Salvador D. Escobedo

Teoría de los entes

Propuesta para la formalización de la filosofía

Con una introducción a la lógica y a la semiótica.

Ed. Temacilli, 1ra edición, 2012

Cap. 7: El ente compuesto

7. El ente compuesto

7.1 Introducción

En los capítulos precedentes se estableció la distinción entre ente real y ente de razón. Un ente real es aquél que está dotado de existencia independientemente de si pensamos o no en él. No es necesario, sin embargo, que a todo ente real se atribuya un mismo modo de existir y veremos más adelante que ciertamente hay seres cuyas existencias deben referirse a tipos distintos. Previamente nos centraremos en el estudio del ente compuesto, dejando el análisis de los modos de existencia para un capítulo posterior.
Para considerar un ente como real no exigiremos que su existencia pertenezca a algún tipo determinado; basta, como se dijo arriba, que tenga existencia real, sin importar a qué clasificación pertenece ésta. Así al referirnos a un ente real x, sin agregar más, no excluimos la posibilidad de que se pueda tratar de un ser *secundum quid*, en el sentido filosófico del término[188].

Ahora definiremos el conjunto de todos los entes reales y la noción de ente de razón en función de éste.

Definición 1. Definimos el conjunto de todos los *seres realmente existentes*, o simplemente, de los *seres reales*, como el conjunto

$$\mathbf{E} = \{x : x \text{ es real}\}$$

Si x no es elemento de **E**, entonces diremos que x es un *ente de razón*.

[188] La expresión *ente secudum quid* (contracción de *secundum aliquid*) se usa para designar a los seres que no son tales en sí mismos, sino en otro, como las cualidades, las relaciones y en general todo *accidente*.

Notemos que la definición anterior no depende de la idea filosófica de ente de razón; simplemente todo elemento que no pertenezca al conjunto **E** es un ente de razón. El concepto de ente real es, dentro del seno de esta teoría, un concepto *no definido*, como lo serían las nociones de punto y línea recta en geometría.
La definición 1.1 implica que para toda entidad x se tiene $x \notin \mathbf{E}$ o $x \in \mathbf{E}$, y en este sentido puede decirse que los elementos de **E** están *bien definidos*.
Ahora bien, aunque ser real equivale a existir (de una manera real), no obstante, en el lenguaje matemático frecuentemente se dice que un elemento *existe* para dar a entender que es posible concebirlo y no hay contradicción en ello. Un ejemplo de esta manera de expresarse está en el siguiente enunciado:

> *Para cualquier familia F de subconjuntos* $\{S_i\}$ *de un conjunto S, existe una función de elección* $f(S_i)$, *definida para los subconjuntos de F, cuyos valores son elementos de S tal que…etc.*

Lo anterior es un fragmento del célebre axioma de elección. Nótese que aquí la expresión "*existe una función*" no designa una existencia real de ésta fuera de la mente, sino simplemente que la función en cuestión puede ser concebida dentro del sistema matemático sin que por ello se caiga en una contradicción lógica. Si no ocurriera así el axioma sería falso, y la mencionada función de elección *no existiría*, o cuando menos no existiría siempre.
Según esto, la existencia matemática equivaldría a ser pensable y lógicamente compatible con las otras entidades matemáticas. Sin embargo muchos matemáticos no estarían de acuerdo con este punto de vista, en especial aquéllos de tendencia intuicionista o platonista. No es nuestra intención discutir en detalle este punto, sólo pretendemos hacer constar al lector la diferencia en expresiones como

x existe
existe un ente x tal que…
existe un ente real x tal que…

En los primeros dos casos se afirma al menos la existencia matemática, en el último se afirma la existencia real y extramental de x. A lo largo de este texto encontraremos muchas expresiones por el estilo, recomendamos al lector que ponga cuidado en distinguir en cada caso si se está afirmando la existencia real o puramente lógica de un ser, como sería, por ejemplo, en el axioma de elección. Algunas veces diremos que x es elemento de **E**, lo que, como es obvio, debe entenderse como una afirmación de la existencia real del ente x. En este capítulo demostraremos que la existencia lógica de una entidad dada no implica necesariamente su existencia real.

Finalmente haremos notorio cierto procedimiento que se tomó en cuenta al definir **E**. De haber seguido la costumbre de la matemática moderna hubiéramos hecho la definición del conjunto de los entes reales diciendo simplemente: sea **E** un conjunto de elementos *llamados entes reales*. Y después se hubiera procedido a definir el ente de razón como un elemento que no pertenece a **E**. A pesar de su sencillez esta manera comenzar una teoría que pretende ser aplicable a la filosofía es todo un desastre, y trae consigo graves consecuencias. El conjunto **E** no representa, para nosotros una pura realidad imaginaria, sino la realidad tal cual es, y, aunque muchas veces consideraremos situaciones hipotéticas de **E,** ello no significa que se haya abandonado este punto de vista. Asumir que los elementos de este conjunto son elementos arbitrarios que se *llaman* reales equivale a renunciar a la idea de que realmente lo son; entonces la noción de entidad real vendría a convertirse en un puro tecnicismo de la teoría, desligado de su contenido semántico intuitivo. Si se tratara de una teoría puramente formal, cuyo único cometido sea el servir de objeto de estudio al matemático, tal subjetivización de **E** sería válida y, quizá, conveniente; sin embargo nosotros deseamos utilizar la teoría como un instrumento mediante el cual se exprese, de la manera más exacta y concisa posible, la realidad objetiva en la cual el filósofo se interesa, y por lo tanto no podemos asumir otro punto de vista sino aquél en el cual los elementos de **E** *son* y se llaman entes reales.
Ahora bien, la definición 1.1 no nos obliga a admitir que **E** contiene tales o cuales entidades; eso permanece indeterminado. Lo que en esta definición se da por supuesto es, (1) que existe cuando menos un ente real; y (2) el principio del tercero excluso, según el cual no es posible un término medio entre el existir y el absoluto no existir.
Como puede verse la simple definición de **E** nos sitúa ya en un contexto filosófico el cual irá definiéndose cada vez más según avancemos. La validez de (1) debe ser obvia al lector, el principio (2), que debería ser igualmente obvio, será discutido en otro lugar.
Por otro lado existen tres preguntas fundamentales que podemos plantearnos una vez que nos ha sido dado un ente cualquiera x de determinadas propiedades; a saber

Existencia. ¿Existe el ente x?, esto es, ¿es x un elemento de **E**?
Número. Suponiendo que existe algún x, ¿es único? y si no, ¿Cuántos entes semejantes a x hay en **E**?
Determinación. ¿Qué otras propiedades tiene x y cómo podemos determinarlas?

Algunas veces es posible contestar algunas de estas preguntas de manera concisa, otras veces nos tendremos que conformar con una hipótesis, o bien, con la sospecha de que es imposible dar una respuesta.

