UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

HUMBERTO DE ASSIS CLÍMACO

INTUIÇÃO E CONCEITO: A TRANSFORMAÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO DE KANT A BOLZANO

GOIÂNIA
2014

HUMBERTO DE ASSIS CLÍMACO

INTUIÇÃO E CONCEITO: A TRANSFORMAÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO DE KANT A BOLZANO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Goiás como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Educação.
Linha de pesquisa: Fundamentos dos Processos Educativos
Orientador: Prof. Dr. Ildeu Moreira Coêlho
Coorientador: Prof. Dr. Michael Otte.

GOIÂNIA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

C639i

Clímaco, Humberto de Assis.
Intuição e conceito [manuscrito]: a transformação do pensamento matemático de Kant a Bolzano/ Humberto de Assis Clímaco. - 2014.
170 f.

Orientador: Prof. Dr. Ildeu Moreira Coêlho.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Goiás, Faculdade de Educação, 2014.
Bibliografia.

1. Matemática – Educação 2. Matemática – Filosofia – Século XIX 3. Matemática pura – Kant 4. Matemática pura – Bolzano I. Título.

CDU: 51:37 “18”

HUMBERTO DE ASSIS CLÍMACO

Intuição e conceito: a transformação do pensamento matemático de Kant a Bolzano

Tese defendida no Curso de Doutorado em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Goiás, para a obtenção do grau de Doutora, aprovada em 30 de maio de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Ildeu Moreira Coêlho (Orientador) – FE/UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Prof. Dr. Demilson Benedito do Nascimento – UFMT

Prof. Dr. Hamilton Barbosa Napolitano – UEG

Prof. Dr. Cristóvão Giovani Burgarelli – UFG

Prof . Dr. Ged Guimarães – UFG

DEDICATÓRIA

Ao filho que está por vir.

AGRADECIMENTOS

Ao professor e orientador desta tese, Ildeu Moreira Coêlho, pela confiança em meu trabalho, dedicação e disponibilidade.

Ao professor Michael Otte pela coorientação, a dedicação e a paixão com que se dedicou à presente tese. Por ter me ajudado a perceber a importância da obra de Bolzano, condição fundamental para que esta tese tenha sido realizada. Pela sua importância para meu crescimento intelectual desde que, em 2006, começamos a trabalhar juntos.

Aos professores que gentilmente aceitaram participar da Banca de Exame de Qualificação e àqueles que se juntaram à Banca de Defesa Final.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Goiás, coordenação, professores, colegas e servidores técnico-administrativos.

Ao Instituto de Matemática e Estatística e aos professores da Educação Matemática, que sempre me apoiaram e estimularam para a realização deste trabalho.

A minha esposa, Cleufa Leandra Silva Oliveira, pela compreensão e permanente estímulo. A meus pais, Arlene Carvalho de Assis Clímaco e José César Teatini de Souza Clímaco, pelo estímulo e apoio à realização dos estudos, bem como à ajuda a superar as dificuldades externas que poderiam dificultar o trabalho acadêmico.

RESUMO

CLÍMACO, Humberto de Assis. Intuição e conceito: a transformação do pensamento matemático de Kant a Bolzano. 171f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

Inserida na linha Fundamentos dos Processos Educativos do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Goiás, esta tese reflete de maneira original sobre os fundamentos de questões centrais para a Educação Matemática na atualidade, abrindo novos horizontes para esta área do conhecimento. Discute a transformação da relação entre intuição e conceito na filosofia da matemática ocorrida no início do século XIX, quando a natureza do conhecimento matemático passou por modificações tão profundas que a matemática passou a ser chamada de *Matemática Pura*, tema que é relevante para compreender a contradição entre a simplicidade e a clareza buscadas pelos criadores da Matemática Pura ao torná-la uma linguagem, e a dificuldade e a falta de significados com que ela costuma ser vista nas escolas. A forma de conceber o conhecimento foi alterada profundamente por esta transformação, e em particular mudou o significado da intuição. A obra de Kant foi discutida devido ao papel construtivo que o filósofo atribuiu, em seu período crítico, à intuição do sujeito; com a obra de Kant, inaugurou-se na filosofia uma questão genética, sobre as origens e as condições em que ocorre o conhecimento, donde deriva a importância que adquiriu em seu sistema a capacidade do sujeito de perceber objetos por meio das noções de espaço e de tempo, consideradas condições para qualquer conhecimento. Kant conclui que o que torna o conhecimento possível é o fato de que para sua elaboração contribui a intuição e a ação construtivas do sujeito, e que é assim que ele alcança o conceito, representação geral, partindo da intuição, representação particular. Bolzano procurou eliminar das investigações sobre a teoria da ciência o estudo das condições e das origens do conhecimento, que ele considerou como algo social que deveria ser escrito numa ordem que permitisse que ele fosse comunicado. Por isso, negou que espaço e tempo pudessem fundamentar a linguagem e a matemática, e procurou criar princípios aptos a reorganizar o conhecimento numa estrutura hierárquica em que as verdades mais conceituais não pudessem ser fundamentadas pelas mais intuitivas. Embora Bolzano não tenha investigado o processo de aprendizagem em si, a importância que ele deu à educação foi tão grande que em sua mais importante obra, *Doutrina da Ciência*, *Wissenschaftslehre*, ele definiu a ciência como determinado conhecimento organizado de maneira a compor um livro didático. As consequências filosóficas, científicas e culturais da Revolução Industrial, ocorrida no início do século XIX, foram estudadas nesta tese porque foi no contexto de sua emergência que surgiram processos profundos, de um lado, de publicização do conhecimento por meio da reorganização das universidades, do surgimento das grandes Escolas Politécnicas que precisavam formar engenheiros em larga escala, da proliferação de publicações com preocupações educacionais; e de outro de busca por reorganizar o conhecimento surgido nos séculos anteriores de maneira hierarquizada de acordo com princípios, o que levou a uma busca por tratar de maneira teórica o conhecimento até então visto como um conjunto de verdades isoladas. O estudo dos autores tratados na tese, sobretudo as obras de Kant e de Bolzano, foram feitas com base em seus originais, e o eventual recurso a comentadores não substituiu a leitura de suas obras.

Palavras-chave: Kant, Bolzano, intuição, conceito.

ABSTRACT

CLÍMACO, Humberto de Assis. Intuition and concept: the transformation of the mathematical thinking from Kant to Bolzano. 166sh. Thesis (Doctorate in Education) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

Taking part of the research line Grounds of the Educational Process of Post-graduate program in education of Universidade Federal de Goiás, this thesis reflects, in an original way, on the core issues the fundamentals of core issues of the today's mathematical education, opening new horizons for this area of knowledge. It discusses the transformation of the relationship between intuition and concept in the philosophy of mathematics occurred in the early nineteenth century, when the nature of mathematical knowledge has undergone such profound changes that mathematics came to be called Pure Mathematics, a subject that is relevant to understand the contradiction between simplicity and clarity sought by the creators of Pure Mathematics to make it a language, and the difficulty and lack of meaning with which it is often seen in schools. The way of conceiving knowledge was profoundly changed by this transformation, and in particular changed the meaning of intuition. Kant's work has been discussed in this thesis due to the constructive role that the philosopher attributed, in its critical period, to the intuition of the knower subject; with the work of Kant, a genetic issue, about the origins and the conditions in which knowledge occurs, was inaugurated in philosophy, whence derives the importance that gained in its system the subject's ability to perceive objects through the notions of space and time, as conditions for any knowledge. Kant concludes that what makes knowledge possible is the fact that for its development contributes the subject's intuition and constructive action, and that this is how he achieves the concept, general representation, based on intuition, particular representation. Bolzano sought to eliminate from the investigations on the theory of science the study of the conditions and origins of knowledge, which he considered as a social issue that should be written in an order that would allow it to be communicated.
Therefore, Bolzano denied that space and time could support language and mathematics, and sought to found principles able to reorganize knowledge in a hierarchical structure in which more conceptual truths could not be substantiated by more intuitive ones. Although Bolzano has not investigated the learning process itself, the importance he gave to education was so great that in his most important work, the *Doctrine of Science*, *Wissenschaftslehre*, he defined science as determined organized knowledge so as to compose a textbook. The philosophical, scientific and cultural consequences of the Industrial Revolution that occurred in the early nineteenth century, were studied in this thesis because it was in the context of its emergence that emerged deep processes, on the one hand, to create a public knowledge through the reorganization of universities, the emergence of large Polytechnics who needed graduate engineers in large scale, proliferation of publications with educational concerns; and, on the other hand, a search for reorganizing knowledge created or arisen in previous centuries in a hierarchical manner according to principles, which led to a search for treating in a theoretical manner the knowledge hitherto seen as a set of isolated truths. The study of the authors treated in the thesis, especially Kant and Bolzano, were made based on their original works, and any recourse to commentators did not substitute a careful reading of their ones.

Keywords: Kant, Bolzano, intuition, concept.

SUMÁRIO

Introdução 12

Capítulo 1:

Três problemas filosóficos da matemática e as transformações na noção de conceito 21

1.1 As dicotomias.. 21

1.2 Transformações na matemática, na noção de conceito e nas dicotomias.. 27

Capítulo 2:

Intuição e conceito na filosofia e na matemática de Kant .. 49

2.1 Introdução 49

2.2 A distinção entre juízos sintéticos e analíticos 53

2.3 Intuição e conceito na filosofia da matemática kantiana 65

2.4 A mudança realizada por Kant na noção de conceito 72

2.5 A transformação idealista do sujeito transcendental e a formação do idealismo alemão.. 77

Capítulo 3:

Intuição e conceito na filosofia e na matemática de Bolzano 83

3.1 Introdução 83

3.2 Intuição e conceito na matemática de Bolzano 92

3.3 Intuição e conceito na *Doutrina da Ciência* – W*issenschaftslehre*.. 110

Capítulo 4:

A revolução industrial e a concepção social de conhecimento do século XIX.. 134

4.1 Introdução 134

4.2 As transformações na matemática, na cultura e na educação 135

4.3 As transformações na indústria, a auto-reflexão e a teoria do conhecimento 147

4.4 Humboldt e a educação como *Paideia*... 151

Referências.. 160

SISTEMA DE CITAÇÕES E ABREVIATURAS

As obras de Kant e de Bolzano serão citadas de acordo com os costumes internacionais: nome da obra abreviado ou resumido (ver lista de abreviaturas e siglas) seguido das partes, seções (indicadas por §) e parágrafos a que se referem, no sentido de facilitar a localização das passagens em qualquer língua e edição. No caso das obras de Bolzano, essa necessidade é ainda maior devido à quase escassez de traduções para o português. Apenas a Marcus Herz será referida pela paginação da edição em português, visto que Kant não a dividiu em seções, e apenas a *Crítica da razão pura* será referida, como é costume, de acordo a paginação padrão da primeira e da segunda edições (A e B, respectivamente, de 1781 e 1787, acompanhadas dos algarismos romanos para a introdução e indoarábicos para as demais partes).

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

OBRAS DE BOLZANO

RB – *Prova Puramente Analítica* – 1817 – *Prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação*.

WL – *Wissenschaftslehre* – 1834 – *A* d*outrina da ciência ou uma tentativa de uma nova apresentação da lógica*.

BD – 1810 – *Contribuição para uma apresentação da matemática mais bem fundamentada: primeiro fascículo.* Abreviatura usada para citações de páginas ou seções.

Beiträge – 1810 – *Contribuição para uma apresentação da matemática mais bem fundamentada: primeiro fascículo.* Abreviatura usada sempre que o artigo apareça no corpo do texto, exceto na primeira vez.

Paradoxos – 1951 – *Os Paradoxos do Infinito*.

Grossenlehre – 1834 – *Doutrina das Grandezas.*

OBRAS DE KANT

CRP – *Crítica* – 1781 e 1787 – *Crítica da Razão Pura*.

Prolegômenos – 1980 – *Prolegômenos a toda metafísica futura.*

SOP – 1786 – *Que significa orientar-se no pensamento?*

ICB – 1764 – *Investigação sobre a evidência dos princípios da teologia natural e da moral.*

Introdução:

Na presente tese investiguei como se deu a relação entre intuição e conceito no contexto das profundas transformações que levaram à formação da matemática pura. A compreensão desta relação não depende apenas de questões internas à matemática, nem pode se dar de maneira adequada analisando apenas seus aspectos técnicos. Para compreendê-la, foi necessário investigar alguns dos mais importantes problemas filosóficos da matemática no contexto das transformações sociais, culturais e educacionais que ocorreram no período que vai do final do século XVIII ao início do século XIX, quando a *Matemática Pura* surgiu juntamente com uma transformação profunda na noção de conceito. Também foi necessário compreender como as transformações ocorridas neste período significaram o ápice de uma série de modificações que já haviam começado no século XVI com o advento da Revolução Científica e da obra de Descartes.

Há questões que podem parecer meramente técnicas para o leitor atual, mas que exerciam profunda influência na cultura e no pensamento antes de serem formuladas como o foram após o advento da matemática pura. Muitos matemáticos dos séculos XVI ao XIX concebiam sua pesquisa matemática como uma investigação filosófica, e se questões que nos dias atuais parecem problemas de especialistas forem descartadas dos estudos do historiador, perde-se a riqueza do contexto em que surgiram. Além disso, visto que a matemática procura permanentemente a generalização por meio da utilização de símbolos intermediários entre os objetos e as cognições, a investigação de como se dá nela a relação entre intuição e conceito contribui também para a compreensão de questões filosóficas muito mais amplas.

Diversos trabalhos já consideraram que o estudo histórico dos assuntos internos à matemática é suficiente para compreendê-la adequadamente. Nos últimos anos, outros estudaram os aspectos cultural e social da história da matemática, procurando valorizar o contexto em que esses assuntos surgiram. A primeira visão pressupõe que a história das técnicas basta por si só, sendo o estudo do contexto inútil; para os que defendem a segunda, o estudo do contexto é quase autossuficiente, as questões internas à matemática sendo meramente técnicas e, portanto, inúteis do ponto de vista cultural ou social. Estas duas visões caem no mesmo erro: julgam as questões internas à matemática como alheias a um contexto mais amplo, tratando de maneira mutuamente excludente o contexto e a técnica, e assim reduzem o pensamento matemático a mera coleção de técnicas ou saber aprofundado específico, próprio de especialistas que não têm relação alguma com o mundo e os processos históricos, culturais e filosóficos que caracterizam o ser humano.

O aspecto estudado na presente tese, que busca mostrar as questões filosóficas, sociais e culturais que envolvem os conceitos matemáticos, vem sendo negligenciado sistematicamente dos estudos da Educação Matemática, e abre novas perspectivas para o ensino desta área do conhecimento, na medida em que reflete sobre os próprios fundamentos das questões mais discutidas na atualidade.

O problema da relação entre intuição e conceito é fundamental para se compreender uma série de questões que são debatidas na Educação Matemática da atualidade: a relação entre conhecimento cotidiano e conhecimento acadêmico; entre o geral e o particular; entre a intuição visual e o trabalho com material concreto; e a questão do significado. Estas questões vêem sendo discutidas de maneira inadequada, partindo da crença errônea de que se devem buscar significados da matemática diretamente na intuição empírica. Seus defensores não compreendem que não existem significados nem intuição independentes da linguagem em que a matemática se expressa.

A despeito das diferenças entre as concepções de conhecimento formuladas implícita ou explicitamente ao longo da história, em geral elas estão relacionadas com a ideia de generalização. Todo conhecimento é constituído por afirmações sobre algo que ainda não foi visto ou sentido, mesmo na Grécia Antiga, onde medir e prever não faziam parte do ideal de ciência. Nenhuma sociedade concebeu como ciência o mero relato de fatos passados ou dados conhecidos. A filosofia sempre afirmou que os fatos nada dizem, por si sós, a respeito da essência ou a generalidade das coisas, na medida em que eles pertencem sempre à experiência singular de um indivíduo colocado em circunstâncias singulares, enquanto a teoria ou os conceitos, os predicados, são gerais.

Mas, o que nos permite concluir que é possível fazer afirmações sobre algo não visto e não experimentado e experienciado? O que nos permite fazer afirmações gerais com base em fatos ou dados particulares? O que nos permite afirmar algo concebível somente pela razão, se nossos sentidos apenas conseguem alcançar o que é particular, aquilo que intuímos a partir de nossa percepção imediata? Como se dá a passagem do particular para o geral? O que são os conceitos gerais a que sempre aspiraram os filósofos, matemáticos e cientistas? Diversas tentativas de responder a essas questões foram feitas já na Grécia Antiga, e muitas delas recorriam a noções como essência, substância e outras semelhantes; uma forma profundamente diferente de respondê-las só começou a ser feita com o advento da Revolução Científica.[1]

No século XVIII, quando os pensadores procuraram expandir para todas as ciências os métodos predominantes nessa revolução, de um lado eles foram abandonando as esperanças em encontrar a essência por trás dos fenômenos, e de outro ganhou enorme força a crença em que aquilo que os sentidos nos fornecem mostra a realidade das coisas. A matemática acompanhou de forma não linear esse processo de transformação na forma de conceber o conhecimento: enquanto na Grécia Antiga, onde surgiu a noção de demonstração rigorosa, ela era concebida como modelo de perfeição estética e era voltada para si própria e para a formação do cidadão da *polis*, a Revolução Científica procurou o modelo oposto, ao conceber a matemática como forma de resolver problemas científicos que lhe eram externos. Por outro lado, se em Descartes a matemática tinha a ambição de abarcar, junto com a teologia e a metafísica, todas as formas de conhecimento, o Iluminismo, inicialmente sob o impulso de matematizar e tornar analíticas todas as ciências, acabou libertando as ciências particulares destas três formas de aprisioná-las numa concepção de razão que se pretendia superior aos fatos.

Mas o otimismo epistemológico do século XVIII começou a se desfazer com a obra de Hume, para o qual a forma de raciocinar que era considerada pelos racionalistas como rigorosa e capaz de conduzir a conhecimento universal e necessário cometia a falácia de pretender ampliar nosso conhecimento utilizando meios capazes apenas de desmembrar e explicar o que já estava contido no conceito conhecido. E, por outro lado, Hume afirmou que a dedução que os empiristas faziam dos universais com base em dados ou fatos particulares seria baseada no hábito, e não em raciocínio rigoroso.

Kant procurou responder à questão levantada por Hume assumindo que o conhecimento da física e da matemática era uma prova de que deveria haver uma forma

[1] Considera-se a Revolução Científica como o conjunto das mudanças ocorridas nas ciências e nas mentalidades ocorridas do período que vai da data de publicação do *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1453) de Copérnico até a de publicação do *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) de Newton.

de se conceber ideias gerais que não fosse redutível ao conhecimento empírico, mas tampouco fosse fruto do desmembramento de algo dado. Desta maneira, revolucionou a forma de conceber o processo de formação de conceitos gerais, concebendo, pela primeira vez na história, a noção de que há algo de construtivo, de propriamente humano, no conhecimento.

A importância de Kant para este trabalho se deve a que, em sua obra, a intuição assumiu um lugar central na explicação de como adquirimos conhecimentos novos, de como é possível fazer afirmações universais e necessárias a respeito de algo que não conhecemos empiricamente; e ao fato de que o conhecimento matemático teve grande importância nessa transformação, na medida em que ele tornou-se paradigma do conhecimento construído pelo sujeito. Kant relacionou esta construtividade à intuição, em particular, à intuição de espaço e tempo, que chamou de "intuições puras" (CRP, A 42/ B 6) "formas da intuição sensível" (CRP, B 160), e afirmou que precedem toda possibilidade de conhecimento verdadeiro.

Os historiadores da filosofia costumam afirmar que com esta transformação Kant completou a Revolução Científica, visto que, até então, os filósofos consideravam a noção de conceitos gerais como imagem de uma substância, e não como algo construído pelo sujeito, como função.

Kant escreve na introdução da *Crítica da Razão Pura*:

> Quando Galileu fez rolar no plano inclinado as esferas, com uma aceleração que ele próprio escolhera, quando Torricelli fez suportar pelo ar um peso, que antecipadamente sabia idêntico ao peso conhecido de uma coluna de água... foi uma iluminação para todos os físicos. Compreenderam que a razão só entende aquilo que produz segundo os seus próprios planos (B XII/XIII).

Resumindo, pode-se afirmar que a realidade sobre a qual as ciências e a matemática tratam desde os tempos de Galileu e Descartes não é mais a de um mundo externo estático, mas a de um mundo modificado pelas atividades e práticas humanas. Galileu não matematizou a Natureza, e sim as técnicas experimentais. Por outro lado, uma outra orientação se juntou a essa transformação durante a época do Iluminismo, a de interesse pela pedagogia e pela didática. A grande *Enciclopédia* de Diderot e d'Alembert testemunha esse interesse.

Até a época de Kant, a matemática era a *Wissenschaft der Grössen*, ciência das quantidades e das grandezas; com a obra de Bolzano, ela tornou-se uma ciência que não mais se define por meio dos objetos aos quais ela se aplica, e passou a ter seu centro na linguagem e nas demonstrações de suas afirmações por meio da linguagem. Ao invés de se preocupar com a natureza e a correspondência entre os conceitos e a realidade, os matemáticos passaram a se preocupar com a comunicação, por isso deram tanta importância ao estudo das proposições, e por isso a lógica voltou a ser valorizada. Com Kant se acentuou a tendência epistemológica da filosofia iniciada com Descartes, mas a transformação que ele realizou na noção de conceito preparou, ao mesmo tempo, a derrocada desta tendência, o que abriu a possibilidade para o surgimento da concepção semântica de Bolzano.

A importância de Bolzano é que ele foi o primeiro a propor a aritmetização da matemática, que ela se baseasse na linguagem aritmética, que pretende ser livre da intuição, o que a tornaria, portanto, uma ciência puramente conceitual; e o primeiro a afirmar que a verdade não reside nem no mundo interno ao sujeito, nem nos objetos, mas sim na linguagem:[2] nas representações, proposições e verdades *em si*. A transformação que Bolzano realizou na matemática e a importância que ele deu à linguagem, num diálogo estreito com a obra de Kant, que dominava o ambiente acadêmico da época, encontra-se no centro da dicotomia entre intuição e conceito. Praticamente não estudado no Brasil, Bolzano é um autor importante para compreender questões fundamentais para o ensino da matemática: como conciliar os aspectos formais e os intuitivos que a constituem? Como falar em significados no contexto de que a própria essência da matemática é abstrata?

Bolzano não se preocupou com questões que dizem respeito às origens do nosso conhecimento, por isso se esforçou por eliminar as noções de espaço e de tempo, bem como qualquer referência à intuição, dos fundamentos da matemática e do conhecimento conceitual. As transformações ocorridas na matemática ao longo dos séculos XIX e XX confirmaram que sem intuição não há conhecimento; no entanto, essa intuição não é empírica, mas diz respeito a contextos próprios dos objetos matemáticos que não são redutíveis à linguagem.

[2] Cf. COFFA (1993, p. 76).

Na presente tese procurei mostrar a complementaridade entre as questões aparentemente técnicas e o contexto em que elas foram criadas e no qual se modificaram. Ao investigar como se deu a relação entre intuição e conceito ao longo do processo que levou à formação da matemática pura, discuti alguns problemas filosóficos que envolveram as transformações ocorridas na matemática desde o século XVI, e cujo desenlace levou, na virada do século XVIII para o XIX, a uma profunda mudança da concepção, dos objetos, dos métodos e da linguagem matemática. Estas questões são relevantes para compreender a contradição entre a simplicidade e a clareza buscadas por Bolzano e por outros criadores da Matemática Pura ao torná-la uma linguagem, e a dificuldade e a falta de significados com que ela costuma ser vista nas escolas. Para compreender a relação destas mudanças com a educação e a cultura, foi necessário analisar os impactos sobre a forma de conceber o conhecimento resultantes da Revolução Industrial.

Estudei em particular três dicotomias que estiveram presentes nos debates entre os matemáticos e filósofos, do século XVI ao XIX, que permitem constituir um quadro amplo das grandes transformações por que passou a matemática, tanto em seu aspecto interno quanto no externo, e que influenciaram a formação da matemática pura. O estudo destas dicotomias mostra que algumas questões que parecem meramente técnicas tinham, e muitas vezes guardam até os dias atuais, profundas relações com questões filosóficas fundamentais. Por exemplo: se os matemáticos dos séculos XIX, XX e XXI conseguiram dar definições de conceitos relacionados ao infinito que o tornaram simples e até mesmo operativo, isso foi o ápice de um conjunto de transformações ocorridas na nossa forma de conceber o mundo, que só foi possível após duros debates envolvendo a teologia, a metafísica e toda a nossa relação com o conhecimento. E as investigações atuais a respeito dos números transfinitos e da análise não convencional mostram que as definições operativas não encerraram os debates filosóficos.

Esta tese se propõe a demonstrar três questões fundamentais, que são inseparáveis.

Uma é que o ensino da matemática não pode ser reduzido a conceitos, a uma linguagem formal, mas tampouco à intuição, às aplicações empíricas ou resultados visualizáveis, sob pena de eliminar aspectos do conhecimento matemático que são inerentes a ele: é por meio de uma combinação entre intuição e conceito que ocorre o conhecimento, e qualquer tentativa de isolar um dos dois pólos faz chegar a um reducionismo inadequado.

A segunda questão é que a obra de Bolzano, que foi o principal idealizador da noção de *Matemática Pura*, se de um lado procura fundamentos puramente conceituais para as ciências conceituais, por outro não retoma a noção clássica de conceito, mas aceita a transformação realizada nela por Kant e a aprofunda. Daí decorre que os historiadores e estudiosos da filosofia de Bolzano que pretendem filiá-lo ao ideal aristotélico de ciência, ou ao movimento anti-Kant, não compreenderam sua concepção de conceito, explicitada principalmente nos parágrafos 65 e 120 do *Wissenschaftslehre*. Bolzano reafirmou que os conceitos gerais não são redutíveis ao empírico nem à análise, e que, portanto, eles são construídos, mas negou que esta construção se desse por meio da intuição.

Por fim, a terceira questão que a tese se propõe a demonstrar é que o surgimento da matemática pura fez parte de um profundo processo de transformação ocorrido no início do século XIX na cultura, na educação e na filosofia, que tinha como preocupações centrais a fundamentação teórica do conhecimento construído ou descoberto até então e sua organização de maneira que se tornasse comunicável a públicos cada vez maiores. Esta transformação foi fruto de um duplo *impulso*: de um lado, o conhecimento precisava se transformar em algo comunicável; de outro, os pensadores procuraram organizar o conhecimento de maneira hierárquica, evitando a tendência do século XVIII à mera descrição de verdades empíricas isoladas; houve assim uma espécie de retorno ao platonismo, que havia sido abandonado em grande medida no século XVIII e na revolução científica.

As três questões têm relação com a Revolução Industrial, ocorrida no início do século XIX: com a indústria, a práxis ou a atividade humana se transformou em objeto da reflexão e da tecnologia, e assim o que antes era processo passou a ser tratado como objeto. Isso aconteceu em todas as áreas do conhecimento: esse fenômeno de *hipostatização*, que consiste na transformação de processos em objetos, ocorreu na linguagem transformando adjetivos em substantivos,[3] e também na matemática, com a transformação de noções que expressavam movimento, como funções e derivadas, em

[3] Como é o caso da palavra indústria discutido por Williams (2011, p. 16-17), que foi discutido no capítulo sobre a Revolução Industrial.

objetos próprios da matemática, conceitos *em si*, como dizia Bolzano, independentes de sua aplicação ou do sujeito que o pensa, numa forma de platonismo. Ele resultou na criação da filosofia da linguagem, na aritmetização da Matemática, em um grande aumento do número de pesquisas e publicações teóricas sobre educação; na reorganização completa das universidades, com valorização crescente da teoria nos currículos; e no surgimento da sociologia do conhecimento.

O conjunto destas transformações poderiam ser sintetizadas na afirmação de que os fundamentos da filosofia mudaram da epistemologia para a semântica, concebida como comunicação social, o que significou uma mudança da ênfase da intuição para o conceito, e essa mudança de fundamento sintetiza as grandes transformações ocorridas no início do século XIX, no quadro da Revolução Industrial, quando todas as ciências passaram a ser concebidas em seu aspecto teórico e como algo social e comunicável.

Na elaboração das três teses, a obra de Kant mostra sua contribuição: para a primeira e a terceira teses, a filosofia kantiana mostrou-se intermediária entre uma filosofia voltada para o sujeito e uma voltada para a sociedade, e que a transformação realizada por ele na noção de conceito foi fundamental para essa mudança. Para a segunda tese, ela contribui com a afirmação de que, sem objetos, sem a possibilidade de intuição, não há conhecimento verdadeiro possível.

No capítulo 1, *Três problemas filosóficos da matemática e as transformações na noção de conceito*, apresentei essas dicotomias e como elas foram modificadas ao longo do período em questão, como os filósofos pensaram a questão da formação de conceitos por meio da teoria da abstração, e como, no final do século XVIII, sob influência da noção de função – que já prevalecia na metafísica – esta teoria começou a se modificar, de modo a pôr em evidência a transformação da noção de conceito que Kant realizou na *Crítica da Razão Pura*.

Nos capítulos 2, Intuição e Conceito na Filosofia e na Matemática de Kant e 3, *Intuição e Conceito na Filosofia e na Matemática de Bolzano*, mostrei como as três dicotomias foram discutidas nas filosofias de Kant e de Bolzano, e de que maneira a noção de conceito se transformou, bem como o lugar da intuição na formação do conhecimento.

No capítulo 2 mostrei como, no final do século XVIII, a afirmação de Hume de que o ato de formação de conceitos gerais com base em fatos particulares é fruto de um vício psicológico do sujeito se transforma na elaboração kantiana da noção de sujeito transcendental, e na formulação do "verdadeiro problema da Razão Pura", que consiste em responder à questão de "como são possíveis os juízos sintéticos *a priori*", "Como é possível a matemática pura? Como é possível a física pura?" (CRP, B 20). Mostrei que, assim, a matemática ocupa um lugar central na filosofia crítica de Kant, e que da original resposta dada por ele a estas questões deriva a revolução da noção de conceito que ele realizou, na qual a intuição cumpre um papel determinante, e da qual decorre a distinção realizada por Kant entre juízos analíticos e sintéticos. Ao final deste capítulo, mostrei como surgiram, de diferentes leituras da obra de Kant, o Idealismo Alemão e o psicologismo, adversários filosóficos de Bolzano.

No capítulo 3 apresentei, após uma contextualização da obra de Bolzano e do atual estágio de seu estudo e publicação, as transformações realizadas por ele na matemática e na filosofia. Discuti como ele formulou a aritmetização dos fundamentos da matemática; sua concepção de rigor; e como se deram as transformações que fizeram com que as provas conceituais passassem a ocupar o centro da atividade matemática. E também de que maneira Bolzano completou a transformação da noção de conceito iniciada por Kant, levando a uma nova transformação da filosofia, que passou a ser considerada como algo social. Em particular, mostrei de que maneira os esforços de Bolzano por fundamentar e ordenar as verdades matemáticas e científicas se inserem no contexto das necessidades, surgidas com a Revolução Industrial, de publicizar e institucionalizar o conhecimento.

No capítulo 4, *A Revolução Industrial e a concepção social de conhecimento do século XIX*, mostrei de que forma surgiu a tendência, estimulada pela Revolução Industrial, de o conhecimento tornar-se metaconhecimento e, nesse processo, procurar uma forma de abstração e raciocínio que, em certo sentido, retoma a concepção de conhecimento teórico grego, embora não retome sua concepção de conceito nem seu ideal de ciência. Essa tendência é inseparável de necessidades de comunicação e publicização do conhecimento e, portanto, do ensino, e tanto a *Doutrina da Ciência* de Bolzano quanto a ideia de formação e de universidade de Humboldt surgiram nesse contexto.

1. Três problemas filosóficos da matemática e as transformações na noção de conceito

1.1. As dicotomias

A mudança ocorrida do século XVI ao XIX na forma de os filósofos conceberem a matemática pode ser mais bem explicada se forem analisadas três dicotomias. A primeira que discutiremos é particularmente influente nas obras de Kant e de Bolzano, e se refere à oposição entre proposições analíticas e sintéticas: qual seria o lugar ocupado pelos dois tipos de proposição na matemática, e se suas proposições fundamentais seriam analíticas ou sintéticas. A segunda é resultante do debate a respeito de se a matemática deve ser definida por meio de seus métodos, ou por meio de seus objetos; alguns matemáticos e filósofos consideraram que a matemática deve ser definida pelas técnicas de resolução de problemas, enquanto outros consideraram que ela deve ser definida por seus objetos. Por fim, a terceira dicotomia discutida é a que diz respeito a se os conceitos matemáticos devem ser definidos por meio da forma de descrevê-los, pela intensão destes conceitos; ou pelos objetos determinados por esta descrição, sua extensão; esta dicotomia é inseparável das transformações que ocorreram na noção de conceito.

Até o final do século XVIII a dicotomia entre análise e síntese se dava na forma de oposição entre método sintético e método analítico, somente com a obra de Kant ela tornou-se a oposição entre juízos ou proposições analíticas e sintéticas. Embora não houvesse entre os filósofos racionalistas uma forma unânime de conceber o método analítico, havia uma concordância em que ela consistia em decompor em partes simples um fenômeno complexo e em desmembrar a unidade em seus diversos componentes. A síntese, por outro lado, era considerada como a recomposição do fenômeno, a apreensão do diverso na unidade, a junção dos dados múltiplos da intuição, das diversas representações, no sentido de formar o conhecimento do objeto.

O termo *análise*, por sua vez, foi usado de duas formas distintas no racionalismo clássico: na primeira, considerou-se conhecimento analítico o conhecimento *a priori*, que significa universal e necessário. Assim, foram consideradas analíticas as teorias que pretendiam tratar da essência da realidade. De acordo com esta concepção, expressa claramente por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) – que morou em Viena de 1712 a 1714 e exerceu considerável influência sobre a filosofia, a teologia e a matemática na Áustria e na Bohemia – as substâncias ou essências são reais, e as frases ou proposições afirmam verdades a respeito delas, não sendo apenas entidades linguísticas, como se passou a conceber no século XIX. Em sua obra, toda afirmação verdadeira é analítica, e sua concepção de verdade consiste numa relação de continência entre conceitos.

Como na visão de Leibniz todas as coisas do mundo são constituídas de seus conceitos correspondentes na mente de Deus, as demonstrações que dizem respeito ao conhecimento empírico remetem a uma análise infinita dos conceitos, e toda cognição se torna cognição analítica.

> Do fato de que Leibniz considerou a análise de provas uma questão de ontologia e não de metodologia, decorre que toda proposição verdadeira tem uma prova *a priori*, embora em geral os seres humanos não possam realizar tais provas (HACKING, 1984, p. 221).

A matemática e o método analítico formulados por Leibniz se tornaram, assim, caracterizados principalmente pela busca de certezas absolutas a respeito da essência das coisas.

Na segunda forma de conceber a análise, menos exigente, foram consideradas como analíticas as visões que buscaram meios de certificação da consistência lógica das teorias, e para as quais vale a lei da contradição. A transformação realizada por Kant que o levou a considerar não apenas o aspecto metodológico da relação entre análise e síntese, mas a classificar juízos e proposições como analíticos ou sintéticos, influenciou profundamente a filosofia posterior a ele, e foi amplamente discutida nos capítulos 2 e 3.

A segunda dicotomia apresentada é aquela entre métodos e objetos. O conhecimento matemático, como as outras formas de saber, tem seus objetos de conhecimento e os métodos para alcançá-los.[4] Essa dicotomia pode ser apresentada, inicialmente, por meio de duas características.

Em primeiro lugar, como em qualquer outra atividade cognitiva, a matemática não pode proceder numa orientação exclusiva no sentido do universal, de métodos formais, o que significaria, em última análise, atribuir à atividade matemática uma incorporação completa à mecanização e à formalização. Afinal, a matemática também forma conceitos específicos que apreendem questões que lhe são próprias. Em segundo lugar, objetos e métodos não estão somente relacionados, mas também se encontram em oposição um ao outro, no sentido de que os métodos de investigação dos objetos sempre os apreendem em algum aspecto particular, sendo incapazes, portanto, de mostrar todos os aspectos dos *objetos em si*. E problemas não encontram os métodos de sua solução fora deles mesmos. Sobretudo a partir do século XIX, com o surgimento da chamada matemática moderna, muitos ramos da matemática começaram a encontrar resultados por meio da aplicação de teoremas e métodos de outras áreas, que à primeira vista não tinham relação alguma com os objetos em questão.

As grandes transformações da relação entre análise e síntese, no final do século XVIII e no início do século XIX, são inseparáveis de uma transformação fundamental na visão sobre se a matemática deveria ser definida e caracterizada por seus métodos ou por seus objetos.

A Geometria de Euclides de Alexandria (323–283 a.C.) procedia de maneira sintética e construtiva: partia de axiomas indubitáveis e de verdades fundamentais, daquilo que era intuitivamente claro, para encontrar conceitos gerais e demonstrar resultados. Até o século XVI, esta noção de axiomas prevaleceu, ao lado da concepção aristotélica de ciência. Foi então que o método analítico começou a se tornar mais presente, devido ao interesse na matematização das ciências, o que se expressou na tentativa de Descartes de formulação das bases do método científico e em sua filosofia.

A ciência e a matemática do século XVI ao XVIII se distinguiram da ciência aristotélica pelo seu instrumentalismo: nesta época os conceitos teóricos, ao invés de serem obtidos meramente por meio da abstração dos objetos empíricos, passaram a ser

[4] Nesta tese o termo *objeto* é usado em sentido amplo de qualquer problema ou qualquer resistência da realidade contra a atividade do sujeito. E *método* será utilizado para se referir a tudo aquilo que possa servir de intermediário entre o sujeito e o objeto de cognição. Nesse sentido, não somente os sistemas de signos, mas também as teorias, diversas formas de conhecimento e também intuições no sentido kantiano, são métodos.

considerados instrumentos e funções da atividade científica e matemática. Conforme afirmou Dieudonné (1990, p. 43), os matemáticos desta época deixaram de acreditar na existência de objetos próprios da matemática.

Quando os fundamentos desta nova concepção de matemática eram questionados, os matemáticos e filósofos da época respondiam em termos reducionistas, tentando mostrar de que forma as partes mais avançadas da matemática podiam ser derivadas de, ou redutíveis a, suas partes mais elementares. Quando se questionava quais eram os objetos da matemática, apareceram duas formas distintas de responder: René Descartes (1596-1650) tentou explicar os objetos em termos de grandezas, enquanto Blaise Pascal (1623-1662) se recusava a defini-los ou caracterizá-los. A concepção de infinito atual,[5] por exemplo, foi rejeitada por todos os filósofos e matemáticos da época, pois eles se recusaram a procurar definições a respeito da essência dos conceitos matemáticos.

Mas na filosofia da matemática cartesiana prevaleceu não a definição da matemática em termos de seus objetos, e sim sua explicação com base nos métodos por ela utilizados, na medida em que Descartes inaugurou uma forma de proceder matematicamente que consiste em analisar a estrutura das relações entre objetos dados, representar o resultado em termos de equações algébricas e, por fim, tentar resolvê-las.

Leibniz, que não tinha interesse pela resolução de problemas, mas pela construção e pela estrutura das teorias, avaliou que a análise de Descartes não era suficientemente cuidadosa e aprofundada, e procurou determinar o conhecimento matemático pelo seu objeto, ao invés de por seu método. Ele foi o primeiro a afirmar que o padrão para determinar a simplicidade de um conhecimento – seu elemento fundante, básico, o mais simples e capaz de explicar um conhecimento complexo – residia na linguagem, e por isso em seu sistema as provas ou demonstrações formais ocuparam um lugar fundamental. Ao ver nas provas uma questão de ontologia, e não de metodologia, Leibniz atribuiu à linguagem e à lógica uma importância maior, sendo essa sua concepção aceita, com importantes alterações, apenas no século XIX.

A terceira dicotomia é a que diz respeito à intensionalidade e à extensionalidade da matemática. Em 1662, em seu *L'art de penser* ou *Ars Cogitandi,* mais conhecida como

[5] Desde Aristóteles que os matemáticos e filósofos tratavam o infinito qualitativamente, como potência. Embora Galileu tenha iniciado o tratamento quantitativo do infinito, como algo real, em ato, Bolzano foi o primeiro a fazer um estudo exaustivo da questão, tendo chegado mesmo, nos *Paradoxos,* a esboçar definições de operações numéricas envolvendo supostos "números infinitos".

Lógica de Port Royal – que se tornou um dos cânones do estudo da lógica racionalista e sintetizava a visão de Pascal – Antoine Arnauld (1616-1698) e Pierre Nicole (1625-1695) definiram a relação entre compreensão e extensão de um conceito:

> Nas idéias universais, é importante distinguir bem duas coisas, a intensão (*compréhension*) e a extensão (*étendue*).[6] Chamo de intensão da idéia os atributos que ela inclui em si e que não podem ser retirados sem destruí-la; assim, a intensão da idéia de triângulo contém extensão, figura, três linhas, três ângulos, a igualdade desses três ângulos a dois retos, etc. Chamo de extensão da idéia os sujeitos aos quais essa idéia convém, que também se chamam inferiores de um termo geral que, em relação a eles, é chamado superior; assim, a idéia do triângulo, em geral, estende-se a todas as diversas espécies dos triângulos (I, 6) (2011).

Por vezes, em sentido semelhante, Arnauld e Nicole utilizam o termo *palavras* para se referir à intensão, e *coisas* para definir a extensão.[7] Leibniz também fez distinção análoga, e para isso empregou os termos *Sinn* (que se traduz por *intensão* ou *signo,* embora também possa significar *sentido*) e *Bedeutung*, *extensão* ou *referência*, embora também possa ser traduzido por *significado*; John Stuart Mill (1806-1873) empregou *connotation, conotação,* e *denotation, denotação*; e Bolzano *Umfang, escopo,* e *Inhalt, conteúdo.* Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) utiliza a mesma terminologia de Leibniz, que se tornou padrão na língua alemã na atualidade; em Peirce, em sentido semelhante aparecem os termos *sign, signo* ou *símbolo,* e *meaning, significado*.

Do ponto de vista da teoria de conjuntos, que se tornou comum a partir da segunda metade do século XIX, a intensão pode ser definida como a propriedade que os elementos devem cumprir para pertencer a determinado conjunto, ou a forma de descrever ou nomear seus elementos.[8] A extensão seria, então, formada pelos elementos do conjunto, a própria coleção desses objetos, os objetos *em si*. Assim, *números naturais pares* seria a intensão de um conjunto cuja extensão são os números *2, 4, 6, 8*...

Da definição de *Port Royal* decorrem diretamente duas concepções que foram aceitas pelas diferentes correntes filosóficas anteriores a Kant e as marcaram

---

[6] Literalmente, *étendue* significa escopo, alcance, âmbito.
[7] Esta é a razão de o livro de Foucault se chamar *As palavras e as coisas*.
[8] Em alemão, é comum que se utilize o termo *Vorstellung* (representação) para indicar esta descrição, embora este termo também possa significar representação mental, e em alguns casos se aproxime da noção de *ideia.*

profundamente. A primeira afirma que a quantidade de propriedades na intensão e a quantidade de objetos na extensão se encontram em relação inversa: quanto mais propriedades se acrescentar à intensão, menor será o número de objetos que lhe correspondem na extensão, e vice-versa.[9] A segunda é que "ela expressa uma concepção analítica de matemática de acordo com a qual, por exemplo, o teorema sobre a soma dos ângulos de um triângulo pertence diretamente à representação de um triângulo" (OTTE, 2003, p. 209). Decorre dela, então, que todas as propriedades de um conceito se encontram contidas na própria definição do objeto.

Não há, pois, lugar para o acréscimo de propriedades por meio da intuição ou construção por parte do sujeito, e todo conhecimento é passível de ser conceitualizado. Além disso, dessa concepção se conclui que existe uma rigorosa relação entre teoria e objeto de conhecimento, entre um objeto e sua descrição, entre sua intensão e sua extensão.

No século XVIII, as duas formas de descrever a matemática, em termos da dicotomia entre intensão e extensão, se transformaram de maneira a consolidar duas tendências distintas. A primeira, representada principalmente por Leonhard Paul Euler (1707-1783) e chamada de extensional, concebeu o conhecimento matemático como determinado essencialmente pelos seus objetos ou extensões de conceitos. Os matemáticos que defendiam esta concepção definiram a matemática como ciência ou teoria das grandezas e das quantidades. A segunda, representada principalmente por Étienne Bonnot de Condillac (1715-1780) e chamada de concepção intensional, se fundamenta na intensão ou na forma de descrever os conceitos, e considera a álgebra como uma linguagem analítica ou aritmética. A matemática era vista por esta última como uma construção do sujeito, livre para elaborar conceitos, sem ter que se adaptar a seus objetos de aplicação ou origem empírica e, portanto, independente de grandezas e quantidades.

Estas duas correntes passaram ainda por outra transformação com o impulso da Revolução Industrial no século XIX, levando a investigações sobre os fundamentos da matemática que se estenderam até a segunda metade do século XX, e se consolidaram

[9] Por exemplo, se eu enuncio um conjunto: *números naturais*, obtenho uma extensão. Se acrescento *pares*, a extensão reduz. Se acrescento ainda *menores que 50*, ela reduz ainda mais, e assim por diante.

na forma de tendência hipotético-dedutiva, de um lado, e ontológica ou de rigor aritmético, de outro, que serão discutidas no capítulo 4.

1.2.Transformações na matemática, na noção de conceito e nas dicotomias

Para compreender as profundas mudanças que ocorreram na noção de conceito e na forma de ver a relação entre símbolos e objetos na virada do século XVIII para o século XIX, precisamos voltar um pouco na história. Platão (428/427-348/347 a.C.) considerou que, no mundo dos fenômenos, tudo é contínuo, as coisas se passam de um conceito a outro sem negar o conceito imediatamente anterior, e as alterações são muitas vezes imperceptíveis. Por exemplo, entre a cor verde e a azul há infinitos tons intermediários, e fora dessa faixa há infinitas outras cores; assim, não se pode afirmar que o não verde seja necessariamente azul. Para tornar os conceitos mais claros, Platão formulou a necessidade de a razão se elevar ao reino das Ideias, onde seria possível aplicar a lei da contradição, pois lá tudo é conceitualmente claro. O conceito de Bem, por exemplo, é o contrário do conceito de Mal.

Aristóteles (384-322 a. C.) criticou esta separação, pois pare ele o mundo foi um cosmos contínuo.[10] Por outro lado, ao lançar as bases da lógica, também precisou formular conceitos bem definidos, em que a lei da contradição pudesse ser aplicada. Mas para ele o processo de abstração se devia mais aos processos de raciocínio lógico do que às diferenças do mundo, e por isso ele não julgou necessário formular a noção de universais separados dos objetos deste mundo.

Cassirer, em *Os conceitos de substância e de função* (1910), analisa a transformação histórica da noção de conceito e afirma que, na concepção aristotélica, a relação entre os objetos e a sua representação teórica era marcada por uma rígida

---

[10] Aristóteles (Metafísica, livro XI, 1069a 5) foi o primeiro a dar uma definição do contínuo: “Diz-se que as coisas são contínuas quando há um único e mesmo limite para ambas, no qual elas se sobrepõem e que possuem em comum”. De acordo com Lovejoy (2005, p. 60), “Aristóteles sustentava que todas as quantidades – linhas, superfícies, sólidos, movimento e, em geral, o tempo e o espaço – devem ser contínuas, não discretas”. Embora ele não tenha afirmado tão precisamente que as diferenças entre os objetos empíricos devam constituir, também, séries contínuas ou lineares, pode-se considerar que Aristóteles “é o responsável pela introdução do princípio de continuidade na história natural” (*ibidem*. p. 60).

conexão. Em seu *As palavras e as coisas*, (2007, redigido originalmente em 1966), Foucault estuda a história da relação entre objetos e símbolos e chama de *Época da interpretação* o período situado entre Aristóteles e o Renascimento, e faz uma afirmação semelhante à de Cassirer, ao dizer que, nesta época, a linguagem se "assemelha imediatamente às coisas que ela nomeia" (FOUCAULT, 2007, p. 50). Os pensadores estavam convencidos, séculos antes da publicação da *Lógica de Port Royal*, de que quanto mais abstrato e elevado um conceito, mais ampla é sua extensão, e vice-versa. As generalizações eram feitas por abstração de particularidades, por meio da eliminação de características dos objetos que não eram comuns com o gênero ao qual se pretendia classificá-los.

Além disso, a referência que se fazia aos objetos por meio da linguagem era direta, portanto o símbolo não ocupava um lugar de mediador entre a palavra e o objeto representado, e o conhecimento e a teoria eram vistos como imagens determinadas diretamente pelos objetos. "A representação... se dava como repetição" (FOUCAULT, 2007, p. 23), e a linguagem "não é um sistema arbitrário; está depositada no mundo e dele faz parte" (*ibidem*, p. 47). Prova disso é que, apesar de a noção de demonstração matemática ter sido criada na Grécia Antiga no mesmo período histórico em que surgiu a filosofia, houve na matemática grega deste período um grau de abstração simbólica muito baixo.[11] Em suas demonstrações, os gregos pouco recorriam à linguagem simbólica, mas procuravam desenhar, na areia ou onde quer que fosse, diretamente a figura e as alterações que nela eram feitas para encontrar os resultados procurados.

As teses gerais da conceitualização formuladas por Aristóteles, que só passaram a ser questionadas no final do século XVIII, aparentemente nada tinham de problemático, pois se caracterizavam por pressupor

> Nada mais do que a existência das coisas, em sua multiplicidade, e a faculdade do espírito de extrair nesta multidão os existentes singulares para reter os aspectos marcantes que são possuídos em comum por uma grande quantidade entre elas... Reagrupando assim os objetos que possuem uma mesma propriedade, ordenando-as em classes e repetindo este processo até níveis mais elevados, na medida em que se eleva na escala dos seres, surgem então gradualmente uma ordem e uma divisão ainda mais firmes, de acordo com as séries de similaridades fatuais que atravessam as coisas particulares. As funções

[11] Cf. Bochner (1966, p. 18).

> essenciais do pensamento, nesta conexão, são meramente aquelas de comparar e diferenciar uma multiplicidade dada sensivelmente. A reflexão... conduz ela mesma à abstração, que consiste precisamente em reter aqueles traços aparentes, uma vez despojados de toda promiscuidade com os elementos heterogêneos, e a lhes apreender neles mesmos... (CASSIRER, 1997, p. 15).

