Ørsteds „Gedankenexperiment“: eine Kantianische Fundierung der Infinitesimalrechnung?

Ein Beitrag zur Begriffsgeschichte von ‚Gedankenexperiment' und zur Mathematikgeschichte des frühen 19. Jahrhunderts[1]

Daniel Cohnitz (Tartu)

Es wird häufig darauf hingewiesen, dass Hans Christian Ørsted den *Ausdruck* ‚Gedankenexperiment' erfunden hat. Ob er damit auch in die Begriffsgeschichte des Gedankenexperiments gehört, ist damit freilich noch nicht gesagt. Dazu müsste man sich ansehen, was Ørsted mit ‚Gedankenexperiment' gemeint hat, und ob er diesen Ausdruck für eine Methode der Naturwissenschaften bzw. für bestimmte paradigmatische Episoden der Wissenschaftsgeschichte verwendet hat. Es wird gezeigt, dass Ørsted mit seinem Begriff vom Gedankenexperiment wohl im Kern auf etwas anderes abzielte. Ørsted ging es beim „Gedankenexperiment“ weniger um die empirischen Naturwissenschaften, als vielmehr um die Mathematik seiner Zeit. Genauer gesagt ging es Ørsted darum, ein Kantianisch motiviertes Fundierungsprogramm für die Mathematik vorzuschlagen. Es wird außerdem kurz aufgezeigt, in welcher Beziehung Ørsteds Funktion für das „Gedankenexperiment“ in der Mathematik zu den Funktionen steht, die Ernst Mach und Imre Lakatos dem Gedankenexperiment in der Mathematik zuweisen.

1. Einleitung

Es wird häufig darauf hingewiesen[2], dass Hans Christian Ørsted den *Ausdruck* ‚Gedankenexperiment'[3] erfunden hat. In der Tat scheint er (mit) der erste zu sein, der mit ‚Gedankenexperimenten' oder ‚Gedankenversuchen' eine Methode bezeichnen wollte, die sich sowohl in den Naturwissenschaften wie auch in der Mathematik finde, und für die Immanuel Kants Naturlehre aus *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* die „schönsten Beyspiele“[4] liefere.

---

[1] Für hilfreiche Hinweise und/oder Kommentare zu früheren Versionen danke ich Stefan Bagusche, Klaus-Jürgen Düsberg, Christoph Kann, Ulrich Kühne, Jochen Lechner und Michael Stöltzner. Wenn in dieser Untersuchung irgendetwas Richtiges steht, verdankt es sich sicherlich den Untersuchungen von Michael Friedman und Ulrich Kühne, von denen ich viel profitiert habe.

[2] Zum ersten Mal bei Johannes Witt-Hansen: „H. C. Örsted, Immanuel Kant, and the thought experiment“. In: *Danish Yearbook of Philosophy* 13 [1976], 48-65; aber auch in Ulrich Kühne: „Gedankenexperiment und Erklärung“, in: *Bremer Philosophica* 1997/5, 1-51; ders.: *Die Methode des Gedankenexperiments*, Frankfurt am Main. 2005; Elke Brendel: „Intuition pumps and the proper use of thought experiments“. In: *Dialectica* 58 [2004], 89-108.

[3] Im Folgenden verwende ich einfache Anführungszeichen, wenn ich über einen Ausdruck rede. Doppelte Anführungszeichen verwende ich, wenn ich zitiere.

[4] Hans Christian Ørsted: „Oersted über das Studium der allgemeinen Naturlehre“. In: *Journal für Chemie und Physik* 36/4 [1822], 483.

Obzwar er damit ein neues Wort gebildet hatte, kann man sich fragen, ob es Ørsted gelungen ist, dieses auch mit einem klaren Inhalt zu füllen. Zunächst kann man feststellen, dass ihm sehr wahrscheinlich nicht gelungen ist, ein neues Thema in die Wissenschaftsphilosophie zu bringen. Ørsted blieb nach allem, was wir wissen, ohne Wirkung, und die Begriffsgeschichte des Gedankenexperiments beginnt erst mit Ernst Mach.[5]

Letzteres wäre zunächst unproblematisch, zumal es innerhalb der Wissenschaftsgeschichte häufiger zu unabhängigen Entdeckungen kommt. Hat Ørsted denn seine Redeweise von ‚Gedankenexperimenten' mit einem Inhalt gefüllt, den man sinnvoll Untersuchungen zum Gedankenexperiment in den Naturwissenschaften zu Grunde legen könnte, weil er vielleicht im Vergleich zu gegenwärtigen Verwendungen des Wortes noch viel präziser war? Gegeben die Tatsache, dass ‚Gedankenexperiment' heutzutage zu einem Modewort verkommen ist, könnte eine begriffsgeschichtliche Untersuchung vielleicht zur Begriffsklärung beitragen.

Wenn sich bei Kant, der Mathematik und der Naturwissenschaft eine gemeinsame Methode fände, wäre das außerdem vielleicht gerade, was man bräuchte, um das Thema ‚Gedankenexperimente in der Philosophie' mit dem Thema ‚Gedankenexperimente in den Naturwissenschaften' verbinden zu können, was schließlich von vielen modernen Autoren angestrebt wird.[6]

Auch dies ist aber mehr als fraglich. Man muss leider feststellen, dass Ørsted nicht in der Lage war, eine klare Charakterisierung dessen zu geben, was mit ‚Gedankenexperiment' bezeichnet werden soll. Darüber hinaus muss man konstatieren, dass diejenigen Aktivitäten, die Ørsted unter diese Bezeichnung subsumiert wissen wollte, eine relativ heterogene Sammlung darstellen, deren Kern aber kaum Berührungspunkte mit der heutigen Verwendung des Ausdrucks in der Wissenschaftstheorie besitzt. Wie wir sehen werden, ist die *Kern*bedeutung seines Begriffs nämlich *keine* Erkenntnismethode der empirischen Naturwissenschaften (im heutigen Sinn), sondern vermutlich vielmehr eine bestimmte Verfahrensweise in der Mathematik seiner Zeit.

---

[5] Vgl. Daniel Cohnitz: „Poor Thought Experiments? A comment on Atkinson and Peijnenburg". In: *Journal for General Philosophy of Science*. Im Erscheinen.

[6] Vgl. Ulrich Gähde: „Gedankenexperimente in Erkenntnistheorie und Physik: strukturelle Parallelen". In: Julian Nida-Rümelin (Hrsg.), *Rationalität, Realismus, Revision: Vorträge des 3. internationalen Kongresses der Gesellschaft für Analytische Philosophie vom 15. bis zum 18. September 1997 in München*, Berlin. 2000, 457-464; Jeanne Peijnenburg und David Atkinson: „When are thought experiments poor ones?". In: *Journal for General Philosophy of Science* 34 [2003], 305-322; E. Brendel: „Intuition Pumps"; D. Cohnitz: „Poor Thought Esxperiments?".

In der Kernbedeutung der modernen wissenschaftstheoretischen Verwendung des Ausdrucks ‚Gedankenexperiment' bezeichnet dieser hauptsächlich ein Verfahren zur Theorien*kritik*.[7] Der Ausdruck besitzt auch Nebenbedeutungen, in denen er sich auf eine didaktische Methode zur Veranschaulichung theoretischer Konsequenzen (etwa beim Theorienvergleich) bezieht.[8] Hauptsächlich geht es beim Gedankenexperiment aber darum, einen bestimmten Adressatenkreis mit einem bloß hypothetischen Beispiel davon zu überzeugen, dass bestimmte Überzeugungen dieses Adressatenkreises zu revidieren sind. Ulrich Gähde hat die Charakteristika eines Gedankenexperiments zur Überzeugungsänderung in folgender Weise zusammengefasst:

(i) Das Ziel eines Gedankenexperiments besteht darin, *begründete* Überzeugungsänderungen beim Adressaten zu bewirken.
(ii) Um dieses Ziel zu erreichen, werden entweder Experimente beschrieben, oder es werden bestimmte denk- oder vorstellbare Sachverhalte geschildert.
(iii) Das Ziel der Überzeugungsänderung soll erreicht werden, ohne dass die geschilderten Experimente de facto ausgeführt oder die entsprechenden Sachverhalte als real angenommen werden müssten.[9]

Innerhalb der Wissenschaftsgeschichte der Naturwissenschaften gehören dazu Galileis Gedankenexperiment zur Widerlegung des Aristotelischen Fallgesetzes, Simon Stevins „Kugelkranzbeweis" zur Entwicklung des Prinzips der schiefen Ebene, Newtons Eimerversuch, Maxwells Dämon, etc.[10] *So* aufgefasst diskutiert die Wissenschaftstheorie „Gedankenexperimente" mindestens seit Ernst Mach.[11] Betrachten wir nun, was Ørsted unter ‚Gedankenexperiment' verstanden haben mag.

2. Hans Christian Ørsted

---

[7] Vgl. Daniel Cohnitz: *Gedankenexperimente in der Philosophie*. Im Erscheinen.

[8] Vgl. E. Brendel: „Intuition Pumps"; D. Cohnitz: *Gedankenexperimente in der Philosophie*.

[9] Vgl. hierzu U. Gähde: „Gedankenexperimente in Erkenntnistheorie und Physik"; D. Cohnitz: *Gedankenexperimente in der Philosophie*.

[10] Nach Ørsted kamen durch den Fortgang der Wissenschaftsgeschichte zu dieser Liste freilich noch einige hinzu, wie z. B. Maxwells Dämon und die diversen Gedankenexperimente zur Relativitätstheorie und Quantenmechanik. Vgl. hierzu D. Cohnitz: *Gedankenexperimente in der Philosophie*.

[11] Vgl. ebd.

Hans Christian Ørsted (1777-1851) war zu Lebzeiten ein durchaus berühmter Naturforscher[12], sowohl in seiner Heimat Dänemark, wie aber auch in Deutschland. Sein Ruhm führt sich dabei insbesondere auf seine Entdeckung des Elektromagnetismus von 1820 zurück.[13] Diese Entdeckung war aus mindestens zwei Gründen bemerkenswert: Einerseits wies sie darauf hin, dass Elektrizität und Magnetismus womöglich keine zwei getrennten Phänomene mit je eigenen Kräften sind, sondern sich vermutlich als ein und dasselbe Grundphänomen erweisen werden. Zum anderen stand sie in Widerspruch zu der nach Kant apriorischen „Einsicht", dass Kräfte immer nur als Anziehungs- und Abstoßungskräfte entlang einer geraden Linie wirken.[14] Ørsted selbst gelang es nicht, theoretisches Kapital aus seiner Entdeckung zu schlagen. Obwohl der Elektromagnetismus zur „Forschungsfront"[15] der damaligen Physik wurde, sollte Ørsted selbst keine weitere Rolle in seiner Erforschung spielen. Ørsted war mehr ein romantischer Naturforscher als ein fähiger Experimentator. Entsprechend sind seine wissenschaftlichen Arbeiten eher spekulativer Art.[16]

3. *Über das Studium der allgemeinen Naturlehre*

In seinem 1811 erschienenen Essay *Prolegomenon zur allgemeinen Naturlehre* (*Første Indledning til den almindelige Naturlære*, Kopenhagen 1811) entwickelt Ørsted scheinbar eine erste wissenschaftstheoretische Reflexion über den Sinn des „Gedankenexperiments" in der Physik. In diesem Essay stellt Ørsted ganz allgemeine Betrachtungen über die Naturwissenschaften an. Der uns daraus besonders interessierende Abschnitt ist von Ørsted 1822 auf Deutsch mit dem Titel „Oersted über das Studium der allgemeinen Naturlehre" im *Journal für Chemie und Physik* veröffentlicht worden.[17]

In diesem Aufsatz diskutiert Ørsted zunächst die Unerreichbarkeit der naturwissenschaftlichen Zielsetzung, das ganze Universum verstehbar zu machen, dann den Charakter der Naturgesetze als Angaben des Wesens der Dinge. Nach einiger Schwärmerei über die Einheit von Natur- und Vernunftgesetzen kommt Ørsted zum Schluss, dass die Einsicht der Naturwissenschaften um ihrer selbst willen gesucht werden muss, dass sie ein Zweck an sich ist, unmittelbar gefolgt von einer ebenso überzeugenden Darstellung des Nutzens wissenschaftlicher Er-

---

[12] Vgl. zum Folgenden die Darstellung in U. Kühne: *Die Methode des Gedankenexperiments*.

