale delle nuove teorie fisiche elaborate nel corso della seconda metà del Novecento, è che i comportamenti delle interazioni obbediscono a una geometria ricca e complessa, le cui proprietà fondamentali sembrano essere la non-località, la non-commutatività e la non-linearità. Questa geometria permea le strutture profonde dello spazio-tempo, in modo tale che gli stessi fenomeni fisici sono per cosi dire immersi in una sorta di tessuto geometrico, ed è precisamente dalla dinamica inerente a esso che emergono le diverse forme di materia e le varie forze che le muovono come altrettanti effetti possibili delle fluttuazioni quantistiche, in parte effimere e aleatorie, e delle diverse deformazioni topologiche che condizionano la geometria quantica del mondo fisico alla scala subatomica. Si può pertanto affermare che, così come non possono esistere delle particelle materiali (i *fermioni*, dal nome del suo inventore, il fisico Enrico Fermi), né delle particelle messaggere (i *bosoni*, di cui le proprietà sono state descritte dal fisico indiano Satyendranath Bose) senza interazioni, nello stesso modo le interazioni non potrebbero aver luogo senza la geometria sottostante che "tesse" lo spazio-tempo (o le diverse forme spazio-tempo) e propaga l'azione delle forze fondamentali attraverso il mondo microscopico e l'intero universo. L'idea centrale delle teorie fisiche sviluppate a partire dagli anni Cinquanta del secolo scorso è che la geometria e la dinamica coesistono e si condeterminano continuamente. Questo fatto ha un significato molto generale, il quale si può riassumere dicendo che le strutture geometriche dello spazio fisico possono generare un mondo fatto d'interazioni, di forze e di forme di energia, ragione per cui l'intelligibilità della realtà fisica è inscindibile dall'intelligibilità matematica di questo mondo.

È all'interno di un tale contesto matematico e fisico preciso che si può parlare di un processo di «desostanzializzazione» della materia, processo che è al cuore delle nuove teorie fisiche a cui abbiamo accennato. Se si guarda alla fisica teorica e ai suoi principali sviluppi nel corso del Novecento, si può in effetti constatare che la materia si è in qualche modo moltiplicata in una miriade di proprietà e di qualità (in parte scoperte recentemente e perciò nuove rispetto alla fisica classica). D'altra parte, le interazioni fondamentali tra campi e particelle appaiono sempre più come complementari le une con le altre e unite da qualche relazione fondamentale: i gruppi di simmetria e certi invarianti algebrici e topologici dello spazio-tempo sono alla base di tale relazione. Si può affermare che la materia, che è vista sempre meno in quanto sostanza e sempre più lontana dalla percezione immediata e dal senso comune, è stata sostituita dal concetto d'interazione, il quale riveste ormai un ruolo centrale nell'intera fisica. La geometria che serve oggi a descrivere e spiegare il mondo fisico (sia a scala microscopica, sia a quella macroscopica) è diventata più ricca e complessa rispetto al passato anche recente, e la materia più fluttuante e differenziata, ed è per di più ormai impossibile operare una separazione tra le due.

Si tratta di un punto filosofico fondamentale. In modo conciso, si può dire che non è più la materia (ponderabile o no) in quanto tale che con la sua azione produce una varietà di effetti e di fenomeni fisici, ma sono piuttosto le varie interazioni «fondamentali» che connettono tra di loro i campi e le particelle la principale fonte delle proprietà e dei comportamenti che si osservano nel mondo fisico alle diverse scale di grandezza e di lunghezza. In più, si è stabilito nel corso degli ultimi cinquant'anni che esiste una relazione profonda tra le quattro interazioni fondamentali, viste ormai essenzialmente come degli oggetti geometrico-topologici dotati di certe strutture matematiche, e le diverse forze e forme di energia. Affermare oggi che nella fisica attuale, e in particolare nelle teorie quantistiche dei campi, non è più possibile pensare alla materia senza forma, significa precisamente che bisogna rinunciare al modello secondo il quale esistono dei punti massicci che si muovono in uno spazio e tempo al contempo assoluti, immutabili e dati a priori (cioè predeterminati), per considerare invece dei sistemi fisici complessi che interagiscono con uno spazio-tempo lui stesso geometricamente complesso, ovvero soggetto a un certo tipo di fluttuazioni quantistiche e di sovrapposizioni topologiche non-lineari. In luogo dunque di pure qualità sostanziali, si hanno delle proprietà fisiche intrinseche e dei principi di conservazione derivanti dall'azione delle simmetrie interne che reggono il comportamento dei fenomeni quantistici. Da questo punto di vista, non è più necessario ammettere una determinata ontologia a fondamento dei corpi massicci della fisica. Se ha ancora un senso parlare d'ontologia nel contesto della fisica contemporanea, in particolare in quello del "Modello Standard" e delle teorie "post-Modello Standard" (teorie delle stringhe, con le sue numerose varianti, gravità quantistica discreta e geometria non-commutativa), è alla condizione però che la si collochi al livello stesso delle interazioni e delle forze che ne risultano, e più precisamente, al livello della loro geometria e dinamica, due realtà che sono diventate del tutto indissociabili nella fisica del secondo Novecento con lo sviluppo delle teorie quantistiche di *gauge* non-abeliane.

Conviene tuttavia ricordare che già con la relatività generale si ha una sorta di co-determinazione, vale a dire che la materia deforma lo spazio mentre lo spazio impartisce alla materia il tipo di movimento da seguire nello spazio-tempo. L'idea essenziale, ci sembra, della relatività generale è di aver capito che non c'è fisica possibile, perlomeno a scala macroscopica, localmente nello spazio-tempo e nell'intero universo, al di fuori e indipendentemente dalla geometria che caratterizza lo spazio-tempo. Nella visione di Einstein, i fenomeni fisici sono in realtà degli effetti risultanti da questa geometria. Perciò, non è possibile pensare una certa ontologia della fisica (nel senso precisato prima) senza attribuire un potere generativo alle strutture geometriche. Qui risiede infatti il significato fondamentale delle equazioni del campo gravitazionale formulate da Einstein nel 1915-1916 e che possiamo scrivere nella forma seguente:

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R + g_{\mu\gamma} = (8\pi G/c^2) T_{\mu\gamma}, \tag{3.1}$$

Tali equazioni stabiliscono una relazione tra il tensore di curvatura o tensore di Ricci $R_{\mu\gamma}$ (il quale è una contrazione del tensore di Riemann associato alla metrica $g_{\mu\gamma}$) e il tensore impulso-energia $T_{\mu\gamma}$; in altri termini, esse uniscono la geometria con la fisica in virtù del fatto che il tensore di curvatura è l'espressione del campo gravitazionale.

Nelle teorie di *gauge* non-abeliane questo legame profondo tra fisica e geometria, che rappresenta una fase ulteriore del processo di geometrizzazione delle forze cominciato con i lavori di Riemann, Clifford e Maxwell, si fonda sul concetto geometrico di fibrato principale munito di una connessione con curvatura, che diventa così l'oggetto matematico centrale della fisica. Ricordiamo che la maggior parte delle teorie della fisica sono descritte da lagrangiane (equazioni del moto) che sono invarianti sotto certe trasformazioni del sistema di coordinate; queste trasformazioni sono eseguite in modo identico in ogni punto dello spazio-tempo (si dice quindi che presentano *simmetrie globali*). Il concetto fisico alla base delle teorie di *gauge* (una classe di teorie quantistiche di campo) è di postulare che le lagrangiane debbano possedere anche simmetrie locali, cioè che debba essere possibile effettuare queste trasformazioni di simmetria solo in una particolare e limitata regione dello spazio-tempo senza interessare il resto dell'universo. Questo requisito può essere visto, in senso filosofico, come una versione generalizzata del principio di equivalenza della relatività generale.