De acordo com esta concepção, a generalização é aumentada na medida em que se abandona uma característica, e vice-versa. Além disso, a forma de abstração e classificação do conhecimento empírico é análoga à feita no conhecimento matemático (CASSIRER, 1997, p. 15). Apesar de estas teses aparentemente não contrariarem em nada nossa concepção comum de abstração, elas começaram a mostrar algumas limitações a partir do século XVI, aproximadamente – conforme foi aumentando a importância dos fatos empíricos, dos dados e de suas particularidades –, pois foi-se percebendo que de acordo com elas

> à extensão crescente corresponde uma redução progressiva do conteúdo, de tal forma que, ao final das contas, os conceitos mais gerais que se pode alcançar já não possuem caráter determinante algum (CASSIRER, 1997, p. 16).

Assim, a conceitualização por abstração, por meio da concepção de que se deve substituir "a indeterminação original e o caráter plurivalente do conteúdo representativo" (CASSIRER, 1997, p. 17) por "uma determinação rigorosa e unívoca" (*ibidem*, p. 17), chegou a uma noção de generalidade que elimina as particularidades e cai no vazio; e como se chegou a este ponto obrigados "pelas necessidades internas da doutrina tradicional do conceito..." (*ibidem*, p. 17), então, deve-se rever "o itinerário inteiro" (*ibidem*, p. 17). Afinal, as delimitações rigorosas que se pretendia assim alcançar vão se apagando na medida em que se desenvolve o procedimento lógico, o que pôs à lógica formal um novo problema:

> Se toda conceitualização consiste em só reter, de uma pluralidade de objetos, os índices ou características concordantes ou comuns, renunciando aos outros, é claro que *assim eliminaremos a totalidade dada originalmente à intuição.* O conceito perderá todo seu valor se ele pretende simplesmente significar a supressão dos casos particulares de que ele é parte e, em todo caso, a destruição de sua individualidade... *nada nos garante que as características comuns que*

> *tomamos de um conjunto de objetos... contêm ainda os traços característicos... da estrutura global dos membros do conjunto*... é no sistema aristotélico que este critério se manifesta à luz do dia; mais uma vez, os vazios da lógica são imediatamente fechados e preenchidos pela metafísica. A teoria do conceito constitui o nó propriamente dito que encadeia, um a outro, os dois domínios (CASSIRER, 1997, p. 17-18, grifos meus).[12]

O que as coisas têm em comum é também aquilo que "constitui as forças criativas de onde elas procedem e conforme às quais elas se organizam" (CASSIRER, 1997, p. 18), e uma lógica da conceitualização e da definição adequadas "não pode ser estabelecida a não ser que respeite as contribuições fundamentais inscritas sobre o real" (*ibidem*, p. 18).

No final do século XVI, com a Revolução Científica e a importância adquirida pela noção de lei natural, os pensadores já haviam percebido a inadequação do conceito de substância para os novos conceitos científicos. O mundo passou a ser concebido não mais como um cosmos contínuo, mas como conjunto de objetos separados, o que significa afirmar que na metafísica a noção de substância foi substituída pela de função, que exige pontos e objetos particulares para que possa ser *aplicada*. No entanto, na lógica e na teoria da generalização, os pensadores não haviam mudado a concepção de conceito, e continuaram concebendo-o como substância, e não como função,[13] de modo que a formação de conceitos ainda era vista como resultado da eliminação de particularidades: o conceito era visto como a substância que permanece após tal eliminação.

Este descompasso entre a substituição da substância pela função se deveu a que os pensadores da época limitaram a crítica da lógica formal "a uma crítica das teses gerais da conceitualização" (CASSIRER, 1997, p. 15), e assim continuaram operando, na lógica, com a noção de conceito como substância, e não como função, o que levava a uma visão reducionista do papel do sujeito na formulação dos conceitos e a uma negação das individualidades dos objetos conceitualizados. Voltaremos a esta questão quando discutirmos a transformação realizada por Kant na noção de conceito.

[12] O domínio da lógica ao domínio da metafísica, nota minha.

[13] Os debates ocorridos durante a Idade Média entre nominalistas e realistas tampouco questionavam a interpretação do conceito como gênero universal, mas somente o estatuto real dos universais (cf. CASSIRER, 1910, p. 20).

No início do século XVII, surgiu o que Foucault (2007, p. 79) chamou de “época clássica”, que vai até a virada do século XVIII para o XIX. Nesta época, a noção de conhecimento como representação era fundamental, as palavras e os símbolos deixaram de ser considerados como imagem direta dos objetos representados, e tornaram-se instrumentos de representação do objeto (FOUCAULT, 2007, p. 87), daí a ideia de que “era necessário que cada palavra, na menor de suas parcelas, fosse uma nomeação meticulosa” (FOUCAULT, 2007, p. 145) do conceito nomeado. Em razão dessa concepção, ocorreu certa reificação do signo: uma confusão entre o objeto de conhecimento, a coisa em si, e o signo, que é apenas uma forma particular de representar o objeto ou conceito.

Essa confusão caracteriza também a matemática de um período muito próximo da época da representação. De Simon Stevin (1548-1620)[14] a Joseph Louis Lagrange (1736-1813), aproximadamente, os matemáticos não diferenciaram claramente o objeto de conhecimento de uma forma particular de representá-lo. Isso explica em grande medida que mesmo um matemático como Euler, que tanto contribuiu para o crescimento da matemática, tenha dado tão pouca importância a investigações sobre seus fundamentos, e assim não tenha alcançado um grau de abstração que lhe possibilitasse diferenciar a função de sua representação aritmética.[15]

Em sua ruptura com a Escolástica se desenvolveram nos séculos XVI e XVII duas filosofias opostas, que têm em Francis Bacon (1561-1626) e em Descartes seus precursores. Embora eles concordassem em que o conhecimento era obtido por meio da abstração das particularidades, divergiram quanto ao papel que cumpririam os objetos empíricos e as sensações na formação do conhecimento.

Os empiristas acreditaram que as sensações dos sujeitos constituíam uma fonte confiável de verdade para a formação de conceitos gerais, sendo necessário obedecer à natureza para dominá-la.[16] Já os racionalistas viam com desconfiança o estatuto dos

[14] Stevin foi o primeiro a utilizar a notação decimal no mundo ocidental.
[15] Por esta razão, Euler concebeu que uma função seria contínua se ela pudesse ser representada por meio de uma única fórmula, não compreendendo que a fórmula é só uma maneira particular de representar o conceito de função. Já no início do século XIX, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) e Bernhard Nepomuk Bolzano (1781-1842) mostraram que uma mesma função pode ser representada por uma, duas ou mais fórmulas, o que invalidou a concepção de Euler, e assim conceberam que a continuidade deveria ser definida de maneira que expressasse o conceito da função enquanto tal (ou “em si”).
[16] Bacon (2005, III) afirmou que “a natureza não se vence, se não quando se lhe obedece. E o que à contemplação apresenta-se como causa é regra na prática”.

objetos empíricos e a capacidade das sensações dos sujeitos de mostrarem qualquer verdade sobre o mundo externo, pois para descrever um objeto empírico de maneira perfeita seria necessário fazer uma descrição de milhares de propriedades em permanente mutação, o que seria impossível para qualquer ser finito. Assim, o conhecimento só poderia ganhar existência na medida em que pudesse ser conceitualizado, o que equivale a dizer que todo fenômeno somente se torna real se puder ser explicado conceitualmente, o que só Deus pode fazer.[17]

Como aquilo que era passível de ser demonstrado por vias puramente racionais parecia mais confiável para os racionalistas, a matemática era importante por mostrar que era possível obter conhecimento seguro dessa forma. Essa capacidade da razão os estimulava a acreditar que era possível obter conhecimento semelhante em teologia e metafísica, e por isso a relação entre conhecimentos matemático e metafísico foi um dos temas mais discutidos por eles.

Um dos problemas centrais para os filósofos racionalistas era o chamado problema da representação: a certeza do conhecimento do sujeito dependia inteiramente da demonstração de que existe uma correspondência entre os objetos de conhecimento e a representação que o sujeito faz deles. De Descartes a Moses Mendelssohn (1729-1786), e passando por Leibniz e Baruch de Espinoza (1632-1677), surgiram diferentes justificativas para a questão, mas todas recorreram ao argumento de que essa correspondência seria garantida pelo fato de que nossa razão é o que temos em comum com Deus. Todos reconheceram que não é possível, para o sujeito cognoscente, saltar diretamente da representação ou ideia que ele tem do objeto para o *objeto em si* e compará-los, para verificar se a coisa se adéqua ao intelecto. Mas, como afirmou Descartes, a ideia de que o objeto para nós pudesse ser diferente do *objeto em si* era absurda, pois significaria que Deus, que nos criou, quis nos enganar.

Daí deriva a atribuição de um *papel* ao sujeito na formação do conhecimento que antes não havia e, portanto, uma transformação na filosofia, que deixa então de ser a busca das essências e passa a ser a investigação das condições do conhecimento. Dessa forma, a certeza individual, intuitiva, passa a ser o critério para analisar a verdade daquilo que se sabe.

---

[17] Leibniz (2000, p. 25) afirma que Deus "tudo conhece a priori", pois "tem uma noção completa de cada substância individual".

A ideia de Deus era concebida pelos racionalistas como o termo último ao qual se pode chegar por meio da razão, mas também como a visão a partir da qual a totalidade do universo constituiria um sistema, um conjunto coerente, transparente e racional. Desse ponto de vista, somente Deus, como Ser supremo – cujo entendimento seria infinito – poderia conhecer por meio de ideias puras, pois para Ele o mundo seria completamente racional e inteligível.

Apesar da mudança na forma de conceber o estatuto das Ideias realizada por Descartes – de essências reais para presenças na consciência – e de o racionalismo ter abandonado a noção de representação como semelhança, ele não rompeu com a concepção escolástica de que seria possível explicar os fatos com base nas Ideias,[18] nem com a concepção de que as ideias são obtidas por abstração, e não por construção.

O início da Revolução Científica coincidiu, em grande medida, com o período em que foram redescobertos pelo Ocidente muitos dos escritos filosóficos, científicos e matemáticos da Grécia Antiga. Galileu Galileu (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), Descartes, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) e Pierre de Fermat (1601-1665), ao conhecerem estas obras, aperfeiçoaram as técnicas utilizadas pelos gregos para tentar resolver os problemas que eles deixaram, foram incorporando gradualmente as novas ferramentas e abandonando progressivamente o ideal científico e a noção de rigor encontrados nessas obras.

> Fermat introduziu a linguagem algébrica, Descartes as coordenadas e o plano para localizar os pontos e curvas, e Cavallieri (e também Torriceli) ‘redescobriram’ os métodos infinitesimais dando-lhes não apenas uma conotação heurística como lhes dera Arquimedes (287 a. C. – 212 a. C.), mas também uma formalização do método (MANCOSU, 1996, p. 35). Assim, se inicia a aritmetização da geometria e a introdução de métodos infinitesimais, dois elementos fundamentais que marcariam o desenvolvimento da matemática no século XVII (CLÍMACO, 2011, p. 5).

As mudanças introduzidas por Descartes na matemática contribuíram para transformações profundas da matemática e da filosofia, que Boutroux (1992) explicou como uma transformação do ideal de matemática, de uma concepção que procurava a

[18] A justificativa dada por Leibniz, por exemplo, para que Deus possa “conhecer a priori e de forma completa tudo o que se atribui a uma determinada substância” (2000, p. 25) é até certo ponto uma justificativa aristotélica ou escolástica: “porque (Deus, nota minha) descobre a sua razão suficiente” (*ibidem*, p. 25).

perfeição estética e a harmonia, para uma que expressava funcionalidade e operacionalidade: Descartes concebeu que se pudesse multiplicar um número e somá-lo a outro;[19] aceitou na geometria algumas curvas descartadas pelos gregos;[20] e, por fim, sua simbolização algébrica libertou a matemática da exigência de complicadas explicações qualitativas e tornou-se importante para o esforço de unificação do estudo dos números com a geometria.

Em sua obra, as operações com números foram aceitas como dignas de serem estudadas como ciência[21] e transformadas de maneira a se tornarem simples e mecânicas. Ele criou, influenciado pelos árabes, uma notação que permitia agilidade, precisão, e uma grande economia de pensamento, garantindo assim uma ampla generalização e uma busca por aplicações da matemática a uma quantidade crescente de áreas. Ao criar a geometria analítica, uma forma de representação geométrica em que a posição de qualquer ponto num plano é determinada por um par de números, Descartes iniciou o processo de aritmetização que somente se tornaria dominante no século XIX, e "uma série ininterrupta de assimilações recíprocas entre ramos da matemática até então heterogêneos" (BETH & PIAGET, 1966, p. 229), o que foi um passo importante para o processo que, no século XIX, faria a matemática "tornar-se consciente de si" (*ibidem*, p. 229).

Descartes procurou revelar os princípios presentes nos diversos métodos e que garantiram o enorme progresso das ciências nas décadas anteriores. Rejeitou a filosofia escolástica e considerou a lógica, que era um de seus mais importantes fundamentos, inútil e incapaz de revelar novas descobertas. Mas sua visão, que era também a da maior parte dos racionalistas, de que as ciências pertencem às regiões das verdades eternas, e sua pretensão de criar uma matemática universal capaz de fazer em todas as áreas o que

[19] Na Grécia Antiga, a ligação que os matemáticos faziam dos números à geometria era tão forte, que consideravam a multiplicação entre dois números equivalente à multiplicação de dois segmentos de reta, o que só poderia resultar numa área. A área, por ter medida diferente do segmento, não pode ser somada a ele. Esta concepção perdurou até Descartes.

[20] Os gregos excluíram do estudo da geometria todas as curvas obtidas por meio de movimentos mecânicos, tais como as espirais e as elípticas. Descartes aceitaria estas últimas, mas não as primeiras.

[21] Para os gregos, as operações numéricas eram vistas como instrumentais, portanto indignas de serem objeto de estudo teórico, e esta tradição se manteve até Descartes. Entre o período da Grécia Clássica até o século XVI, as técnicas de cálculo se desenvolveram de maneira totalmente paralela aos estudos considerados teóricos, e em conexão intrínseca com a prática e o comércio pelos árabes, a quem o Ocidente deve, inclusive, a simbologia numérica e das operações que são utilizadas até os dias atuais. Antes das grandes rotas comerciais para o Oriente se abrirem na Holanda e na Itália, predominava no comércio do Ocidente o cálculo com o ábaco.

ele conseguira na geometria – determinar de maneira precisa seus elementos e permitir operações para encontrar os resultados corretos – logo revelaram-se obstáculos para seus propósitos de encontrar um método científico, pois quanto mais os cartesianos se aproximaram do estudo dos fatos, mais se viram forçados a criar complicados princípios metafísicos para explicá-los (CASSIRER, 1997).

Após Descartes, a aplicação de seu método, o método analítico, ao estudo dos infinitos e dos infinitésimos, e a nova concepção de conhecimento trazida pela obra de Isaac Newton (1642-1727), que em poucas décadas atraiu a atenção até mesmo dos filósofos de tradição racionalista, tornaram possível uma nova mudança na filosofia e na matemática. Embora Kepler, Cavallieri e Evangelista Torricelli (1608-1647), contemporâneos de Descartes, já tivessem iniciado estudos sobre os infinitésimos e infinitesimais, relacionados aos conceitos do que se passou a chamar de derivadas e integrais,

> uma compreensão mais profunda da diferenciação e da integração, bem como um método geral para aplicação destes conceitos, derivado da compreensão de que um processo é inverso do outro, somente pôde ser descoberto por homens que dominaram o método geométrico dos gregos e de Cavalieri, assim como os métodos algébricos de Descartes e Wallis. Esses homens só poderiam ter aparecido depois de 1660, e na realidade surgiram com as figuras de Newton e Leibniz. A matemática de Newton e Leibniz seria marcada pela exploração, aplicação e ampla generalização dos métodos ligados aos infinitesimais, e a consciência da inversibilidade entre derivadas e integrais facilitou a exploração do importante instrumento para medir, prever e matematizar – como era o objetivo de Descartes – que eram as equações diferenciais, bem como para compreender e traduzir – ou descrever – analiticamente as relações geométricas entre derivadas e integrais (CLÍMACO, 2011, p. 11).[22]

A concepção de Newton, que se expressou de maneira plena em 1687 com a publicação do *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*, valorizava os fatos e a experiência controlada; recusava qualquer teoria construída oposta aos fatos ou que os ignorasse; expandiu a noção de análise utilizada por Copérnico e a tornou modelo de explicação de fenômenos.[23] Além de trazer uma série de descobertas e generalizações

---

[22] Ver Newton (1999).

[23] Concebia que a forma adequada de explicar um fenômeno complexo era analisando-o, decompondo-o, em fenômenos mais simples e recompondo-o após estudo separado de cada componente.

científicas da maior importância,[24] e ter marcado o auge da Revolução Científica, essa obra trouxe uma nova concepção de método. Newton inverteu os termos da física cartesiana e afirmou que era a razão que deveria se submeter aos fatos, e que as leis gerais deveriam ser derivadas dos fatos por meio da linguagem analítica da matemática.

A visão newtoniana gerou mudanças também na concepção de matemática, que passou a ser vista como instrumento ou linguagem que permitia, a partir dos fatos e da experiência controlada, construir leis. Foi formando-se assim uma matemática voltada para o estudo de problemas da mecânica celeste e terrestre (o movimento dos corpos e a astronomia), predominantemente quantitativa e voltada para a medida e a previsão. Esta nova concepção, por sua vez, foi mudando progressivamente o estatuto que a matemática tinha desde a Grécia Antiga como modelo de perfeição, estética e harmonia, possibilitando que ela se desenvolvesse sem os excessivos cuidados que os gregos tinham, e que os matemáticos iniciassem um período de intensa experimentação.[25]

Embora se insira na tradição racionalista e tenha se oposto ao empirismo de Newton, Leibniz também aplicou a análise cartesiana aos conceitos relativos ao infinito. Sua explicação dos conceitos fundamentais do cálculo recorria a conceitos metafísicos, ao mesmo tempo em que se apoiava em analogias com fenômenos da natureza – tais como a continuidade do movimento dos corpos e da energia – para confirmá-las. Além disso, para realizar operações com derivadas, Leibniz se apoiava em conceitos geométricos.

Newton e Leibniz, apesar de terem mostrado uma enorme compreensão dos processos relativos a derivadas, integrais, limites e continuidade, acharam que bastava sua própria intuição, e não julgaram necessário fazer maiores esforços no sentido de mostrar seus fundamentos lógicos. Além disso, sua linguagem matemática ainda era muito geométrica.[26] Preocupado com as consequências materialistas que poderiam derivar do *hypoteses non fingo*[27] de Newton (1999), o filósofo e bispo George Berkeley (1685-1753) mostrou com clareza que, ao tentarem explicar a lógica das operações

---

[24] Uma delas foi a unificação da mecânica terrestre com a mecânica celeste por meio da demonstração que todas elas podiam ser derivadas da Lei da Gravitação Universal. Com esta obra, a noção aristotélica de que deveria haver uma física para os céus e outra para a terra foi abandonada.
[25] Apesar da influência platonista sobre cientistas como Kepler.
[26] Ver Newton (1999).
[27] *Não invento hipóteses*.

realizadas, Newton e Leibniz cometiam uma série de contradições,[28] que permaneceram sem solução até o início do século XIX.

No século XVIII, a partir dos escritos de Newton e Leibniz e sob influência do "espírito de experimentação" (STRUIK, 1989) característico da época, a linguagem aritmética se desenvolveu muito além do que esses autores a haviam concebido e – nas mãos dos grandes matemáticos, sobretudo Euler, Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) e Lagrange – invadiu todos os seus ramos. A análise matemática passou a se referir não mais às curvas e suas propriedades, mas às expressões analíticas e às regras que regem as manipulações de tais expressões; todas as *curvas geométricas* foram incorporadas à matemática e estudadas analiticamente, mas rejeitando a semântica[29] geométrica de Descartes; e muitos dos problemas passaram a ser resolvidos por meio do uso de séries infinitas, que se tornaram cada vez mais abrangentes.

No entanto, limitada pela confusão entre símbolo e objeto, a semântica dos matemáticos do século XVIII ainda era relativa às quantidades variáveis, uma semântica para a maioria das partes e, por isso, o significado da validade universal permaneceu puramente sintático. Os matemáticos acreditaram, então, que uma fórmula teria sua validade universal demonstrada se ela fosse derivada por meio do uso das regras da análise, mesmo que pudesse falhar ou fornecer respostas de um tipo diferente para certos valores da quantidade variável (RUSNOCK, 1997, p. 73).

Euler, provavelmente o maior matemático do século XVIII, expressou esta confusão de uma maneira que ilustra bem a situação em que se encontrava a matemática na época. Em meio a seus estudos de séries infinitas, ele afirmou que o resultado

---

[28] Berkeley (2010) acusa os matemáticos de não procederem de maneira mais rigorosa do que os religiosos, mostrando que Newton e Leibniz cometiam contradições em suas operações que utilizavam infinitos e infinitesimais. Mostrou, por exemplo, que Newton contrariava o princípio da contradição ao considerar $dx=0$, e depois fazia $dx/dx=1$, o que pressupunha que dx é diferente de 0. O subtítulo do livro "O analista: ou um discurso dirigido a um matemático infiel Onde se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna são mais distintamente concebidos ou mais obviamente deduzidos do que os mistérios religiosos e as questões de fé" e o epílogo "Primeiro retirai a trave de vosso próprio olho e, então, enxergareis de modo mais claro para que possais retirar o cisco do olho de vosso irmão" (Mateus, 7, 5) são significativos das preocupações de Berkeley, que em poucas décadas se mostraria bem justificada.

[29] Neste tópico, o termo "semântica" é usado em sentido amplo, ou seja, como qualquer concepção de relação entre signos e objetos, e não no sentido moderno.

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+...$, que vale somente para $|x|<1$,[30] era válido para quaisquer valores, como $x=-1$, $x=1$, $x=2$ etc, o que levava a absurdos como $-1=\infty$. Sua confusão entre uma função e sua representação simbólica também é fruto desta *semântica*.

Da resposta às questões sobre qual é o elemento mais simples e elementar, capaz de fundamentar os fenômenos e problemas complexos, e o que garantiria sua objetividade, dependia em grande medida o que se compreendia por método analítico. E esta resposta mudou consideravelmente entre o século XVI e o século XVIII, como se pode ver a seguir.

Descartes tentou respondê-las aplicando a crítica filosófica aos fundamentos da matemática, decompondo os elementos mais complexos em outros mais simples. A objetividade seria garantida pela razão concebida como certeza intuitiva e individual, e não como reflexão sobre o ser e baseada na lógica, como era tradicional desde os gregos. Concebeu, assim, que devemos estar atentos à composição de nossos pensamentos, ver quais partes contribuem para o que, e reorganizar tudo na ordem da cognição. Este movimento no rumo do simples na cognição era concebido, ao mesmo tempo, como um movimento rumo ao absoluto (RUSNOCK, 1997, p. 68). Nas palavras de Descartes, "este 'absoluto', este '*primum*', é o mais simples e mais fácil [de apreensão], e portanto está a serviço de nossas posteriores pesquisas" (Descartes, 1977, Regra VI). A objetividade deste conhecimento, por outro lado, baseia-se, em última análise, na bondade de Deus, pois a razão é o que temos em comum com Ele.

Ao conceber na matemática o mesmo princípio de considerar que o *simples* é aquilo que é intuitivo e evidente, e considerando a noção de grandeza, *res extensa*, como fundamental, Descartes afirmou que o simples deve ser o segmento de reta, aquilo em que as diferentes grandezas geométricas podem se decompor. Por meio de uma simbologia adequada e rigorosa, ele ligou cada símbolo a uma interpretação geométrica, o que lhe permitiu corrigir a geometria por meio da álgebra, e vice-versa (RUSNOCK, 1997, p. 69).

[30] Como se sabe desde que Cauchy (1789-1857) e Bolzano começaram a elaborar critérios objetivos para a convergência de séries infinitas no início do século XIX.

Mas os matemáticos das gerações seguintes foram se dando conta, ao estudar os conceitos matemáticos surgidos no século XVII – em particular os referentes ao cálculo, que envolviam questões como o infinito, o infinitamente pequeno e a continuidade – que aquilo que Descartes considerava simples, o segmento de reta, se baseava em álgebra geométrica bastante complexa. Ao identificar o que é mais simples com o que é mais cognoscível, ele deixou de lado questões semânticas,[31] como o fato de que sua álgebra estava firmemente ligada à semântica da construtibilidade geométrica – algo que, no aspecto formal ou da linguagem, não é necessariamente mais simples (RUSNOCK, 1997, p. 69-70).[32]

Pascal tentou responder às duas questões tratando de maneira separada conceitos e proposições, e afirmando que não se deve "empregar nenhum termo do qual não se tenha de antemão explicado claramente o sentido" (PASCAL, 2006, p. 18) e "não adiantar jamais qualquer proposição de que não tenha sido demonstrada por verdades já conhecidas" (*idem*, p. 18). No caso de conceitos, como não é possível definir algo explicando *ad infinitum* um por meio de outro, afirmou que a análise deve parar quando forem encontradas "palavras tão primitivas que não seja mais possível definir" (*idem*, p. 19); quanto a proposições, deve-se chegar "a princípios tão claros que não se encontrem outros que o sejam mais para servir de prova para eles" (*idem*, p. 19).

Considerou como indefiníveis e mais simples os termos que, nomeados, fazem com que todos dirijam "seu pensamento para o mesmo objeto" (PASCAL, 2006, p. 21). Por isso, "as definições são feitas unicamente para designar as coisas que são denominadas e não para mostrar a natureza delas" (*ibidem*, p. 21). Além disso, "a própria natureza nos deu, sem palavras, uma inteligência mais clara que aquela que a arte nos confere por meio de nossas explicações" (PASCAL, 2006, p. 21). Essa visão de simplicidade dos primeiros princípios exerceu grande influência, particularmente por ter sido compilada na *Lógica de Port Royal*, que formaria os futuros lógicos até o final do século XVII.

Leibniz foi o primeiro a considerar a questão da objetividade do elemento mais simples direcionando o foco para a estrutura da linguagem, desviando-a do critério de

[31] A semântica é, na filosofia da linguagem, a parte que estuda a relação entre os signos e os objetos a que eles se referem; ou, como às vezes se diz, entre signos e significados.
[32] RUSNOCK (1997, p. 69-70) chega a avaliar que Descartes não teve o mesmo rigor ao desenvolver seus estudos sobre os fundamentos da matemática quanto o teve ao elaborar seus conceitos filosóficos.

evidência. Não se deveria considerar, pois, a clareza ou a intuição individual como critério de simplicidade de um conceito, mas sim a possibilidade de se dividi-lo ou não em partes menores. Analogamente, o que se deve levar em consideração para julgar a simplicidade das proposições é a forma lógica de expressá-la e sua estrutura (cf. LEIBNIZ, 1969, p. 294). No entanto, acreditou que os axiomas e conceitos simples têm que ser ao mesmo tempo epistemologicamente e metafisicamente básicos, que os conceitos simples da compreensão correspondem à perfeição de Deus, e os axiomas devem ser não apenas logicamente primitivos, mas também imediatos, auto-evidentes (LEIBNIZ, 2005, p. 23). Muitos destes aspectos foram retomados por Bolzano, mas não em sua dimensão metafísica.

Apesar dos avanços ocorridos na matemática do século XVIII, deve-se reconhecer que as acusações de falta de rigor e incoerência lógica feitas ainda no século XVII por Berkeley às operações que envolviam as noções de infinito (continuidade, limite, derivada, integral, etc.), dentre outros, não haviam sido respondidas, o que levou a novas contradições e à necessidade de se estudar os aspectos relativos à linguagem ligados aos fundamentos do cálculo.

Por outro lado, na segunda metade do século XVIII, quase todos os problemas postos à matemática desde a Revolução Científica – da mecânica celeste e terrestre e de outros ramos da física, os resultados clássicos da geometria herdados da matemática grega[33] – haviam sido resolvidos, e a matemática conseguiu esclarecer muitos fenômenos da natureza que até a Idade Média tinham seu funcionamento obscuro. O enciclopedista Denis Diderot (1713-1784, 1789) e o matemático Lagrange (cf. STRUIK, 1997) acreditaram, então, que a matemática estava esgotada. No entanto, os próprios fundamentos do cálculo, no qual se baseava a aritmética, não estavam esclarecidos, o que deixava sem solução uma série de problemas e o caminho aberto para diversas contradições.

Mas para compreender as mudanças que os debates filosóficos provocaram na forma de encarar as três dicotomias ao longo do século XVIII e como elas prepararam a problemática crítica kantiana, é preciso compreender os caminhos trilhados pela noção de análise durante o século XVIII e sua herança do racionalismo. É preciso apreciar

[33] Alguns destes problemas, que não tinham solução, só teriam a prova de sua impossibilidade realizada numa nova fase da matemática, iniciada no século XIX.

adequadamente de que maneira a "forma cartesiana clássica de análise" (CASSIRER, 1997, p. 60) e a "nova síntese filosófica" (*ibidem*, p. 60), que teve em Leibniz o seu ponto de partida, atuaram em comum e influenciaram a filosofia e a ciência.

Na França do século XVII, o cartesianismo se impôs nos círculos cultos, na Igreja e como um dos elementos da cultura geral da sociedade. Na Alemanha, ao contrário, a vida intelectual se formou sob influência de Leibniz, embora com uma penetração lenta, progressiva e, a partir do século XVIII, por meio dos escritos de Christian Wolff (1679-1754), que nem sempre enfatizavam o que havia de mais original em sua filosofia.

À medida em que a influência de Leibniz foi aumentando, uma importante mudança fez surgir uma "oposição fundamental" (CASSIRER, 1997, p. 61) entre as obras de Descartes e de Leibniz, na qual "já estão contidas as grandes tarefas intelectuais com que o século XVIII se defrontará e que irá abordar" (*ibidem*, p. 61), e que contribuiriam para a original solução apresentada por Kant para a questão da relação entre o geral e o particular:

> Da lógica das "idéias claras e distintas" a marcha do pensamento leva à lógica da "origem" e do individual, da mera geometria à dinâmica e à filosofia dinâmica da natureza, do "mecanicismo" ao "organicismo", do princípio de identidade ao princípio de infinidade, de continuidade e de harmonia (CASSIRER, 1997, p. 52).

Leibniz, que não pretendia negar o pensamento de Descartes, mas estender seu escopo, tentou criar um alfabeto do pensamento por meio da aplicação a todas as áreas do conhecimento do método da teoria dos números, que consiste em reduzir todo número expressando-o como produto de números primos. Mas ao formular essa extensão, Leibniz chegou a um conceito de substância radicalmente distinto do de Descartes, que contribuiu para uma transformação mais profunda da filosofia, ao postular pela primeira vez um universo pluralista e formular a noção de mônada como unidade dinâmica na qual se expressa não somente a unidade, mas também a infinidade. Sua concepção de mônada é inseparável da ideia de um universo contínuo, e "continuidade quer dizer unidade na multiplicidade, ser no devir, constância na mudança" (CASSIRER, 1997, p. 53).

Assim, a relação do geral com o particular, até então tratada sob o aspecto da lógica aristotélica como relação de pertinência ou subordinação do particular ao geral, começou a ser tratada de maneira nova, em certo sentido preparando a crítica kantiana, pois na concepção de mônada leibniziana o *todo* do mundo não é redutível à soma das partes, é uma totalidade orgânica, e não mecânica.[34]

Essa concepção confere ao problema da individualidade um sentido inteiramente novo. "O individual, na filosofia leibniziana, obtém a posse de uma prerrogativa inalienável... cada substância individual é não só uma parte do universo, mas esse mesmo universo, visto de uma certa 'perspectiva'..." (CASSIRER, 1997, p. 56-57). Daí seu conceito de harmonia, "ponto de partida e o fim de todo o sistema, daí que todo ser humano ou parte da natureza traz em si um símbolo da própria essência divina e sua vera imagem" (*ibidem,* p. 57), o que significa que só se alcança "a verdade do ser... no auge da energia individual e não em seu nivelamento, sua igualização e sua extinção. Esse pensamento fundamental impõe uma nova orientação das ideias" (*ibidem,* p. 57). E essa nova oriantação desloca "o centro de gravidade de toda uma visão do mundo" (*ibidem,* p. 57).

Leibniz respondeu à questão de como garantir a objetividade do nosso conhecimento, e de como é possível passar do particular para o geral, com a elaboração de dois princípios fundamentais: o *princípio da identidade* e o *princípio da continuidade*, também chamado de princípio da *uniformidade da natureza*: o primeiro afirma que, se existem descrições idênticas de determinados objetos, então eles são o mesmo objeto; e o segundo afirma a continuidade do funcionamento da natureza no passado, no presente e no futuro, e para Leibniz ele era garantido por Deus. Ambos significam que todo conhecimento é essencialmente analítico, mesmo que apenas Deus possa fazer a descrição analítica de um conceito empírico.

Na França, os escritos de Leibniz tardaram a influenciar os pensadores Iluministas que, sobretudo na primeira metade do século XVIII, expandiram, sob influência de Descartes e de Newton, a análise newtoniana às mais diversas áreas do conhecimento. Mas na segunda metade do século XVIII, sobretudo com Diderot, a influência de Leibniz contribuiu para começar a diminuir a rigidez conceitual sobre a

[34] A mônada leibniziana, diferentemente do átomo, revela-se não como o elemento que sobra quando dividimos as partes até não poder mais, como algo sólido, fixo e indivisível; não existe para ela cisão, mas sim reciprocidade interna e correlação necessária.

filosofia da natureza e sobre as ciências naturais descritivas, fazendo a ênfase cair sobre o desenvolvimento e sobre a evolução dos conceitos.

Diderot foi o primeiro a criticar a visão estática de mundo que ainda guiava o estudo das espécies no século XVIII, relacionado com o fato de que a lógica e a noção de conceito ainda eram concebidas em termos de substância, e não de função. Ao reconhecer a diversidade, a transição e a mudança, e afirmar que todas as espécies, tal como o indivíduo, podem crescer, perdurar, definhar e acabar, Diderot atribuiu ao mundo uma visão dinâmica e pôs em questão a noção de gênese bíblica do ser humano.

As forças artísticas – por meio da restauração da estética sistemática – e as religiosas tiveram uma participação ativa na edificação da filosofia da natureza do século XVIII (CASSIRER, 1997, p. 108-109). Em seu repúdio à redutibilidade dos sentimentos às sensações, elas contribuíram para fazer surgir na filosofia a noção de uma forma de relação entre a intensão e a extensão em que a segunda é irredutível à primeira, e em que se faz necessário sempre o recurso à intuição para alcançar o conceito. A filosofia alemã elaborou estas concepções diferenciando nitidamente a sensação do sentimento, afirmando que as noções de estética (o belo), de moral (a virtude), de matemática (a verdade) não se limitam a noções sensitivas. A impossibilidade de conceber a grandeza de uma obra de arte ou de um pensamento científico complexo apenas com base nas sensações supõe a existência de uma faculdade da alma que não apenas junta as diferentes sensações percebidas pelo nosso corpo, mas também as reelabora. A uma concepção estática e passiva do sujeito que *sofre* a ação do exterior por meio de seus órgãos perceptivos corporais, o Iluminismo alemão opôs uma concepção dinâmica do indivíduo e da natureza.

Deste modo, a estética e a religião alemãs, bem como a filosofia de Leibniz, contribuíram para uma concepção que recusava o papel passivo que muitos iluministas atribuíam ao sujeito. No horizonte já se descortinava uma profunda transformação da noção de conceito, em que a generalização não se daria mais por meio da negação das particularidades, mas sim por meio de relações e funções, e na qual a intuição do sujeito cumpriria *papel* ativo.

Assim, se do ponto de vista da afirmação da importância do estudo das estruturas da linguagem e, portanto, da valorização do conhecimento conceitual, Leibniz é um precursor de Bolzano; de outro, na concepção de mônada de Leibniz – e talvez também em sua identificação do elemento fundamental com os atributos de Deus – há uma afirmação de que nem tudo é redutível ao conceito, e nesse sentido Leibniz é também um precursor de Kant, como afirmou Cassirer (1997).

Mas no século XVIII, ainda no interior do materialismo francês, ocorreu uma transformação na noção de análise num sentido distinto daquele do século XVII, quando os pensadores viam "na construção de 'sistemas filosóficos' a tarefa própria do conhecimento filosófico" (Cassirer, 1997, p. 24). Para isso,

> *era preciso que o saber tivesse alcançado e estabelecido com firmeza a ideia primordial de um ser supremo e de uma certeza suprema intuitivamente apreendida*, e que tivesse transmitido a luz dessa certeza a todo o ser e a todo o saber dela deduzido. É o que efetivamente ocorre quando, pelo método da demonstração e da dedução rigorosa, são mediatamente ligadas à certeza primordial outras proposições, a fim de se percorrer, por meio dessa conexão mediata, toda a cadeia do congnoscível e de a encerrar sobre si mesma... A única explicação de que é suscetível consiste em sua 'dedução' rigorosa e sistemática, a qual o reconduz à causa primeira do ser e da certeza... (Cassirer, 1997, p. 24; grifo meu).

De Descartes a Leibniz,

> a validade, a potência e a certeza das ideias fundamentais do saber estão fora de questão pelo próprio fato de que participamos nelas e através delas da existência divina. Em última análise, é nessa participação metafísica que repousam toda a verdade e toda a certeza lógica... a luz que ilumina para nós o caminho do conhecimento vem de dentro, não de fora: da região das ideias e das verdades eternas, não das coisas sensíveis (Cassirer, 1997, p. 140).

Ao analisar "a forma do pensamento[35] da época do Iluminismo" (1997, p. 40), Cassirer afirma que os filósofos, os cientistas e os matemáticos do século XVIII renunciaram a esse modo e a essa forma de explicação sistemática, e passaram a procurar métodos, ao invés de sistemas, passando assim a conceber que a razão deveria ter objetivos mais modestos do que havia tido no século XVII.[36]

Nesse aspecto a filosofia iluminista entrou em conflito com o racionalismo cartesiano, eliminando "a mediação em que o apriorismo e o racionalismo pensavam ter baseado a mais alta certeza do saber" (Cassirer, 1997, p. 140): o Iluminismo procurou

[35] O tradutor do livro traduziu *Denkform* por *forma da razão*, o que não nos parece adequado.
[36] Cf. Cassirer (1997, p. 32).

explicar a origem do conhecimento sem recorrer à metafísica e por meio de resposta semelhante à dada ao problema da natureza, que ele acreditava ter resolvido, ou seja, partindo dos fatos para chegar às leis ou ideias gerais. E foi assim que, no século XVIII, o *espírito analítico* ganhou uma conotação em grande medida nova e distinta da cartesiana e da leibniziana.

Afinal, se em Descartes a matemática era o modelo que a física e as demais ciências deveriam seguir, devido à sua capacidade de abarcar o todo e explicar qualquer fato particular com base em concepções gerais que se baseavam na razão, em Newton ela tornou-se o instrumento privilegiado da análise que decompõe os fatos e da síntese que o recompõe, concepção esta que inspirou os iluministas. Assim, de algo que era prova da supremacia da razão sobre os fatos, a matemática passou a ser o seu contrário: instrumento da supremacia dos fatos sobre a razão e a negação da independência e das grandes pretensões desta última.

Os iluministas quiseram levar até as últimas consequências o *hypoteses non fingo* de Newton (1999) e sua concepção de que não se deveria especular a respeito da natureza íntima das coisas. Desta maneira, a concepção empirista de Newton contribuiu para libertar as ciências da concepção racionalista de razão, que pretendia, por meio da matemática, da teologia e da metafísica, abarcar todas as formas de conhecimento.[37]

Afinal, a capacidade que a matemática e o método analítico mostraram de explicar os fenômenos mais complexos por meio de sua redução aos componentes mais simples e sua reconstrução racional por métodos analíticos, alcançando por esta via as ideias e as leis gerais, criou no século XVIII as maiores expectativas: muitos pensadores da época acharam que todo e qualquer ramo do conhecimento, da teologia à filosofia natural,[38] deveria passar pelo crivo da análise ao modo newtoniano.

O método analítico foi, então, invertido, no sentido de partir dos fatos para explicar as ideias e corrigir os pensamentos, e não mais partir da razão para explicar os fatos. A crítica de D'Alembert (1717-1783) e de Condillac aos sistemas filosóficos do século XVII foi de terem fracassado ao elevar "unilateralmente ao status de dogma o primeiro conceito que lhes ocorreu" (Cassirer, 1997, p. 26). Daí a importância de Condillac, que nos *Ensaios sobre as origens do conhecimento humano* e em *A lógica ou*

[37] Ver, por exemplo, Cassirer (1997).
[38] Nome dado na época à área do conhecimento que abrangia a física e a biologia.

os primeiros desenvolvimentos da arte de pensar leva ao extremo a concepção de que tudo deveria ser submetido à análise, até mesmo, contrariando Descartes, a alma, por meio de sua decomposição em *momentos*.

O elemento mais básico, mais simples, no qual a análise deveria decompor os fenômenos complexos, para Condillac, não era mental, e sim a sensação. É a partir dela que ele explica os atos da mente e critica a separação entre corpo e alma, que relega ao primeiro um papel duvidoso e submete as sensações à razão. Como Newton, Condillac reconheceu que, para explicar a correção do conhecimento científico, é necessária, além da percepção corporal, a operação mental. Mais radical do que Locke, que, ao eliminar a noção de *ideias inatas*, manteve a de *operações inatas*, Condillac estendeu as considerações de Locke ao domínio da vida psíquica, e viu na inquietude o ponto de partida de nossas sensações e percepções, mas também dos pensamentos e julgamentos,

> e até mesmo dos atos superiores de reflexão a que a nossa alma se eleva. Desse modo se vê invertida a ordem habitual das ideias, aquela que... recebera a sanção da psicologia cartesiana. A vontade deixa de ser causada pela representação, passando esta a ser causada por aquela (...) A ordem lógica das nossas ideias não é, portanto, primária, mas derivada... espécie de reflexo ou de espelho de ordem biológica; o que em cada caso nos parece importante, 'essencial', é-o menos em função da essência das coisas do que da direção do nosso 'interesse', o qual é determinado pelo que nos for proveitoso, pelo que for útil à nossa conservação (Cassirer, 1997, p. 147-149).

Condillac foi o primeiro também a formular uma noção de signo e de semiótica que amenizou a dicotomia entre racionalismo e empirismo, reconhecendo que uma percepção se transforma em sentença por meio de signos, e que os processos mentais baseados nas representações das sensações em termos de signos "são responsáveis pelo desenvolvimento do conhecimento" (CORRÊA, 2008, p. 44). Antecipando algumas concepções da semiótica, afirmou que o sujeito só toma consciência da sensação quando, em sua mente, a transforma em uma imagem que corresponde a um signo. Por meio dos signos assim formados o sujeito se torna capaz de realizar as operações mentais de maneira independente das sensações e dos objetos sensíveis (*ibidem*, 2008, p. 44), o que explica a possibilidade da ciência.

Sob esse aspecto, "os atos do espírito, as operações intelectuais, nada comportam que seja verdadeiramente novo e, daí, misterioso: são apenas sensações transformadas" (CASSIRER, 1997, p. 146); todo impulso e toda ação são, em última análise, fruto das sensações – quer dizer, causadas pela experiência imediata – ou redutíveis a elas, bem como o desejo, o pensamento religioso, a observação da beleza das artes e o pensamento matemático.

Em Condillac, a concepção de análise do século XVIII atingiu seu auge, chegando mesmo a se dirigir a alguns temas da filosofia crítica kantiana:

> A teoria do conhecimento de Condillac coloca-nos imediatamente em face da problemática de uma *filosofia crítica*... sustenta que 'a extensão de nossos conhecimentos é a mesma de nossas sensações', e que, "para além delas, não há nada que possamos descobrir (1780, Lógica, Éclaircissements)..." proclama que "a mania dos sistemas nos desencaminha... e conduz a conhecimentos completamente vãos, 'obra do entendimento puro [3]... das verdades inteiramente espirituais' (Tratado dos Sistemas, p. 133). Podem-se reconhecer aí os temas que, em Kant, constituirão a base da estética transcendental, a ilusão transcendental da razão e, finalmente, a própria ideia de uma crítica da razão pura. O Tratado dos Sistemas, muito antes do filósofo de Königsberg, propõe-se expurgar a metafísica neocartesiana de seus imensos maquinismos desconectados do real. Como Kant, mais tarde, Condillac proclama que conhecimento é sistema. O ponto de vista, porém, é diferente. Os únicos sistemas bem construídos são aqueles que, como o de Newton, encadeiam fatos, e não hipóteses ou abstrações; a problemática transcendental é fundamentalmente estranha a Condillac... O critério último da verdade é o fato, espécie de indefinível lógico... Condillac distingue, sem dúvida, as verdades de fato das verdades da razão, mas, ao defender a doutrina leibniziana da analiticidade do juízo (em toda proposição verdadeira, a ideia daquilo que se afirma está contida na ideia daquilo sobre o que se faz a afirmação), atenua ao máximo essa distinção (AUROUX, s/d.).

Mas a análise de Condillac foi vista pelos iluministas alemães como extremamente limitada, como discutimos, na medida em que confere à criatividade e ao sujeito um papel muito reduzido, e foi objeto de duras críticas de Kant.

Ao "renunciar à ambição de explicar o mecanismo do universo" (CASSIRER, 1997, p. 85), pois o cientista "já tem muito que fazer, e tem feito muito, quando se empenha em mostrar as *relações* determinadas que unem seus diversos elementos" (*ibidem*, p. 85), o ideal de conhecimento da natureza deixou de se inspirar no modelo da geometria, como em Descartes, e optou pelo da aritmética. Afinal, "é a teoria dos números a que, segundo Condillac, oferece o exemplo mais claro e mais simples de uma teoria das relações em geral, de uma lógica geral das relações" (*ibidem*, p. 85).

Mas, como é possível que o pensador que pretendeu levar mais longe o empirismo tenha atribuído um papel tão importante à linguagem aritmética, que parece bem distante do empírico? É que “a língua cotidiana não é uma boa língua para dar suporte ao desenvolvimento do conhecimento” (CORRÊA, 2008, p. 45). Para fundamentar a ciência, é necessária “uma língua bem feita” (CONDILLAC, 1979, p. 111),

> na qual a ciência possa se firmar, se sustentar, onde nada seja arbitrário, mas siga rigorosamente o caminho da geração das idéias. Conclui que essa língua bem feita é a álgebra, não apenas para a matemática, mas modelo para todas as ciências (CORRÊA, 2008, p. 45).

Embora a abordagem de Condillac à linguagem tenha contribuído de maneira original para amenizar a dicotomia entre racionalismo empirismo, ela estava ainda distante da semântica do século XIX, se mantendo ainda no quadro da investigação da ordem da geração das ideias e da certeza individual.

2. *Intuição e conceito na filosofia e na matemática de Kant*

2.1 *Introdução*

A filosofia de Immanuel Kant se estrutura em duas fases: na primeira, denominada *pré-crítica*, estudou principalmente a física e a metafísica, essa última dentro dos cânones racionalistas de Leibniz e Wolff; e a *crítica*, inaugurada a partir da redação da dissertação, redigida em latim, *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis* (1770), que dá início aos estudos "sobre os limites da sensibilidade e da razão" (2012, p. 35) e que compreenderá "uma crítica, uma disciplina, um cânone e uma arquitectónica da razão pura", conforme o próprio Kant explicou em carta a Marcus Herz (1747-1803),[39] redigida em 1772 (2012).

Em 1781 foi publicada a primeira edição da *Crítica da Razão Pura*, que retoma as principais características críticas da dissertação de 1770; em 1783, Kant escreveu os *Prolegômenos a toda metafísica futura* procurando tornar mais claras e populares as ideias formuladas na *Crítica* e responder a alguns críticos; em 1787 publicou a segunda edição da *Crítica*, que continha modificações importantes e formulações que respondiam a algumas das críticas que haviam sido feitas à primeira edição.

Alguns intérpretes consideram a *Crítica da Razão Pura* como sua mais importante obra, enquanto outros apresentam a *Crítica da Razão Prática* (1788) e a *Crítica das Faculdades do Juízo* (1791) como complementares da primeira no sentido de dar um acabamento à filosofia kantiana. Nessa tese interessa-nos o estudo da *Crítica da Razão Pura*, pois é nela que Kant realiza a virada copernicana que resulta na transformação da noção de conceito e na modificação do lugar da intuição no conhecimento.

A introdução à segunda edição expressa com clareza o sentido da obra, em que Kant afirma que, já entre os gregos, a matemática e a lógica tinham tomado a "via segura" (CRP, B/VII) da ciência, e no século XVII a física começara a trilhar a mesma via, alcançando a perfeição na *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687)[40] de Newton. Conclui que se deve, para elevar a metafísica a um estatuto científico que

[39] Filósofo berlinense que foi discípulo de Kant e participou da apresentação da *Dissertação Inaugural* de Kant à Universidade de Königsberg.

[40] Princípios matemáticos da filosofia da natureza.

lhe conferisse “rigor indesmentível” (MORUJÃO, 2001, p. VIII),[41] buscar conduzí-la pelo mesmo “seguro caminho” (CRP, BXIV) que levaram a geometria euclidiana e a mecânica newtoniana a superar a “multiplicidade de opiniões antagônicas” (MORUJÃO, 2001, p. VIII), ou verificar se isso é impossível, e assim eliminar as “pretensões infundadas” (KANT, CrP, A 209/B 255) da razão.

Os filósofos racionalistas afirmavam que para tornar a metafísica científica era necessário proceder nela da mesma maneira como procedem os matemáticos, ou seja, por meio da análise dos seus conceitos baseada nos princípios de identidade e da contradição. Kant discorda desses filósofos, chamados por ele de dogmáticos, porque não concorda que seja possível proceder na metafísica como na matemática, nem que os matemáticos procedam analiticamente.

Neste capítulo mostrei como a obra de Kant parte da questão cética que Hume havia dirigido à filosofia e ao conhecimento científico e a transforma, incorporando a noção de que o conhecimento não é redutível ao conceito; as diferentes distinções kantianas entre proposições analíticas e proposições sintéticas; de que forma Kant pensava a relação entre intuição e conceito na matemática; a grande transformação que Kant realizou na noção de conceito; e como, das diferentes leituras da obra de Kant, surgiram as correntes filosóficas contemporâneas de Bolzano, o idealismo e o psicologismo.