[13] Vgl. J. Witt-Hansen: „H. C. Örsted, Immanuel Kant, and the thought experiment"; U. Kühne: *Die Methode des Gedankenexperiments*.

[14] Vgl. *MAN*, AA 04: 498 f.27-04.

[15] U. Kühne: *Die Methode des Gedankenexperiments*, 111.

[16] Vgl. ebd., 114-130.

[17] Zu anderen Textfassungen vgl. U. Kühne: *Die Methode des Gedankenexperiments*, 130.

kenntnis für das praktische Leben. Dann erfolgt eine Einteilung der Naturwissenschaften in Unterdisziplinen, eine Unterscheidung zwischen Naturwissenschaft und spekulativer Naturphilosophie sowie eine Aufstellung metaphysischer „Grundwahrheiten“[18] bis Ørsted schließlich zu seiner Methodenlehre der Naturwissenschaften gelangt.

Diese Methodenlehre beginnt Ørsted mit einer Reflexion über das naturwissenschaftliche Experiment. Schließlich sei „[d]ie Grundlage der allgemeinen Naturlehre […] die Erfahrung.“ Ørsted erläutert das experimentelle Verfahren, die so genannte „Verfahrungskunst“ als kontinuierliche Entwicklung aus der Alltagserfahrung, wobei sich Erstere von Letzterer insbesondere dadurch unterscheidet, dass sie auf verschiedene Weise in das Naturgeschehen *eingreift*:

> Mit anderen Worten: um so vollkommen als möglich die Wirkungsart der Natur zu sehen, müssen wir verstehen sie willkürlich in Wirksamkeit zu setzen, und sie gleichsam zwingen vor unsern Augen zu handeln. Dies nennen wir *Versuche anstellen, experimentieren*.[19]

Hierzu gehöre das Verwenden von Messinstrumenten, die Abschirmung von störenden Einflüssen, die Variation nur bestimmter Parameter, sowie die Verwendung verschiedener Messmethoden. Im darauf folgenden Abschnitt erläutert Ørsted dies noch etwas genauer, indem er darauf hinweist, dass „Versuche anstellen“ bedeutet, „der Natur Fragen vorzulegen“ (was nur geht, wenn man weiß wonach man fragen soll). Außerdem ist erforderlich, dass der Experimentator das Ganze wie auch alle Teile im Auge haben muss, dass Versuche variiert werden müssen, dass man sowohl analytisch wie synthetisch vorgehen muss (wobei Ørsted die Chemie im Blick hat), (wieder) dass störende Randbedingungen abzuschirmen oder auszuschließen sind, dass präzise Messinstrumente benutzt und genaue Protokolle geführt werden müssen und Versuche zu wiederholen sind.

Der daran anschließende Absatz betont nochmals die Rolle des realen Experiments. Jenes sei so zentral für die Naturwissenschaft, dass diese häufig „experimentale Naturlehre“ genannt wurde. „Vernunftschlüssen“ ist im Bereich der Naturwissenschaft nicht zu trauen, nur wenn die experimentell gewonnene Erfahrung unsere Schlüsse unterstützt, sind unsere Einsichten zuverlässig.

---

[18] Wie ‚Die Naturgesetze sind unveränderlich.‘, ‚Wirkungen welche wahrhaft gleich sind, müssen von denselben Kräften herrühren.‘ u. Ä. Vgl. H. C. Ørsted: „Über das Studium der allgemeinen Naturlehre“, 476.

[19] Ebd., 477.

Nach diesem Plädoyer für eine rein empiristische Auffassung der Naturerkenntnis, folgt der Absatz, der angeblich den Geburtsort von ‚Gedankenexperiments' als wissenschaftstheoretische Bezeichnung für eine Methode der Naturwissenschaften darstellt. Was in diesem Absatz verhandelt wird, ist für einen heutigen Leser schwer verständlich. Ørsted verspricht, die experimentale Kunst „von einem höheren Gesichtspunkt aus" zu betrachten. Die experimentelle Methode habe sich nicht nur entwickelt, um die äußere Welt nachzuvollziehen, sondern um „zugleich unsern Geist in eine schaffende Wirksamkeit" zu versetzen, „um dadurch eine mit der beständigen Entwicklung der Natur mehr harmonische, lebendige und kräftige Kenntniß hervorzubringen".

Bis hierher klingt es so, als solle die experimentelle Methode oder irgendeine aus ihr gewonnene andere Methode unseren Geist in den Stand versetzen, die „beständige Entwicklung der Natur" antizipieren zu können. Was das heißen soll, ist ziemlich unklar. Irgendwie scheint es darum zu gehen, durch das Nachschaffen der Wirklichkeit im Experiment die dahinter liegenden Mechanismen beherrschen oder verstehen zu lernen.

Ørsted bezeichnet diese Methode als „schaffende Verfahrensart", oder „genetische Methode". Diese werde *nicht nur* im Umgang mit körperlichen Gegenständen (also im realen Experiment) angewandt, sondern auch im Umgang mit bloß vorgestellten Gegenständen.[20]

> Wenn wir in unsrer Vorstellung einen Punkt sich bewegen lassen, um eine Linie hervorzubringen, oder eine Linie sich um ihren einen Endpunkt drehen lassen, und mit dem andern einen Kreis beschreiben, was ist das denn anders als ein Gedankenexperiment?[21]

Die Methode des „Gedankenexperiments" werde zwar hauptsächlich in Differential- und Integralrechnung verwendet (ja diese bestehe „durchaus nur in solchen Gedankenenversuchen und Betrachtungen darüber"[22]) sei aber durchaus häufiger anwendbar als man meinen solle. Ihr Vorteil liege darin, dass sie uns in Kenntnis setzen kann, warum etwas „wirklich so ist", nicht nur darüber, warum man von etwas „überzeugt seyn muß"[23]:

---

[20] Die „genetische Methode" umfasst bei Ørsted also *unter anderem* auch das Gedankenexperiment, ist aber wohl nicht damit identisch. Kühne interpretiert Ørsted so als sei sie es. Vgl. *Die Methode des Gedankenexperiments*, 132.

[21] H. C. Ørsted: „Über das Studium der allgemeinen Naturlehre", 482.

[22] Ebd., 482.

[23] Ebd., 482.

> Hier sehen wir jede Wahrheit in ihrer Entstehung. Der Grund ihres Daseyns und unsere Gewißheit fallen daher zusammen; so, daß wenn er auf diese Weise dargestellt ist, er zugleich schon bewiesen ist.[24]

Der Abschnitt über die genetische Methode endet mit dem Hinweis darauf, dass man in der Naturlehre oft seine Zuflucht zu der häufig übersehenen Methode des Gedankenexperiments nehmen muss, wenn das Ziel der Naturlehre darin bestehen soll, die Entwicklung der Gedanken denen der Gegenstände folgen zu lassen, und der Bemerkung, dass die schönsten Beispiele für Gedankenexperimente in Kants *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* aufzufinden seien.[25]

Was genau mag Ørsted mit der Methode des „Gedankenexperiments" oder „Gedankenversuchs" im Sinn gehabt haben? Soweit es die bisher angeführten Stellen betrifft, scheint – wie wir im Folgenden zeigen wollen – die plausibelste Interpretation darin zu bestehen, ‚Gedankenexperiment' als einen Überbegriff zum Begriff des Beweises durch *Demonstration* zu verstehen, wie Kant ihn an verschiedenen Stellen in der *Kritik der reinen Vernunft* zu entwickeln versucht. Die von Ørsted bisher genannten Charakteristika von Gedankenexperimenten sind folgende:

(1) Die Methode des Gedankenexperiments behandelt Gegenstände des „inneren Sinns", also Vorstellungen.

(2) Sie involviert (manchmal) die Konstruktion geometrischer Objekte aus anderen geometrischen Objekten in der Vorstellung.

(3) Sie ist die Hauptmethode von Differential- und Integralrechnung.

(4) Sie führt im Vergleich mit existierenden Alternativmethoden zu einem „tieferen" Verständnis („wie es wirklich ist").

---

[24] Ebd., 482.

[25] Ebd. 483. Kant stand unter den damaligen Naturwissenschaftlern schon nicht sehr hoch im Kurs, was Ørsted veranlasst haben könnte, diesen Bezug auf Kant in späteren Ausgaben dieses Textes wegfallen zu lassen. Betrachtet man die Änderungen, die Ørsted an dem Gesamttext vorgenommen hat, lässt sich außerdem feststellen, dass der Aufsatz von spekulativen Elementen zunehmend befreit wurde, so dass auch die Auslassung des Hinweises auf die metaphysischen Anfangsgründe im Zuge dieser „Bereinigung" stattgefunden haben mag. Vgl. hierzu U. Kühne: *Die Methode des Gedankenexperiments*, 136.

(5) Dieses tiefere Verständnis wird erreicht, weil wir jede „Wahrheit in ihrer Geburt zu sehen bekommen".

Alle diese Punkte treffen bei Kant auch auf den Beweis durch Demonstration zu, wie wir im nächsten Abschnitt ausführlich erläutern werden. Dass Ørsted eine Kantianische Konzeption im Hinterkopf hatte, ist nicht nur auf Grund das Hinweises auf Kants *Metaphysische Anfangsgründe* wahrscheinlich, sondern auch, weil Ørsted Kantianer war. Seine Dissertation von 1799, *Dissertatio de forma metaphysices elementaris naturae externae*, ist eine kritische Abhandlung über Kants *Metaphysische Anfangsgründe*.[26]

Schon aus diesen Gründen ist die Nähe Ørsteds zu Kant natürlich nicht unbeachtet geblieben. Bereits Witt-Hansen[27] weist auf Gemeinsamkeiten zwischen Ørsteds Auffassung vom Gedankenexperiment und Kants Philosophie der Mathematik hin, dasselbe gilt für Kühne[28]. Wie wir sehen werden, lohnt es sich aber diesen Zusammenhang zwischen Ørsted und Kant genauer unter die Lupe zu nehmen. Es wird dabei nicht nur verständlicher, was Ørsted mit seiner Betonung des „Gedankenexperiments" bezweckt haben mag, es wird auch deutlicher werden, welche Rolle Kants Philosophie der Mathematik in einer für Ørsted aktuellen Methodendiskussion spielte.

4. Kant und der Beweis durch Demonstration

In der *Kritik der reinen Vernunft* versucht Kant eine „trancendentale Methodenlehre" zu entwickeln. Wie diese im Einzelnen genau aussehen soll, braucht uns hier nicht zu interessieren. Von Interesse ist nur, dass zum Zweck der Entwicklung einer solchen Methodenlehre der „reinen Vernunft" Kant das Beweisverfahren der Mathematik demjenigen der Philosophie gegenüberstellt. Hierbei beschreibt Kant ein Verfahren, dass die Eigenschaften des Ørstedschen Gedankenexperiments aufweist und daher als Erläuterung der Konzeption Ørsteds dienen kann.

Ausgehend von der Beobachtung, dass die Mathematik offenbar ohne „Beihülfe der Erfahrung" zu immer neuen Erkenntnissen fortschreitet, untersucht Kant die Frage, ob sich das Verfahren, dem sich die Mathematik beim Erkenntnisfortschritt bedient, nicht auch für die Erweiterung der philosophischen Erkenntnis nutzen lässt:

---

[26] Vgl. ebd., 115.

[27] Witt-Hansen, Johannes: „H. C. Örsted, Immanuel Kant, and the thought experiment".

[28] U. Kühne: *Die Methode des Gedankenexperiments*.

> Es liegt uns also viel daran zu wissen, ob die Methode, zur apodiktischen Gewißheit zu gelangen, die man in der letzteren Wissenschaft [der Mathematik] mathematisch nennt, mit derjenigen einerlei sei, womit man eben dieselbe Gewißheit in der Philosophie sucht, und die daselbst dogmatisch genannt werden müßte.[29]

Einer solchen Hoffnung muss Kant aber eine Abfuhr erteilen. Philosophische Erkenntnis und mathematische Erkenntnis unterscheiden sich. Philosophische Erkenntnis ist „Vernunfterkenntnis aus Begriffen", mathematische Erkenntnis stammt aus der „Construction der Begriffe".

