NON-CATEGORICITATEA LOGICII (II). SISTEME LOGICE CU CONCLUZII MULTIPLE ȘI BILATERALISTE

CONSTANTIN C. BRÎNCUȘ

Institutul de Filosofie și Psihologie „Constantin Rădulescu-Motru” al Academiei Române

THE NON-CATEGORICITY OF LOGIC (II).
MULTIPLE-CONCLUSIONS AND BILATERALIST LOGICS

Abstract. The categoricity problem for a system of logic reveals an asymmetry between the model-theoretic and the proof-theoretic resources of that logic. In particular, it reveals *prima facie* that the proof-theoretic instruments are insufficient for matching the envisaged model-theory, when the latter is already available. Among the proposed solutions for solving this problem, some make use of new proof-theoretic instruments, some others introduce new model-theoretic constrains on the proof-systems, while others try to use instruments from both sides. On the proof-theoretical side, two main approaches for solving the categoricity problem for propositional classical logic consist in the enforcement of the formal systems of this logic by introducing rules of inference of a new kind. A multiple-conclusions logic allows rules of inference with more than one conclusion, while a bilateralist system contains rules of inference formulated in terms of assertion and rejection. Both these approaches reveal interesting formal features of logical reasoning. This paper analyses some of the advantages and limitations of these two approaches as solutions for a full formalization of logic, i.e., for a categorical formalization.

Keywords: categoricity, non-standard evaluations, inferentialism, multiple-conclusions, bilateralism.

1. INTRODUCERE

Problema categoricității pentru un sistem de logică pune în evidență existența unei asimetrii între resursele model-teoretice și cele demonstrativ-teoretice ce definesc acea logică. Mai precis, această problemă indică în primul rând faptul că instrumentele demonstrativ-teoretice sunt insuficiente pentru a reprezenta toate proprietățile logice definite prin teoria modelelor. Dintre soluțiile propuse pentru a rezolva această problemă, unele abordări introduc noi instrumente demonstrativ-teoretice, altele introduc constrângeri model-teoretice adiționale asupra unui calcul logic, iar altele folosesc instrumente și constrângeri atât din teoria modelelor, cât și din teoria demonstrației. Din perspectivă demonstrativ-teoretică, două abordări centrale propun întărirea sistemelor formale ale logicii clasice prin introducerea unor noi reguli formale de inferență de un tip aparte, inexistent în formalizările standard ale logicii clasice. O primă abordare este formularea unui sistem logic formal care admite reguli de inferență și secvențe cu concluzii multiple. Cea de a doua abordare constă în formularea unor reguli de introducere și eliminare pentru termenii logici în care propozițiile sunt însoțite de două atitudini propoziționale/acte de vorbire, i.e. asertarea și respingerea (*rejection/denial*). Obiectivul acestei lucrări este de a analiza avantajele și limitările cele două abordări, văzute ca soluții pentru formularea unei formalizări complete a logicii clasice propoziționale, i.e. o formalizare categorică.

2. NON-CATEGORICITATEA LOGICII[1]

Pentru a formula problema non-categoricității logicii clasice într-un mod sistematic și precis, voi lua ca primitivi termenii de *logică* și *spațiu de evaluări*[2].

Definiția 1 O logică L este o mulțime de argumente de forma $\Gamma \vdash \varphi$.

Definiția 1.1 Dacă un argument $\Gamma \vdash \varphi$ este în L, atunci vom spune că acest argument este L-valid.

Definiția 2 Un spațiu de evaluări V este o mulțime de evaluări v, unde o evaluare v este o funcție ce are ca argumente formulele bine formate ale limbajului lui L, iar ca imagini elementele mulțimii $\{\top, \bot\}$. $\top$ este singura valoare designată (adevărul), iar $\bot$ este singura valoare nedesignată (falsul).

Definiția 2.2 O evaluare v satisface un argument $\Gamma \vdash \varphi$ dacă și numai dacă $v(\varphi) = \top$, atunci când $v(\Gamma) = \top$.

Definiția 2.3 Dacă un argument $\Gamma \vdash \varphi$ este satisfăcut de către toate evaluările $v \in V$, atunci vom spune că argumentul este V-valid.

În termeni informali putem spune că Definiția 1 prezintă un sistem de logică în mod sintactic (sau demonstrativ-teoretic), deoarece noțiunea centrală pe care se bazează este cea de relație de consecință logică sintactică (i.e., derivabilitatea logică, reprezentată prin semnul $\ulcorner \vdash \urcorner$), de vreme ce Definiția 2 prezintă un sistem de a logică în mod semantic (sau model-teoretic), aceasta deoarece noțiunea centrală pe care se bazează este cea de consecință logică semantică (reprezentată prin semnul $\ulcorner \vDash \urcorner$), care este definită în termeni de evaluări, i.e., dacă argumentul $\Gamma \vdash \varphi$ este satisfăcut de către toate evaluările $v \in V$, atunci φ este o consecință logică a lui Γ (i.e. $\Gamma \vDash \varphi$). Următoarele două definiții (3 și 4) vor conecta cele două modalități de a prezenta un sistem de logică.

Definiția 3 L(V) este mulțimea argumentelor din L care sunt V-valide.

---

[1] Această secțiune este o adaptare a unei secțiuni din Brîncuș (manuscris 2023) *Categorical Quantification*.

[2] Pentru aprofundarea acestei terminologii și a dezvoltărilor pe baza ei, se pot consulta Scott (1971), Dunn and Hardegree (2001), Hardegree (2004), Hjortland (2014), Garson (2013), Bonnay and Westerståhl (2016), Murzi and Topey (2021).

Definiția 3.1 O evaluare v este L-consistentă dacă și numai dacă v satisface fiecare argument din L.

Definiția 3.2 V(L) este mulțimea evaluărilor v care sunt L-consistente.

În termeni informali, L(V) este sistemul logic formal asociat cu clasa de evaluări V. De exemplu, dacă în V există numai evaluările obținute pe baza tabelelor normale de adevăr (NTT-urile) pentru logica propozițională, atunci L(V) va fi calculul propozițional clasic în una dintre formulările sale. Se poate observa ușor că fiecare evaluare v din V definită pe baza NTT-urilor este L-consistentă în acest caz – deoarece un argument este V-valid dacă și numai dacă este satisfăcut de către fiecare evaluare din spațiul de evaluări V. Întrebarea care apare în acest punct este dacă mulțimea V(L) conține numai evaluările L-consistente care asignează termenilor logici din L înțelesul lor standard sau conține, de asemenea, evaluări care sunt L-consistente, dar asignează termenilor logici din L înțelesuri diferite de cele standard.

Definiția 4 O logică L este categorică dacă și numai dacă toate evaluările v din V(L) sunt standard.

Aceste definiții ne permit totodată să introducem teza inferențialismului logic, potrivit căreia axiomele sau regulile de inferență formale dintr-un anumit calcul logic determină înțelesul simbolurilor sale logice. În termenii de mai sus, teza inferențialistă afirmă că L(V) determină în mod unic mulțimea evaluărilor L-consistente V(L) astfel încât aceasta conține numai evaluări standard. Inferențialismul logic este înțeles în prezentul studiu, în acord cu alte abordări recente, ca un inferențialism model-teoretic (Carnap (1943), Garson (2013)), ca o teză metasemantică (Warren (2020)) și ca un inferențialism moderat (Murzi and Topey (2021)). Inferențialismul model-teoretic susține că înțelesurile termenilor logici sunt determinate de axiomele sau regulile de inferență formale ce guvernează utilizarea acestor termeni într-un calcul logic, dar aceste înțelesuri sunt caracterizabile în termeni model-teoretici (precum condiții de adevăr, denotație, referință etc), în opoziție cu inferențialismul demonstrativ-teoretic care susține că înțelesurile sunt caracterizabile în termeni demonstrativ-teoretici (precum demonstrație, condiții de derivabilitate etc.). Inferențialismul logic este o teză metasemantică deoarece este interesat să explice *modul în care* termenii logici își dobândesc înțelesul din regulile care le guvernează utilizarea. De exemplu, întrebarea semantică referitoare la simbolul $\ulcorner \sim \urcorner$ este *ce înțeles are simbolul* $\ulcorner \sim \urcorner$*?*, iar întrebarea metasemantică este *cum își dobândește simbolul* $\ulcorner \sim \urcorner$ *înțelesul său pe baza regulilor?* Inferențialismul logic este unul moderat, și nu extrem, deoarece nu identifică înțelesurile termenilor logici cu regulile care le guvernează utilizarea, ci încearcă să extragă înțelesurile model-teoretice ale acestor simboluri din reguli.

Prin urmare, o presupoziție importantă a inferențialismului logic, înțeles astfel, este aceea că termenii logici au o semantică care este dată anterior (logic) formulării regulilor și această semantică definește înțelesurile standard ale acestor termeni. Problema inferențialismului este *dacă* și *cum* putem să extragem această semantică din axiomele sau regulile formale de inferență care guvernează utilizarea termenilor logici într-un anumit calcul logic (sau chiar în limbajul natural). Altfel spus, problema este dacă regulile de inferență sunt compatibile *numai* cu evaluări (i.e. evaluări L-consistente) care asignează termenilor logici înțelesurile lor standard.