Apesar de todas as críticas que fez ao racionalismo, o empirismo do século XVIII, antes de Hume, não havia rompido com a concepção de que somente por meio da conceitualização ou abstração das particularidades seria possível explicar os fatos. Afinal, os empiristas não chegaram a questionar a capacidade da razão de formular leis necessárias e universais a respeito do conhecimento empírico, nem a teoria tradicional do conceito como passível de ser obtido por abstração de particularidades. Sua diferença com relação aos racionalistas se dava, sobretudo, na afirmação de que se deveria partir dos fatos, e não das ideias, para realizar a conceitualização.

Os empiristas afirmaram que a noção racionalista de ideias inatas não tinha sentido, e que os estados de consciência, as representações e o conhecimento subjetivos

[41] A crítica da razão pura é, assim, “a necessária preparação para o estabelecimento de uma metafísica sólida fundada rigorosamente como ciência, que há-de desenvolver-se de maneira necessariamente dogmática e estritamente sistemática, por conseguinte escolástica (e não popular)” (CRP, B XXXV/XXXVI).

provêm, em última análise, sempre da experiência. Assim, todo o conhecimento científico dependia da generalização por meio da indução, ou seja, da passagem do particular para o geral, dos fatos às ideias e conceitos gerais.

No entanto, levado até suas últimas consequências na obra de Hume, o empirismo pôs em xeque aquilo que ele acreditava ser sua mais importante conquista contra o racionalismo, ao afirmar que o conhecimento empírico não tem nada de absoluto, na medida em que não há nada que garanta que os fenômenos da natureza continuarão ocorrendo no futuro como no passado, e nenhum número de observações empíricas é suficiente para que se possa fazer uma afirmação sobre leis universais e necessárias.

Para Hume, ultrapassa-se o que é dado quando são feitas afirmações gerais sobre questões empíricas,[42] afirmações conceituais sobre algo que não é conceitual. Sempre que refiramos aos fatos utilizando termos como *necessariamente*, *sempre* ou *amanhã*, fazemos afirmações que não são conceituais, portanto não podem ser provadas sem o recurso à experiência (DELEUZE, 1987, p. 19). Afinal, o fato de que tenhamos visto mil vezes o sol nascer não torna a afirmação de que "*o sol não nascerá amanhã...* menos inteligível nem implica mais contradição que a afirmação de *que ele nascerá*" (HUME, 2004, original de 1751, p. 54). Somente com base na experiência, e não na razão, é possível conferir a veracidade de tais afirmações, e assim, seu estatuto não é o das verdades *necessárias e universais*, como acreditaram tanto os racionalistas quanto os empiristas.

Hume levou, então, o empirismo ao relativismo e ao ceticismo. Afirmou que a noção de conceitos ou ideias gerais tem ainda outra dificuldade insuperável, situada no plano da psicologia: tais conceitos, além de dependerem de um postulado metafísico ou religioso, não são passíveis de serem representados pela consciência humana. As noções de substância e de causa e efeito, então, não poderiam ser tratadas como analíticas, devendo ser substituídas, respectivamente, pelas noções de sujeito *psicológico* e de *hábito*.

Mas se a relação de causa e efeito – um dos pilares do pensamento do século XVIII, responsável pela fundamentação das ciências e da filosofia iluminista – não se fundamenta em princípios universais e necessários, então ela deve ser considerada

[42] Hume (2004, p. 53) as chamava de "questões de fato".

relativa ao sujeito psicológico, como algo meramente subjetivo. Mas isso seria reconhecer que os resultados obtidos por meio dela são arbitrários, frutos do hábito, e não do raciocínio rigoroso, e desta forma a pretensão da filosofia de tornar-se ciência, com métodos analíticos e de maneira semelhante à matemática, estaria irremediavelmente comprometida.

A crítica cética de Hume ao racionalismo e ao método científico levou Kant a inverter a questão da representação, inversão que se chamou de revolução copernicana da filosofia. Ele concordou com Hume em que a verdade do princípio "tudo o que acontece tem uma causa" (CRP, A 10/B 14), "como de resto a validade objetiva do conceito de uma causa eficiente em geral não repousa sobre nenhuma inteligência clara, isto é, nenhum conhecimento *a priori*" (CRP, A 760 B 788), e que tal princípio não é analítico, pois não é possível afirmar que o conceito de causa pertença ao conceito daquilo que acontece. Mas afirmou que este princípio pode ser provado "no campo" da experiência (CRP, A737 B765).

Concordou também com a argumentação cética de que não existem objetos ou causas externas ao sujeito – empíricas, ou conceituais – capazes de tornar o conhecimento universal e necessário, e que os empiristas têm razão contra os cartesianos no aspecto de que "nossas representações... são sempre particulares e sempre imersas no tempo da consciência (no 'sentido interno', como diz Kant)" (FERRY, 2009, p. 49). Não discordou da demonstração humeana de que o conhecimento não pode ser derivado da mera abstração de propriedades empíricas, mas afirmou que o sujeito pode formar conceitos universais e necessários construindo-os por meio de uma complexa relação do sujeito com o objeto, como veremos adiante.

Mas se opôs veementemente à conclusão de Hume de que "todas as pretensões da razão em geral que visam ultrapassar o empírico" não passavam de vaidade (CRP, A 760/ B 788). Embora tenha reconhecido que fazer afirmações universais e necessárias com base em fatos particulares fosse uma superação arbitrária dos dados[43] realizada pela razão, e que qualquer forma de conhecimento implica princípios subjetivos, Kant afirmou uma importante divergência com Hume ao conceber que "a subjectividade dos

[43] É esta passagem que Kant, na esteira de Hume, chamou de "universalidade empírica" e classificou como "uma extensão arbitrária da validade" (CRP, B4).

princípios não é uma subjectividade empírica ou psicológica, mas uma subjectividade 'transcendental'" (DELEUZE, 1987, p. 20),[44] pois

> o que se nos apresenta de maneira a formar uma Natureza deve necessariamente obedecer a princípios do mesmo gênero (mais ainda, *aos mesmos princípios*) que aqueles que regulam o curso das nossas representações. São os mesmos princípios que devem dar conta dos nossos procedimentos subjectivos e também do facto de o dado se submeter aos nossos procedimentos (DELEUZE, 1987, p. 20-21).

Kant buscou generalizar a apreciação que Hume fez do conceito de causa e efeito para toda a Metafísica, ao afirmar que seus conceitos eram frutos do mal costume da razão de tentar obter conhecimento novo por meio da análise dos conceitos. É nesse contexto que ele elabora sua definição *entre juízos sintéticos e analíticos.*

2.2 A distinção *entre juízos sintéticos e analíticos*

A distinção *entre juízos sintéticos e analíticos* tem uma história que remonta àquela feita pelos gregos entre conhecimentos derivados da experiência e conhecimentos obtidos somente por meios racionais, chamados pelos latinos, respectivamente, de conhecimentos *a posteriori* e *a priori*. Hume (2004, p. 53) utilizava os termos "*relações de ideias*" e "*questões de fato*" para distinção semelhante. Mas antes de Kant os filósofos utilizavam apenas as noções de *métodos* analítico e sintético, e ele foi o primeiro a definir *proposições* e *juízos* com estas qualidades.

Vejamos a distinção entre juízos analíticos e sintéticos tal como ela aparece em duas passagens da *Crítica* (1781 e 1787), nos *Prolegômenos* (1783) e na *Lógica* (1800), bem como alguns comentários de Kant a seu respeito.

Eis a primeira definição contida na *Crítica*:

---

[44] "Transcendental designa o princípio em virtude do qual a experiência é necessariamente submetida às nossas representações *a priori*... 'Transcendental' qualifica o princípio de uma submissão necessária dos dados da experiência às representações *a priori* e, correlativamente, de uma aplicação necessária das representações *a priori* à experiência..." (DELEUZE, 1987, p. 21).

> em todos os juízos, nos quais se pensa a relação entre um sujeito e um predicado (apenas considero os juízos afirmativos, porque é fácil depois a aplicação aos negativos), esta relação é possível de dois modos. Ou o predicado B pertence ao sujeito A como algo que está contido (implicitamente) nesse conceito A, ou B está totalmente fora do conceito A, embora em ligação com ele. No primeiro caso chamo analítico ao juízo, no segundo, sintético (CRP, A/67 B/10)

E Kant prossegue, explicando:

> Os primeiros poderiam igualmente denominar-se juízos explicativos; os segundos, juízos extensivos; porque naqueles o predicado nada acrescenta ao conceito do sujeito e apenas pela análise o decompõe nos conceitos parciais, que já nele estavam pensados (embora confusamente); ao passo que os outros juízos (os juízos sintéticos, nota minha), pelo contrário, acrescentam ao conceito de sujeito um predicado que nele não estava pensado e dele não podia ser extraído por qualquer decomposição (CRP, A/7 B/11).

Eis a segunda definição na *Crítica*:

> Se o juízo é analítico, quer seja negativo ou afirmativo, a sua verdade deverá sempre poder ser suficientemente reconhecida pelo princípio de contradição... Temos portanto que admitir que o princípio de contradição é o princípio universal e plenamente suficiente de todo o conhecimento analítico ; mas a sua autoridade e utilidade não vão mais longe como critério suficiente de verdade. (CRP, A/151 B/190-191).

Nos Prolegômenos, a definição aparece ainda de maneira semelhante:

> ...tenham os juízos a origem que tiverem ou se apresentem em sua forma lógica como quiserem, existe uma diferença entre eles pelo seu conteúdo, que faz com que sejam simplesmente explicativos e nada acrescentem ao conteúdo do conhecimento, ou extensivos e ampliem o conhecimento dado; os primeiros podem ser denominados juízos analíticos e os segundos sintéticos. Os juízos analíticos não afirmam no predicado nada que já não tenha sido pensado no conceito do sujeito, embora com menos clareza e consciência... Todos os juízos analíticos repousam fundamentalmente sobre o princípio de contradição e são por sua natureza conhecimentos a priori... Pois, tendo o predicado de um juízo analítico afirmativo sido pensado já no conceito do sujeito, não pode por ele ser negado sem que haja uma contradição... (Prolegômenos, §2).

Na *Lógica*, Kant afirma que

> proposições *analíticas* chamam-se aquelas cuja certeza repousa sobre a *identidade* dos conceitos (do predicado com a noção do sujeito). As proposições cuja verdade não se funda na identidade dos conceitos devem ser denominadas *sintéticas* (Lógica, § 36).

E apresenta algumas de suas propriedades:

> as proposições sintéticas aumentam o conhecimento *materialiter*; as analíticas, apenas *formaliter*. Aquelas contêm *determinações (determinationes)*, estas apenas *predicados lógicos*... Princípios analíticos não são axiomas; pois são discursivos. E princípios sintéticos também só são axiomas quanto são *intuitivos* (Lógica, § 36).[45]

Concebendo, como Descartes, a extensão como parte da definição de corpo, mas o peso não, Kant (CRP, A 7/B 11) afirma que o juízo "todos os corpos são extensos" é analítico, enquanto "todos os corpos são pesados" é sintético. Isso porque, na primeira afirmação, o predicado afirma uma característica que se encontra no sujeito de forma implícita, portanto basta desmembrá-lo, analisá-lo, para se obter o predicado em questão. No segundo juízo, ao contrário, afirma-se no predicado uma característica, o peso, que não estava já contida no sujeito *corpo* da oração como sua definição.

Os juízos analíticos dependem da intensão, da forma de descrever ou definir um conceito, ao passo que os sintéticos dependem da extensão, dos objetos que se encaixam na descrição ou são percebidos por meio da intuição. À luz desta diferenciação, pode-se afirmar que um juízo é analítico quando seu predicado afirma uma característica que é uma representação ou repetição em outras palavras da definição do objeto do conhecimento (sujeito da proposição), e sintético quando não. Nos termos assim explicados, o que torna a afirmação *todos os corpos são extensos* analítica é o fato de que ser extenso é uma característica que corresponde à descrição ou representação

[45] Embora nesta passagem Kant use o termo *Sätze*, que foi traduzido corretamente por *proposições*, o tópico em que as citações se encontram, "§ 36 Proposições analíticas e proposições sintéticas" está contido no capítulo II da "Doutrina Geral dos Elementos", intitulada "Dos Juízos" (*Von den Urtheilen*). Isso mostra que Kant concebeu toda proposição como equivalente a um juízo formulado por um sujeito, ao contrário de Bolzano, que procurou distinguir rigidamente juízos, subjetivos, de proposições, objetivas. Independente da situação, nesta tese, *Urtheil* ou *Urtheilen* foram traduzidos por *juízo* ou *juízos*, e *Sätz, Sätze ou Sätzen* por *proposição, proposições* e *proposições*, respectivamente.

teórica que fazemos dele (sua intensão), enquanto o que torna a afirmação *todos os corpos são pesados* sintética é o fato de que não corresponde a esta representação.

Nesse exemplo aparece claramente a revolução que Kant realizou na noção de conceito: há características do objeto que não são redutíveis à sua definição, ou seja: a extensão de um conceito (as características dos objetos enquanto tais) não coincide com sua intensão (as propriedades que o definem).

Alguns exemplos menos característicos da linguagem filosófica da época de Kant podem contribuir para se compreender a distinção em questão: na frase *esta flor é vermelha*, se está reunindo, por meio da síntese, numa mesma frase, duas coisas distintas, a flor e o vermelho. Ao contrário, na frase *solteiros são não casados*, ocorre a decomposição do conteúdo do sujeito *solteiros* no predicado *não casados*. Ao afirmar o predicado *não casados*, somente se afirma algo que já está implícito na ideia de solteiros; a frase não revela por meio do predicado nada mais do que aquilo que já se encontra no sujeito. Ao mesmo tempo, esta afirmação não pode ser negada sem que haja uma contradição, pois ao se afirmar que *solteiros são casados*, percebe-se, sem necessidade de recorrer à experiência, que o juízo é contraditório e, portanto, falso.

Há, assim, dois critérios para julgar a analiticidade ou não de uma proposição ou juízo: o acréscimo de algum conhecimento ao predicado; e a possibilidade de se obtê-lo por meio do princípio da contradição. Juntando-se a isso a afirmação de Kant de que para haver ampliação do conhecimento é necessário o concurso da intuição, pareceu, para muitos filósofos, matemáticos e lógicos do século XIX, que Kant havia restringido exageradamente o âmbito da reflexão puramente conceitual.[46]

A identificação kantiana de conhecimento *a priori* com, de um lado, "necessidade e rigorosa universalidade" (CRP, B4) e, de outro, com aquilo que é "não empírico"[47] ou em oposição àquilo cuja matéria (*Stoff*) é extraída da experiência (CRP, A 566 B 594, B2), também foi criticada por Bolzano e a filosofia analítica, como se verá no capítulo 3.

Mas foi a introdução do tipo de juízos *sintéticos a priori* na *Crítica* que deu um caráter totalmente novo à noção de síntese. Baseado nesses juízos, Kant chegou a

---

[46] Sua afirmação de que juízos matemáticos são sintéticos, dada sua concepção de síntese, também foi vista como restritiva da reflexão conceitual sobre os fundamentos da matemática.
[47] Cf., por exemplo, todo o trecho de A 712/B 740 até A 714/B 742.

algumas de suas mais importantes conclusões: sua crítica à Metafísica e às provas da existência de Deus; sua nova noção de conceito, que atribui ao conhecimento um caráter eminentemente humano; e sua afirmação da individualidade dos objetos que os conceitos abrangem.

Kant reconheceu que as questões postas pela metafísica, que são "*Deus*, a *liberdade* e a *imortalidade*" (CRP, B7) são "problemas inevitáveis da própria razão pura" (CRP, A763/B791). A tendência a derivar indevidamente a existência de algo por meio da demonstração de que o conceito desta coisa não é contraditório é uma tendência à ilusão que faz parte da natureza da razão, que tende a ver objetividade nessa passagem sem se atentar para o abuso cometido: é a tendência da razão a proceder, por meio da lógica geral e unicamente por conceitos, do geral até o particular, da possibilidade de um conceito até a existência do objeto que lhe corresponde.

Cabe à metafísica verificar, dentre nossos conhecimentos, quais são frutos dessa tendência natural da razão a extrapolar seus próprios poderes, e quais são frutos do uso legítimo de nossas faculdades do conhecimento.[48] Como o conhecimento metafísico não pode se basear na experiência, ele "deve conter juízos *a priori*" (Prolegômenos, A 25). Mas ele não pode, por outro lado, se basear na análise, porque o conhecimento analítico não reúne as condições para "alargar sinteticamente o conhecimento *a priori*..." (CRP, B 24/25). Assim, a metafísica só pode se basear em juízos sintéticos *a priori* (CRP, B 18).

Kant (CRP, B 19) conclui que "a salvação ou a ruína da metafísica assenta na solução" do problema de saber "como são possíveis os juízos sintéticos *a priori*... ou numa demonstração satisfatória de que não há realmente possibilidade de resolver o que ela pretende ver esclarecido". Para realizar esta investigação, é necessário fazer uma crítica da razão "no seu uso dogmático" (CRP, A 739/B 767). Tal investigação

> é um convite à razão para de novo empreender a mais difícil das suas tarefas, a do conhecimento de si mesma e da constituição de um tribunal que lhe assegure as pretensões legítimas e, em contrapartida, possa condenar-lhe todas as presunções infundadas (CRP, A XI).

[48] Cf., por exemplo, A 851/B 879.

E este tribunal "outra coisa não é que a própria *Crítica da Razão Pura*" (CRP, A XI-XII), que deve ser realizada "*independentemente de toda a experiência"* (CRP, A XII), e buscando encontrar *a "solução* do problema da possibilidade ou impossibilidade de uma metafísica em geral e a determinação tanto das suas fontes como da sua extensão e limites" (CRP, A XII).

A questão de saber como são possíveis os juízos sintéticos *a priori* contém, assim, "o verdadeiro problema da razão pura", o "problema geral da razão pura" (CRP, B 19). Mas, como verificar se realmente existem juízos sintéticos a priori? Kant afirma que Hume rejeitou injustificadamente que existisse alguma forma de conhecimento puro *a priori* que não realizasse a mesma forma de generalização que a Metafísica, e que se ele tivesse investigado adequadamente a matemática, teria compreendido a natureza construtiva, portanto sintética, de suas proposições fundamentais, o que o conduziria a realizar investigação semelhante à empreendida por Kant (CRP, B 4; Prolegômenos, §4). Este inicia sua investigação onde Hume a havia encerrado, afirmando que ninguém questiona a validade do conhecimento matemático e da filosofia natural, e que os princípios destas ciências não são obtidos nem por meio de juízos analíticos, nem são redutíveis à experiência, o que os torna sintéticos *a priori*.

Assim, a questão de saber se a busca por conhecimento metafísico deveria ou não ser abandonada se reduz à verificação de como é possível que existam juízos sintéticos *a priori*. E como a resposta a esta questão exige que, primeiramente, se analise como são possíveis os conhecimentos das ciências que ninguém questiona que produz conhecimentos verdadeiros e cujos juízos são sintéticos *a priori*, conclui-se que qualquer resposta sobre a possibilidade do conhecimento metafísico depende da resposta às questões: "Como é possível a matemática pura? Como é possível a física pura?" (CRP, B 20).[49]

[49] Nos Prolegômenos, estas mesmas questões foram retomadas, e Kant explica sua importância com maior clareza que na *Crítica*: "Acontece, porém, felizmente que, embora não possamos supor que a metafísica enquanto ciência é *real*, é-nos, no entanto, possível afirmar com confiança que certos conhecimentos sintéticos puros *a priori* são reais e dados, a saber, a *matemática pura* e a *física pura;* com efeito, estas duas ciências contêm proposições reconhecidas, de modo geral, como verdadeiras se bem que independentes da experiência, quer pela simples razão com uma certeza apodíctica, quer pelo consentimento universal fundado na experiência. Possuímos, pois, pelo menos algum conhecimento sintético *a priori indiscutido;* e não devemos interrogar-nos se ele é possível (pois é real), mas apenas *como ele é possível,* a fim de poder derivar do princípio da possibilidade do conhecimento dado também a possibilidade de todos os outros (Prolegômenos, §4).

Kant parte da inquestionabilidade – a seu ver – de que a matemática e a física contêm conhecimentos verdadeiros, para descobrir quais são seus procedimentos e, ao final, ver se se aplica a mesma forma de raciocínio à metafísica. Ao final da *Crítica*, conclui que o método da matemática e da física não pode ser aplicado à metafísica e que, portanto, a correção e veracidade dos conhecimentos matemáticos não são garantia de que a metafísica possa obter conhecimentos corretos e verdadeiros.[50] No entanto, a concepção desenvolvida por Kant de objetos, axiomas e juízos matemáticos desempenha um papel importante para o desenvolvimento de toda a argumentação feita na *Crítica*, e foi determinante da transformação que o filósofo realizou da noção de conceito.

Ao invés de procurar novas respostas à questão da representação, Kant aceitou como um dado a existência de uma correspondência entre o objeto e a representação do sujeito, e se dedicou a investigar o que é que a torna possível, voltando-se então para a investigação da *relação* entre a representação do sujeito e a estrutura cognoscente que a torna possível. Em outras palavras, ao invés de tentar determinar a universalidade e a necessidade do conhecimento por meio de uma explicação que recorra a algo externo ao sujeito, Kant tentou explicar o que as representações que um sujeito faz de um fenômeno[51] têm em comum com sua estrutura interna, que garante que se faça uma afirmação necessária e universal a seu respeito; o que garante a universalidade e a necessidade de um conhecimento apreendido por um sujeito particular e contingente. A explicação da solução kantiana envolve sua original filosofia da matemática, tratada no próximo subcapítulo.

"A partir de então, o subjetivo e o objetivo deixam de se opor como o 'para nós' e 'o em si'" (FERRY, 2009, p. 46), como se opunham nos sistemas racionalistas. Desta forma, Kant realizou uma interiorização no sujeito da relação que os racionalistas concebiam como sendo entre o sujeito e o objeto. Na *Crítica*, esta relação "converte-se no problema de uma relação entre faculdades subjectivas que diferem em natureza (sensibilidade receptiva e entendimento activo)" (DELEUZE, 1987, p. 22).

---

[50] Kant chega a concluir que é impossível qualquer demonstração racional das questões metafísicas, e procurar sua justificativa em razões práticas e pragmáticas.

[51] Fenômeno este que não deve ser confundido com o objeto em si, pois é a forma como o objeto aparece para o sujeito cognoscente.

Kant afirma que para o conhecimento finito, característico do homem, o que existe é o que se conhece, e qualquer discurso que não for passível de ser esquematizado, como o discurso metafísico tradicional, é ilusório, na medida em que não pode ser representado pela consciência humana. Julgou que era necessário, então, explicar como é possível que as representações que o sujeito faz do objeto se apliquem de maneira necessária à experiência, embora dela não derivem. Para isso, dividiu nosso conhecimento em duas fontes:

> O nosso conhecimento provém de duas fontes fundamentais do espírito, das quais a primeira consiste em receber as representações (a receptividade das impressões) e a segunda é a capacidade de conhecer um objeto mediante estas representações (espontaneidade dos conceitos); pela primeira é-nos *dado* um objeto; pela segunda *é pensado* em relação com aquela representação (como simples determinação do espírito). Intuição e conceitos constituem, pois, os elementos de todo o nosso conhecimento, de tal modo que nem conceitos sem intuição que de qualquer modo lhes corresponda, nem uma intuição sem conceitos podem dar um conhecimento (Kant, CRP, B 74).

É por meio da intuição, "representação particular" (Lógica, I, 1, 1), que se apreende a existência individual, e não por meio do conceito (CRP, B 620), que é "representação universal... daquilo que é comum a diversos objetos" (Lógica, I, 1, 1). A intuição, por estar sempre ligada à sensibilidade, se situa no espaço e no tempo;[52] e, por ser sempre sensível, nunca é conceitual. Com efeito, o espaço e o tempo são os âmbitos em que necessariamente toda intuição particular, toda percepção empírica, toda existência concreta e singular tomam lugar (FERRY, 2009, p. 27). E é por esta razão que Kant chama as noções de espaço e de tempo de "intuições puras" (CRP, A 42/ B 6) ou "formas da intuição sensível" (CRP, B 160), pois elas precedem toda possibilidade de existência. Por isso, na *Estética Transcendental,*[53] a teoria da sensibilidade assume a forma de uma análise das noções de espaço e de tempo. O sujeito cognoscente tem acesso a estas duas fontes do conhecimento por meio da sensibilidade e do entendimento, assim definidos por Kant:

[52] Para Kant, quando se elimina de um conhecimento toda intuição empírica, restam ainda as noções de espaço e de tempo "que, por conseguinte, nunca podem ser eliminadas" (Prolegômenos, § 10).
[53] Tópico da *Crítica.*

> Se chamarmos *sensibilidade* à *receptividade* do nosso espírito em receber representações na medida em que de algum modo é afetado, o *entendimento* é, em contrapartida, a capacidade de produzir representações ou a *espontaneidade* do conhecimento. Pelas condições da nossa natureza a intuição nunca pode ser senão *sensível*, isto é, contém apenas a maneira pela qual somos afetados pelos objetos, ao passo que o entendimento é a capacidade de *pensar* o objeto da intuição sensível. Nenhuma destas qualidades tem primazia sobre a outra. Sem a sensibilidade, nenhum objeto nos seria dado; sem o entendimento, nenhum seria pensado. Pensamentos sem conteúdo são vazios; intuições sem conceitos são cegas. Pelo que é tão necessário tornar sensíveis os conceitos (isto é, acrescentar-lhes o objeto na intuição) como tornar compreensíveis as intuições (isto é, submetê-las aos conceitos). Estas duas capacidades ou faculdades não podem permutar as suas funções... Eis porque distinguimos a ciência das regras da sensibilidade em geral, que é a estética, da ciência das regras do entendimento, que é a lógica (CRP, A 51-52/ B 75-76).

A argumentação kantiana contra as provas racionalistas da existência de Deus é importante para compreender como a dicotomia entre métodos e objetos foi transformada em sua filosofia da matemática, bem como sua nova concepção de conceito e sua crítica à lógica, pois essa argumentação fundamenta a concepção de que é necessário distinguir rigorosamente a possibilidade lógica da existência de um objeto, de um lado, da sua existência real, de outro. Isso implica em que a descrição ou intensão de um conceito não tem necessariamente uma correspondência na extensão, ou seja, não implica na existência de objetos. Foi com base nesta argumentação que Kant afirmou a necessidade das formas de intuição, espaço e tempo, para a aquisição de conhecimento matemático ou físico, e da intuição empírica – além, também, do espaço e do tempo – para a afirmação de existência de objetos de outras ciências.

Segundo o argumento da prova ontológica que Descartes fez da existência de Deus, seria possível fazer tal demonstração procedendo analiticamente com base no conceito de Deus. Ele definiu um ser supremo perfeito, afirmou que a existência faz parte da perfeição, e concluiu que tal ser, que é Deus, existe necessariamente (1983, original de 1641, quinta meditação). Além desta prova, Descartes ofereceu outra, deduzida do *cogito*, em que afirmava que, se a ideia de infinito está inscrita no sujeito, a causa objetiva desta ideia deve ter um grau maior de realidade do que ela mesma; e como o sujeito tem em si a ideia de Deus como um ser que possui todos os predicados em grau infinito,e a infinitude é o predicado de todos os predicados de Deus, a ideia que representa no sujeito o infinito é a ideia de Deus.

As duas provas já haviam sido criticadas por Leibniz (2004, p. 439-440),[54] que deu sua própria demonstração da existência de Deus por meio do princípio da harmonia preestabelecida. De sua parte, Wolff demonstrou o princípio da harmonia preestabelecida por meio do princípio da não contradição. No que segue, será mostrada a crítica de Kant à prova ontológica e à noção de que algo possa ter sua existência provada por meio do princípio da contradição.[55]

Para Kant, a afirmação cartesiana de que não é possível retirar os atributos de existência de um conceito possível de um ser perfeitíssimo é mera tautologia: é como supor que, *dado um triângulo, então, ele tem três lados*; mas se eu não *dou* um triângulo, ou seja, se não postulo a existência do triângulo, então não há triângulo, nem três lados (CRP, A 594/B 622). "O mesmo se passa com o conceito de um ser absolutamente necessário. Se suprimis a existência, suprimis a própria coisa com todos os seus predicados; de onde poderia vir a contradição?" (CRP, A 594-595/B 622-623).

Por outro lado, é contraditório "introduzir no conceito de uma coisa, que vos propunheis pensar apenas quanto à possibilidade (ou seja, hipoteticamente, nota minha), o conceito da sua existência" (CRP, A 597/B 625). Assim, a existência de Deus não pode ser provada apenas por meio da demonstração da contradição lógica de sua não existência, pois

> o conceito é sempre possível quando não é contraditório... simplesmente, não pode deixar de ser um conceito vazio, se a realidade objectiva da síntese, pela qual o conceito é produzido, não for demonstrada em particular (CRP, A 596/B 624).

O princípio da contradição só poderia, assim, ser aplicado em termos de existência a algo que já se soubesse anteriormente que existe.

> Se, por conseguinte, penso um ser como realidade suprema (sem defeito), mantém-se sempre o problema de saber se existe ou não. Porque, embora nada falte ao meu conceito do conteúdo real possível de uma coisa em geral, falta ainda algo na relação com todo o meu

[54] Esta obra foi terminada em 1704, mas impressa pela primeira vez em 1765, após a morte de Leibniz.

[55] Kant refutou todas as provas conhecidas da existência de Deus após agrupá-las em três tipos: a ontológica, a cosmológica e a físico-teológica. Mas nesta tese mostrei apenas o que era necessário para a compreensão da separação kantiana entre possibilidade lógica e existência.

> estado de pensamento, a saber, que o conhecimento desse objeto também seja possível *a posteriori* (CRP, A 600/ B 628).

Ou seja: a proposição *o sol nascerá amanhã* não é analítica, mas pode ser comprovada no dia seguinte por meio de experiência universal. No caso da existência de Deus, por princípio, não há experiência universalmente possível de se comprovar.

Kant concluiu com uma afirmação sobre o verbo *ser* que tornou-se determinante de sua crítica da lógica formal: "toda proposição de existência é sintética" (A 598/B 626), pois "a lógica abstrai de todo o conteúdo; mas a determinação é um predicado que excede o conceito do sujeito e o amplia. Não deve pois estar nele contida" (A 598/B 626). O verbo *ser*, ao contrário, "não é, evidentemente, um predicado real" (A 598/B 626), ou seja, não determina a existência de coisa alguma. Em outras palavras: o predicado lógico é analítico, pois abstrai de todo conteúdo, enquanto o predicado real, por ser ampliativo, é sintético. Donde se conclui que a proposição *Deus é onipotente* nada afirma a respeito da existência de Deus.

Assim, a existência não é dedutível nem por meio de conceitos, nem de fatos isolados, pois "a nossa consciência de toda a existência (quer seja imediatamente proveniente da percepção ou de raciocínios que ligam algo à percepção) pertence inteira e totalmente à unidade da experiência" (CRP, A 601 B 629). Portanto, "existe algo fora do conceito que é irredutível a ele, que é da ordem da sensibilidade, daquilo que apreendemos pela intuição..." (FERRY, 2009, p. 28).

Dito de outra forma: o que importa para determinar a existência de algo que corresponda a um conceito não é a mera possibilidade de formá-lo em nossa imaginação, e sim a possibilidade de o sujeito conhecê-lo por meio da intuição, seja por meio de sua construção com base nas nossas faculdades sensíveis, como o conhecimento matemático, ou pela possibilidade de que se comprove esta existência de maneira *a posteriori*. Assim, Kant mostrou que "não há um caminho direto da linguagem para a realidade objetiva" (OTTE, 2006, p. 54).

A invalidação das provas da existência de Deus também repôs o problema da representação e os próprios fundamentos do saber da época clássica, o que teve um profundo impacto não apenas na metafísica e na teologia, mas também na lógica e na fundamentação da matemática e da ciência moderna. Afinal, Deus era a garantia de uma estrita correspondência entre os pensamentos e as representações claras e distintas, de um lado, e a realidade externa, do outro. Desta forma, a questão que ocupava o lugar central da filosofia racionalista, saber se nossas representações dos objetos correspondem aos objetos em si, fora da representação, tornou-se insolúvel, pois “nunca posso, por definição, saber o que é o objeto em si fora do olhar que lanço sobre ele” (FERRY, 2009, p. 42).

> Por definição, o objeto que considero é sempre um objeto para mim, um objeto de minha representação, e, para saber o que esse objeto é em si, seria necessário que eu pudesse, por assim dizer, ‘sair’ de minha consciência para ir compará-lo com o objeto para mim – o que, logicamente, é impossível por essência (FERRY, 2009, p. 42).

Ao classificar determinadas áreas do conhecimento como portadoras de juízos sintéticos *a priori*, e ao afirmar que nenhum conhecimento novo é possível de ser obtido procedendo somente por meio da abstração, Kant formulou uma das questões fundamentais da história da filosofia, a questão do estatuto do não conceitual, o que remete à afirmação da existência de um conhecimento propriamente humano, um conhecimento construído pelo homem.

Mas, como acreditava que a busca de respostas para as questões metafísicas seria inerente à razão humana, Kant afirmou que restaria ainda à metafísica uma função reguladora, de prevenção de erros, comparável à do

> *ofício de censor que assegura a ordem pública, a concórdia e o bom estado da república científica* e impede os seus trabalhos ousados e fecundos de se desviarem do fim principal, a felicidade universal (CRP, A 851 /B 879, grifo meu).

Este uso regulador consistiria em

> dirigir o entendimento para um certo fim, onde convergem num ponto as linhas diretivas de todas as suas regras e que, embora seja apenas uma idéia (*focus* imaginarius), isto é, um ponto de onde não partem na realidade os conceitos do entendimento, porquanto fica totalmente fora dos limites da experiência possível, serve todavia para lhes conferir a maior unidade e, simultaneamente, a maior extensão (CRP, A 644/ B 672).

Kant conclui que qualquer discurso sobre o entendimento divino, de um entendimento arquetípico, é ininteligível para nós, pois

> o ponto de vista da finitude não poderia ser relativizado em relação a um entendimento divino infinito... Por conseguinte, a característica principal do conhecimento humano, o fato de ele estar sempre ligado à sensibilidade, à intuição, tampouco poderia ser relativizada e, como tal, desvalorizada (FERRY, 2009, p. 34-35).

2.3 Intuição e conceito na filosofia da matemática kantiana

Kant foi o primeiro a afirmar que a veracidade dos resultados da matemática era consequência do ato de construir na intuição um conceito, que o processo de construção do desenho seria garantia de correção de uma demonstração. Embora utilizassem com frequência figuras geométricas em suas demonstrações, os matemáticos racionalistas procuravam justificar seus resultados com base em conceitos, e não em desenhos ou diagramas, considerados como particularidades. A intuição a que se referem os matemáticos racionalistas é a intuição intelectual, e a evidência é evidência racional. Leibniz é claro:

> não concordo que na matemática as *demonstrações particulares* sobre a figura que se traça forneçam esta certeza geral... não são as figuras que fornecem a prova entre os geômetras, ainda que o estilo *eclético*[56] o faça crer. A força da demonstração independe da figura traçada, que só existe para facilitar a inteligência do que se quer dizer e fixar a atenção. São as proposições universais, ou seja, as definições, os axiomas, e os teoremas já demonstrados que perfazem o raciocínio, e o sustentariam em caso de faltar o desenho (LEIBNIZ, 2004, p. 356-357).

Para ele, toda proposição matemática expressa uma identidade, todo passo numa demonstração depende da *Lei da Contradição*, e mesmo as proposições da geometria se assentam em princípios gerais da lógica, e não em evidências singulares fornecidas pelos diagramas geométricos (SHABEL, 2007, p. 95-96). No mesmo sentido, na

[56] "Diz-se de uma forma de demonstração que consiste em apresentar uma verdade geral, ilustrando-a à base de um exemplo particular ou à base de uma figura particular" (LEIBNIZ, 2004, p. 357).

filosofia da matemática de Wolff, a análise lógica rigorosa dos conceitos e proposições matemáticos era considerada como suficiente para garantir a veracidade das afirmações. Mendelssohn também "concebeu a evidência diagramática como sendo redutível à evidência lógica" (SHABEL, 2007, p. 96),

> apesar do uso de diagramas nas provas matemáticas de seu próprio trabalho, e de ter concebido cada passa de uma demonstração matemática como sendo baseado em análise conceitual e em inferência silogística (*ibidem,* p. 96).

A transformação da filosofia kantiana em filosofia crítica repercutiu também na matemática, ao fazer com que sua forma de conceber a matemática oscilasse no interior da dicotomia entre definir a matemática por seus métodos, ou por seus objetos.

Em seu escrito pré-crítico *Investigação sobre a evidência dos princípios da teologia natural e da moral*, de 1764, Kant afirma que a matemática se baseia em definições arbitrárias (ICB, Primeira Investigação, §1) e, portanto, é sintética, e que a metafísica ainda precisa, para também poder proceder sinteticamente, ter seus conceitos "distinta e minuciosamente entendidos" (ICB, Segunda Investigação).

Ao conceber que a matemática não tem objetos fixos, mas definidos arbitrariamente, Kant deixou de lado questões relativas à natureza ou à essência dos números; somada a isso a afirmação de que a aritmética opera com sinais "segundo regras fáceis e seguras" (ICB, Primeira Investigação, §2), e de que os conceitos geométricos devem ser definidos de forma que sejam operacionalmente úteis (ICB, Primeira Investigação, §1), chega-se a uma visão da aritmética e da geometria caracterizada por seus métodos, e não por seus objetos: uma concepção mais operativa e menos essencial ou objectual, mais intensional do que extensional, de maneira semelhante à concepção axiomática da matemática que se formou nos séculos XIX e XX.

Somente após ter compreendido, pela leitura de Hume, que mesmo as relações causais não são analíticas, ou seja, que em todas as relações deve haver alguma intuição, Kant mudou sua concepção de filosofia, de física e de matemática, passando a conceber, na *Crítica*, a física também como conhecimento sintético *a priori*, e a matemática não mais como uma ciência baseada em definições arbitrárias, mas com conteúdo e objetos próprios, e por isso não redutível a conceitos, ao contrário da lógica. Diferentemente da lógica, a matemática estava, então, "apta a desenvolver seu método sintético particular, que a tornou apta para fazer progresso cognitivo real" (OTTE, 2006, p. 53), e seu papel no período crítico é ilustrativo da concepção kantiana de conhecimento como

> uma atividade de construção dos objetos ou das leis objetivas (científicas). Ele não é mais uma representação passiva, e sim um trabalho de associação, de conexão ou de síntese, um 'colocar junto' (*Begreifen*) (FERRY, 2009, p. 56).

Outras questões, então, são postas. Como é possível que conceitos universais e necessários possam ser representados pela consciência finita, particular e temporal, que é a do sujeito, sem perder sua validade universal e necessária? Como é possível fazer afirmações que valham para qualquer tempo e espaço, reconhecendo que o tempo e o espaço do sujeito cognoscente são limitados? Ou ainda: "como uma intuição particular pode representar todas as intuições possíveis que se subsumem ao mesmo conceito?" (SHABEL, 2006, p. 109).

"A ideia fundamental do que Kant denomina a sua 'revolução coperniciana' consiste" (DELEUZE, 1987, p. 21) em "substituir a ideia de uma harmonia entre o sujeito e o objeto (acordo final) pelo princípio de uma submissão necessária do objecto ao sujeito" (*ibidem*, p. 21). Essa submissão, ou subsunção, é o meio que o sujeito tem de formar conceitos, o que só é possível pelo ato de construção de esquemas, *métodos* gerais de construção dos objetos. Isso significa que são as regras ou os procedimentos em si de construção dos diagramas que são universais e necessários; a figura desenhada, por si só, é particular. É o esquema, o método de construção, que permite que um conceito possa ser temporalizado e particularizado sem perder seu caráter universal e necessário.

> C*onstruir* um conceito significa apresentar *a priori* a intuição que lhe corresponde. Para a construção de um conceito exige-se, portanto, uma intuição *não empírica* que, consequentemente, como intuição é um objeto *singular*, mas como construção de um conceito (de uma representação geral), nem por isso deve deixar de exprimir qualquer coisa que valha universalmente na representação, para todas as intuições possíveis que pertencem ao mesmo conceito. Assim, construo um triângulo, apresentando o objeto correspondente a um conceito, seja pela simples imaginação na intuição pura, seja, de acordo com esta, sobre o papel, na intuição empírica, mas em ambos os casos completamente *a priori*, sem ter pedido o modelo a qualquer

> experiência. A figura individual desenhada é empírica e contudo serve para exprimir o conceito, sem prejuízo da generalidade deste, pois *nesta intuição empírica considera-se apenas o ato de construção do conceito*... o objeto do conceito, a que este individual corresponde apenas como seu esquema, deve ser pensado como universalmente determinado. (CRP, A 713-715/ B 741-743, grifos meus).

Assim, não é o produto, o desenho ou a imaginação, e sim o ato de desenhar ou imaginar, que garante a universalidade e a necessidade do esquema. No exemplo dado, este esquema ou diagrama representa um triângulo geral, o que faz com que as propriedades assim descobertas ou construídas valham para todos os triângulos possíveis, mesmo para os que tenham características diferentes deste.

O que garante a generalidade das representações matemáticas é o fato de que

> tanto os conceitos matemáticos quanto as intuições puras que correspondem a estes conceitos dependem de características universais e necessárias de nossas faculdades cognitivas puras da sensibilidade, da imaginação e da compreensão (SHABEL, p. 112-113).

E que

> as 'condições gerais de construção' que determinam as características de nossa intuição pura de um triângulo incluem as características de nossa intuição pura junto com as características gerais de nossos conceitos sensíveis, neste caso, a triangularidade, como dada pela definição de triângulo (*idem*, 2006, p. 110).

Kant exemplifica com a aritmética e a geometria: para realizar uma operação aritmética simples, como $7 + 5 = 12$, não basta analisar, como se faz na filosofia, os conceitos de *7*, de *5* e de adição; é necessário um acréscimo, que é fornecido pela construção da soma nos dedos da mão ou no papel, como se faz na geometria (CRP, B 16). Analogamente, na geometria, para provar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º, é necessário estender os segmentos de reta, comparar os ângulos, fazer novas construções, até chegar ao resultado (CRP, A 716/B 744).

> A construção do triângulo, e as construções auxiliares das retas e ângulos adjacentes ao triângulo, fornecem ao geômetra informações que não estavam contidas nos conceitos da proposição a ser provada,

> que os três ângulos internos de um triângulo são iguais a dois ângulos retos... mais ainda, a técnica do geômetra de mostrar a intuição do triângulo e seus ângulos adjacentes torna válida a informação diagramática que é indispensável para a demonstração subsequente (SHABEL, 2006, p. 106).

O ponto chave é que "a prova do geômetra não pode ser feita sem informação sobre as relações entre as regiões espaciais delimitadas pelo triângulo e seus ângulos externos" (SHABEL, 2006, p. 107). E o que mostra que a geometria e a aritmética não podem ser analíticas é "o fato de que suas proposições codificam e descrevem o conteúdo de nossas representações originais *a priori* de espaço e tempo, que são apresentadas na intuição e não somente por meio de conceitos" (*ibidem*, p. 107).

O que torna universal e necessária a demonstração que utilizou um desenho ou diagrama de um triângulo particular é o fato de que o padrão utilizado para sua construção não é tomado da experiência, e sim da "habilidade prévia de construir figuras *a priori* com a imaginação produtiva e, portanto, numa intuição pura do espaço" (*ibidem*, p. 109). Além disso,

> assim como a intuição é pura (e não empírica), a construção não é técnica ou mecânica, mas simbólica, e *é o símbolo que permite mediar e conectar a referência à intuição com a necessária universalidade dos juízos matemáticos* (GIUSTI, 2004, p. 23-24, grifo meu).

Kant demonstra que a matemática e a física são as únicas formas de conhecimento que não são analíticas, mas ainda assim podem mostrar a existência de algo sem recorrer à experiência, pois o fato de que a construção do objeto se fundamente de maneira *a priori* nas condições de possibilidade do conhecimento[57] – ou seja, no espaço e no tempo – garante que a figura construída não seja um fruto arbitrário da imaginação, mesmo que ela não possa ser verificada *a posteriori*.

No caso da matemática e da física, os esquemas têm, ao mesmo tempo, a generalidade do conceito e a particularidade da intuição, pois seus objetos trazem em si as condições e os procedimentos necessários para sua construção. Não há, pois, heterogeneidade entre os conceitos e as intuições que a eles correspondem, o que torna desnecessária a mediação para a construção dos conceitos (SHABEL, 2006, p. 111;

[57] Como diz Giusti (2004, p. 23-24), "na natureza particular da sensibilidade humana".

CRP, A 138/ B 177). Para outras ciências, devido à heterogeneidade entre os conceitos puros do entendimento e as intuições empíricas, para que ocorra a "subsunção *das intuições* nos *conceitos, portanto a aplicação* da categoria aos fenômenos" (CRP, A 137/ B 176), é necessário que haja

> um terceiro termo, que deva ser por um lado, homogêneo à categoria e, por outro, ao fenômeno e que permita a aplicação da primeira ao segundo. Esta representação mediadora deve ser pura (sem nada de empírico) e, todavia, por um lado, *intelectual* e, por outro, *sensível.* Tal é o *esquema transcendental* (CRP, A 177/B 138).[58]

O caráter universal e necessário atribuído à construção faz com que se afirme que a revolução copernicana inaugurou uma questão genética, a busca por saber qual é a origem construtiva do conhecimento. Por outro lado, a centralidade do ato de construção fez com que o pensamento passasse a ser definido "como um trabalho ou como uma atividade, e não mais como uma simples 'visão' (*Ideia*) ou contemplação (*theoria*) do espírito" (FERRY, 2009, p. 47).

Portanto, a matemática contém demonstrações porque ela deriva sua cognição não de conceitos, mas de sua construção; deriva da intuição que é dada *a priori* e que corresponde à aplicação do conceito. E assim as demonstrações matemáticas não procedem somente de conceitos; ao contrário, elas também têm que se apoiar em exemplos ou objetos particulares, embora não empíricos. Mesmo numa prova dedutiva deve-se argumentar, por exemplo, que a reta A é paralela à reta B, ou a intercepta no ponto C, etc. Kant fez grandes esforços para chamar a atenção para estes aspectos das demonstrações. Hintikka assim explica o legado de Kant:

> A caracterização da matemática de Kant como baseada no uso de construções deve ser tomada como significando somente que, na matemática, a todo tempo se introduzem representantes particulares de conceitos gerais e usando argumentos em termos de tais representantes particulares, argumentos que não poderiam ser usados somente pelos significados de conceitos gerais (HINTIKKA, 1992, p. 24).

[58] Por outro lado, devido à universalidade e à necessidade das intuições do espaço e do tempo, "nossas intuições empíricas de objetos modelados toma *seus* padrões de nossas intuições puras de modelos no espaço" (SHABEL, 2006, p. 109).

Mas esta explicação contém uma limitação, pois o mais importante é que a concepção kantiana afirma algo que é intrínseco à prática matemática: nas demonstrações é necessário introduzir ideias novas, que não se encontravam nos conceitos dados, e para isso é necessário o uso da intuição. O fato essencial que garante que a matemática não seja um conhecimento meramente analítico é que, para que haja idealização e generalização, a intuição é imprescindível. Para Kant, a própria construção de certos diagramas nos permite tirar novas conclusões. A matemática é a arte de atribuir predicados a substâncias existentes, arte fundamentalmente construtiva, portanto sintética, porque um grande número de predicados não pode ser atribuído a um objeto sem empregá-los como uma regra de construção dentro da intuição de espaço e tempo. Por exemplo, a ideia de um triângulo não contém analiticamente a propriedade de que a soma de seus ângulos é igual a dois ângulos, ao contrário do que afirmaram Arnauld e Nicole.

Kant afirma que o filósofo, ao contrário do matemático, procede analiticamente. Mas, ao analisar um triângulo, ele pode até “tornar claro o conceito de linha reta ou de ângulo ou do número três, mas não chegará a outras propriedades que não estejam contidas nestes conceitos” (A 716 B 744). Entretanto, não há receitas para dizer que tipo de termos devem ser adicionados por meio das relações construtivas de modo a tornar o problema resolúvel ou a demonstração realizada. Nunca é possível afirmar explicitamente todas as possibilidades de percepção e interpretação de determinada situação-problema, portanto não existe um procedimento prévio geral e automático de demonstrações à disposição do matemático.

E não há na matemática uma orientação geral na qual as consequências podem ser vistas como sendo derivadas diretamente de premissas. A prova, propriamente dita, realizada após a construção ter sido realizada, pode ser meramente dedutiva e analítica, mas as construções auxiliares são geradas de forma intuitiva.

O veredito daquele que é considerado o maior lógico depois de Aristóteles, Kurt Gödel (1906-1978), contribui para desfazer alguns mal-entendidos sobre o legado da filosofia matemática de Kant.

> Tomadas literalmente, as afirmações relevantes de Kant (sobre a matemática, nota minha) são, certamente, incorretas... mas num sentido mais amplo elas contêm verdades profundas. Em particular,

> todo o método fenomenológico que esbocei anteriormente remete à ideia central de Kant (1995, original de 1961).

Grande parte das confusões da escola de história da lógica surgida a partir dos escritos de Coffa vem, provavelmente, da tomada dos escritos kantianos de maneira literal.

Um dos legados mais importantes de Kant, que levou muitos matemáticos a se reconhecerem em sua teoria, foi que sua concepção de que existe conhecimento irredutível ao conceito teve como consequência a afirmação da importância da intuição, concebida então não como uma capacidade passiva de receber sensações, mas como um instrumento da ação criativa. A intuição é indispensável porque não é possível descrever de maneira finita um conceito de objetos particulares, pois cada aplicação de um conceito vai além de sua descrição formal e porque o recurso ao intelecto divino foi abandonado. Uma realidade e sua descrição são de diferentes tipos lógicos: o menu não é a comida, como se costuma dizer. No entanto, a intuição é falível, o que implica que deve-se procurar uma abordagem complementar entre intuição e conceito.