> Nur ein apodiktischer Beweis, sofern er intuitiv ist, kann Demonstration heißen. Erfahrung lehrt uns wohl, was dasei, aber nicht, daß es gar nicht anders sein könne. Daher können empirische Beweisgründe keinen apodiktischen Beweis verschaffen. Aus Begriffen *a priori* (im discursiven Erkenntnisse) kann aber niemals anschauende Gewißheit, d. i. Evidenz, entspringen, so sehr auch sonst das Urtheil apodiktisch gewiß sein mag. Nur die Mathematik enthält also Demonstrationen, weil sie nicht aus Begriffen, sondern der Construction derselben, d. i. der Anschauung, die den Begriffen entsprechend a priori gegeben werden kann, ihre Erkenntniß ableitet.[30]

Um zu verstehen, was Kant damit gemeint haben könnte, müssen wir kurz auf seine Philosophie eingehen. (Die nachfolgende Rekonstruktion erhebt dabei keinen Anspruch, Kant besser zu verstehen, als Ørsted ihn verstanden hat.)

Ein Schlüssel zu einem Verständnis von Kants Philosophie der Mathematik, und damit auch zu Kants Vorstellung vom mathematischen Beweis, liegt darin, Kants Philosophie der Mathematik als Versuch zu sehen, die Apriorizität und Notwendigkeit mathematischer Wahrheiten mit der Tatsache zu verbinden, dass sie (zumindest nach damaliger Auffassung) perfekt auf die beobachtbare physische Welt anwendbar ist.[31] Diese beiden Beobachtungen standen in der vor-kantischen Philosophie in einer gewissen Spannung[32]: entweder wurde das mathema-

---

[29] *KrV*, A 713/B 741.

[30] *KrV*, A 734/B 762.

[31] Stewart Shapiro: *Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics*. Oxford. 2000, 76-77.

[32] Auch der nachfolgende Abriss ist bestenfalls eine starke Verkürzung der Philosophiegeschichte. Eine genauere Analyse ist für die hier verfolgten Zwecke aber auch nicht sinnvoll. Zur Philosophie der Mathematik und ihrer historischen Entwicklung verweise ich auf S. Shapiro: *Thinking about mathematics* sowie William Ewald: *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics*, Band 1 und 2. Oxford. 1996.

tische Wissen rationalistisch erklärt, was die Notwendigkeit mathematischer Wahrheiten verstehbar machte, es aber schwierig machte, eine plausible Antwort auf die Frage zu geben, warum diese ewigen, angeborenen Ideen auf die physikalischen Objekte um uns so gut anwendbar sind; oder man erklärte unser mathematisches Wissen empiristisch, was zwar auf die letzte Frage eine befriedigende Antwort lieferte, aber entweder den Anschein der Notwendigkeit mathematischer Wahrheiten unerklärt lassen musste, oder sie als nicht substantielle Konventionen marginalisierte. Kants Philosophie der Mathematik kann dann als eine Synthese der jeweils plausibelsten Elemente aus rationalistischer und empiristischer Erkenntnistheorie aufgefasst werden. Eine Synthese, die nicht unbedingt die Plausibilität ihrer Teile erbt:

> Mathematische Urteile sind insgesamt synthetisch. Dieser Satz scheint den Bemerkungen der Zergliederer der menschlichen Vernunft bisher entgangen, ja allen ihren Vermuthungen gerade entgegengesetzt zu sein, ob er gleich unwidersprechlich gewiß und in der Folge sehr wichtig ist. [...] Zuvörderts muß bemerkt werden: daß eigentliche mathematische Sätze jederzeit Urtheile a priori und nicht empirisch sind, weil sie die Nothwendigkeit bei sich führen, welche aus Erfahrung nicht abgenommen werden kann.[33]

Kants – wie er selbst zugibt – nicht unkontroverse Lösung der Problematik besteht also darin, mathematische Wahrheiten als „synthetische“ Wahrheiten „a priori“ aufzufassen, die auf „Anschauungen“ basieren.

Beginnen wir mit Kants analytisch-synthetisch-Unterscheidung.[34] Für Kant ist eine allgemeine Aussage der Form ‚Alle F sind G’ analytisch, wenn der Prädikatbegriff G im Subjektbegriff F „enthalten ist“, ansonsten ist eine solche Proposition synthetisch.[35] Diese Rede vom „Enthaltensein“ ist bestenfalls metaphorisch und lässt sich vermutlich nur durch Beispiele erläutern. So ist die Aussage ‚Alle Junggesellen sind unverheiratet’ analytisch, falls ‚unverheiratet’ Teil des Begriffs ‚Junggeselle’ ist; ‚Alle Menschen sind sterblich’ ist analytisch, falls ‚sterblich’ Teil des Begriffs ‚Mensch’ ist. ‚Alle Vorsitzenden sind männlich’ ist vermutlich synthetisch, da männlichen Geschlechts zu sein nicht Teil des Subjektsbegriffs ist (zumindest

---

[33] *KrV*, B 14

[34] Zum Folgenden vgl. S. Shapiro: *Thinking about mathematics*, 77f.

[35] Kant redet nicht von Propositionen sondern von „Urteilen“. Was Urteile genau sind, lassen wir hier beiseite. Vgl. Robert Hanna: „Kant’s Theory of Judgment“, In: E. Zalta (Hrsg.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2004 Edition)*, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2004/entries/kant-judgment/>.

nicht im politisch korrekten Plural).[36] Wie diese „Analyse“ nahe legt, haben Begriffe Teile, so dass ein Begriff einen anderen „enthalten“ kann. Zu diesen Teilen gelangen wir durch Begriffsanalyse. Wenn wir einen Begriff besitzen, wie z.B. den Begriff ‚Junggeselle’, sind wir *deshalb* auch in der Lage diesen in seine Teile zu zerlegen und dabei festzustellen, dass er den Begriff ‚unverheiratet’ als Teil enthält.

Analytische Aussagen sind in Kants Terminologie „Erläuterungsurteile“ und keine „Erweiterungsurteile“, da diese Aussagen nicht mehr sagen, als bereits im Subjektbegriff dieser Aussagen alleine enthalten war. Analytische Aussagen sind demnach auch klarerweise *a priori*. Wenn man über den Subjektbegriff verfügt, kennt man ohne die Notwendigkeit zusätzlicher Erfahrung auch seine Teile, alle analytischen Aussagen sind *a priori* wissbar durch Begriffsanalyse.

Zumindest einige mathematische Aussagen sind auch in diesem Sinne analytisch. ‚Alle Dreiecke haben drei Ecken’ wäre ein Kandidat, eventuell sogar ‚Alle Dreiecke haben drei Winkel’ oder ‚Alle Dreiecke haben drei Seiten’. In der Hauptsache sind nach Kant mathematische Aussagen aber synthetisch.

> Man sollte anfänglich zwar denken: daß der Satz 7 + 5 = 12 ein bloß analytischer Satz sei, der aus dem Begriffe einer Summe von Sieben und Fünf nach dem Satze des Wiederspruchs erfolge. Allein wenn man es näher betrachtet, so findet man, daß der Begriff der Summe von 7 und 5 nichts weiter enthalte als die Vereinigung beider Zahlen in eine einzige, wodurch ganz und gar nicht gedacht wird, welches die einzige Zahl sei, die beide zusammenfaßt. Der Begriff von Zwölf ist keineswegs schon dadurch gedacht, daß ich mir bloß jene Vereinigung von Sieben und Fünf denke, und ich mag meinen Begriff von einer solchen möglichen Summe noch so lange zergliedern, so werde ich doch darin die Zwölf nicht antreffen. [...]
>
> Ebensowenig ist irgendein Grundsatz der reinen Geometrie analytisch. Daß die gerade Linie zwischen zwei Punkten die kürzeste sei, ist ein synthetischer Satz. Denn mein Begriff vom Geraden enthält nichts von Größe, sondern nur eine Qualität. Der Begriff des Kürzesten kommt also gänzlich hinzu und kann durch keine Zergliederung aus dem Begriffe der geraden Linie gezogen werden.[37]

---

[36] Dass nicht alle Aussagen diese einfache Subjekt-Prädikat-Form aufweisen, ist von Kant nicht zufrieden stellend berücksichtigt worden, soll uns aber hier nicht weiter kümmern.

[37] *KrV*, B 15-B 17

Wenn wir aber mathematische Wahrheiten nicht durch Begriffsanalyse als wahr erkennen können, wie sonst können wir dann Wissen von ihnen haben, insbesondere Wissen *a priori*? Die Antwort liefert Kants Begriff der „Anschauung“.

„Anschauungen“ scheinen für Kant mentale Repräsentationen zu sein, die Gegenstände vermittels deren perzeptuellen Eigenschaften repräsentieren (also sind Anschauungen von Gegenständen eigentlich mentale Repräsentationen von charakteristischen perzeptuellen Eigenschaften dieser Gegenstände).[38] Für Kant scheint die einzige Möglichkeit, sich im Denken auf Gegenstände beziehen zu können, darin zu bestehen, dass wir mentale Repräsentationen dieser Art besitzen. Sofern sich mathematische Wahrheiten also auf Zahlen oder geometrische Figuren beziehen, in dem Sinne, dass diese Wahrheiten die Existenz irgendwelcher mathematischer Objekte implizieren[39], können wir diese Wahrheiten nur vermittels der Anschauung wissen (da wir nur vermittels der Anschauung Bezug zu diesen Objekten herstellen können). In diesem Sinne sind Anschauungen singulär und konkret, während Begriffe, als Gegenstände der Begriffsanalyse, allgemein und abstrakt sind.

Die perzeptuellen Eigenschaften von Gegenständen sind uns nun aber typischerweise durch die Erfahrung gegeben. Solche mentalen Repräsentationen wären demnach aber auch nicht a priori. Kant unterscheidet daher empirische Anschauungen von so genannten „reinen Anschauungen“. Letztere sind Anschauungen der Formen *möglicher* empirischer Anschauungen. Diese sind uns a priori durch die Struktur unseres spezifischen Wahrnehmungsapparates gegeben. Von den perzeptuellen Eigenschaften von Gegenständen betreffen die reinen Anschauungen daher nur die raum-zeitliche Form von Gegenständen in der menschlichen Wahrnehmung.

> The idea is that pure intuition reveals the presuppositions of unproblematic, empirical knowledge of spatio-temporal objects. For example, Euclidean geometry concerns the ways humans necessarily perceive space and spatial objects. We apprehend objects in three dimensions, enclose regions with straight lines, and so on. Arithmetic concerns

[38] Der Begriff der Anschauung bei Kant ist alles andere als klar. Vgl. hierzu insbesondere die Diskussion zwischen Jaakko Hintikka und Charles Parsons, wieder abgedruckt in Carl J. Posy (Hrsg.): *Kant's philosophy of mathematics: Modern Essays*, Dordrecht/Boston/London. 1992.

[39] Vgl. hierzu S. Shapiro: *Thinking about mathematics*, S. 79, aber auch Jaakko Hintikka: „Kant on the mathematical method“. In: C. J. Posy (Hrsg.): *Kant's philosophy of mathematics*, 21-42.

> the ways humans have to perceive objects in space and time, locating and distinguishing objects and counting them.[40]

Diese reinen Anschauungen sind nun das entscheidende Merkmal, das mathematische Beweise von Begriffsanalysen unterscheidet und zugleich erklärt, wie mathematische Beweise erkenntniserweiternd sein können. Betrachten wir also als nächstes Kants Auffassung mathematischer Beweise. Wir haben im zweiten Zitat dieses Abschnittes bereits erfahren, dass Kant mathematische Beweise zu den „apodiktischen" Beweisen rechnet.