La teoria delle supercorde, sviluppata a partire dall'inizio degli anni Ottanta del secolo scorso, costituisce una rivoluzione concettuale ancora più radicale della nostra concezione del mondo fisico e dello spazio-tempo. È ben noto che nella teoria quantistica di campo (anche in teorie recenti come la *Supergravità*) si pensa che i costituenti di base della materia, cioè le cosiddette particelle elementari, siano di natura puntiforme. Si ritiene inoltre che le interazioni tra le forze fondamentali della natura debbano essere interpretate come degli scambi di particelle "messaggere" di tipo puntiforme (discreto), ossia i quanti del campo di *gauge*. La teoria delle supercorde rigetta ambedue gli assunti: primo, le particelle elementari potrebbero avere una struttura interna il cui comportamento rispecchierebbe le proprietà di oggetti matematici assai complicati; detto diversamente, a distanze estremamente piccole dell'ordine di $x \sim 10^{-33}$ cm (corrispondenti a energie $E \sim M_{Pl}\, c^2 \sim 10^{19}$ GeV, dove M_{Pl} è la cosiddettta massa di Planck) le particelle che noi percepiamo come puntiformi potrebbero rivelarsi oggetti estesi, come appunto sono le corde, ed essere descritte da uno schema teorico più generale rispetto al quale l'ordinaria teoria dei campi sarebbe un limite di bassa energia o di grandi distanze; secondo, invece di comportarsi come dei punti, queste stesse particelle avrebbero une certa estensione spaziale capace di trasformarsi e di produrre delle strutture spaziali intricate e multiformi che potrebbero essere all'origine della grande varietà di comportamenti di molti fenomeni fisici. È chiaro che le ipotesi precedenti conducono a modificare profondamente il tipo di ontologia che si può attribuire alle entità fisiche facenti parte di quelle strutture concettuali che sono caratteristiche delle principali teorie fisiche sviluppate in tempi recenti.

Secondo la teoria delle supercorde, tutte le particelle elementari alle quali si è sempre associata l'immagine di punti infinitamente piccoli privi di qualsiasi struttura interna, assomiglierebbero in realtà a dei lacci microscopici (aperti o chiusi) che si spostano attraverso lo spazio seguendo un movimento vibratorio. Mentre nell'immagine di una particella come un punto, si pensava che esso si muovesse nello spazio tracciando una linea detta "linea-universo", nella teoria delle supercorde, invece, a ogni istante la suddetta particella si comporta effettivamente come un laccio infinitamente piccolo, il quale, per effetto del suo movimento vibratorio (e secondo determinate condizioni fisiche), può trasformarsi in una sorta di corda annodata o di cappio aggrovigliato. In questo modo, man mano che nel corso del tempo questo cappio si muove attraverso lo spazio, esso descrive qualcosa che rassomiglia a un tubo, a una specie di cilindro che può anche torcersi e arrotolarsi più volte su se stesso. In più un tale oggetto può a sua volta muoversi nell'enorme spazio a 11 dimensioni delle corde (definito da tutte le possibili configurazioni di una corda; questo numero è molto maggiore del numero di punti dello spazio) creando così una famiglia di diverse forme spaziali, nello stesso modo in cui un nodo può, se immerso nello spazio tridimensionale, ossia deformato in differenti modi in R^3, creare una grande varietà di superfici con nuove proprietà topologiche. Stando alla teoria delle superstringhe, il moto di questi oggetti spaziali complessi è ciò che corrisponde realmente alla traiettoria di una particella nello spazio-tempo alla scala di Planck.

Ciò ha portato a pensare che le componenti atomiche e subatomiche della materia, gli atomi e gli elettroni in orbita intorno al nucleo, i protoni e i neutroni che formano lo stesso nucleo, cosi come i *quarks*, siano in effetti degli oggetti estesi unidimensionali, le corde. Le corde postulate dalla teoria sono dell'ordine di grandezza della distanza di Planck $L_{Pl} \sim 10^{-33}$ cm, cioè circa 10^{20} volte più piccole del diametro del protone, e sono definite in uno spazio a 11 dimensioni; sette delle 11 dimensioni non sono visibili e si possono osservare soltanto le quattro dimensioni familiari dello spazio-tempo; le sette dimensioni aggiuntive sono compattificate, ovvero sono ripiegate o arrotolate su se stesse da effetti quantistici della gravitazione e hanno un raggio di curvatura dell'ordine delle dimensioni delle corde, così da formare una struttura talmente piccola da non poter essere osservata direttamente. Tutte le particelle conosciute sono dunque comparate a delle corde – chiuse o aperte, annodate o sciolte, arrotolate su se stesse o dispiegate – che vibrano nello spazio secondo i modi di vibrazione armonici determinati dalla tensione della corda: le comuni particelle elementari vengono perciò interpretate come modi (stati) di vibrazione differenti di una sola corda. Viene chiamata tensione della corda T, e il suo valore numerico è di 10^{13} GeV/cm, la costante di proporzionalità, l'analogo della costante della molla; questa nozione proviene dal fatto che per separare i quarks all'interno di un adrone è necessario fornire un'energia proporzionale alla separazione desiderata come se gli stessi fossero tenuti insieme da una molla. Esse costituiscono pertanto una sorta di combinazione delle loro proprietà intrinseche (fisiche) e delle vibrazioni attraverso lo spazio (proprietà geometriche e topologiche). Le proprietà intrinseche corrispondono alle loro simmetrie interne, rappresentate matematicamente da un certo gruppo di trasformazioni che può essere anche molto complicato (per esempio, le teorie delle superstringhe che sono esenti da anomalie quantiche possiedono una simmetria di *gauge* quantistica di tipo $SO(32)$ o $E8 \times E8$, e la dimensione dello spazio-tempo è uguale a 10). Le proprietà fisiche delle particelle appaiono quindi come altrettante caratteristiche di certe forme spaziali risultanti dai diversi movimenti vibratori delle corde.

La teoria delle supercorde è forse oggi la teoria la più (matematicamente) consistente (e promettente) per la gravità quantistica. La gravità quantistica sembra mettere in gioco energie molto superiori a quelle raggiungibili o comunque ipotizzabili. Non è affatto chiaro, al momento, quali siano le predizioni della teoria delle supercorde che possaono essere sottoposte al vaglio degli esperimenti. Oltre che spiegare realisticamente le interazioni di Yang-Mills, la teoria delle supercorde sembra essere in grado, contrariamente alle teorie di Kaluza-Klein, di spiegare l'osservata chiralità dell'interazione debole, purché essa sia formulata in uno spazio a 11 dimensioni (le quattro dello spazio-tempo ordinario più le sette non visibili e compattificate). Ancora più importante è che la teoria delle supercorde sembra essere l'unica teoria della gravità quantistica capace di ovviare al problema concettuale e generale dei cosiddetti infiniti (o divergenze) che sono praticamente presenti in tutte le teorie quantistiche dei campi. (Si sa ad esempio che nell'elettrodinamica classica l'energia del campo elettrico generato da un elettrone puntiforme è, strettamente parlando, infinita). Un aspetto concettuale particolarmente interessante della teoria delle supercorde è che essa sia una teoria finita di tutte le interazioni: interazioni di *gauge* non abeliane e interazioni gravitazionali. In altre parole, la teoria è priva di parametri arbitrari; questa è una conseguenza che deriva dalla sua finitezza e dalla sua grande simmetria. Resta il fatto, tuttavia, che la teoria delle supercorde presenta alcuni limiti e problemi fondamentali. Un problema teorico importante che ancora l'affligge è che non si conosca ancora la dinamica che determina il vero stato fondamentale della teoria e le sue proprietà. Inoltre, le predizioni principali della teoria delle supercorde non hanno ancora trovato conferma sperimentale. In particolare non ha trovato evidenza empirica l'ipotizzata supersimmetria della teoria.