De exemplu, este foarte ușor să extragem înțelesul simbolului ⌜ & ⌝ din regulile sale de introducere și de eliminare. Tot ceea ce trebuie să asumăm este că aceste reguli transmit valoarea designată ⊤ atunci când se trece de la premise la concluzie și că retransmit valoarea nedesignată ⊥ de la concluzie la cel puțin una dintre premise, i.e., să asumăm că regulile sunt valide sau corecte (*sound*). Astfel, regula de introducere pentru ⌜ & ⌝ determină primul rând al NTT-ului pentru ⌜ & ⌝ (i.e. dacă atât ⌜ p ⌝ cât și ⌜ q ⌝ sunt ⊤, atunci ⌜ p&q ⌝ este ⊤), iar regulile de eliminare determină cele trei rânduri rămase (i.e. dacă ⌜ p ⌝ este ⊥, atunci ⌜ p&q ⌝ este ⊥; dacă ⌜ q ⌝ este ⊥, atunci ⌜ p&q ⌝ este ⊥). Deoarece regulile pentru ⌜ & ⌝ determină în mod unic înțelesul său standard, nu există nicio evaluare non-standard compatibilă cu aceste reguli[3]. Acest tip de rezultat nu este valabil însă pentru majoritatea termenilor logici. De exemplu, regulile de inferență pentru ⌜ ∼ ⌝ nu determină niciun rând din NTT-ul său și astfel lasă deschisă posibilitatea unei evaluări non-standard care asignează valoarea designată⊤ atât unei propoziții, cât și negației sale.

Din punct de vedere istoric, așa cum am menționat în prima parte a studiului[4], Carnap (1937: xv) a crezut inițial că un sistem de logică poate fi identificat cu o mulțime de argumente generate de o listă inițială arbitrară de axiome și reguli de inferență formale a căror validitate este luată ca primitivă (faimosul *principiu al toleranței*). Ulterior, cercetările sale semantice l-au determinat să impună o primă restricție caracterului arbitrar al listei inițiale. Carnap (1942: 218-19) a argumentat că atunci când un sistem de logică L este definit în relație cu un sistem semantic V(L), acest sistem trebuie formulat astfel încât să *reprezinte* sistemul semantic dat anterior. Această reprezentare necesită ca toate argumentele din L să fie V-valide (i.e., L este un sistem logic corect), toate argumentele din L(V) să fie derivabile din lista inițială de axiome sau reguli de inferență (i.e. L este un sistem logic semantic complet) și, în plus, toți termenii logici din L să își prezerve înțelesul semantic standard în toate evaluările L-consistente (i.e. L este un sistem logic categoric). Dacă aceste trei condiții sunt îndeplinite, atunci L este o *formalizare completă* a sistemului semantic dat anterior. Descoperirile lui Carnap (1943) au fost negative în ceea ce privește cea de-a treia condiție, în sensul că există evaluări pentru sistemele formale standard ale logicii propozițiilor și ale logicii predicatelor de ordinul întâi (i.e. calcule logice cu un număr finit de premise și cu o singură concluzie) care sunt L-consistente, dar care asignează celor mai mulți termeni logici înțelesuri non-standard[5].

---

[3] O formă mai slabă de inferențialism model-teoretic este ceea ce Garson (2001:114-15, 2013: 49–50) numește *semantică naturală.* Aceasta este o metodă prin care se asignează valori semantice posibile și se extrag proprietățile semantice ale termenilor logici din regulile de deducție care le guvernează utilizarea. Această metodă nu vizează simetria dintre înțelesurile extrase din reguli și înțelesul semantic standard, așa cum este definit de o anumită semantică dată anterior.

[4] A se vedea Brîncuș (2022).

[5] Câteva referințe utile pentru urmărirea problemei categoricității sunt următoarele: Carnap (1943), Church (1944), Shoesmith & Smiley (1978), Garson (1990, 2013), Smiley (1996), Rumfitt (2000), Raatikainen (2008), Murzi & Hjortland (2009), Hjortland (2014), Bonnay and Westerståhl (2016), Warren (2020), Murzi and Topey (2021), Bonnay & Speitel (2021), Brîncuș (2021, forthcoming).

3. EVALUĂRILE NON-STANDARD

Pentru logica propozițiilor există două tipuri de evaluări non-standard: una (**$v^{\top}$**) în care fiecărei propoziții îi este asignată valoarea de adevăr $\top$ și una (**$v^{\vdash}$**) în care numai teoremelor le este asignată valoarea de adevăr $\top$.

$v^{\top}$ $(\varphi) = \top$, pentru toate formulele bine formate φ ale lui L. Astfel, **$v^{\top}$**$(\varphi)=$ **$v^{\top}$** $(\sim\varphi) =\top$.

$v^{\vdash}$ $(\varphi) = \top$, dacă φ este o teoremă.

$v^{\vdash}$ $(\varphi) = \bot$, dacă φ este o non-teoremă. Astfel, **$v^{\vdash}$**$(\varphi)=$ **$v^{\vdash}$**$(\sim\varphi)= \bot$, dar **$v^{\vdash}$** $(\varphi \vee \sim \varphi)= \top$.

Pentru logica predicatelor, pe lângă aceste două evaluări non-standard, există evaluări specifice cuantificatorilor. Aceste evaluări au o cauză diferită decât cele propoziționale și depind foarte mult de modul în care semantica standard a cuantificatorilor este formulată, i.e. în termeni de interpretări obiectuale sau substituționale. Ceea ce le generează este natura finitară a regulilor de inferență. Nu vom insista aici asupra acestor aspecte deoarece ele vor face obiectul unei părți viitoare a prezentului studiu.

v^{+} $(\forall xPx)=$ **v^{+}**$(Pa \;\&\; Pb \;\&\; Pc \;\&\; \ldots \&\; Qb)= \top$

v^{+} $(\exists xPx) =$ **v^{+}**$(Pa \vee Pb \vee Pc \vee \ldots\ldots \vee \sim Qb)= \top$

v^{ω} $(\forall xAx)= \bot$, dar **v^{ω}**(Ac, pentru fiecare constantă individuală c)$= \top$.

Un rezultat semnificativ în analiza non-categoricității logicii propozițiilor este demonstrat de Garson (2013), care arată că evaluările non-standard depind atât de modul în care calculul propozițional este formulat (axiomatic, deducție naturală, calcul secvențial), dar și de modul în care o evaluare a (sau un model al) calculului este definită (modele deductive, modele locale, modele globale). Merită așadar să detaliem aceste aspecte.

a) Sisteme axiomatice, de deducție naturală și de calcul secvențial[6]

i) Calcul axiomatic. Întrebarea dacă axiomele sau regulile formale determină în mod unic semnificația termenilor logici al căror comportament îl reglementează depinde de formatul calculului. Un sistem axiomatic pornește de la axiome și de la reguli de inferență care permit derivarea teoremelor din axiome. Atât axiomele, cât și teoremele sunt menite să exprime adevăruri logice. Cel mai simplu sistem axiomatic pentru logica propozițiilor poate fi exprimat în termeni de condițional (⟶) și negație (~) :

Axiome:	Regulă de inferență (Modus Ponens):
$\vdash A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$	$\vdash A$
$\vdash A \longrightarrow (B \longrightarrow C) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$	$\vdash A \longrightarrow B$
$\vdash (\sim A \longrightarrow B) \longrightarrow ((\sim A \longrightarrow \sim B) \longrightarrow A)$	$\vdash B$

[6] A se vedea Mancosu *et al.* (2021, Ch. 2, 3, 5) pentru o discuție mai detaliată a acestor sisteme logice.

ii) Calcul de deducție naturală. În sistemele de deducție naturală, fiecare termen logic este definit de o pereche de reguli de introducere și de eliminare a acelui termen logic (reguli operaționale). Pe lângă acestea, există și reguli structurale care definesc relația de derivabilitate logică independent de operatorii logici. Spre deosebire de calculul axiomatic – unde pot fi introduse, de asemenea, axiome pentru fiecare termen logic în parte[7] –, în sistemele de deducție naturală este permisă introducerea unor asumpții suplimentare într-un text deductiv, asumpții care pot fi dezangajate logic prin intermediul anumitor reguli. Această trăsătură este menită a reprezenta raționare deductivă obișnuită ce pornește de la asumpții și oferă sistemelor de deducție naturală o complexitate structurală mai mare.

Reguli Structurale:

Ipoteza

$\Gamma \vdash C$, dacă C este în Γ

Monotonicitatea (*Weakening*)

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, \Gamma' \vdash C}$$

Tranzitivitea (*Cut*):

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma', A \vdash C}{\Gamma, \Gamma' \vdash C}$$

Reguli Operaționale (de introducere și eliminare):

I&

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \,\&\, B}$$

E&[1]

$$\frac{\Gamma \vdash A\&B}{\Gamma \vdash A}$$

E&[2]

$$\frac{\Gamma \vdash A \,\&\, B}{\Gamma \vdash B}$$

I⟶

$$\frac{\Gamma, [A] \vdash B}{\Gamma \vdash A \longrightarrow B}$$

E⟶

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \longrightarrow B}{\Gamma \vdash B}$$

I~

$$\frac{\Gamma, [A] \vdash \curlywedge}{\Gamma \vdash {\sim}A}$$

E~

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash {\sim}A}{\Gamma \vdash \curlywedge}$$

Iv[1]

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Iv[2]

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Ev

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, [A] \vdash C \qquad \Gamma, [B] \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Formula înscrisă între paranteze drepte este o asumpție ce urmează a fi dezangajată logic prin intermediul regulii în cauză. Multe sisteme de deducție naturală sunt formulate pentru cazul în care $\Gamma=\emptyset$, din rațiuni de simplicitate, dar se păstrează ideea că premisele regulii fie sunt date într-un context deductiv, fie sunt derivate din alte formule în cadrul acelui context deductiv. Regulile de introducere a condiționalului și a negației, precum și regula de eliminare a disjuncției, sunt reguli

[7] Un sistem axiomatic de acest fel este formulat de Hilbert și Bernays (1934/1968:65) în analogie cu axiomatizarea hilbertiană a geometriei, unde axiomele sunt grupate în clase.

ce dezangajază asumpții. Regulile de deducție de mai sus, în această formulare, sunt definite asupra argumentelor, în sensul că efectuează tranziția de la argumente de forma ⌜ $\Gamma \vdash \varphi$ ⌝ la argumente de forma ⌜ $\Gamma \vdash \psi$ ⌝, unde Γ este o mulțime de formule bine formate, iar atât φ cât și ψ sunt formule bine formate. În cadrul sistemelor axiomatice, atât axiomele cât și regulile operează asupra formulelor bine formate și nu asupra argumentelor, i.e. secvențelor cu o singură concluzie.

iii) Calculul secvențial. Acest calcul este o generalizare a sistemului de deducție naturală în sensul că operează cu secvențe, i.e. argumente care au drept concluzie o mulțime de formule bine formate. Un calcul secvențial este așadar un sistem logic formal cu concluzii multiple. În acest sistem există, de asemenea, reguli structurale (pe lângă cele formulate mai jos pot fi introduse contracția, i.e. eliminarea unor formule care se repetă, și permutarea premiselor sau a concluziilor) și reguli operaționale. Regulile operaționale permit introducerea unui termen logic în premise (la stânga) sau în concluzie (la dreapta).