2.4 A mudança realizada por Kant na noção de conceito

A negação do princípio da harmonia preestabelecida e da identidade dos indiscerníveis levou Kant a distinguir as proposições analíticas das sintéticas de maneira que afirmasse a existência de uma diferenciação entre ideias e objetos, entre os fatos e sua descrição teórica. Assim, ele rompeu com a concepção tradicional do racionalismo de que os componentes que constituem a representação de um objeto (as partes da descrição que se faz dele) corresponderiam de maneira direta às características dos objetos *em si*. Ele o fez ao criar a noção de *sintético a priori*, afirmando que há propriedades do objeto que lhe pertencem necessariamente, mas que não estão contidas em seu conceito, e que não é possível representar adequadamente um conceito por abstração de particularidades.

Dito de outra forma, a noção de conhecimento sintético *a priori* rompeu com a concepção de que a representação que o sujeito faz do objeto de conhecimento corresponde diretamente a este objeto. Houve então a uma ruptura com a característica da “época da representação” de que seria possível, mesmo que somente para Deus, descrever ou representar meticulosamente por meios puramente conceituais – e sem recurso à intuição – o objeto de conhecimento; bem como a rejeição da teoria da proporcionalidade inversa entre a intensão e extensão de um conceito, que havia sido formulada por Nicole e Arnauld.

Esse novo e importante papel do sujeito na construção do conhecimento levou alguns intérpretes de Kant, como Cassirer, a afirmar que a *Revolução Copernicana* deslocou o foco, na filosofia, da ontologia para a epistemologia, do estudo da *coisa em si* para o estudo das condições do conhecimento por parte do sujeito cognoscente. Heidegger e outros, no entanto, afirmaram que essa visão reduziria a crítica kantiana à *Analítica Transcendental*,[59] e esta a uma teoria da ciência, o que restringiria consideravelmente seu alcance; sustentaram então que Kant inaugura uma nova ontologia.[60]

Esse deslocamento influenciou largamente a ciência e a filosofia posteriores: mesmo se não a aceitaram integralmente, sem a noção de que existe algo humano e construído no conhecimento, não teria sido possível para Hegel formular sua teoria da história e sua introdução da noção de evolução na filosofia, que tanto influenciou o marxismo e o pragmatismo.

Com efeito, a diferenciação entre características dos objetos e propriedades dos conceitos significou, sobretudo, a ruptura com a noção tradicional de conceito. Cassirer, em seu *Conceito de Substância e Conceito de Função*,[61] de 1910, afirma que a divergência de concepção da lógica como substância e lógica como função determina as duas grandes correntes que se enfrentarão no curso da história da ciência moderna (CASSIRER, 1997, p. 19).

Ao ler a obra de Hume, Kant compreendeu que a concepção tradicional de conceito, que considerava os acidentes como derivações da essência de um conceito (causa essencial) estava errada, pois há acidentes que derivam das relações (causa eficiente), que são extrínsecas à essência. Por exemplo, não há nada na essência de Pedro e de Paulo que nos permita afirmar que um deles seja mais alto do que o outro;

[59] Tópico da *Crítica da Razão Pura*.
[60] Ver, por exemplo, Morujão (MORUJÃO, 2001, p. 22).
[61] *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*.

somente por meio da comparação, do estudo da *relação* entre eles, será possível percebermos qual é mais alto. Além disso, a conceitualização como função contribuiu para a compreensão de que não existe uma forma única de abstração; pelo contrário, a escolha dos critérios de acordo com as quais um sujeito vai classificar determinados elementos depende de seu próprio interesse. Um catálogo de livros pode ser organizado de acordo com o preço, com o autor ou com o tema do livro, portanto a escolha dos critérios de ordenação dos elementos que formam um conjunto depende do sujeito, que assim toma parte ativa no processo de abstração.

E foi justamente a noção de relação que se tornou central na época clássica, sob impulso da noção de lei natural nas ciências e de sua correlata, a função, na matemática. Cassirer diz que "a lógica aristotélica é a expressão e reflexo fiel de sua metafísica" (CASSIRER, 1997, p. 19). E em Aristóteles, a categoria da relação havia permanecido

> forçada numa posição dependente e subordinada por esta doutrina metafísica fundamental de Aristóteles... A tese aristotélica da conceitualização ganha assim um caráter que lhe torna imutável... as relações são relegadas a características externas à essência de um conceito, que podem passar sob silêncio sem prejudicar sua definição (CASSIRER, 1997, p. 19).

Tratou a categoria de relação como um elemento externo ou alheio ao conceito em si, por não fazer parte de sua substância.

Como foi dito no capítulo 1, os filósofos dos séculos XVI, XVII e XVIII já haviam substituído, na metafísica, a noção de conceito como substância pela de conceito como função, e deixado de ver o mundo como um cosmos contínuo, que favorecia uma compreensão qualitativa, para vê-lo como um conjunto de objetos, um mundo discreto,[62] que favorecia uma visão quantitativa por meio da noção de função. Ao invés de conceito como representando as substâncias das coisas, a Revolução Científica já havia concebido o conceito como um instrumento, mas na lógica e na teoria dos conceitos essa mudança de concepção não havia sido feita.

Cassirer (1910, p. 17-18) interpreta a obra de Kant afirmando que a noção tradicional de conceito excluía a intuição do sujeito cognoscente e eliminava dos objetos

[62] *Discreto* é o contrário do contínuo: denota um conjunto de eventos ou números em que não há níveis intermediários, em que há saltos na passagem de um para outro.

suas características mais importantes, aquelas que mostram sua singularidade e os distinguem dos demais,[63] e que a realidade, sobretudo com a revolução científica, foi desvelando cada vez mais exemplos de particularidades, transformações e mudanças que mostravam que conceitos estáticos concebidos como independentes do sujeito são inadequados para expressar toda a riqueza apresentada pelos mundos físico e humano.

As conclusões a que Kant chegou sobre a formação dos conceitos matemáticos valem, se não tomadas literalmente, para todas as formas de conhecimento. Como explica Drobisch (1875): "Toda função matemática representa uma lei universal que, em virtude dos sucessivos valores que a variável pode assumir, contém dentro de si todos os casos particulares para os quais ela vale". E Cassirer completa, referindo-se ao texto de Drobisch:

> Uma vez que reconhecemos isso, um campo completamente novo para a investigação lógica se encontra aberto. Em oposição à lógica do conceito geral, que, como vimos, representa o ponto de vista e influência do conceito de substância, agora aparece a lógica do conceito matemático de função. Entretanto, o campo de aplicação desta forma de lógica não se encontra restrito à matemática. Ao contrário, se estende através do campo do conhecimento da natureza; pois o conceito de intuição constitui o esquema geral e modelo de

---

[63] Ao discutir a crítica de Rudolf Hermann Lotze (1817-1881) à concepção tradicional, Cassirer (1910, p. 34) mostra de maneira exemplar o caráter reducionista desta concepção: "que valor poderia ter o conceito de animal se devemos renunciar, para isso, a evocar a geração, a mobilidade e a respiração, sob o pretexto de que a geração, a respiração, etc., não se apresentam para todos sob uma forma que será comum a todas as espécies animais? não se pode erigir como regra a simples eliminação dos índices p_1, p_2, q_1, q_2, que se apresentam sob formas diferentes nas diferentes espécies; pois é indispensável que, uma vez descartadas as determinações particulares, passe-se a nomear os índices gerais P e Q dos quais p_1, p_2, q_1, q_2 são as especificações. Mantendo-se o procedimento puramente negativo, chegaremos, no final das contas, a abolir em generalidades toda determinação, de tal forma que nosso pensamento ficará impossibilitado de remontar qualquer coisa que o conceito lógico significaria na diversidade dos casos concretos". Afirmou ainda que a lógica formal elimina a totalidade dada originalmente à intuição. Mas a concepção dinâmica inaugurada por Kant afirma, ao contrário, que "quanto mais o conceito é vazio, se podemos dizer assim, de todo ser dado, mais ele afirma, em contrapartida, o caráter irredutível de seu papel funcional. As propriedades fixas são substituídas por regras gerais que nos dão uma ideia, de uma só vez, de um conjunto completo de possíveis determinações. É esta transformação, esta transcrição, que dá lugar a uma nova forma do ser lógico que constitui o valor propriamente positivo da abstração. Não se trata mais de passar imediatamente de uma série ap_1q_1, ap_2q_2, ap_3q_3... a seu componente comum *a*, mas de pensar o conjunto dos elementos *p* por meio de uma expressão variável *x*, o conjunto dos elementos *q* por meio de uma expressão variável *y*. De tal maneira, o sistema inteiro se reduz a um *axy*... que, por variação contínua, pode restaurar a totalidade concreta dos membros da série e que, por conseguinte, nós oferecemos de maneira plenamente legítima a estrutura e a articulação lógica do tema em conjunto" (CASSIRER, 1910, p. 34-35). Em outra passagem, ele afirma que "'abstração' permanece sem objetivo e sem significado se ela não considera os elementos dos quais ela toma como sendo o conceito desde o início arranjado e conectado por determinada relação" (*ibidem*, p. 35). Ou seja: a relação, que a noção matemática de variável expressa bem, é o que permite que, ao se abstrair, não se chegue a algo tão geral que não retenha nada dos seres particulares que ele pretendia representar.

> acordo com o qual o conceito moderno de natureza foi moldado em seu desenvolvimento histórico progressivo (CASSIRER, 1910, p. 33).

E, pode-se acrescentar, tampouco as humanidades se mantiveram restritas à concepção tradicional de conceito.

Nesse sentido se costuma dizer que Kant completou a revolução científica de Newton ao conceber o conceito como função da atividade. Ao afirmar a diferença entre possibilidade lógica e existência, Kant foi mais longe na crítica à lógica formal e à Escolástica do que Descartes e os outros racionalistas. Partindo do conhecimento matemático e físico, Kant insistiu na necessidade da intuição de objetos para afirmações existenciais, e ao fazê-lo entendeu, ao contrário da tradição, que a matemática não é redutível à lógica formal, e que tem seu próprio âmbito de conhecimento objetivo, ou seja, tem objetos próprios e não é um mero ramo ou campo de aplicação da lógica. Sua afirmação de que a matemática não lida com pensamento analítico e conceitual, mas sim com construção de conceitos na intuição do espaço e do tempo, serviu a este propósito.

Muitos historiadores, matemáticos e filósofos, a começar pelo próprio Bolzano, afirmaram que a concepção de matemática de Kant foi restringida pela compreensão que os matemáticos do século XVIII tinham dela como ciência das grandezas, como ciência das magnitudes discretas (números) e contínuas (geometria), e que o significativo papel que ele atribuiu às noções de espaço e de tempo se devia a isso. As transformações ocorridas na matemática e na lógica nos séculos XIX e XX mostraram – apesar dos paradoxos que viria gerar, em grande medida devido às suas pretensões formais, de cujo risco Kant corretamente alertou – que havia muito terreno para investigações sobre uma lógica e uma matemática que fossem concebidas como independentes das noções de espaço e de tempo.

Mas seria um erro caracterizar, como fez Coffa em sua história da filosofia analítica (1991), a filosofia kantiana dizendo que "nela, algumas duradouras confusões convergiram e outras emergiram... as últimas estariam destinadas a ter uma longa e sofrida influência durante todo o século XIX" (COFFA, 1991, p. 8).[64] Embora Coffa

[64] Coffa (1991, p. 8) chega a afirmar que Kant teria "poucos motivos para se orgulhar" de sua filosofia. Mas a própria crítica que Bolzano fez a Kant em §65 mostra que Coffa não deu a devida atenção ao que Kant escreveu, confiando demais na versão de Bolzano, que afirma que Kant teria dito que o espaço é divisível em partes, quando Kant, pelo contrário, afirmou que o espaço é uma intuição porque é representação particular, portanto é indivisível (A 25/B 39)

reconheça que “o primeiro estágio do positivismo lógico pode ser visto como um desenvolvimento do ponto de exaustão do aspecto da virada copernicana” (*ibidem*, p. 8), ele não extrai as mais importantes consequências desta virada.

Em particular, Coffa não compreendeu que a filosofia analítica herdou a nova concepção de conceito inaugurada por Kant, bem como uma das distinções mais importantes para ela, aquela entre proposições analíticas e sintéticas. Em particular, parece não ter percebido que o próprio Bolzano reconhece ter partido desta nova concepção de conceito para elaborar sua própria (WL, §65). Tampouco percebeu a importância da rígida distinção que Kant fez entre possibilidade lógica e existência real.[65]

2.5 A transformação idealista do sujeito transcendental e a formação do Idealismo alemão

Antes mesmo da publicação da segunda edição da *Crítica* iniciou-se o movimento que levaria à formação do Idealismo Alemão. Este movimento foi fortemente influenciado pelo Romantismo, que além de idealizar o gênio e a criação artística, considerados expressões maiores da verdade e do absoluto, deu grande ênfase, contra o Iluminismo, aos instintos, à emoção e à fantasia. Nesse contexto do idealismo se entende que o papel construtivo do conhecimento que Kant havia atribuído ao sujeito tenha se tornado uma afirmação de que o sujeito cognoscente é o *causador* da realidade.

Jacobi, um dos mais importantes representantes do Romantismo, afirmou em 1785[66] que, para ser coerente com o kantismo, era necessário negar completamente a coisa em si, e mesmo a capacidade de que possa haver na consciência alterações produzidas por objetos que lhe são externos. Alguns anos mais tarde, acrescentou que era necessário “dar um salto mortal” no idealismo absoluto, que considera o sujeito como causador da realidade (JACOBI, 1994). Das afirmações de Kant de que “*ser* não é

[65] Mesmo se filósofos e lógicos modernos, como Bertrand Arthur William Russell (1872-1970), e mesmo o matemático Brouwer, retomaram alguns aspectos do racionalismo leibniziano, ao conceber que a existência das substâncias poderia ser provada de forma descritiva, isso não torna menos equivocada a leitura que Coffa faz de Kant, Bolzano e, em consequência, de grande parte do desenvolvimento da filosofia analítica.
[66] Em suas *Cartas sobre a Doutrina de Espinosa*, contida em Jacobi (1981).

um predicado real" (A 598/B 626), Jacobi conclui que se deve negar qualquer racionalidade à ideia de Deus, e afirmar uma fé que não procure bases racionais.

A filosofia é vista, então, como uma tentativa de explicação racional do mundo, o que caracterizaria – ainda segundo Jacobi – uma forma de espinozismo, na medida em que Espinoza tendia a identificar Deus com a natureza, negando assim o caráter intuitivo do conhecimento e a possibilidade do inexplicável. Ao acusar toda a filosofia de ser panteísta, ateia e niilista, Jacobi rejeitou a noção iluminista de religião natural,[67] e afirmou que para alcançar a realidade seria necessário renunciar ao conceito e à especulação em benefício de uma intuição imediata do absoluto, designada com o nome de crença. Donde conclui que é preciso renunciar à filosofia em benefício da fé, em especial a cristã, e da revelação imediata. Este irracionalismo, usado também para atacar a Revolução Francesa, foi depois um dos aspectos do Iluminismo mais criticados por Bolzano.

Considerando a posição de Jacobi dogmática, Kant respondeu em *O que significa orientar-se no pensamento?*, redigida em 1796 (2008), criticando o idealismo por não conseguir explicar como é que há objetos externos que nós não criamos, e como um ser finito, o homem, pode criar objetos pelo simples fato de pensá-los. Mas esta resposta não foi suficiente para dissipar as dúvidas e divergências que Jacobi havia levantado, e não impediu a grande repercussão de seu pensamento, nem que se iniciassem as interpretações do texto kantiano que caracterizam a passagem do criticismo ao idealismo.

Além disso, embora seja aceito sem dificuldades que Jacobi não tenha se preocupado com a fidelidade ao texto, e sim com utilizar para seus próprios propósitos filosóficos as obras de Kant e de Hume, tampouco se pode negar que a obra kantiana se prestasse à dupla interpretação sobre o papel que a *coisa em si* poderia desempenhar nela.

> *a reflexão kantiana encontra-se em equilíbrio instável entre o idealismo absoluto e um realismo que admite coisas em si, embora incognoscíveis. E é no sentido do desaparecimento da coisa em si que*

[67] Uma forma de conceber a religião que se tornou comum entre alguns iluministas no século XVIII, e que identificava a divindade na natureza, ressaltando o caráter puro desta última em comparação com o caráter deturpado que, a seu ver, a religião oficial havia assumido. Voltaire foi um dos maiores defensores desta concepção, que também mesclou com traços de orientalismo.

> *vai evoluir a herança do pensador de Königsberg. No idealismo alemão a viragem copernicana é levada à derradeira conseqüência, sem quaisquer reservas criticistas. A intuição intelectual, conceito-limite para Kant, significando qualquer coisa concebível, mas não acessível, adquire foros de cidadania; a experiência sensível, necessária para o conhecimento do real, transforma-se em criação do eu, é uma certa forma de consciência. Em qualquer dos grandes nomes deste movimento idealista, com todas as suas diferenças, é sempre no sujeito que reside o centro de gravidade da filosofia, há sempre a eliminação da coisa em si. O saber não consiste na recepção de dados, mas numa construção no pleno sentido da palavra. O eu não é, portanto,* tabula rasa, *mas atividade. O saber não é atribuído ao espírito humano finito, como tal, mas ao pensamento absoluto ou razão e, assim, o mundo converte-se em automanífestação do pensamento* (MORUJÃO, 2001, p. 22).

Com Johann Gottlieb Fichte (1762-1804), as noções kantianas se transformaram de modo a desaguar no idealismo alemão, com a transformação do *Eu penso* kantiano em *Eu puro*, entendido como intuição pura que livremente se autopõe, se autocria, e, se autopondo, cria toda a realidade (REALE & ANTISERI, 2005, p. 49).

> A imaginação produtiva – concebida como atividade infinita do Eu – que em Kant era apenas determinadora a priori da intuição pura do tempo, em Fichte torna-se criadora 'inconsciente' dos objetos (REALE & ANTISERI, 2005, p. 53).

Fichte foi o primeiro a afirmar que a ação precede o ser, e com ele "o Eu penso kantiano, que era a estrutura transcendental fundamental do sujeito, torna-se... atividade, auto-intuição" (REALE & ANTISERI, 2005, p. 50), e dessa concepção deriva a particular importância atribuída à prática, concebida como ética. Pretendendo ter descoberto o princípio fundamental, não revelado por Kant, que poderia unificar as três Críticas, Fichte pretendeu construir um sistema completo de saber, ao transformar a filosofia em uma *Wissenschaftslehre,*[68] doutrina da ciência, em cuja exposição a razão se encontra na base de tudo, apesar de ter concebido, na *Missão do homem* e *Introdução à vida beata*, a ciência como uma espécie de união mística com o absoluto.

Friedrich Wilhelm Joseph von Schelling (1775-1854), que chegou a participar, junto com Fichte e Schleiermacher (1768-1834), do influente círculo fundador do

[68] De *Wissenschaft, ciência*, + *Lehre, ensino* ou *doutrina.* Tanto no caso da obra de Schelling como na de Bolzano, traduzimos por *Doutrina da Ciência*, pois suas obras foram concebidas como tratados filosóficos sobre a natureza da ciência, e não como livros destinadas ao ensino das ciências.

Romantismo dos irmãos Schlegel,[69] concebeu que o sistema da natureza é inseparável do sistema do espírito, e que a natureza seria "produção de uma inteligência inconsciente que opera a partir de dentro dela, desenvolvendo-se em sentido teleológico" (REALE & ANTISERI, 2005, p. 79).

Otte (2006, p. 56) explica que

> A transformação essencial que ocorreu na filosofia pós-kantiana diz respeito à noção de intuição formulada por Kant, que Schelling chamou de uma espécie de resquício empirista. Tendo se tornado mais acentuada a distinção entre os mundos interno e externo do ser humano, a intuição viria a se livrar das fronteiras da experiência, e assim noções como volição, decisão, construção ou atividade em geral adquiriram maior importância. Estas mudanças contribuíram para uma acentuação maior dos aspectos subjetivos do conhecimento.

Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831), que representa o auge do idealismo e prepara seu declínio, trabalhou com Schelling, mas rompeu com ele a partir da publicação da *Fenomenologia do Espírito,* em 1807. Em seu sistema, nada poderia escapar à razão, e tudo seria desenvolvimento da ideia: "aquilo que é real é racional, e aquilo que é racional é real" (HEGEL, 1997, p. 16).

Hegel concebeu a verdade e a atividade especulativa não como substâncias fixas e imutáveis, mas como processos, espírito. Em sua concepção de lógica, a proposição não permanece "fechada nos limites rígidos do intelecto" (REALE & ANTISERI, 2005, p. 100), sendo concebida como proposição especulativa e estruturalmente dinâmica, "como a realidade que ela exprime e como o pensamento que a formula" (*ibidem*, p. 100). Sua concepção evolucionária dá à filosofia e à noção de conhecimento um caráter completamente novo, que influenciou enormemente o desenvolvimento da filosofia, em particular a formação do marxismo e do pragmatismo.

Além disso, Hegel superou a cisão entre o Eu e o não-eu, entre sujeito e objeto, infinito e finito, que Fichte mantinha, na medida em que o particular, em seu sistema, "é sempre posto e sempre dinamicamente resolvido no universal" (REALE & ANTISERI, 2005, p. 99). Este desenvolvimento foi concebido por Hegel como triádico – a mesma tríade que Schelling havia concebido em termos estáticos, em tese, antítese e síntese. Com a obra de Hegel também se completará o movimento, iniciado no Idealismo

[69] Tratam-se de August Wilhelm Schlegel (1767-1845) e Friedrich Schlegel (1722-1829).

Alemão, de rejeição das dicotomias típicas do racionalismo, com as quais Kant não havia rompido: intuição e conceito, mundo interno e mundo externo, passividade e criatividade, etc.

Apesar de o movimento idealista ter sido influenciado, em suas origens, por certo irracionalismo do movimento romântico, ele tomou, sobretudo com Hegel, a forma de um racionalismo altamente especulativo. Mas, e apesar das grandes diferenças entre elas, as diversas formas de idealismo comungaram da crítica à concepção iluminista de razão. Nesse sentido, a concepção de razão, em Hegel, tem muito pouco ou quase nada em comum com a de Newton, e esta divergência foi um dos motivos para o surgimento das tendências filosóficas que se formaram no período imediatamente posterior a Hegel, e que, ao buscarem uma reconciliação com as ciências empíricas e com a matemática, tomaram uma forma de reação à filosofia hegeliana.

"Todo o pensamento moderno posterior a Hegel pode ser visto como uma espécie de acerto de contas com o 'totalitarismo racionalista' hegeliano" (REALE & ANTISERI, 2005, p. 129). Nesse contexto antiidealista desenvolveram-se duas tendências distintas e, em vários sentidos, opostas, buscando reformular o vínculo da filosofia com a ciência por meio de uma tentativa de retorno a Kant:[70] num caso, "tomando a ciência como ponto de apoio antiespeculativo (privilegiando assim o 'imanente' e, em última instância, a psicologia)" (PORTA, 2011, p. 26); noutro, "tomando a ciência como objeto (e fixando então como tarefa da filosofia a reflexão sobre ela)" (*ibidem*, p. 26).

A primeira tendência é o psicologismo[71]: Jakob Friedrich Fries (1773-1843) e Friedrich Eduard Beneke (1798-1854) a conceberam, em oposição ao idealismo, como toda forma de filosofia que assume como fundamentos os dados da consciência e que se constitua como forma de reflexão do homem sobre si mesmo. Assim, o método e a

[70] Sobre o movimento que erigiu o termo *zurück zu Kant* à categoria de exortação, ver, por exemplo, Porta (2011). Posteriormente, surgiu também o neokantianismo, do qual Cassirer foi um dos mais importantes representantes.

[71] Alguns anos mais tarde, com a obra de Gioberti (1840) passou-se a utilizar o termo psicologismo, polemicamente, de maneira tão genérica que funde filosofias completamente diferentes num só termo, ao afirmar que toda forma de racionalismo, de Descartes a Leibniz (alguns chegam a incluir Kant), seria psicologista; mais recentemente, Coffa e a tendência da história da filosofia analítica iniciada por ele, incluindo Porta, fizeram o mesmo.

tarefa da filosofia consistiriam na autoconsciência ou auto-observação, e a psicologia, como descrição da experiência interna, torna-se a única filosofia possível.[72]

A segunda tendência procurou discutir o problema da verdade do conhecimento científico por meio da linguagem, afirmando que ele existe independentemente dos sujeitos que conhecem e dos processos mentais pelos quais eles adquirem conhecimento. Nesse sentido, ela se desenvolveu não apenas contra o idealismo, mas também contra o psicologismo e o ceticismo.

Bolzano pode ser considerado um representante precoce desta tendência, que se desenvolveu sobretudo a partir da segunda metade do século XIX com Trendelemburg e alguns de seus alunos. Ele foi também o primeiro a criticar o psicologismo, a quem acusou de confundir as verdades, que ele chamava – confrontando abertamente com Kant – de *verdades em si*, com os processos mentais por meio dos quais o sujeito adquire conhecimento delas, de confundir o conteúdo do pensamento com o ato de pensar. Alguns anos mais tarde, Husserl (1913, § 61) faria ao psicologismo uma crítica semelhante, de "identificar as essências com a consciência que se tem delas em cada caso".

[72] Cf. FRIES, 1831, original de 1828; Beneke, 1833. Os títulos dos livros de Fries e Beneke, respectivamente, *Crítica da Razão Nova ou Antropológica* e *A Filosofia Apresentada em sua Relação com a Experiência, com a Especulação e com a Vida* são significativos de como o psicologismo concebia a filosofia.

3. Intuição e conceito na filosofia e na matemática de Bolzano

3.1 Introdução

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano nasceu em 5 de outubro de 1781 e faleceu em 1848 na Bohemia, na cidade de Praga, hoje capital da República Tcheca. “Foi filho de família muito católica, o que influenciou profundamente sua obra, suas concepções filosóficas e seu rígido código moral, e o inclinaria a tornar-se padre em 1804” (CLÍMACO, 2007, p. 43). Sua infância em Praga foi de enfermidades e convívio constante com os malefícios da Guerra da Primeira Coalizão (1792-1797), que o Império Austríaco liderou, ao lado da Prússia e da Rússia, contra a França revolucionária.

Entre 1791 e 1796, Bolzano estudou em escolas privadas e no Liceu dos Escolápios de Praga. De 1796 a 1799, estudou filosofia na Universidade Karl-Ferdinand de Praga, correspondentes aos anos finais do que nos dias atuais se chama de ensino médio, e que incluíam, além de filosofia propriamente dita, estudos de história, línguas, biologia e, sobretudo, de física e matemática. Na mesma universidade, de 1800 a 1804, Bolzano cursou teologia e apresentou sua tese de doutorado em matemática, publicada em 1804 sob o título de *Considerações sobre certos objetos da geometria elementar*, *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*.

Em 1805, diante da possibilidade de escolher entre as cátedras de Ciências da Religião ou a de Matemática – na Universidade Karl-Ferdinand de Praga – Bolzano decidiu assumir a primeira, criada recentemente pelo imperador Francisco I para combater as influências da revolução francesa, em particular, o ateísmo e o agnosticismo iluministas, e o protestantismo. Ainda em 1805, Bolzano tornou-se padre. Sua decisão pela cátedra de Ciências da Religião e pela ordenação se deu porque, como sacerdote, acreditava que poderia influenciar mais facilmente a juventude (cf. BOLZANO, 1976).

Seu trabalho como professor, entretanto, não correspondeu ao que as autoridades esperavam dele. Além de ridicularizar e não usar o livro-texto de teologia prescrito pelo capelão do tribunal da região, em suas aulas e nos sermões de final de semana que a cátedra que ocupava lhe obrigava a fazer, Bolzano ensinava visões liberais e tolerantes, discursava contra determinadas medidas das autoridades austríacas, defendendo a boa convivência entre as diferentes nacionalidades presentes na Bohemia e discutindo ética e educação, inclusive educação sexual. Acusado de kantiano e de adepto da *Zeitphilosophie*,[73] Bolzano foi avisado, ainda em 1805, de que seu emprego terminaria no final do ano. Mas, sem maiores dificuldades, e tendo em seu favor o conhecido fato de que era duro crítico de Kant, se justificou e voltou ao emprego no ano seguinte.

Em 1819 Bolzano foi demitido de maneira definitiva da universidade, sob a acusação de envolvimento com pretensas intrigas de seu discípulo Josef Fesl. Acusado de heresia, foi posto sob vigilância policial e submetido a um processo degradante que durou quase cinco anos, ao final do qual ainda se recusou a se retratar, assumindo apenas talvez ter feito uma "exposição científica ou retórica incorreta" (LAPOINTE, 2003, p. 5). Como resultado do processo, foi proibido de trabalhar em todo o território austríaco, e até quase o fim dos anos 1830 também de publicar escritos científicos. Sustentado por amigos nos anos 20 e 30 do século XIX, Bolzano redigiu sua mais importante obra filosófica, o *Die Wissenschaftslehre oder Versuch einer neuen Darstellung der Logik*, *Doutrina da Ciência ou uma tentativa de uma nova apresentação da lógica*, publicado em 1837.[74]

Em termos acadêmicos, a atividade de Bolzano como professor de Ciências da Religião compreendia a redação de textos sobre os fundamentos da teologia, muitos deles resultados dos sermões. Escreveu também sobre ética e política, em obras específicas sobre o tema e nas mais de 600 exortações ou homilias, *Erbauungsreden*, redigidas para a realização de seus sermões de sábado. Antes de sua aposentadoria forçada, redigiu importantes obras matemáticas, como a *Contribuição para uma apresentação da matemática mais bem fundamentada: primeiro fascículo*, *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik: Erste Lieferung*, 1810, em que apresenta um projeto de reorganização da matemática; *O teorema binomial, e como consequência dele o Teorema Polinomial, e as séries que servem para o cálculo de quantidades logarítimicas e exponenciais, provados de maneira mais correta do que*

[73] Literalmente, "filosofia dos tempos" ou "filosofia da época". Termo usado de maneira pejorativa pelos conservadores para desqualificar a filosofia de sua época como mundana.

[74] Devido às divergências existentes sobre a tradução de determinados termos, todas as traduções da obra de Bolzano serão acompanhadas de notas de rodapé com o texto original em alemão (com a gramática do século XXI, e não do século XIX). Todas as traduções do *Wissenschaftslehre* foram feitas com base no original em alemão. Algumas comparações foram feitas com as traduções em inglês feitas por Terrell (1973) e George (1972) somente com o objetivo de comparar os termos escolhidos. As traduções dos artigos matemáticos de Bolzano foram feitas originalmente com base nas traduções para o inglês de Russ (2004), mas todas foram revistas com base no original em alemão.

antes, Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen, 1816, em que ele expande os resultados de Newton para números irracionais e para polinômios, e faz uma prova sem recursos às noções de espaço e tempo da fórmula que nos dias atuais é conhecida como *Binômio de Newton;*[75] e *O problema da retificação, Das Problem der Rektifikation* e a *Prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, 1817.[76]

Após deixar de ser professor de Ciências da Religião, Bolzano publicou seus escritos religiosos em *Livro-texto de ciências da religião, Lehrbuch der Religionswissenschaft*, de maneira anônima em 1834, e em 1837 publicou, já em seu próprio nome, o *Wissenschaftslehre,* em que sistematizou na forma de tratado suas ideias nas áreas da filosofia, da lógica, da epistemologia e da semântica. Após a redação deste último, que lhe custou mais de dez anos, Bolzano ainda começou a redação de um tratado matemático intitulado *Teoria das Grandezas*, *Größenlehre*, mas a morte o impediu de concluí-lo.

O verbete *Bernard Bolzano* da *Catholic Enciclopedia* organizada por Charles G. Herbermann, de 1913, redigido por Matthias Leimkuhler, ainda hoje disponível na internet como fonte de consulta para católicos, não como mera fonte histórica, apresenta um ambíguo veredito a respeito de Bolzano: ao mesmo tempo em que o reconhece como "filho leal" da Igreja, adverte que

> uma tendência fortemente racionalista em seus escritos sobre assuntos doutrinais, e sua recusa de retratar as diversas proposições tomadas de

[75] Segundo Russ (2004, p. 147) "dois problemas maiores que dificultavam um tratamento, ou prova, estrita do Teorema Binomial em 1816 eram como lidar rigorosamente com séries infinitas e como atribuir um significado a um expoente irracional. Nos tempos do século XVIII, quando o principal uso das séries binomiais era o cálculo de valores numéricos aproximados com propósitos práticos, nenhum destes assuntos era reconhecido como um problema. O trabalho de Bolzano identificou e tratou destas duas questões". Além disso, neste artigo Bolzano fez uma série de considerações sobre a continuidade e a convergência de séries infinitas e deu uma nova definição da derivada de uma função.

[76] Todos estes artigos se encontram em Bolzano (2004), que é uma coletânea de traduções para o inglês das mais importantes obras matemáticas de Bolzano.

> seus trabalhos justificaram[77] sua demissão da universidade de Praga (LEIMKUHLER, 1913, p. 1423-1424).

Bolzano procurou dar definições precisas e demonstrações rigorosas por meio da linguagem – no caso da matemática, a linguagem aritmética – dos conceitos e proposições que, até então, filósofos e matemáticos não acreditavam que precisavam ser tratados mais do que de maneira intuitiva. Uma das maiores transformações realizadas pelos filósofos e matemáticos do século XIX – e Bolzano é um de seus mais importantes pioneiros – foi esta explicitação por meio da linguagem de conceitos que eram assumidos de maneira implícita, o que significou a elaboração de conhecimento passível de ser comunicado. Sua obra expressou com particular consciência essa necessidade da época, sendo ele o responsável, na filosofia, pela criação da semântica moderna e, na matemática, um dos responsáveis pelo fenômeno de aritmetização, e o que com maior clareza enunciou seus princípios. Esses dois fenômenos significaram um direcionamento do que, antes, era tratado de modo subjetivo, com ênfase nos aspectos cognitivos e internos ao sujeito, para uma discussão sobre os aspectos social e externo, buscando na linguagem a garantia da veracidade do conhecimento.

Neste capítulo será mostrado o que têm em comum as tendências de reforma na matemática e na filosofia ocorridos na virada do século XVIII para o século XIX. Para compreender a obra de Bolzano não basta analisar seu pioneirismo e influência na filosofia e na matemática à luz do que os historiadores foram discutindo desde o final do século XIX, como se faz com frequência. É preciso mostrar e analisar o que tornou sua obra não compreendida por seus contemporâneos, para o que é preciso pesquisar em especial o que Russ (2004, p. 3) chama de "enigma no coração do trabalho de Bolzano", assim enunciado: como a religião, de um lado, e os fundamentos do cálculo, de outro, poderiam combinar-se de maneira a contribuir para "a lei moral maior" de Bolzano, que consistia em "sempre estar num caminho que promoverá o bem comum" (BOLZANO, 1976)? Sem dúvida, não é fácil, para um leitor da atualidade, entender como é possível que Bolzano tenha tido dúvidas sobre a escolha, dentre duas cátedras tão distintas quanto a de matemática e a de religião, qual ocupar, na Universidade Karl-Ferdinand de

[77] O termo em inglês *justified* aumenta ainda mais a ambiguidade: tanto pode significar "explicaram" quanto "justificaram".

Praga, nem como é que, como professor de Ciências da Religião, tenha escrito sua mais importante obra matemática, a *Prova Puramente Analítica*.

Sem a pretensão de anunciar, no início deste capítulo, uma conclusão nesse sentido, não se pode esquecer que no limiar do século XIX a divisão do trabalho não era tão forte como nos dias atuais, e os intelectuais não concebiam a busca da verdade como uma atividade de especialistas em determinada área, e menos ainda a filosofia era concebida como atividade de especialistas. Além disso, não se pode esquecer o caráter iluminista da obra de Bolzano: como os iluministas do século XVIII, ele concebeu que os novos conhecimentos e sua divulgação são, em si, instrumentos transformadores do mundo natural e do mundo humano, e que todo conhecimento deve contribuir para a realização da justiça.

Como o mais importante expoente do Iluminismo Católico da Bohemia[78], seu legado nas mais diversas áreas do conhecimento e sua atuação como homem político e religioso, foi marcada pela luta por justiça e contra toda forma de arbitrariedade: "O bem-estar e o progresso da humanidade, vistos num sentido amplo, eram seu objetivo maior de vida" (RUSS, 2004, p, XIII). Nesse sentido é que deve-se compreender que Bolzano mostrasse preocupações semelhantes ao estudar as ciências e a matemática, ou a religião, a política e a sociedade. Além de criticar, como os Iluministas do século XVIII, o obscurantismo, ele considerou seus maiores adversários os céticos, os idealistas, os psicologistas, enfim, todo autor ou compreensão que afirmasse a impossibilidade de conhecer, ou a dimensão puramente subjetiva do conhecimento. Ele se empenhou em responder às críticas de Hume à possibilidade de conhecer, às interpretações que o idealismo alemão e do psicologismo fizeram da filosofia Crítica, e em aprimorar as respostas que Kant deu a Hume.

---

[78] Em geral os historiadores chamam de Iluminismo Católico dois tipos de fenômenos. De um lado, à forma que o Iluminismo Absolutista assumiu na Áustria, combinado com a imposição do catolicismo como religião oficial de estado sob controle do monarca, no período que vai aproximadamente de 1740 (data de posse de Maria Theresa da Áustra) a 1790 (quando Leopoldo assume e completa o recuo que seu irmão José II já havia iniciado das reformas a partir da Revolução Francesa). Esse movimento levou à tomada para o estado de atribuições e propriedades do papado e à realização de reformas políticas consideradas iluministas, incluindo algumas concessões de liberdades políticas e estímulo à educação e à cultura. De outro, chama-se assim à tentativa do catolicismo de procurar se preservar das pressões iluministas, protestantes, deístas, daquelas dos defensores da religião natural e das ateias, e ao mesmo tempo contribuir para reformas no interior da Igreja Católica. O Iluminismo Católico da Bohemia surgiu durante o período da corregência entre Maria Theresa e José II, e continuou existindo apesar dos recuos de Leopoldo; tomando alguns ideais do josefinismo, deu um impulso bastante original para a vida intelectual na Bohemia, e Bolzano foi seu mais importante expoente.

Compreender o aspecto iluminista da obra de Bolzano é também compreender a importância que ele deu à educação e as razões que o levaram a incluir na definição de ciência a organização do conhecimento em livro didático (WL, §1); é compreender que a ciência é inseparável da sua expressão de maneira que possa ser divulgada, ensinada, comunicada. Mas a importância que atribuiu à linguagem e às noções de representações, proposições e verdades em si significou uma ruptura com a concepção predominantemente cognitivista da filosofia que tinham os iluministas, bem como sua excessiva valorização dos fatos e dos dados empíricos.

Apesar das várias tentativas de reeditar as obras completas de Bolzano (cf. HYKSOVA, 2000), até o final da década de 60 do século XX surgiram apenas reedições parciais, quando por iniciativa de Eduard Winter e de Jan Berg surgiu o projeto de uma reedição completa, em 126 volumes, dos quais até hoje foram publicados sessenta e nove. Em 1991, um grupo bem maior criou a *Sociedade Bolzano* que, no final da década de 1990, começou a publicar um órgão de divulgação e discussão permanente de suas obras, o *Contribuições para a pesquisa sobre Bolzano, Beiträge zur Bolzano Forschung.* Este grupo de pesquisadores europeus e o grupo estadunidense liderado por Russ[79] promoveram em Praga, em 2010, a *Conferência Internacional Filosofia e Matemática na obra de Bernard Bolzano*.

Nos dias atuais, essa obra é estudada por filósofos e historiadores da filosofia que buscam em seus escritos as raízes da fenomenologia e da filosofia analítica, as origens do debate sobre a intencionalidade, as mudanças ocorridas na filosofia que a levaram da abordagem epistemológica para uma predominantemente semântica ou linguística e à busca de novas formas de ontologia; ou ainda por educadores, filósofos e cientistas da computação que buscam, sobretudo em sua concepção de explicação causal ou de fundamentação, *Abfolge*,[80] uma alternativa para o formalismo matemático e filosófico.

Em língua portuguesa há poucos trabalhos publicados sobre Bolzano, e suas obras são pouco conhecidas e citadas; no Brasil, somente foram encontrados os

---

[79] Russ é pesquisador que estuda filosofia da informática, estudioso e tradutor para o inglês do texto de Bolzano.

[80] De *ab* ,de, desde, partida, a partir de *Folge*, série, sucessão, consequência. Uma relação de *Abfolge* determina as consequências e as causas ou fundamentos, *Grund*. Tanto Terrell (1973, p. 256) como George (1972, p. 399) traduziram para o inglês "relation of ground and consequence". Pareceu-nos apropriado utilizar o termo "relação de fundamentação" em português, pois traz a conotação de determinar os fundamentos, que é a apropriada.

trabalhos de Otte e Clímaco (2010 e 2013), Clímaco (2007a, 2007b, 2008 e 2011), Porta (2002, 2003 e 2004, os dois primeiros em espanhol) e Cavaillès (2012, original de 1946). Há também duas dissertações de mestrado orientadas pelo professor Benedito Antônio da Silva, da PUC-SP, que discutem os aspectos didáticos dos estudos de Bolzano sobre o infinito.[81] Em *Fundamentos* da *Matemática Elementar*: Trigonometria, (IEZZI e MURAKAMI, 2005, volume 3, São Paulo: Atual, p. 15), para alunos de ensino médio, há uma nota histórica com informações equivocadas e anedóticas, sob um título sensacionalista, *Padre refugia-se na matemática*.

Além das traduções da obra de Bolzano para a língua portuguesa publicadas na dissertação de mestrado de Clímaco (2007a),[82] há somente poucos trechos em português em obras de história da lógica (KNEALE/KNEALE, 1991), história da matemática ou em notas históricas de livros didáticos de matemática (ÁVILA, 1999). Mas foi, sobretudo, pela retomada do debate das demonstrações matemáticas que a obra de Bolzano passou a ser discutida na educação matemática. Esse debate foi retomado na segunda metade do século XX em estreita relação com o surgimento das chamadas *novas tecnologias*, que tornaram possíveis novas e poderosas formas de produção e uso de imagens e, consequentemente, o aparecimento de ferramentas computacionais capazes de obter demonstrações e resultados matemáticos antes desconhecidos e sequer imaginados.

Em 1960, a prova do Teorema das Quatro Cores, há muito conhecido e sem demonstração, fez surgir uma polêmica discussão, pois nessa demonstração foi utilizado um programa computacional que realizou milhares de iterações para cada um dos milhares de casos em que o problema foi dividido, de modo que seria impossível a qualquer ser humano verificar todos os passos. Embora muitos matemáticos tenham ficado decepcionados com a forma como a demonstração foi feita, pois esperavam, ao invés de iterações computacionais automatizadas, uma ideia nova que transformasse a matemática (cf. Davis&Hersh, 1982), desde então demonstrações feitas com o auxílio de computadores se tornaram cada vez mais frequentes e inauguraram novos ramos da matemática que, por sua vez, trouxeram novos resultados e aplicações em diversas áreas. Assim, nos dias atuais, já não há objeções por parte das comunidades de

[81] Abordagem semelhante é feita pela pesquisadora mexicana Waldegg (2005), muitas delas em inglês.
[82] Feitas em colaboração por Humberto Clímaco e Michael Otte, utilizando a edição em alemão de 1980.

matemáticos e filósofos à aceitação de resultados obtidos por esse tipo de demonstrações.

Por outro lado, as chamadas novas tecnologias fizeram surgir, na segunda metade do século XX, profundas discussões sobre a mecanização e a criatividade na educação, e sobre a natureza da relação do homem com a máquina e com a linguagem.[83] Mas a relação entre técnica e criatividade não é, de forma alguma, um tema novo na filosofia; em particular, o debate entre a fenomenologia e a filosofia analítica ocorrido no século XIX se desenvolveu em relação estreita com o desenvolvimento da Revolução Industrial e a discussão filosófica sobre suas consequências para a razão humana. E tanto a filosofia analítica quanto a fenomenologia têm em Bolzano um antepassado comum.[84]

Não há, então, razões para se surpreender com o fato de que a obra de Bolzano tenha se tornado um importante fundamento teórico na discussão das provas e explicações, pois ela pôs essas questões de maneira rigorosa pela primeira vez na história moderna, quando apareceu a dicotomia entre o discurso intuitivo e privado e o discurso comunicável e público, na virada do século XVIII para o XIX, mesma época em que surgiram ou se reorganizaram os institutos politécnicos de ensino superior. Se alguns aspectos da obra de Bolzano foram superados, outros podem contribuir para responder a questões filosóficas e educacionais ainda abertas.[85]

Por outro lado, o desenvolvimento de *softwares* geométricos – capazes de mostrar, por meio de manipulações computadorizadas, propriedades geométricas cuja demonstração os professores têm muitas dificuldades de ensinar e exige dos alunos de todos os níveis de ensino uma forma de raciocínio abstrata e muitas vezes difícil – pôs para alguns pesquisadores da educação matemática questões como: o que é uma boa demonstração? O que deve-se considerar na escola uma boa demonstração?

---

[83] Embora estas preocupações sejam tão antigas quanto a própria filosofia (FRANSSEN, MAARTEN, LOKHORST, 2013), o estudo destas relações levou ao surgimento, no final do século XIX, de uma orientação de pesquisa chamada *filosofia da tecnologia*, que trata também de aspectos sociais, éticos, estéticos e metafísicos da ciência. Desde então, a filosofia analítica e as humanidades têm se dedicado a este tema.
[84] Conforme será mostrado em 3.3. Para outras referências, ver também Dummet (1993, P. 171), Lapointe (2003) ou Smart (1944, p. 513).
[85] Ver, por exemplo, Russ (2004) e Otte (2013). Algumas destas questões serão exploradas neste mesmo capítulo.

Alguns autores foram mais longe e chegaram a questionar se seria possível evitar, por meio do uso de *softwares* e outros instrumentos capazes de facilitar a visualização das propriedades geométricas, as dificuldades inerentes ao ensino da geometria. Chegaram a se perguntar se não seria possível evitar até mesmo o uso de demonstrações na matemática, o que questionava os próprios fundamentos da matemática atual, que surgiram no início do século XIX com as obras de Bolzano e de Cauchy.[86] Afinal, as demonstrações se tornaram, nessa época, uma característica essencial da matemática, intrínseca à própria linguagem em que ela se expressa, e não apenas instrumentos auxiliares ou confirmadores.

Nesse contexto emergiu e cresceu o debate sobre provas e explicações na Filosofia e na educação matemática. Filósofos como Philip Kitcher (1975) e Paul Mancosu (1999), procuraram retomar uma noção de demonstração matemática que possibilitasse explicações no sentido em que as ciências naturais, a filosofia e as humanidades procuram, ou seja, que não fosse redutível às formalidades próprias da matemática moderna. Em *Bolzano and Cournot on mathematical explanation*, Mancosu (1999), como Kitcher, cita explicitamente Bolzano e sua noção de *Abfolge* em contraposição à noção de explicação concebida como mera dedução.

Em *Bolzano's ideal of algebraic analysis*, publicado no *Studies in the History and Philosophy of Science*, em 1975, ao estudar a noção de *Abfolge* presente no parágrafo 162 do *Wissenschaftslehre*, Kitcher afirmou que Bolzano foi o primeiro, e talvez o único, dentre os construtores da matemática pura, a defender uma noção de explicação semelhante à busca de significados verdadeiros, e não apenas uma mera dedução formal linguística.

Em seu artigo *Mathematical Explanation*, publicado 1978 na *Philosophical Studies*, Steiner introduziu a distinção entre "provas que provam e provas que explicam", – provas que somente mostram como uma verdade pode ser deduzida da outra, e as que, além de provar, explicam ou fundamentam a verdade deduzida – e defendeu uma concepção de explicação que fosse capaz de aproximar a matemática das ciências naturais, afirmando que é possível desenvolver também na matemática uma noção de explicação causal.

[86] Há em Hanna (2000) uma retrospectiva do debate sobre provas rigorosas feito até então. Brown (1997) chegou a afirmar que desenhos que tivessem o poder de permitir enxergar determinada propriedade poderiam substituir uma demonstração.

Em 1983, Gila Hanna publicou seu livro *Rigorous Proof in Mathematics Education*, pioneiro na discussão das provas e explicações em educação matemática, seguido de uma série de publicações da mesma autora. Seu artigo de 1989, *Proofs That Prove and Proofs That Explain* se refere à distinção de Steiner para defender que existem dois tipos de provas, as que apenas provam e as que, além de provar, explicam.

Steiner e Hanna, embora não citem Bolzano, buscam, assim como Kitcher, uma noção de explicação que não se limite à busca de uma *causa eficiente*, para utilizar a terminologia aristotélica;[87] buscam provas que não apenas mostram *o quê*, mas também o *porquê* (*Segundos Analíticos*, 71b 25).[88] Segundo Kitcher e Mancosu, Bolzano recuperava uma matemática mais próxima das humanidades e das ciências empíricas. Mas, sua obra realmente pode contribuir para retomar tal concepção de explicação matemática? Pode-se dizer que as transformações ocorridas na matemática após Bolzano contribuíram para que predominasse essa concepção de explicação?

O debate sobre o papel das demonstrações assumiu, recentemente, tal dimensão que foi o tema da edição do grupo de Psicologia e Educação Matemática, em inglês, Psychology of Mathematical Education (PME), comissão do Comitê Internacional de Educação Matemática, International Conference of Mathematical Education (ICME) realizado no Brasil no ano de 2009, publicado em 2012 sob a organização de Hanna e de Villiers, além de numerosas dissertações, artigos e teses.

3.2 Intuição e conceito na matemática de Bolzano

Embora jamais tenha se preocupado com questões técnicas relativas à educação, Bolzano viveu num momento histórico em que a necessidade de uma exposição mais clara dos conceitos matemáticos, científicos e filosóficos apareceu de forma aguda. Procurou então fundamentar o conhecimento de maneira a considerar as *representações em si* como os elementos mais simples e fundamentais de todo o saber, abandonando a

[87] Aristóteles definiu quatro tipos de causas: as formais, as materiais, as eficientes e as finais. Embora Bolzano não defenda somente uma noção de causa eficiente, as mudanças que se produziram na matemática do século XIX levaram a que na matemática prevalecessem a noção de causa eficiente.
[88] Nas palavras de Aristóteles, *hóti* e *dióti*.

noção de simplicidade como algo intuitivo, como conceberam Descartes e Pascal, ou como algo proveniente da sensação, como Condillac.