Le forme spaziali cui le vibrazioni e oscillazioni delle corde possono dare luogo sono degli oggetti topologici spesso molto complessi che "vivono" nello spazio fisico delle particelle quantiche. Anche se si richiede che tali forme spaziali soddisfino certi prerequisiti matematici, l'aspetto essenziale risiede nella loro capacità di generare dinamicamente fenomeni fisici e nuove interazioni fra loro. Per esempio, la carica elettrica può essere vista come un effetto prodotto dal movimento di una corda, piuttosto che come qualche cosa che si aggiunge all'oggetto fondamentale della teoria, cioè alla particella. In modo più generale, le proprietà fisiche emergerebbero, secondo questa teoria, dalle deformazioni cui sarebbe soggetto un certo tipo di oggetti topologici quali corde, cilindri, tori, anse e nodi nello spazio dei fenomeni quantistici alla scala di Planck. Si può pertanto affermare che, in accordo con quelle teorie recenti che proseguono, estendendolo all'insieme delle forze che esistono in natura, il programma di geometrizzazione della fisica iniziato con la sua relatività generale di Einstein, le proprietà e i comportamenti dei fenomeni fisici a un livello fondamentale emergono dalle classi di deformazioni cui è soggetta la forma topologica dello spazio e dello spazio-tempo, senza che peraltro queste diverse topologie siano omeomorfe fra di loro. La "realtà fisica" può allora essere vista più come un *processo* geometrico-topologico di tipo dinamico che come uno *stato* meramente fisico, o quantomeno una combinazione dei due, e le proprietà degli enti fondamentali della fisica a certe scale non possono più essere descritte e spiegate rifacendosi alla loro presunta natura sostanziale, ma tramite le loro trasformazioni spazio-temporali e simmetrie interne.

Secondo la teoria delle supercorde, per ogni corda aperta o chiusa, esistono diverse configurazioni di vibrazione, e configurazioni diverse corrispondono a tipi di particelle differenti; le proprietà di una particella – per esempio, la sua massa, la carica elettrica, le cariche in rapporto alle interazioni debole e forte – sono tutte determinate dall'esatto stato vibratorio del laccio. Anziché introdurre una nuova entità indipendente per ogni particella, abbiamo ora una singola entità – la corda – di cui tutte le particelle sono costituite. Le particelle "messaggere" – fotoni, gluoni, bosoni W e Z – sono anch'esse piccoli cappi vibranti, e possiamo raffiguraci le interazioni fra particelle come un legarsi e uno sciogliersi di cappi. Pertanto, non c'è ontologia possibile della gravità quantistica nella teoria delle supercorde se non si considerano i diversi stati vibratori delle corde e le differenti forme topologiche cui essi danno luogo nello spazio-tempo. In altre parole, l'ontologia del mondo quantistico deve essere pensata in relazione con le strutture topologiche mutevoli dello spazio, ossia come un stato dinamico prodotto dalle trasformazioni che ammette la geometria dello spazio-tempo.

Da un punto di vista teorico, una delle predizioni tra le più straordinarie della teoria delle supercorde comporta che lo spettro degli stati di una corda includa necessariamente il gravitone, la particella che media le interazioni gravitazionali. È importante tuttavia precisare che lo statuto ontologico del gravitone non è lo stesso a seconda che lo si consideri nel contesto teorico della relatività generale o in quello della teoria delle superstringhe (una teoria quantistica della gravitazione). È ben noto che la forza elettrica tra due particelle cariche è dovuta a un continuo scambio di fotoni. Analogamente, possiamo immaginarci l'interazione gravitazionale come uno scambio di quanti di campo gravitazionale, chiamati *gravitoni*. Di fatto, finché le particelle interagenti sono separate da grandi distanze, questa descrizione funziona piuttosto bene. In tal caso, la forza gravitazionale è debole e lo spazio-tempo è pressoché piatto (si è già visto che per la relatività generale la gravitazione è connessa intimamente alla curvatura dello spazio-tempo). Possiamo immaginare i gravitoni come minuscole "gobbe" che su questo sfondo rimbalzano tra le particelle; più precisamente, essi ci appaiono degli effetti fisici creati dalle deformazioni singolari dello spazio-tempo indotte da una forte curvatura o da un forte aggrovigliamento, o anche da entrambe le singolarità (geometrica la prima, topologica la seconda). A scale estremamente piccole, però, la situazione è affatto diversa. Le fluttuazioni quantistiche, su brevi distanze (distanze al di sotto della lunghezza di Planck, una lunghezza 10^{25} volte inferiore alla taglia di un atomo), fanno sì che la geometria dello spazio-tempo acquisti una struttura simile a una schiuma. Non si ha ancora un'idea precisa di come descrivere il moto e l'interazione fra particelle in un ambiente caotico del genere. L'immagine di particelle che si muovono in uno spazio-tempo omogeneo e senza asperità, lanciandosi gravitoni l'un l'altra, in questo stato di cose naturalmente non vale.

4. Il mondo delle particelle quantiche e il compattarsi dello spazio nella teoria delle supercorde. Una geometria elastica all'origine del mondo fisico

Si sa che il Modello Standard delle particelle elementari presenta diversi problemi concettuali molto delicati, uno di questi è la *dimensionalità* dello spazio. Come abbiamo già visto, le nuove teorie elaborate con lo scopo di superare questi problemi, in particolare la teoria delle corde, richiedono nove dimensioni spaziali e una temporale per essere matematicamente coerenti. L'elenco delle particelle elementari del Modello Standard è lungo: comprende trentasei tipi diversi di *quark*, otto gluoni (che mediano la forza nucleare forte), elettroni, muoni, particelle tau e le rispettive antiparticelle, due tipi di bosoni *W*, un bosone *Z* (che mediano la forza nucleare debole), la particella di Higgs (che induce la rottura spontanea di simmetria dei gruppi di *gauge* ed è responsabile della massa inerziale), i fotoni e tre neutrini. Ciascun tipo di particella è decisamente diverso da tutti gli altri; ogni particella ha le sue proprietà caratteristiche, ha per cosi dire una sua individualità. Ma nel Modello Standard le particelle sono presupposte essere puntiformi, come possono allora avere un'individualità? Come possiamo spiegarne le proprietà, i *numeri quantici* quali lo spin, l'*isospin*, la stranezza, lo *charm*, il numero barionico, il numero leptonico o il colore? È evidente che le particelle hanno meccanismi interni che non si possono percepire in condizioni osservative normali. Le tante proprietà e le strutture interne delle particelle (che corrispondono ad altrettanti modi di esistenza che esse hanno nel mondo quantico alla scala di Planck) potrebbero essere legate a quella che abbiamo chiamato la dimensionalità dello spazio, e più precisamente al suo *compattarsi*.

La teoria delle corde non tratta di particelle puntiformi. Dal punto di vista teorico, essa offre numerose possibilità perché le particelle abbiano determinate proprietà. Ad esempio le corde possono vibrare in molte modalità quantizzate di oscillazione. Le corde di un violino possono emettere un'ampia gamma di suoni armonici. La corda può vibrare come un tutto unico, o come due metà indipendenti, con un nodo (punto stazionario) nel punto di mezzo. E può anche vibrare come se fosse composta di tre parti separate, o di un numero qualsiasi, producendo quindi una serie di armonici. Lo stesso vale in teoria delle corde. I diversi modi di vibrazione danno in effetti luogo a particelle di tipo diverso, ma questo in sé non è sufficiente a spiegare le differenze tra elettroni e neutrini, fotoni e gluoni, o *quark up* e *quark charm*.