Reguli Structurale

Ipoteza

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta}\quad \text{dacă } \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$$

Monotonicitatea (*Weakening*)

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, \Gamma' \vdash C} \qquad \frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash C, \Delta}$$

Tranzitivitea (*Cut*):

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, C \qquad \Sigma, C \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta, \Pi}$$

& Stânga

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}$$

&Stânga

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A\&B \vdash \Delta}$$

& Dreapta

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A \& B, \Delta, \Pi}$$

⟶ Stânga

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma, B \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma, A \longrightarrow B \vdash \Delta, \Pi}$$

⟶Dreapta

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \longrightarrow B, \Delta}$$

~Stânga

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, {\sim}A \vdash \Delta}$$

~Dreapta

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash {\sim}A, \Delta}$$

v Stânga

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Sigma, B \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma, A v B \vdash \Delta, \Pi}$$

v Dreapta

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A v B, \Delta}$$

v Dreapta

$$\frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A v B, \Delta}$$

Γ, Δ, Σ, Π sunt mulțimi de propoziții. Urmându-l pe Garson (2013:10), putem să considerăm că sistemele axiomatice operează cu aserțiuni, i.e. secvențe cu o mulțime vidă de premise ($\Gamma=\emptyset$), sistemele de deducție naturală operează cu argumente, i.e. secvențe unde $\Gamma\neq\emptyset$, dar cu o singură concluzie, iar calculul secvențial operează cu secvențe care admit mai multe concluzii. Astfel, atât sistemele axiomatice cât și cele de deducție naturală pot fi văzute drept cazuri particulare ale calculului secvențial.

b) Modele deductive, locale și globale.

Pentru a diferenția între tipurile de modele ale unei reguli, trebuie să definim trăsăturile centrale ale acestor modele. În general, o formulă bine formată A exprimă o proprietate P a unei clase de modele dacă și numai dacă această formulă este satisfăcută, i.e. făcută adevărată, de către fiecare model exact atunci când acesta are proprietatea P. Altfel spus:

Definiție 5 Formula A exprimă proprietatea P dacă și numai dacă $(\forall M)(M\vDash A \leftrightarrow P_M)$.

Această definiție poate fi generalizată astfel încât să definim condițiile în care o anumită regulă sau un set de reguli exprimă o anumită proprietate. În acest caz, un model poate fi gândit ca o mulțime de evaluări V. Prin analogie cu Definiția 5,

Definiție 5.1 O regulă R exprimă o proprietate P dacă și numai dacă $(\forall V)(V\vDash R \leftrightarrow P_V)$

Ceea ce trebuie clarificat acum este semnificația ideii că un model satisface o regulă (i.e. $V\vDash R$). Știm că ceva este un model al unei mulțimi de formule bine formate dacă toate aceste formule sunt adevărate în acel model. Definirea ideii că un model satisface un calcul logic sau o regulă a acestui calcul va conduce la trei tipuri de modele ale unei reguli.

Modele deductive: V este un model deductiv al unui calcul logic S dacă și numai dacă toate secvențele demonstrabile în S sunt V-valide, i.e. satisfăcute de către toate evaluările din V.

Modele locale. V este un model local al unei reguli S dacă și numai dacă R prezervă S-satisfacerea; R prezervă S-satisfacerea dacă și numai dacă orice evaluare $v\in V$ satisface R, i.e. dacă v satisface premisele lui R, atunci v satisface concluziile lui R.

Modele globale. V este un model global al unui calcul logic S dacă și numai dacă fiecare regulă R a lui S prezervă V-validitatea.

Modelele deductive impun o condiție mai slabă asupra regulilor logice și astfel sunt opace la modul în care un calcul logic este formulat deoarece vizează doar clasa teoremelor obținute și nu complexitatea structurală a calculului logic. În ceea ce privește secvențele demonstrabile (i.e. teoremele), toate cele trei tipuri de calcule logice (axiomatic, deducție naturală, calcul secvențial) sunt echivalente. Diferența dintre modelele locale și cele globale constă într-o diferență a ariei *(scope)* de cuantificare a cuantificatorului universal:

Model Local: $(\forall v \in V)$(v satisface premisele lui R → v satisface concluziile lui R)

Model Global: $(\forall v \in V)$(v satisface premisele lui R)→$(\forall v \in V)$(v satisface concluziile lui R)

În definiția modelelor locale, cuantificarea are o arie mai largă și, astfel, raționând în logica predicatelor, orice model local va fi și unul global. Mai mult, orice model global va fi și unul deductiv, deoarece satisfacerea unei reguli este convertibilă în satisfacerea unei aserțiuni corespunzătoare acelei reguli (prin meta-teorema de compactitate). Rezultatele lui Garson (2013) arată că evaluările non-standard $\mathbf{v}^{+}$și $\mathbf{v}^{\vdash}$ definite mai sus sunt L-consistente cu sistemele axiomatice și de deducție naturală dacă utilizăm modelele deductive[8]. Sistemele axiomatice admit aceste evaluări indiferent de tipul de modele pe care alegem să îl utilizăm. În opoziție cu ele, calculul secvențial blochează aceste evaluări indiferent de tipul de modele utilizat. Sistemele de deducție naturală permit aceste evaluări dacă folosim modele deductive și le blochează dacă folosim modele locale. Dacă folosim modele globale pentru deducția naturală, atunci ajungem la rezultatul (și aceasta este poziția lui Garson) că ele exprimă semnificațiile intuiționiste ale termenilor logici[9]. Acest rezultat din urmă este pus în evidență de Garson (2013: 46-134) utilizând metoda semanticii naturale definită mai sus (a se vedea nota de subsol 3). Așadar, Garson nu este atât de interesat în identificarea unui calcul logic categoric, ci de extragerea înțelesului termenilor logici dintr-un set de reguli așa cum sunt ele formulate într-un calcul logic.

Rezultatul că o logică cu concluzii multiple blochează evaluarea non-standard $\mathbf{v}^{\vdash}$ era cunoscut de Carnap (1943), fiind chiar una dintre propunerile sale pentru întărirea sistemului deductiv al logicii clasice.

4. FORMALIZAREA COMPLETĂ A LUI CARNAP (1943) PENTRU LOGICA PROPOZIȚIILOR

Așa cum am menționat deja în prima parte a acestui studiu, soluția lui Carnap pentru obținerea unei formalizări complete a logicii propoziționale este introducerea a două noi reguli primitive de inferență, o regulă care admite concluzii multiple și o regulă de respingere (sau refutare):

1) $A_i \vee A_j \vdash \{ A_i, A_j\}^{v}$

2) $V^{\&} \vdash \Lambda^{v}$

Prima regulă determină cea de a patra linie din tabelul normal de adevăr pentru disjuncție (linie care exprimă semantic ideea că o disjuncție este falsă dacă ambii disjuncți sunt falși, sau, contrapozitiv, dacă o disjuncție este adevărată, atunci cel

[8] Mai precis evaluarea non-standard $v^{\vdash}$, deoarece Garson stipulează că există cel puțin o propoziție falsă și astfel exclude prin stipulare primul tip de evaluare non-standard.

[9] Acest aspect va fi discutat într-o parte viitoare a prezentului studiu.

puțin un disjunct este adevărat) și astfel cel de-al doilea tip de evaluare non-standard este eliminat. Această regulă poate fi gândită ca o secvență a calculului secvențial, unde Γ conține formula A_i v A_j, iar Δ conține două concluzii A_i, A_j. Spre deosebire de virgula dintre premise, care exprimă implicit o conjuncție, virgula dintre concluzii exprimă implicit o disjuncție în calculul secvențial.

Cea de a două regulă impune existența unei propoziții false într-o evaluare semantică. „$V^{\&}$" este mulțimea tuturor propozițiilor considerate în conjuncție (conjunctivul universal), care prin definiție va fi adevărată atunci când toate propozițiile sunt adevărate, iar „Λ^{v}" este mulțimea vidă de propoziții considerate în disjuncție (disjunctivul vid), care prin definiție este falsă[10]. Prin urmare, dacă toate propozițiile vor fi interpretate ca adevărate, atunci regula 2) va deveni invalidă și astfel interpretarea nu va putea fi considerată una admisibilă. Această regulă este însă una sintactică. Prin urmare, Λ^{v} este derivabil în sistemul lui Carnap (1943) din $V^{\&}$. Pentru a respecta însă condiția corectitudinii logicii, $V^{\&}$ nu poate fi interpretată ca adevărată, deoarece din ea s-ar deriva o concluzie falsă.