7.2 Axiomas de composición

La noción de un ser compuesto es natural e *intuitiva*. Decimos que un ser es compuesto cuando lo concebimos como algo constituido de partes o componentes distintos entre sí. Contrariamente, un ser simple se concibe como algo desprovisto de composición.
No obstante, esta sencilla idea contiene más enredos de lo que se podría esperar y existen una multitud teorías filosóficas sobre el asunto. Nosotros dejaremos de lado la discusión filosófica y daremos comienzo al desarrollo formal de nuestro punto de vista sobre el compuesto introduciendo cinco axiomas fundamentales y derivando, a partir de éstos y de las definiciones, los teoremas que formarán el *cuerpo* de este capítulo. El desarrollo que seguiremos será completamente riguroso y formal, aunque no nos desligaremos totalmente de la interpretación trascendente de nuestros resultados.
Comencemos con algunas ideas generales.

Si x es una entidad compuesta entonces en x existen *componentes* o *partes* tales que constituyen x. Si a es un componente de x entonces escribiremos $a \triangleright_{\mu} x$, y diremos que a es parte de x, o que a pertenece a x; en caso contrario escribiremos $a \ntriangleright_{\mu} x$. La legra griega μ que aparece en la relación es un índice que *etiqueta* el tipo o modo de composición de que se está hablando. Prevemos así que pueda haber distintas modos en que un ser se pueda decir parte de otro; para ilustrar esta noción consideremos los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1. Supongamos que tenemos cinco moléculas de los siguientes tipos: 1. Un átomo de hidrógeno (H), 2. Un átomo de oxígeno (O), 3. Una molécula de ozono (O_3), 4. Una molécula de oxígeno (O_2), 5. Una molécula de agua (H_2O).
Algunos de estos cuerpos son «compuestos»; otros son «simples», esto es, no compuestos. A primera vista puede decirse que el oxígeno O y el hidrógeno H son *simples*, pues están constituidos por un único átomo del respectivo elemento. Por el contrario, el ozono, el agua y la molécula de oxígeno diatómico son compuestos, ya que se constituyen por varios átomos. Evidentemente el

criterio que estamos siguiendo para distinguir lo simple de lo compuesto es el siguiente:

«Lo compuesto consta de varios átomos».

Para identificar este criterio asociémoslo a una letra griega, pongamos μ. Este no es el único criterio posible. Si consideramos que el átomo de hidrógeno está compuesto por un protón y un electrón entonces debemos reconocer que tal átomo no es simple después de todo. Evidentemente no decimos que el átomo de hidrógeno sea, al mismo tiempo y en el mismo sentido, simple y compuesto. Decimos que es simple según el criterio μ, y que es compuesto según otro criterio, que podría enunciarse así:

«lo compuesto consta de varias partículas elementales»

Llamemos ν al criterio anterior. Se entiende pues que H sea simple según el criterio μ, pero compuesto según el criterio ν. Por lo demás, todas las sustancias mencionadas en este ejemplo son compuestas según este último criterio.
Como se puede observar, al aplicar cualquiera de los dos criterios anteriores para determinar las partes de un compuesto se declaró una propiedad común a todos los componentes de la respectiva composición, y que a la vez, es exclusiva de ellos. Por ejemplo, en el caso de μ la propiedad común en los componentes es la de ser un átomo. Similarmente, para ν la propiedad común es la de ser una partícula elemental. De esta manera, si un ente es compuesto según μ o ν, entonces cada uno de sus componentes será un átomo o una partícula elemental, respectivamente.

EJEMPLO 2. Alrededor de Saturno pueden observarse los famosos *anillos* que dan un aspecto peculiar a este planeta. Estos anillos están formados por partículas de hielo de agua ordinaria, cuya medida varía desde varias micras hasta el tamaño de un camión de volteo. Se distinguen claramente tres anillos, llamados comúnmente A, B, y C. Existen, además otros anillos menos visibles, pero no los tomaremos en cuenta; el anillo B está formado por un centenar de anillos más pequeños, que también pueden distinguirse, aunque con menos claridad en el anillo A.

Ahora bien, utilicemos los nombres de los anillos como variables. Para poder afirmar que A $\in$ **E** debemos primero saber si las partículas de hielo que forman este anillo están unidas entre sí de tal modo que de su unión resulte el ente compuesto A. Sin embargo no es claro que sea así, ya que las unidades de hielo que forman el anillo orbitan Saturno de manera independiente, sin tocarse necesariamente unas a otras. Con esto no pretendemos poner en duda la existencia de los anillos de Saturno; lo que nos preguntamos es si su unidad es real o sólo aparente. Más adelante demostraremos que no cualquier agrupación de entidades reales debe ser ella misma *un* ente real. A pesar de todo, supongamos que A existe, y que por tanto A $\in$ **E**; pensemos de manera semejante para B y C. Supóngase, además, que A, B y C, forman el sistema de anillos s, siendo $s \in$ **E**. Tenemos entonces que s es una entidad que se puede decir compuesta en dos sentidos diferentes.

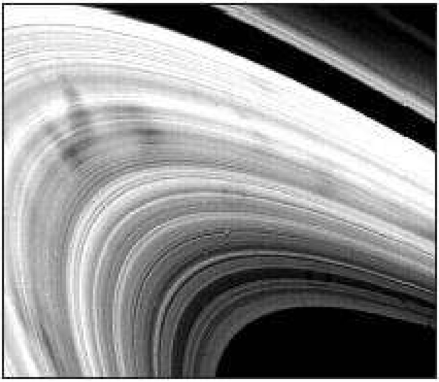

Figura. 7.1. Vista del anillo B de Saturno tomada por el Voyager II (cortesía de la NASA).

(1) Sea μ el modo de composición en el cual los compuestos están formados de anillos. Entonces s es compuesto, y A, B, C, son componentes de s; por la misma razón A y B son compuestos, y (suponiendo que C no consta de anillos) C es simple.
(2) Sea ahora ν el modo de composición en el cual compuestos están formados de partículas de hielo. Entonces, s, A, B, y C son compuestos. Si $p_1,\ldots, p_k$ son las k partículas de hielo que forman s, entonces cada una de éstas es una entidad simple[189], según el modo ν.