La chiave per spiegare la grande varietà di particelle elementari sta forse nei profondi cambiamenti nella natura dello spazio, e in particolare nella possibilità che esso, o una sua parte, sia *compatto*. Immaginiamo uno spazio bidimensionale, per esempio un cilindro liscio che può essere descritto come compatto (finito) in direzione *y*, ma infinito in direzione *x*. Ora, invece di ridurre la direzione *y* a un diametro di qualche centimetro, prendiamola di un micron (un millesimo di millimetro); se guardassimo il cilindro senza l'ausilio di un microscopio, esso ci apparirebbe come uno spazio unidimensionale, una striscia infinitamente sottile; solo al microscopio l'oggetto si rivelerà in realtà bidimensionale, ma la seconda dimensione, quella della direzione *y*, rimane nascosta all'osservatore. Supponiamo adesso di ridurre ulteriormente il diametro della direzione compatta fino a portarla alla lunghezza di Planck. Il processo tramite il quale alcune direzioni vengono rese finite mentre altre sono lasciate infinite, è detto *compattazione*. In altri termini, possiamo scegliere di nascondere un numero qualunque di dimensioni arrotolandole in un piccolo spazio compatto. La 2-sfera è solo uno dei modi in cui si possono compattare due dimensioni. Un altro modo semplice è il toro: come la 2-sfera è la superficie di una palla, così il toro è la superficie di una ciambella, localmente equivalente alla palla relativamente a certe sue proprietà metriche, ma globalmente differente rispetto alle proprietà topologiche. Si possono usare molte altre forme, ma il toro è la più comune. Le dimensioni supplementari devono essere arrotolate in uno spazio compatto microscopico. Oggi le teorie con dimensioni supplementari compattate sono dette *teorie di Kaluza-Klein*.

La teoria delle supercorde rappresenta una generalizzazione straordinaria dell'idea originaria di Kaluza e Klein, i quali proposero di unificare i concetti di simmetrie interne e di simmetrie spazio-temporali riducendo il primo di essi al secondo attraverso l'introduzione di una dimensione spaziale supplementare, più precisamente, una quinta dimensione spaziale che possiede la topologia del cerchio, vale a dire: $x^A = (x^\mu, x^5)$, dove $x^5 \equiv x^5 + 2\pi R$). I diversi modi di compattare uno spazio, vale a dire di avvolgere le sei dimensioni supplementari, e il fatto di usare il moto nelle nuove direzioni aggiungendo quindi nuovi parametri dinamici fondamentali, permettono di spiegare i meccanismi interni delle particelle elementari. La teoria delle supercorde offre molte più possibilità delle teorie con particelle puntiformi. Torniamo al cilindro, e supponiamo che sulla sua superficie si muova una piccola corda chiusa (un laccio). Supponiamo dapprima che abbia un raggio abbastanza grande per essere visibile ad occhio nudo. Una piccola corda chiusa si muove sulla superficie cilindrica in maniera molto simile a una particella puntiforme: può muoversi parallelamente all'asse o girargli attorno in direzione perpendicolare. Da questo punto di vista non differisce in alcun modo da una particella puntiforme. Ma la corda può fare dell'altro, che la particella puntiforme non può fare: può avvolgersi attorno al cilindro, come un elastico di gomma attorno a un tubo di cartone. La stringa avvolta è diversa da quella che non lo è. L'elastico, in effetti, si può avvolgere intorno al tubo un numero qualunque di volte, a patto di non rompersi. In altre termini, lo spazio topologico del tubo è multiconnesso, il che significa che esistono in esso diversi tipi di cammini o che lo stesso cammino può essere tracciato o percorso in vari modi. In un linguaggio più matematico questo spazio ha un gruppo di omotopia non banale: i lacci che possono essere tracciati in esso non sono tutti deformabili in un punto; esistono diversi tipi di lacci con proprietà topologiche differenti. Questo dà luogo a una nuova proprietà delle particelle: una proprietà che dipende non solo dalla compattazione delle dimensioni spaziali, ma anche dal fatto che le particelle sono corde, ossia elastiche. La nuova proprietà si chiama *numero di avvolgimento*, e rappresenta per l'appunto il numero di volte che la stringa si avvolge nella dimensione spaziale compatta. Il numero di avvolgimento è una proprietà della particella che non potremmo capire senza prendere in considerazione distanze piccole quanto il diametro della direzione compattata, e le dimensioni complementari sono così essenziali per capire le complesse proprietà interne delle particelle elementari. Gli spazi a dieci dimensioni (le quattro dello spazio-tempo della relatività generale più le sei arrotolate in un minuscolo spazio esadimensionale) della teoria delle supercorde superano qualsiasi capacità di visualizzazione. La loro geometria può essere assai intricata, stratificata e multiforme: possiamo solo immaginarcela e cercare di modellarla mentalmente. Ad esempio, la teoria delle supercorde consente di arrotolare sei dimensioni spaziali in più di un milione di modi. Questi spazi sono chiamati *spazi di Calabi-Yau*: essi possono essere estremamente complicati, con centinai di «buchi» (che permettono di definirne un invariante fondamentale, ossia il *genere topologico*) e migliaia di «manici» e altre stranezze e singolarità.

Torniamo all'esempio "semplice" del cilindro bidimensionale. La lunghezza della circonferenza della sezione è detta *scala di compattazione*; nel caso di un tubo di cartone è un diametro di qualche centimetro, ma nella teoria delle supercorde è molto probabilmente qualche lunghezza di Planck. Anche se così minuscole, simili lunghezze hanno un effetto sulla fisica ordinaria. La scala di compattazione nella teoria di Kaluza-Klein fissa il valore della carica elettrica di una particella come l'elettrone, nonché la massa di molte particelle. In altre parole, essa determina diverse costanti che appaiono nelle comuni leggi della fisica. Variando il raggio del cilindro cambiano le leggi della fisica; trasformando il modo di avvolgimento delle dimensioni spaziali supplementari (cioè deformando la forma e la struttura interna dello spazio geometrico alla scala fisica della grandezza di Planck) mutano i comportamenti delle interazioni e gli stati dei campi, e l'apparizione di ben altri effetti fisici inaspettati può a sua volta modificare la struttura dello spazio e dello spazio-tempo. C'è quindi un legame profondo tra il tipo di strutture geometriche e topologiche che caratterizzano lo spazio-tempo e le dinamiche (cioè simmetrie più proprietà fisiche) dei campi e delle particelle che "vivono" alla scala quantica. L'"ontologia" della fisica sviluppatasi fin dagli inizi degli anni settanta per risolvere le anomalie concettuali presenti nel modello standard, esprime questo nesso strettissimo tra le strutture geometriche e topologiche variabili dello spazio-tempo e le diverse simmetrie interne (i numeri quantici) che determinano le proprietà caratteristiche delle interazioni conformemente alla natura dei parametri presenti nel modello. Ed è perciò che bisognerebbe qualificare tale ontologia di *dinamica* anziché di *statica*, d'*interazionale* piuttosto che di *sostanziale*, di stratificata invece che di unica.