Regula 2) este așadar o interdicție formulată explicit în calculul logic. Regulile formulează în mod obișnuit permisiuni, adică ne spun ce ne este permis să inferăm din anumite premise sau asumpții. Această regulă fixează însă o limită în ceea ce privește inferabilitatea. Ea poate fi gândită și în sensul că nu ne este permis să acceptăm toate propozițiile, i.e. să le considerăm adevărate, deoarece în felul acesta vom ajunge în mod necesar la o concluzie inacceptabilă, i.e. falsă. Un motiv intuitiv pentru a accepta această regulă, și astfel semantic, este acela că în mulțimea tuturor propozițiilor se poate afla ceva inacceptabil inferențial, i.e. o inconsistență. Vom vedea în continuare cum au fost dezvoltate aceste două idei carnapiene în sistemele logice cu concluzii multiple și în cele bilateraliste.

5. LOGICA CU CONCLUZII MULTIPLE

O trăsătură a tuturor sistemelor de logică este aceea că argumentele formulate în limbajul lor pot avea mai multe premise, dar o singură concluzie. Această caracteristică este prezentă în logica tradițională aristotelică, în logica clasică (numită de obicei și simbolică sau matematică) și se prezervă și în sistemele de logică non-clasică (intuiționistă, paraconsistentă, modală etc.). Logica (sau mai bine zis sistemul logic formal, i.e. calculul logic) care se abate de la această dogmă este cea cu concluzii multiple. Acest sistem originează în lucrările lui Gerhard Gentzen (1934), Rudolf Carnap (1943), William Kneale (1956)[11] și este dezvoltat sistematic în lucrarea *Multiple-Conclusion Logic* a lui D.J. Shoesmith și T.J. Smiley (1978)[12].

[10] Carnap (1942: 38-9) admite ca mulțimile de propoziții construite conjunctiv sau disjunctiv să poată fi calificate drept adevărate sau false și introduce definiții semantice în acest sens.

[11] O prezentare a ideilor din acest articol este disponibilă în limba română în Kneale (1975: 175-182).

[12] A se vedea Restall (2005), Rumfitt (2000, 2008), Steinberger (2011) și Dicher (2020) pentru o discuție filosofică asupra inteligibilității și caracterului adecvat al logicii cu concluzii multiple.

Forma generală a unei secvențe în logica cu concluzii multiple este $\Gamma \vdash \Delta$, unde atât Γ cât și Δ sunt mulțimi de propoziții. Dacă Γ conține $\varphi_1, \varphi_{2, \dots} \varphi_n$, iar Δ conține $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$, atunci secvența va fi: $\varphi_1, \varphi_{2, \dots} \varphi_n \vdash \psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$. Așa cum am menționat în cazul calculului secvențial, virgula din premise și cea din concluzie nu au același rol. Propozițiile din premise sunt considerate conjunctiv, iar cele din premise disjunctiv. Dacă interpretăm această secvență semantic, atunci argumentul exprimat de ea este valid dacă și numai dacă este imposibil ca premisele să fie toate adevărate, iar concluziile toate false. Exprimat altfel, dacă premisele sunt toate adevărate, atunci cel puțin o concluzie este adevărată pentru ca argumentul să fie valid. Aceasta ne arată că forma explicită a acestei secvențe este următoarea:

$\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&_{\dots} \,\&\, \varphi_n \vdash \psi_1 \vee \psi_2 \vee \dots \vee \psi_n$

Să considerăm următorul argument: *Oricine este bucuros sau obosit. Prin urmare, oricine este bucuros sau cineva este fericit*[13]. Desigur, putem considera că acest argument are o singură concluzie al cărei operator central este disjuncția. În acest caz va fi mai dificil însă să oferim o derivare formală utilizând numai regulile de introducere și eliminare din sistemele de deducție cu o singură concluzie. Așa cum se poate observa în derivarea următoare:

1	(1)	$(\forall x)(Bx \vee Ox)$	Premisă
1	(2)	$Ba \vee Oa$	1 E$\forall$
3	(3)	Ba	Asumpție
3	(4)	$Ba \vee (\exists x)Ox$	3 Iv
5	(5)	Oa	Asumpție
5	(6)	$(\exists x)Ox$	5 I$\exists$
5	(7)	$Ba \vee (\exists x)Ox$	6 Iv
1	(8)	$Ba \vee (\exists x)Ox$	2, 3, 4, 5, 7 Ev
1	(9)	$(\forall y)(By \vee (\exists x)Ox)$	8I$\forall$

nu putem generaliza universal pornind de la formula din punctul 3, deoarece este o asumpție și constanta individuală *a* apare în ea, iar în trecerea de la rândul 8 la rândul 9 nu putem introduce universalul direct în primul disjunct. Pentru a face aceasta, trebuie să invocăm o regulă de distribuire a universalului sau, mai precis, de introducere la un disjunct atunci când variabila de cuantificare nu apare liberă în cel de-al doilea disjunct (sistemul formal al lui Carnap (1943:138) și cele axiomatice, în general, operează cu o asemenea regulă de distribuție). În cazul derivării noastre, putem spune că în rândul 9 cuantificarea universală nu are niciun efect asupra celui de-al doilea disjunct și astfel putem să o prefixăm numai primului disjunct. Desigur, deoarece este o secvență clasică validă, iar logica de ordinul I este o logică completă, putem construi și o demonstrație folosind doar regulile sistemului de deducție naturală, dar neconstructivă și mult mai complicată[14]:

---

[13] Exemplul este propus de Restall (2005). A se vedea și Steinberger (2011 :341) pentru o discuție a acestui exemplu.

[14] Ideea derivării aparține lui F. Steinberger și T. Button și se găsește în format de tip arbore în Steinberger (2011: 342). Am adaptat derivarea formatului de deducție naturală Suppes-Lemmon.

1	(1)	(∀x)(Bx v Ox)	Premisă
2	(2)	~((∀x)Bx v (∃x)Ox)	Asumpție
3	(3)	~Ba	Asumpție
4	(4)	~(∃x)~Bx	Asumpție
3	(5)	(∃x)~Bx	3I∃
3, 4	(6)	⋏	4,5 E~
4	(7)	~~Ba	3, 6 I~
4	(8)	Ba	7 DN
4	(9)	(∀x)Bx	8 I∀
10	(10)	(∀x)Bx	Asumpție
10	(11)	(∀x)Bx v (∃x)Ox	10 Iv
2, 10	(12)	⋏	2, 11 E~
2	(13)	~(∀x)Bx	10, 12 I~
4, 2	(14)	⋏	9, 13 E~
2	(15)	~~(∃x)~Bx	4,14 I~
2	(16)	(∃x)~Bx	15 DN
1	(17)	Ba v Oa	1E∀
18	(18)	~Ba	Asumpție
1, 18	(19)	Oa	17, 18 IS (DeM)
1, 18	(20)	(∃x)Ox	19 I∃
1, 18	(21)	(∀x)Bx v (∃x)Ox	20 Iv
1, 2	(22)	(∀x)Bx v (∃x)Ox	16, 18, 21 E∃
1, 2	(23)	⋏	2, 22 E~
1	(24)	~~ ((∀x)Bx v (∃x)Ox)	2, 23I~
1	(25)	(∀x)Bx v (∃x)Ox	24 DN

Dacă gândim însă că în concluzie sunt exprimate cele două posibilități dintre care una trebuie să fie adevărată dacă premisa este adevărată, atunci putem introduce universalul la dreapta foarte rapid și demonstrația pare a fi mult mai *naturală*. Regulile de inferență pentru cuantificatori sunt similare în calculul secvențial cu concluzii multiple cu cele din deducția naturală care operează cu secvențe cu o singură concluzie (cele redate mai sus):

∀ stânga

$$\frac{\Gamma, Ft \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x)Fx \vdash \Delta}$$

∀ dreapta

$$\frac{\Gamma \vdash Ft, \Delta \quad *}{\Gamma \vdash (\forall x)Fx, \Delta}$$

*cu condiția că t nu apare în Γ, Δ, (∀x)Fx

∃ stânga

$$\frac{\Gamma, Ft \vdash \Delta \quad *}{\Gamma, (\exists x)Fx \vdash \Delta}$$

∃ dreapta

$$\frac{\Gamma \vdash Ft, \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x)Fx, \Delta}$$

*cu condiția că t nu apare în Γ, Δ , (∃x)Fx

Cu ajutorul acestor reguli, putem să formulăm următoarea derivare:[15]

$(\forall x)(Bx \vee Ox) \vdash (\forall x)(Bx \vee Ox)$

$(\forall x)(Bx \vee Ox) \vdash Ba \vee Oa$

$(\forall x)(Bx \vee Ox) \vdash Ba, Oa$

$(\forall x)(Bx \vee Ox) \vdash Ba, (\exists x)Ox$

$(\forall x)(Bx \vee Ox) \vdash (\forall x)Bx, (\exists x)Ox$

$(\forall x)(Bx \vee Ox) \vdash (\forall x)Bx \vee (\exists x)Ox$

În această derivare, din rândul al treilea, cei doi disjuncți sunt separați și, ca atare, putem opera reguli separat asupra fiecăruia dintre ei. În particular, putem să introducem existențialul la dreapta la propoziția ⌜ Oa ⌝, iar apoi putem să introducem universalul, la dreapta, propoziției ⌜ Ba ⌝, deoarece condițiile privind constanta individuală sunt respectate.