„Apodiktisch" ist ein Beweis, wenn er seine Konklusion mit Notwendigkeit etabliert. Was Kant meint, ist wohl, dass die Konklusion eine besondere epistemische Qualität hat, nämlich „gewiß" zu sein.[41] Beweise können dieses Ziel offenbar auf unterschiedliche Art erreichen. Entweder etabliert ein Beweis eine apodiktische Wahrheit *discursiv* (in Kants Terminologie auch ‚akroamatisch'[42]), oder er etabliert sie *constructiv* durch Demonstration. In einem *constructiven* Beweis operieren wir im Verstand mit reinen Anschauungen im obigen Sinne, also Beweisen durch Manipulation mentaler Repräsentationen von raum-zeitlichen Formen der möglichen perzeptuellen Eigenschaften dessen, was Gegenstand des Beweises ist. Beim akroamatischen Beweis operieren wir nur mit Begriffen, ohne Anschauungen, und gelangen auf diese Weise über analytische Schlussverfahren auch nur zu analytischen Wahrheiten. Da Kant – wie wir gesehen haben – glaubt, dass die Mathematik wesentlich aus synthetischen Wahrheiten besteht, ist das akroamatische Beweisverfahren nicht nur nicht-intuitiv (da es nicht mit irgendeiner Anschauung verbunden ist) sondern auch weniger leistungsstark, da durch dieses Verfahren die so genannten „Mathemata" nicht als apodiktisch erwiesen werden können.

> Man gebe einem Philosophen den Begriff eines Triangels und lasse ihn nach seiner Art ausfindig machen, wie sich wohl die Summe seiner Winkel zum rechten verhalten mö-

[40] S. Shapiro: *Thinking about mathematics*, 81.

[41] Wie Hume scheint auch Kant keine hinreichende Unterscheidung zwischen Beweisen zu machen, die bestimmte Validitätsbedingungen erfüllen (Wahrheitserhalt beim Anwenden der erlaubten Schlussregeln) und bei denen deswegen die Konklusion *gegeben* die Prämissen notwendig ist, und Beweisen, die Konklusionen besitzen, die gültig (und damit logisch notwendig) sind. Vgl. hierzu auch Charles Parsons: „Kant's philosophy of arithmetic". In: C. J. Posy (Hrsg.): *Kant's philosophy of mathematics*, 57.

[42] Vgl. *KrV*, A 735/B 763. In der *Logik* verwendet Kant ‚akroamatisch' auch für eine bestimmte didaktische Methode zur Vermittlung von Ethik. Vgl. *Log*, AA 09: 149.23 f. Diese beiden Verwendungsweisen haben offenbar nicht viel miteinander zu tun.

> ge. Er hat nun nichts als den Begriff von einer Figur, die in drei geraden Linien eingeschlossen ist, und an ihr den Begriff von eben so viel Winkeln. Nun mag er diesem Begriffe nachdenken, so lange er will, er wird nichts Neues herausbringen. Er kann den Begriff der geraden Linie oder eines Winkels oder der Zahl drei zergliedern und deutlich machen, aber nicht auf andere Eigenschaften kommen, die in diesem Begriffen gar nicht liegen. Allein der Geometer nehme diese Frage vor. Er fängt sofort davon an, einen Triangel zu construieren. Weil er weiß, daß zwei rechte Winkel zusammen gerade so viel austragen als alle berührende Winkel, die aus einem Punkte auf einer geraden Linie gezogen werden können, zusammen, so verlängert er eine Seite seines Triangels und bekommt zwei berührende Winkel, die zwei rechten zusammen gleich sind. [...] Er gelangt auf solche Weise durch eine Kette von Schlüssen, immer von der Anschauung geleitet, zur völlig einleuchtenden und zugleich allgemeinen Auflösung der Frage.[43]

Die akroamatische bzw. discursive Beweismethode liefert also nach Kant überhaupt keine Antwort auf die Frage nach der Winkelsumme im Dreieck, während der Geometer durch sein Verfahren sowohl einen allgemeinen Beweis als auch ein intuitives Verständnis dieser Wahrheit erwirbt. Wie geht dies vor sich? Kein moderner Leser wird Kant zugestehen wollen, dass es Beweisverfahren gibt, die zwar „apodiktische" Gewissheit liefern, aber nicht als logisch gültige Folgerung aus einer (ggf. leeren) Prämissenmenge rekonstruierbar sind. Hat Kant die Mathematik nicht einfach missverstanden?

Wie Michael Friedman argumentiert hat, ist Kants Methodologie des mathematischen Beweises zumindest für die damalige Geometrie und unter Voraussetzung von Kants Verständnis von Logik durchaus adäquat. Wir werden Friedmans Interpretation etwas ausführlicher darstellen, da sie Kants Auffassungen von Mathematik in erhellender Übereinstimmung mit einigen Äußerungen Ørsteds präsentiert.

5. Friedmans Kant

Heutzutage sind wir der Meinung, dass räumliche Figuren keine wesentlichen Bestandteile geometrischer Beweise sind. Sie sind bestenfalls von heuristischem, vielleicht didaktischem Wert, können aber auch genauso leicht irreführend sein. Der geometrische Beweis ist für uns eine ausschließlich formale Angelegenheit, die aus einer endlichen Kette von Ausdrücken einer (im Idealfall) formalen Sprache besteht. Das Ende der Kette bildet die zu beweisende Aussage, welche genau wie jeder vorhergehende Ausdruck in der Kette durch die syntakti-

[43] *KrV*, A 716 f./B 744 f.

schen Regeln der Beweistheorie und die Axiome der Geometrie gerechtfertigt werden kann. Demnach sollte auch der Philosoph aus Kants oben zitiertem Beispiel aus ‚X ist ein Dreieck', ‚X hat eine Winkelsumme von 180°' ableiten können, wobei weniger seine Intuition oder reine Anschauung gefragt ist, als vielmehr Logik und die Axiome der Euklidischen Geometrie. Hierbei verstehen wir unter ‚Logik' eine polyadische Logik, wie beispielsweise die Prädikatenlogik Erster Stufe mit (mehrstelligen) Relationsausdrücken und unter ‚Euklidischer Geometrie' eine moderne Axiomatisierung wie in David Hilberts *Grundlagen der Geometrie*.[44] Beides stand zu Kants Zeiten aber nicht zur Verfügung.

Kants Vorstellung von Logik war beschränkt auf die aristotelische Syllogistik, entsprach also etwa einem Fragment der monadischen Prädikatenlogik erster Stufe plus Identität.[45] Hinzu kommt, dass Euklids eigene Axiomatisierung „defekt" ist, da (z. B.) ohne eine adäquates Kontinuitätsaxiom bestimmt Existenzannahmen innerhalb der euklidischen Beweise durch die Axiome nicht gerechtfertigt werden können.[46] Betrachten wir hierzu kurz ein Beispiel, Euklids Beweis der ersten Proposition aus Buch 1, dass ein gleichseitiges Dreieck aus jeder beliebigen Grundseite konstruiert werden kann, in der Rekonstruktion Michael Friedmans[47]:

> Given line segment *AB*, construct (by Postulate 3) the circles C_1 and C_2 with *AB* as radius:

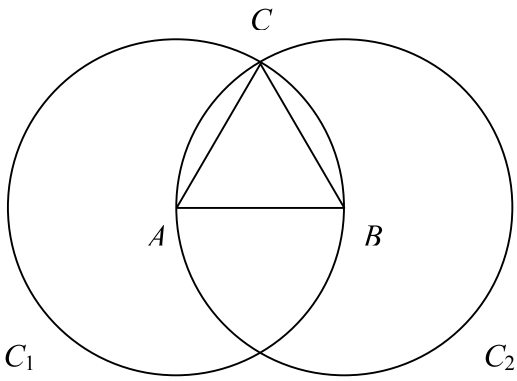
---

[44] David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig. 1899.

[45] Zu Kants Logik siehe Michael Friedman „Kant's theory of geometry". In: C. J. Posy (Hrsg.): *Kant's philosophy of mathematics*, 180. Manche Autoren haben dafür argumentiert, Kants Logik als volle Prädikatenlogik Erster Stufe zu rekonstruieren (z. B. Manley Thompson: „Singular terms and intuitions in Kant's epistemology". In: C. J. Posy (Hrsg.): *Kant's philosophy of mathematics*, 103).

[46] Ein solcher Einwand scheint bereits von Frege gegen den Euklidischen Beweis des 18. Satzes des 1. Buches vorgebracht worden zu sein. Vgl. Gottlob Frege: *Die Grundlagen der Arithmetik*, Ditzingen. 1987, 126.

[47] Michael Friedman: „Kant's theory of geometry", 181.



> Let C be a point of intersection of C_1 and C_2 and draw lines AC and BC (by Postulate 1). Then, since (by definition of a circle: Def. 15) $AC = AB = BC$, ABC is equilateral. Q.E.D.

Laut Friedman gibt es gegen diesen Beweis aber einen modernen Einwand. Obzwar die gezeichnete Figur es offensichtlich zu machen scheint, hat der Beweis an sich *nicht* etabliert, dass es überhaupt einen Punkt C gibt, in dem sich C_1 und C_2 schneiden. Was, wenn mindestens einer der Kreise diskontinuierlich ist und an der entsprechenden Stelle eine Lücke aufweist? In modernen Formulierungen der Euklidischen Geometrie gebe es außerdem ein Kontinuitätsaxiom, das genau die hier erwogene Möglichkeit explizit ausschaltet, ein Axiom, das in der ursprünglichen, Euklidischen Liste aber nicht auftaucht. D. h., dass nicht nur im Beweis ein entscheidender Schritt übersprungen wurde, der Euklidischen Axiomatisierung fehlt sogar das Axiom, das die Existenz von Punkt C überhaupt garantieren würde:

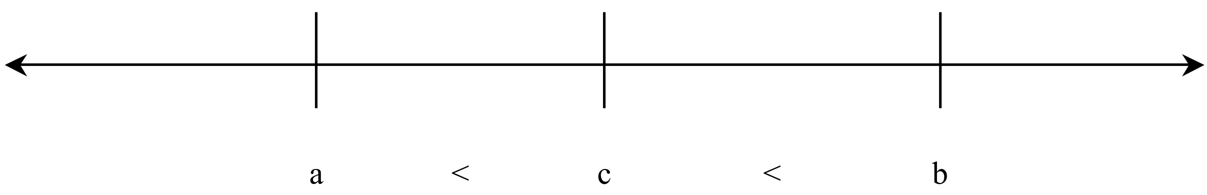
> Why do we think that the existence of point C does not follow from Euclid's axioms? We might argue as follows. Cover the Euclidean plane with Cartesian coordinates in such a way that the midpoint of segment AB has coordinates (0, 0), point A has coordinates (-1/2, 0), and point B has coordinates (1/2, 0). Then the desired point of intersection C has coordinates $(0, \sqrt{3}/2)$. Now throw away all points with irrational coordinates: the result is a model in R^2 where R is the rational numbers. This model appears to satisfy all Euclid's axioms, but, of course, point C does not exist in that model. So our

model gives concrete form to the “possibility” of non-intersection, a “possibility” that therefore needs to be excluded by a continuity axiom.[48]

Wie Friedman weiterhin zeigt, wäre ein solches Axiom aber auch nicht formulierbar, da sich ‚kontinuierlich’ nur als einstelliges Prädikat in eine monadische Logik überführen ließe, also logisch unanalysiert bleiben müsste.[49] Beschränkt man sich also auf die Ressourcen, die die damalige Logik für eine Axiomatisierung der euklidischen Geometrie zur Verfügung stellte, so ist die Euklidische Geometrie eben nicht axiomatisierbar in unserem Sinne. Dies liegt daran, dass monadische Prädikate keine unendlichen Modelle „erzwingen“ können, die Euklidische Geometrie aber unendlich viele Punkte benötigt. Ist irgendeine konsistente Menge von monadischen Formeln aus k vielen verschiedenen primitiven Prädikaten gegeben, dann können wir immer ein Modell mit höchsten 2^k verschiedenen Individuenkonstanten finden, d.h. die Menge der beweisbar neuen Individuenkonstanten ist immer endlich.

Nach Friedman werden die Punkte, die die Euklidische Geometrie für ihre Beweise benötigt, aber auch nicht durch die Axiome erzwungen, sondern durch die Konstruktionspostulate *generiert*. Dadurch, dass die Euklidischen Postulate fordern, dass die Linien in den Konstruktionen mit Lineal und Zirkel kontinuierlich sind, und dass alle Konstruktionsoperationen beliebig iteriert werden dürfen, sei garantiert, dass alle erforderlichen Punkte konstruierbar sind.