Precisiamo la natura di tale legame tramite qualche esempio. Per descrivere il cilindro è sufficiente specificare un parametro, ossia la scala di compattazione, ma gli spazi di altro tipo possono richiederne di più. Un toro, ad esempio, è determinato da tre parametri. Innanzitutto c'è la *dimensione globale* del toro: tenendone costante la sua forma topologica, questo può venire ingrandito o rimpicciolito. In secondo luogo, il toro può essere piatto, come un anello sottile, o "voluminoso" come una ciambella gonfia. Il parametro che determina il volume è un *rapporto*, quello tra il diametro del buco e il diametro totale: per l'anello sottile il diametro globale e quello del buco sono pressappoco uguali, dunque il loro rapporto vale circa uno; nel caso della ciambella gonfia invece il buco è molto più piccolo, e il rapporto è di conseguenza molto minore. C'è un'ulteriore quantità che è data dalla torsione applicata al toro aperto, cioè al cilindro;

si tratta di attorcere un'estremità di esso, tenendo l'altra fissa, quindi ricongiungendole: otterremo di nuovo un anello, ma avvitato su sé stesso. L'*angolo di torsione* è la terza variabile. I parametri che determinano la struttura intrinseca e la forma globale del toro sono detti *moduli* nel linguaggio matematico. In termini più tecnici, essi sono delle *famiglie di deformazioni* di un certo tipo di spazio (per esempio una superficie di Riemann). Un toro ha tre moduli. Il cilindro, o meglio una sua sezione trasversale rappresentata da una circonferenza, ne ha uno solo. Un tipico spazio di Calabi-Yau, invece, ne ha centinaia. Un punto particolarmente importante è che questi moduli possono così produrre un "paesaggio" fisico-matematico molto ricco in termini di variabili dinamiche e d'invarianti algebrici e topologici, e incredibilmente complicato circa i valori che possono assumere i parametri fondamentali delle leggi fisiche. Si può immaginare che questi valori formino uno spettro di "valori critici" che corrispondono a quelli che si osservano nelle transizioni di fase. Ad esempio, l'estensione della dimensione compatta del cilindro (descritta prima) determina i valori di diverse costanti di accoppiamento e masse. Questo significa che le leggi della fisica possono (teoricamente) variare da punto a punto, come se un campo scalare di qualche tipo controllasse il valore della carica elettrica e della massa delle particelle. In altri termini, i moduli formano una specie di "paesaggio" fisico-matematico con un gran numero di dimensioni e di trasformazioni intrinseche. Uno spazio di Calabi-Yau è enormemente più complicato della sezione circolare del cilindro, ma il principio è lo stesso: estensione e forma dello spazio possono variare con la posizione come se centinaia di campi scalari controllassero le leggi della fisica.

5. La nuova "ontologia" dello spazio-tempo, dalla meccanica quantistica alle teorie geometriche dei campi quantistici; alcune osservazioni filosofiche

Ci sembra ora opportuno porre l'accento su cinque caratteristiche della matematica e della fisica teorica sviluppatasi durante la seconda metà del Novecento. Riteniamo, infatti, che esse consentono di chiarire il significato di certi aspetti metafisici dei maggiori problemi concettuali in cui si dibatte la fisica attuale. Inoltre, la definizione di ciò che potrebbe essere una nuova "ontologia" della fisica contemporanea non può prescindere da una considerazione filosofica approfondita di tali caratteristiche.

1) Le teorie fisiche più importanti al giorno d'oggi, in particolare la gravità quantistica a *loops*, la geometria non-commutativa e la teoria delle supercorde, hanno abbandonato l'idea della natura puntiforme dello spazio-tempo e delle entità fondamentali della fisica. È importante notare che sebbene la teoria quantistica dei campi sia inconciliabile con la relatività generale, le due teorie condividono (perlomeno virtualmente) una proprietà comune: in entrambe i punti dello spazio hanno in realtà un ruolo centrale, un ruolo che è oggettivo e dinamico. Più precisamente, nella teoria quantistica dei campi due elettroni invece di essere descritti da una funzione d'onda nello spazio a sei dimensioni R^6, costituiscono uno stato di un campo nello spazio tridimensionale R^3 che si trova ad essere eccitato nella vicinanza di due punti. Si può dire che, in questo modo, i punti dello spazio *indicizzano* gli osservabili nella teoria. La matematica della teoria quantistica dei campi è un tentativo di descrivere la natura dello spazio, e a questo fine essa propone di considerare lo spazio in un modo completamente diverso rispetto alle teorie fisiche anteriori. Analogamente alla teoria quantistica dei campi, la teoria dei *twistors* di Penrose (elaborata durante gli anni sessanta) rappresenta un tentativo radicale di liberarsi dallo spazio in quanto concetto primario, ovvero visto come quadro che predetermina la fisica e come oggetto essenzialmente puntiforme. La geometria non-commutativa sviluppata da Alain Connes agli inizi degli anni Novanta propone una generalizzazione profonda del concetto "classico" di varietà riemanniana, e sviluppa un nuovo concetto di spazio geometrico dove i punti come tali non hanno più nessun ruolo e dove l'azione delle strutture matematiche, in particolare di certi gruppi di simmetria, è definita con un maggiore grado di libertà. Recentemente, la geometria non-commutativa si è rivelata particolarmente utile per poter descrivere la natura dello spazio-tempo alle scale atomica e subatomica. Infine, la teoria delle supercorde propone uno schema matematico particolarmente ricco in cui lo spazio è concepito come un'approssimazione di un certo tipo di struttura molto più generale (per considerazioni più approfondite si vedano i paragrafi 3 e 4). Tutte e due le teorie citate sembrano sviluppare l'idea filosofica di origine leibniziana dell'esistenza di una coesistenza relazionale profonda degli enti matematici e delle entità fisiche, delle proprietà topologiche dello spazio-tempo e delle azioni dinamiche delle forze fisiche.

2) Il passaggio da una concezione locale a una concezione globale dello spazio-

tempo e dei fenomeni fisici è essenziale per capire le teorie fisiche menzionate al punto 1. Rispetto alla matematica e alla fisica dell'Ottocento (con particolare riferimento alla geometria riemanniana e alla teoria elettromagnetica classica), l'accento si è spostato verso una comprensione delle proprietà globali e dei comportamenti a grande scala degli oggetti matematici e delle entità fisiche. Le idee topologiche sono così diventate essenziali. A partire dal lavoro di Riemann sulla geometria complessa e le superfici topologiche, le funzioni verranno definite non più tramite delle formule esplicite, bensì attraverso le loro proprietà globali, ossia attraverso il riconoscimento dell'esistenza e dei valori delle loro singolarità. Concetti fondamentali della topologia differenziale e algebrica come quelli di fibrato principale, di classi caratteristiche di Steifel-Whitney, di omologia e coomologia, di omotopia, di invarianti topologici quali la caratteristica di Eulero e la segnatura di Hirzebruch, il teorema di Atiyah-Singer, ecc., sono diventati una componente essenziale della costruzione teorica della fisica.

3) Un'altra caratteristica fondamentale, come abbiamo ampiamente visto nel paragrafo 4, è l'incremento del numero di dimensioni dello spazio e dello spazio-tempo, il che ha portato a ripensare in profondità interi settori della fisica. Un aspetto particolarmente significativo di questo incremento è il passaggio dalle dimensioni finite alle dimensioni infinite, dagli spazi lineari agli spazi di Hilbert con un numero infinito di variabili. In questo modo, oltre alle funzioni a più variabili, si possono avere funzioni di funzioni ed anche funzionali; questi ultimi sono delle funzioni definite nello spazio stesso delle funzioni.