Desigur, toate aceste considerații sunt formale și se referă la eleganța și simplicitatea derivărilor. Putem aprecia care formalizare ar fi mai adecvată, i.e. cea cu o singură concluzie sau cea în care avem două concluzii, contrastându-le cu modul de raționare ce pare intuitiv că l-am desfășura în limbajul natural. Pare intuitiv să presupunem că în trecerea de la premisa ⌜ (∀x)(Bx v Ox) ⌝ la concluzia ⌜ (∀x)Bx v (∃x)Ox ⌝ cineva va raționa astfel: *să presupunem că oricine este bucuros sau obosit. Să alegem în mod arbitrar o persoană* a. *Această persoană va fi așadar bucuroasă sau obosită. Există așadar două situații: i) această persoană este bucuroasă și ii) această persoană este obosită. Dacă această persoană este obosită, decurge că cineva este obosit. Putem conchide așadar că persoana* a *este bucuroasă sau cineva este obosit. Dar alegerea persoanei* a *a fost făcută în mod arbitrar și astfel putem conchide că oricine este bucuros sau cineva este obosit.*

Așa cum remarcă și Restall (2005), exemplul nu este pe deplin clarificator în alegerea unei formalizări în raport cu cealaltă, dar pare a reprezenta cel mai adecvat raționarea pe cazuri. Putem înclina să alegem logica cu concluzii multiple deoarece intuiția ne spune că putem generaliza universal de la asumpția Fa, deși introducerea universalului în logica cu o singură concluzie nu ne permite să realizăm în mod direct acest pas. Cu alte cuvinte, logica cu concluzii multiple reprezintă foarte bine raționarea pe cazuri, așa cum este și cea instanțiată mai sus.

Motivația inițială a lui Carnap (1943) pentru introducerea *junctivilor* (mulțimi de propoziții construite conjunctiv și disjunctiv) a fost tocmai aceea de a elimina asimetria dintre sintaxă și semantică. Dacă, de pildă, așa cum ne propun Shoesmith și Smiley (1978: 2-4), trasăm sarcină unui student să formuleze reguli de inferență pornim de la tabelele de adevăr pentru conjuncție și disjuncție, studentul va întâmpina o anumită dificultate:

[15] Derivarea este formulată de Restall (2005). A se vedea Steinberger (2011: 341-346) pentru o discuție a aspectelor tehnice implicate în această derivare. În particular, este problematică formal trecerea de la rândul al doilea la cel de al treilea, deoarece nu există o regulă formală explicită în calculul secvențial care legitimează acest pas deductiv. Desigur, formularea unei asemenea reguli, în spiritul celei introduse de Carnap, se poate realiza ușor.

A	B	A & B
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

A	B	A v B
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

În cazul conjuncției, distribuția valorilor de adevăr în tabel poate fi convertită ușor în reguli de inferență: 1) din A, B putem infera A & B. 2) din A&B putem infera A. 3) din A&B putem infera B. În acest mod avem o simetrie perfectă între semantica și regulile de inferență pentru conjuncție. În cazul disjuncției însă, din primele trei rânduri ale NTT-ului putem formula următoarele reguli de inferență: 1) din A putem infera AvB. 2) din B putem infera AvB. Ultima linie însă rămâne neacoperită de reguli și aici apare dificultatea studentului. Aceste două reguli sunt insuficiente pentru reprezentarea trăsăturii disjuncției exprimată în cel de-al patrulea rând al tabelului, iar acest fapt face posibilă interpretarea non-standard $v^{\vdash}$.

O observație importantă în legătură cu cel de-al patrulea rând din NTT-ul disjuncției privește însuși modul în care este formulată regula de eliminare pentru disjuncție într-un sistem de deducție naturală:

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & [A] & [B] \\ & \vdots & \vdots \\ A\mathrm{v}B & C & C \end{array}}{C} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{l} \Gamma \vdash A \mathrm{v} B \\ \Gamma, [A] \vdash C \\ \Gamma, [B] \vdash C \end{array}}{\Gamma \vdash C}$$

Să considerăm formularea din stânga a regulii și să considerăm o evaluare în care atât A cât și B au valoarea $\bot$. În acest caz, având antecedenți falși, cele două subderivări de la asumpțiile [A], respectiv [B], la C vor fi satisfăcute. Dar de aici nu putem conchide că AvB este falsă, de asemenea. În particular, dacă C este o formulă adevărată, o teoremă, atunci regula este compatibilă cu evaluarea non-standard $v^{\vdash}$. Unii autori argumentează, în particular Garson (2013) și Hjortland (2014), că formularea din dreapta a regulii blochează evaluarea $v^{\vdash}$. Să urmărim argumentarea lui Hjortland (2014: 449):

> Ce se întâmplă cu regula Ev? Din nou, singura intrare problematică în funcția de adevăr este cea în care atât A, cât și B sunt false. Mai întâi, să considerăm cazul în care C=A. Din nou, să asumăm că v(Γ)= $\top$ și v(A)=v(B)= $\bot$. În acest caz, Γ ⊢ C este falsificat de evaluarea v și astfel v nu poate satisface toate secvențele din premise. Dar, din moment ce v(A)=v(B)= $\bot$, ambele premise minore sunt satisfăcute. Prin urmare, AvB trebuie să fie falsă în premisa majoră pentru ca evaluarea v să satisfacă regula de inferență.

Raționamentul este corect, dar în contextul problemei pe care o discutăm este în esență un *ignoratio elechi*. Dacă asumăm că C este o propoziție falsă, atunci același rezultat se obține și considerând formularea din stânga a regulii. De pildă, dacă v(C)= v(A)=v(B)=⊥, atunci concluzia este falsificată, dar cele două subderivări sunt satisfăcute. Prin urmare, v(AvB) trebuie să fie ⊥. Hjortland (2014: 449) argumentează că în formularea din stânga a regulii nu avem secvențe de tipul Γ⊢A, ci regula ne permite să derivăm C din AvB cu condiția că există două subderivări ale lui C din disjuncții A, respectiv B. Deși nu afirmă explicit, ideea susținută de el pare a fi că nu putem asigna o valoare de adevăr sau să definim noțiunea de satisfacere pentru o subderivare – ceea ce consider a fi problematic, deoarece satisfacerea unei derivări se poate defini prin satisfacerea fiecărui pas din derivare sau, altfel spus, o subderivare a lui C din A poate fi gândită ca o secvență de tipul Γ, A⊢C.

De ce este în fapt o ignorare a tezei raționamentul de mai sus? Deoarece regula de eliminare a disjuncției este validă pentru evaluarea standard a disjuncției, dar este validă și pentru evaluarea non-standard $v^{\vdash}$. Regula devine nevalidă pentru o evaluare în care dintr-o disjuncție adevărată cu disjuncți falși se derivă o formulă falsă. Dar nu este nicio necesitate în a considera că regula este aplicată doar în cazuri în care formula derivată în conlcuzie, propoziția C, este falsă. Argumentul lui Garson (2013: 38) urmează aceeași strategie: asumă că există cel puțin o propoziție falsă într-o evaluare și consideră că propoziția C este falsă, caz în care disjuncția trebuie să fie falsă dacă ambii disjuncți sunt falși. De exemplu, să considerăm că regula este folosită de o comunitate care are un criteriu foarte strict al adevărului, în sensul că va considera ca adevărate doar propozițiile demonstrabile, i.e. teoremele, și false toate celelalte propoziții. În plus, să considerăm următoarea instanțiere a regulii de eliminare a disjuncției în ambele formulări:

$$\dfrac{A\vee{\sim}A \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots\\ (A\rightarrow B)\vee(B\rightarrow A)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[{\sim}A]\\ \vdots\\ (A\rightarrow B)\vee(B\rightarrow A)\end{array}}{(A\rightarrow B)\vee(B\rightarrow A)}$$

$$\dfrac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash A\vee{\sim}A\\ \Gamma, [A] \vdash (A\rightarrow B)\vee(B\rightarrow A)\\ \Gamma, [{\sim}A] \vdash (A\rightarrow B)\vee(B\rightarrow A)\end{array}}{\Gamma \vdash (A\rightarrow B)\vee(B\rightarrow A)}$$

Se poate observa foarte ușor că ambele reguli rămân valide în cazul în care atât $v^{\vdash}(A)= v^{\vdash}({\sim}A)= \bot$. În prima formulare a regulii, deoarece concluzia este o teoremă și astfel va fi adevărată, iar în cea de-a doua formulare deoarece concluzia este o secvență a cărei concluzie este o teoremă și, astfel, indiferent de valoarea asignată lui Γ, concluzia va fi satisfăcută. Așadar, persoanele care vor raționa utilizând regula Ev în asemenea cazuri vor conchide că disjuncția este uneori adevărată când ambii disjuncți sunt adevărați. Prin umare, regula este compatibilă cu evaluarea $v^{\vdash}$. Regulile pentru disjuncție ar fi categorice, asemeni celor pentru conjuncție, dacă ar bloca *toate* evaluările care asignează un înțeles diferit termenilor logici pe care îi guvernează. Însă este evident că ele permit și evaluări non-standard, precum $v^{\vdash}$.

Pentru a fi și mai clari asupra acestui aspect, faptul că în unele evaluări regulile pentru un termen logic fixează înțelesul standard al acestui termen nu implică că regulile sunt categorice. Ele ar avea acest caracter dacă și numai dacă în toate evaluările în care ele își prezervă validitatea termenii logici vor avea înțelesul lor standard. Carnap (1943:75) era pe deplin conștient de acest fapt, vorbind de termenul de *conector non-extensional*. Un asemenea termen logic, pentru aceeași distribuție de valori de adevăr a părților sale componente, poate avea uneori valoarea designată, iar alteori pe cea nedesignată. Acest fapt este omis însă în argumentările lui Hjortland și Garson și constituie temeiul pentru afirmația că argumentele lor constituie un *ignoratio elenchi*.