Als Erläuterung hierzu betrachten wir kurz, wie *Dichte* nach dieser Auffassung durch Konstruierbarkeit sichergestellt wird. In der Hilbertschen Axiomatisierung wird eine explizite Theorie der Ordnung eingeführt, die die Kardinalität und Struktur der Punkte auf einer Linie festlegt. Angenommen, die Punkte auf einer Linie seien durch die zweistellige Relation ‚ist-links-von’, <, geordnet:



[48] M. Friedman: „Kant’s theory of geometry“, 182.

[49] Das eigentliche Kontinuitätsaxiom in der Hilbert Axiomatisierung ist ohnedies zweiter Stufe. Tatsächliche Kontinuität (also eine vollständige Kartesische Ebene R^2) ist für Euklidische Geometrie aber auch nicht erforderlich. Vgl. ebd., 210. Tarski axiomatisiert „elementare Geometrie“ (Euklidische Geometrie) ausschließlich durch Axiome erster Stufe, wobei das Kontinuitätsaxiom durch ein Axiomenschema ersetzt wird, also durch die unendliche Menge aller elementaren Kontinuitätsaxiome erster Stufe. Vgl. Alfred Tarski: „What is elementary geometry?“. In: Jaakko Hintikka (Hrsg.), *The philosophy of mathematics.* Oxford. 1969, 166 f.

Die Ordnungstheorie ist nun die erste-Stufe-Theorie dichter, linearer Ordnung ohne Endpunkte.[50] Dichte wird hierbei durch folgendes Axiom bestimmt:

(A1) $\forall a\ \forall b\ \exists c\ (a < b \rightarrow (a < c < b))$

Dichte bedeutet also, dass zwischen je zwei Punkten auf der Linie ein weiterer liegt. Für jede Linie, die durch zwei verschiedene Punkte bestimmt wird, liefert (A1) unendlich viele weitere Punkte. Wie Friedman bemerkt, liegt das nicht ausschließlich an der Tatsache, dass ein mehrstelliges Prädikat in die Formulierung dieses Axioms Eingang gefunden hat, sondern insbesondere an der Abfolge von Existenz- und Allquantoren und der Tatsache, dass diese in der polyadischen Prädikatenlogik nicht reduzierbar ist.[51] Jedes Wertepaar für *a* und *b* liefert einen Wert für *c*. *c* kann dann für *b* eingesetzt werden und $\langle a, c \rangle$ liefert einen neuen Wert *c*', etc.

In einer monadischen Prädikatenlogik kann so etwas nicht wiedergegeben werden:

> Rather, denseness is represented by a definite fact about my intuitive capacities: namely whenever I can represent (construct) two distinct points *a* and *b* on a line, I can represent (construct) a third point *c* between them. Pure intuition – specifically, the interability of intuitive constructions – provides a uniform method for instantiating the existential quantifiers we would use in formulas like [A1]; it therefore allows us to capture notions like denseness without actually using quantifier-dependence. Before the invention of polyadic quantification theory there simply is no alternative.[52]

Anstelle eines Axioms, das (A1) entsprechen würde, findet sich in der Euklidischen Geometrie eine allgemeine Methode, zu jeder durch zwei Punkte gegebenen Strecke einen Mittelpunkt zu konstruieren. Eine solche Konstruktion ist möglich durch die drei Grundoperationen ((i) das Zeichnen einer Linie zur Verbindung jeglicher zwei Punkte, (ii) das Erweitern einer Strecke um jede beliebige gegebene Strecke, (iii) das Zeichnen eines Kreises mit jedem belie-

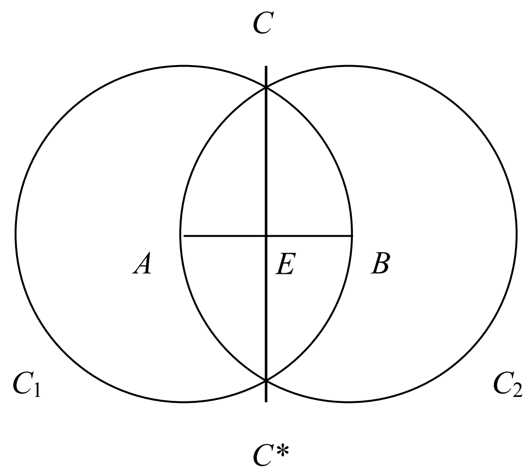
---

[50] Für die restlichen Axiome vgl. M. Friedman: „Kant's theory of geometry", 184.

[51] Unter ‚reduzierbar' verstehe ich hierbei, dass alle vorkommenden Variablen einer Formel durch Äquivalenzumformungen auf nur eine ‚reduziert' werden können. Dies ist in der monadischen Prädikatenlogik möglich, weshalb die Abhängigkeit von Quantoren voneinander dort keine Rolle spielt. Vgl. Willard Van Orman Quine: *Grundzüge der Logik.* Frankfurt am Main. 1993, 247-252; Heinrich Behmann: „Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem". In: *Mathematische Annalen* 86 [1922], 163-229.

[52] M. Friedman: „Kant's theory of geometry", 185.

bigen Punkt als Mittelpunkt und jeder beliebigen Strecke als Radius) und deren uneingeschränkte Iterierbarkeit. So konstruiert man den Mittelpunkt der Strecke *AB* durch zwei Kreise C_1 um *A* und C_2 um *B* mit jeweils dem Radius *AB* und der Verbindung der resultierenden Kreisschnittpunkte *CD*. *CD* teilt *AB* (Prop. 1.10) in *E*.



Diese Konstruktion kann nun beliebig iteriert werden und repräsentiert damit Dichte. Neue Punkte zwischen *A* und *B* werden also nicht aus einem Axiom wie A1 abgeleitet, sondern wir definieren eine Streckenhalbierungsfunktion und erhalten die neuen Punkte als Werte dieser Funktion. Nach Friedman ersetzen wir damit quasi den Existenzquantor in (A1) durch eine *Skolem Funktion*.[53]

Wenn man Friedman hierin folgen möchte, suggeriert dies, dass Kant in seiner Philosophie der Mathematik aus einer beweistheoretischen Not der damaligen Mathematik eine epistemologische Tugend machte. Auf der Grundlage der damaligen Syllogistik lässt sich Geometrie nicht auf rein logischem Wege betreiben, an die Stelle von erforderlichen Axiomen treten stattdessen Konstruktionsanweisungen, die zwar keinen logischen Beweis gestatten, aber Geometrie ermöglichen. Dass hierbei auf Konstruktionen zurückgegriffen werden muss, wertet Kant dann in einen erkenntnistheoretischen Vorteil um: die Mathematik ist besonders intuitiv, da sie ja mit den reinen Anschauungen direkt operiert, statt „nur“ mit Begriffen.

Ob man Friedman in seiner Interpretation und Bewertung der Kantischen Auffassung in jeder Hinsicht folgen möchte, wird vermutlich davon abhängen, ob man Kant so viel Einsicht in die Beschränktheit der aristotelischen Syllogistik zugestehen möchte, und davon, wie sehr

---

[53] Vgl. ebd., 185. Eine Skolem Funktion für y in $\forall x \exists y R(x,y)$ ist eine Funktion $f(x)$, so dass $\forall x R(x, f(x))$. Für (A 1) entsprechend eine Funktion $f(a,b)$, so dass $\forall a \forall b(a < b \rightarrow (a < f(a,b) < b))$. Vgl. auch H. Enderton: *A mathematical introduction to logic*, New York. 1972, §4.2.

die damalige Mathematik durch diese Beschränkungen tatsächlich behindert wurde, bestimmte logische Schlüsse nachzuvollziehen.[54]

Wäre Kants Analyse der damaligen mathematischen Praxis tatsächlich *adäquat*, wie Friedman behauptet[55], dann müsste dies implizieren, dass nicht-Euklidische Geometrien erst nach der Entwicklung einer polyadischen Logik *möglich* wurden. Dem war natürlich nicht so. Die „Logisierung” der Mathematik, wie Hans Hahn es einmal nannte[56], also die allmähliche Ablösung anschaulicher Beweisverfahren durch „logisch strenge“ Verfahren, wie wir sie heute kennen, ist eine Entwicklung, die bereits mit Descartes ansetzte. Es scheint weniger, dass sie durch die unterentwickelte Logik als durch Kant streckenweise abgebremst wurde.

> [...] Kant's achievement came at a time when the techniques of geometry were changing rapidly, and the two centuries surrounding his work saw a split gradually arise between the traditional visualizable approach to the subject matter and the range of methods which were developed to explore that subject matter. The new Cartesian techniques provided a way in which the study of geometry could directly benefit from tools and theories being developed in the rest of mathematics, and gave rise to a powerful geometric proof practice in which the primary representations did not always have to correspond to well-behaved, visualizable groups of intuitable entities. [...] This tension between geometric methods and ontology was resolved by the recognition of consistent non-Euclidean systems of geometry and the subsequent abandonment of the Kantian view of geometry.[57]

Die Adäquatheit der Kantischen Auffassung ist aber auch nicht unser Thema. Das Interessante an Friedmans Interpretation ist, dass sie aufzeigt, wie Ørsted Kant verstanden haben könnte, was uns wiederum helfen kann, Ørsted zu verstehen.

Eine in diesem Sinne erhellende Analyse gibt Friedman auch für Kants Auffassung der Differential- und Integralrechnung. Für diese Interpretation ist die textliche Grundlage in den

---

[54] Vgl. insbesondere die ausgezeichnete Kritik an Friedmans Interpretation in Paul Rusnock: „Was Kant's Philosophy of Mathematics Right for ist Time?“ In: *Kant-Studien* 95 [2004], 426-442.

[55] Vgl. hierzu M. Friedman: „Kant's theory of geometry“, 95: „Yet Kant is surely not to be reproached for failing to anticipate the leading logical and mathematical discoveries of a later age; he is rather to be applauded for the depth and tenacity of his insight into the logical and mathematical practice of his own.“ Obzwar der erste Teil dieses Zitats berechtigt ist, scheint man am zweiten Teil berechtigte Zweifel hegen zu können.

[56] Hans Hahn: *Empirismus, Logik, Mathematik*. Frankfurt am Main. 1988, 106.

[57] Mark Greaves: *The philosophical status of diagrams*. Stanford 2002, 78 f.

Schriften Kants zwar noch dünner, wie wir aber sehen werden, ist diese Interpretation Kants auch von dessen Zeitgenossen vorgebracht worden, und sie klärt auch einige Stellen in Ørsteds Bemerkungen zur Methode des „Gedankenexperiments" sowie zur Rolle und Zukunft der Mathematik.

Die Grundlage für Friedmans Interpretation liefert zunächst die Beobachtung, dass Kant sich in seiner Beschreibung geometrischer Konstruktionsverfahren einer „kinematischen" Ausdrucksweise bedient. Beweise in der Geometrie scheinen für Kant nicht bloß *räumliche* Gebilde zu sein (mit bestimmten geometrischen Hilfskonstruktionen als notwendigem Bestandteil, seien diese nun gezeichnet oder vorgestellt), sondern sogar *raum-zeitliche*:

> Ich kann mir keine Linie, so klein sie auch sei, vorstellen, ohne sie in Gedanken zu ziehen, d. i. von einem Punkte alle Teile nach und nach zu erzeugen, und dadurch allererst diese Anschauung zu verzeichnen. [...] Auf diese sukzessive Synthesis der produktiven Einbildungskraft, in der Erzeugung der Gestalten, gründet sich die Mathematik der Ausdehnung (Geometrie) mit ihren Axiomen, welche die Bedingungen der sinnlichen Anschauung a priori ausdrücken, unter denen allein das Schema eines reinen Begriffs der äußeren Erscheinung zustande kommen kann; z. E. zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich; zwei gerade Linien schließen keinen Raum ein usw.[58]

Soweit die Geometrie bisher betrachtet wurde, scheint ein solches zeitliches Moment geometrischen Beweisens überflüssig. Die Postulate Euklids (in der bisher betrachteten Deutung) fordern, dass die Linien, die zur Konstruktion benutzt werden, kontinuierlich sind, aber nicht, dass sie durch einen Prozess in der Zeit zustande kommen. Doch auch diese temporale Eigenschaft geometrischer Konstruktionen spielte in der damaligen Mathematik eine Rolle, wiederum in einer Position, die erst durch die moderne (polyadische) Logik überflüssig gemacht wurde.