4) Il passaggio dal commutativo al non-commutativo è un'altra delle idee fondamentali che hanno cambiato profondamente la concezione della matematica e della fisica teorica durante il Novecento. Dopo l'opera originale di Grassmann (1844) sulle algebre esteriori e i lavori precursori di Clifford sulle algebre geometriche (1873; 1882), che costituiscono una generalizzazione dei quaternioni di Hamilton, è con la meccanica quantistica e in particolare con i lavori di Heisenberg e Dirac che appaiono per la prima volta in fisica le diverse applicazioni della teoria delle matrici e la moltiplicazione non-commutativa. In più, come Dirac lo mostrerà nel 1926, le cosiddette relazioni di commutazione formanti il principio d'indeterminazione di Heisenberg sono un esempio molto importante di applicazione significativa di un'algebra non-commutativa in fisica, la quale troverà un'estensione grazie a J. von Neumann nel quadro della sua algebra degli

operatori (dette anche C^*-algebre) nello spazio di Hilbert. Una C^*-algebra è l'algebra degli operatori lineari limitati (cioè continui) $B(\mathrm{H})$ su uno spazio di Hilbert complesso H dotato delle operazioni solite e con x^* che indica l'aggiunto di x. Più precisamente, una C^*-algebra, A, è un'algebra di Banach su un campo complesso, assieme ad un'involuzione $*: A \to A$ che manda x in x^* e che gode della proprietà $\|x^*x\| = \|x\|^2$ per ogni $x \in A$. Ricordiamo inoltre che l'algebra degli operatori di von Neumann servirà da base ad Alain Connes per l'elaborazione del suo programma di geometria non-commutativa.

5) Un'ultima caratteristica importante è il passaggio da una concezione lineare della matematica e della fisica a una non-lineare. Sia nella geometria euclidea che nella fisica newtoniana, si presuppone che ogni oggetto o fenomeno fisico sia lineare. Nella geometria riemanniana e nella teoria della relatività generale, invece, si considerano degli oggetti e fenomeni che sono fondamentalmente non-lineari. In fisica, le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo sono equazioni differenziali lineari a derivate parziali. La loro controparte, vale a dire le ben note equazioni non-abeliane di Yang-Mills della teoria quantistica di *gauge*, sono, invece, delle equazioni non-lineari che si suppone governino le forze fondamentali (eccetto la gravitazione) che strutturano la materia. La ragione fondamentale per cui le equazioni di Yang-Mills sono non-lineari sta nel fatto che esse costituiscono una versione matriciale delle equazioni di Maxwell, e il fatto che le matrici non commutino, è precisamente ciò che origina il termine non-lineare nelle equazioni di Yang-Mills. Per cui, in diverse teorie e nelle loro equazioni, come nelle teorie geometriche di *gauge* non-abeliane in dimensione 4 (ci si riferisce in particolare ai lavori fondamentali di S. K. Donaldson, C. Taubes e E. Witten) e nella geometria non-commutativa alla Connes, esiste un nesso profondo tra la non-linearità e la non-commutatività. Difatti, la non-commutatività genera un certo tipo di non-linearità, e ciò rappresenta un tratto particolarmente importante e interessante della fisica teorica attuale.

6. Breve conclusione

L'idea forse più importante degli sviluppi cui abbiamo accennato nel presente articolo è che lo spazio deve essere considerato come un oggetto dinamico che può cambiare in funzione delle proprietà metriche e topologiche che gli si attribuiscono nel modello teorico. Lo spazio dovrebbe pertanto essere considerato come un concetto emergente, prodotto da diversi tipi di trasformazioni indotte dall'azione delle simmetrie interne associate agli stati dinamici dei campi quantistici. Le particelle "elementari" e le loro proprietà non sono più descritte e spiegate in termini di punti senza struttura interna contenuti nello spazio, e di traiettorie del moto ovunque continue, uniche, lineari e commutabili tra di loro, bensì come degli oggetti matematici le cui proprietà e strutture potrebbero essere compatibili con una sorta di sovrapposizione non-lineare e non-commutativa di spazi dinamici di fase (in un senso assai simile a quello descritto dalla teoria fisica delle transizioni di fase), e perciò variare con l'apparizione di certi regimi critici, per effetto di una biforcazione in uno o più parametri o di una rottura spontanea di simmetria, o con il crearsi di singolarità topologiche (come i monopoli magnetici) tali da modificare globalmente la natura geometrica e la dinamica dello spazio-tempo. In più, non sarebbe solo il campo gravitazionale a emergere in quanto effetto dinamico dalla struttura geometrica e topologica dello spazio-tempo, ma anche i campi bosonici e fermionici che descrivono la materia e le forze elettrodeboli e forti agenti tra i diversi tipi di particelle. Reciprocamente, lo spazio-tempo può essere a sua volta visto, in un certo senso, come un concetto derivato e suscettibile di variare perché soggetto alle fluttuazioni quantistiche di quegli stessi campi.

Ringraziamenti. L'autore desidera ringraziare Antonio Saggion, Rossella Faraldo e Mario Tonin del Dipartimento di Fisica dell'Università di Padova per le discussioni interessanti avute su alcuni aspetti dei temi trattati in questo lavoro, e anche per avere cortesemente accettato di fare una rilettura critica di una prima versione di questo articolo. Sono grato al referee per le sue note su alcuni punti del presente lavoro, che mi hanno fornito l'occasione di migliorarne alcune formulazioni. Ringrazio, inoltre, Vincenzo Fano e Pierluigi Graziani per l'interesse mostrato per il presente lavoro.

Ha collaborato alla traduzione e all'adattamento dalla versione inglese Tommaso Panajoli, dottorando presso il corso *Science, Technology and Humanities*, Università di Bologna.

Riferimenti bibliografici

Ahronov, Y., Bohm, D., 1959, «Significance of electromagnetism potentials in the quantum theory», *Physical Review*., 115, n. 3, pp. 485-491.

Angelantoni, C., Sagnotti, A., 2002, «Open strings», *Physics Reports*, 371, pp. 1-66.

Ashetekar, A., 1998, «Geometric Issues in Quantum Gravity», in *The Geometric Universe. Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. by S.A. Hugget, P. Tod, L. J. Mason, Oxford, Oxford University Press, pp. 172-194.

Ashetekar, A., Lewandowski, L., 2004, «Background independent quantum gravity: A status report», *Classical and Quantum Gravity*, 21, pp. 33-152.

Atiyah, M., 1989, «Topological quantum field theories», *Publications Mathématique de l'Institute des Hautes Études Scientifiques*, 68, pp. 175-186.

Audretsch, J., 1994, «Ist die Raum-Zeit gekrümt? Der Aufbau der modernen Gravitationstheorie» in *Philosophie und Physik der Raum-Zeit*, ed. by J. Audretsch, K. Meinzer, Bibliographisches Institut-Wissenschaftsverlag, Zurigo, pp. 52-82.

Bartocci, C., Bruzzo, U., Hernández Ruipérez, D., 2009, *Fourier-Mukai and Nahm transforms in geometry and mathematical physics*, Birkhäuser, Boston.

Bennequin, D., 2001, «Invariants contemporains», in *Nouveaux Invariants en Géométrie et en Topologie*, Panoramas et Synthèses, n° 11, SMF (Paris), pp. 131-159.

Bergia, S., 1990, «Strutture e dimensionalità dello spazio-tempo: realtà, modello o occasione di formalismo?», in *Dove va la scienza? La questione del realismo*, a cura di F. Selleri e V. Tonini, Bari, Dedalo, pp. 51-69.

Bergia, S., 1995, *Dal cosmo immutabile all'universo in evoluzione*, Torino, Bollati Boringhieri.

Boi, L., 1992, «L'espace: concept abstrait et/ou physique; la géométrie entre formalisation mathématique et étude de la nature», in *1830–1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, ed. by L. Boi, D. Flament and J.-M. Salanskis, «Lectures Notes in Physics», Heidelberg, Springer-Verlag, pp. 65-90.

Boi, L., 1994(a), «Mannigfaltigkeit und Gruppenbegriff. Zu den Veränderungen der Geometrie im 19. Jahrhundert», *Mathematische Semesterberichte*, 41, n. 1, pp. 1-16.

Boi, L., 1994(b), «Die Beziehungen zwischen Raum, Kontinuum und Materie im Denken Riemanns; die Äthervorstellung und die Einheit der Physik. Das Entstehen einer neuen Naturphilosophie», *Philosophia Naturalis*, 30, n. 2, pp. 171-216.