Evaluarea non-standard $v^{\vdash}$ (v-demonstrabilitate/*provability*) este blocată dacă regula de eliminare a disjuncției admite concluzii multiple:

$$AvB \vdash A, B$$

Să considerăm că $v(A)=v(B)=\perp$. În acest caz, ambele concluzii vor fi false. Așadar, pentru a fi respectată validitatea regulii, premisa va fi de asemenea falsă – caz în care disjuncția este falsă și cel de-al patrulea rând din NTT-ul pentru ⌜ v ⌝ este fixat. Chiar dacă considerăm cazul în care disjuncția din premise este o teoremă logică:

$$Av{\sim}A \vdash A, {\sim}A$$

și folosim din nou evaluarea $v^{\vdash}$, această evaluare va face concluzia falsă și premisa adevărată, invalidând această secvență. Prin urmare, interpretarea $v^{\vdash}$ nu este admisibilă.

Principala critică care a fost ridicată la adresa utilizării unei logici cu concluzii multiple este aceea că o asemenea structură logică nu este în acord cu practica obișnuită de raționare. De exemplu, Rumfitt (2000:795) afirmă că „nu doar că este îndoielnic dacă oamenii formulează de fapt asemenea argumente, ci este îndoielnic dacă putem obține o concepție inteligibilă asupra lor”. Explicația că, dacă toate premisele sunt adevărate, atunci nu se poate ca toate concluziile să fie false îi apare lui Rumfitt (2000:796) doar o remarcă metalogică, insuficientă pentru o înțelegere adecvată a logicii cu concluzii multiple. Desigur, respingerea acestui aparat logic este foarte rapidă și sumară, este mai mult postulată decât argumentată. Din moment ce calculul cu concluzii multiple este precis formulat sintactic, atunci este un calcul logic admisibil. În plus, semantica acestui calcul este cea clasică, pe care o utilizăm și atunci când operăm cu o singură concluzie. Avantajul este posibilitatea definirii unor noțiuni logice (precum L-exclusivitatea și L-disjunctivitatea) care nu pot fi definite în calculele cu o singură concluzie și, astfel, soluționarea problemei categoricității. Sigur, așa cum vom vedea în secțiunea următoare, Rumfitt preferă întărirea calculului logic prin introducerea unor reguli de respingere. Dacă aceste reguli sunt la rândul lor în acord cu practica reală a raționării deductive, rămâne să judecăm.

Din perspectivă inferențialistă, logica cu concluzii multiple a fost criticată de Steinberger (2011) pe același temei al neconcordanței sale cu practica raționării. Steinberger (2011: 335) formulează așa-numitul principiu al răspunderii (*answerability*): „numai sistemele de deducție care pot fi văzute ca fiind adecvat conectate cu practicile noastre inferențiale deductive obișnuite sunt permisibile", iar argumentele sale converg către ideea că logica cu concluzii multiple nu satisface acest deziderat. Prin urmare, inferențialiștii nu ar trebui să considere acest sistem logic ca pe un cadru logic adecvat pentru reprezentarea practicii inferențiale deductive a raționării. Desigur, se poate discuta în legătură cu naturalețea logicii cu concluzii multiple, dar în același timp este clar că unicitatea concluziei este doar o practică ridicată la nivelul de dogmă. Dacă unele probleme sunt soluționate prin aplicarea unor operații logice asupra concluziilor considerate ca disjuncți separați, atunci nu ar trebui să fim deloc împiedicați în a beneficia de aceste avantaje ale logicii cu concluzii multiple.

Un răspuns aplicat la obiecțiile tehnice ale lui Steinberger (2011) și o susținere a caracterului adecvat al logicii cu concluzii multiple sunt oferite de Dicher (2020), care argumentează că logica cu concluzii multiple este un epifenomen al conectorilor logici. Cei din urmă determină derivările cu concluzii multiple și, astfel, aceste derivări pot fi folosite în semantica demonstrativă, i.e. sunt justificate din punct de vedere demonstrativ-teoretic. Dicher (2020) consideră principiul *răspunderii* problematic, deoarece cu greu am accepta unele reguli din sistemele de deducție naturală (favorizate de Steinberger) ca fiind o formalizare sau o idealizare a unor practici pre-teoretice (de pildă, reducerea la absurd, *ex falso quodlibet*, paradoxurile implicației materiale) și astfel ar trebui să respingem și sistemele care înglobează aceste reguli. Sigur, dacă această logică este un epifenomen al conectorilor logici, este mai greu de susținut că ea oferă semnificație acestora. Pentru a susține teza inferențialistă, trebuie să luăm această formalizare logică ca primitivă în raport cu conectorii logici, cei din urmă fiind definiți prin intermediul ei.

O obiecție ridicată de Dummett (1991:187) și reiterată de Steinberger (2011: 346), așa-numitul argument bazat pe circularitate, afirmă că logica cu concluzii multiple nu poate fi considerată o formalizare adecvată din care putem extrage înțelesul disjuncției clasice deoarece, pentru a înțelege virgula din partea dreaptă, trebuie să presupunem deja o înțelegere prealabilă a disjuncției. Deși obiecția ar putea fi mutată și în legătură cu virgula din stânga și conjuncția, în cazul sistemelor cu o singură concluzie, Steiberger argumentează că există totuși o asimetrie între conjuncție și disjuncție deoarece indicatorul asertiunii se distribuie în limbajul natural față de o conjuncție, dar nu față de o disjuncție. Într-adevăr, există și alte diferențe între conjuncții și disjuncții, însă, în contextul prezent, pare foarte rezonabil să considerăm că obiecția circularității poate fi ridicată în legătură cu ambii operatori.

Obiecția circularității funcționează dacă presupunem că avem deja o înțelegere a disjuncției anterioară formalizărilor logice cu concluzii multiple. Din perspectivă strict inferențialistă însă, dacă considerăm că regulile sunt primitive, atunci virgula din dreapta este cea care va căpăta semnificația verifuncțională a disjuncției din reguli și astfel putem respinge foarte ușor obiecția circularității. Altfel spus, dacă considerăm regula: $\ulcorner A \vee B \vdash A, B \urcorner$, atunci știm din definiția validității în logica cu concluzii multiple că nu putem asigna $\bot$, atât lui A cât și lui B, dar $\top$ lui AvB. Prin urmare, dacă asignăm $\bot$ atât lui A cât și lui B, validitatea în logica cu concluzii multiple ne obligă să asignăm $\perp$ lui AvB. Ceea ce presupunem așadar este o înțelegere a validității unei reguli și nu a înțelesului disjuncției. Validitatea poate fi înțeleasă independent de operatorii logici, așa cum o înțelegem în cazul regulilor structurale, unde operatorii logici lipsesc.

6. SISTEME LOGICE BILATERALISTE

Ideea de a construi un calcul logic propozițional categoric prin introducerea unor reguli de respingere a fost propusă mai întâi de Carnap (1943), apoi readusă în atenția logicienilor de către Smiley (1996) și dezvoltată sistematic de Rumfitt (2000), care formulează explicit un set de reguli de deducție naturală în termeni de asertare și respingere (sistemul său va fi redat mai jos). O motivare filosofică recentă a bilateralismului din perspectivă inferențialistă este oferită de Warren (2020).

Warren (2020:30) argumentează că în practicile noastre inferențiale sunt prezente inferențe care ne conduc de la și la respingerea unor propoziții variate. Prin urmare, un sistem formal adecvat pentru practica inferențială trebuie să treacă dincolo de regulile standard de deducție și să conțină și reguli de respingere pe lângă cele de asertare. Respingerea unei propoziții nu a figurat în mod tradițional în sistemele de logică modernă, deoarece Frege (1919) a considerat respingerea unui propoziții φ ca fiind echivalentă cu acceptarea negației sale, $\sim\varphi$. Din punct de vedere conceptual însă, atunci când acceptăm o propoziție, vom adăuga ceva opiniilor noastre, iar când o respingem, vom elimina ceva din opiniile noastre și nu pare deloc evident că atunci când respingem propoziția φ, noi vom adăuga în câmpul opiniilor noastre negația acesteia. Așa cum menționează Warren (2020:30-31), indiferent de noile opinii pe care le adăugăm opiniilor noastre (chiar și $\sim\varphi$), dacă nu excludem explicit φ din sensul inițial de opinii, atunci nu putem spune că am respins φ. Prin urmare, respingerea lui φ și acceptarea lui $\sim\varphi$ sunt conceptual distincte. Mai mult, dacă ne imaginăm o comunitate în care nu există un operator al negației, atunci membrii acestei comunități pot respinge o propoziție, dar acest fapt nu implică că vor accepta negația ei. Ca atare, un sistem logic adecvat practicii inferențiale a raționării trebuie să includă și reguli pentru respingere. Incurvati și Smith (2010) descriu în mod plauzibil această idee imaginând o comunitate în care toate propozițiile sunt structurate în mod explicit într-un conținut propozițional și un indicator de forță (interogativ, imperativ, optativ, aserțiune, respingere). Ultimii doi indicatori vor exprima atitudinea membrilor comunității față de conținuturile propoziționale, iar regulile care guvernează utilizarea acestora (i.e. regulile structurale discutate mai jos) par a fi independente de operatorii logici propoziționali.

Rumfitt (2000) dezvoltă ideile lui Smiley (1996) și introduce doi indicatori de forță (*force indicators)* care exprimă atitudini propoziționale și nu sunt operatori logici ca atare: ⌜ + ⌝ (indicatorul acceptării/asertării[16]) și ⌜ – ⌝ (indicatorul respingerii).