6. *The Calculus:* Friedmans Kant und Kästners Kant

In den 60er Jahren des 17. Jahrhunderts entwickelte Sir Isaac Newton (1642-1727), was wir heute als „Differential- und Integralrechnung" bezeichnen.[59] Die heutige Bezeichnung geht

---

[58] *KrV*, A 162 f./B 203 f.

[59] Zur Geschichte der Infinitesimalrechnung vgl. Philip Kitcher: *The nature of mathematical knowledge.* Oxford. 1983, 229-271; A. W. Moore: *The infinite*, London/New York. 1990, 63-69; J. Grabiner: *The origins of Cauchy"s rigorous calculus.* Cambridge, Mass. 1981; Shaughan Lavine: *Understanding the infinite*, Cambridge, Mass. 1994, 15-22; und die entsprechenden Kommentare und Texte in William Ewald *From Kant to Hilbert*,

dabei zurück auf die Terminologie, die Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) zur Beschreibung seines Systems einführte, das er etwa zehn Jahre später (im Großen und Ganzen unabhängig von Newton) entwickelt hatte, aber vor dem Newtonschen publizieren konnte.[60] Newton nannte sein eigenes System bekanntlich ‚the method of fluxions'. Newtons Konzeption der Infinitesimalrechnung wie auch die Rekonstruktion durch seinen Schüler Colin MacLaurin (1698-1746)[61] weisen genau solche temporalen Aspekte des geometrischen Konstruierens auf, die Kant im obigen Zitat anspricht.

Wie Friedman beobachtet, geht dieser neue Zweig der Mathematik entscheidend über die Geometrie hinaus. Wie oben bereits angedeutet wurde, benötigt die Geometrie streng genommen nur eine Menge von Punkten, die gleichmächtig ist mit der Menge der rationalen Zahlen, also abzählbar unendlich. Die Infinitesimalrechnung erfordert hingegen mehr:

> From a modern point of view the basic limit operation underlying the calculus is explained in terms of the Cauchy-Bolzano-Weierstrass notion of *convergence*. Moreover, we also appeal to this notion in explaining the distinction between denseness and genuine continuity, in precisely expressing the idea that there are "gaps" in a merely dense

---

Band 1. Zu Newtons wichtigsten Arbeiten zur „Method of Fluxions" gehört *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (verfasst vor 1669, publiziert 1711), *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* (verfasst 1671, publiziert 1736) und sein *Tractatus de Quadratura* (verfasst 1676, publiziert 1704).

[60] Diese Doppelentdeckung führte zu einer folgenschweren Kontroverse. Britische Mathematiker beschuldigten Leibniz geistigen Diebstahls und bewiesen ihre Loyalität zu Newton dadurch, dass sie seine (alles andere als einheitliche) Version der Infinitesimalrechnung zur besser fundierten erklärten und diesem Standard folgten. In gewisser Weise isolierte sich die britische Mathematik damit von ihren Kollegen auf dem Kontinent, was zu einer Krise der Mathematik auf der Insel führte. Für die genauere Geschichte, vgl. Niccolò Guicciardini: *The development of Newtonian calculus in Britain 1700-1800*. Cambridge. 1989.

[61] MacLaurins Arbeit *A Treatise of Fluxions* (1742) ist insbesondere eine Reaktion auf George Berkeleys Kritik in *The Analyst*. In diesem Werk (vollständiger Titel: *The Analyst, or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician, Wherein it is examined whether the object, principles, and inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious Mysteries and points of Faith*) präsentiert Berkeley ein seltsames *tu quoque*-Argument gegen physikalistische Religionsskeptiker, dass nämlich Mathematiker häufig genau so schlecht argumentieren wie Theologen. Belege für die Kritik an den Mathematikern sammelt Berkeley insbesondere in der Differentialrechnung Newtons. Diese Schrift Berkeleys löste eine Flut polemischer Reaktionen aus. MacLaurins Arbeit hingegen stellt den Versuch dar, Newtons Differentialrechnung nach dem Vorbild der Beweistechniken der Griechischen Geometer auf methodologisch gefestigten Boden zu stellen. Vgl. W. Ewald: *From Kant to Hilbert: A source book in the foundations of mathematics*, Band 1. Dieser Versuch war allerdings von zweifelhaftem Erfolg gekrönt, da es nur zu einer Verbreiterung der Kluft zwischen kontinentalen und britischen Mathematikern führte. Vgl. P. Kitcher: *The nature of mathematical knowledge*, 240.

> set like the rational numbers. Thus, let s_1, s_2, ... be a sequence of rational numbers that converges to π, say – that approaches π as its limit (for example, let $s_1 = 3.1$, $s_2 = 3.14$, and in general s_n = the decimal expansion of π carried out to *n* places): This sequence of rationals converges (to „something“ as it were), but in the set R of rational numbers (and even in the expanded set R* of Euclidean-constructible, numbers) there is no limit point it *converges to*. Such limit points are "missing" from a merely dense set like the rationals. A truly continuous set contains "all" such limit points.[62]

Cauchys Kriterium der *Konvergenz*, der *Konvergenz zu einem Limit* und schließlich *Cauchy Vollständigkeit* erfordern demnach noch einmal komplexere quantifikationale Ressourcen. Natürlich waren auch diese Ressourcen zu Kants Zeiten nicht verfügbar (wenn es die weniger komplexen schon nicht waren). Wie im Fall der Euklidischen Geometrie aber die Idee der beliebig iterierbaren Konstruktion von Mittelpunkten einer Strecke die Idee der Dichte wiedergeben kann, so kann aber vielleicht auch in der Infinitesimalrechnung etwas anderes die entsprechenden Vorstellungen ausdrücken. Friedman argumentiert, dass die natürliche Alternative zu den entsprechenden komplexen quantifikationalen Ausdrücken in der Idee *kontinuierlicher Bewegung* zu finden ist. So kann man – beispielsweise – eine Strecke von der Länge π durch einen kontinuierlichen Prozess „konstruieren“, der genau eine Zeiteinheit dauert und so definiert ist, dass er zu $t = 1/2$ eine Strecke von 3.1 konstruiert hat, zu $t = 2/3$ eine Strecke von 3.14, also zu $t = n/(n+1)$ eine Strecke der Länge s_n konstruiert hat, wobei s_n gleich der Dezimalrepräsentation von π mit *n* Stellen hinter dem Komma ist. Ein solcher Prozess resultiert zu $t = 1$ in einer Strecke der Länge π.

> In this style of representation the notion of convergence or approach to the limit is expressed by a temporal process: by the idea of one point moving or becoming closer to a second. This intuitive process of becoming does the logical work of our $\forall\exists\forall$, as it were. That the limit of a convergent sequence exists is expressed by the idea that any finite process of temporal generation has a terminal outcome. [...] In particular, then, what we now call the continuity or completeness of the points on a line is expressed by the idea that any finite motion of a point beginning at a definite point on our line also stops at a definite point on our line.[63]

---

[62] M. Friedman: „Kant's theory of geometry“, 191.

[63] Ebd., 192.

Genau so ein temporales Verständnis von Konvergenz scheint aber der *Method of Fluxions* Newtons zugrunde zu liegen, was schließlich der Grund für Kants kinematische Ausdruckweise beim Beschreiben mathematischer Konstruktionen in der Anschauung sein *könnte*.

Wir haben bereits angedeutet, dass Newtons Konzeption der *Method of Fluxions* nicht einheitlich war. Da Newton wohl selber infinitesimale Größen für dubios hielt, versuchte er sie manchmal aus der Infinitesimalrechnung weitestgehend herauszuhalten, hatte dann aber wieder bei anderen Gelegenheiten offensichtlich weniger Skrupel. Die Sätze der Infinitesimalrechnung Newtons lassen sich daher auf verschiedene Weise interpretieren.[64]

Für uns interessant ist nur diejenige Interpretation, die gegen Ende des 18. Jahrhunderts wohl besonders ins restliche Europa wirkte und die daher auch Kants, insbesondere aber Ørsteds Auffassung von Newtonscher Infinitesimalrechnung geprägt haben mag. Hierzu gehört sicherlich die einflussreiche Fundierung des Newtonschen *Calculus* durch Collin MacLaurin, die durch die Darstellung Abraham Kästners[65] in seinen Standardeinführungen in die Analysis und mathematische Physik im deutschsprachigen Raum propagiert wurde. Kästner empfahl gerade MacLaurins Darstellung als besonders fundiert, da sie „alle Nebel der eingebildeten Geheimnisse des Unendlichen zerstreut".[66] Was Kästner dabei im Sinn hat, sind diejenigen Teile von MacLaurins Darstellung, in denen tatsächlich eine kinematische Ausdrucksweise benutzt wird. Nur einige Beispiele aus MacLaurins *Treatise*:

> Lines are generated by the motion of points; surfaces, by the motion of lines, solids, by the motion of surfaces; angles, by the rotation of their sides; the flux of time being supposed to be always uniform. The velocity with which a line flows, is the same as that of the point which is supposed to describe or generate it. [...]
>
> The velocity with which a quantity flows, at any term of the time while it is supposed to be generated, is called its *Fluxion* which is therefore always measured by the increment or decrement that would be generated in a given time by its motion, if it may be meas-

---

[64] Vgl. N. Guicciardini: *The development of Newtonian calculus*, 6.

[65] Wir wissen zumindest von Kant, dass er Kästners Werke kannte und schätzte. In seiner Bibliothek finden sich mehrere der Kästnerschen Standardwerke, darunter auch die *Anfangsgründe der Analysis des Unenedlichen* in der Ausgabe von 1761. Kant und Kästner werden sich also wechselseitig beeinflusst haben. Vgl. Arthur Warda: *Immanuel Kants Bücher*. Berlin 1922.

[66] Abraham Gotthelf Kästner,: *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, dritte, stark vermehrte Auflage, Göttingen. 1799, XIII.

ured by the quantity that is generated in a given time by an uniform motion which is equal to the generating motion at that term.[67]

Diese Einführung kinematischer Terminologie (‚motion', ‚rotation', ‚velocity', ‚flux of time') in die Geometrie wurde im Verlauf der Mathematikgeschichte mehrmals Gegenstand der Kritik.[68] Jedoch scheint es, als habe Kant gerade eine solche kinematische Konzeption der Geometrie verteidigt:

> Bewegung eines Objekts im Raume gehört nicht in eine reine Wissenschaft, folglich auch nicht in die Geometrie; weil, daß etwas beweglich sei, nicht a priori, sondern nur durch Erfahrung erkannt werden kann. Aber Bewegung, als Beschreibung eines Raumes, ist ein reiner Aktus der sukzessiven Synthesis des Mannigfaltigen in der äußeren Anschauung überhaupt durch produktive Einbildungskraft, und gehört nicht allein zur Geometrie, sondern sogar zur Transzendentalphilosophie.[69] (*KrV*, B 155)

In der dritten Auflage seiner Einführung *Anfangsgründe der Analysis* (1799) nimmt auch Kästner die kinematische Redeweise in der Infinitesimalrechnung in Schutz und verteidigt sie gegen l'Huilier mit Verweis auf Kants *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*:

> X) Gegen die Fluxionen hat man eingewandt: Bewegung und was damit zusammenhängt, Raum, Zeit, Geschwindigkeit, gehören nicht in die Geometrie, sondern in die Mechanik; *on reproche à Neuton d'avoir introduit dans les mathematique pures, des idées qui paroissent leur être etrangères, telles que celles du temps, du mouvement et de la vitesse, et il me paroit qu' il valoit tout au moins la peine d' exposer une partie des mathematique purse aussi importante que l' est celle des calculus superieurs sans y introduire des principes de Méchanique dont il paroit qu' elles doivent être independantes*, sagt Hr. L' Huilier, Exposition elementaire des principes des calculus superieurs. Berlin 1786. §. LXVIII.[70]

---

[67] Collin MacLaurin: „A treatise of fluxions". In: W. Ewald: *From Kant to Hilbert*, Bd. 1, 120.