Sob o aspecto *prático* da matemática, esse caminho se justifica pela necessidade de superar a série de contradições surgidas, em grande parte, pelo fato de que as questões referentes a métodos como fluxões, relações, limites de diferenciais ou de funções derivadas não haviam sido resolvidas, porque os matemáticos de então tentavam respondê-las em termos de concepções de espaço e de tempo, ou fundamentando verdades aritméticas na intuição visual geométrica. Sob o aspecto lógico, o tratamento dado à questão do infinito não era muito distinto daquele que Zenão de Eleia (490/495-430 a. C.) havia formulado mais de 2000 anos antes (cf. BOYER, 1949), e as falhas mostradas por Berkeley permaneciam sem resposta satisfatória.

Os problemas se concentravam sobretudo nas questões relativas à infinidade e à continuidade: alguns matemáticos não aceitavam a introdução de tais conceitos, e os que a aceitavam não ofereciam explicações logicamente consistentes para elas. Muitos consideravam as idéias relativas à infinidade e à continuidade como metafísicas, e as explicavam recorrendo a conceitos externos à matemática.

Os métodos que pareciam, para os matemáticos da época, mais adversos à introdução na matemática das noções de infinidade e continuidade foram precisamente os que tornaram essa introdução possível, pois parecia óbvio, para a grande maioria dos matemáticos, que a infinidade e a continuidade tinham em comum algo relacionado à noção de movimento e aproximação, e que os limites diziam respeito a algo discreto, numérico e, portanto, estático. No entanto, o método dos limites foi o que lhes forneceu sua base lógica e possibilitou apreender o contínuo e o infinito de forma que o conhecimento a respeito desses conceitos pudesse ser expresso e comunicável. O método de Lagrange (1736-1813), que ele concebeu como forma de evitar o uso de séries infinitas e de infinitésimos, contribuiu, contraditoriamente, para que se passasse a tratar de maneira aritmética a questão da infinidade e da continuidade, por meio de limites (BOYER, 1949). É isso que se chama de aritmetização, que possibilitou o tratamento do movimento por seu aspecto estático, da linguagem aritmética.

A necessidade de fundamentar seus conceitos em linguagem socialmente comunicável era algo que a matemática e a filosofia do início do século XIX tinham em comum, e Bolzano tinha conhecimento suficiente de ambas para compreender as falhas lógicas de seus conceitos, cuja solução exigia que eles fossem tratados de maneira independente das noções de espaço, tempo e movimento e, portanto, da percepção do sujeito cognoscente.

Bolzano reconheceu a importância da enorme produção matemática realizada nos séculos XVI, XVII e XVIII, que não teria sido possível se os matemáticos tivessem mantido o excessivo rigor dos matemáticos gregos e sua recusa a aceitar questões operacionais como científicas. Mas compreendeu também que o crescimento e a expansão da matemática como disciplina científica exigiam o tratamento rigoroso dos conceitos então surgidos. Diferentemente de Kant, defendeu a necessidade de tratar os conceitos fundamentais da matemática de maneira filosófica e conceitual, rompendo com a rigidez entre métodos matemáticos e métodos filosóficos afirmada pelo filósofo de Königsberg.

O conceito de infinito,[89] desenvolvido nos *Paradoxos do Infinito*, publicado em 1847, traz as bases que Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) utilizou posteriormente para a construção da teoria dos conjuntos. Bolzano foi talvez o primeiro matemático a conceber a noção de infinito atual, ao passo que desde Aristóteles os matemáticos somente concebiam a noção de infinito potencial. Ainda nos *Paradoxos*, definiu a função derivada da forma como ela é compreendida na atualidade, formulando uma concepção de limite que rompia com a tradição que vinha desde Newton que tratava o *dx* ora como zero, ora como diferente de zero.

A definição tradicional da matemática, que durou até o século XIX, era de ciência que estuda medidas e quantidades, *Wissenschaft der Größen*,[90] literalmente,

---

[89] Neste livro, Bolzano desenvolve estudos que ele já tinha começado sobre a convergência de séries infinitas, e procura comparar entre si diferentes conjuntos infinitos. A definição dada por ele era tida como uma contradição porque, na comparação de dois conjuntos que têm finitos elementos, sempre sobra pelo menos um, e isso significa que um deles tem mais elementos; essa é uma maneira matemática de compreender a afirmação dos gregos de que o todo é maior do que a parte. Bolzano mostra que com conjuntos infinitos a questão é diferente, pois é possível que, aparentemente, "sobrem" elementos de um conjunto sem que isso implique que haja "quantidades" diferentes. Foi com afirmações análogas às que se encontram nas seções §20-§22 dos *Paradoxos* que Cantor definiu sua noção de cardinalidade, que seria o análogo à noção de quantidade, para conjuntos infinitos.

[90] Nesta tese, sempre que isso não torne o texto de difícil leitura, não traduziremos os termos *Größe* e *Größenlehre*, mas em algumas ocasiões os traduziremos por *Grandeza* e *Teoria da Grandeza*; em algumas exceções, que serão sempre indicadas por parênteses, se traduzirá *Größe* por quantidade. Russ traduziu por *quantity* em inglês (que literalmente traduzido para o português é quantidade), com a advertência de que "a abrangência, as referências e as conotações de *Größe* em alemão são diferentes de *quantity*" (RUSS, 2004, p. XXVIII) e se assemelham a "'magnitude' and 'size'" (*idem*, p. XXVIII)

ciência das grandezas. Matemáticos e filósofos anteriores e contemporâneos de Bolzano, como Euler, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Kant, endossaram esta definição. A própria amplitude da palavra *Größe* se prestava a tantos significados diferentes, que pouco contribuía para a clareza dos conceitos que Bolzano pretendia instaurar, e Christian Wolff, ao introduzir uma terminologia alemã para a matemática e a filosofia, em *Mathematisches Lexicon* (1716), havia expresso por *Größe* várias noções distintas, como tamanho, volume, quantidades e magnitudes (CANTÙ, 2010, p. 3).

Em *Contribuição para uma apresentação da matemática mais bem fundamentada: primeiro fascículo* (2004a, p. 91, original de 1810), Bolzano afirmou que a definição de matemática como *Wissenschaft der Größe* não é satisfatória porque faz tudo depender da definição que se dá de *Größe*, tampouco definida de maneira adequada nos livros didáticos. Critica a noção de matemática de Kant, caracterizando-a como defensora de que *"a essência da matemática pode ser expressa mais apropriadamente pela definição de que ela é uma ciência "por construção de conceitos" (cf. Crítica da Razão Pura de Kant, S. A 713) (Beiträge, §5)*" (BOLZANO,[91] 2004a, *Beiträge,* §5, p. 93).[92] Ao contrário, ele insiste:

> Eu não estou convencido de que a verdade de muitas doutrinas da filosofia crítica, e especialmente da justeza das afirmações kantianas sobre intuições puras ou sobre a construção de conceitos por meio delas. Eu acredito ainda que no próprio conceito de uma intuição pura (i. e. a priori) existe uma contradição intrínseca. Muito menos eu poderia me convencer de que o conceito de número deve necessariamente ser construído no tempo e que consequentemente a intuição de tempo pertence essencialmente à aritmética (BOLZANO, 2004a, *Beiträge,* §6, p. 93).[93]

(literalmente, *grandeza* e *tamanho*). O próprio Bolzano traduz *Größe* para o termo latino *quantitas*, seguindo a tradição de Wolff (CANTÙ, 2010, p. 2).

[91] As traduções de Bolzano que aparecem com a referência do ano de 2004 são encontradas todas no livro em inglês de Steve Russ que aparece na referência. No entanto, nenhuma tradução foi feita diretamente do inglês sem que houvesse confronto posterior com o texto em alemão. Na maioria dos casos, os textos encontrados são microfilmes do original de 1810 publicados em formato pdf pelo site da Czech Digital Mathematics Library: http://dml.cz/

[92] Sonach werde das Wesen der Mathematik am eigentümlichsten durch die Erklärung ausgedrückt, dass sie eine Vernunftwissenschaft aus der Konstruktion der Begriffe sei. (S. Kants Kritik d. R. V. S. A 713)

[93] Ich meinesteils will nur gleich offenherzig bekennen, dass ich mich bis zur Stunde – wie von der Wahrheit so mancher anderen Lehren der kritischen Philosophie – so insbesondere auch von der Richtigkeit der Kantischen Behauptungen über die reinen Anschauungen und über das Konstruieren der Begriffe durch sie, nicht habe überzeugen können. Ich glaube noch immer, dass schon in dem Begriffe einer reinen (d. h. a apriorischen) Anschauung ein innerer Widerspruch liege; und noch weit weniger

Esclarece suas ideias ao definir a matemática:

> Eu penso, portanto, que a matemática poderia ser mais bem definida como uma *ciência que lida com as leis gerais (formas) às quais as coisas devem se conformar em sua existência* [*Dasein*]. Pela palavra *'coisas'* eu entendo aqui não somente aquelas que possuem uma existência objetiva independente de nossa consciência, mas também aquelas que existem somente em nossa imaginação, ou como particulares (i. e. intuições), ou simplesmente como conceitos gerais, em outras palavras, tudo que pode ser um objeto de nossa capacidade para representação em geral. Mais ainda, se digo que a matemática lida com as leis às quais essas coisas conformam em sua existência, isso indica que nossa ciência lida não com a prova da existência destas coisas, mas somente com as condições de sua possibilidade. Ao chamar estas leis de leis gerais, compreendo com isso que a matemática nunca trata de uma única coisa como um particular, mas sempre com a espécie [*Gattungen*]. Essa espécie pode certamente às vezes ser superior e às vezes inferior, e a classificação da matemática em disciplinas individuais se baseará nisso (BOLZANO, 2004a, *Beiträge*, §8).[94]

De modo análogo, Bolzano distingue a matemática da metafísica de maneira diferente de Kant:

> A primeira trata da questão *como as coisas devem ser feitas para que sejam possíveis?*, e a segunda com *quais coisas são reais?* – e certamente (porque ela deve ser respondida a priori) – necessariamente reais? Ou ainda mais brevemente: a matemática deve lidar com a necessidade hipotética, enquanto a metafísica com a necessidade absoluta (BOLZANO, 2004a, *Beiträge*, §9, p. 94).[95]

---

kann ich mich überreden, dass der Begriff der Zahl notwendig in der Zeit konstruiert werden müsse, und dass sonach die Anschauung der Zeit zur Arithmetik wesentlich gehöre.

[94] Ich denke also, dass man die Mathematik am besten als eine Wissenschaft erklären konnte, die von den allgemeinen Gesetzen (Formen) handelt, nach welchen sich die Dinge in ihrem Dasein richten müssen. Unter dem Worte Dinge begreife ich hier nicht bloß solche, welche ein objektives, von unserem Bewusstsein unabhängiges Dasein besitzen, sondern auch solche, die bloß in unsrer Vorstellung existieren, und dieses zwar wieder entweder als Individuen (d. i. Anschauungen), oder als bloße allgemeine Begriffe; mit einem Worte also – alles, was überhaupt ein Gegenstand unsers Vorstellungsvermögens werde kann. Sage ich ferner, die Mathematik handle von den Gesetzen, nach welchen sich diese Dinge in ihrem Dasein richten; so zeiget dies an, dass unsre Wissenschaft sich nicht mit dem Beweise des Daseins dieser Dinge, sondern nur ganz allein mit den Bedingungen ihrer Möglichkeit beschäftige. Und indem ich diese Gesetze allgemeine nenne, so gebe ich zu verstehen, dass sich die Mathematik niemals mit einem einzelnen Dinge als Individuum, sondern allezeit mit ganzen Gattungen befasse. Diese Gattungen können indessen freilich bald höhere, bald niedere sein; und darauf wird sich eben die Einteilung der Mathematik in einzelne Disziplinen gründen.
[95] *Dass erstere* die allgemeinen Bedingungen abhandelte, unter welchen das Dasein der Dinge möglich wird; die letztere dagegen versuchte, die Wirklichkeit gewisser Gegenstände (als etwa der Freiheit, Gottes

Bolzano expressa uma visão diferente de matemática em seu inacabado *Groeßenlehre,* cuja redação ele inicia na década de 30 do século XIX, após a publicação do *Wissenschaftslehre,* e mais de 20 anos após a redação do *Beiträge.*[96] Ele muda de concepção e dá uma nova definição de matemática:

> Há mais de trinta anos, eu pensei que houvesse um limite Há mais de trinta anos, eu pensei que houvesse um limite mais acentuado entre a matemática e outras ciências para poder concluido que a matemática não abrange todas as verdades em que não há existência real, mas trata apenas sobre as condições de possibilidade da existência das coisas. Mas eu desisti dessa idéia, pois dei-me conta de que nem todas as doutrinas matemáticas referem-se apenas às coisas que são reais, ou à realidade, ou ainda a coisas que são possíveis (coisas que têm possibilidade), mas que, por exemplo, as teorias da aritmética são de uma abrangência sintática muito mais ampla, e têm também objetos que realmente não podem existir, por exemplo, de meros conceitos e proposições em si (*Groeßenlehre*, Observações).[97]

Mas continua divergindo de Kant, ao afirmar que

> se a Doutrina de Kant das intuições puras, que ainda é adotada, com pequenas modificacões, por muitos, tivesse fundamentos, então haveria uma barreira bem definida entre a matemática e todas as

und der Unsterblichkeit der Seele) a priori zu beweisen; oder mit andern Worten, jene beschäftigte sich mit der Frage: wie müssen Dinge beschaffen sein, die möglich sein sollen? Diese würfe die Frage auf: welche Dinge find wirklich – und zwar (weil sie dies a priori beantworten soll) – mit Notwendigkeit wirklich? Oder noch kürzer, die Mathematik würde von der hypothetischen) die Metaphysik von der absoluten Notwendigkeit handeln

[96] Ao contrário das obras matemáticas que Bolzano redigiu após o *Beiträge*, esta foi concebida, assim como aquela, como uma forma de criar uma nova doutrina sobre os fundamentos da matemática, como um grande projeto de reorganização, e não como uma contribuição para resultados específicos, como haviam sido as obras intermediárias entre elas. O *Groeßenlehre* abrange o que se chama nos dias atuais de Aritmética, chamada por ele de *teoria pura dos números, Reinen Zahnlehre;* Álgebra, em *Sobre a determinação dos números por meio de equações, Von der Bestimmung der Zahlen durch Gleichungen*; Análise, nas obras *Teoria das funções*, *Funktionenlehre*; e *Melhorias e acréscimos à teoria das funções, Verbesserungen und Zusätze zur Funktionenlehre*; Teoria dos Conjuntos em *Paradoxos do Infinito, Paradoxien des Unendlichen*; e Geometria, nas obras *Doutrina do tempo, Zeitlehre,* e *Ciências do espaço, Raumwissenschaft.*

[97] Vor mehr als dreißig Jahren glaubte ich freilich eine noch schärfere Grenze zwischen den mathematischen und anderen Wissenschaften dadurch ziehen zu können, dass ich der Mathematik alle diejenigen Wahrheiten zuwies, in welchen nicht von dem wirklichen Dasein, sondern nur von den Bedingungen zur Möglichkeit des Daseins die Rede ist. Allein ich gab diesen Gedanken wieder auf, seit ich mich besann, dass ja nicht alle mathematischen Lehren sich nur auf Dinge beziehen, die entweder wirklich sind, oder zur Wirklichkeit doch gelangen können u. also Möglichkeit haben, sondern dass z. B. die Lehren der Arithmetik oder auch zwar der Syntaktik eines weit allgemeineren Umfanges sind, und auch von Gegenständen, die nie wirklich werden können, z. B. von bloßen Begriffen und Sätzen an sich gelten (*Groeßenlehre*, Anmerkung).

> outras ciências puramente conceituais... (*Groeßenlehre*, Observações).[98]

Também não concorda "que a matemática seria uma ciência da razão pela construção de conceitos por meio da intuição pura" (*Groeßenlehre*, Observações),[99] e afirma:

> Este é um ponto de vista com o qual eu não posso concordar, pois, com base nas razões mais importantes, eu acredito no contrário, e pretendo provar neste livro que todas as verdades matemáticas podem ser provadas somente por meio de conceitos, e que devem ser provadas assim para merecerem ser chamadas corretamente de científicas (*Grossenlehre*, Observações).[100]

Para além de suas próprias declarações, como é possível compreender esta mudança de posição de Bolzano sob um aspecto histórico? Como compreender que em 1810 ele houvesse contrariado a posição tradicional, mas nas décadas de 30 e 40 tenha, pelo menos aparentemente, voltado a ela?

Se avaliarmos essa mudança pelo aspecto da dicotomia entre definir a matemática pelos seus métodos ou pelos seus objetos, pode-se afirmar que Bolzano oscilou entre os dois pólos: a posição de 1810, de que a matemática trata das leis às quais tudo o que pode ser objeto de representação se conforma, expressa uma concepção de matemática que se adéqua aos métodos matemáticos, e assim ele elimina de sua definição a noção de objetos, que no início do século XIX ainda eram as grandezas discretas e contínuas. Na década de 1830, ele voltou atrás e, ao não conceber que fosse possível uma ciência sem objetos, decidiu manter a definição tradicional da matemática como *Wissenschaft der Größen* ampliando, entretanto, consideravelmente a noção de *Größen*, de forma a abranger até as coisas que não são possíveis, como as

---

[98] Wäre Kants Lehre von den reinen Anschauungen welche mit einer kleinen Abänderung noch gegenwärtig von Vielen angenommen wird, gegründet: dann gäbe es wohl eine sehr bestimmte Scheidewand zwischen den mathematischen u. allen übrigen reinen Begriffswissenschaften (*Groeßenlehre*, Anmerkung).

[99] dass die Mathematik eine Vernunftwissenschaft durch Konstruktion der Begriffe vermittelst reiner Anschauungen wäre (*Groeßenlehre*, Anmerkung).

[100] Allein dies Ganze ist eine Ansicht, der ich aus den wichtigsten Gründen nicht beistimmen kann, der ich im Gegenteil glaube, und in diesem Buche durch die Tat darzutun hoffe, dass alle mathematischen Wahrheiten aus bloßen Begriffen erwiesen werden können und müssen, soll ihre Darstellung den Namen einer echtwissenschaftlichen verdienen (*Groessenlehre,* Anmerkung).

representações, proposições e verdades em si, que ele concebeu pela primeira vez no *Wissenschaftslehre*.

Suas diferentes definições de matemática têm o mérito de mostrar a oscilação, mas não constituem o aspecto mais importante de sua obra matemática, que reside em seu projeto de reformulação da matemática, que pretendia, por meio do que se chamou de programa de rigor aritmético ou de aritmetização, transformar a matemática numa ciência fundamentada em conceitos. Para mostrar a necessidade desta reformulação, ele escolheu um teorema exemplar para seus propósitos: o que nos dias atuais se conhece como *Teorema de Bolzano*, um caso particular do *Teorema do Valor Intermediário*. Essa demonstração encontra-se na *Prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação*,[101] sua mais importante obra matemática, redigida em 1817 (1905), que pôs no centro da matemática a aritmetização e o rigor, por demonstrar o teorema em questão sem a utilização da intuição visual da reta geométrica. Embora esta obra não tenha tido o impacto imediato desejado pelo autor, ela enuncia os princípios de reorganização da matemática que no final do século XIX seriam amplamente utilizados pelo círculo de Weierstrass e por Cantor, e que influenciaram todo o desenvolvimento da matemática do século XX.

Tal como aparece nos livros didáticos de cálculo da atualidade, o resultado pode assim ser enunciado, em linguagem que não exija conhecimento específico da matemática: dada uma função contínua – uma função que não tenha *pulos* – que, ora assume um valor positivo, ora um negativo, então necessariamente ela assumirá, pelo menos em um ponto, o valor zero. Mas para Bolzano, este era um resultado algébrico, válido para polinômios gerais, e não para funções contínuas, como os livros de cálculo da atualidade ensinam.

Este resultado era utilizado desde a Antigüidade, e até meados do século XVIII, em geral se acreditava que sua obviedade tornava desnecessário demonstrá-lo. A partir da segunda metade do século XVIII, matemáticos como Kästner (1719–1800), Clairaut (1713-1765), Lacroix (1765–1843), Metternich, Georg Simon Klügel (1739-1812), Lagrange, Rösling e Gauss começaram a tentar justificá-lo ou demonstrá-lo

[101] De agora em diante, o artigo será denominado RB, seguindo o padrão internacional de citações de Bolzano, em referência às iniciais das duas primeiras palavras que aparecem em maiúsculo no título do artigo – *Rein* e *Beweis*, quando em citações, e *Prova Puramente Analítica* quando no corpo do texto.

rigorosamente (Bolzano, 2004b, Prefácio). No entanto, todos eles utilizaram, na tentativa de demonstração, os próprios conceitos que se deveriam provar, o que levou Bolzano a acusar tais tentativas de serem circulares. Ao não compreenderem que uma demonstração adequada exigiria não utilizar em seu bojo noções como espaço, tempo ou conceitos geométricos, eles assumiam como pressuposto para a demonstração conceitos que deveriam ser provados. No prefácio de seu artigo, Bolzano "explicita sua concepção de demonstração científica e mostra de que forma a demonstração que ele chama de puramente analítica se enquadra em sua concepção de ciência" (CLÍMACO, 2007, p. 17).

Nesta obra, Bolzano define a convergência de séries de maneira rigorosa; dá uma definição precisa da continuidade em termos de linguagem, e resolve assim a questão dos *infinitamente pequenos* e do uso de noções intuitivas ou *alheias à matemática pura*, que eram duas das maiores dificuldades da época. Esta maneira de formular estes conceitos resultou na elaboração do caminho para a solução, quando não a solução direta, da maior parte dos problemas de fundamento do cálculo.

Newton tinha tentado justificar o uso da continuidade recorrendo à intuição do movimento, e Leibniz formulando o postulado da continuidade. Lagrange já tinha advertido sobre o fato de que as concepções de tempo e movimento não deveriam ser utilizadas na matemática, mas foi Bolzano quem estendeu esse esforço até os fundamentos, indo muito além do feito até então, o que exigiu que se desse uma definição conceitual da continuidade. Mostrou ainda que no caso de séries infinitas é necessário considerar questões de convergência, que no caso dos *restos de Lagrange*[102] eram análogas a considerações de limites.[103] Utilizando os resultados de Lagrange, Bolzano fundamentou o contínuo no discreto e definiu de maneira coerente, embora não exaustiva, as regras para o uso dos conceitos de infinito e de infinitesimal.

[102] Os *restos de Lagrange* são uma fórmula criada por Lagrange para calcular de maneira finita uma série infinita, atribuindo, após um determinado número de termos, uma fórmula calculável diretamente e cujo valor aproximado corresponde à soma dos fatores que faltaria, ou restaria, somar.

[103] É possível verificar isso na afirmação de Bolzano de que se a seqüência $\mathrm{F}_1(x), \mathrm{F}_2(x), \ldots$ é tal que a diferença entre $\mathrm{F}_n(x)$ e $\mathrm{F}_{n+r}(x)$ se torna e permanece menor do que qualquer quantidade dada conforme n aumenta indefinidamente, então existe um e somente um valor para o qual a seqüência se aproxima tanto quanto se queira. Posteriormente, se percebeu que esta proposição tem também relação com a definição de números reais e de contínuo aritmético, mas Bolzano não definiu adequadamente estes conceitos.

Definiu a continuidade de uma função indicando claramente, pela primeira vez, que a idéia básica da continuidade deveria ser encontrada no conceito de limite e articulando por fim o método discreto, numérico, como *explicador* do contínuo. Essa definição é fundamental para o Cálculo nos tempos atuais, e poucos anos depois foi formulada de maneira semelhante por Cauchy (1789-1857). Nos trabalhos de Bolzano e de Cauchy o conceito de limite foi finalmente definido de maneira puramente aritmética e conceitual, sem o uso de elementos geométricos, espaço-temporais ou teológico-metafísicos.

A *Prova Puramente Analítica* pode ser considerada um marco da aritmetização da análise, fenômeno que tirou do centro da matemática a questão epistemológica e intuitiva, pondo em seu lugar a representação dos conceitos por meio da linguagem.

> Os mais importantes resultados dessa obra estão contidos na grande maioria dos livros elementares de análise matemática, particularmente os teoremas que ficaram conhecidos como *Critério de Convergência de Cauchy* e o *Teorema do Valor Intermediário*; também está contido nessa obra o teorema chamado por Sebestik de *Teorema de Bolzano-Gauss* (que conhecemos atualmente como o teorema do limite superior), que teria dado origem ao conhecido *Teorema de Bolzano-Weierstrass* (CLÍMACO, 2007, p. 44).

Das três tentativas de demonstração criticadas por Bolzano em seu prefácio longo e repleto de argumentos filosóficos, uma tenta justificar o teorema após formulá-lo de modo geométrico, o que levou Bolzano a considerá-la uma “violação intolerável do método correto” (BOLZANO, 2004b, Prefácio, §1), por “derivar verdades da matemática pura (ou geral) (i.e., aritmética, álgebra, análise) de considerações que valem para uma parte meramente aplicada (ou particular, mais exatamente, a geometria)” (*ibidem*, Prefácio, §1). A segunda tentativa criticada, ao incluir o conceito de tempo na elaboração do teorema, termina por repetir inadvertidamente o que se pretendia provar como se fosse a premissa. A terceira comete erro semelhante por não utilizar uma definição adequada de continuidade, e novamente tentar partir de uma proposição que, se corrigida, seria idêntica à proposição que se pretendia provar. Por fim, a quarta tentativa de prova erra por não ter uma noção adequada de continuidade e não reconhecer a existência de infinitos pontos entre dois pontos quaisquer, incidindo na crença errônea de que existe um último valor negativo e um último valor positivo dentre os quais só haveria o ponto correspondente ao zero.

Os conceitos definidos por Bolzano – limite, continuidade, convergência – para demonstrar o resultado em questão constituem os fundamentos mais importantes da nova forma de fazer e conceber a matemática: a análise aritmetizada. Esta transformação tornou possível uma melhor comunicação entre as diversas áreas da matemática, e também que as noções de tempo, movimento e espaço – até então fundantes, respectivamente, da cronometria, da mecânica e da geometria[104] – passassem a ser fundamentadas na análise aritmética, que se tornou assim uma linguagem de toda a matemática. Portanto, mesmo que Bolzano ainda tenha definido, no *Groeßenlehre*, a matemática como ciência das grandezas ou quantidades, sua obra contribuiu para que ela deixasse de ser definida por seus objetos de aplicação empírica.

É possível afirmar que a grande inovação matemática de Bolzano foi representar o contínuo, que é algo intuitivo e provém dos sentidos do sujeito cogoscente, em termos discretos, que permite a representação dos conceitos matemáticos na forma de proposições. Embora a percepção dos sentidos humanos seja contínua, para poder generalizar e aplicar o conhecimento matemático são necessários modelos discretos desse contínuo. Ao demonstrar algo óbvio utilizando conceitos abstratos e difíceis de visualizar ou intuir, Bolzano inaugurou uma nova fase da matemática, em que a relação entre as idéias tornou-se mais importante do que a referência a alguma propriedade inerente aos sentidos (CLÍMACO, 2007, p. 17).

A construção de modelos discretos tornou possível transformar teoremas matemáticos em proposições puramente conceituais e demonstrá-las usando somente conceitos,[105] em que o princípio da contradição pode ser aplicado livremente, independente das transformações que ocorrem no mundo. Esta é uma das razões que nos levam a afirmar que a aritmetização se inspirou e contribuiu para certa forma de platonismo, e a identificar a tendência dos matemáticos que procuraram reduzir a matemática à aritmética como platonista. Afinal, como Platão, eles tentaram criar um

[104] Cf. Bolzano (RB, §13, 2004, p. 272) e Russ (2004, p. 272). Esta subdivisão tornou-se caduca no século XIX, conforme o ideal de matemática elaborado por Bolzano e Cauchy foi prevalecendo. A cronometria e a mecânica deixaram de ser consideradas partes da matemática, e a geometria passou a fundamentar seus conceitos na aritmética, e não na noção intuitiva de espaço empírico.

[105] Mesmo que na atualidade muitos matemáticos concebam os números reais como se fossem um contínuo, ou que de alguma forma substituam o contínuo, os números reais são apenas modelos discretos desse contínuo.

mundo em que os conceitos ou ideias não pudessem ser modificados por nenhum acidente externo. Por outro lado, a criação e a explicitação de conceitos por meio da linguagem, própria desta forma de platonismo, levaram a uma reafirmação da importância da lógica e a uma busca por facilitar a publicização e a comunicação do conhecimento.

A relação entre a transformação realizada por Bolzano na matemática e a dicotomia entre defini-la como sintética ou analítica pode ser mais bem compreendida à luz da divisão que Boutroux (1992) fez da história da matemática em três períodos: no primeiro prevaleceram as concepções de Platão e Euclides; no segundo, as concepções de Descartes e Leibniz,[106] no terceiro, as de Bolzano e Cantor. Nos dois primeiros períodos prevaleceu o ideal sintético da matemática, em que reinava uma harmonia pré-estabelecida "entre os fins e os métodos da ciência matemática... entre os objetos perseguidos por esta ciência e os procedimentos que lhe permitem alcançar estes objetos" (BOUTROUX, 1920, p. 193).

Assim, uma ruptura do ponto de vista dos fundamentos somente ocorreu na mudança do segundo para o terceiro período, quando, no início do século XIX, a matemática pura surgiu, baseada em análise de provas e na criação de conceitos cada vez mais abstratos, dando início ao rompimento da harmonia entre métodos e objetos matemáticos e à compreensão da matemática como ciência analítica baseada somente em pensamento conceitual. Afinal, para completar a transformação iniciada por Descartes, eram necessários instrumentos que ele não havia desenvolvido: o raciocínio operativo, a perspectiva funcionalista e o pensamento relacional. Este aspecto tornou-se dominante no início do século XIX, após a aritmética ter se tornado a linguagem universal da matemática e, algumas décadas depois, a álgebra ter se transformado numa ciência de estruturas.

A ruptura a que se refere Boutroux levou a matemática a tornar-se uma ciência baseada em provas conceituais, possibilitando que a aritmetização, iniciada com a geometria analítica de Descartes, se tornasse dominante e possibilitasse o enorme crescimento da atividade matemática ocorrido no início do século XIX. Essa

[106] Boutroux (1920, p. 127-128) discorda da historiografia tradicional da matemática, que tende a separar Descartes e Leibniz com o argumento de que o primeiro recusava a utilização de métodos infinitos, e o segundo os empregou como parte fundamental de seu projeto. Ele justifica esta discordância afirmando que ela só faria sentido se não aceitássemos que a aproximação por séries infinitas não conduz a resultados exatos e a tratássemos como se fosse um resquício da noção de movimento ou dinâmica.

predominância da aritmetização possibilitou que, pela primeira vez na história da matemática, fosse realizado um grande número de conexões entre áreas muito diferentes.

Mas a pretensão de Bolzano e dos matemáticos platonistas de construir provas apoiados somente em conceitos teve contrapartidas que, em certo sentido, haviam sido previstas por Kant. Como o próprio título do artigo *Prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos* <u>*existe*</u> *pelo menos uma raiz real da equação* diz, trata-se de uma prova de existência, da existência de um ponto para o qual o polinômio assumiria o valor zero. Mas, seria possível obter provas de existência por meios puramente conceituais, eliminando o recurso à intuição? Kant havia afirmado que mostrar a possibilidade lógica ou a descrição linguística de um conceito não significava mostrar que existe um objeto real que lhe corresponda, ou seja, nem sempre conceitos imaginados correspondem a realidades *em si*, e as palavras não criam um mundo ou universo objetivo (*Crítica*, A 598/ B 626).[107]

De fato, para realizar sua prova, Bolzano precisou, numa passagem decisiva, utilizar o fato de que toda sequência numérica infinita convergente resulta num número. Mas não definiu os conjuntos numéricos exaustivamente, e sim usou implicitamente a noção intuitiva de reta presente no senso comum, e que os matemáticos de então também tinham, como uma grandeza física que não sofre interrupção, o que significa pressupor, sem reconhecê-lo explicitamente, que existe um número que corresponde a cada ponto da reta. Por conceber a aritmetização como busca de fundamentos objetivos e estáticos, Bolzano rejeitou a ideia de que o Teorema do Valor Intermediário pudesse ser um axioma ou um postulado, com o argumento de que "todos certamente vêm que tal afirmação complexa não é uma verdade básica, mas teria que ser provada" (2004b, Prefácio, §3).

Mas, se se concebem os axiomas de um ponto de vista do método hipotético-dedutivo, característico da corrente chamada de axiomática, como o fizeram Giuseppe Peano (1858-1932), Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) e David Hilbert

[107] A seguinte citação de Kant expressa bem sua crítica: "A leve pomba, ao sulcar livremente o ar, cuja resistência sente, poderia crer que no vácuo melhor ainda conseguiria desferir o seu vôo. Foi precisamente assim que Platão abandonou o mundo dos sentidos, porque esse mundo opunha ao entendimento limites tão estreitos e, nas asas das idéias, abalançou-se no espaço vazio do entendimento puro. Não reparou que os seus esforços não logravam abrir caminho, porque não tinha um ponto de apoio, como que um suporte, em que se pudesse firmar e aplicar as suas forças para mover o entendimento" (*Crítica*, B8-B9).

(1862-1943), apresenta-se uma perspectiva diferente. Dedekind, cerca de setenta anos depois da publicação do *Prova Puramente Analítica*, confirmou a afirmação kantiana de que para provar a existência de algo é necessária a intuição, ao afirmar que a correspondência entre a reta e o conjunto dos números reais deve ser simplesmente postulada de modo que seja evidente para o sujeito,[108] e assim não cabem demonstrações desta correspondência.

Em suas palavras:

> Eu vejo a essência da continuidade (...) no seguinte princípio: se uma repartição de todos os pontos da reta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto de uma das classes está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da reta em duas partes... Creio não errar admitindo que toda a gente reconhecerá imediatamente a exatidão do princípio enunciado. A maior parte dos meus leitores terá uma grande desilusão ao aprender que é esta banalidade que deve revelar o mistério da continuidade... Que cada um ache o princípio enunciado tão evidente e tão concordante com a sua própria representação da reta, isso satisfaz-me ao máximo grau, porque nem a mim nem a ninguém é possível dar deste princípio uma demonstração qualquer. A propriedade da reta expressa por este princípio não é mais que um axioma, e é sob a forma deste axioma que nós pensamos a continuidade da reta, que reconhecemos à reta a sua continuidade. Se o espaço tem, de fato, uma existência real, não é algo necessário para que ela (a reta da qual tratam os matemáticos, nota minha) seja contínua... e mesmo se soubéssemos com certeza que o espaço é descontínuo, ainda assim não há nada que nos proiba... de preencher estes furos no pensamento, tornando assim a reta contínua (Dedekind, 1963, p.11-12; original de 1888).

Da mesma forma, a definição dos números irracionais por intervalos encaixados, descrita por Richard Courant (1888-1972), que foi aluno de Hilbert, e Robbins Herbert (1915-2001) por meio da afirmação de que "um ponto irracional é completamente descrito por uma seqüência de intervalos racionais encaixados de comprimentos tendendo a zero" (COURANT & HERBERT, 2000, p.82), também não é mais que uma forma de postulação explícita de algo que intuímos da noção de continuidade espaço-temporal. Isso porque, concebida desta forma, "a existência sobre a reta numérica

[108] Postular, literalmente, significa pedir ou solicitar; no caso, solicitar que o leitor aceite determinada afirmação com o fim de provar outra. Um postulado é uma afirmação assumida como válida (ou "verdadeira") dentro de um sistema; isso significa que ela é uma espécie de convenção.

(considerada como uma reta) de um ponto contido em cada seqüência de intervalos encaixados com pontos extremos racionais” (2000, p.82) é considerada como

> um *postulado fundamental da Geometria*... Nós a aceitamos, da mesma forma como aceitamos outros axiomas ou postulados em Matemática, por causa de sua plausibilidade intuitiva e sua utilidade na construção de um sistema consistente de pensamento matemático... Construir esta definição, após ter sido levado a uma seqüência de intervalos racionais encaixados por meio de um sentimento intuitivo de que o ponto irracional “existe”, significa dispensar o apoio intuitivo com o qual nosso raciocínio procedeu e compreender que todas as propriedades matemáticas de pontos irracionais podem ser expressas como propriedades de seqüências de intervalos racionais encaixados (2000, p.82-83).

De acordo com a tendência axiomática ou hipotético-dedutiva da matemática, o Teorema do Valor Intermediário poderia, ao contrário do que pensou Bolzano, ser considerado um axioma, da mesma forma que o teorema de Pitágoras (571/570-497/496) pode ser tratado como um axioma da geometria euclidiana pela simples razão de que ele é logicamente equivalente ao postulado das paralelas. Concebendo os axiomas como proposições que tratam de conceitos simples ou primitivos, Bolzano também não aceita esta última equivalência, pela mesma razão. Para a tendência hipotético-dedutiva, questões de contexto, relacionadas a questões evolutivas e genéticas, ganham importância maior, o que a aproximou, em certo sentido, da concepção kantiana. Por esta razão Kant foi tão importante para Peirce e Piaget, e também para aqueles que concebem a matemática de maneira dinâmica, e não estática.

Alguns autores afirmam que Bolzano teria elaborado a aritmetização da análise porque não confiava na intuição ou nos sentidos como fonte de verdade. Brown (1997), por exemplo, parte desta afirmação para questionar a necessidade de provas aritméticas para a matemática, defendendo que um desenho adequado pode servir como demonstração. Mas essa afirmação não resiste sequer à leitura do prefácio da *Prova Puramente Analítica*, em que ele afirma claramente que “não há nenhum questionamento referente à *correção*, nem certamente à *obviedade*, desta proposição geométrica” (BOLZANO, 2004b, §1). A preocupação de Bolzano não era com mostrar a veracidade daquilo que todos sabem, mas sim com ordenar as verdades de maneira objetiva, das mais gerais para as mais particulares.

O alcance da influência de Bolzano na matemática parece ter sido suficientemente bem estabelecido nas últimas décadas, não sendo o objetivo deste trabalho procurar novas fontes documentais para rever ou precisar alguma afirmação presente nos artigos mais recentes. No entanto, como a grande maioria dos livros de história da matemática, disponíveis para os leitores de língua portuguesa não apresentam as descobertas das últimas décadas; e historiadores da matemática (Roque (2012), Schubring (2004)) bem conceituados no Brasil insistem em minimizar a importância da transformação da matemática ocorrida no início do século XIX, julgo necessário e oportuno mostrar, de um lado, essas últimas descobertas e, de outro, os equívocos das críticas aligeiradas à *historiografia tradicional*.

Boyer (1949), em seu importante livro sobre história do cálculo, afirma:

> Embora as idéias de Bolzano indicassem a direção na qual a formulação final do Cálculo se assenta e da qual muito da matemática do século XIX seguiria, elas não constituíram a influência decisiva nesta determinação. Seu trabalho permaneceu muito pouco divulgado até que fosse redescoberto por Hermann Hankel mais de meio século depois. Felizmente, no entanto, o matemático A. L. Cauchy criou idéias similares aproximadamente na mesma época e conseguiu afirmar a tese da descrição da continuidade por meio de limites como básica no Cálculo.

Mais recentemente, Dugac (1972, 1980), Sundholm (2000), Sinaceur (1973) e Schubring (1993) mostraram que esta influência foi mais ampla do que Boyer acreditava em 1949. Em particular, alguns mostraram que Bolzano influenciou, sim, as obras de Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), Cantor e Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), e talvez até mesmo a de Augustin Louis Cauchy (1789-1857), embora seja difícil precisar até que ponto.[109] Mas deve-se reconhecer que as obras matemáticas de Bolzano não tiveram o impacto que ele esperava, talvez devido à distância dos grandes centros, ao fato de ele não ter se tornado professor de matemática, de sua crítica filosófica dos problemas matemáticos ter sido muito avançada para sua época ou não ter atraído a atenção devida dos matemáticos e, em parte, por terem sido publicadas em periódicos menores. Durante sua vida, foram feitas poucas resenhas de suas publicações.

[109] A diferença de estilo mostrada por Freudenthal (1971) parece eliminar definitivamente as suspeitas de plágio levantadas por Grattan-Guiness (1970).

Apesar dos estudos mostrarem que filósofos e matemáticos do final do século XIX, como Frege, Cantor e Weierstrass, e seu contemporâneo Cauchy, tinham conhecido pelo menos parte de sua obra, o patrimônio intelectual de Bolzano não foi gerido por seus discípulos de maneira a evitar que sua obra fosse muito pouco divulgada e estudada em artigos e livros acadêmicos. Com efeito, muitas de suas criações matemáticas foram apresentadas por outros matemáticos que, ou desconheciam completamente sua obra, ou a utilizaram sem o devido reconhecimento. Assim, a proposta elaborada por Bolzano de profunda reorganização do conhecimento matemático só foi posta em prática por equipes de matemáticos profissionais na segunda metade do século XIX. O nome de Bolzano começaria a aparecer nos escritos dos grandes matemáticos somente em 1852, quando Hermann Hankel (1839-1873) reconheceu a importância de seu rigor no estudo de séries infinitas. Em 1881, Otto Stolz (1842-1905) republicou vários de seus artigos matemáticos.

Schubring (1993) mostra que três importantes artigos matemáticos redigidos por Bolzano tiveram suas resenhas publicadas num periódico não especializado ao qual os matemáticos de Berlim tinham acesso; e também que matemáticos importantes da época, como Creele (1780-1855) e Abel (1802-1829) conheceram estes artigos. No entanto, sua afirmação de que “pode-se deduzir... que Berlim foi um centro de recepção e transmissão do trabalho matemático de Bolzano” (1993, p. 50) não encontra sustentação alguma, pois até o momento não foi encontrado nenhum grande matemático da época que tenha citado Bolzano em uma de suas obras, e não é possível reconhecer em outros matemáticos da época sua influência direta.

E mesmo que eventualmente tal citação fosse encontrada, ela não anularia o fato de que a proposta de reformulação da Matemática feita por Bolzano não foi reconhecida por seus contemporâneos, seu estilo possivelmente foi visto como difícil e distante dos problemas práticos, e que os princípios elaborados por ele somente seriam compreendidos e utilizados, ou em alguns casos recriados de maneira independente, na segunda metade do século XIX. O próprio Bolzano reconhece, no prefácio do RB, de 1817, que suas obras não atraíram atenção suficiente da comunidade de matemáticos profissionais da época, e nos anos seguintes sua situação de isolamento não mudou.

Tampouco é possível concordar com a afirmação de Schubring, em seu *Conflicts Between Generalization: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in*

17th-19th Century (2004), de que Cauchy e Bolzano não foram os principais formuladores da aritmetização da matemática e da definição de continuidade, e que, então, as obras de todos os outros historiadores que estudam a matemática do século XVII ao século XIX estão errados. Embora Schubring tenha feito uma pesquisa bibliográfica realmente muito ampla desse período, ele não estudou com a devida profundidade os *conceitos* envolvidos e não analisou a *natureza conceitual* da mudança realizada.

Sua afirmação de que em Leibniz já se encontra a noção fundamental que mudaria o conceito de continuidade – que ele diz que consiste na compreensão de que existe, na função, uma relação entre as modificações nas ordenadas e as modificações nas abscissas – é incorreta, pois a maior mudança de concepção não consistiu numa *compreensão* geral desta relação, mas sim no seu tratamento aritmético. E foi exatamente esta mudança de tratamento que transformou o que Leibniz considerava um princípio metafísico numa questão aritmética, o que levou a uma revolução nos fundamentos da matemática, que a transformou profundamente, pois até o século XVIII, em grande medida, ela servia às ciências práticas e carecia de objetos próprios, sendo alguns de seus mais importantes conceitos – funções, séries e derivadas – vistos como instrumentos destas ciências. Com a transformação realizada por Bolzano e Cauchy, esses conceitos passaram a ser vistos como objetos próprios da matemática, a serem estudados de maneira separada, ou pelo menos bem distante, de seu uso em outras ciências ou de noções intuitivas.

Schubring (2004) e Roque (2012) parecem não ter compreendido essa mudança dos objetos de que trata a matemática, o fim de sua divisão em cronometria, mecânica e geometria, nem o papel que a linguagem passou a ocupar. Daí, talvez, sua insistência em críticas genéricas aos supostos historiadores *tradicionais* e, em estudos que tratam de um período extremamente amplo, em desmentir aqueles que estudaram em detalhes e de maneira profunda as transformações conceituais realizadas neste período chave, a virada do século XVIII para o século XIX. O fato de que Leibniz não tenha explicitado na forma de linguagem aritmética a relação entre as modificações ocorridas nas variáveis não é um detalhe técnico, pois, como vimos, foi exatamente esta explicitação que permitiu a transformação da matemática descrita anteriormente.

A própria noção de justificativa do conhecimento havia mudado com a *Crítica* de Kant. No final do século XVIII e início do século XIX, sobretudo a partir do surgimento da indústria, os pensadores e cientistas não duvidavam de que a razão pudesse ter objetividade. Não havia mais a preocupação típica dos racionalistas a respeito de se o conhecimento seria fruto de sonhos ou alucinações de um indivíduo isolado: o conhecimento era reconhecido pela sociedade como um todo, e os filósofos e matemáticos do século XIX procuraram torná-lo comunicável.

Não há, pois, exagero algum, nem distorção, na leitura feita pelos historiadores que caracterizam como uma *revolução* a aritmetização da análise e o apelo de Bolzano para que não se usassem elementos relativos ao movimento, ao espaço e ao tempo nas demonstrações matemáticas. O que falta a estes historiadores é uma compreensão adequada da relação entre os problemas internos da matemática e as transformações sociais ocorridas na época; e o que falta para os historiadores ligados à Educação Matemática é uma compreensão adequada da relação entre o surgimento da Matemática Pura e as necessidades de comunicação da época, bem como da relação destes fenômenos com a Revolução Industrial.

3.3 Intuição e conceito na *Doutrina da Ciência – Wissenschaftslehre*

A defesa que Bolzano fez das reformas educacionais, religiosas e sociais teve grande impacto na Bohemia. Durante o século XIX, suas ideias foram defendidas e vividas por religiosos, nacionalistas, intelectuais e políticos reformadores que influenciaram a sociedade da Bohemia, bem como a reforma do sistema educacional austríaco, implementada em 1780 por Leo Thun, amigo de Bolzano que se tornou ministro da Educação do Império Austríaco. No entanto, apesar de sua inovação e capacidade de compreender e discutir, com propriedade, os grandes e difíceis temas da época, a influência de seus escritos filosóficos, assim como os matemáticos, demorou a acontecer no ambiente acadêmico.

Além da censura, que dificultou a publicação e divulgação de suas obras, e do fato de que Bolzano se encontrava distante dos grandes centros científicos e filosóficos da época, suas doutrinas não foram bem aceitas no contexto institucional e intelectual dominado, nos países de língua alemã, pelo idealismo de Fichte, Hegel e, em parte, sobretudo no Império Austríaco, por psicologistas como Johann Friedrich Herbart (1776–1841) e Beneke (1798-1854).

> Os filósofos viriam a conhecer a obra de Bolzano e reconhecer sua originalidade somente quando Brentano (1824-1898), então colega de Robert Zimmermann (1838-1917)[110] e professor de Edmund Husserl (1859-1938), realizou um seminário, na Universidade de Viena, no inverno de 1884-1885 (LAPOINTE, 2003, p. 14) sobre o livro de Bolzano *Paradoxos do Infinito* (1991, 1851). Tal apresentação fez despertar a curiosidade de seus estudantes, em particular de Husserl e de Kazimierz Twardowski (1866-1938) (OTTE e CLÍMACO, 2013, p. 3).

Após estudar o *Wissenschasftslehre* de Bolzano, Twardowski teceu críticas, em sua tese de habilitação *Sobre o conteúdo e o objeto das representações*, *Zur Lehre vom* Inhalt und *Gegenstand der Vorstellungen* (1804), à teoria da intencionalidade de Brentano, e Husserl teria uma “crucial inspiração” (SMITH, 2007, p. 16) para a construção de sua fenomenologia na concepção de Bolzano de que a lógica trata de *proposições em si*[111] independentes do pensamento, além de basear sua definição de analiticidade de uma proposição na definição que Bolzano fez no *Wissenschaftslehre*. A partir de então, os filósofos começaram a estudar, divulgar e traduzir a obra de Bolzano com vistas aos problemas filosóficos do século XX. Por meio de Twardowski

> as ideias de Bolzano viriam a influenciar a escola polonesa de lógica que ele (Twardowski) viria a fundar, bem como a criação, nesta mesma escola, da concepção de lógica como teoria formal das teorias dedutivas, o que por sua vez influenciaria a criação da filosofia analítica (OTTE e CLÍMACO, 2013, p. 4).[112]

---

[110] Zimmermann havia ficado em posse de grande parte dos manuscritos de Bolzano, além de ter sido por ele encarregado de finalizar seu *Groeßenlehre*. No entanto, sua viragem doutrinária lhe deixou desinteressado de continuar herdeiro da obra de Bolzano.

[111] Bolzano quase sempre usa o termo “proposição” ou “proposições” (Satz ou Sätz, e *Satze, Sätze* ou *Sätzen*) no lugar de juízo ou juízos (*Urtheil* ou *Urtheilen*).

[112] Devido ao fato de que Frege e diversos matemáticos que conheceram a obra de Bolzano não o citaram, a filosofia analítica e a matemática se desenvolveram de maneira relativamente inconsciente da herança que receberam de Bolzano.

Em *Wissenschaftslehre*, sua principal obra filosófica, escrita entre os anos 1819 e 1837, depois que foi proibido de lecionar, Bolzano discute de maneira mais completa, aprofundada, generalizada e sistematizada muitos dos princípios elaborados em seus escritos anteriores de matemática, teologia e lógica, visando, então, construir uma estruturação hierárquica das proposições das ciências e da filosofia. Em 1817, no Prefácio da *Prova Puramente Analítica*, Bolzano havia confessado sua intenção de chamar a atenção dos matemáticos para a necessidade de uma reorganização completa dos fundamentos de sua área do saber por meio de novo modo de demonstrar resultados já conhecidos e não provados adequadamente. Nas décadas de 20 e 30, a preocupação de Bolzano era mais ambiciosa: lançar as bases da reorganização da lógica e de todo o conhecimento.[113] Para demonstrar a necessidade desta nova forma de organização para garantir a coerência de todas as áreas do conhecimento, o *Wissenschaftslehre* dialoga com toda a produção lógica e filosófica da época.