[16] Dacă cei doi indicatori sunt gândiți ca atitudini propoziționale, atunci putem adopta terminologia acceptare/respingere, iar dacă sunt gândiți ca acte de vorbire (*speech acts*), atunci putem adopta terminologia asertare/refutare. La limită, atunci când asertăm ceva, putem considera că acceptăm ceea ce asertăm, iar dacă refutăm, atunci respingem. Terminologia nu este totuși atât de importantă în prezentul context.

Acești indicatori vor prefixa întotdeauna propoziții și nu vor figura în structura lor internă. Sistemul este unul *bilateral* deoarece folosește și respingerea pe lângă asertare, sistemele standard ce folosesc doar asertarea fiind *unilaterale*. Semnificația celor doi indicatori este precizată de Rumfitt astfel: ⌜ +A ⌝ va indica ⌜ A? Da ⌝, iar ⌜ –A ⌝ va indica ⌜ A? Nu ⌝. Sistemul de deducție naturală pentru logica propozițiilor (dar și pentru logica predicatelor) va conține regulile structurale menționate mai sus (în secțiunea a treia), dar va avea în plus două noi reguli structurale, care joacă rolul unor *principii de coordonare*:

RED* (Reductio)

$$\frac{\begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ \curlywedge\end{matrix}}{\varphi^*}$$

LNC* (Non-Contradicția)

$$\frac{\varphi, \quad \varphi^*}{\curlywedge}$$

unde φ stă pentru formule marcate cu unul dintre cei doi indicatori, iar φ* este reversul lui φ (i.e. dacă φ este +A, atunci φ* va fi -A, și invers). Deși sunt similare regulilor pentru operatorul negației, aceste reguli sunt formulate ca reguli structurale, independente de operatorii logici. Regulile operaționale din acest sistem bilateralist vor specifica condițiile pentru asertarea și respingerea corecte a propozițiilor. După cum se poate observa mai jos, fiecare operator este caracterizat de reguli de introducere și de eliminare în două cazuri, când propozițiile ce conțin un operator sunt asertate și când sunt respinse. Sistemul este formulat de Rumfitt (2000:800-802) astfel:[17]

+I&

$$\frac{+A \quad +B}{+(A \,\&\, B)}$$

+E&

$$\frac{+(A\&B)}{+A}$$

+E&

$$\frac{+(A\&B)}{+B}$$

-I&

$$\frac{-A}{-(A\&B)}$$

-I&

$$\frac{-B}{-(A\&B)}$$

-E&

$$\frac{-(A\&B) \quad \begin{matrix}[-A]\\ \vdots\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[-B]\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}$$

[17] Una dintre motivațiile introducerii acestui sistem bilateralist este de a contracara critica lui M. Dummett potrivit căreia, dacă înțelesul unei propoziții este determinat de condițiile corecte de asertare a acesteia, atunci logica intuiționistă este singura logică legitimă, regulile de introducere și de eliminare pentru negație în logica clasică nefiind în armonie, i.e., introducerea semnului pentru negație împreună cu regulile care îi guvernează utilizarea la subsistemul clasic implicațional creează o extensie non-conservativă. Aceasta înseamnă că în sistemul extins putem demonstra o teoremă formulabilă numai în termeni de implicație care nu putea fi demonstrată fără regulile pentru negație, i.e. este vorba de legea lui Pierce $((A\to B)\to A)\to A$. Vom reveni la relația dintre logica intuiționistă și cea clasică într-un parte ulterioară a studiului, atunci când vom analiza problema categoricității pentru logica intuiționistă.

+I⟶ $\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[+A]\\ \vdots\\ +B\end{array}}{+(A\to B)}$

+E⟶ $\qquad \dfrac{+A \qquad +(A\to B)}{+B}$

-I⟶ $\qquad \dfrac{+A \quad -B}{-(A\to B)}$

-E⟶ $\qquad \dfrac{-(A\to B)}{+A}$

-E⟶ $\qquad \dfrac{-(A\to B)}{-B}$

+I~ $\qquad \dfrac{-A}{+(\sim A)}$

+I~ $\qquad \dfrac{\mathbf{+(\sim A)}}{\mathbf{-A}}$

-I~ $\qquad \dfrac{+A}{-(\sim A)}$

-E~ $\qquad \dfrac{-(\sim A)}{+A}$

+Iv $\qquad \dfrac{+A}{+(AvB)}$

+Iv $\qquad \dfrac{+B}{+(AvB)}$

+Ev $\qquad \dfrac{+(AvB) \qquad \begin{array}{c}[+A]\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[+B]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}$

-Iv $\qquad \dfrac{\mathbf{-A \quad -B}}{\mathbf{-(AvB)}}$

-Ev $\qquad \dfrac{-(AvB)}{-A}$

-Ev $\qquad \dfrac{-(AvB)}{-B}$

Acest sistem bilateralist poate deschide multe discuții, dar interesul nostru aici este de analiza acest sistem în relație cu evaluările non-standard definite mai sus. În particular, este acest calcul logic unul categoric? Bilateraliștii argumentează că da. Primul tip de evaluare non-standard în care toate propozițiile sunt adevărate va invalida regula **+I~** care legitimează inferența de la ⌜ +(~A) ⌝ la ⌜ -A ⌝. Desigur, pentru a înțelege această idee trebuie să formulăm condițiile pentru asertarea corectă a unor formule marcate cu cei doi indicatori. Vom reda formularea lui Murzi și Hjortland (2009):

(C1) $v_c(+A)$ = **1** dacă și numai dacă $v(A)= \top$
(C2) $v_c(-A)$ = **1** dacă și numai dacă $v(A)= \bot$

Cu ajutorul acestor două clauze, putem să definim validitatea bilateralistă:

Validitatea bilateralistă: $\Gamma \vdash \varphi$ este valid dacă și numai dacă pentru fiecare evaluare corectă v, dacă $v(\psi)$= **1** pentru fiecare $\psi \in \Gamma$, atunci $v(\varphi)$ =**1.**

Cele două clauze ne spun că putem aserta corect (i.e. =**1**) propoziția +A exact atunci când A este o propoziție adevărată și putem aserta corect –A exact atunci când

A este o propoziție falsă. Conform acestor clauze de evaluare dacă $v^+(\sim A)$ este ⊤, atunci asertarea lui ~A, i.e. +(~A), este corectă. Dacă $v^+(A)$ este ⊤, atunci respingerea lui A, i.e. -A, este incorectă. Valoarea v^+ va invalida așadar regula **+I~**.

În cazul evaluării non-standard $v^{\vdash}$, $v^{\vdash}(A) = v^{\vdash}(\sim A) = \bot$, dar $v^{\vdash}(A \vee \sim A) = \top$. Dar în acest caz regula -Iv de mai sus va deveni nevalidă. Această regulă ne permite să inferăm –(A vB) din -A și -B. Dacă substituim B prin ~A, atunci regula ia forma:

-Iv

$$\frac{-A \quad -(\sim A)}{-(A \vee \sim A)}$$

Cum atât A, cât și ~A sunt false în $v^{\vdash}$, atunci respingerea lor este corectă (conform clauzei C2). Dar Av~A este adevărată și deci respingerea ei este incorectă. Prin urmare, evaluarea $v^{\vdash}$ nu este admisibilă deoarece invalidează această regulă.

Sistemul logic bilateralist reușește așadar, asemenea logicii cu concluzii multiple, să blocheze cele două evaluări non-standard pentru logica propozițiilor. Dacă logica cu concluzii multiple reușea să reprezinte formal în mod adecvat proprietățile semantice ale disjuncției, bilateralismul reușește să reprezinte formal atât proprietățile semantice ale negației clasice, cât și pe cele ale disjuncției. În particular, regula de respingere a Iv este un pandant al regulii de eliminare a disjuncției în logica cu concluzii multiple. Este chiar acea regulă, citită contrapozitiv.

Totuși, nu trebuie să ne grăbim în a judeca eficiența acestui sistem logic în soluționarea problemei categoricității sau, mai precis, este important să evaluăm asumpțiile pe care acest sistem le păstrează. Un rol central îl joacă cele două clauze, C1 și C2, care definesc noțiunea de validitate a unei reguli bilateraliste. Așa cum remarcă Murzi și Hjortland (2009, Section 4), C2 este structural identică regulii semantice pentru negație (~A este adevărată dacă și numai dacă A este falsă). Prin urmare, este dificil să susținem că soluția bilateralistă este un instrument pur sintactic de soluționare a problemei categoricității. De asemenea, regulile structurale formulate mai sus, RED* și LNC*, par a fi mai degrabă reguli operaționale ce definesc semnul ⌜ – ⌝, iar în acest caz semnul ⌜ – ⌝ pare a fi gândit mai adecvat ca un operator al negației și nu ca un indicator de atitudini propoziționale[18]. Dar dacă respingerea este de fapt o negație, atunci apelul la C2 pare a fi echivalent cu apelul la definiția semantică a negației.