Lo que se desea resaltar con estos ejemplos es el hecho de en un ser real podremos muchas veces encontrar diversos tipos de composición; es decir, un ente dado puede ser compuesto de distintos *modos* o maneras. Para evitar

[189] Para simplificar estamos suponiendo que las partículas de hielo no están, a su vez, formadas de otras partículas de hielo. Evidentemente esto puede no ser cierto.

equívocos, diremos que un ente es μ-compuesto si es compuesto según el modo μ; en caso contrario diremos que es μ-simple. Las definiciones formales se darán en un momento.
Respecto a esto debemos notar que un ente real nunca es componente de sí mismo. Ser componente de sí mismo equivale a ser una parte de sí mismo y no el todo, lo que es absurdo. No podemos decir, por ejemplo, que un átomo de hidrógeno está compuesto de un átomo de hidrógeno, o que el átomo de hidrógeno sea la única parte del átomo de hidrógeno. Por esta razón en el ejemplo 1 no se dijo que el átomo de hidrógeno fuera un compuesto (de átomos) constante en un único átomo, sino que era un ente simple, en el sentido que no está compuesto de átomos. En general siempre tendremos $x \ntriangleright_\mu x$ para cualquier x y cualquier modo de composición μ. Esta propiedad la deduciremos más delante de los axiomas.
Por otro lado debe notarse que la expresión 'x es μ-simple' puede ocurrir en situaciones diversas. Por definición, estamos usando el término 'simple' como sinónimo de 'no compuesto'. En el ejemplo 1 el átomo de oxígeno fue llamado simple (según el modo μ) por no estar compuesto de varios átomos. Ya que una partícula elemental no está compuesta de átomos también es simple según el mismo modo μ. Sin embargo hay una diferencia grande entre la partícula y el átomo de oxígeno, pues este último no está compuesto de átomos, pero *él mismo es un átomo*. La partícula por el contrario, no está formada de átomos y además no es ella misma un átomo. Esta observación da origen a algunas distinciones que no haremos sino hasta el capítulo 9.
Respecto a la cuestión de si un modo de composición μ es un ente real o no, preferimos por lo pronto permanecer neutros. Así pues, sea M un conjunto de elementos llamados *modos de composición*, y sea $\triangleright_\mu$ una relación a la que llamaremos *relación de composición* perteneciente al modo $\mu \in M$. Definimos $[x]_\mu = \{ y : y \triangleright_\mu x\}$, y

$$[x] = \bigcup_{\mu \in M} [x]_\mu$$

y escribiremos $y \triangleright x$ para significar que $y \in [x]$. Así pues, $[x]$ es el conjunto de todos los entes que de algún modo son parte de x.
Diremos que un ente es *μ-simple* si $[x]_\mu = \varnothing$. Si $[x]$ es vacío entonces el ente x se dice *absolutamente simple*, o *perfectamente simple*. Llamaremos $\mathbf{C}_\mu$ al conjunto de todos los entes reales que no son μ-simples. A los elementos de $\mathbf{C}_\mu$ llamaremos *μ-compuestos*. La unión $\cup_{\mu \in M} \mathbf{C}_\mu = \mathbf{C}$ es el conjunto de todas las

entidades reales que de algún modo son compuestas. Diremos que un ente es *compuesto* si y sólo si es elemento de **C**, en caso contrario diremos que es *simple*. Nótese que en esta terminología *simple* equivale a *perfectamente simple*. Escribiremos algunas veces $y \ntriangleright x$ para significar, como es natural, que $y \notin [x]$.

> **Axiomas de composición.** *Sean* x, y, z *entidades reales, y sean* μ *y* ν *elementos cualesquiera de M. Se cumple lo siguiente*
>
> **A1.** $x \ntriangleright \lambda$ y $\lambda \ntriangleright x$ para todo ente de razón λ.
>
> **A2.a** Si $y \in [x]$ entonces $[y] \subset [x]$.
>
> **A2.b** Si $y \in \mathbf{C}$ y $[y] \subset [x]$ entonces $y \in [x]$.
>
> **A3.** Si $y \triangleright_{\mu} x$, entonces existe un ente real $z \neq y$ tal que $z \triangleright_{\mu} x$ y $z \ntriangleright y$.
>
> **A4.** Si $x, y \in \mathbf{C}$, entonces $[y] = [x]$ implica $y = x$.
>
> **A5.** Si $[x]_{\mu} = [x]_{\nu}$ para todo x, entonces $\mu = \nu$.

En el primero de estos axiomas se sostiene que ningún ente real es parte de otro que no lo sea, y que toda parte de un compuesto real es, asimismo, una entidad real.

Escindimos el axioma A2 en dos enunciados, de los cuales uno es el recíproco del otro. En A2a se afirma que si y es parte de x entonces todas las partes de y son, de algún modo, partes de x. Digamos, como ejemplo, que si una tabla fuera parte de una silla, entonces todas las partes de la tabla serían de algún modo partes de la silla.

En el enunciado b de A2 supóngase que tenemos un compuesto real x tal que cada una de sus partes es, a la vez, parte de una entidad distinta y. Entonces x debe ser, de algún modo, parte de y. Así por ejemplo, si todas las partes de una tabla fueran partes de una silla, la tabla misma sería parte de esa silla.

Reuniendo ambas partes, el axioma A2 se expresa

A2. $y \in [x]$ si y sólo si $[y] \subset [x]$, $y \in \mathbf{C}$.

En A3 se establece la existencia de un *complemento*, de modo que si tenemos un compuesto real x, y sabemos que y es parte de x entonces debe existir a lo menos otro ente real z, distinto de y, que sea parte de x sin ser parte de y. Por ejemplo, si una tabla es una parte de una silla entonces el axioma nos dice que la silla no puede consistir únicamente en la tabla. Claramente A3 implica que todo compuesto debe contener, a lo menos, dos partes reales.

El axioma A4 puede ser ilustrado de la manera siguiente: sea S un conjunto de sillas y sean a y b elementos de S. Supongamos que el respaldo de a es el respaldo de b, que el asiento de a es el asiento de b, y así sucesivamente con cada parte de a; supóngase que lo mismo ocurre con las partes de b con relación a a, entonces a y b son la misma silla, esto es $a = b$.
El axioma A5 afirma que si dos modos de composición μ y ν coinciden en sus respectivos componentes para cualquier x, entonces estos dos modos deben considerarse como un único y mismo modo.
Los axiomas A4 y A5 serán discutidos en una sección aparte. Las demostraciones de los teoremas que veremos hasta entonces no dependen de este último axioma.

TEOREMA 7.1 *Sea* $x \in \mathbf{C}$ *y* $\mu \in M$. *Si* $y \rhd_\mu x$ *entonces* $x \not\rhd_\mu y$.

Demostración. Ya que x es un ente compuesto; entonces $y \rhd_\mu x$ implica $y \in [x]$; por el axioma A2.a se tiene $[y] \subset [x]$. Igualmente si $x \rhd_\mu y$ se tiene $x \in [y]$ y $[x] \subset [y]$. Contradicción.

LEMA 7.2. *Se tiene* $x \notin [x]$ *para todo* x. *En particular* $x \notin [x]_\mu$ *para todo* x *y todo* $\mu \in M$.

Demostración. Hagamos $x = y$ en el teorema anterior y observemos que esto nos conduce a una contradicción.

El teorema siguiente, aunque sencillo, es el primero de la lista en darnos un resultado valioso respecto a su interpretación metafísica, ya que nos hace ver que es posible demostrar la inexistencia de ciertas entidades.

TEOREMA 7.3 . *No existe ningún ente real* x *tal que* $[x] = \mathbf{E}$.

Demostración. Supóngase lo contrario, entonces existe un $x \in \mathbf{E}$ tal que $[x] = \mathbf{E}$, y por tanto $x \in [x]$, es decir, $x \rhd x$, en contra del lema 7.2. Luego la hipótesis es falsa.