Suas mais de 3.000 páginas compreendem o estudo dos aspectos objetivos e subjetivos do conhecimento, abrangendo o que nos dias atuais se chama de lógica, semântica e epistemologia. Mas, a questão do sujeito não é pensada no *Wissenschaftslehre* sob um aspecto construtivo ou, como se passará a chamar posteriormente, genético ou evolutivo, como Kant havia feito, e sim de maneira a mostrar a relação do conhecimento do sujeito com as representações, as proposições e as verdades *em si*, independentes do sujeito. Embora Bolzano não tenha negado a subjetividade, afirmou – o que foi retomado por Husserl – que ela não pode ser reduzida à psicologia.

A preocupação central de Bolzano também não era com a aplicação do conhecimento, com a forma como o sujeito o elabora, nem mesmo com a estrutura interna que o torna possível para o sujeito, mas com a ordenação das verdades de maneira que pudessem ser apresentadas numa hierarquia lógica e didaticamente organizada. Daí que uma de suas principais preocupações, expressas no *Wissenschaftslehre,* fosse distinguir, por meio de definições adequadas, entre a lógica e os conceitos, de um lado – representações, proposições e verdades *em si* – e a forma como o sujeito cognoscente adquire conhecimento dos conceitos, de outro.

[113] Embora os princípios específicos da matemática tenha deixado para seu inacabado *Groeßenlehre*.

O livro é formado por cinco partes, organizadas em quatro volumes. As duas primeiras, a *Doutrina dos Fundamentos*, *Fundamentallehre*, e *Doutrina dos Elementos*, *Elementarlehre* – que juntas ocupam os dois primeiros volumes num total de 268 tópicos – tratam da natureza e estrutura da ciência do ponto de vista objetivo. Na *Doutrina dos Fundamentos,*§17 a §45, Bolzano faz sua demonstração da existência de verdades em si (§17 a §33, parte 1, sob o título *Sobre a existência de verdades em si*, *Von Dasein der Wahrheiten an sich*, e a capacidade que os seres humanos têm de reconhecê-las (§34 a §45, sob o título *Sobre o conhecimento de verdades*, *Von der Erkenntnis der Wahrheit*), enquanto na *Doutrina dos Elementos*, §46 a §268, ele estuda as representações, proposições e verdades *em si*. As partes três, *Doutrina da Cognição*, *Erkenntnislehre,* de §269 a §321; quatro, *Arte da Invenção*, *Erfindungskunst,* §322 a §391; e cinco, *Doutrina da Ciência propriamente dita*, *Eigentliche Wissenschaftslehre, §392 a §718*, tratam da forma como os homens conhecem, descobrem e descrevem a realidade cientificamente.

O filósofo mais citado por Bolzano no *Wissenschaftslehre* é Kant, a quem ele se refere frequentemente para criticar, corrigir ou reconhecer a importância de determinada definição ou concepção. Mais do que a Kant, as críticas mais duras de Bolzano se dirigem à leitura que o idealismo alemão – do qual Bolzano demonstra ter profundo conhecimento e domínio de seus difíceis conceitos – e os psicologistas fizeram do texto kantiano.

Para Bolzano, seguido por Frege, Bertrand Russell (1872-1970) e pela filosofia analítica, o idealismo alemão e o psicologismo se distanciaram tanto das ciências naturais e da matemática, que era necessário reorganizar completamente a filosofia para que ela pudesse contribuir com as transformações daquelas. Bolzano criticou sistematicamente as posições da maior parte dos idealistas alemães e retomou a obra de Kant, diferenciando-se dela em alguns aspectos sempre que julgou necessário, cuja imprecisão, acreditava ele, tornou possível as interpretações equivocadas de Schelling, Fichte e Hegel, dentre outros. Para formular suas próprias definições, Bolzano com frequência recorreu aos gregos, a autores da Idade Média, a racionalistas e a alguns contemporâneos, que estudaram alguma questão da maneira que lhe parecia mais adequada.

A discussão feita a seguir sobre a importância desta vasta obra procurou destacar o que ela tem de mais original, em particular sua concepção de lógica e o papel que a linguagem ocupa nela; a relação entre intuição e conceito; o aspecto construtivo do conceito; e a preocupação demonstrada nessa obra com a apresentação do conhecimento de maneira estruturada e passível de ser comunicada ou ensinada.

Sua concepção de lógica como sinônimo de Doutrina da Ciência, *Wissenschaftslehre* (§ 6), e também como "aquela ciência que nos ensina como apresentar alguma ciência num livro didático" (WL, § 1),[114] é bem mais ampla do que a de Kant e seus contemporâneos. Ao longo do livro fica mais claro: a lógica é uma ciência que tem o objetivo de explicar como as ciências devem se organizar num livro didático de maneira ordenada, das mais gerais às mais particulares, mostrando como as primeiras fundamentam as últimas.

Bolzano afirma que, desde Parmênides, o que o autor chama de doutrina da ciência já existia sob vários nomes (canônica, dialética, tópica, lógica, heurística, órgano), e que o primeiro autor importante nesta área foi Aristóteles (WL, §3). Ao se perguntar as razões pelas quais sua definição de Doutrina da Ciência nunca havia sido feita antes, apesar de todos os avanços feitos na modernidade, ele chega à conclusão (WL, §4) de que o grande obstáculo para se chegar à definição adequada foi a afirmação de Kant de que "a lógica geral, *considerada como órganon*, é sempre uma lógica da aparência" (A 61/ B 86), ou seja, a concepção kantiana de que a lógica forneceria somente as regras de raciocínio, e portanto não teria conteúdo próprio, nem pode contribuir para corrigir o conteúdo de alguma ciência (A 60/ B 85).

Essa visão de que a lógica como ó*rganon* é uma ilusão ou um abuso (A 61/ B 85) foi alvo de dura crítica de Bolzano, que ampliou o escopo da lógica e a modificou de modo que ela pudesse auxiliar na análise filosófica dos conceitos por meio da explicitação dos seus elementos fundamentais e da hierarquização do conhecimento, mas sem pretender, como Leibniz, descrever um conceito de maneira completa.

Por outro lado, sob influência do Idealismo alemão e do psicologismo, muitos pensadores da época concebiam a lógica como estudo de pensamentos e fatos mentais, o que foi contestado por Bolzano, ao afirmar que

[114] dieser Wissenschaft, weil sie diejenige ist, welche uns andere Wissenschaften (eigentlich nur ihre Lehrbücher) darstellen lehret, im Deutschen den Namen Wissenschaftslehre zu geben.

> todos os eruditos que fizeram afirmações semelhantes às feitas acima partiram, sem mencioná-la, da premissa de que todos os objetos que pertencem à lógica se subsumem no conceito de um pensamento (*Gedanke*) (WL § 12, 2).[115]

Mas,

> Se a lógica estabelecesse não somente as leis que regem verdades pensadas ou pensamentos verdadeiros, mas todas as verdades, independentemente de elas terem sido pensadas por alguém... então a matéria da lógica teria sido definida [por tais eruditos que a definiram como estudo do pensamento, nota minha] de maneira muito estreita (WL § 12, 2).[116]

Afirma ainda que "a fonte da maior parte dos erros na lógica surgem do fato de não se distinguir entre verdades pensadas e verdades em si; proposições e conceitos pensados e proposições e conceitos em si" (WL, §12, (2)).[117][118] Afirmou que a lógica deve passar do pensamento ao "próximo passo mais elevado" (WL, §16),[119] que são as representações, proposições e verdades em si. E é sobre a base destes conceitos *em si* que Bolzano construiu sua original concepção de lógica.[120]

Desta forma, Bolzano também rejeita a concepção kantiana de que a lógica seria "um cânone[121] para o entendimento e para a razão em geral, mas apenas quanto à forma, pois abstrai de todo o conteúdo" (A 796/B 824). Afirmou, ao contrário, que a lógica

---

[115] Alle Gelehrte, die eine der obigen ähnlich lautende Behauptung aufgestellt, sind von der stillschweigenden Voraussetzung ausgegangen, dass sämtliche Gegenstände, die das Objekt der Logik ausmachen, unter den Begriff eines Gedankens gehören, d. h. dass sie, wenn sonst nichts Anderes, wenigstens Gedanken sein müssen.

[116] Wie also, wenn die Logik nicht bloß die Gesetze aufzustellen hätte, die für gedachte Wahrheiten (wahre Gedanken, wie man sie auch nennt), sondern für Wahrheiten überhaupt gelten? (...)Dann würde man ihr Gebiet zu enge begrenzt haben, wenn man es nur auf Gedanken, und nicht auf Sätze überhaupt ausgedehnt hätte.

[117] Deve-se reconhecer que, se Bolzano fazia tanta questão de diferenciar as *Vorstellungen* dos *Gedanken*, o mais correto seria não utilizar, neste caso, o termo "representação na consciência" para tratar de pensamentos. E para compreender melhor como ficaria o texto acima, basta substituir "representar" por "pensar".

[118] Ich hoffe dies später wirklich erweisen zu können, und es wird sich zeigen, dass die Quelle der meisten bisherigen Irrungen in der Logik nur eben darin liege, dass man, dies nicht beachtend, gedachte Wahrheiten von Wahrheiten an sich, gedachte Sätze und Begriffe von Sätzen und Begriffen überhaupt nicht scharf genug unterschieden habe.

[119] *Nächsthöhere.*

[120] Por outro lado, Bolzano criticou também a lógica de Hegel que, segundo ele, pretendeu saltar diretamente do pensamento para o ser.

[121] Kant definiu cânone como "conjunto dos princípios *a priori* do uso legítimo de certas faculdades cognitivas em geral" (A 796/B 824).

compreende um *cânone* e também um *órganon* (WL, §9), sendo uma ciência estruturada e com conteúdos próprios. Assim, ela deve tratar não apenas da forma ou do pensamento, mas também de seu conteúdo[122] ou matéria (WL, §16), que são as representações, conceitos e verdades em si. Ao contestar as ideias de que, por não ter conteúdo próprio, a lógica não contém verdades (WL, §14), e de que a lógica se reduz a uma arte ou técnica para encontrar verdades (WL, §19), Bolzano afirma que ela tem conteúdo próprio, e que ela abrange a arte da descoberta e também uma ciência propriamente dita.

Um dos aspectos mais originais da concepção de Lógica de Bolzano é que ele foi o primeiro a reconhecer que "entre nossas representações subjetivas e o mundo das coisas sobre as quais falamos, há um terceiro elemento: aquilo que nós dizemos" (COFFA, 1993, p. 76), e que este terceiro elemento não é formado "nem pelo conteúdo psicológico, nem pelo correlato do mundo em nossas representações" (*ibidem*, p. 76), mas consiste nas noções de representações, proposições e verdades em si. Foi também o primeiro pensador do século XIX a levar até as últimas consequências a concepção de Leibniz de simplicidade em termos de estrutura da linguagem[123], concluindo que o elemento mais simples, ao qual os conceitos complexos devem se reduzir, não são os mais intuitivos ou evidentes. Afinal, com frequência a intuição leva ao erro: mesmo aquilo que do ponto de vista da intuição é simples pode ser complexo do ponto de vista da lógica e da linguagem; inversamente, mesmo o que é óbvio pode ser decomposto em conceitos linguísticos mais simples, ainda que sejam mais difíceis de intuir ou visualizar.

Os elementos que fundamentam sua teoria do conhecimento são as *representações em si, Vorstellung an sich*, e é por uma combinação delas que se formam as *proposições em si, Sätze an sich*, que, sendo verdadeiras, constituem as *verdades em si, Wahrheiten an sich*.

Mas Bolzano define primeiro a noção de proposição em si como uma expressão que afirma ou nega algo, uma afirmação sobre a qual se possa dizer que é falsa ou

[122] Bolzano utiliza o termo *Stoff*, que os lógicos do século XX e XXI traduziram, para o inglês, por *material*. Em português, o termo *assunto* pode trazer alguma imprecisão; algumas alternativas são *tema* ou *matéria*, sendo este termo a tradução usual na bibliografia da lógica. Dizer que a Lógica se ocupa não somente da forma ou do processo do pensamento, mas também de seu *Stoff*, significa dizer que seu objeto é independente do sujeito que pensa e do ato de pensar, que são particulares.
[123] Bolzano eliminou, porém, os aspectos metafísicos que Leibniz ainda atribuía à linguagem.

verdadeira, sem que haja qualquer outra opção, e independente dos atos de pensar ou de julgar. Quando enunciadas por um sujeito, as proposições são chamadas de juízos, *Urtheilen*, e quando pensadas, de pensamentos, *Gedanken*. Diferentemente, as *proposições em si* são a matéria, *Stoff*, sobre a qual versam os juízos ou pensamentos, "independentemente de serem verdadeiras ou falsas, independentemente de já terem sido formuladas em palavras ou não, de terem sido pensadas ou não" (WL, §19).[124] De qualquer forma, toda *proposição em si* está necessariamente representada no intelecto Divino na forma de pensamento.

A *verdade em si* é definida como "...toda proposição em si que afirma algo tal como isso realmente é, independentemente de esta proposição ter sido ou não dita por alguém (WL, §25)":[125] ela é uma *proposição em si* que é verdadeira. Parafraseando o *cogito ergo sum* de Descartes, Bolzano afirma:

> Não há algo verdadeiro porque Deus o conhece; pelo contrário, Deus pode conhecer porque isso assim é. Portanto, não há um Deus porque Deus pense que ele existe, mas é apenas porque há um Deus, que este Deus se pensa como existindo (WL, §25).[126]

Desta forma, ele rejeita também a noção leibniziana de um mundo formado pelos pensamentos de Deus e um mundo em que o pensamento intuitivo precederia a ontologia. Outro exemplo esclarece o que são as *verdades em si*:

> O conjunto das flores que uma árvore tinha, num certo lugar, na primavera passada, é um número determinado, mesmo que ninguém o conheça. Uma proposição que indique esse número, para mim, é uma verdade objetiva, mesmo que ninguém a conheça (WL, § 25).[127]

---

[124] Unter einem Satze an sich verstehe ich nur irgend eine Aussage, dass etwas ist der nicht ist; gleichviel, ob diese Aussage wahr oder falsch ist; ob sie Von irgend Iemand in Worte gefasst oder nicht gefasst, ja auch im Geiste nur gedacht oder nicht gedacht worden ist.

[125] ...jeden beliebigen Satz, der etwas so, wie es ist, aussagt, wobei ich unbestimmt lasse, ob dieser Satz Von irgendjemand wirklich gedacht und ausgesprochen worden sei oder nicht.

[126] Es ist nicht etwas wahr, weil es Gott so erkennet; sondern in Gegenteile Gott erkennet es so, weil es so ist. So gibt es z. B. nicht darum einen Gott, weil Gott sich denket, dass er ist; sondern nur, weil es einen Gott gibt, so denkt sich dieser Gott auch als seiend.

[127] So ist z. B. Die Menge der Blüten, die ein gewisser, an einem bestimmten Arte stehender Baum im verflossenen Frühlinge getragen, eine angebliche Zahl, auch wenn sie Niemand weiß; ein Satz also, der diese Zahl angibt, heißt mir eine objektive Wahrheit, auch wenn ihn niemand kennt u. s. w.

Já as *representações em si* são as partes das *proposições em si* obtidas quando elas são decompostas em partes menores suficientemente pequenas para não formarem, por si sós, uma outra proposição (WL, §48, (2)).[128] Como toda proposição pode ser decomposta em outra da forma "A tem b" (cf. WL, § 133 e § 169),[129] toda proposição é formada pelas representações do sujeito, do predicado e da cópula, a ligação que as une. Cada representação, por sua vez, pode ser simples ou composta. As compostas podem ser decompostas em outras, num processo que deve chegar necessariamente a representações que não são decomponíveis, que são as representações simples.

Mas, qual é o estatuto ou a natureza destes conceitos *em si*?

Bolzano afirma que não se pode atribuir "ser algum (existência ou realidade)"[130] a proposições em si (WL, §19), assim como para as *representações em si* e as *verdades em si*. Ao tratar delas, Bolzano usa a expressão *es gibt*, que significa dizer que *há* tais conceitos. Dizer que *es gibt* alguma coisa corresponde a afirmar que "a representação desta coisa tem denotação" (WL, § 214),[131] que há pelo menos um objeto que corresponde à descrição do conceito desta coisa.[132]

Diferentemente das representações, proposições e verdades *em si*, suas correlatas pensadas ou afirmadas possuem existência, mas não por si sós e, sim, na mente do ser que pensa ou julga (WL, §§19, 34). Ao contrário de Husserl, Russell e os filósofos analíticos, Bolzano não deu muita importância à questão de explicar como se relacionam estas duas formas de conceber as representações, as proposições e as verdades, ou seja, como o sujeito se relaciona com noções que são independentes dele. Mas em algumas ocasiões (WL, §48) ele afirma, sem maiores explicações, que o sujeito

---

[128] O conteúdo, *Stoff*, da proposição que escrevemos como *É verdade que havia 10 flores na árvore da minha casa no dia 22 de julho de 2013*, é diferente da proposição escrita ou pensada pelo sujeito e, portanto, é uma *proposição em si*. Ela é verdadeira ou falsa, independentemente de se podemos sabê-lo, e pelo menos Deus o sabe. Se for verdadeira, é uma *verdade em si*. Por outro lado, a parte *flores na árvore* desta proposição em si, que também é independente do que é escrito ou pensado, é uma *representação em si*, pois é uma parte da proposição original que não pode ser chamada de falsa, nem de verdadeira, ao passo que a parte *havia 10 flores na árvore da minha casa no dia 22 de julho de 2013* não é uma representação em si porque ela, por si só, é uma proposição autossuficiente.

[129] Bolzano dá o exemplo da proposição *Deus é onisciente*, que pode ser escrita como *Deus tem onisciência*. Nesse processo também se verifica a transformação de adjetivos em substantivos, a formação de conceitos com base em atributos.

[130] K*ein Dasein* (*keine Existenz oder Wirklichkeit*) (WL, §19).

[131] ...die Vorstellung eines Etwas Gegenständlichkeit habe.

[132] Archer (2010) vê nesta concepção uma espécie de continuidade com a tradição aristotélica, que recusava a existência separada dos universais, concepção essa seguida pela Ordem dos Escolápios, na qual Bolzano iniciou seus estudos teológicos.

“apreende”[133] as representações, proposições e verdades *em si* na forma de suas correlatas mentais ou afirmadas.

Assim como Kant, Bolzano diferenciou claramente entre a teoria e os objetos de que ela trata, mas ele foi mais longe nesta distinção, ao distinguir os juízos, *Urteilen*, e pensamentos, *Gedanken*, das proposições, *Sätzen*. Reconheceu que Kant foi o primeiro “a fixar claramente e a aplicar de modo fértil”[134] esta distinção, embora não a tenha descoberto. Ao estudar cuidadosamente a obra o filósofo de Königsberg, viu que a distinção feita por ele entre juízos analíticos e sintéticos se assenta essencialmente sobre a diferença entre componentes dos conceitos e características dos objetos (WL §120). Levando em conta esta visão, pode-se dizer que uma sentença é sintética se seu predicado contém características de seus objetos que já não se encontram como componentes do conceito deste objeto, como ele aparece na representação do sujeito da sentença; e sintética, caso contrário.

Para reconhecer que há “características de um objeto... que no entanto não estão presentes no conceito deste objeto, exige-se somente ver adequadamente aquela distinção” (WL § 65),[135] entre verdades analíticas e sintéticas. Kant havia afirmado, diz Bolzano, que

> todos os teoremas da matemática, física, etc. são verdades sintéticas. Quem entendeu isso também entenderá que há inúmeras características de um objeto que podem ser deduzidas do conceito deste objeto, embora nós não pensemos nelas como componentes deste conceito (WL §65).[136]

“No entanto... enquanto há muitos seguidores da distinção kantiana, há poucos que distinguiram adequadamente entre componentes do conceito e características do

---

[133] Bolzano utiliza os termos *erfassen* ou *aufassen*.

[134] Denn nicht jeder Artbegriff ist aus dem Begriffe der Gattung zusammengesetzt. – Das auch Crusius (W. z. B. § 260) den Unterschied zwischen analytischen und synthetischen Sätzen beiläufig ebenso, wie Kant, aufgefasst habe, wurde schon von Schmidt erinnert.

[135] ... es Beschaffenheiten gebe, die einem Gegenstande zukommen, und nach dem Begriffe, den wir uns von ihm bilden, notwendig zukommen, ohne doch als Bestandteile in diesem Begriffe vorgestellt zu werden. (WL §65)

[136] Alle Lehrsatze der Mathematik, Physik u. f. w. nur solche synthetische Wahrheiten seien. Wer dieses als richtig erkennt, dem liegt auch nahe die Einsicht, dass es unzählige Beschaffenheiten eines Gegenstandes gebe, die sich aus dem Begriffe desselben mit Notwendigkeit ableiten lassen, obgleich wir sie gar nicht als Bestandteile in diesem Begriffe denken. (WL §65)

objeto” (WL §65).[137] O próprio Kant não teria, avalia Bolzano, observado adequadamente esta diferença.

> A possibilidade de atribuir a certo conceito, como o conceito de um triângulo, por exemplo, algumas outras propriedades, como aquela de ser equilátero, não pertence ao conceito de um triângulo como um componente; ao contrário, a *possibilidade* de que um triângulo seja equilátero é que é uma consequência deste conceito. No conceito de triângulo o *ser equilátero* não está como um componente, mas o poder *ser equilátero* é uma consequência do conceito de um triângulo (WL §65, grifos meus).[138]

Em outras palavras, a palavra *triângulo*, representa um objeto ao qual a propriedade de ser equilátero pertence como uma característica que ela pode assumir, e não como uma necessidade. Bolzano corrige assim a identificação que os filósofos racionalistas faziam entre propriedades de um conceito e características de um objeto, que tinha como consequência a crença em que todas as propriedades derivadas de um conceito eram características que pertenciam necessariamente ao objeto.

Assim, se de um lado a distinção kantiana teve o mérito de começar a romper com a concepção racionalista, ao tentar diferenciar as propriedades de um conceito – propriedades do conhecimento tal como ele é concebido teoricamente, sua intensão ou representação teórica – das características do objeto, quer dizer, sua extensão ou significado; de outro, Kant não foi até o fim e acabou retomando a antiga doutrina de que extensão e intensão se encontram na relação de proporcionalidade inversa, ao assumir que todo componente de uma representação é uma propriedade necessária do objeto que se encaixa nele (WL, § 65).

A definição de Bolzano retoma, modificando-o, o princípio da substituição *salva veritate* de Leibniz:

---

[137] Allein so viele Anhänger die Kantische Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Urteilen nach einem harte Kampfe gefunden; so gibt es doch auch seither nur wenige, die zwischen Bestandteilen und Merkmalen gehörig unterscheiden (WL §65).

[138] Die Möglichkeit zu einem gewissen Begriffe, z. B. zu dem eines Dreieckes noch allerlei neue Bestimmungen, z. B. Gleichseitigkeit u. s. w. hinzuzufügen, gehört ja nicht zu den Bestandteilen dieses Begriffes, sondern ist eine bloße Beschaffenheit desselben. Nicht in dem Begriffe des Dreieckes liegt es als ein Bestandteil, sondern nur eine aus diesem Begriffe sich ergebende Folgerung ist es, dass ein Dreieck gleichseitig sein könne u. s. w. (WL §65)

> se existir uma única representação numa proposição que podemos variar arbitrariamente sem mudar sua validade ou falsidade, ou seja, se todas as proposições produzidas por meio da substituição desta representação por qualquer outra representação são, ora todas verdadeiras, ora todas falsas, pressupondo apenas que tenham denotação; então... me permito chamar tais proposições – tomando emprestado de Kant a expressão – *analíticas*. Todas as outras, nas quais não há uma única representação que possa ser arbitrariamente variada sem afetar sua veracidade ou falsidade, chamarei *proposições sintéticas* (WL, §148, (1)).[139]

O que esta definição traz de novo, e não se encontra em Kant, é uma reafirmação ainda mais radical da diferença entre conceitos e objetos, e uma ênfase na representação linguística. Em consequência, fica estabelecida uma profunda independência desta representação em relação aos objetos de conhecimento, e uma dependência da lógica com relação à linguagem (OTTE, 2014, p. 102). É o que se vê, por exemplo, na justificativa de Bolzano de que a afirmação *todo efeito tem uma causa* é uma proposição analítica, pois

> como aquilo que se entende por efeito é exatamente aquilo que é causado por algo, e pela frase *tem uma causa* [se entende] o efeito de algo, a afirmação só tem o significado de que o que é efetuado por outro é efetuado por outro" (WL 148, Ann. 1).[140]

Alguns exemplos de proposições analíticas e sintéticas ajudam a compreender a definição de Bolzano:

> eu poderia chamar as proposições "Um homem moralmente mau não merece respeito" e "um homem moralmente mal de forma alguma goza de eterna felicidade", um par de proposições analíticas. Em ambas, existe certa representação, ou seja, a representação de um homem, para a qual podemos substituir a representação que quisermos, por exemplo, anjo, ser, etc., de tal forma que a primeira

[139] Wenn es aber auch nur eine einzige Vorstellung in einem Satze gibt, welche sich willkürlich abändern lässt, ohne die Wahr oder Falschheit desselben zu stören; d. h. wenn alle Sätze, die durch den Austausch dieser Vorstellung mit beliebigen andern zum Vorscheine kommen, entweder insgesamt wahr oder insgesamt falsch sind, vorausgesetzt, dass sie nur Gegenständlichkeit haben: so ist schon diese Beschaffenheit des Satzes merkwürdig genug, um ihn von allen, bei denen dies nicht der Fall ist, zu unterscheiden. Ich erlaube mir also, Sätze dieser Art mit einem von Kant entlehnten Ausdrucke analytische, alle übrigen aber, d. h. bei denen es nicht eine einzige Vorstellung gibt, die sich ihrer Wahr oder Falschheit unbeschadet willkürlich abändern ließe, synthetische Sätze zu nennen (WL, §148, (1)).

[140] Denn da man unter einer Wirkung immer nur etwas, das durch ein anderes bewirket ist, und unter der Redensart: eine Ursache haben, so viel als: durch ein anderes bewirket sein, verstehet: so hat jener Satz eigentlich nur den Sinn: „Was durch ein anderes bewirket ist, ist durch ein anderes bewirket".

> (somente se tem denotação) é sempre verdadeira e a segunda sempre falsa. Em contraste, nas proposições "Deus é onisciente", "um triângulo tem dois ângulos retos", eu não poderia apontar representação alguma que poderia ser variada arbitrariamente de maneira que a primeira permaneceria sempre verdadeira e a última sempre falsa. Consequentemente, para mim, esses seriam exemplos de proposições sintéticas (WL,§148, (1)).[141]

Bolzano distingue dois tipos de proposições analíticas. Primeiro, as que envolvem somente conceitos lógicos, como as da forma: "A é A, A que é B é A, A que é B é B, Todo objeto é ou B ou não B, etc." (WL, § 148, (2)). O que torna estas proposições diferentes de outras é que nelas "nada é necessário para julgar" sua natureza analítica "a não ser seu conhecimento lógico, porque os conceitos que fazem a parte invariante dessas proposições são todos lógicos".[142] Bolzano as chama de proposições logicamente analíticas, proposições analíticas no sentido estrito, ou proposições idênticas. Em seguida, ele estuda as proposições em que "conceitos não lógicos entram", que requerem "um tipo bem diferente de conhecimento" (WL, § 148, (3)),[143] como é o caso dos exemplos descritos no parágrafo anterior. A estas ele chama de proposições "analíticas no sentido mais amplo" (WL, § 148, (3)).[144] Embora atribua a Kant "o mérito de ter sido o primeiro" a distinguir proposições sintéticas de proposições analíticas, Bolzano insiste:[145]

> Me parece que as explicações desta distinção com que nos confrontamos, seja nos escritos de Kant ou nos outros, ainda sofre de baixa precisão lógica. Por exemplo, se lemos na *Lógica* de Kant (§36)

---

[141] So werde ich z. B. Die Sätze: „Ein Mensch, der sittlich böse ist, verdienet keine Achtung", und „Ein Mensch, der sittlich böse ist, geniesset gleichwohl einer fortwährenden Glückseligkeit", ein Paar analytische Sätze nennen; weil es in beiden eine gewisse Vorstellung, nämlich die Vorstellung Mensch gibt, die man mit jeder beliebigen andern, z. B. Engel, Wesen u. s. w., dergest alt austauschen kann, dass der erste (sofern er nur Gegenständlichkeit hat) jederzeit wahr, der zweite jederzeit falsch bleibt. In den Sätzen dagegen: Gott ist allwissend, ein Dreieck hat zwei rechte Winkel, wüsste ich nicht eine einzige Vorstellung nachzuweisen, welche in ihnen willkürlich abgeändert werden könnte, mit dem Erfolge, dass jener beständig wahr, dieser beständig falsch verbliebe. Diess wären mir sonach Beispiele von synthetischen Sätzen.

[142] Einige sehr allgemeine Beispiele von analytischen Sätzen, die zugleich wahr sind, haben wir an folgenden Sätzen: A ist A; A, welches B ist, ist A; A, welches B ist, ist B; Jeder Gegenstand ist entweder B oder Nicht B u. s. w. Die Sätze der ersten Art, oder die unter der Form: A ist A, oder: A hat (die Beschaffenheit) a, enthalten sind, pflegt man mit einem eigenen Namen identische, auch tautologische Sätze zu nennen.

[143] ...während es zur Beurteilung der Wahr- oder Falschheit der Sätze von der Art der nº 1. ganz anderer Kenntnisse bedarf, weil hier Begriffe, welche der Logik fremd sind, einfließen.

[144] ... analytische in der weitern Bedeutung.

[145] A ocorrência do termo juízo de maneira não discriminada de proposições neste parágrafo. Em todos os casos, traduzi proposição ou proposições por *Sätz*,e *Sätze* ou *Sätzen*, e juízo ou juízos por *Urtheil* ou *Urtheilen*.

que proposições analíticas são aquelas em que a certidão se baseia na identidade do conceito do predicado com a noção do sujeito, isto é aplicável no máximo a proposições idênticas. Se for dito, como na *Crítica da Razão Pura* (Introdução §4) e em outros que nos julgamentos analíticos o predicado está contido no sujeito (implicitamente), ou pelo menos não está fora dele... estas são em parte formas meramente figurativas de expressão que não analisam o conceito a ser definido, em parte expressões que admitem interpretações muito amplas... Este infeliz estado das coisas poderia ter sido evitado se houvesse sido dito que em julgamentos analíticos o predicado é uma das partes essenciais do sujeito (ou uma das características essenciais dele) e se nós entendemos entre essenciais aquelas que são contidas no conceito de sujeito, como fizeram (Phil. Mag. V. I, §3, no.4), Maass (ibid. V. II, §1, No. 2, cp. Log. § 210), Krug (L. § 67, Nota 1) e outros. Mas esta explicação é aplicável somente a um tipo de julgamentos analíticos, somente àqueles da forma: A que é B é B. Não haveria outros também? Não deveríamos contar o julgamento, A que é B é A, e também os julgamentos, Todo objeto é B ou não B, entre julgamentos analíticos? Em geral me parece que eles não destacaram aquilo que é *importante* neste tipo de proposições. Isto (o que torna tal tipo de proposição importante, NdT), consiste no fato de que sua veracidade ou falsidade não depende das representações particulares das quais elas são constituídas, mas permanece a mesma não importa quais mudanças são feitas em algumas delas, pressupondo somente que não destruímos o sentido (*Gegenstaendlichkeit)*[146] da proposição. Somente por esta razão eu dei a definição acima, muito embora eu saiba que isso torna o conceito destas proposições algo mais amplo do que é ordinariamente concebido, pois proposições como aquelas citadas em (1) não são ordinariamente consideradas analíticas. Ao mesmo tempo, me pareceu útil interpretar ambos conceitos, das proposições analíticas assim como as sintéticas, tão amplamente que não somente as proposições verdadeiras como também as falsas poderiam se incluídas sob elas. Ainda, não importa qual definição possa ser aceita, em caso algum, acredito eu, poder-se-ia ser induzido a conceder que a distinção entre julgamentos analíticos e sintéticos é meramente subjetiva, e que o mesmo julgamento pode ser às vezes analítico, às vezes sintético, dependendo do conceito que formulamos do objeto. Isso é exatamente o que fizeram muitos lógicos... (WL, § 148, Nota 4).[147]

[146] Literalmente, *Gegenstaendlichkeit* significa *objetualidade*, e portanto a condição para a substituição em questão é que, quando se fazem as mudanças, permanece pelo menos um objeto que corresponde à proposição (nota minha).

[147] Gleichwohl dünken mir die Erklärungen, die man von diesem Unterschiede, es sei nun in Kants eigenen, oder in anderer Schriften, antrifft, der logischen Strenge noch nicht ganz zu entsprechen. Wen man z. B. in Kants Logik (§36) liest: Analytische Sätze heißen solche, deren Gewissheit auf der Identität der Begriffe des Prädikates mit der Notion des Subjektes beruhet: so passt dies höchstens auf die identischen Sätze. Sagt man, wie in der Kr. d. r. V. (Einl. §. 4) u. a. a. D. geschieht, dass in den analytischen Urteilen das Prädikat in dem Subjekt (verdeckter Weise) enthalten sei, oder nicht außerhalb desselben liege, oder schon als Bestandteil darin vorkomme... so sind dies teils bildliche Redensarten …. teils Ausdrücke die eine zu weite Auslegung zulassen. …… Dieser Übelstand dürfte vermieden werden, wenn man mit Eberhard (Phil. Mag. B. I, St. 3, nº 4), Maaß (ebend. B. II, St. 1, nº 2, vergl. Log. § 210.), Krug (L. §. 67. Anm. 1.) u. U. den Ausdruck gebracht, dass in den analytischen Urteilen das Prädikat eines der wesentlichen Stücke von dem Subjekte oder (was ebensoviel heißen soll) eines von seinen wesentlichen Merkmalen ausmache, und unter diesen konstitutive, d. h. solche versteht, die im Begriffe

Mas, qual importância Bolzano atribuiu às proposições analíticas?

> Eu... acredito que nem um único teorema da lógica ou de alguma outra ciência seja uma verdade analítica. Porque acredito que uma proposição analítica é muito pouco importante ao ser afirmada como teorema de alguma ciência. Quem gosta de falar, por exemplo, na geometria, sobre teoremas do tipo "um triângulo equilátero é um triângulo ou uma figura equilátera", ou coisas semelhantes? (WL, §12, (5)).[148]

A posição de Bolzano sobre as proposições analíticas é, então, muito mais próxima da de Kant do que daquela de Frege, de Russell e da filosofia analítica. Por outro lado, ele vê um suposto erro na definição kantiana de analiticidade em termos de pertinência do predicado ao sujeito, pois, de acordo com ela, a proposição "O pai de Alexandre, rei da Macedônia, foi rei da Macedônia" (WL, § 148)[149] deve ser analítica, pois no sujeito *O pai de Alexandre, rei da Macedônia* já se encontra o predicado *rei da Macedônia*. No entanto, esta frase seria, para Kant, obviamente sintética, pois sua veracidade não depende dos significados dos conceitos, e sim de verificação empírica.

No entanto, o argumento de Bolzano parece completamente alheio à concepção de Kant, e mais de acordo com a visão de Bolzano de representação ou proposição em si e com sua rígida distinção entre signos e objetos. Para aplicar o critério de analiticidade

---

des Subjekts vorkommen. Aber diese Erklärung passt nur auf eine Art analytischer Urteile, nur auf die von der Form: A welches B, ist B. Sollte es aber nicht auch andere geben? Sollte man nicht auch das Urteil: A welches B ist, ist A; ingleichen das Urteil: Jeder Gegenstand ist entweder B oder Nicht-B, zu den analytischen zählen? Überhaupt däucht es mir, dass alle diese Erklärungen das, was jene Art von Sätzen eigentlich wichtig macht, nicht genug hervorheben. Dieses besteht, wie ich glaube, darin, dass ihre Wahr oder Falschheit nicht von den einzelnen Vorstellungen, aus denen sie bestehen, abhängt, sondern dieselbe verbleibt, was für Veränderungen man auch mit einigen derselben vornimmt, vorausgesetzt, dass man nur nicht die Gegenständlichkeit des Satzes selbst zerstört. Aus diesem Grunde eben erlaubte ich mir die obige Erklärung, obgleich ich weiß, dass sie den Begriff dieser Sätze etwas weiter gibt, als man sich ihn gewöhnlich denkt. …. Ich hielt es überdies für dienlich, beide Begriffe, jenen der analytischen sowohl als den der synthetischen Sätze so weit zu fassen, dass nicht bloß wahre, sondern auch falsche Sätze darunter begriffen werden können. – Doch welche Erklärung man auch annehmen mag: so wird man, glaube ich, auf keinen Fall bemüßigt sein zuzugestehen, dass der Unterschied zwischen analytischen und synthetischen Urteilen bloß subjektiv sei, und dass dasselbe Urteil bald analytisch, bald synthetisch werde, je nachdem man sich von dem Gegenstande, auf den sich das Subjekt (oder eigentlicher die Subjetvorstellung) beziehet, bald diesen, bald jenen Begriff macht; was doch so viele Logiker... behauptet haben (WL, § 148, Ann. 4).

[148] Ich halte dafür, dass jeder bloß analytische Satz viel zu unwichtig sei, um in irgendeiner Wissenschaft als eine ihrer eigentümlichen Lehre aufgestellt zu werden. Wer möchte z. B. die Geometrie mit Sätzen von der Art: Ein gleichseitiges Dreieck ist ein Dreieck, oder ist eine gleichseitige Figur, und dergl., anfüllen wollen? (WL, §12, (5)).

[149] Der Vater Alexanders, des Königs von Makedonien, war König von Makedonien.

de Kant a um julgamento da forma *q é P*, seria necessário considerar o sujeito da frase como algo que realmente é q, e não, como vemos em Bolzano, simplesmente como algo arbitrariamente definido como q. Para Kant, a referência direta é um caráter essencial, e nossas intuições e experiências se referem, em última análise, a coisas em si, embora de uma maneira relativa e condicionada por nossa constituição humana. Ao contrário de Bolzano, a intuição permanece em Kant um poderoso e inestimável instrumento do pensamento (OTTE, 2014, p. 101-102).

Dessa distinção de Bolzano decorre, pois, uma contradição (KNEALE&KNEALE, 1991). Assim como Kant, ele considerou a afirmação *A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º* como sintética. Mas, de acordo com outro critério do próprio Bolzano – aquele que diz que toda afirmação da forma *Este A tem b* é analítica se a frase *Todo A tem b* é verdadeira, e sintética, se ela for falsa – a afirmação *este triângulo tem soma dos ângulos igual a dois ângulos retos* torna-se analítica, pois, na proposição *a soma dos ângulos do n-ângulo é igual a 2 (n-2) ângulos retos*, que é analítica, se n for substituído por 3, chega-se à afirmação de que *a soma dos ângulos do triângulo é igual a 2 (3-2) ângulos retos*. Mas esta proposição é equivalente à afirmação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, que Bolzano afirmara ser sintética. Chega-se então à conclusão de que há duas frases que representam o mesmo fato – para Bolzano, portanto, são determinadas pela mesma *proposição em si* –, e uma é analítica e a outra sintética. Mas ele próprio não aceitava que uma proposição pudesse ser, ora sintética, ora analítica.

Mas o que importa é que esse exemplo mostra que a independência entre a intensão e a extensão formulada por Bolzano seria impossível se ele concebesse que os conceitos são meras abstrações dos objetos, ou meramente o conjunto de todas as características de seus objetos. Mostra, portanto, que para Bolzano o conhecimento é construído (OTTE, 2014, p. 102), e que aqueles que pretendem apresentar sua obra como anti-Kant e aristotélica não analisaram adequadamente a noção de conceito expressa por ele.

Ao definir as proposições analíticas e sintéticas, Bolzano levou às últimas consequências a distinção anunciada por Kant entre a estrutura do ser e a estrutura da cognição, completando assim a rejeição da identidade entre ser e pensamento afirmada por Parmênides.

> E é nessa distinção que aquela entre proposições analíticas e sintéticas se fundamenta, porque ela tornou tanto Kant quanto Bolzano conscientes dos erros da tradicional noção de conceito como algo estabelecido por meio de abstração, de onde resultava a lei da relação inversa entre conteúdo e extensão de conceitos (OTTE, 2013b, p. 90).

Ao refutar esta lei da relação inversa, Bolzano reconhece explicitamente sua dívida com Kant:

> Se eu tenho a sorte de não ter cometido aqui um erro que permaneceu despercebido por outros, eu reconhecerei abertamente que devo agradecer por isso à distinção que somente Kant fez entre juízos analíticos e sintéticos, o que não poderia ser se todas as propriedades de um objeto tivessem que ser componentes de suas representações (WL, §120).[150]

Com relação à *aprioridade* de determinadas proposições, Kant havia afirmado na *Crítica*, de um lado, que "necessidade e rigorosa universalidade são pois os sinais seguros de um conhecimento *a priori* e são inseparáveis uma da outra" (B4), mas, de outro, em diversas passagens identificou o termo *a priori* com aquilo que é "não empírico"[151] ou em oposição àquilo cuja matéria, *Stoff*, é extraída da experiência (A 566 B 594, B2). Bolzano criticou esta definição e as de outros filósofos modernos por terem confundido "a divisão das nossas cognições entre aquelas que sabemos somente pela experiência e aquelas que não requerem nenhuma experiência" (WL, §133, Nota)[152] com "a divisão entre proposições conceituais e empíricas" (WL, §133, Nota).[153] Assim, gerou-se, na visão de Bolzano, uma confusão entre o conhecimento e o processo de formação do conhecimento, questão que ele resolve, mais uma vez, fundamentando a distinção na linguagem, com base na sua concepção de proposições em si:

> Então aconteceu que *se achou que a diferença essencial entre essas proposições deveria se encontrar menos na natureza de seus*

[150] Bin ich so glücklich, hier einen Irrtum, der Andern unbemerkt geblieben war, zu vermeiden: so will ich unverhohlen gestehen, welchem Umstande ich es zu danken habe, nämlich nur der von Kant aufgestellten Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen Urteilen, welche nicht stattfinden könnte, wenn alle Beschaffenheit eines Gegenstandes Bestandteile seiner Vorstellung sein müssten.
[151] cf., por exemplo, todo o trecho de A 712/B 740 até A 714/B 742.
[152] ... unserer Erkenntnisse in solche, von deren Richtigkeit wir uns (wie man zu sagen pflegt) nur durch Erfahrung bedürfen...
[153] Einteilung... Sätze in Begriffs und Anschauungssätze.

> *componentes do que na forma como nós nos convencemos de sua verdade ou falsidade* (grifo meu). Deste ponto de vista as primeiras seriam definidas como aquelas que podem ser conhecidas sem nenhuma experiência, e as últimas, ao contrário, como aquelas que requerem experiência, e de acordo com isso são chamadas: julgamentos *a priori* e *a posteriori* (Ver, por exemplo, a Introdução à *Crítica da Razão Pura* de Kant). Eu concordo que essa distinção é suficientemente importante para ser mantida para sempre, mas eu *acredito que não deveríamos ignorar a outra distinção, que não depende da mera relação de proposições com nossas faculdades cognitivas, mas de seu caráter intrínseco* **(**grifo meu); em particular, aquela distinção entre proposições formadas meramente por conceitos, e aquelas em que este não é o caso (§133, Nota).[154]

A importância de tratar de maneira diferente estas duas distinções é que

> se o que fora concebido sob o título julgamentos *a priori*, tivesse sido determinado de maneira realmente correta mediante a sua definição como cognições que são independentes de toda experiência, então quase não teria sido necessário adicionar outros atributos pelos quais julgamentos *a priori* poderiam ser reconhecidos, particularmente a necessidade e a universalidade. Agora, *se uma proposição é estritamente universal ou não, e se poder-se-ia dizer que o predicado que ela atribui ao seu sujeito se estende a ela com necessidade ou não, são assuntos que dependem do caráter intrínseco da proposição em si e não se referem às suas relações aleatórias com nossa faculdade cognitiva* (§133, Nota, grifos meus).[155]

Para Bolzano, esta questão tinha uma importância maior, pois a ênfase conferida por Kant à intuição do sujeito cognoscente prejudicava o esclarecimento de como se deveriam ordenar as verdades das mais gerais para as mais particulares num livro didático destinado a apresentar de maneira organizada determinada ciência, que era o

---

[154] Daher geschah es denn, dass man den wesentlichen Unterschied zwischen diesen Sätzen nicht sowohl in der Beschaffenheit ihrer Bestandteile, als vielmehr in der Art, wie wir von ihrer Wahrheit oder Falschheit uns überzeugen können, zu finden glaubte, und die ersteren sonach als solche, die ohne alle Erfahrung erkannt werden können, die letzteren aber als solche, die der Erfahrung bedürften, erklärte, und dem gemäß ihnen auch die Benennungen: Urteile a priori und a posteriori erteilte. (Man sehe z. B. die Einleitung zu Kants Kr. d. r. V.) Auch ich finde die Unterscheidung, die man hier macht, wichtig genug, um für immer beibehalten zu werden; allein ich glaube, dass man um ihretwillen nicht eine andere verdrängen sollte, die nicht auf dem bloßen Verhältnisse der Sätze zu unserem Erkenntnisvermögen, sondern auf ihrer inneren Beschaffenheit beruht, nämlich die Unterscheidung derselben in solche, die aus bloßen reinen Begriffen zusammengesetzt find, und in andere, bei denen dieses nicht der Fall ist...

[155] Denn wenn dasjenige, was man sich unter der Benennung: Urteile *a priori* dachte, wirklich ganz richtig angegeben würde durch die Erklärung, dass es Erkenntnisse wären, welche von aller Erfahrung unabhängig sind: dann wäre es wohl kaum nötig gewesen, zu dieser Erklärung alsbald noch ein Paar andere Merkmale hinzuzufügen, an welchen Urteile a priori erkennbar sein sollten, die Notwendigkeit nämlich und die Allgemeinheit. Ob nun ein Satz streng allgemein sei oder nicht, und ob man sagen könne, dass jenes Prädikat, welches er dem Subjekte beilegt, diesem mit Notwendigkeit zukomme oder nicht, das alles sind Umstände, die von der inneren Beschaffenheit des Satzes selbst abhängen, und sein zufälliges Verhältnis zu unserem Erkenntnisvermögen ganz und gar nicht betreffen.

mais importante objetivo do *Wissenschaftslehre*. Ele destaca então os tipos de erros que podem surgir da identificação da noção de universalidade com a de conhecimento que não é passível de ser obtido pela experiência:

> desde que Kant explicitamente disse que toda proposição matemática pertence aos julgamentos *a priori*, a essa classe de julgamentos também pertenceriam as proposições matemáticas que nós, no momento, não podemos reconhecer; por exemplo, uma fórmula que permita calcular todo os números primos, e por outro lado, ele poderia ter designado outras certas proposições, por exemplo, a resposta à questão acerca do que os habitantes de Urano estão fazendo exatamente agora, à classe de proposições empíricas, muito embora não haja experiências que nos levem a tomar uma decisão sobre essa questão. (...) O critério para a decisão sobre se um julgamento é *a priori* ou não deveria residir nas características objetivas do próprio julgamento. Conseqüentemente, deveria ser definido de forma objetiva, e não deduzida da mera relação do julgamento com nossas faculdades cognitivas. Que os dois critérios, o de universalidade e o de necessidade, não são aptos para nosso objetivo, no entanto, já está claro por eles poderem ser aplicados somente a proposições *verdadeiras*. Apesar disso, todos os lógicos declaram a proposição "alguns números são números primos" como sendo uma proposição particular, e a maioria deles declara problemática a proposição "todos os seres finitos são falíveis". Mesmo assim, ambas as proposições são puramente *a priori* (WL, §133).[156][157]

Com base nessa distinção, Bolzano deu outra definição de intuição, ao distinguir três tipos de representações quanto à origem: intuições, *Anschauungen*, como representações ao mesmo tempos simples e singulares, tendo somente um objeto que lhes corresponde (WL § 72); conceitos, *Begriffe*, como "representações que não são

[156] Novamente, a oscilação entre o uso de proposições e juízos é de Bolzano.

[157] Auch ist fast nicht zu zweifeln, dass Kant, da er ausdrücklich sagt, das alle mathematischen Sätze zu den Urteilen a priori gehören, zu dieser Art von Urteilen auch dergleichen mathematische Sätze gezählt haben würde, die wie bei unserer gegenwärtigen Beschränktheit nicht zu erkennen vermögen, z. B. eine Formel, nach der sich alle Primzahlen ableiten ließen; und dass er im Gegenteil gewisse andere Sätze, z. B. die Beantwortung der Frage, was die Bewohner des Uranus jetzt eben tun, den empirischen Sätzen beigezählt hätte, obgleich es keine Erfahrungen gibt, welche uns zur Entscheidung dieser Frage führen. Beck (L., §. 67) erinnert ausdrücklich, dass ein Urteil objektiv a priori sein könne, ob es gleich subjektiv bloß a posteriori vorhanden sei; und ich glaube nicht, dass man ihm hierin viel widersprechen werde. Hieraus geht aber hervor, dass man den Umstand, ob ein Urteil a priori sei oder nicht, als eine objektive, an dem Urteile selbst befindliche Beschaffenheit betrachte, und mithin sollte sie auch auf eine objektive, nicht von dem bloßen Verhältnisse des Urteils zu unserem Erkenntnisvermögen entlehnte Art erklärt werden. Dass aber die beiden Kennzeichen der Allgemeinheit und Notwendigkeit für diesen Zweck untauglich sind, erhellt schon daraus, weil sie sich höchstens auf wahre Sätze anwenden ließen Überdies erklären alle Logiker den Satz: Einige Zahlen sind Primzahlen, für partikular; und den Satz: Jedes endlich Wesen ist fehlbar, die meisten für problematisch; und doch sind beide Sätze rein a priori.

intuições e não contêm intuição alguma suficientemente importante como parte delas" (WL § 73);[158] e, por fim, representações mistas, compostas em parte por representações que são conceitos, em parte por representações que são intuições.