O altă critică formulată de Murzi și Hjortland (2009:486) la adresa bilateralismului este că o evaluare non-standard de primul tip poate fi construită și pentru un sistem bilateral. Putem formula o evaluare în care orice formulă marcată, i.e. ⌜ +φ ⌝, ⌜ –φ ⌝ este asertabilă în mod corect. În acest caz atât A, cât și ~A sunt corect asertabile și regulile sistemului rămân valide, putând aserta orice. În acest caz este clar că semnul ⌜ ~ ⌝ nu are proprietățile logice ale negației clasice și evaluarea non-standard pare a fi mutată la nivelul asertabilității. Incurvati și Smith (2010:9-10)

[18] Bendall (1979:69-70) a demonstrat de fapt că semnul ⌜ – ⌝ este suficient de puternic pentru a substitui semnul pentru negație.

argumentează că această obiecție nu se susține, deoarece conținuturile propoziționale sunt obiect al evaluării (în sensul că doar conținuturile propoziționale sunt adevărate sau false, atitudinile propoziționale nefiind apte de o asemenea evaluare), iar, în plus, o evaluare în care este corect atât să asertăm, cât și să respingem același conținut propozițional nu este admisibilă datorită *ipotezei de la care am pornit*. Cu alte cuvinte, evaluarea non-standard v^+ funcționează pentru formalizările standard ale logicii clasice deoarece cadrul structural la care se adaugă regulile operaționale pentru negație este mai slab decât cel bilateralist, care conține cei doi indicatori pentru asertare și respingere și regulile ce guvernează utilizarea acestora, RED* și LNC*. Acest cadru structural nu ne permite să asertăm corect atât ⌜ $+\varphi$ ⌝, cât și ⌜ $-\varphi$ ⌝. Chiar dacă, așa cum arată Bendall (1979), semnul pentru respingere și cel pentru negație au aceeași putere expresivă, nu decurge că acestea nu sunt distinte: primul este un indicator al forței cu care marcăm un conținut propozițional, iar negația este un modificator al conținutului propozițional.

Observăm, așadar, că această formalizare a logicii clasice este categorică dacă admitem că introducerea semnului pentru respingere este admisibilă, în sensul că acest semn poate fi definit în mod sintactic de către regulile structurale. Această idee este însă problematică. Așa cum am menționat, Incurvati și Smith argumentează că nu este admisibil să asertăm și să respingem același conținut propozițional. Dar de ce? Din punct de vedere semantic, ideea pare plauzibilă, dar sintactic nu există nicio constrângere. Să re-considerăm cele două reguli structurale:

RED* (Reductio) $\dfrac{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \curlywedge\end{array}}{\varphi^*}$

LNC* (Non-Contradicția) $\dfrac{\varphi,\ \varphi^*}{\curlywedge}$

Pentru a accepta că nu este admisibil să asertăm și să respingem același conținut propozițional, trebuie să avem o înțelegere semantică prealabilă a semnului ⌜ $\curlywedge$ ⌝. Dar dacă acceptăm că este posibilă o asemenea înțelegere, atunci întreaga problemă a evaluărilor non-standard dispare. De exemplu, în evaluarea non-standard v^+, acest semn va fi interpretat, ca orice altă propoziție, ca fiind adevărat. Dar în această înțelegere nu este nicio problemă în a aserta și a respinge același conținut propozițional. Singura idee care pare a se susține în justificarea bilateralistă este că semnul pentru respingere este unul extra-logic, i.e. pragmatic, iar asumarea lui ca primitiv ne oferă o înțelegere adecvată a operatorului negației. Desigur, un asemenea sistem poate fi adecvat din punct de vedere explicativ dacă asumăm o viziune naturalistă asupra logicii unde atitudinile propoziționale sunt primitive în raport cu operațiile logice.

Este, de asemenea, discutabil dacă regulile structurale reușesc să definească inferențial, i.e. sintactic, cele două semne ⌜ + ⌝ și ⌜ – ⌝. Dacă este corect să asertăm o propoziție exact atunci când ea este adevărată și corect să o respingem exact atunci când este falsă, atunci este clar că formalizarea bilateralistă nu este liberă de asumpții semantice.

7. REMARCI FINALE

O formalizare completă a logicii clasice propoziționale presupune reprezentarea tuturor proprietăților logico-semantice a operatorilor logici în mod formal, i.e. sintactic. Atât formalizarea logică cu concluzii multiple, cât și cea bilateralistă reușesc să reprezinte proprietățile logico-semantice ale negației și disjuncției. În plus, aceste formalizări pun în evidență trăsături logice formale interesante ale raționării clasice. Ceea ce este problematic pentru ambele abordări este modul în care formalizează aceste trăsături, i.e. specificul instrumentelor pe care le utilizează. Dacă acceptăm că o secvență cu concluzii multiple poate fi utilizată și astfel înțeleasă independent de disjuncție și acceptăm că semnul respingerii poate fi utilizat și astfel înțeles independent de negație, iar aceste înțelegeri derivă din considerente pur sintactice, atunci cele două formalizări își ating obiectivul de a determina în mod unic înțelesul termenilor logici. Așa cum am evidențiat însă, acceptarea antecedentului propoziției anterioare nu este una lipsită de dificultăți teoretice. Pare a plana suspiciunea lui Church (1944) că o formalizare completă nu este posibilă fără a angaja sau cel puțin a presupune implicit considerente de natură semantică. Vom reveni la aceste aspecte în părțile viitoare ale studiului, după ce vom discuta și evaluările non-normale pentru cuantificatori și încercările de a le elimina.

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE

Bendall, Kent. 1979, „Negation as a sign of negative judgment", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 20 (1), 68–76.

Bonnay, Denis & Westerståhl, Dag. 2016, „Compositionality solves Carnap's problem", *Erkenntnis*, 81(4), 721–739.

Bonnay, Denis & Speitel, Sebastian G. W. 2021. „The ways of logicality: invariance and categoricity". In Gil Sagi & Jack Woods (eds.), *The Semantic Conception of Logic: Essays on Consequence, Invariance, and Meaning*. CUP, 2021, pp. 55–79.

Brîncuș, Constantin C. 2021, „Are the open-ended rules for negation categorical?". *Synthese* **198**, 7249–7256.

Brîncuș, Constantin C. 2022, „The Non-Categoricity of Logic (I). The Problem of a Full Formalization" (In Romanian), *Problems of Logic (Probleme de logică)*, XXV, pp. 137–156

Brîncuș, Constantin C. fortcoming. (forthcoming), „Inferential Quantification and the Omega Rule". In Antonio Piccolomini d'Aragona (Ed.) *Perspectives on Deduction*, Synthese Library Series, Springer.

Brîncuș, Constantin C., „Categorical Quantification" (Unpublished manuscript)

Carnap, Rudolf. 1937, *Logical Syntax of Language*, London, K. Paul, Trench, Trubner & Co Ltd.

Carnap, Rudolf. 1942, *Introduction to Semantics*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.

Carnap, Rudolf. 1943, *Formalization of Logic*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.

Church, Alonzo. 1944, „Review of Carnap 1943", *The Philosophical Review*, 53.5, pp. 493–8.

Dunn, J. Michael, Hardegree, Gary M. 2001, *Algebraic Methods in Philosophical Logic*, Oxford, England: OUP.

Dummett, Michael. 1991. *The Logical Basis of Metaphysics*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

Frege, Gottlob. 1919, „Negation", in M. Beaney (ed.), *The Frege Reader*, 346–61, Oxford, Blackwell.

Garson, James. 2013, *What Logics Mean: From Proof-Theory to Model-Theoretic Semantics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Hardegree, Gary M. 2005, „Completeness and super-valuations". *J Philos Logic*, **34**, 81–95.
Hilbert, David & Bernays, Paul. 1934/1968, *Grundlagen der Mathematik*, Vol. I, Springer.
Hjortland, Ole. T. 2014. „Speech acts, categoricity and the meaning of logical connectives", *Notre Dame Journal of Formal Logic, 55*(4), 445–467.
Incurvati, Luca & Smith, Peter. 2010, „Rejection and Valuations", *Analysis*, 70:1, pp. 3–10
Kneale, William, „The Province of Logic. In H.D. Lewis (Ed.*)*, Contemporary British Philosophy: Personal Statements, 3rd Series, London, Allen and Unwin, 1956, 235–261.
Kneale, William & Kneale Martha. 1966/1975, *Dezvoltarea logicii*, vol II, traducere de Sorin Vieru și Ușer Morgenstern, Editura Dacia, Cluj-Napoca.
Mancosu, Paolo; Galvan, Sergio and Zach, Richard. 2021, *An Introduction to Proof Theory. Normalization, Cut-Elimination, and Consistency Proofs*, Oxford University Press.
Murzi, Julien & Hjortland, Ole Thomassen. 2009. „Inferentialism and the categoricity problem: Reply to Raatikainen", *Analysis,* 69 (3):480-488.
Murzi, Julien & Topey, Brett. 2021, „Categoricity by convention". *Philosophical Studies* 178: pp. 3391–3420.
Raatikainen, Panu. 2008, „On rules of inference and the meanings of logical constants". *Analysis*, 68:300, 282–287.
Restall, Greg. 2005, „Multiple Conclusions", in *Logic, Methodology and Philosophy of Science*: *Proceedings of the Twelfth International Congress*, edited by Petr Hajek, Luis Valdes-Villanueva and Dag Westerstahl, Kings' College Publications, 2005, 189–205. Online version available here: https://consequently.org/papers/multipleconclusions.pdf
Rumfitt, Ian. 2000, „'Yes' and 'no'", *Mind*, 109, 781–823.
Rumfitt, Ian. 2008, „Co-ordination principles: A reply," *Mind*, 117 (468):1059–1063.
Scott, Dana. 1971, „On Engendering an Illusion of Understanding". *The Journal of Philosophy*, 68 (21), 787–807.
Shoesmith, D. J., & Smiley, T. J. 1978, *Multiple-conclusion logic*, Cambridge, Cambridge University Press.
Smiley, Timothy . J. 1996, „Rejection". *Analysis*, 56(1), 1–9.
Steinberger, Florian. 2011, „Why Conclusions Should Remain Single", *J Philos Logic*, 40, 333–355.
Warren, Jared. 2020, *Shadows of Syntax. Revitalizing Logical and Mathematical Conventionalism*, OUP.