[68] Bekannter ist sicherlich Bolzanos Kritik, „No one will deny that the concepts of *time* and *motion* are just as foreign to general mathematics as that of *space*.", Bernard Bolzano: „Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite signs lies at least one real root of the equation". In: W. Ewald: *From Kant to Hilbert*, Band 1, 225-248.

[69] *KrV*, B 155, FN.

[70] A. G. Kästner,: *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*, 56.

Kästner weist in seiner Replik auf l'Huilier zunächst darauf hin, dass zwar in der Elementargeometrie tatsächlich keine Geschwindigkeit, wohl aber Bewegung durch die Konstruktion bestimmter geometrischer Körper eingeführt wird:

> XI) Ohne Bewegung, lässt sich doch weder eine gerade Linie verlängern noch ein Kreis beschreiben. Euklid nennt bey diesen Foderungen auch in der Definition des Kreises, Bewegung nicht ausdrücklich, muß sie aber doch stillschweigend voraussetzen.
>
> In Euklids XI. B. 14. Definit. wird eine Kugel zu beschreiben, ausdrücklich Umdrehung eines Halbkreises erfordert.
>
> Bey diesen Lehren der Elementargeometrie wird jede Bewegung einzeln betrachtet, und da ist die Zeit in welcher sie vollendet wird gleichgültig, folglich kömmt Geschwindigkeit nicht in Betrachtung.[71]

Doch auch Geschwindigkeit war – laut Kästner – bereits Bestandteil der Geometrie der Griechen:

> Archimed in seinem Buche von den Schneckenlinien in der ersten Erklärung, führt eine gegebene gerade Linie um einen Mittelpuncte aus, beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Stücken von ihr, und kömmt in des Kreises Umfang, wenn die Linie sich um vier Rechte gedreht hat. Das heisst ja wohl: die Geschwindigkeit der beyden Puncte, des Endpunctes der Linie welcher den Umfang beschreibt, und des Puncts der sich auf ihr bewegt, verhalten sich wie Umkreis zum Halbmesser.
>
> Zur Quadratrir erfodert Dinostratus daß eines Kreises Halbmesser sich gleichförmig dreht und eine gerade Linie immer gleichförmig einer Tangente des Kreises parallel fortrückt. Man s. meine geometrische Abhandlung II. Samml. 23. Abh. 33. §.
>
> So gehörten Bewegung und Geschwindigkeit in die Geometrie der Griechen.[72]

So eine Auffassung sei auch unverfänglich, da die Geometrie Bewegung und Geschwindigkeit nur in der Abstraktion von materiellen Körpern betrachtet. Solange Materie und Kraft für die geometrischen Konstruktionen keine Rolle spielen, ist die Betrachtungsweise noch mathematisch. *Dass* eine solche Trennlinie zwischen Mechanik und Mathematik gezogen werden kann, sei außerdem ebenfalls eine Beobachtung Kants:

---

[71] Ebd., 56 f.

[72] Ebd., 57.

XII) Aber bey diesen Definitionen dreht man gerade Linie oder Halbkreis, ohne an Kraft zu denken, die allerdings erfordert wird, wenn man der definierten Grössen sinnliche Bilder darstellt; Für den Verstand des Geometern sind sie nicht Materie, wofern Materie ohne Kraft nicht bewegt wird. Also: diese Bewegungen werden blos phoronomisch betrachtet, nicht dynamisch, die letzte Art der Betrachtung: Was für Bewegung entsteht in gegebener Materie aus gegebener Kraft, gehört zur Mechanik.

Diesen Unterschied hat auch Hr. Kant beobachtet in s. metaphysischen Anfgr. d. Naturwissenschaft. Wenn er im Anfange des ersten Hauptstücks; Materie das bewegliche im Raum nennt, so können ihm da die gerade Linie die den Kreis beschreibt, der Halbkreis welcher die Kugle beschreibt, Materie seyn; denn dieses Hauptstück ist Phoronomie, von dem er das zweyte, Dynamik unterscheidet.[73]

In der Tat findet sich bei Kant eine solche Trennung zwischen der „Phoronomie", die dem „Subject" der Bewegung, nämlich der Materie, keine andere Eigenschaft „beilegt" als Beweglichkeit, und der „Dynamik", in der Materie als etwas betrachtet wird, dass durch Kraft in Bewegung gesetzt werden kann:

Da in der Phoronomie von nichts, als Bewegung geredet werden soll, so wird dem Subject derselben, nämlich der Materie, hier keine andere Eigenschaft beigelegt als Beweglichkeit. Sie selbst kann also so lange auch für einen Punkt gelten, und man abstrahiert in der Phoronomie von aller innern Beschaffenheit, mithin auch der Größe des Beweglichen, und hat es nur mit der Bewegung und dem, was in dieser als Grösse betrachtet werden kann (Geschwindigkeit und Richtung), zu thun.[74]

Dieses ist nun die dynamische Erklärung des Begriffs der Materie. Sie setzt die phoronomische voraus, aber thut eine Eigenschaft hinzu, die sich als Ursache auf eine Wirkung bezieht, nämlich das Vermögen, einer Bewegung innerhalb eines gewissen Raumes zu widerstehen, wovon in der vorhergehenden Wissenschaft gar nicht die Rede sein musste, selbst nicht, wenn man es mit Bewegungen eines und desselben Punktes in entgegengesetzten Richtungen zu thun hatte.[75]

---

[73] Ebd., 58.

[74] *MAN*, AA 04: 480.12-18.

[75] *MAN*, AA 04: 496.11-16.

Auf diese Weise können wir eine Interpretation der Kantischen Vorstellung vom mathematischen Beweis in der Geometrie und der Infinitesimalrechnung geben, die (i) eine einheitliche Interpretation seiner Äußerungen in der *Kritik der Reinen Vernunft* und den *Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaften* erlaubt, (ii) Kants Auffassung in eine damals akute Debatte zu den Grundlagen der Mathematik einbettet, und (iii) auch von Zeitgenossen Kants so vertreten wurde.

Zusammenfassend lässt sich zu Kants so rekonstruierter Auffassung vom Beweis durch Demonstration Folgendes festhalten:

(1) Die Methode des Beweises durch Demonstration behandelt Gegenstände des „inneren Sinns", nämlich reine Anschauungen.

(2) Sie involviert (manchmal) die Konstruktion geometrischer Objekte aus anderen geometrischen Objekten in der Vorstellung, zumindest in all jenen Fällen, in denen die zu beweisende mathematische Wahrheit synthetisch ist.

(3) Sie ist die Hauptmethode von Differential- und Integralrechnung, sofern die Infinitesimalrechnung im Sinne von Newton/MacLaurin/Kästner verstanden wird.

(4) Sie führt im Vergleich mit existierenden Alternativmethoden zu einem „tieferen" Verständnis („wie es wirklich ist"), was daran liegt, dass die akroamatische Beweismethode im Gegensatz zur Konstruktion in der reinen Anschauung nur mit leeren Begriffen operiert.

(5) Dieses tiefere Verständnis wird erreicht, da wir jede „Wahrheit in ihrer Geburt zu sehen bekommen", weil wir jede Wahrheit in der Anschauung konstruieren und ein solcher Beweis eine zeitliche Dauer hat.

7. Zurück zu Ørsted

Diese Charakteristika decken sich mit denen, die wir zuvor über das Ørstedsche „Gedankenexperiment" festgehalten haben. Nimmt man hinzu, dass Ørsted Kantianer war und die *Metaphysischen Anfangsgründe der Naturwissenschaft* sein Spezialgebiet, liegt die Vermutung nahe, dass Ørsted zunächst nichts darüber hinaus Gehendes im Sinn gehabt haben wird.

Folglich versteht Ørsted unter der Methode „Gedankenexperiment" das Betreiben von Mathematik durch Konstruktion in der Anschauung und Operation mit physikaliscshen Beg-

riffen. Ørsted bezieht damit Stellung in der damals akuten Grundlagendebatte zur Fundierung der Infinitesimalrechnung, indem er aus Kantianischer Sicht die epistemischen Vorzüge der Newton/MacLaurin/Kästner-Auffassung betont.

Diese Interpretation klärt nicht nur den größten Teil des Abschnitts über das „Gedankenexperiment", sondern hilft auch dabei, den folgenden Paragraphen aus ‚Der allgemeinen Naturlehre Geist und Wesen' zu verstehen, der der Mathematik gewidmet ist und ebenfalls Interpretationsschwierigkeiten aufwirft.

Nachdem Ørsted die Rolle der Mathematik in der Naturlehre betont hat, moniert er plötzlich ein Forschungsdesiderat:

> Die Bewegungslehre hat sich fast ganz in Mathematik verwandelt. Die Kraftlehre erwartet den erfindrischen Geist, welcher sie zum nähmlichen Punkte führen kann; denn die inneren Kräfte zeigen sich uns in Zeit und Raum, und ihre Gesetze können dann erst als vollkommen bekannt angesehen werden, wenn wir alle dabey vorkommenden Verhältnisse in ihrer wahren Größe darstellen können.[76]

Ørsted hat auch schon gewisse Vorstellungen darüber, wie dies vorzugehen hat. Insbesondere soll die Mathematik dazu näher an die Physik rücken, bis beide „bey einem gewissen Grade der Vollkommenheit zusammenfallen müssen." Der Methode des „Gedankenexperiments" kommt dabei eine zentrale Bedeutung zu:

> Man hat hinreichend, vielleicht schon zuviel, die Naturlehre der Mathematik genähert; vielleicht wäre es Zeit, daß die Mathematik sich der Naturlehre zu nähern suchte. Die Geometrie in ihrer jetzigen Form wird ewig eins der herrlichsten Denkmäler des menschlichen Geistes seyn [...]; aber sollte neben derselben nicht ein andrer Vortrag bestehen können, worin alle geometrischen Sätze durch eine Reihe von Gedankenversuchen dargestellt würden? Für die Mathematik selbst würde man dadurch eine weit hellere und mehr unmittelbare Einsicht in die eigentliche Quelle jeder Wahrheit eröffnen, und für die Naturlehre würde dadurch eine viel innigere Verschmelzung mit der Mathematik gewonnen werden, als jemals statt fand.[77]

Was Ørsted hier im Sinn hat, scheint nach dem zuvor Gesagten nun halbwegs klar. Unter der Näherung von Naturlehre und Mathematik verstand Ørsted die Aufnahme physikalischer Be-

---

[76] H. C. Ørsted: „Über das Studium der allgemeinen Naturlehre", 483.

[77] Ebd. 484 f.

griffe in die Mathematik, wie sie von Kästner in ‚Bewegung gehört in die Geometrie' verteidigt wurde. Bei Ørsted finden wir genau dieselbe kinematische Ausdrucksweise, die Friedman bei Kant beobachtet hatte, diesmal sogar mit explizitem Bezug auf die Infinitesimalrechnung:

> Wenn wir in unsrer Vorstellung einen Punkt sich bewegen lassen, um eine Linie zu beschreiben, oder eine Linie sich um ihren einen Endpunkt bewegen lassen, und mit dem andern einen Kreis beschreiben, was ist das anders als ein Gedankenexperiment? Die Differential- und Integralrechnugen besteht durchaus nur in solchen Gedankenversuchen und Betrachtungen darüber.[78]

Für die Bewegungsgesetze der Phoronomie war dieses Projekt durch die Arbeit Newtons bzw. MacLaurins bereits realisiert. Wohl aus romantischer Begeisterung über diese Synthese von Naturlehre und Mathematik und in Anbetracht der epistemischen Vorzüge, die diese Vorgehensweise nach Kantianischer Auffassung hatte, wünscht sich Ørsted eine Ausweitung dieses Programms auf die Dynamik.