> O motivo mais importante para a distinção entre proposições conceituais e proposições intuitivas da forma como eu expliquei é que as verdades em um discurso científico – especialmente quando elas não servem apenas para a convicção, mas também para a especificação dos seus fundamentos objetivos – deveriam ser tratadas de uma forma diferente se contêm apenas conceitos ou se contêm também intuições. *Nós podemos procurar os fundamentos de uma verdade puramente conceitual somente em outras verdades conceituais. O fundamento de uma verdade empírica, no entanto, pode também se assentar pelo menos em parte nos objetos aos quais as intuições se referem* (§ 133, Nota, grifos meus).[159]

A clareza dessas distinções, por sua vez, determina a forma como se deveriam ordenar as verdades numa escala de mais a menos fundamentais. Mas ainda faltava, para realizar de maneira adequada essa hierarquia, distinguir entre as relações de derivação e de fundamentação, que constituem uma inovação teórica da maior importância, e que se tornaria central para a filosofia analítica no final do século XIX, na forma da distinção entre derivação formal, ou relação de consequência lógica, e derivação material.

Bolzano utiliza o termo *Abfolge* para designar a relação em que um conjunto de proposições fundamenta objetivamente outro – uma relação que determina o(s) fundamento(s), *Grund* ou *Grunde*, de uma proposição ou conjunto de proposições que são sua consequência, *Folge*. Por outro lado, reserva o termo *Ableitbarkeit*[160] para designar uma relação em que uma ou mais proposições podem ser deduzidas de outras sem que elas possam ser chamadas de seu fundamento; em outros termos, dois

[158] Vorstellungen, die keine Anschauungen sind, auch keine Anschauung als Bestandteil enthalten, merkwürdig genug sind.
[159] Der vornehmste Grund, warum ich die Einteilung in Begriffs und Anschauungssätze in der Art, wie sie hier aufgesetzt ist, so wichtig finde, ist der, weil die Wahrheiten, die man in einem wissenschaftlichen Vortrage aufstellt, besonders wenn nicht bloß ihre Gewissmachung, sondern die Angabe ihrer objektiven Gründe verlangt wird, ganz anders behandelt werden müssen, wenn sie aus bloßen Begriffen bestehen, als wenn sie auch Anschauungen enthalten. Den Grund einer reinen Begriffswahrheit können wir immer, nur in gewissen anderen Begriffswahrheiten suchen; der Grund einer Anschauungswahrheit aber kann wenigstens zum Theile auch in den Gegenständen liegen, auf welche sich die in ihr enthaltenen Anschauungen beziehen.
[160] De *ableitbar* (dedutível) + *keit* (sufixo que forma substantivos).

conjuntos de proposições estão na relação de *Ableitbarkeit* quando entre elas há uma mera relação de derivação. O § 162 do *Wissenschaftslehre* esclarece:

> A verdade de que é mais quente no verão do que no inverno é o fundamento, *Grund*, daquela outra verdade que afirma que o termômetro fica mais alto no verão do que no inverno. Esta última verdade, por outro lado, é uma conseqüência, *Folge*, da primeira...[161]

Embora exista uma relação de derivação entre a medida do termômetro e a temperatura real, sendo possível afirmar que o sujeito pode adquirir conhecimento de que faz mais calor no verão do que no inverno por meio da medida do termômetro, "ninguém deveria sequer cogitar" (WL, § 162)[162] que o fundamento ou a causa, *Grund*, do calor seja a medida do termômetro.

Das definições das relações de fundamentação e de derivabilidade, bem como da distinção entre representações e proposições conceituais e empíricas, obtêm-se uma séria de conclusões para sua concepção de provas ou demonstrações, que são importantes tanto para sua obra matemática quanto para a filosófica. Uma delas é que "verdades conceituais que só contêm conceitos puros... dependem sempre de verdades puramente conceituais, e nunca de proposições empíricas" (WL, § 221, (2)). As verdades empíricas até podem "ser úteis para o *reconhecimento* (grifo meu) de uma verdade conceitual" (WL, § 221, (2)), mas em hipótese alguma elas podem ser consideradas como "o fundamento objetivo deste tipo de verdade" (WL, § 221, (2)).[163]

Essa mesma visão já foi expressa, na matemática, no prefácio do *Teorema do Valor Intermediário*, publicado dezessete anos antes, em que Bolzano reconheceu que até se pode conhecer o teorema por meio do traçado de um desenho, ou pela analogia com uma corrida em que uma pessoa ultrapassa a outra, mas as ciências precisam ser apresentadas numa ordem de fundamentação em que haja uma hierarquia dos seus

[161] ... in der Wahrheit, dass es im Sommer wärmer ist als im Winter, der Grund von jener anderen Wahrheit, dass das Thermometer in Sommer höher steht als im Winter, und diese letztere dagegen lässt sich als eine Folge der ersteren betrachten.

[162] Gleichwohl wird Niemand sich einfallen lassen.

[163] Wahrheiten nämlich, welche durchgängig nur reine Begriffe enthalten (Begriffswahrheiten), scheinen das Eigene zu haben, dass sie nur immer von andern reinen Begriffswahrheiten, niemals von Anschauungssätzen abhängig sind. Wohl können uns Anschauungswahrheiten (Erfahrungen) gar oft behilflich sein, zur Erkenntnisse einer reinen Begriffswahrheit zu gelangen; aber der objektive Grund einer solchen Wahrheit kann nie in ihnen, sondern muss, sofern es überhaupt einen Grund für sie gibt, immer in andern reinen Begriffswahrheiten liegen.

resultados. Afinal, se é correto dizer que exemplos ou o uso dos sentidos podem contribuir para o aprendizado de determinado conceito, é preciso reconhecer que a intuição não é comunicável, ao contrário da linguagem. Em certo sentido, então, a atividade semântica é inerente à construção de provas.

Para corrigir o que considerava uma falha da filosofia de sua época – por confundir o objetivo com o subjetivo, Bolzano, no final do *Wissenschaftslehre*, ao tratar da "Esclarecimentos sobre o fundamento objetivo de uma verdade" (WL, § 525),[164] retoma a diferenciação entre *hóti* e *dióti* feita por Aristóteles, afirmando:

> Posto que até o momento nem sempre se distinguiu o fundamento objetivo de uma verdade dos meios subjetivos de conhecimento, segue-se, obviamente, que também esses dois tipos de provas – ou seja, as do tipo fundamentista e as do tipo certificadora – não foram sempre distinguidas com precisão. Aristóteles (*Analytica posteriora*, L I c2 et 13) e também os escolásticos dividiram as provas em provas que só mostram que alguma coisa é (*hóti*) e outras que também explicam por quê a coisa é (*dióti*) e afirmavam com um pouco de exagero que só as últimas (*dióti*) produzem conhecimento genuíno (ou verdadeiro). Mas os lógicos dos tempos modernos parecem não ter se dado conta desta distinção (WL, § 525).[165]

Mas ao expandir esta concepção para a matemática, afirmando que o fato de que um triângulo tem a soma dos ângulos igual a 180º é fundamento do fato de que a soma dos ângulos de um quadrado é 360º, Bolzano atribuiu aos conceitos matemáticos uma condição unívoca e absoluta. Dedekind, Peano e os matemáticos identificados com a tendência hipotético-dedutiva rejeitaram esta visão, afirmando que é possível deduzir a primeira afirmação da segunda, e também a segunda da primeira, e nenhuma delas é mais fundamental do que a outra, ou melhor, qualquer das duas pode servir de fundamento da outra, a depender da teoria a ser construída.

À medida em que para comunicar é preciso generalizar e universalizar, uma das principais características da matemática desenvolvida a partir de Bolzano foi sua

---

164 Erklärung des objektiven Grundes der Wahrheit.

165 Da man bisher den objektiven Grund einer Wahrheit von ihren subjektiven Erkenntnissmitteln nicht immer deutlich genug unterschied, so folgt von selbst, dass man auch die Begründungen nicht immer genau von den bloßen Gewissmachungen unterscheiden konnte. Aristoteles (*Anal. Post.* L. I c. 2 et 13.) zwar und die Scholastiker führen die Einteilung der Beweise in solche, die nur zeigen, dass (oti), und andere, die auch angeben, warum (*dioti*) etwas ist, sehr fleißig an, und behaupten wohl mit einiger Übertreibung, dass nur die letzteren allein ein echtes Wissen erzeugen; die neueren Logiker aber scheinen diesen Unterschied nur wenig zu beachten.

preocupação com a universalização e a generalização. E, como a intuição diz respeito a objetos particulares, a intuição geométrica não poderia mais ocupar o lugar de fundamento, como ocupou na Grécia Antiga, cuja concepção ainda tinha uma influência decisiva no início do século XIX. A filosofia de Bolzano, embora crítica das correntes predominantes no início do século XIX, Idealismo e o Romantismo, é também parte de uma corrente ou tendência que surgiu e se desenvolveu no século XIX, contrária a estas duas, em busca de construção de novas formas de ontologia, organização, conceitualização e comunicação social.

O interesse de Bolzano pela ordenação e pela estruturação das verdades era uma expressão de seu interesse pela exposição ordenada, e também uma preocupação didática. Sua própria definição de ciência, que é o assunto central do *Wissenschaftslehre*, é dada já no início do livro como "conjunto de verdades de determinado tipo que tem a qualidade que sua parte já conhecida e importante merece ser apresentada num livro particular" (WL, §1).[166] E prossegue definindo o livro didático, *Lehrbuch*:

> Aquele livro que aparentemente foi escrito por alguém com o propósito determinado de representar todas as verdades de uma ciência numa maneira para serem entendidas o mais facilmente possível, eu chamo de livro didático dessa ciência (WL, §1).[167]

Se lembrarmos que *Wissenschaftslehre* significa *Doutrina da Ciência*, vê-se que toda a filosofia de Bolzano é profundamente influenciada por seu interesse pela didática, e assim sua preocupação com expor o conhecimento de maneira logicamente estruturada, e sua preocupação com transformar o discurso científico, antes intuitivo e voltado para os próprios cientistas, num discurso público, é uma preocupação didática, embora ele não tenha dado atenção para processos de ensino, nem investigado o papel da intuição na formação de conceitos.

---

[166] Jeden Inbegriff von Wahrheiten einer gewissen Art, der so beschaffen ist, dass es der uns bekannte und merkwürdige Teil derselben verdient, auf die soeben erwähnte Weise in einem eigenen Buche vorgetragen zu werden, eine Wissenschaft zu nennen.

[167] Jenes Buch selbst aber, oder vielmehr ein jedes Buch, welches nur so beschaffen ist, als wäre es von jemand in der bestimmten Absicht geschrieben, um alle bekannten und für den Leser merkwürdige Wahrheiten einer Wissenschaft darzustellen, wie sie aufs Leichteste verstanden und mit Überzeugung angenommen werden könnten, soll mir ein Lehrbuch dieser Wissenschaft heißen.

Com a forte presença que a psicologia tem no ensino da atualidade, pode parecer paradoxal que as preocupações didáticas de Bolzano tenham feito com que ele priorizasse a explicação conceitual do conhecimento, e procurasse eliminar as noções intuitivas dos seus fundamentos e tenha sido um pioneiro da rejeição da psicologia como base do conhecimento. Mas esse paradoxo tem suas raízes no próprio processo de formação da matemática pura, e o professor que o negar, acreditando que pode escolher entre o lado objetivo e o subjetivo excluindo completamente um ou outro, estará contrariando tanto a natureza de sua disciplina, quanto a história da matemática.

A aritmetização da análise matemática não foi, portanto, uma modificação somente da matemática, mas contribuiu para repensar o sentido da lógica na teoria do conhecimento e em toda a filosofia, bem como para a retomada da lógica como método de encontrar fundamentos seguros.

4. A Revolução Industrial e a concepção social de conhecimento do século XIX

4.1 Introdução

Chama-se de Revolução Industrial ao conjunto de mudanças ocorridas nos processos de manufatura, no final do século XVIII e início do século XIX, que resultaram na substituição de métodos artesanais de produção por máquinas, com várias consequências: novos processos de produção de ferro, maior capacidade de fabricação de novos produtos químicos, de uso da energia resultante da queda de água, uso crescente da energia a vapor e, por fim, desenvolvimento de máquinas-ferramentas. Nesse processo, ocorreu também a substituição da madeira e de outros biocombustíveis pelo carvão.

Em geral, os historiadores situam o início da Revolução Industrial nos anos 1760 e o seu fim entre os anos 1820 e 1840. Ela começou na Inglaterra e se expandiu para a Europa Ocidental e os Estados Unidos. Mas a Alemanha e os Estados Unidos somente alcançaram o mesmo grau de industrialização da Inglaterra e da França – ou até mesmo o superaram – no final do século XIX, quando se iniciou um processo que alguns historiadores chamam de Segunda Revolução Industrial, ou segunda fase da Revolução Industrial, ocorrida no período que vai da segunda metade do século XIX até início do século XX. Ela provocou uma profunda mudança na capacidade de manipulação e transformação de matéria prima e dos processos de produção, paralela a um forte desenvolvimento científico, que resultou em grande desenvolvimento da indústria elétrica, química, petrolífera e de aço. Foi nessa época que foram construídos os primeiros navios de aço movidos a vapor, os aviões, os telefones eletromagnéticos e a produção em massa de bens de consumo e de tecnologia para preservá-los.

A Revolução industrial, assim como a Revolução Francesa, e diferentemente da Revolução Científica, teve um impacto imediato na vida de grande parcela da população do planeta. Paralelamente ao surgimento de grande massa de operários sem direito algum, ela permitiu, pela primeira vez, que o controle da natureza, iniciado pela Revolução Científica nos laboratórios, fosse feito em larga escala, o que permitiu que as populações não mais estivessem sujeitas a desaparecer diante das catástrofes naturais ou doenças, que resultavam em más colheitas, morte dos animais criados e, muitas vezes, na redução drástica da população, devido à fome e à peste.

4.2 As transformações na matemática, na cultura e na educação

> Antes do século XIX, a atividade matemática consistia, principalmente, em procurar métodos mais poderosos para resolver problemas externos a ela – a maioria deles referentes à mecânica e à astronomia – e em procurar novas aplicações. Os números eram vistos como maneiras de expressar quantidades ou a medida de grandezas.[168] Pelo menos até 1780, não havia maiores preocupações dos matemáticos em explicar a natureza do cálculo, e publicações que abordassem tal questão quase não eram encontradas em periódicos científicos. Entre 1780 e 1800, verifica-se um pequeno, e pouco significativo, aumento do número de tais publicações (GRABINER, 1981, p. 23); nesse período, a solução dos problemas de fundamentos da matemática se tornou incontornável, e os matemáticos começaram a perceber, já com Lagrange (1736-1813), a necessidade de eliminar das suas demonstrações analíticas o uso dos conceitos de espaço e de tempo, e o recurso à visualização de propriedades geométricas (cf. BOYER, 1949) nas demonstrações (CLÍMACO, 2013, p. 13).

Com a eliminação, dos fundamentos da matemática, de qualquer referência a objetos físicos ou à sensibilidade, começou a aparecer a ideia de que ela não é um instrumento para a resolução de problemas de outras áreas, nem tem como seus objetos grandezas. Ao contrário, os matemáticos passaram a pensar que ela trabalha com conceitos independentes das noções de espaço, tempo e movimento, e assim surgiu o que se chama, desde então, de M*atemática Moderna*.

Giddens afirma que é "característico da modernidade... a reflexão sobre a natureza da própria reflexão" (991, p 39). Uma das mais importantes características da matemática moderna, surgida no século XIX, e de ambas as tendências que a tentaram definir, é sua autorreflexividade, sua dimensão meta-matemática. No início do século XIX, durante a Segunda Revolução Industrial, os matemáticos passaram a ter consciência da necessidade da auto-reflexão, de refletirem sobre seus próprios conceitos. Surgiu então a meta-matemática, uma forma de conceber a matemática que esboçou uma concepção própria de lógica-matemática, e com a qual ela, que sempre

[168] O próprio Bolzano ainda utilizava o termo *Größe* (grandeza).

havia sido caracterizada pelas quantidades e grandezas, perdeu esta característica com a mudança e amplitude das suas próprias ideias, tornando-se uma disciplina conceitual.

Essa consciência é inseparável da compreensão de que a fundamentação adequada da Matemática era uma exigência para que ocorressem as transformações necessárias para sua continuidade. Então, o estudo dos fundamentos tomou uma forma completamente nova, pois os grandes avanços ocorridos no século XVIII precisavam ser organizados; era necessário investigar quais princípios unificadores norteavam as diferentes áreas; e, inclusive por necessidades educacionais, não era mais possível confiar na intuição de alguns poucos pensadores isolados do resto da sociedade.

Por outro lado, as transformações ocorridas na matemática no início do século XIX são inseparáveis de uma série de mudanças substanciais ocorridas numa esfera muito mais ampla, que abrange a cultura, o desenvolvimento da indústria e a forma de nos relacionarmos com as palavras. Se de Descartes a Kant havia ocorrido um direcionamento do interesse filosófico para o sujeito, a partir do século XIX começou a ocorrer um movimento de mudança da ênfase do sujeito para o social, do particular e do empírico para o geral, da intuição para o conceito e do interno para a comunicação e o social.[169] Raymond Williams explica como estas mdificações se expressaram na formação de palavras e sua relação com as transformações culturais e sociais ocorridas no período entre as últimas décadas do século XVIII e a primeira do século XIX:

> Cinco palavras são os pontos-chave a partir dos quais esse mapa pode ser desenhado. São elas indústria, democracia, classe, arte e cultura... As mudanças em seu uso, naquele período crítico, revelam uma mudança geral nas nossas maneiras características de pensar sobre nossa vida comum: sobre nossas instituições sociais, políticas e econômicas; sobre os objetivos que essas instituições são destinadas a representar; e sobre as relações com essas instituições e os objetivos de nossas atividades no aprendizado, na educação e nas artes. A primeira palavra importante é indústria e o período em que seu uso se modifica é o período que agora chamamos de Revolução Industrial. Indústria, antes dessa época, designava um atributo humano específico... nas últimas décadas do século XVIII, indústria passou também a significar... uma palavra coletiva para nossas instituições manufatureiras e produtivas e para suas atividades gerais... O rápido crescimento da importância dessas instituições é considerado como a criação de um novos sistema que na década de 1830, é chamado pela primeira vez de *Industrialismo*. Em parte, isso é o reconhecimento de

[169] Apesar de que na mesma época o Idealismo Alemão e o Romantismo enfatizavam, no extremo oposto, a subjetividade, eles também foram influenciados por uma compreensão social do conhecimento.

> uma série de mudanças técnicas muito importantes e de seu efeito transformador nos métodos de produção. É também, no entanto, um reconhecimento do efeito dessas mudanças na sociedade como um todo, que, com isso, é igualmente transformada (WILLIAMS, 2011, p. 16-17).

Esta transformação de atributos pessoais e de processos em substantivos – a mudança sofrida por palavras que expressavam processos e adjetivos que as transformou em outras que expressam substantivos ou conceitos – ocorreu de maneira muito semelhante na Matemática, que voltou a aceitar a noção de que há objetos que são independentes de suas aplicações e das intuições dos sujeitos. Desta forma, o conhecimento matemático, de algo voltado para a evidência interna ao sujeito, para a intuição dos grandes gênios, transformou-se em algo social, voltado para a comunicação e o ensino.

Foucault (2007, p. 346) expressa ideias semelhantes às de Williams ao discutir as profundas transformações ocorridas nas ciências na virada do século XVIII para o XIX:

> O saber, em sua positividade, muda de natureza e de forma... Nem seria mais exato imaginar que a gramática geral tornou-se filologia, a história natural, biologia, e a análise das riquezas, economia política, porque *todos esses modos de conhecimento retificaram seus métodos, se acercaram mais de perto do seu objeto, racionalizaram seus conceitos, escolheram melhores modelos de formalização* — em suma, porque *se teriam desprendido de sua pré-história por uma espécie de auto-análise da própria razão*. O que mudou, na curva do século, e sofreu uma alteração irreparável foi o próprio saber como modo de ser prévio e indiviso entre o sujeito que conhece e o objeto do conhecimento (grifos meus).

Difícil encontrar melhores palavras para as transformações pelas quais a matemática também passou, transformando-se, no século XIX, em *Matemática Pura*, uma disciplina muito diferente da matemática dos séculos anteriores. Assim, a aritmetização da matemática deve ser entendida não como resultado de uma decisão deliberada dos matemáticos de se profissionalizarem ao se distanciarem do senso-comum, como às vezes se considera,[170] mas sim como parte de um processo de institucionalização do ensino e de publicização e explicitação dos conteúdos científicos

[170] Cf. Dias (2008) e Dias et. al. (2010).

ocorrido nas mais diversas áreas. Contribuiu para este processo, em particular, o surgimento das primeiras grandes turmas de engenharia, que puseram diante dos matemáticos um desafio de divulgação e formalização do conhecimento nunca antes visto.

Então, se de um lado é inegável que a aritmetização distanciou a Matemática do conhecimento cotidiano e dos sentidos, de outro, ela foi a responsável pelo fato de que seu conhecimento, antes acessível a um reduzidíssimo número de grandes sábios, pudesse ser estudado e compreendido por pessoas de qualquer origem que cursasse, por exemplo, um curso de engenharia.[171] Assim, a Matemática passou a ser considerada como algo social, e suas demonstrações, a serem estudadas com vistas na organização de um sistema hierárquico de proposições comunicáveis para parcelas da população cada vez mais amplas.

A aritmetização da matemática significou, então, a tradução da intuição dos grandes gênios para uma linguagem comunicável, contribuindo para unificar interesses educacionais e científicos, ao servir tanto para propósitos educacionais quanto para a fundamentação dos princípios da matemática.

> E foi assim que a mudança nos fundamentos da matemática impulsionou uma transformação maior da filosofia, com a semântica e a linguagem tomando o lugar da epistemologia, e o desenvolvimento da lógica voltando para o centro da atividade filosófica. (CLÍMACO, 2013, p.6).

Outro fato exemplar dessa tendência é que o termo "epistemologia", embora muitas vezes usado para nomear um período filosófico anterior, só começa a ser usado

> quando se reconhece que o conhecimento é público, e não simplesmente um modo de existência da 'natureza humana', 'entendimento' ou 'razão'. A epistemologia precisa de um objeto; seu

[171] A primeira instituição técnica de ensino superior foi a *École Polytéchnique* francesa, construída em 1794, sob o impulso da Revolução Francesa, e foi o último passo do desenvolvimento das academias de engenheiros e escolas de funcionários da construção na França, que já existentes há muitos anos. Mas as instituições superiores tecnológicas que seriam tomadas como modelo de desenvolvimento para vários países da Europa foram as de Praga e de Viena. A universidade politécnica de Praga foi criada em 1806, herdeira de uma tradição muito forte na Áustria, que remete ao reinado de Maria Theresa, quando surgiu a primeira escola técnica. Em 1815 foi criada a universidade politécnica em Viena, que em poucos anos adquiriu liberdade em termos de ensino e de pesquisa. O instituto politécnico de Viena tornou-se um exemplo de desenvolvimento em todo o ensino técnico na Europa Central.

> objeto é o conhecimento; o conhecimento só recentemente foi concebido como um objeto autônomo. Os sintomas desse fato estão em todo lugar. Por exemplo, a *British Association for the Advancement of Science* foi fundada em 1831 para ‘obter uma atenção mais geral para os objetos da Ciência’ (HACKING, 1999, p. 164-165).

Além disso, “a emergência de um estudo do conhecimento autônomo com um nome específico – epistemologia – coincide com a diferenciação e nomeação de tipos de conhecedores, por exemplo, físicos” (HACKING, 1999, p. 165). Outro fato exemplar é, ainda, o desenvolvimento da noção de significado:

> Frege disse que devia haver *Sinn* porque havia um estoque comum de conhecimento transmitido de geração a geração. As sentenças não eram suficientes; devia haver significados por trás das sentenças, que são compreendidos e são os verdadeiros portadores de crença e conhecimento. Os significados tornam possível o discurso público... uma teoria do significado é uma teoria sobre a possibilidade do discurso público (*ibidem*, p. 165).

No século XIX,

> o discurso público substituiu o discurso mental, e em nossa época[172] a sentença substituiu a ideia como algo tão claro que não requer explicação a partir de qualquer outra coisa, porque nenhuma outra coisa é ‘mais simples’ (*ibidem*, p. 166).

Em todas as áreas do conhecimento, com as grandes transformações advindas da Revolução Industrial, e devido à grande quantidade de conhecimentos novos que surgiram, desenvolveu-se uma tendência à publicização, organização, estruturação e generalização, e a buscar os princípios capazes de unificar as diversas áreas do conhecimento que se desenvolviam de maneira separada.

Diante do risco de que o conhecimento adquirido não pudesse ser organizado de maneira compreensível, e de que a obra dos cientistas e filósofos se tornasse uma mera coleção de fatos e dados amorfos, “um amontoado incompreensível de informações” (OTTE, 2013, p. 65), foi necessário o desenvolvimento de novos princípios de ordem e uma nova forma de racionalidade teórica, por meio da concepção de que a elaboração

[172] O livro foi publicado pela primeira vez em 1975, nota minha.

do conhecimento não poderia depender da proliferação de verdades ou técnicas de resolução de problemas isolados, como havia ocorrido no século XVIII.

Nesse sentido, na teoria do conhecimento ocorreu transformação análoga à ocorrida na Matemática. A teoria do conhecimento de Kant, que tinha acabado de substituir a metafísica e a ontologia como fundamentos filosóficos, passou rapidamente a ser considerada ultrapassada. Em particular, foram criticados o caráter estático do conceito kantiano de sujeito e a idéia de que deve haver limites definidos para a análise conceitual. Schelling, Hegel e Bolzano, cada um à sua maneira, fizeram afirmações neste sentido. E Karl Mannheim (1893-1947), o fundador da sociologia do conhecimento, viu esta última como uma sucessora necessária e legítima da epistemologia kantiana. Mannheim (1986, p. 33-34) escreve:

> É uma das intuições, *Einsichten*, fundamentais da Sociologia do Conhecimento que o processo pelo qual se tornam conscientes as motivações coletivas inconscientes não pode operar em todas as épocas, mas apenas em uma situação bastante específica... Pode-se indicar com relativa precisão os fatores que estão inevitavelmente forçando um número cada vez maior de pessoas a refletir não apenas sobre as coisas no mundo, mas também sobre seu próprio pensamento e, neste caso, não tanto sobre a verdade em si mesma [*Wahrheit an sich*], mas sobre o alarmante fato de que o mesmo mundo possa se mostrar diferentemente a observadores diferentes. É claro que tais problemas somente podem tornar-se gerais numa época em que a discordância predomina sobre a concordância. As pessoas se voltam da observação direta de coisas para a consideração dos modos de pensar somente quando fracassa a possibilidade de elaboração contínua e direta de conceitos relativos a coisas e situações frente a uma multiplicidade de definições fundamentalmente divergentes. Estamos agora capacitados a apontar, de forma mais precisa do que uma análise geral e formal o possibilitaria, exatamente em que situação social e intelectual uma tal transferência de atenção das coisas para opiniões divergentes, e daí para as motivações inconscientes do pensamento, deve necessàriamente ocorrer... Antes de mais nada, a multiplicidade de modos de pensar não se pode tornar um problema em períodos em que a estabilidade social fundamenta e garante a unidade interna de uma visão do mundo. Enquanto os mesmos significados das palavras, as mesmas maneiras de se deduzir ideias, são desde a infância inculcados em cada membro do grupo, não podem existir nesta sociedade processos de pensamento divergentes. Mesmo uma modificação gradativa nas maneiras de pensar (onde por acaso surja) não se torna perceptível aos membros de um grupo que vivam em uma situação estável, enquanto o tempo nas adaptações de maneiras de pensar a novos problemas seja tão lento que se estende por várias gerações. Neste caso, uma mesma geração dificilmente pode, no decorrer de sua vida, se tornar consciente da mudança que ocorre.

Mesmo Comte (1983, p. 26, original de 1830) – e apesar de que o positivismo, na prática, contribuiu mais para a divisão das ciências do que para qualquer forma de generalização – também formulou a necessidade de generalização e organização do conhecimento.

Foi nesse contexto que surgiram diversas concepções distintas, nas mais diversas áreas, que procuraram valorizar as ideias gerais como forma de organizar a enorme quantidade de conhecimentos de fatos, ideias e técnicas que o século XVIII adquiriu. Apesar da variedade e diversidade destas tendências, é possível observar em todas elas uma ênfase na comunicação e na afirmação da natureza social e institucional do conhecimento. Todas elas contribuíram, a seu modo, para a transformação a que se referem Foucault e Williams, e que Lepenies (1976) chama de "impulso da teorização". Em particular, a obra de Wilhelm Von Humboldt e sua concepção de universidade, que valorizaram a pesquisa teórica de um modo não comum no século XVIII, se situam nesse contexto.

É nesse sentido também que deve ser entendido o processo de logicização da Matemática e de metodologização das ciências, assim descrito por Carnap (2004, p. 135, original de 1930):

> O mais importante estímulo para o desenvolvimento da nova lógica se assenta na necessidade de exame crítico dos fundamentos da matemática. A Matemática, especialmente nos tempos de Leibniz e Newton, fez enormes avanços e adquiriu uma grande quantidade de conhecimentos novos. Mas a segurança dos fundamentos não acompanhou a rapidez da construção do edifício. Portanto, por volta de um século atrás, um esforço mais vigoroso começou a ser feito para esclarecer os conceitos fundamentais. Este esforço teve sucesso em diversas áreas. Os matemáticos conseguiram definir de forma rigorosa, por exemplo, conceitos importantes como limite, derivadas e números complexos. Por um longo tempo, estes conceitos foram aplicados de maneira frutífera sem ter tido definições precisas. Foi graças aos instintos seguros dos grandes matemáticos, e não à clareza dos conceitos, que a inadequação destes últimos não prejudicou a Matemática.

Mas, como mostrou Otte (2013, p. 156), o impulso fundamental para a transformação da matemática ocorrida no início do século XIX não foi, como Carnap e Klein supunham, guiado por necessidades internas à matemática de aumentar seu rigor para garantir a fundamentação das descobertas ocorridas nos séculos anteriores. Afinal, o *instinto seguro* a que Carnap se refere não era mais suficiente, nem para fundamentar a comunicação científica de uma gama agora muito maior de partes envolvidas – incluindo professores, engenheiros, físicos, etc. – nem para evitar o aumento do nível de abstração que a enorme expansão da produtividade matemática trouxe, tornando os conceitos matemáticos cada vez mais distantes da intuição e dos sentidos.

O que Carnap e Klein, além de diversos historiadores da matemática, não compreenderam, foi que a transformação da matemática numa linguagem ocorreu de maneira inseparável de necessidades de publicização, de aperfeiçoar os modos de comunicação do conhecimento científico, que fazem parte ao mesmo tempo de necessidades educacionais, que surgiram no contexto da busca por uma melhor organização das universidades e dos sistemas de ensino de forma a divulgar o conhecimento de uma maneira hierarquicamente organizada e que ao mesmo tempo pudesse alcançar um público maior.

Na segunda metade do século XIX, as preocupações com os fundamentos da matemática, que Bolzano havia expressado na primeira metade do século, se tornaram esforços aplicados em larga escala nas instituições universitárias dos mais importantes países da Europa. Esse movimento resultou numa revalorização da lógica, levando à formação, no interior da filosofia da matemática, de duas formas distintas e opostas de conceber a relação entre a lógica e a matemática, pois diante da crescente abstração conceitual, matemáticos e filósofos podiam assumir dois tipos de atitudes na organização do conhecimento. O surgimento destas duas tendências pode ser visto como continuidade da disputa sobre se a matemática deve ser definida de acordo com seus métodos, ou com base em seus objetos.

De um lado, surgiu a tendência que via na aritmetização e na teoria dos conjuntos uma forma de reduzir a matemática a conceitos elementares ligados à lógica, e procurou definir a matemática pela extensão de seus conceitos, ou seja, pelos seus objetos. Ela teve em Bolzano um precursor, e Frege e Russell foram alguns de seus mais importantes representantes. Esta tendência foi chamada de *tendência ontológica* ou *tendência ao rigor aritmético*, porque ela se iniciou com as tentativas de Bolzano de reduzir todos os conceitos da matemática aos da aritmética, e com Frege e Russell essa tentativa de redução passou a ser direcionada aos conjuntos numéricos. Nela, a lógica tinha muita importância, e os objetos matemáticos devem, após ser feita a redução aos elementos mais básicos, obedecer a regras lógicas independente destes objetos.

De outro, surgiu a tendência chamada de axiomática ou hipotético-dedutiva, que afirmou que a matemática deve ser definida pela sua intensão, pela forma de descrever os objetos, e que ela não pode ser reduzida à lógica; ao contrário, esta é que deve se adaptar aos objetos da matemática. Peano, Dedekind e Hilbert foram alguns de seus mais importantes representantes. Ela tem origem com os trabalhos de Hermann Günter Grassmann (1809-1877) no início do século XIX, que, em sua concepção de cálculo vetorial, reduziu a lógica pura a um ramo da Matemática. Na década de 40 do século XX, com os trabalhos de Augustus De Morgan (1806-1871) sobre lógica formal, de George Boole (1815-1864) sobre análise matemática, a concepção de Grassmann foi reelaborada em termos mais gerais. A nova concepção encontra uma expressão muito clara no trabalho de Boole (1847):

> Aqueles que estão familiarizados com o estado atual da teoria da álgebra simbólica estão cientes de que a validade dos processos de análise não depende da interpretação dos símbolos que são empregados, mas somente das leis de sua combinação. Todo sistema de interpretação que não afeta a verdade das relações supostas é igualmente admissível, e é verdade que o mesmo processo pode, em um esquema de interpretação, representar a solução de uma questão sobre as propriedades dos números; sob outra, aquele de um problema geométrico; e, sob um terceiro, aquele de um problema da dinâmica da óptica.

Decorrem desta concepção duas consequências: primeira, os objetos e afirmações matemáticos não são determinados de maneira absoluta, mas sim relacionados a contextos. Assim, um mesmo resultado pode ser considerado verdadeiro em um contexto ou universo de discurso, e não sê-lo em outro. Segunda, essa forma de compreender a matemática contribuiu consideravelmente para a ruptura da harmonia entre métodos e objetos de determinada área da matemática, o que possibilitou a aplicação de métodos e resultados de uma área da matemática em outras que à primeira vista não tinham relação alguma com ela.

Numa apresentação axiomática, a intensão é constituída por um conjunto de enunciados básicos que compreendem de maneira implícita todas as consequências que podem ser deduzidas deles, o que Bolzano rejeitou explicitamente. A axiomática é considerada, então, uma forma de álgebra, e esta é uma ciência analítica. De acordo com esta concepção, as teorias axiomáticas modernas no sentido de Hilbert ou Peano são teorias analíticas, pois

> a teoria como um todo determina, por meio de um conjunto de postulados, a intensão de seus termos teóricos, e a intensão, por sua vez, determina a extensão, ou seja, as aplicações possíveis ou objetos dos quais a teoria trata.... cada álgebra requer, entretanto, uma 'aritmética', ou seja, um universo de discurso (OTTE, 2014, p. 106).

Os axiomas matemáticos representam, então, as características dos objetos de nosso universo de discurso, e parecem mesmo determiná-los. Mesmo que isso fosse admitido, entretanto, permaneceria aberta a questão de saber como é escolhido este universo.

Russell e Frege, assim como Bolzano, representaram a tendência ao rigor aritmético ou da teoria dos conjuntos, ou tendência ontológica, e não se importaram com questões sobre o contexto, o universo de discurso ou intensões, concebendo que tudo poderia ser reduzido às extensões, ou seja, a objetos puros, independentes tanto do sujeito cognoscente quanto das descrições dos objetos. A tendência ao rigor que representam levou à ideia de que não há ciência sem objetos, e a Matemática, em particular, deve ser considerada não apenas sob o aspecto da linguagem, mas também de seu conteúdo.

Sua estratégia de explicar a matemática visava a descobrir qual seria o elemento fundamental, comum a todas as áreas, ou com conceitos redutíveis a ela[173] em outras áreas, e assim realizar uma grande construção reducionista, mostrando de que forma todas as afirmações de uma teoria derivam de maneira essencial destes fundamentos, como os números ou os conjuntos. Filósofos e matemáticos identificados com esta tendência tentaram erigir uma espécie de lógica-aritmética transcendental,[174] entendendo a aritmética como linguagem universal da Matemática, e a lógica como indispensável para qualquer forma de comunicação e interação social.[175] Frege e Russell

---

[173] Como, por exemplo, a aritmética fez com a geometria ao mostrar a correspondência entre números e operações numéricas com objetos e operações da geometria.

[174] Foi nesse sentido que Apel (1993, p. 164) caracterizou a filosofia analítica como um kantismo transformado e liberto da marca do mentalismo, no qual "a sintática e a semântica de linguagens científicas ocupou o lugar dos requisitos psicológicos da lógica transcendental".

[175] Hintikka, J. 1997, *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator*, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, p. 29.

reafirmaram a esperança de Bolzano de definir a existência por meio da linguagem, mas os paradoxos das proposições auto-referentes trouxeram novos problemas.

A correspondência entre Frege e Hilbert é ilustrativa da diferença entre estas duas tendências. Numa crítica muito semelhante à que Russell dirigiu às concepções de números formuladas por Peano e Dedekind, Frege conclui – do fato de que as definições de Hilbert não determinam univocamente um objeto – que elas não são verdadeiras definições. Após responder uma longa carta explicativa de suas concepções, em que diz claramente que ele e Frege estão falando de coisas distintas, Hilbert afirma que a maior importância de suas definições e axiomas reside exatamente na capacidade de elas serem passíveis de serem aplicadas a outros objetos, na medida em que assim a pesquisa de uma área pode servir para encontrar respostas em outra, em que a intuição não aparece da mesma forma, nem com a mesma facilidade.

Seguiram-se, então, várias respostas de Frege, além de resenhas que ele fez das publicações de Hilbert, mas este último se mostra desinteressado e a certa altura passa a responder que se encontra ocupado com trabalhos sobre equações diferenciais e com alunos de doutorado que lhe tomam muito o tempo, e que por isso não tem condições de tratar com o devido cuidado as questões levantadas. Numa das cartas, Hilbert chega a convidar Frege para ir a Göttingen, para poderem discutir presencialmente. Frege, diante da insatisfação com as respostas de Hilbert, pede autorização para divulgar a correspondência entre ambos, para tentar mostrar a superioridade de sua linguagem em que absolutamente tudo é definido e diferenciado, e Hilbert lho nega.[176]

Os matemáticos identificados com a tendência ontológica ou do rigor aritmético, ao procurarem fundamentos últimos,

> pareceram não ter percebido claramente que o procedimento axiomático era um método muito geral da matemática e que era, portanto, a busca de fundamentação em termos de teoria de conjuntos, se ela fosse concebida como uma base oni-compreensiva para toda a matemática. Por outro lado, a matemática estritamente formalista, como foi desenvolvida pela escola de Hilbert, não deu atenção suficiente para todos os encargos das ferramentas da teoria dos conjuntos que eram estritamente relacionadas com a axiomática e que podem ser sumarizadas na palavra ‘modelo’ (CASARI, 1974, p. 52).

[176] Cf. Frege (1980).

O método axiomático só se torna completo quando há um universo de discurso ou um modelo bem definido; caso contrário, como mostrou Kant, não é possível saber se aquilo que se afirma numa teoria é falso ou verdadeiro. Afinal, numa teoria formada somente por conceitos, sem objetos, toda conclusão coerente é verdadeira. Se concebermos uma álgebra sem aplicações, não existe verdadeiro ou falso, pois só existem regras de calcular, só existe uma sintaxe sem objetos. Então, em certo sentido, têm razão Frege contra Hilbert e Russell contra Peano. Por outro lado, os paradoxos de Russell mostraram que são necessários contextos ou universos de discurso, objetos particulares, para a formulação dos conceitos matemáticos, o que mostra que as hipóteses e os conceitos matemáticos não são formados de maneira livre, como alguns matemáticos identificados com a tendência hipotético-dedutiva, como Cantor, acreditaram que fossem.

Tomadas de maneira mutuamente excludentes, as tendências ontológica e axiomática são incompletas, de modo que uma compreensão adequada do conhecimento matemático exige adotar uma postura complementar entre elas. A transformação da noção de lógica realizada por Kant pode fornecer uma via, pois ela entende que os conceitos são definidos por meio de relações, e não de maneira fixa, mas também afirma que não há verdades sem objetos. Pode-se afirmar, então, que a matemática tem significados, mas não no sentido universalista fixo; por exemplo, os axiomas de Peano definem os números na forma de relações, e não buscando sua essência. Se a matemática for considerada de um ponto de vista dinâmico, como algo que se transforma e cresce, são necessários contextos e não objetos fixos, e exige-se uma complementaridade entre os conceitos e os objetos, entre intensão e extensão.

As tentativas das duas tendências de fundamentar a aritmética podem contribuir para compreender como pode se dar esta complementaridade. Bolzano concebeu que as proposições aritméticas como 7 + 5 = 12, para tomar o famoso exemplo de Kant, são sintéticas, pois formulam o conceito de soma em termos de cardinalidade de conjuntos, assumindo inadvertidamente a noção de conjuntos como dada, e assim os axiomas são estabelecidos como verdades objetivas, como leis.[177] Mas a soma dos números inteiros também pode ser definida axiomaticamente e recursivamente com base na operação de

[177] Cf. Cassirer, 1907; Otte, 2014, p. 106.

sucessor de números ordinais, como fez Peano,[178] e desta forma as proposições aritméticas se tornam analíticas (OTTE, 2014, p. 106). Assim, as duas formas de conceber o conceito de número se tornam complementares, e não mutuamente excludentes. Martin Gottfried mostrou de que maneira a diferença entre Kant e Bolzano se relaciona com estas duas tendências:

> Pode-se caracterizar a diferença entre Kant e Bolzano afirmando que para Kant o objetivo fundamental foi a axiomatização, e para Bolzano a aritmetização... Pelas palavras-chave aritmetização e axiomatização estes pontos de vista são dados para uma avaliação específica dos pesquisadores envolvidos nestas investigações. Estes pontos de vista também tornam compreensível a apreciação que Hilbert fez de Kant, de um lado, e a de Coutorat, de outro (MARTIN, 1956, p. 107).

4.3 As transformações na indústria, a auto- reflexão e a teoria do conhecimento

Marx (1996, p. 11) mostrou que a Revolução industrial começou com a objetivação da atividade na máquina produtiva e não, como tantas vezes se afirmou, com a invenção da máquina a vapor. O propósito anunciado pela invenção da máquina de fiar de Jacques Jacquard de 1804, que em seu tempo foi o mecanismo mais complexo existente, afirmava: "uma máquina para tear sem dedos" (Marx, 1996, p. 8).

> O revolucionamento do modo de produção toma, na manufatura, como ponto de partida a força de trabalho; na grande indústria, o meio de trabalho. É preciso, portanto, examinar primeiro mediante o que o meio de trabalho é metamorfoseado de ferramenta em máquina ou em que a máquina difere do instrumento manual... Matemáticos e mecânicos — e isso se encontra repetido aqui e acolá por economistas ingleses — explicam a ferramenta como uma máquina simples e a máquina como uma ferramenta composta. Não vêem aí nenhuma diferença essencial. Do ponto de vista econômico, no entanto, a

[178] Peano, ao contrário, afirmou que se deve explicar o que é mais concreto por meio daquilo que é mais geral, por meio da expansão da generalização das regras e estruturas das operações. De acordo com esta concepção, simples operações como 2 +2 = 4 teriam que ser derivadas ou explicadas por meio de princípios gerais e mais complexos, como são os axiomas da aritmética. Os axiomas axiomas de Peano são: "1) 0 um número; 2) O sucessor de qualquer número é um número; 3) Não há dois números com um mesmo sucessor; 4) 0 não é o sucessor de número algum; 5) Qualquer propriedade que pertença a 0, e também ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números".

> explicação não vale nada, pois lhe falta o elemento histórico (Marx 1966, p. 7-8).[179]

Em Marx, a diferença entre a ferramenta e a máquina reside na independência que as operações das máquinas têm da experiência e das habilidades individuais do operador, e na transmissão "da própria ferramenta... do homem para o mecanismo" (Marx 1966, p. 7-8). A objetivação da atividade na máquina produtiva significou uma forma de meta-atividade, na medida em que a atividade com as ferramentas foi substituída por uma atividade maquinal planejada, e o homem passou a atuar, não na manufatura, mas sobre o planejamento da atividade. Houve então uma modificação do foco da ação individual para o planejamento geral.

A transferência de capacidades humanas para máquinas tornou evidente em suas consequências a ideia da determinação da realidade por meio da ciência, da auto-reflexão, da reflexão sobre a reflexão. Esse processo influenciou todo o desenvolvimento da matemática. Como mostrou Otte (1993, p. 121), "o processo de matematização da matemática encontrou na revolução industrial seu modelo", pois foi com base nesta objetivação que se desenvolveu a noção de uma autorreflexão do conhecimento matemático. Por outro lado,

> quanto mais intensamente a matemática foi matematizada e formalizada, mais enfaticamente os matemáticos puros denominaram a sua atividade como uma arte pura, pois eles não entenderam que este processo de matematização e formalização constrói a realidade, inclusive o próprio construtor da realidade (OTTE, 1994, p. 152).

A concepção de matemática pura surgiu em meio a esse processo em que a matemática passou a refletir sobre seus próprios conceitos, o que aconteceu, numa aparente contradição, no mesmo momento histórico em que as aplicações da matemática e da ciência se intensificaram. E não foi por acaso que nessa mesma época também surgiu uma concepção de lógica e de filosofia voltadas para a compreensão de si mesmas, como foi a filosofia analítica (OTTE, 2013, p. 6).

---

[179] Em 1821, o próprio Hegel já tinha caracterizado como um processo sócio-histórico esta mudança da ferramenta para máquina e a sua correlacionada objetivação de habilidades subjetivas. "O geral e o objetivo no trabalho está, porém, na abstração, a qual cria a especificação dos meios e necessidades e, também, especifica a produção e cria a divisão do trabalho... A abstração do processo de produção torna o trabalho cada vez mais mecânico, faz com que o homem possa se distanciar, deixando a máquina tomar seu lugar" (Hegel, 1997).

Com Bolzano se iniciou a tendência da filosofia a tornar-se rigorosa por meio de sua transformação em meta-filosofia, em lógica, em filosofia da filosofia, inspirando-se na purificação pela qual havia passado a linguagem matemática. Essa tendência não permaneceu, como era no início, apenas como uma reação contra o idealismo alemão e o psicologismo, pois a transformação em questão teve como consequência que, na busca da *cientificidade*, a filosofia passou a se preocupar apenas com seus próprios métodos e argumentos (OTTE, 2013, p. 6). Como Ryle (1956, p. 4) afirmou, os filósofos se tornaram, a partir desta época, "filósofos dos filósofos". Em sentido semelhante, Carnap diz que "as questões filosóficas que dizem respeito à linguagem e não ao mundo não devem ser formuladas na linguagem objeto, mas sim na meta-linguagem" (CARNAP, 1963).

A filosofia, então, não deveria mais considerar, como faziam os racionalistas, o sujeito isolado na sua relação direta com o mundo, e sim a comunidade de sujeitos como transmissores e receptores de enunciados lingüísticos. Na matemática, tanto a tendência ontológica quanto a axiomática ignoraram a relação entre teoria e realidade: a primeira por meio da redução desta relação aos números por meio da aritmetização, e a segunda por meio da concepção de que a matemática não tem objetos.

A filosofia analítica teve o mérito inestimável de ter explicado e tornado clara toda uma gama de problemas filosóficos, o que tornou possível distinguir mais claramente uma série de problemas; sua compreensão da linguagem permitiu enunciar problemas confusos de forma tão clara, que tornaram seus resultados simples, percebendo, por exemplo, que os problemas de autorreferência da matemática aparecem também na linguagem. Na matemática, esta noção foi fundamental para torná-la livre das noções de quantidades e grandezas.

No entanto, o alto grau de precisão a que a filosofia analítica aspirou contribuiu para que ela confiasse demais na autorreflexão da linguagem e da matemática, numa forma de reflexão independente de objetos, depositando todas suas esperanças na lógica e na linguagem, reduzindo a matemática à lógica e essa a uma linguagem formal universal. Na busca por construir uma filosofia científica, a filosofia analítica procurou eliminar muitos campos da metafísica tradicional da filosofia; a imaginação, a poesia e qualquer forma de subjetividade foram tratadas como questões alheias à filosofia, até mesmo a história. Desta forma, pagou um preço muito alto pelas implicações desastrosas desta busca e deste reducionismo.

Em particular, as transformações ocorridas na forma de compreender a distinção entre proposições analíticas e sintéticas, que foi fundamental para a filosofia analítica, não podem ser adequadamente compreendidas sem o estudo da história da matemática e das necessidades de representação do conhecimento a ela relacionadas (OTTE, 2013, p. 6). E se esta forma de conceber os objetos fosse levada até suas últimas consequências, não somente a matemática, mas todo conhecimento teórico, incluindo a filosofia, seria reduzida a meras tautologias ou a coleção de dados particulares e técnicas isoladas (*ibidem*, p. 6).

Pitágoras fracassara na tentativa de aritmetizar o mundo,[180] esbarrando-se na incomensurabilidade da hipotenusa de um triângulo com um de seus catetos – o que remete ao que nos dias atuais se costuma chamar de números irracionais – e nos paradoxos de Zenão, ambos envolvendo a questão do infinito e dos infinitésimos. No século XIX, embora esta pretensão tenha sido abandonada da maneira em que havia sido formulada na Antiguidade, os matemáticos e filósofos conseguiram realizar pelo menos uma parte da ambição pitagórica ao aritmetizar a matemática, ou seja, reduzir suas outras áreas ao estudo dos números.

Mas o projeto de aritmetização também teve seus problemas, pois, na busca contínua daquilo que seria mais fundamental, os matemáticos, uma vez que conseguiram com relativo sucesso a aritmetização, chegaram à conclusão de que a noção de conjuntos era ainda mais elementar do que a de números, pois a definição de número como a quantidade de elementos de um conjunto lhes pareceu a mais correta.