Como se verá enseguida, el teorema 7.3 no es el único caso de demostración de no existencia de un dado ente x. Terminamos la presente sección presentando cuatro teoremas referentes a la inexistencia de entidades reales en relación con las operaciones fundamentales del álgebra de conjuntos.

TEOREMA 7.4. *No existen compuestos reales x, y, z, distintos entre sí, tales que*

(1.3) $$[z]=[x]\cup[y].$$

En general, si A es un subconjunto finito no vacío de **C**, *no existe ningún ente compuesto z tal que* $z \notin A$ *y*

(1.4) $$[z]=\bigcup_{x\in A}[x].$$

Demostración. Primeramente demostraremos el caso particular. Si (1.3) es válida para compuestos distintos, entonces $[x] \subseteq [x] \cup [y] = [z]$. Como $x \neq z$, se tiene $[x] \neq [z]$ (usando el axioma A4), y por lo tanto $[x] \subset [z]$. Por el axioma A2, $x \in [z]$, y por tanto $x \in [x] \cup [y]$, así que debe de ser $x \in [x]$ o $x \in [y]$. Lo primero es imposible (lema 7.2), y por consiguiente $x \in [y]$; además, por el axioma A2.a, se tiene $[x] \subset [y]$. Procediendo del mismo modo encontramos $y \in [x]$ y $[y] \subset [x]$, lo que implica $[x] \not\subset [y]$, pero esto es contradictorio, así que (1.3) no puede ser válida.

Para probar el caso general procederemos por inducción sobre el número de elementos de A. Sea $n = |A|$. Para $n = 1$ el teorema es obvio y lo acabamos de demostrar para $n = 2$; supongamos pues que el teorema se cumple para $n = k$, probaremos que es válido para $n = k + 1$. Sea pues $A = \{x_1,\ldots, x_{k+1}\}$, y supongamos que existe un compuesto z que satisface la relación

$$[z]=\bigcup_{i=1}^{k+1}[x_i]=\left(\bigcup_{i=1}^{k}[x_i]\right)\cup[x_{k+1}]$$

Ahora bien, de la expresión anterior se tiene $[x_{k+1}] \subseteq [z]$. Si $[x_{k+1}] = [z]$ el axioma A4 implica que $x_{k+1} = z$, en contra de lo supuesto. Así que $[x_{k+1}] \neq [z]$ y por consiguiente $[x_{k+1}] \subset [z]$, con lo cual se tiene $x_{k+1} \in [z]$, esto es $x_{k+1} \in \left(\bigcup_{i=1}^{k}[x_i]\right)\cup[x_{k+1}]$. Además tenemos

$$x_{k+1} \in \bigcup_{i=1}^{k}[x_i],$$

ya que x_{k+1} no es un elemento de $[x_{k+1}]$ (lema 7.2), de donde se sigue que $x_{k+1} \in [x_j]$ para algún j, $1 \leq j \leq k$. En consecuencia la relación

$$[x_{k+1}] \subset [x_j] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} [x_i]$$

es válida para cierto x_j. De donde obtenemos

$$[z] = \left(\bigcup_{i=1}^{k} [x_i] \right) \cup [x_{k+1}] = \bigcup_{i=1}^{k} [x_i] \cdot$$

Pero el miembro derecho de la igualdad anterior es la reunión de k conjuntos de la forma $[x]$; por hipótesis de inducción no existe z real con tal propiedad, con lo que queda demostrado el teorema.

TEOREMA 7.5. *No existen compuestos reales x, y, z, distintos entre sí, tales que*

(1.6) $$[z] = [x] \cap [y],$$

en general, si A es un subconjunto arbitrario de **C**, *no existe ningún ente compuesto z tal que $z \notin A$ y*

(1.7) $$[z] = \bigcap_{x \in A} [x] \cdot$$

Demostración. Supóngase que existen compuestos x, y, z, distintos entre sí, tales que satisfacen (1.6). Entonces $[z] = [x] \cap [y] \subseteq [x]$, luego $[z] \subseteq [x]$. Como $z \neq x$, se tiene $[z] \neq [x]$, por tanto $[z] \subset [x]$ y $z \in [x]$. Similarmente se deduce $z \in [y]$. Así pues, $z \in [x]$ y $z \in [y]$, esto es $z \in [x] \cap [y] = [z]$, lo que es imposible, pues $z \notin [z]$.

Para probar el caso general observemos que si (1.7) se cumple para un subconjunto A de **C** y un elemento z de **C** $- A$, entonces, para cada $x' \in A$ se tiene

$$[z] = \bigcap_{x \in A} [x] \subseteq [x']$$

Así pues $[z] \subseteq [x']$ para cada para cada $x' \in A$. Puesto que $z \notin A$ debemos tener $z \neq x'$, y $[z] \neq [x']$; en consecuencia $[z] \subset [x']$ y $z \in [x']$ para cada $x' \in A$. Se sigue que $z \in \bigcap_{x \in A} [x] = [z]$, en contradicción con el lema 7.2. Esto completa la prueba.

TEOREMA 7.6. *Sea* $x \in$ **E**. *No existe ningún ente real z tal que*

(1.8) $$[z] = \mathbf{E} - [x].$$

Demostración. Supongamos primero que x es compuesto. Si (1.8) es cierta para algún ente real z, entonces $\mathbf{E} = (\mathbf{E} - [x]) \cup [x] = [z] \cup [x]$, pero $z \in \mathbf{E}$, así que $z \in [z] \cup [x]$. Como $z \notin [z]$ debe de ser $z \in [x]$; esto implica $[z] \subset [x]$, en contradicción con (1.8). Si x es perfectamente simple (i. e. $[x] = \varnothing$), entonces $[z] = \mathbf{E}$, pero por el teorema 7.3 sabemos que no existe ningún ente con esta propiedad, lo que completa la prueba.

TEOREMA 7.7. *No existen entidades compuestas x, y, z* $\in$ **C**, *distintas entre sí, tales que*

(1.9) $$[z] = [x] - [y].$$

Demostración. La relación (1.9) implica $[z] \subseteq [x]$, como $z \neq x$ se tiene $[z] \subset [x]$; en consecuencia $z \in [x]$. Ya que $z \notin [z]$, se sigue que $z \notin [x] - [y]$, por tanto z debe pertenecer a la intersección $[x] \cap [y]$. Así pues, $z \in [y]$ y por lo tanto $[z] \subset [y]$, en contradicción con (1.9).