Schon in seiner Dissertation ging Ørsted das Kantische Programm nicht weit genug. Wenn auch Naturgesetze apodiktische Gewissheit haben sollen, müssen schließlich auch diese a priori gefunden werden können und Gegenstand des mathematischen Beweises durch Demonstration sein:

> *Kant* will die Gesetze die Gesetze der äußern Anschauung nicht durchaus *a priori* deduciren, sondern behauptet, daß man in jedem Theile der Naturmetaphysik ein anderes, durch die Erfahrung gegebenes, Merkmal hinzusetzen müsse. Diese Behauptung aber scheint dem von *Kant* selbst aufgestellten und bewiesenen Satze, *daß die Gesetze der Natur allgemein und nothwendig seyn müssen*, und daher nicht aus der Erfahrung deducirt werden können, zu widersprechen. Es ist auch wol jedem einleuchtend, daß die Allgemeinheit und Nothwendigkeit der Gesetze in der Natur unmöglich bei einer Deduktion aus der Erfahrung bestehen kann.[79]

Wie sich Ørsted diese Erweiterung im Detail vorstellt, verrät er leider nicht.

---

[78] Ebd. 253.

[79] Hans Christian Ørsted: *Ideen zu einer neuen Architektonik der Naturmetaphysik, nebst Bemerkungen über einzelne Theile derselben*. Berlin. 1802, 10.

In Hinblick auf die Mathematik wünschte Ørsted sich eine Ausweitung dieses Programms auf die Geometrie. Obwohl Ørsted versprach, eine solche Fundierung zu leisten[80] hat er sie nie veröffentlicht. Wir wissen daher nicht genau, was Ørsted sich unter einer solchen Fundierung der Geometrie genau vorstellte. Vermutlich versuchte Ørsted den Nachweis zu erbringen, dass sich die gesamte Geometrie auf kinematischen Vorstellungen fundieren lässt.[81]

8. Schluss: Gedankenexperimente in der Mathematik

Dieser letzte Abschnitt zur Rolle der Mathematik bestätigt allerdings die Interpretationshypothese, dass ‚Gedankenexperiment' für Ørsted im Kern nicht viel mehr bezeichnet als die Operation mit physikalischen Vorstellungen in der Mathematik und Beweise durch Konstruktion in der Anschauung.

Die wenigen Textstellen in „Über das Studium der Naturlehre", die von dieser Verwendungsweise abweichen, zeugen zwar davon, dass Ørsted seine neuentdeckte „Methode" auch an anderen Stellen im Forschungsprozess in irgendeiner Form wiederentdeckte, nicht aber, dass Ørsted auch etwas mit ‚Gedankenexperiment' bezeichnen wollte, was man in der gegenwärtigen Wissenschaftstheorie damit bezeichnet. So nennt Ørsted an späterer Stelle im selben Aufsatz die Subsumierung von Phänomenen unter Naturgesetze zum Zwecke der Erklärung ebenfalls einen „Gedankenversuch".[82]

Wenn Ørsted in anderen Texten (wie in seinem Lehrbuch zur Mechanik) die Episoden der Wissenschaftsgeschichte behandelt, die wir heute als Paradebeispiele für den Einsatz von Gedankenexperimenten betrachten, erwähnt Ørsted gerade diese Überlegungen nicht und redet hier auch nicht von einem Gedankenexperiment.[83]

---

[80] Vgl. H. C. Ørsted: „Über das Studium der allgemeinen Naturlehre", 485: „Der Verfasser hat schon vor einigen Jahren eine Darstellung der Geometrie, wie sie oben beschrieben worden (nemlich nach der genetischen Methode) versucht. Wenn er die Gelegenheit haben wird, sie noch mehr auszuführen, so wird er sie der Beurtheilung der Sachkundigen vorlegen."

[81] Kästner hatte ähnliche Überlegungen ja schon angestellt, indem er aufzuzeigen versuchte, dass „Bewegung und Geschwindigkeit" auch in die „Geometrie der Griechen" gehörte. Dieses historische Projekt förderte Kästner dadurch, dass er 1782 die Preisfrage unter seinen Studenten in Göttingen ausgab „Wie die Rechnung des Unendlichen auf Lehrsätzen und Verfahren des Euklids, Archimedes, und Apollonius beruhe." A. G. Kästner: *Analysis des Unendlichen*, 59.

[82] Vgl. H. C. Ørsted: „Über das Studium der allgemeinen Naturlehre", 485 f.

[83] Vgl. U. Kühne: *Die Methode des Gedankenexperiments*, 160-161. Dies bemerkte bereits Witt-Hansen in „H. C. Örsted, Immanuel Kant, and the thought experiment", 48 f.: „It is remarkable, however, that [Ørsted], in his essay, did not analyze one single thought experiment[…]. For instance, one looks in vain for an analysis of Galileo's thought experiment with freely falling bodies, or for an evaluation of Newton's thought experiments[…]."

Natürlich haben auch spätere Autoren den Ausdruck ‚Gedankenexperiment' verwendet, um damit Verfahrensweisen in der Mathematik zu bezeichnen. Prominent hierfür sind Ernst Mach und Imre Lakatos.

Bei Ernst Mach findet sich die Vorstellung, dass sowohl das physische Experiment wie auch das Gedankenexperiment ihren Ursprung in der systematischen Variation von Werten zur „experimentellen" Lösung von Gleichungen und in der Variation der Figuren in der Geometrie haben:

> Die Veränderung, Bewegung der Figuren, kontinuierliche Deformation, Verschwindenlassen und unbegrenzte Vergrößerung einzelner Elemente sind auch [in der Geometrie] die Mittel, welche die Forschung beleben, neue Eigenschaften kennen lehren, und die Einsicht in deren Zusammenhang fördern. Man muß wohl annehmen, daß gerade auf diesem so einfachen fruchtbaren und leicht zugänglichen Gebiet sich die *Methode* des *physischen* und des *Gedankenexperimentes* sich zuerst entwickelt hat, und von da aus auf die Naturwissenschaften sich übertragen hat. Diese Ansicht wäre gewiß viel populärer, wenn sich der elementar-mathematische Unterricht, namentlich der geometrische, sich nicht vorzugsweise in so starren dogmatischen Formen bewegen [...] würde, wobei die *Kritik* in so monströser Weise hervorgekehrt, und die *heuristischen* Methoden in so unverantwortlicher Art verdeckt werden. Die große scheinbare Kluft zwischen Experiment und Deduktion besteht in Wirklichkeit nicht. Immer handelt es sich um ein Zusammenstimmen der Gedanken mit den Tatsachen und der Gedanken untereinander.[84]

An diese Überlegungen, die bei Mach leider nicht wesentlich weiter ausgeführt werden, schließt erst wieder Imre Lakatos in seinem *Proofs and Refutations* an.[85] Das Thema Lakatos' ist genau, was Mach in den letzten Sätzen des obigen Zitats sagt: wenn man in der Mathematik die heuristischen Mittel nicht immer einfach ignorierte, könnte man feststellen, dass die „große scheinbare Kluft zwischen Experiment und Deduktion" in Wahrheit nicht besteht: auch die Mathematik schreitet *tentativ* voran, in einem Muster, dass dem der Naturwissenschaften gleicht[86]:

---

[84] Mach, Ernst: *Erkenntnis und Irrtum*. Leipzig. 1905, 196.

[85] Imre Lakatos: *Beweise und Widerlegungen: die Logik mathematischer Entdeckungen*. Hrsg. von John Worrall und Elie Zahar. Braunschweig/Wiesbaden. 1979.

[86] Die folgende Viererkette erinnert beispielsweise an Karl Poppers Ablaufschema wissenschaftlichen Fortschritts. Vgl. D. Cohnitz: „Popper, Karl Raimund". In: Wulff D. Rehfus (Hrsg.): *Handwörterbuch Philosophie*, Göttingen. 2003, S. 185.

(1) Ursprüngliche Vermutung

(2) Beweis (ein Argument, das die ursprüngliche Vermutung in Untervermutungen oder Hilfsätze zerlegt)

(3) „Globale“ Gegenbeispiele (Gegenbeispiele zur ursprünglichen Vermutung) tauchen auf.

(4) Neuuntersuchung des Beweises: der „schuldige Hilfssatz“, zu dem das globale Gegenbeispiel ein „lokales“ Gegenbeispiel ist, wird ausfindig gemacht. Dieser schuldige Hilfssatz kann vorher „versteckt“ geblieben oder falsch eingeordnet worden sein. Jetzt wird er deutlich bestimmt und als Bedingung in die ursprüngliche Vermutung eingebaut. Der Satz – die verbesserte Vermutung – verdrängt die ursprüngliche Vermutung mit dem neuen beweiserzeugten Begriff als entscheidendem Merkmal.

„Gedankenexperimente kommen dabei an zwei Stellen zum Einsatz: einmal im zweiten Schritt, dem „Beweis“, dann aber auch in Schritt (3), bei der Konstruktion von Gegenbeispielen.

Lakatos’ berühmtes Hauptbeispiel ist die Geschichte des Polyedersatzes in der Mathematik, der von Euler 1758 als Vermutung aufgestellt worden ist. Euler hatte beobachtet, dass Polyeder, also Körper, die von geraden Flächen und Kanten begrenzt sind, eine einfache Beziehung aufweisen. So ist das Verhältnis von Kanten (K), Flächen (F) und Ecken (E) eines Polyeders folgendermaßen bestimmbar: $E - K + F = 2$. Lakatos zeigt dann mit Beispielen aus der Mathematikgeschichte, wie dieser Satz und seine „Beweise“ durch Gedankenexperimente gestützt und bezweifelt worden sind, wobei stützende Gedankenexperimente beispielsweise darin bestanden, bestimmte Operationen in der Vorstellung mit einem Polyeder auszuführen (beispielsweise indem man ihn auf eine Ebene projeziert und dann in Dreiecke zerlegt[87]). Gedankenexperimente, die an Eulers Vermutung Zweifel aufkommen ließen, bestanden entsprechend in *bösartigen* „Polyedern“, wie Würfeln mit einem würfelförmigen Loch in der Mitte[88] und ähnlichen so genannten „Monstern“.

„Gedankenexperimente“ dieser Art fallen in die Kernbedeutung unseres Begriffs, da es hier offensichtlich um gerechtfertigte Überzeugungsänderung etc. geht.[89] Daneben gibt es

[87] Dies entspricht Cauchys „Beweis“ des Eulerschen Polyedersatzes von 1813.

[88] Ein solches Gegenbeispiel wurde von l’Huilier 1812 vorgetragen.

[89] Vgl. D. Cohnitz: *Gedankenexperimente in der Philosophie*.

auch eine gewisse Verwandtschaft mit Themen und Fragestellungen, die wir zuvor im Zusammenhang mit Kants Philosophie der Mathematik diskutiert haben, insbesondere, was die Frage betrifft, inwiefern die Mathematik nach einem streng deduktiven Modell vorgeht und inwiefern sie andere Verfahren als die Logik zur Begründung hinzuzieht.

Allerdings muss man hier zwei Dinge auseinander halten: die Auffassung Kants, dass Mathematik über die Logik hinausgeht (sei es im Entdeckungs- oder Begründungszusammenhang, oder ontologisch betrachtet) ist, so wie er diese Auffassung verstanden hat, sicherlich falsch, während sie in einem anderen Sinn vermutlich wahr ist oder zumindest plausibel gemacht werden kann. Wenn Kant oder Ørsted einen Satz geäußert haben, der in unserem heutigen Verständnis der darin vorkommenden Worte wahr *klingt*, heißt das noch nicht, dass diese Interpretation irgendwas damit zu tun hat, wie Kant oder Ørsted den Satz verstanden wissen wollten. Lakatos weist mit Recht darauf hin, dass eine „rationale Rekonstruktion“ der Mathematikgeschichte im Sinne der „euklidischen Beweismethode“ den tatsächlichen Verlauf der Mathematikgeschichte bestenfalls karikiert. Damit ist aber weder Kant darin Recht gegeben, dass sich (einige) mathematische Beweise nicht in der Logik rekonstruieren lassen, noch Ørsted darin Recht gegeben, dass die Mathematik näher an die Naturwissenschaft rücken müsse. Ob sich von Kant oder Ørsted etwas anderes über das Gedankenexperiment oder die Mathematik lernen lässt, bleibt dahin gestellt.