Boi, L., 1995, *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, Préface de René Thom, Heidelberg & Berlino, Springer-Verlag.

Boi, L., 1996, «Les géométries non euclidiennes, le problème philosophique de l'espace et la conception transcendantale; Helmholtz et Kant, les néo-kantiens, Einstein, Poincaré et Mach», *Kant-Studien*, Philosophische Zeitschrift der Kant-Geselschaft, Walter de Gruyter, Berlino, 87, n.3, pp. 257-289.

Boi, L., 2000, «Géométrie de l'espace-temps et nature de la physique: quelques réflexions historiques et épistémologiques », *Manuscrito*, 23, n**.** 1, pp. 31-98.

Boi, L. 2004(a), «Theories of space-time in modern physics», *Synthese*, 139, pp. 429-489.

Boi, L., 2004(b), «Geometrical and topological foundations of theoretical physics: from gauge theories to string program», *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 34, pp.1777-1836.

Boi, L., 2006(a), «Nouvelles dimensions mathématiques et épistémologiques du concept d'espace en physique relativiste et quantique», in *L'espace physique, entre mathématique et philosophie*, M. Lachièze-Rey (éd.), Parigi, EDP Sciences, pp. 101-133.

Boi, L., 2006(b), «Topological knot theory and macroscopic physics», in *Encyclopedia of Mathematical Physics*, ed. by J.-P. Françoise, G. Naber, T. S. Tsun, Oxford, Elsevier, pp. 271-278.

Boi, L., 2006(c), «From Riemannian Geometry to Einstein's General Relativity Theory and Beyond: Spacetime Structures, Geometrization and Unification», in *Albert Einstein Century International Conference Proceedings*, Conference Proceedings Series 861, ed. by J. M. Alimi, A. Füzfa, Melville (USA), American Institute of Physics Publishers, pp. 1066-1075.

Boi, L., 2006(d), «The *Aleph* of Space. On some extensions of geometrical and topological concepts in the twentieth-century mathematics: from surfaces and manifolds to knots and links», in *What is Geometry?*, a special volume of the "Advanced Studies in Mathematics and Logic Series", ed. by G. Sica, Milano, Polimetrica, pp. 79-152.

Boi, L., 2009(a), «Creating the Physical World *ex nihilo*? On the Quantum Vacuum and its Fluctuations», in *The Two Cultures*: *Shared Problems*, ed. by E. Carafoli, G.A. Danieli e G.O. Longo, Milano, Springer, pp. 51-98.

Boi, L., 2009(b), «Ideas of Geometrization, Geometric Invariants of Low-Dimensional Manifolds and Topological Quantum Field Theories», *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 6, n.4, pp. 1-54.

Boi, L., 2009(c), «Geometria e dinamica dello spazio-temppo nelle teorie fisiche recenti. Su alcuni problemi concettuali della fisica contemporanea», *Giornale di Fisica*, Società Italiana di Fisica, 50 (suppl. 1), pp. 1-10.

Boi, L., 2009(d), «Clifford Geometric Algebras, Spin Manifolds, and Groups Action in Mathematics and Physics», *Advances in Applied Clifford Algebras* (Toulouse Proceedings of the 7th International Conference on Clifford algebras and their applications), Birkhäuser, 19**,** n. 3, pp. 1-42.

Boi, L., 2011, *The Quantum Vacuum. A Scientific and Philosophical Concept, from Electrodynamics to String Theory. The Geometry of the Microscopic World*, Baltimora, The Johns Hopkins University Press.

Boi, L., 2012 (in stampa), «Some reflections on the relationship between geometry and reality, space-time theory and the geometrization of theoretical physics, from B. Riemann to H. Weyl and beyond», *Foundation of Science*.

Boi, L., 2012 (in stampa), «Non-commutativity geometry and the physical world», *Advances in Mathematical Physics*, numero speciale su "Non linearity and non commutativity in mathematics and physics".

Boniolo, G. (a cura di), 1997, *Filosofia della fisica*, Milano, Bruno Mondadori.

Bourguignon, J.P., Lawson, H.B., 1982, «Yang-Mills Theory: its Physical Origins and Differential Geometric Aspects», in *Seminar on Differential Geometry*, ed by S. T. Yau, Princeton, Princeton University Press, pp. 395-421.

Callender, C., Hugget, N. (eds.), 2001, *Physics Meets Philosophy at the Planck Scale*, Cambridge, Cambridge University Press.

Candelas, P., Horowitz, G.T., Strominger, A., Witten, E., 1985, «Vacuum configurations for superstrings», *Nuclear Physics B*, 258, pp. 46-74.

Cao, T. Yu., 1997, *Conceptual Developments of 20th Century Physics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Carfora, M., 2011, «Quantum Gravity and Quantum Geometry», in *New Trends in Geometry. Their Role in the Natural and Life Science*, ed. by C. Bartocci, L. Boi, C. Sinigaglia, Londra, Imperial College Press, pp. 17-33.

Clarke, C., de Felice, F., 1990, *Relativity on Curved Manifolds*, Cambridge, Cambridge University Press.

Clifford, W. K., 1968, *Mathematical Papers* (1882), nuova ed., New York, Chelsea.

Clifford, W. K., 1876, «On the space-theory of matter», *Cambridge Philosophical Society Proceedings*, 2, pp. 157-158.

Cohen-Tannoudji, G., Spiro, M., 1986, *La matière-espace-temps*, Parigi, Fayard.

Coleman, S., 1985, *Aspects of Symmetry*. Selected Erice lectures, Cambridge, Cambridge

University Press.

Connes, A., 1994, *Noncommutative Geometry*, San Diego, Academic Press.

Connes, A., 1998, «Noncommutative Differential Geometry and the Structure of Space-Time», in *The Geometric Universe*, ed. by S.A. Huggett *et al*, Oxford, Oxford University Press, pp. 49-80.

Connes, A., Chamseddine, A. H., 2006, «Inner fluctuations of the spectral action», *Journal of Geometry and Physics*, 57, pp. 1-21.

Damour, T., 1995, «General Relativity and Experiment», in *Proc. of the XIth International Congress of Mathematical Physics*, ed. by D. Iagolnitzer, Boston, Boston: International Press, pp. 37-46.

De Broglie, L., 1937, *La physique nouvelle et les quanta*, Parigi, Flammarion.

De Felice, F., 2005, *L'intreccio spazio-temporale*, Torino, Bollati Boringhieri.

DeWitt, B., 2003, *The Global Approach to Quantum Field Theory*, Oxford, Clarendon Press.

Dirac, P.A.M.,1930, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, Clarendon Press.

Donaldson, S. K., 1983, «An application of gauge theory to the topology of four manifolds», *Journal of Differential Geometry*, 18, pp. 269-287.

Doplicher, S., Fredenhagen, K., Roberts, J.E., 1995, «Quantum structure of space-time at the Planck scale and Quantum fields», *Communications in Mathematical Physics*, 172, n. 1, pp. 187-220.

Ehlers, J., 1973, «The Nature and Structure of Space-Time», in *The Physicist's Conception of Nature*, ed. by J. Mehra, Dordrecht, Reidel, pp. 71-91.

Einstein, A., 1916, «Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie», *Annalen der Physik*, 49, n. 4, pp. 769-822.

Einstein, A.,1956, *The Meaning of Relativity*, Princeton, Princeton University Press.

Ellis, G.F.R., Williams, R.M., 1998, *Flat and Curved Space-Times*, Oxford, Clarendon Press.

Fano, V., 1996, *Matematica ed esperienza nella fisica moderna*, Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti Modena, n. 14, Modena, Il Ponte Vecchio.