Ejercicios 7.2

1. Propónganse tres ejemplos semejantes a los dados en esta sección, en los que el lector considere que la relación parte-a-compuesto existe en modos distintos.
2. Expresar los axiomas A1 y A3 con la notación de paréntesis cuadrados.
3. Demostrar que no existe ningún ente real x tal que $[x]_\mu = \mathbf{E}$, $\mu \in M$.
4. Supóngase que $\mathbf{E} = \{u, v\}$. Probar que u y v son absolutamente simples.
5. Defínase $y \trianglerighteq x$ como $y \triangleright x$ o $x = y$. Demostrar que $\trianglerighteq$ es una relación de orden, esto es, es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
6. Probar que el *compuesto de todos los compuestos* no existe.
7. Demostrar que si $[z] = [x] \cup [y]$, entonces $z = x$ o $z = y$, siendo $z \in \mathbf{C}$.
8. Demostrar que no existen entes reales x, y, z tales que $[x] \cup [y]^c = [z]$. Nota: $[y]^c$ es el complemento de $[y]$.
9. Determinar cuáles de las expresiones siguientes corresponden a cada uno de los axiomas A2.a, A2.b., A3, y al teorema 7.1.

a. *La parte de una parte es parte del todo*
b. *La parte no iguala al todo*
c. *El todo no puede estar contenido totalmente en una de sus partes*

7.3 Conjuntos de continentes y componentes inmediatos.

Nota: si el lector sólo está interesado en la refutación del platonismo matemático puede saltarse esta parte y pasar directamente a la sección 7.4.

Ahora consideraremos el conjunto de todos los compuestos reales tales que contienen a x como parte. Si x es un compuesto y $x \in [y]$, para algún y**,** diremos que x es un *subcompuesto* de y y que y es un *continente* de x. Las nociones de *μ-subcompuesto y μ-continente* se definen de manera natural.
Sea $\langle x \rangle_\mu = \{ y : x \triangleright_\mu y \}$, y definamos

$$\langle x \rangle = \bigcup_{\mu \in M} \langle x \rangle_\mu \ .$$

$\langle x \rangle$ representa así al conjunto de todos los compuestos que contienen a x de *algún modo* como parte propia. Si $\langle x \rangle = \varnothing$ diremos que x es *autónomo*.
Notemos que el lema 7.2 implica $x \notin \langle x \rangle$ y $x \notin \langle x \rangle_\mu$ para todo $x \in \mathbf{E}$. Se presenta un teorema análogo al teorema 7.4, cuya demostración se deja a cargo del lector.

TEOREMA 7.8. *No existe ningún ente real x tal que* $\langle x \rangle = \mathbf{E}$.

Hay ciertos elementos de $[x]$ dotados de una característica notable, que definimos enseguida.
Definición 2. El ente real y es un *componente inmediato* de x si $y \in [x]$ y no existe ningún $z \in [x]$ tal que $y \in [z]$; similarmente x es un *continente inmediato* de y si y es un componente inmediato de x.

Antes de continuar conviene introducir una función que nos será de utilidad. Definimos $\Phi: \wp\mathbf{E} \longrightarrow \wp\mathbf{E}$ por la relación

$$\Phi A = \bigcup_{a \in A} [a] \cdot$$

Claramente, si $x \in A$ entonces $[x] \subseteq \Phi A$. De la definición se tiene también $\Phi\varnothing = \varnothing$. La función Φ puede definirse de manera equivalente mediante la siguiente fórmula de primer orden

$$x \in \Phi A \leftrightarrow \exists y\, (y \in A \wedge x \in [y]), \ \ \forall x \in \mathbf{E}$$

Si en esta expresión remplazamos A por el conjunto $[x]$ podemos ver que $\Phi[x]$ es precisamente el conjunto de todos los componentes *no inmediatos* de x. Luego, los componentes inmediatos de x serían los elementos de $[x]$ que no están en $\Phi[x]$, y x no tendría componentes inmediatos sólo en el caso de que estos dos conjuntos fueran iguales. Estos hechos los enunciaremos por separado.

TEOREMA 7.9. *Sea x un ente real. Los componentes inmediatos de x son exactamente los elementos del conjunto* $[x] - \Phi[x]$. *El ente x carece de componentes inmediatos si y sólo si* $[x] = \Phi[x]$.

Llamaremos *componentes inmediatos* de un conjunto arbitrario A de entes reales a los elementos de $A - \Phi A$. Esto generaliza la noción definida con anterioridad. Estableceremos en seguida algunas propiedades sencillas de Φ.

TEOREMA 7.10. *Sean A, B, $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de* $\mathbf{E}$.

a) $\Phi\,(A \cup B) = \Phi A \cup \Phi B$. *En general*

$$\Phi\,(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \Phi A_1 \cup \Phi A_2 \cup \ldots \cup \Phi A_n.$$

b) $\Phi\,(A \cap B) \subseteq \Phi A \cap \Phi B$. *En general*

$$\Phi\,(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \subseteq \Phi A_1 \cap \Phi A_2 \cap \ldots \cap \Phi A_n.$$

c) $\Phi^2 A = \Phi(\Phi A) \subseteq \Phi A$.
d) *Si* $A \subset B$ *entonces* $\Phi A \subseteq \Phi B$.
e) $\Phi[x] \subseteq [x]$ *para todo* $x \in \mathbf{E}$.
f) *Si* $A = \Phi A$ *entonces* A *es nulo o infinito*.

Demostración. Comenzando por la parte a), aplicando la definición de Φ podemos ver que

$$\Phi(A \cup B) = \bigcup_{a \in A \cup B} [a] = \bigcup_{a \in A} [a] \cup \bigcup_{a \in B} [a] = \Phi A \cup \Phi B$$

Esto demuestra el caso particular. El caso general se prueba fácilmente por inducción; dejaremos la prueba al lector.
Para demostrar b) sea $x \in \Phi(A \cap B)$. Entonces $x \in [y]$ para cierto $y \in A \cap B$. Luego $y \in A$ y por tanto $[y] \subseteq \Phi A$, así que $x \in \Phi A$. Del mismo modo demostramos que $x \in \Phi B$ de donde se sigue $x \in \Phi A \cap \Phi B$. Esto prueba que $\Phi(A \cap B) \subseteq \Phi A \cap \Phi B$. El caso general se sigue por inducción.
Para demostrar c) sea $x \in \Phi(\Phi A)$, entonces $x \in [y]$ para un elemento y de ΦA, luego $y \in [z]$ para un $z \in A$. Por transitividad se tiene $x \in [z]$, así que $x \in \Phi A$.
La demostración de la parte d). Supóngase que $A \subset B$, y sea $B' = B - A$. Entonces $B' \cup A = B$. En consecuencia

$$\Phi B = \Phi(B' \cup A) = \Phi B' \cup \Phi A$$

Donde hemos utilizado la parte a) de este teorema. Las igualdades anteriores implican $\Phi A \subseteq \Phi B$. Nota: $\Phi B'$ será vacío si B' contiene sólo entidades simples, y en tal caso tendríamos la igualdad $\Phi A = \Phi B$, a pesar de ser A subconjunto propio de B.
La demostración de la parte e) es sencilla y se deja como ejercicio. Para probar f) supóngase que A es un subconjunto de $\mathbf{E}$ que satisface $\Phi A = A$. Entonces A puede ser vacío, ya que $\Phi\varnothing = \varnothing$. Supongamos que $A \neq \varnothing$; entonces A puede ser finito o infinito. Si A es finito, sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Tenemos

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \Phi\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = [a_1] \cup [a_2] \cup \ldots \cup [a_n]$$

De donde se sigue que $a_i \in [a_1] \cup [a_2] \cup \ldots \cup [a_n]$, $i = 1, 2, \ldots n$. En consecuencia, para cada $a \in A$ existe un $a' \in A$ tal que $a \in [a']$; es decir $a \rhd a'$.