A teoria dos conjuntos, por sua vez, trouxe complicações não perceptíveis à primeira vista, pois o processo de formação de conjuntos é, no fundo, análogo ao processo de formação de conceitos por meio das palavras, pois a relação entre intensão e extensão, como foi mostrado no capítulo 1, corresponde à relação entre proposições e conjuntos. E foi assim que a tentativa de fundamentação da matemática na teoria dos conjuntos se esbarrou nos paradoxos semânticos, mostrados por Russel a Frege, que aparecem quando na definição de um objeto se usa o próprio objeto, nas afirmações que se costuma chamar de impredicativas ou autorreferentes.[181]

---

[180] Seu lema era *tudo são números*.

[181] A origem dos paradoxos semânticos deve ser situada nos "paradoxos do mentiroso" surgidos na Grécia Antiga (cf. MORAES e ALVES, 2007), que giram em torno de afirmações como "todos os cretas são mentirosos". Sentenças autorreferentes podem nos conduzir a paradoxos, pois se um cretense responde

E quando Hilbert tentou resolver esta crise de fundamentos, a prova de Gödel da impossibilidade de provar a consistência e a completude da matemática foi feita por meio da aritmetização dos paradoxos do mentiroso. Então, a busca por purificar cada vez mais o conhecimento levou a matemática, da aritmetização aos estudos sobre a teoria dos conjuntos, desta para o estudo das proposições, e nesta surgiram os paradoxos semânticos e os teoremas de Gödel, que derrubaram todas as pretensões a um saber puro absoluto.

Uma importante consequência dos teoremas de Gödel é que a intuição sempre pode adicionar novos axiomas à matemática, que, como toda forma de conhecimento, é irredutível a conceitos. E mais uma vez o espectro de Kant apareceu para todos aqueles que tentaram conceber a existência como algo independente da intuição, como uma linguagem depurada de todos os elementos externos, como se a própria linguagem pudesse ser concebida como limpa dos elementos mundanos.

4.4 Humboldt e a educação como *Paideia*;

Na atualidade, é comum a reclamação nas escolas, nas universidades e nos locais de trabalho de que a formação do indivíduo chegou a um patamar de mera coleta de informações especializadas de determinada área, o que o faz perder qualquer visão global e mesmo a capacidade de interpretação da quantidade cada vez maior de dados a que se tem acesso por meio de um clique.

Nas palavras de Tennenbaum (2012),

> Há anos foi proclamada a sociedade fundada no saber, mas desde então não nos tornamos mais sabidos, muito pelo contrário. Aumentam cada vez mais, por um lado, as notícias ominosas sobre a queda do nível de desempenho escolar, sobre a desorientação, sobre a crescente predisponibilidade para a violência, e por outro lado, as queixas sobre o saber bitolado, sobre o nível insuficente de formação profissional e sobre o crescente analfabetismo funcional entre os

---

que sim quando lhe perguntarmos se ele mente, qualquer tentativa de responder à questão de se ele está dizendo a verdade ou mentindo leva a uma indefinição de posição. Russell aplicou à teoria dos conjuntos a mesma ideia, ao criar uma descrição (intensão) de um conjunto que não poderia ter uma extensão correspondente: a conclusão é que é impossível determinar de maneira precisa os elementos do conjunto dos conjuntos que não contêm si mesmos, e então Frege foi obrigado a reconhecer que sua tentativa de fundamentar a aritmética na lógica fracassou.

> estudantes que adquirem o diploma escolar. A sociedade do saber acelerou essa tendência. A formação se reduziu a profissionalização, o saber se tornou um produto a ser fabricado, lançado, vendido e "gerenciado", um produto que rapidamente se torna obsoleto e deve ser continuamente renovado. Ao mesmo tempo, importa cada vez menos se a pessoa sabe algo; o principal, cada vez mais, é onde podemos encontrar com presteza as informações desejadas. E é isso que se chama de "aprender a vida inteira". Na sociedade do saber, o que conta não é o saber, nem o conhecimento, muito menos a sabedoria; o que importa são os rankings, os mercados, os balancetes e a influência.

Embora faltem a esta avaliação outros elementos para uma compreensão precisa das razões de alguns fenômenos descritos, é difícil discordar do quadro apresentado pela autora. A defesa de uma concepção pragmática de educação, embora muitas vezes se travista dos mais diversos discursos, tende a tornar os alunos meros colecionadores e descritores de fatos ou informações, condenados a exercerem funções sociais em que não se exija mais do que o saber de técnicas específicas, que a qualquer momento podem cair em desuso devido ao surgimento de tecnologias mais avançadas.

Provavelmente o primeiro moderno a criticar esta tendência, e a propor uma forma de organizar o ensino universitário contrário a ela, tenha sido Wilhelm Von Humboldt (1767-1835), pedagogo, filósofo, pensador político e linguista alemão, representante do chamado neo-humanismo. Contra a valorização excessiva dos fatos, Humboldt propôs uma formação no sentido da realização plena do ser humano, contra a noção de que a universidade forme com vistas a fins externos.

A crítica de Humboldt à concepção de educação como mero acúmulo de informações tem uma importância maior devido a que ele foi formado no Iluminismo, convivendo com uma série de ideais iluministas e, portanto, não se pode atribuir a ele o irracionalismo romântico que surgiu como reação ao Iluminismo. Humboldt e Bolzano participaram de alguns dos ideais iluministas, como a convicção da necessidade de ampla divulgação do conhecimento, mas ambos tiveram condições de avaliar toda a quantidade de conhecimento *acumulada* nos séculos anteriores e compreender a necessidade de organizá-lo de maneira que a educação contribuísse para formar o ser humano como um todo.

> Wilhelm von Humboldt era jurista, alto funcionário do Estado prussiano e estudioso da Antiguidade. Em dezembro de 1808, foi

> convocado... para chefiar o sistema educacional da Prússia, e – apesar de ter exercido o cargo apenas durante dezesseis meses – conseguiu criar os fundamentos para um sistema de ensino que revolucionou a educação na Prússia e gozou de uma fama extraordinária em todo o mundo até o século passado.[182] Ele compreendia o ser humano em sua totalidade. Em vez da mera transmissão de saber, Humboldt priorizava a formação; em vez de tipos de desempenho a serem acionados concretamente, ele enfatizava a formação integral da personalidade.[183] Na definição de Wilhelm, a formação era uma "contínua interação do entendimento teórico e do arbítrio prático". Saber é algo que pode ser incutido à força; formação, por sua vez, tem que ser engendrada pelo próprio aprendiz dentro de um processo subjetivo. Para tal, todas as faculdades do ser humano precisam ser escoladas, não apenas o entendimento. Devemos nos tornar indivíduos humanos belos, e para isso todas as potencialidades que trazemos conosco têm que ser homogeneamente desenvolvidas (TENNEMBAUM, 2012).

A importância que atribuíram à linguagem é também uma característica comum a Bolzano e a Humboldt, embora a tenham investigado de maneira distinta: Humboldt concebeu uma visão antropológica, ao invés de semântica. Mas em ambos os casos aparece a busca pela generalidade e pela universalidade.

> A filologia constitui a espinha dorsal do sistema educacional de Wilhelm von Humboldt, no qual o grego antigo tem uma posição de destaque. "A relação adequada entre receptividade e iniciativa de ação, a fusão interior do sensorial com o mental, a manutenção do equilíbrio e da harmonia na soma de todos os esforços, o direcionamento de tudo para a vida real e ativa e a revelação da sublimidade integral do indivíduo em toda a gama de nações e em toda a espécie humana – esses são por assim dizer os componentes formais da disposição humana, e eles se encontram no caráter grego...". Esse ideal compreende, ao mesmo tempo, aquilo que – segundo Humboldt – deveria ser viabilizado pelo ensino. Ao estudarmos grego, imergimos profundamente no mundo de ideias da Antiguidade (TENNEMBAUM, 2012).

No final do século XVIII e no início do século XIX também ocorreram transformações profundas na educação, no sentido de publicização e institucionalização: na segunda metade do século XVIII "aparecem na Alemanha mais escritos e artigos sobre educação e ensino que nos três séculos anteriores" (GINZO, 1991, p. 8), e na

[182] Ou seja, o século XIX, pois o original do artigo foi escrito em 1998.
[183] A tradutora utilizou, no lugar de *formação*, *modelagem*, o que é menos adequado. A frase inteira em alemão é " Humboldt bezeichnete diese Lehr- und Lernmethode als geistloses Auswendiglernen, als totes Wissen, mit dem man im Leben nichts anfangen könne. An die Stelle bloßer Wissensvermittlung setzte er die umfassende Bildung des jungen Menschen".

primeira metade do século XIX ocorre a “explicitação dos sistemas nacionais de ensino” (ARAÚJO, 2008, p. 25), como “expressão da constituição dos Estados-Nação” (*ibidem*, p. 25). O neo-humanismo humboldtiano e os esforços de organização e estruturação da sociedade, da universidade e da formação humana surgiram nesse contexto.

O ideal de universidade proposto por Humboldt é inseparável da necessidade que a nação alemã tinha, no início do século XIX, de fortalecer o conhecimento teórico, até mesmo como forma de superar o atraso em relação a França e Inglaterra, no que diz respeito à Revolução Industrial.[184] Uma das características marcantes da concepção humboldtiana de universidade é a inseparabilidade entre ensino e pesquisa. Nesse sentido, Humboldt também pretendeu retomar um ideal de conhecimento grego, pois na Grécia antiga a atividade didática do professor era inseparável da pesquisa. Ele foi possivelmente o primeiro moderno a conceber que as instituições universitárias deveriam ter esta natureza:

> É uma característica das instituições científicas superiores o tratar sempre a ciência como um problema ainda não totalmente resolvido e por isso o permanecer sempre na investigação, já que na escola somente se lida, e somente se aprende conhecimentos acabados e consolidados. A relação entre professor e aluno é, portanto, completamente distinta daquela de antes. O primeiro não está lá em função do segundo, ambos estão lá para a ciência; a matéria do professor depende da presença dos outros e não alcançaria o mesmo êxito sem eles (HUMBOLDT, 2005, p. 284).

A autonomia é afirmada também quando Humboldt diz que a melhor forma de o estado contribuir para a universidade é permanecer fiel a “este atuar em si indeterminado e em certa medida casual” (HUMBOLDT, 2005, p. 284). Em continuidade à concepção kantiana de Iluminismo como maioridade do homem, Humboldt buscou essa formação para a autonomia mas, diferentemente de Kant, a

---

[184] Para a forte industrialização que aconteceu na Alemanha no início do século XIX, contribuíram também as escolas politécnicas, que se desenvolveram, ao contrário das universidades, numa relação de colaboração estreita com as indústrias, e de maneira descentralizada, ao contrário do que ocorreu na França. A Alemanha, por outro lado, durante muitos anos só contou com as escolas politécnicas secundárias ligadas ao exército, que não tinham autonomia alguma: enquanto na França os ensinos secundário e superior técnicos somente prestavam contas diante do estado, na Alemanha sempre houve uma interação muito ativa entre as escolas técnicas, transformadas depois em politécnicas, e as empresas, o que reduziu sua autonomia, de modo que durante quase todo o século XIX, ao contrário das politécnicas de Viena, Praga e Paris, as da Alemanha não tinham autonomia, e dependiam das universidades para a qualificação de seu corpo docente e determinação de uma série de diretrizes.

concebeu como algo coletivo e social. É o que se nota nesta passagem, quando se refere ao significado da escola:

> Se a escola cumpre seu propósito adequadamente, ela põe o jovem em tal estado de pureza que pode ser abandonado física, moral e intelectualmente à liberdade e à autonomia de ação, livre de qualquer coação, sem que isso suponha um direcionamento à ociosidade ou à vida prática, mas que leva consigo uma ânsia por elevar-se até a ciência que até então havia sido mostrada a ele, por dizer assim, só de longe (HUMBOLDT, 2005, p. 287).

José Carlos Araújo (2008, p. 30-31) mostra como em Humboldt as instituições científicas superiores

> internamente se organizam pela combinação da *ciência objetiva* com a *formação subjetiva*. Como se observa, as bases da concepção sobre o vínculo da pesquisa e do ensino nas instituições científicas superiores estão aí postas. Porém, esclarece Humboldt que o carro-chefe da mesma, bem como o seu objetivo, é a ciência. E o desenvolvimento desta não pode obedecer a parâmetros externos à universidade. Em seu pensar, o desenvolvimento da ciência contém a sua própria finalidade, visto que a centralidade da instituição universitária está estabelecida na ciência, a qual, na verdade, deve-se constituir como diretora da "[...] produção do conteúdo responsável pela formação intelectual e moral (*geistige und sittliche Bildung*)" (HUMBOLDT, 1997a, p. 79). Internamente a tal assertiva, o seu posicionamento ganha clareza: "[...] as instituições científicas apenas se justificam plenamente quando as ações que as definem convergem para o enriquecimento da cultural (sic.) moral da Nação" (HUMBOLDT, 1997a, p. 79).

O sentido da universidade reside, então, na formação e no enriquecimento da cultura moral e científica da nação, e não em atender a objetivos que lhe são alheios. Somente se for autônoma e servir a seus próprios propósitos culturais e científicos, ela poderá, em última análise, contribuir para melhorar a sociedade. Direcionada pragmaticamente para algum fim que lhe é externo, a universidade perderia sua essência, e não poderia contribuir para nada que não pudesse ser feito sem ela. Daí o ideal humboldtiano de ciência pura:

> Como estas instituições só podem alcançar sua finalidade ao realizarem, cada uma delas, e na medida em que seja possível, a idéia

> de ciência pura, os princípios que devem predominar em seu âmbito são os de *autonomia* e *liberdade* (HUMBOLDT, 2005, p. 283).

Ao tratar de temas relacionados ao que em português se costuma chamar de educação, Humboldt usa o termo *Bildung*, que é "basilar desde a segunda metade do século XVIII" (ARAÚJO, 2008, p. 33) para a cultura alemã, sobretudo após a obra de Kant. Deriva do substantivo *Bild*, que designa qualquer representação de coisas em uma superfície, como um desenho ou uma foto. "Passando deste sentido físico ao figurado, *Bild* significa imagem, representação, figura, forma. O termo grego *plasma*, e seu equivalente latino *formatio*, se traduz em alemão por *Bildung*, talvez desde Kant" (CABANAS, 1995, p. 34). O verbo *bilden* significa representar, formar, configurar, instruir, civilizar. *Bildung* significa, portanto, formação em seu mais amplo sentido, semelhante ao *Paideía* grego; remete ao significado que se atribuía para os termos derivados de *cultura* nas línguas latinas antes do século XVIII como processo de tornar alguém civilizado.

O estudo da relação entre este movimento ocorrido no início do século XIX e os conceitos desenvolvidos pelos filósofos da Grécia Antiga desvela uma série de similaridades que permitem compreender melhor este movimento. Os gregos foram os primeiros povos a formular uma concepção de ciência que não visava a sua aplicação imediata, e foram também os primeiros a compreenderem o estudo, *spoudé*, a investigação, como uma busca constante e sempre inacabada, e a educação como inseparável da investigação. Assim, para os gregos, não havia ciência sem investigação e, por outro lado, a educação era inseparável da filosofia. Esta concepção, que também remonta à noção de *Paideía*, foi provavelmente a influência decisiva para a formação do célebre conceito humboldtiano de unidade entre educação e pesquisa.

Mesmo não retomando uma concepção platônica de conceito, e apesar de eles terem levado até as últimas consequências a ruptura já em curso da filosofia com a concepção de Parmênides, que não distinguia ser e pensamento e influenciou os escritos de Platão, os filósofos e cientistas do século XIX, como Bolzano, Humboldt e outros, encontraram, na distinção de Platão entre o universal e o particular, uma precursora de sua concepção de ciências puras, na qual a diferenciação entre um objeto e sua representação; e entre uma ideia geral e uma forma particular de representar essa ideia, tinham uma importância maior. E a própria noção de aritmetização pode ser vista como uma forma de platonismo, como vimos anteriormente, e foi a responsável pela criação do que se chama de *Matemática Pura*.

Essa retomada da busca pela objetividade do conhecimento resultou, no início do século XIX, num movimento de revalorização do saber teórico e de questões que haviam sido descartadas como inúteis e escolásticas nos séculos anteriores. E no conceito humboldtiano de ciência e de cultura que surgiu na Europa do século XIX, a política, a pedagogia e a ciência formaram uma unidade inseparável, assim como aconteceu na Grécia Antiga.

A objetividade das idéias que surgiu no século XIX na filosofia e na matemática não era somente uma objetividade proveniente de regularidades da natureza ou da técnica, mas também uma objetividade social, fundamento da comunicação do conhecimento. E essa natureza social do conhecimento, que na Grécia Antiga se expressava na busca da unidade da *pólis*, é um dos aspectos fundamentais para compreender adequadamente a doutrina da rememoração de Platão, pois a discussão sobre a incomensurabilidade faz parte da resposta de Platão à afirmação de Mênon de que não é possível procurar o que não se conhece.[185]

Nenhuma práxis técnica apresenta, por exemplo, um número que não possa ser representado como uma divisão entre a medida de dois segmentos, ou seja, um número irracional.[186] Sempre que alguém se propõe a medir o comprimento de algum objeto, as medidas tomadas necessariamente podem ser expressas em termos de frações decimais finitas, em termos de números racionais, pois o grau de precisão é sempre finito. Foi por

---

[185] A questão que Platão propõe que o escravo demonstre, para expor a Mênon sua doutrina da rememoração, é dizer qual é a relação entre o lado de um quadrado que tenha o dobro da área de um quadrado dado, e o lado do quadrado dado. O lado do quadrado assim obtido é incomensurável com o lado do quadrado dado. Então, no contexto da busca platônica de conhecer algo que não se aprendeu, não foi por acaso que a descoberta de algo incomensurável ou irracional fosse o exemplo por ele escolhido para demonstrar a necessidade da rememoração.

[186] Os Pitagóricos imaginaram, antes de Platão, que haviam encontrado a chave para a compreensão do universo na noção de proporção, ou seja, no conceito da relação entre dois números naturais. Kneale (1962) afirma que eles foram possivelmente influenciados pelo fato de que a palavra *lógos* significa, além de proporção, razão ou explicação. Os pitagóricos ficaram perturbados pela descoberta de que a diagonal do quadrado era incomensurável com o seu lado (na linguagem atual da matemática, diríamos que não é possível obter *a medida* da diagonal do quadrado multiplicando um número racional pelo valor do lado do quadrado), e a expressão utilizada para denominar esta incomensurabilidade era a mesma que denominava a irracionalidade no sentido de impossibilidade de compreender por meio da razão ou explicar. Esta descoberta gerou uma verdadeira crise na Escola Pitagórica, e foi percebida por eles como algo que contrariava sua crença de que tudo poderia ser explicado, e esse episódio teve consequência nas diversas escolas filosóficas da filosofia grega. A matemática moderna manteve a terminologia grega, e hoje os números que não podem ser expressos como a divisão entre dois números, o que equivale em termos geométricos à razão entre dois segmentos, são chamados de números irracionais.

meio da razão, e não da medição como atividade prática, que os pitagóricos criaram ou descobriram os números irracionais.

A busca por publicização do conhecimento no século XIX, que transformou a matemática numa ciência em que as demonstrações ocupavam o centro de sua atividade, tem ainda dois outros pontos em comum com o conhecimento na Grécia Antiga, pois foi lá que surgiu a noção de demonstrações das afirmações matemáticas,[187] e em que pela primeira vez na história a palavra e o discurso ocuparam um papel central na gestão política.

No entanto, o sentido que a linguagem adquiriu no século XIX difere daquele que tinha na Grécia Antiga e no racionalismo. Como afirmamos anteriormente, na Grécia Antiga o grau de abstração simbólica foi mínimo, não tendo avançado "para além do processo de idealização, que é um processo de abstração da realidade direta" (BOCHNER, 1966, p. 18), e os matemáticos e filósofos se recusaram a manipular números e símbolos e a estudar as operações, procurando utilizar a palavra para nomear diretamente o objeto de conhecimento.

No racionalismo, por outro lado, a noção de gramática geral, gramática de linguagens reais, não era mais do que uma gramática subjacente à mente, uma "gramática do discurso mental" (HACKING, 1999, p. 165).[188] Prevaleceu no racionalismo o individualismo, e não uma linguagem que buscasse a objetividade na comunidade, que se costuma chamar de *intersubjetividade*, como ocorreu no século XIX. Assim, o século XIX retomou, sobretudo com a obra de Bolzano, alguns aspectos do rigor matemático grego e seu ideal de demonstrações rigorosas, mas numa situação em que o pensamento passou a utilizar

> escalas de abstração sem limites, ou seja, abstração de abstração, abstração de abstração de abstração, e assim por diante; e, mais importante, a abstração geral dos objetos que surgem assim, se vistos

---

[187] Apesar dos grandes avanços que haviam ocorrido nas civilizações anteriores, os documentos encontrados até o momento mostram apenas tabelas e o ensino de regras de procedimentos para encontrar resultados.

[188] O próprio Pascal (2006, p. 21) explica isso de maneira a tirar qualquer dúvidas, ao afirmar que "se encontram muitas vezes palavras impossíveis de serem definidas; e se a natureza não tivesse suprido essa falta por uma ideia semelhante que deu a todos os homens, todas as nossas expressões seriam confusas... porque a própria natureza nos deu, sem palavras, uma inteligência mais clara que aquela que a arte nos confere por meio de nossas explicações". É o reconhecimento explícito de que, para ele, assim como para vários racionaistas, a intuição é mais clara do que a linguagem.

> como exemplos de símbolos, deve ser aceitável para o exercício de certas manipulações e operações produtivas, se elas têm significados matematicamente... (BOCHNER, 1966, p. 18).

Então, se de um lado a matemática do século XIX retomou a noção de provas rigorosas, por outro, ela não retomou seu pudor em manipular com símbolos abstratos mas, pelo contrário, levou até o extremo esta combinação entre operação e abstração. Impulsionados pela Revolução Industrial e pelo desenvolvimento tecnológico e científico, em particular, pela noção de prova formal na matemática e de lei natural nas ciências, a matemática e o pensamento do século XIX combinaram a busca cartesiana por métodos expansíveis para um número cada vez maior de áreas do conhecimento com a busca por abstração característica dos gregos.

A visão de conhecimento e de universidade humboldtianas teve conseqüências no mundo todo, e resultou na valorização crescente das ciências puras como suporte teórico da Revolução Industrial. Assim, foi justamente no período em que pela primeira vez as ciências puderam mostrar sua utilidade tecnológica que surgiu a noção de ciência pura, o que foi visto pelo historiador da ciência John Desmond Bernal (BERNAL, 1976) como uma contradição. No mesmo sentido, a noção de ciências puras surgiu quando elas se separaram, até mesmo organizativamente, nas universidades, da filosofia: durante séculos o desenvolvimento da matemática se relacionou com uma busca filosófica e pedagógica do porque as coisas são como são, e somente no século XIX houve a separação entre a matemática e a filosofia, com o surgimento dos institutos e faculdades de ciências.

Sem dúvida, Humboldt e Bolzano são herdeiros de Kant, e ambos reconheceram essa herança, mas divergiram de Kant quanto à visão do saber teórico e de ciência pura. Afinal, Kant ainda elaborou sua crítica do ponto de vista do sujeito. As obras de Bolzano e de Humboldt e daqueles que conceberam as ciências de um ponto de vista puro, fizeram com que a abordagem subjetiva do conhecimento perdesse espaço para uma compreensão objetiva e social, e é por isso que a linguagem e a comunicação ganharam proeminência. Por outro lado, sem a virada copernicana e a inversão filosófica realizada por Kant, seria impensável tal transformação, de modo que a *filosofia crítica*, em certo sentido, foi intermediária entre uma concepção centrada no sujeito e uma centrada na sociedade.

Referências bibliográficas

APEL, Karl Otto. **Transformation der Philosophie**, Suhrkamp: Frankfurt, 1993.

ARAÚJO, José Carlos Souza. Pedagogia universitária: gênese filosófico-educacional e realizações brasileiras no século XX. **Linhas Críticas**, Brasília, v. 14, n. 26, p. 25-42, jan./jun. 2008 Linhas Críticas, Brasília, v. 14, n. 26, p. 25-42, 2008.

ARCHER, Ken. **Bolzano's Revival of the Classical Model of Science**. In: Philosophy and Mathematics in the Work of Bernard Bolzano: Praga, 2010.

ARISTÓTELES. **Segundos analíticos**. Campinas: Unicamp/Departamento de Filosofia (IFCH). Tradução de Lucas Angioni, 2004, livro 1.

___. Metafísica (II). Trad. Marcelo Perine, da versão italiana de Giovanni Reale. São Paulo: Loyola, 2002. (vol. 2).

ARNAULD, Antoine; Nicole, Pierre. **La logique ou l'art de penser (Logique de Port-Royal)** Paris: Champion, 2011.

AUROUX, Aylvain. Condillac. In: HUISMAN, Denis. **Dicionário dos filósofos**. Tradução de Cláudia Berliner *et alii.* São Paulo: Martins Fontes, 2001.

ÁVILA, Geraldo. **Introdução à análise matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

AZEVEDO, Henrique Machado Rodrigues. **Apontamentos Sobre a Influência da Queda do Império Romano e Surgimento do Sacro Império Romano-Germânico na Idéia Clássica de Poder Constituinte**. In: Anais do XVIII CONGRESSO NACIONAL DO Conselho Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Direito, São Paulo, 2009.

BACON, Francis. **Novum Organum**. Tradução de José A. R. de Andrade. São Paulo: Nova Cultural, 2005.

BADINTER, Elisabeth. **As paixões intelectuais**: Exigência de dignidade, 1751-1762 - Volume 2. Tradução de Clóvis Marques. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2007.

___. As **Paixões Intelectuais**: Vontade de Poder, 1762 - 1778 - Volume 3. Tradução de Clóvis Marques. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2009.

BENEKE, Friedrich Eduard. **Die Philosophie in ihrem Verhältnisse zur Erfahrung, zur Spekulation und zum Leben dargestellt**. Berlim: Mittler, 1833.

BERGMANN, Hugo. **Das philosophische Werk Bernard Bolzanos mit Benutzung ungedruckter Quellen kritisch untersucht**. Halle: Max Niemeyer, 1909.

___. **Um ensaio para uma nova teoria da visão e a teoria da visão confirmada**. Tradução de José O. A. Marques. Campinas: IFCH/Unicamp, 2008.

BERKELEY, George. **O analista**: ou um discurso dirigido a um matemático infiel Onde se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna são mais distintamente concebidos ou mais obviamente deduzidos do que os mistérios religiosos e as questões de fé. In: scientiæ studia, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 633-76, 2010.

BERNAL, John Desmond. **Historia social de la ciencia, II**: la ciencia en nuestro tiempo. 4. ed. Tradução de CAPELLA, Juan Ramón. Barcelona: Ediciones Península, 1976.

BETH, Evert Willem & PIAGET, Jean. **Mathematical epistemology and psychology**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. 1966.

BOCHNER, Salomon. **The Role of Mathematics in the Rise of Science**. New Jersey: Princeton University Press, 1966.

BOLZANO, Bernard. **Selbstbiographie**; In: Ausgewählte Schriften, dir. Winter, Eduard. Editora Union: Berlin, 1976.

___. **Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege**. Praga: Gottloeb Hass, 1817. Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, Leipzig, v. 153, p. 343-395, 1905.

___. **Die Wissenschaftslehre oder Versuch einer neuen Darstellung der Logik**. Hamburgo: Felix Meiner Verlags, 1930.

___. **Theory of Science; Attempt at a Detailed and in the Main Novel Exposition of Logic with Constant Attention to Earlier Authors**. Tradução de Rolf George. Berkeley: University of California Press, 1972.

___. **Theory of Science; Attempt at a Detailed and in the Main Novel Exposition of Logic with Constant Attention to Earlier Authors**. Tradução de Burnham Terrell. Dordrecht: Reidel, 1973.

___. Contributions to a Better-Grounded Presentation of Mathematics (BD). In: RUSS, Steve. **The mathematical works of Bernard Bolzano**. Oxford: Oxford University Press, 2004a.

___. **Lehrbuch der Religionswissenschaft, ein Abdruck der Vorlesungshefte eines ehemaligen Religionslehrers an einer katholischen Universität, von einigen seiner Schüler gesammelt und herausgegeben**, 3 partes em 4 volumes. Sulzbach: Seidel, 1834. BGA I, 6–8; E of selected parts in Bolzano 2007b, 171–229.

___. **Las paradojas del infinito**. México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias/UNAM, 1991.

___. **Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign, there lies at least one real root of the equation**. In: RUSS, S. The mathematical works of Bernard Bolzano. Oxford: OUP, 2004b.

BOOLE, George. **The Mathematical Analysis of Logic**. Cambridge: MacMillan, Barclay, & Macmillan; Londres: George Bell, 1847.

___. **An Investigation of The Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities**. Dover: Nova Iorque, 1958.

BOUTROUX, Pierre. **L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes**. Sceaux : Jacques Babay, 1992.

BOYER, Carl Benjamin. **The history of the calculus and its conceptual development**. New York: Dover, 1949.

BROWN, James Robert. Proofs and pictures. **The British Journal for the Philosophy of Science**, Oxford, v. 2, n. 48, p. 161-180**,** 1997.

CABANAS, José Maria Quintana. **Teoria de la educación**: concepción antinômica de la educación. Edición reformada. Madri: Dykinson, 1995.

CANTÙ, Paola. Bolzano versus Kant: mathematics as a scientia universalis. *I*n A. Reboul . **Philosophical Papers Dedicated to Kevin Mulligan**, Genève, 2011.

CARNAP, Rudolf. **The Old and the New Logic**. Tradução para o ingles de Isaac Levi. In: A. J. Ayer, ed., Logical Positivism 133-146. Glencoe, IL: Free Press, 2004.

___. Replies and Systematic Expositions. In: Schilpp, P. A. **The Philosophy of Rudolf Carnap**. La Salle, Illinois: Open Court, 966–98, 1963.

CASSIRER, Ernst. **A Filosofia do Iluminismo**. 3. ed. Tradução de Álvaro Cabral. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

___. **Substance et fonction**: éléments pour une théorie du concept. Tradução francesa de P. Caussat. Paris: Éditions de Minuit, 1910.

CAVAILLÈS, Jean. **Obras completas de Filosofia da Ciência**. Tradução de Abner Chiquieri. Rio de Janeiro: Forense, 2012.

CLÍMACO, Humberto de Assis. **Geometria e Aritmetização da Grécia Antiga à Matemática Moderna**. Seminário Nacional de História da Matemática, v. 1, p. 111-122, 2011.

___. **Prova, Explicação e Intuição em Bernard Bolzano**. In: Encontro Brasileiro de Pós Graduação em Educação Matemática, 2008, Rio Claro/SP. XII Encontro Brasileiro de Pós Graduação em Educação Matemática, 2008.

___.**Prova e Explicação em Bernard Bolzano**. 2007a. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Educação da Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá.

___. **Sobre a interface entre conceito e intuição na noção de explicação matemática**. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte - MG. IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007b.

COFFA, Albert. **The Semantic Tradition from Kant to Carnap**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

CONDILLAC, Étienne Bonnot. **Lógica ou os primeiros desenvolvimentos da arte de pensar**. São Paulo: Abril Cultural, 1979.

CORRÊA, Isabella Moreira de Paiva. **Como se fala matemática?** Um estudo sobre a complementaridade entre representação e comunicação na educação matemática. 2008. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Educação da Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. 4. ed. Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

d'ALEMBERT, Jean le Rond. Analyse, in : **Encyclopédie ou dictionnaire raisonnée des sciences, des arts et des métiers**. Berne and Lausanne : chez les Sociétés Typographiques, 1780.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**: a história de uma ciência em tudo e por tudo fascinante. 4ª ed. Tradução de J. B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora, 1982.

DE JONG, W.R. **Bernard Bolzano, analyticity and the aristotelian model of science**. Kant Studien, n. 92, p. 328-349, 2001.

DEDEKIND, Richard. **Was sind und was sollen die Zahlen?** Tradução inglesa de W. Beman. Courier Dover Publications, 1963.

DELACAMPAGNE, Christian. **História da Filosofia no Século XX**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1997.

DELEUZE, Gilles. **A filosofia crítica de Kant**. Tradução de Geminiano Franco. Lisboa: Edições 70, 1987.

DESCARTES, René. **Regras para a Direcção do Espírito**. Lisboa. Editorial Estampa.1977.

___. Meditações. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

DIAS, André Luís Mattedi et al. **A institucionalização da matemática moderna nos currículos escolares ou a hegemonia da cultura matemática científica nas escolas**. In: ESOCITE VIII - Jornadas Latinoamericanas de Estudios Sociales de la Ciencia y la Tecnología, Buenos Aires, 2010, p. 1-19.

DIAS, André Luís Mattedi. **O movimento da matemática moderna**: uma rede internacional científica-pedagógica no período da Guerra Fria. In: Jornadas Latino-americanas de estudos sociais das ciências e das tecnologias, ESOCITE, VII. Rio de Janeiro: Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, 2008.

DIEUDONNÉ, Jean. **A formação da matemática contemporânea**

DIDEROT, Denis. **Da interpretação da natureza e outros escritos**. São Paulo: Editora Iluminuras, 1989.

DROBISCH, Moritz Wilhelm. **Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen mit Rücksichlauf Mathematik und Naturwissenschaft**. 4. ed., Leipzig: Georg Olms, 1875

DUBY, Georges. **Idade Média na França**. De Hugo Capeto a Joana D'Arc. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1992.

DUCROS, Louis. **Les Encyclopedistes**. Paris: Honoré Champion, 1900.

DUGAC, Pierre. **Eléments d'analyse de Karl Weierstrass**. In: Archive for History of Exact Sciences 10, 41-176, 1972.

___. Histoire du theorem des accroissements finis. In: Archives nternationles d'Hhistoire des Sciences 30, 86-101, 1980.

___. Le theorem des valeurs intermediaries et la préhistoire de la topologie générale. In: Rivista di storia della scienza 2, 51-70.

Dummett, Michael. **Origins of Analytical Philosophy**. Londres: Duckworth and Cambridge MA: Harvard University Press, 1993

FERRY, Luc. **Kant:** uma leitura das três "Críticas". Tradução de Karina Jannini. –. Rio de Janeiro: DIFEL, 2009.

FOUCAULT, Michel. **As Palavras e as Coisas**. Tradução de Salma Tannus Muchail. 9ª Edição. Martins Fontes: São Paulo, 2007.

FRANSSEN, MAARTEN, LOKHORST, Gert-Jan and van de Poel, Ibo, "Philosophy of Technology", **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/technology/>.

FREGE, Gottlob. Correspondence with David Hilbert. In: GABRIEL, Gottfried et. al. **The Philosophical and Mathematical Correspondence**. Tradução para o ingles de Hans Kaal. Basil Blackwell: Oxford, 1980.

FREUDENTHAL, Hans. Did Cauchy plagiarize Bolzano? **Archive for History of Exact Sciences,** 18. XI, Volume 7, Issue 5, pp 375-392, 1971.

FRIES, Jakob Friedrich. **Neue oder anthropologische Krítik der Vernunft**. Heidelberg: den Christian Friedrich Winter, 1831.

GIDDENS, Anthony. **As conseqüências da modernidade**. Tradução de Raul Fiker. São Paulo: Editora UNESP, 1991.

GINZO, Arsênio. Hegel y el problema de la educación. In: HEGEL, Georg Wilhelm Friedrich. **Escritos pedagógicos**. México: Fondo de Cultura Econômica, 1991, p. 7-69.

GIOBERTI, Vincenzo. **Introduzione alio Studio della filosofia**. 2 vols. Brusselle: M. Hayez, 1840.

GODEL, Kurt. The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy, In: ___. **Collected Works**: Volume III: Unpublished Essays and Lectures. Nova Iorque: Editora da Oxford, 1995.

GRABINER, Judith V. **The origins of Cauchy's rigorous calculus**. Cambridge e Massachusetts: editor do The Massachusetts Institute of Technology, 1981.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. Bolzano, Cauchy and the 'new analysis' of the early nineteenth century, **Archive for History of Exact Sciences,** 6, p. 372-400, p. 1970.

HACKING, Ian. **Por que a linguagem interessa à filosofia?** Tradução de Maria Sayeg. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

___. Leibniz and Descartes: Proof and Eternal Truths, in: Honderich, T. **Philosophy Through its Past**, 207-224, Harmondsworth: Penguin, 1984.

HANNA, G. **Rigorous Proof in Mathematics Education**. Toronto: Editora da OISE, 1983.

___. **Proofs That Prove and Proofs That Explain**. In: G. Vergnaud, J. Rogalski. Anais do Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática, vol. 2, p. 45-51. Paris, 1989.

___. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, p. 5-23. Dordrecht: 2000.

HANNA, Gila; DE VILLIERS, Michael. ***Proof and Proving in Mathematics Education****: The 19th ICMI Study. Series: New ICMI Study Series, Vol. 15. XII, 2012.*

HANNA, Robert. **Kant e os fundamentos da Filosofia Analítica**. São Leopoldo: Editora Unisinos, 2005.

HEGEL, Georg Wilhelm Friedrich. **Princípios da filosofia do direito**. Tradução de Orlando Vitorino. São Paulo: Martins Fontes, 1997.

HINTIKKA, Jakko. Kant on the Mathematical Method. In: POSY, Carl. **Kant's Philosophy of Mathematics**. Dordrecht: Kluwer, 1992.

HUMBOLDT, Wilhelm von. **Sobre la organización interna y externa de las instituciones científicas superiores en Berlín**. LOGOS. Anales del Seminario de Metafísica. v. 38, p. 283-291. Madrid, 2005.

___. **Sobre a Organização Interna e Externa das Instituições Científicas Superiores em Berlim**. Rio de Janeiro: Eduerj, 1997.

HYKSOVA, Magdalena. **Karel Rychlík and Bernard Bolzano**. Seminários sobre questões filosóficas relacionadas à Matemática e à Física. Praga: Prometeu, 2000.

HUME, David. **Investigação sobre o entendimento humano e sobre os princípios da moral**. Tradução de José O. A. Marques. São Paulo: UNESP, 2004.

HUSSERL, Edmund. **Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie**. Livro I: Allgemeine Einführung in die reine Phänomenologie. Halle: Max Niemeyer, 1913.

IEZZI, Gelson, MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos** da **Matemática Elementar**: Trigonometria (vol. 3). São Paulo: Melhoramentos, 1978.

ISRAEL, Jonathan. **O Iluminismo radical**. A Filosofia e a Construção da Modernidade 1650-1750. Tradução de Claudio Blanc. São Paulo: Editora Madras, 2009.

JACOBI, Friedrich Heinrich. **David Hume on Faith or Idealism and Realism**: A Dialogue, in G. DI GIOVANNI. The Main Philosophical Writings and the Novel Allwill. Montreal: McGill-Queen's University Press, 1994.

____: **Werke**: Briefwechsel, Nachlaß, Dokumente. Suttgart-Bad Constatt: Frommann-Holzboog, 1981.

JOHNSTON, William M. **The Austrian Mind**: An Intellectual and Social History, 1848-1938. Berkeley, Los Angeles e Londres: Editora da Universidade da Califórnia, 2000.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. 5. ed. Tradução de M. P. Santos; A. F. Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

____. **Carta de Kant a Marcus Herz**. Tradução de P. L. dos Santos. In: O que nos faz pensar (CADERNOS DO DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA DA PUC-RIO), número especial sobre Kant, p. 35-42, 2012.

____. **Prolegômenos a toda metafísica futura**. Tradução de T. M. Bernkopf. São Paulo: Abril Cultural, 1980 (Os Pensadores).

____. **Lógica**. Tradução de G. A. de Almeida. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1992.

____. **Que significa orientar-se no pensamento?** Tradução de Artur Mourão. In: ____. A paz perpétua e outros opúsculos. p. 39-57. Lisboa: Edições 70, 2008.

____. Investigação sobre a evidência dos princípios da teologia natural e da moral. Tradução de Luciano Codato. In: ____. **Escritos pré-críticos**. São Paulo: Editora da UNESP, 2005.

____. **Réponse à Eberhard**, Tradução para o francês de R. Kempf. Paris: Vrin, 1973.

KITCHER, Philip. Bolzano’s ideal of algebraic analysis. **Studies in the History and Philosophy of Science**, v. 6, n. , p. 229-267, 1975.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA – Instituto Brasileiro de Difusão Cultural, 1976.

KNEALE, William; KNEALE, Marta. **O desenvolvimento da lógica**. Tradução de M. S. Lourenço. 3ª edição. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

LAPOINTE, S. Introduction: Bernard Bolzano: contexte et actualité. In: LAPOINTE, S. Bernard Bolzano: philosophie de la logique et théorie de la connaissance. **Philosophique** v. 31, p. 3-17. Printemps: 2003.

LE GOFF, Jacques. **Uma vida para a História**. Conversações com Marc Heurgon. São Paulo: Unesp, 1998.

LEHNER, Ulrich L. What is 'Catholic Enlightenment'? In: **History Compass** 8/2 (2010): 166–178, 2010.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm von. Meditations on Knowledge, Truth and Ideas. In: **_____**: **Philosophical Papers and Letters**. 2. ed. Tradução para o inglês e organização de L. Loemker Dordrecht: Reidel, 1969.

_____: Meditações sobre o Conhecimento, a Verdade e as Ideias. v. 2, n. 1, p.13-25. **Doispontos**: Curitiba e São Carlos, 2005.

_____: **Leibnitz's Deutsche Schriften**. In: GUHRAUER, G. E. Berlim: Verlag von Beit, 1838/40.

_____: **Novos ensaios sobre o conhecimento humano**. Organização: BARAÚNA, L. J. São Paulo: Editora, 2004 (Os Pensadores).

_____: **Discurso da Metafísica**. Tradução de João Amado. Lisboa: Edições 70, 2000.

LEIMKUHLER, Matthias. "Bernhard Bolzano". In: Herbermann, Charles G. **The Catholic Encyclopedia**. Vol. 2: Assizes-Browne. NovaYork: Robert Appleton Company,1907. 26 Jul. 2013 <http://www.newadvent.org/cathen/02643c.htm>.

LEPENIES, Wolf. **Das Ende der Naturgeschichte**. Frankfurt: Suhrkamp, 1976.

LOVEJOY, Arthur O. **A grande cadeia do ser**: um estudo da história de uma ideia. Tradução de Aldo Barbieri. São Paulo: Palíndromo, 2005.

MENDELSSOHN, Moses, On Evidence in Metaphysical Sciences," In: DAHLSTROM, Daniel, **Philosophical Writings**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997 .

MANCOSU, Paul. Bolzano and Cournot on mathematical explanation. **Revue d'Histoire des Sciences**, vol. 52, n. 3-4, p. 429-455, 1999.

____. **Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century**. Nova York: Oxford University Press, 1996.

MANNHEIM, Karl. **Ideologia e utopia**. 4. ed. Tradução de Sérgio Santeiro. Rio de Janeiro: Guanabara, 1986.

MARX, Karl. **O Capital**. Crítica da economia política. Tomo 2. Tradução de Regis Barbosa e Flávio R. Kothe. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1996 (coleção Os Economistas).

MORRISON, Heather. **Pursuing enlightenment in Vienna**, 1781-1790, 2005. Tese (Doutorado) – Departamento de História da Faculdade do Estado de Lousiana, Lousiana.

MORSCHER, Edgar. Bernard Bolzano. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy** (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/bolzano/>.

MORUJÃO, Alexandre F. Prefácio da Tradução Portuguesa à *Crítica da Razão Pura*. In: KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. 5. ed. Tradução de M. P. Santos; A. F. Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

NEWTON, Isaac. **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**, 3. ed. Tradução para o inglês de Bernard Cohen e Anne Whitman's. Califórnia: Universidade da Califórnia, 1999.

NEWTON, Isaac. **Mathematical Principles of Natural Philosophy**. In: COHEN, I. Bernard & WESTFALL, Richard S. *Newton*: textos, antecedentes e comentários. Rio de Janeiro: EDUERJ-Contraponto, 2002.

OTTE, Michael. CLÍMACO, Humberto de Assis. Bernard Bolzano: o conceitualismo e a intuição na Educação Matemática. **Revista de Educação Publica** (UFMT), v. 19, p. 165-180, 2010.

___. Bolzano, a formação da Matemática Pura e a aritmetização da Matemática *. In: Anais do ANPED, Goiânia, 2013.*

OTTE, Michael. The Analytic/Synthetic Distinction and Peirce's Conception of Mathematics In: Rossella Fabbrichesi e Susanna Marietti. **Semiotics and Philosophy in Charles Sanders Peirce.** Cambridge: Cambridge Scholars Press, p. 51-88, 2006.

___. **Das Formale, das Soziale und das Subjektive**: Eine Einführung in die Philosophie und die Didaktik der Mathematik. Segunda edição. Frankfurt: Suhrkamp, 1994.

___. O **formal, o social e o subjetivo**: uma introdução à filosofia **e** à didática da matemática. Tradução de Maria Bicudo et. al. São Paulo: Editora da UNESP, 1993.

___. Mathematics, Logics, and Philosophy: The Analytic/Synthetic Distinction in Kant, Bolzano and Peirce. **Logique & Analyse**, Bruxelas, n. 225, p. 83–112, 2014.

___. Complementarity, sets and numbers. **Educational Studies in Mathematics**, v. 53, p. 203-228. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2003.

___. Justus and Hermann Grassmann**:** philosophy and mathematics. In.: **Hermann Grassmann – From past to future**: Grassmann's work in context Grassmann bicentennial conference, September 2009. H-J Petsche, A. C. Lewis, J. Liesen, S. Russ. (organizadores). pp. 61 – 70. Springer Basel AG, 2011.

PASCAL, Blaise. **Do espírito geométrico**. In: Do espírito geométrico e outros textos; Pensamentos. Tradução de Antônio Geraldo da Silva. São Paulo: Editora Escala, 2006.

PORTA, Mario Ariel González. Platonismo e intencionalidad - I: a propósito de Bernhard Bolzano. Primeira Parte. **Síntese**, Belo Horizonte, v. 29, n.94, p. 251-275, 2002.

___. Platonismo e intencionalidad - II: a própósito de Bernhard Bolzano. **Síntese**, Belo Horizonte, v. 30, n.96, p. 85-106, 2003.

___. A polêmica em torno ao psicologismo de Bolzano a Heidegger. **Síntese**, Belo Horizonte, v. 31, n.99, p. 107-131, 2004.

___. **Estudos neokantianos**. São Paulo: Loyola, 2011.

___. **A filosofia a partir de seus problemas**. 3. ed. São Paulo: Loyola, 2007.

REALE, Giovanni e ANTISERI, Dario. **História da filosofia**: do humanismo a Descartes. Volume 3. 2. ed. Tradução de Ivo Storniolo. São Paulo: Paulus, 2005.

___. **História da filosofia**: do humanismo a Descartes. Volume 5. 2. ed. Tradução de Ivo Storniolo. São Paulo: Paulus, 2007.

RÉMOND, René. **O antigo regime e a revolução**. São Paulo, Cultrix, 1986.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia da matemática**. 4. ed. Tradução de Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

RYLE, Gilbert. **The Revolution in Philosophy**. Macmillan: Nova Yorque, 1956.

RUSNOCK, P: Bolzano and the traditions of analysis. In: KÜNNE, W.; SIEBEL, M.; TEXTOR, M. **Grazer Philosophische Studien. Internationale Zeitschrift für Analytische Philosophie**. n. 53, p. 61-85, 1997.

RUSS, Steve. Introdução. In: RUSS, Steve. **The mathematical works of Bernard Bolzano**. Oxford: Oxford University Press, 2004.

RUSSELL, Bertrand. **História do Pensamento Ocidental**: as aventuras das ideias dos pré-socráticos a Wittgenstein. 4. ed. Tradução de Laura Alves e Aurélio Rebello. Rio de Janeiro: Ediouro, 2001.

RYLE, Gilbert. **The Revolution in Philosophy**. Macmillan: Nova Iorque, 1956.

SHABEL, Lisa. Kant’s philosophy of mathematics. In: GUYER, Paul. **The Cambridge Companion to Kant**: Kant and modern philosophy. 2. ed. Cambridge et. al.: Cambridge University Press, 2006.

SCHUBRING, Gert. Bernard Bolzano: Not as Unknown to His Contemporaries as is Commonly Believed? **Historia Mathematica**, v. 20, 45–53, 1993.

___. **Conflicts Between Generalization, Rigour and Intuition**: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century. Nova Iorque: Springer, 2004.

SINACEUR, H. Cauchy et Bolzano. **Revue d'Histoire des Sciences**, v. 26, 87–112, local de publicação e editora desconhecidos, 1973.

SKED, Alan. **Declínio e Queda do Império Habsburgo**: 1815-1918. Lisboa: Edições 70, 2008.

SMITH, David Woodruff. **Husserl** (coleção Routledge philosophers). Nova York e Oxon: Routledge, 2007.

STEINER, M. Mathematical explanation, **Philosophical Studies**, D. Reidel Publishing Company, n. 34, p. 135-151, 1978.

STRUIK, Dirk. **História Concisa das Matemáticas**. Tradução de João Guerreiro. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1989.

SUNDHOLM, Goran . When, and why, did Frege read Bolzano. **The logical yearbook 1999** p. 164 - 174. In: Childers, Timothy. Filosofia Publishers, Czech Academy of Science, Prague, 2000.

TENNENBAUM, Rosa. Formação do Belo Caráter. Tradução de Simone de Mello. http://www.goethe.de/wis/bib/prj/hmb/the/158/pt10444028.htm. Publicado originalmente no site oficial do Instituto Schiler. http://www.schiller-institut.de/seiten/erziehung/humboldt.htm 2012.

TWARDOWSKI, Kasimir. **On the Content and Object of Representation**: A psychological investigation. Tradução para o inglês de R. Grossmann. Haia: Martinus Nijhoff, 1977.

WALDEGG, Guillermina. Bolzano's Approach to the Paradoxes of Infinity: Implications for Teaching. **Science & Education**, v. 14, p. 559–577. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2005.

WHALEY, Joachim. **Germany and the Holy Roman Empire: Volume I: Maximilian I to the Peace of Westphalia**, 1493-1648. Oxford: Oxford University Press, 2011.

WILLIAMS, Raymond. **Cultura e Sociedade**: de Coleridge a Orwell. Petrópolis: Vozes, 2011.

WOLFF, Christian. **Mathematisches Lexicon**. Leipzig: J. F. Gleditsch, 1716.

___. **Preliminary Discourse on Philosophy in General**. Tradução para o inglês de J. Blackwell. Indianapolis: Bobbs-Merrill,1963.