Feynman, R., 1949, «Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics», *Physical Review*, 76, pp. 769-789.

Feynman, R., 1967, *The character of physical laws*, Cambridge (Mass.), MIT Press.

Feynman, R., 1989, *QED–La strana teoria della luce e della materia*, Milano, Adelphi.

Freedman, D.Z., Nieuwenhuizen, P. van, 1997, «Le dimensioni nascoste dello spazio-tempo», in *Le Scienze*, quaderni, n. 97, pp. 80-87.

Geroch, R.P., Horowitz, G.T., 1979, «Global structures of space-time», in *General Relativity. An Einstein Centenary Survey*, ed. by S.W. Hawking, W. Israel, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 212-293.

Ghirardi, G. C.,1997, *Un'occhiata alle carte di Dio*, Milano, Il Saggiatore.

Goldstone, J., Salam, A., Weinberg, S., 1962, «Broken symmetries» *Physical Review*, 127, n. 3, pp. 965-970.

Graves, J.C., 1971, *The Conceptual Foundations of Contemporary Relativity Theory*, Cambridge (Mass.), MIT Press.

Gromov, M., LaFontaine, J., Pansu, P., 1999, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Basilea, Birkhäuser.

Gross, D., 1989, «Strings and Unification», in *New Theories of Physics* (Proceedings of the XI Warsaw Symposium on Elementary Particle Physics), ed. by Z. Ajduk, S. Pokorski, A. Trautman, Singapore, World Scientific, pp. 307-333.

Hawking, S.W., 1996, «Singularities in the Universe», *Physical Review Letters*, 17, pp. 444-465.

Hawking, S., Penrose, R., 1996, *The Nature of Space and Time*, Princeton, Princeton University Press.

Heisenberg, W., 1930, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Chicago, University of Chicago Press.

Higgs, P. W., 1964, «Broken Symmetries and the Mass of Gauge Bosons», *Physical Review Letters*, 13, pp. 508-509.

Iliopoulos, J., 1980, «Unified Theories of Elementary Particle Interactions», *Contemporary Physics*, 21, n. 2, pp. 159-183.

Isham, C.J., 1984, «Topological and global aspects of quantum field theory», in *Relativity, Groups and Topology II*, ed. by B.S. DeWitt, R. Stora, Amsterdam, Les Houches, pp. 1059-1290.

Itzykson, C., Zuber, J.-B., 1988, *Quantum Field Theory*, Singapore, McGraw-Hill.

Jaffe, A., Witten, E., 2006, «Quantum Yang-Mills Theory», in *The Millennium Problems*, ed. by J. Carlson, A. Jaffe. A. Wiles, Cambridge (Mass.), Clay Mathematics Institute, pp. 129-152.

Kane, G., 2001, *Supersymmetry: Unveilling the Ultimate Laws of Nature*, New York, Perseus Publishing.

Luminet, J.-M., 2011, «Geometry and Topology in Relativistic Cosmology», in *New Trends in Geometry. Their Role in the Natural and Living Sciences*, ed. by C. Bartocci, L. Boi, C. Sinigaglia, Londra, Imperial College Press, pp. 81-103.

Manin, Yu I., 1988, *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Berlino, Springer-Verlag.

Marathe, K. B., Martucci, G., 1992, *The Mathematical Foundations of Gauge Theories*, Studies in Mathematics and Physics, vol. 5., Amsterdam.

Minkowski, H., 1909, «Raum und Zeit», *Physikalische Zeitschrift*, 10, pp. 104-111.

Nambu, Y., 1965, «Dynamical symmetries and fundamental fields», in, *Symmetry Principles at High Energies*, ed. by Kursunoglu, B., Pelmutter, A., A. Sakmar, San Francisco, Freeman, pp. 274-285.

Nieuwenhuizen, P. van, 1984, «An Introduction to Simple Supergravity and the Kaluza-Klein Program», in *Relativity, Groups and Topology II*, ed. by B.S. DeWitt, R. Stora, Amsterdam, Les Houches, pp. 823-932.

Penrose, R., 1968, «Structure of Space-Time», in *Battelle Rencontres*, ed. by C.M. De Witt, J.A. Wheeler, New York, W.A. Benjamin, pp. 121-235.

Penrose, R., 2004, *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe*, London, Vintage.

Poincaré, H., 1902, *La Science et l'Hypothèse*, Parigi, Flammarion.

Regge, T., 1961, «General relativity without coordinates», *Il Nuovo Cimento* 19, pp. 558-571.

Ricci, G., Levi-Civita T., 1901, «Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications», *Mathematische Annalen*, 54, pp. 125-201.

Riemann, B., 1854, «Über die Hypothesen, whelche der Geometrie zu Grunde liegen» (*Habilitationsarbeit*, Göttingen, 1854), in *Gesammelte Mathematische Werke* (nuova edizione a cura di R. Narasimhan), Springer, 1990, pp. 304-319.

Rovelli, C., 1995, «Outline of a generally covariant quantum field theory and a quantum theory of gravity», *Journal of Mathematical Physics*, 36, n. 11, pp. 6529-6547.

Rovelli, C., 2004, *Quantum Gravity*, Cambridge, Cambridge University Press.

Smith, Q., 1997, «The ontological interpretation of the wave function of the universe», *The Monist*, 80, n. 1, pp. 160-185.

Susskind, L., 2007, *Il Paesaggio Cosmico. Dalle teoria delle stringhe al megaverso*, Milano, Adelphi.

Taubes, C., 1987, «Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds», *Journal of Differential Geometry*, 25, n. 3, pp. 363-430.

't Hooft, G., 2006, «The Conceptual Basis of Quantum Field Theory», in *Handbook of the Philosophy of Science*, *Philosophy of Physics*, ed. by D.M. Gabbay, P. Thagard, J. Woods, London, Elsevier.

Torretti, R., 1996, *Relativity and Geometry*, Oxford, Pergamon Press.

Trautman, A., 1973, «Theory of gravitation», in *The Physicist's Conception of Nature*, ed. by J. Mehra, Dordrecht, Reidel, pp. 179-201.

Vafa, C., 1998, «Geometric Physics», in *Documenta Mathematica*, Extra Volume ICM, Vol. I, pp. 537-556.

Veneziano, G., 1990, «Quantum strings and the constants of Nature», in *The Challenging Questions* (Erice, 1989), ed. by A. Zichichi, New York, Plenum Press.

Vilenkin, A., 2007, *Un solo mondo o infiniti?*, Milano, Raffaello Cortina Editore.

Weyl, H., 1923, *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Berlin, Springer.

Weyl, H., 1928, *Gruppentheorie und Quantenmechanics*, Leipzig, Springer.

Wheeler, J.A., 1967, «Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics», in *Battelle Rencontres*, 1967 Lectures in Mathematics and Physics, ed. by C. M. DeWitt, J. A. Wheeler, New York, Benjamin, pp. 242-307.

Witten, E., 1987, «Physics and Geometry», in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, (Berkeley, August 1986), American Mathematical Society, pp. 267-303.

Witten, E., 1988, «Topological quantum field theory», *Communications in Mathematical Physics*, 117, pp. 353-386.

Witten, E., 1995, «String theory dynamics in various dimensions», *Nuclear Physics B*, 443, pp. 85-126.

Yang, C.N. and R.L. Mills, 1954, «Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance», *Physical Review*, 96, n. 1, pp. 191-195.

Yang, C. N., 1977, «Magnetic Monopoles, fiber bundles, and gauge fields», *Annals of the New York Academy of Sciences*, 294, pp. 86-97.

Zumino, B., 1975, «Supersymmetry and the vacuum», *Nuclear Physics B*, 89, pp. 535-546.