Reordenado los índices si es necesario podemos por tanto relacionar los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de manera que

$$a_1 \rhd a_2 \rhd \ldots \rhd a_n.$$

Pero $a_n \rhd a_k$ para cierto k, $1 \leq k < n$. Pero entonces $a_k \rhd a_{k+1} \rhd \ldots \rhd a_n$, y por consiguiente $a_n \rhd a_n$, lo que es imposible. Así pues A no puede ser finito. Con esto queda demostrado el teorema.

En el teorema 7.4 de la sección precedente se demostró que no existe ningún compuesto real x tal que para un conjunto finito A de entidades compuestas que no contiene a x, se tenga

$$[x] = \bigcup_{a \in A} [a]$$

Esto es, $[x] = \Phi A$. Nótese que si B es cualquier subconjunto finito de **E** y A es la intersección $B \cap \mathbf{C}$, entonces $\Phi B = \Phi A$, ya que los elementos de B que no son entidades compuestas no influyen en la reunión (1.4). Así que del teorema 7.4 se sigue que no existe ningún subconjunto finito B de **E**, tal que si x es un ente real, $x \notin B$, se tenga $[x] = \Phi B$.
Sin embargo, el teorema de que se habla no niega que exista un conjunto *infinito* A con esta propiedad. Con lo que hemos hecho hasta aquí no podemos asegurar que no exista tal conjunto infinito; el próximo teorema nos dará una condición necesaria y suficiente para la existencia del mismo.

TEOREMA 7.11. *Sea* $x \in \mathbf{C}$. *Existe un subconjunto infinito* A *de* **E** *tal que* $x \notin A$ *y*

$$[x] = \Phi A$$

si y sólo si $[x] = \Phi[x]$.

Demostración. Demostraremos primero que si existe un subconjunto infinito $A \subseteq \mathbf{E}$, que no contiene x y que $[x] = \Phi A$, entonces $[x] = \Phi[x]$.
Sea $B = A - [x]$. Se tiene $\Phi B = \varnothing$. Para probar esto sea $a \in A$. Si a es compuesto entonces $[a] \neq \varnothing$ y $[a] \subseteq \Phi A$. Luego $[a] \subseteq [x]$, y ya que $a \neq x$ (recordemos que $x \notin A$) se tiene $a \in [x]$. Esto significa que todo ente compuesto de A es elemento

de $[x]$, y por consiguiente los elementos de $A - [x]$ son entidades simples. Así pues $\Phi B = \Phi(A - [x]) = \varnothing$.
Recordando que $\Phi[x] \subseteq [x]$ (parte e del teorema 7.10) podemos escribir

$$\begin{aligned} [x] &= [x] \cup \Phi[x] \\ &= \Phi A \cup \Phi^2 A \\ &= \Phi(A \cup \Phi A) \\ &= \Phi(A \cup [x]) \end{aligned}$$

Sustituyendo A por $(A - [x]) \cup (A \cap [x])$ en la última expresión tenemos

$$\begin{aligned} [x] &= \Phi((A - [x]) \cup (A \cap [x]) \cup [x]) \\ &= \Phi((A - [x]) \cup [x]) \\ &= \Phi(A - [x]) \cup \Phi[x] \\ &= \varnothing \cup \Phi[x] \\ &= \Phi[x] \end{aligned}$$

Por tanto $[x] = \Phi[x]$, como se deseaba.
Para demostrar que si $[x] = \Phi[x]$ entonces existe un subconjunto infinito A de **E**, que no contiene a x, tal que $[x] = \Phi A$, hagamos simplemente $A = [x]$. Así definido A satisface las condiciones requeridas, ya que $x \notin A$, y $A \subseteq \mathbf{E}$; además se tiene $A = \Phi A$, así que por la parte f del teorema 7.10 el conjunto A debe ser vacío o infinito, pero A no es vacío, ya que $[x] \neq \varnothing$; luego A es infinito. Esto completa la prueba.

Ejercicios 7.3

1. Demostrar el teorema 7.8. ¿Qué interpretación metafísica daría Ud. a este teorema?
2. Sea $[x] = \{a, b, c, d\}$, $[y] = \{x, a, b, c, d, e, f\}$ y $[z] = \{e, f, g\}$, donde a, b, c y d son simples. Demostrar que e, f, y g son simples y calcular $\Phi[y]$, $\Phi^2[y]$, $\Phi[x]$, $\Phi^2[x]$, y $\Phi[z]$.
3. Sea $A = \{x, y, b\}$, con x, y, y b como en el ejercicio anterior. Calcular ΦA, y $\Phi^2 A$.
4. Demostrar que no existen entes reales x, y, z distintos entre sí, no todos simples tales que los conjuntos $\langle x \rangle$ y $\langle y \rangle$ no sean comparables y satisfagan las ecuaciones siguientes.

a. $\langle z\rangle = \langle x\rangle \cup \langle y\rangle$,
b. $\langle z\rangle = \langle x\rangle \cap \langle y\rangle$,
c. $\langle z\rangle = \mathbf{E} - \langle x\rangle$,
d. $\langle z\rangle = \langle x\rangle \cup \langle y\rangle^c$.

5. Si A es el complemento del conjunto $\langle x\rangle$ probar que no existe un ente z, real, tal que $A = \langle z\rangle$.
6. Probar que $\langle x\rangle \subset \langle y\rangle$ implica $x \in \langle y\rangle$.
7. Sea $H(x) = \langle x\rangle \cup [x]$. Diremos que $H(x)$ es la *envoltura ontológica* de x. Demostrar que la relación R definida por

$$xRy \text{ si y sólo si } x \in H(y)$$

no puede considerarse como una relación de composición, en el sentido de no satisface los axiomas A1-5.
8. Se demostró que $\Phi(A \cap B) \subseteq \Phi A \cap \Phi B$. ¿Qué condición se requiere para que se dé la igualdad? [sugerencia: considerar los elementos de $A \triangle B$]
9. Terminar las demostraciones de las partes a y b del teorema 7.10.
10. Demostrar la parte e del teorema 7.10.
11. Establecer la relación siguiente: $\Phi^n A \subseteq \Phi^k A$, siempre que $n \geq k > 0$. Esto generaliza la parte c del teorema 7.10.
12. Demostrar que para cualquier familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbf{E}$ se tiene $\Phi \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \Phi A$. Esto generaliza la parte a del teorema 7.10.

7.4 Crítica del platonismo matemático

Veremos ahora algunas consecuencias de los teoremas sobre entidades reales demostrados hasta aquí, y estudiaremos sus relaciones con el llamado *platonismo matemático*. Con este fin deberíamos exponer de una manera detallada los principales postulados y puntos de vista de la mencionada corriente, lo cual nos llevaría a introducirnos en una problemática filosófica intrincada que terminaría apartándonos de nuestro objeto. No haremos, pues, una crítica filosófica completa del platonismo; en cambio definiremos una hipótesis a la cual llamaremos *platónica*, y la examinaremos dentro del contexto de la teoría definida por los axiomas presentados en la sección 1.2. Para mayor claridad dividiremos la hipótesis platónica en dos versiones; a la primera de las cuales llamaremos *débil*, por ser menos plausible, y a la segunda *fuerte*.

HIPÓTESIS PLATÓNICA (DÉBIL). Sea $A \subseteq \mathbf{E}$, con $|A| > 1$, entonces $A \in \mathbf{E}$ y $A = [A]$.

En otras palabras, esta hipótesis supone que todo subconjunto no vacío de entes reales que contiene más de un elemento, es él mismo una entidad real, y además los elementos de tal subconjunto serían verdaderamente sus *partes*, o elementos constitutivos de su ser, en tanto que es un ente compuesto real.
Como es claro, la condición $A = [A]$ exige que toda entidad que de algún modo sea parte de A debe ser asimismo un elemento de A.
El caso en que A es vacío o contiene un único elemento queda excluido por la condición $|A| > 1$. Esta restricción se debe a que no nos interesa discutir aquí la existencia real del conjunto vacío ni la de conjuntos que contienen sólo un elemento. Si, por lo demás suponemos que $\{e\} = e$ para cualquier elemento e de $\mathbf{E}$, resultará evidente la afirmación de que $\{e\}$ es un ente real. Esto ciertamente carece de importancia ya que lo que se desea saber es si existen conjuntos *reales*, es decir, si todo conjunto de entidades reales es, consiguientemente, un compuesto real, la cual interrogante resulta trivial para el caso en que el conjunto en cuestión es $\{e\} = e$. Nos limitaremos así a considerar conjuntos cuyo número cardinal es mayor que la unidad, y llamaremos *conjuntos platónicos* a los tales, suponiendo que satisfacen la hipótesis de igual nombre.
En todos los teoremas de esta sección, como es natural, se da por supuesto que los axiomas A1-A5 determinan una teoría consistente.

TEOREMA 7.12. *Si* **E** *contiene más de un elemento, entonces la Hipótesis Platónica (débil) es falsa.*

Demostración. Notemos que la dicha hipótesis choca con el teorema 7.3 ya que $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ implica, por Hipótesis Platónica, $\mathbf{E} \in \mathbf{E}$ y $\mathbf{E} = [\mathbf{E}]$; en contradicción con el teorema citado.
Podemos modificar ligeramente la Hipótesis Platónica débil remplazando en ella $\subseteq$ por $\subset$. Con esto se sostendría lo siguiente:

$$\text{Sea } A \subset \mathbf{E}, \text{ con } |A| > 1, \text{ entonces } A \in \mathbf{E} \text{ y } A = [A].$$

Veremos que la Hipótesis Platónica se topa con problemas aún admitiendo, mediante este cambio, que **E** no es un conjunto platónico.

TEOREMA 7.13. *Si* **E** *contiene más de dos elementos, entonces la Hipótesis Platónica débil es falsa (aún admitiendo que el mismo* **E** *es un caso de excepción).*

Demostración. Si $|\mathbf{E}| > 2$, entonces existen $2^{|\mathbf{E}|} - 2$ subconjuntos propios no vacíos de **E**. Como **E** tiene por lo menos 3 elementos, existirán $2^3 - 2 = 6$ subconjuntos propios no vacíos de **E**, al menos. Pero en **E** hay al menos 3 subconjuntos de cardinal 1, así que hay por lo menos $6 - 3 = 3$ subconjuntos propios de cardinal mayor que la unidad.
Sea $A \subset \mathbf{E}$, con $|A| > 1$. Por hipótesis platónica $A \in \mathbf{E}$ y $A = [A]$.
Considérese ahora el conjunto $\mathbf{E} - [A]$. Ya que $A \notin [A]$, debe de ser $A \in \mathbf{E} - [A]$. Sea $B = \{A, a\}$, siendo $a \in [A]$. Considerando que por suposición **E** contiene más de dos elementos, y que $|B| = 2$, se deduce $B \subset \mathbf{E}$. Notando que $|B| > 1$, por hipótesis platónica (débil) tenemos $B \in \mathbf{E}$ y $B = [B]$. Ahora bien, ya que por definición $A \in B$ se sigue que $A \in [B]$ y por tanto $[A] \subset [B]$ (axioma A2), pero recordando que $A = [A]$, tenemos en consecuencia $A \subset [B] = \{A, a\}$; pero esto es imposible, pues $A \notin [A]$ y $|A| > 1$. Esto prueba que la hipótesis platónica débil conduce a contradicciones.

Una vez demostrado que la primera versión de la hipótesis es inconsistente, consideraremos una segunda versión que sea más verosímil.

HIPÓTESIS PLATÓNICA (FUERTE). Sea $A \subset \mathbf{E}$, con $|A| > 1$, entonces $A \in \mathbf{E}$ y $A = [A]_\mu$, para cierto $\mu \in M$.

La única diferencia en esta versión es que ya no se exige que todos los elementos de $[A]$ sean elementos del conjunto A, los cuales serán ahora considerados μ-componentes de A. Como puede observarse hemos excluido el caso en que $A = \mathbf{E}$, ya que esto lleva de inmediato a contradicciones; en efecto, se tendría $\mathbf{E} = [\mathbf{E}]_\mu \subseteq [\mathbf{E}]$, lo que ya se refutó en el teorema 7.12.
En seguida veremos que la hipótesis platónica fuerte, aunque es más verosímil, tampoco es verdadera.

TEOREMA 7.14. *Si* **E** *contiene más de dos elementos, entonces la Hipótesis Platónica (fuerte) es falsa.*

Demostración. Si **E** contiene más de dos elementos, sea $A \subset \mathbf{E}$, con $|A| > 1$, entonces la hipótesis implica $A = [A]_\mu$, $\mu \in M$, Supongamos que $[A] \neq [A]_\mu$.

Procediendo igual que antes, sea $B = \{A, a\}$, siendo $a \in [A]_\mu$. Como por suposición **E** contiene más de dos elementos, y $|B| = 2$, deducimos $B \subset$ **E**. Notando que $|B| > 1$, por hipótesis platónica (fuerte) tenemos $B \in$ **E** y $B = [B]_\nu$ para cierto modo $\nu \in M$.
Ahora bien, ya que por definición $A \in B$ se sigue que $A \in [B]_\nu$. Observando que $[B]_\nu \subseteq [B]$ se deduce $A \in [B]$ y por tanto $[A] \subset [B]$ (axioma A2). Recordando que $A = [A]$, tenemos $A \subset [B] = \{A, a\}$; pero de nuevo esto es imposible, pues $A \notin [A]$ y $|A| > 1$. Esto prueba que la hipótesis platónica fuerte también conduce a contradicciones.

Los teoremas presentados en esta sección demuestran que los conjuntos, en particular los subconjuntos de **E** deben tenerse por entes de razón. De aquí en adelante no volveremos a hablar de conjuntos *platónicos*, y no nos volveremos a topar con expresiones como $A = [A]$.

7.5 Algunas observaciones a los axiomas de composición

Terminaremos este capítulo con algunas observaciones al axioma A4. El enunciado de este axioma requiere una justificación a ciertos detalles que pueden no ser obvios a primera vista.
Como se recordará, A4 afirma que, si x, e y son compuestos, entonces $[x] = [y]$ implica $x = y$, es decir, dos compuestos son el mismo ente, siempre que coincidan en *todos* sus elementos constitutivos. En la teoría de conjuntos existe un axioma análogo con el cual se determina que si dos conjuntos A y B tienen exactamente los mismos elementos entonces $A = B$ (axioma de extensionalidad).
Tratándose de conjuntos esto es evidente, sin embargo al establecer la implicación $[x] = [y]$ entonces $x = y$, puede resultar más difícil captar la evidencia del axioma, pues podría sentirse alguna incertidumbre sobre si dos entidades distintas x e y puedan no coincidir en sus conjuntos de composición $[x]$ y $[y]$. Esto se debe a la existencia de varios modos de composición, como se verá enseguida.
Supongamos que los componentes de las entidades x e y se hayan distribuidos de la siguiente manera:

$$[x]_\mu = \{a, b\}, \qquad [y]_\mu = \{e, d\}$$

$$[x]_\nu = \{c, d, e\}, \qquad [y]_\nu = \{a, b, c\}$$

Donde μ y ν son elementos distintos de M y $[x]_\rho = [y]_\rho = \varnothing$ para cualquier otro elemento ρ de M.
Se puede apreciar que x e y tienen los mismos elementos constitutivos, ya que $[x] = \{a, b, c, d, e\} = [y]$, pero evidentemente x no puede ser el mismo ente que y, ya que de lo contrario debería ser $[x]_\mu = [y]_\mu$ y $[x]_\nu = [y]_\nu$, lo que no ocurre. Este ejemplo pone de manifiesto que no cualquier distribución de componentes es posible en un ente real, manteniendo el axioma A4. En este caso cuando mucho un elemento del conjunto $\{x, y\}$ puede ser una entidad real. En los capítulos siguientes se darán algunas razones por las cuales se justifica este axioma.

7.6 Notas

En relación a la naturaleza de los entes matemáticos existen diversos puntos de vista, uno de los cuales es el llamado *realismo*. Los propugnadores de esta tendencia abordan el problema del ente matemático desde la perspectiva del problema de los universales. La discusión sobre los universales se remonta a la edad media en la cual este problema fue extraordinariamente debatido. Para los *realistas* los universales (y por consiguiente los entes matemáticos) poseen una existencia ontológica anterior a las cosas, por lo que a esta doctrina se le ha llamado también *platonismo*, término introducido en las matemáticas por Bernays y que viene a sustituir en este ámbito a la inadecuada denominación de "*realismo*".
Estrictamente hablando el platonismo matemático no coincide con la doctrina de Platón, ya que éste pensaba que los entes matemáticos son análogos a las ideas, pero sin confundirse con ellas.
Según Haskell B. Curry el platonismo matemático afirma esencialmente que todas las nociones de número y conjunto tienen existencia real independientemente de nuestro conocimiento de ellos[190].
De acuerdo con el citado autor la posición platonista en matemáticas es la más frecuentemente adoptada, "más o menos inconscientemente, por matemáticos que no se ocupan expresamente en cuestiones de fundamentación de la matemática"[191].

---

190 *Foundations of Mathematical Logic*. p. 8.
191 *Id*. p. 9.

Los teoremas demostrados en la sección 4 de este capítulo hacen inadmisible el platonismo matemático; además, ciertos sistemas filosóficos resultan notablemente dañados por las afirmaciones de estos teoremas, tales como la metafísica de Nicolai Hartmann o la de Duns Escoto. Los sistemas idealistas como el de Hegel, Feuerbach y otros sólo pueden considerarse alcanzados en la medida en que se acepte el principio de no contradicción, ya que es típico su rechazo en este tipo de filosofías y sin tal principio ni siquiera la lógica tiene verdadero valor propedéutico. También la filosofía de Kant parece estar en conflicto con los teoremas presentados aquí, puesto que las nociones de conjunto y de compuesto son ambas, según el sistema kantiano, *formas a priori* del entendimiento; esto nos impediría distinguir los conjuntos de los entes compuestos, que se identificarían en la categoría kantiana de *totalidad*, pero tal distinción es necesaria para evitar caer en contradicciones, como se ha demostrado.

En general cualquier filosofía que no sepa hacer distinción suficiente entre lo real y lo pensado está en pugna con los resultados expuestos en el presente capítulo.

En el extremo contrario al platonismo hallamos a la corriente *nominalista*. Los nominalistas sostienen que el ente matemático es solamente un nombre, sin contenido alguno, aunque aplicable a la realidad.

La posición más equilibrada respecto al universal es la que sostuvo Aristóteles y sobre todo Santo Tomás de Aquino[192] con otros muchos filósofos escolásticos, los cuales afirmaban que el universal es un concepto de la mente, aunque puede tener fundamento en las cosas, *fundamentum in re*, de manera que no es un puro *flatus vocis* como quería la corriente nominalista. Así, por ejemplo, la noción de número es para estos filósofos un concepto abstracto (un *universal*), pero fundado en la realidad ya que en verdad existen cosas numerables fuera de la mente, así como magnitudes y cantidades de seres concretos. El universal con fundamento es, pues, una noción capaz de representar correctamente el mundo real, sin existir él mismo fuera del entendimiento. Este punto de vista ha recibido varios nombres; comúnmente se le llama *realismo moderado*; también se le ha nombrado *realismo escolástico*, o *realismo cristiano*. Sin embargo estas últimas son inadecuadas ya que la tesis en cuestión no pertenece solamente a los escolásticos o a los pensadores cristianos. Jaques Maritain lo ha llamado

[192] Véase Garrigou-Lagrange, *El sentido común*. p 44 y ss.; también S. Tomás, *Summa Th*. I, q. 85, a. 1; q. 86, a. 1.

realismo integral, lo que parece ser más apropiado ya que *integra* en una sola tesis el mundo conceptual y el mundo real.
En general nos hemos limitado en estas notas a la noción filosófica, y no estrictamente matemática del universal. Para una exposición más extensa remitimos al lector a la correspondiente literatura[193].

[193] Para una discusión sobre las implicaciones morales y sociopolíticas del problema de los universales véase Jean Ousset, *Introducción a la Política*. Iction 1963.