Matemáticas y platonismo(s)

José Ferreirós, Universidad de Sevilla

> Dice usted [Hermite] muy bellamente en su carta del 27 de Nov.: "Los números (enteros) me parecen constituir un mundo de realidades que existen más allá de nosotros con el mismo carácter de absoluta necesidad que las realidades de la naturaleza, cuyo conocimiento nos es dado por los sentidos, etc."
> Permítame, sin embargo, el comentario de que en mi opinión la realidad y absoluta legalidad de los números enteros es *mucho mayor* que la del mundo sensorial. Y el que así sea, tiene una única y muy simple razón, a saber, que los números enteros existen en el grado sumo de realidad, tanto separados como en su totalidad actualmente infinita, en la forma de ideas eternas in intellectu Divino. (Cantor a Hermite, 30 Nov. 1895, en [Meschkowski 1983, 275])

> No es ninguna exageración decir que el platonismo es hoy en día dominante en matemáticas. [Bernays 1935, 65]

1. Existencia matemática: lo dado y lo construido.
2. Existencia ideal y consistencia.
3. Grados de platonismo interno.
4. Platonismo filosófico o externo.

El término 'platonismo' fue propuesto por el gran lógico matemático y colaborador de Hilbert Paul Bernays [1935, 62–63] en una conferencia que impartió en junio de 1934. Bernays pretendía dar nombre a un modo de razonar que es característico sobre todo del análisis y la teoría de conjuntos, aunque también del álgebra moderna y la topología.[1] Dicho modo de pensar consiste en lo siguiente: los objetos de la teoría se conciben como elementos de una totalidad o conjunto, que se considera dada al margen de cualquier dependencia respecto al sujeto pensante, al matemático. Precisamente porque los elementos del conjunto se conciben como dados, una consecuencia de dicho modo de pensar es que para una propiedad cualquiera (expresable con los medios de la teoría) puede decirse que o bien la poseen todos los elementos del conjunto, o bien hay uno que no la posee.

Que el platonismo, en el sentido de Bernays, es característico de la moderna matemática abstracta, fue uno de los resultados tangibles y claros del debate sobre fundamentos que tuvo lugar a principios del siglo XX. Aunque ese debate es famoso y bastante bien conocido, a menudo se trivializa la cuestión, pensando que en último término se reduce a una elección muy subjetiva entre varias posturas enfrentadas.[2] Afortunadamente, hay mucho más de interés en el problema de los fundamentos de la matemática, y afortunadamente, también, el debate de los años 20 y 30 dejó algunas conclusiones firmes. En un artículo de 1971, el propio Bernays [1976, 190] resaltaba los siguientes resultados positivos y duraderos:

[1] Como veremos, la denominación de "platonismo" puede en ocasiones resultar confundente, de manera que vamos a distinguir aquí entre dos sentidos del término.
[2] En especial el tópico trío de logicismo, intuicionismo y formalismo, que —dicho sea de paso— no resume en absoluto todas las opciones posibles para una fundamentación.

La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas **2** (1999), 446–473.

1. el conocimiento de las posibilidades de formalización de teorías matemáticas por medio del simbolismo lógico: características, alcance y límites de la formalización;

2. el empleo de la formalización para consideraciones metateóricas (consistencia, decidibilidad, completud, etc.) empleando medios restringidos en Hilbert y en los famosos resultados de Gödel, o todo el poder de la matemática clásica en desarrollos posteriores como la teoría de modelos de Tarski;

3. la contraposición entre un tratamiento de la matemática constructivo, basado en consideraciones procesuales, y el tratamiento clásico, que se basa en considerar relaciones entre objetos asumidos como existentes; el primer enfoque aparece como complementario del segundo.

Esta última contraposición, de gran importancia, apunta también al tema fundamental que pretendemos discutir en este trabajo.

En realidad, conviene indicar desde un comienzo que, en opinión del que suscribe, se deben diferenciar dos aspectos del problema del platonismo, dos géneros de platonismo. Encontrarles un nombre adecuado resulta complicado, pero propondremos aquí los siguientes:

1. Platonismo *interno* o propiamente *matemático*: es característico de las teorías de la matemática abstracta o moderna, donde se hace referencia a elementos cuya existencia se postula y se considera dada (se podría hablar de *existencia ideal*).

2. Platonismo *externo*, ontológico, o propiamente *filosófico* (una de las posibles interpretaciones filosóficas de la matemática, en particular de la característica antes señalada de la matemática abstracta): consiste en la afirmación de que los objetos matemáticos gozan de una *existencia real*, análoga en algún sentido (aunque diferente) a la existencia de los objetos físicos.

Las definiciones anteriores son meramente orientativas; los conceptos clave que aparecen en ellas se explicitarán más abajo. Nos interesará sobre todo aclarar en qué sentido puede afirmarse que la matemática moderna es platónica en la primera acepción: aclarar en qué consiste el platonismo interno. Empezaremos pues con esta cuestión, dejando para el final los aspectos filosóficos del platonismo (sugeridos por la cita de Cantor que dábamos al principio). Eso sí, me gustaría dejar claro desde el principio que el platonismo externo es sólo una de las interpretaciones posibles del platonismo interno.

1. Existencia matemática: lo dado y lo construido.

Esta distinción no estaba en absoluto clara en la matemática del siglo XIX, y su aclaración ha sido una de las consecuencias más importantes y duraderas del debate de fundamentos. En toda teoría matemática se consideran *dados* ciertos objetos, relaciones y funciones, mientras que otros son *definidos*, es decir, *construidos* lógicamente a partir de aquéllos. En aritmética elemental, por ejemplo, se parte del 0 y la función sucesor, así como las funciones + (adición) y · (producto); otras funciones, relaciones o propiedades (p.e., la propiedad de *ser primo*) son definidas o construidas. En geometría, se toman como dados los puntos, rectas y planos, así como algunas relaciones (p.e., "estar sobre" o "estar entre") y otras relaciones más complejas son definidas. Este proceso de definición o construcción lógica consiste en la aplicación iterada de unas cuantas operaciones lógicas elementales sobre aquella base dada.

A este respecto, hay que resaltar que la utilización de cuantificadores, especialmente del existencial $\exists x$, indica que se consideran dados los objetos que pertenecen al dominio de cuantificación. Si en geometría empleamos el axioma que dice:

Dados dos puntos A y C, existe al menos un punto B que está sobre la recta AC, tal que C está entre A y B,

estamos empleando el cuantificador existencial $\exists x$ con respecto al dominio de puntos; asumimos dada una totalidad de puntos.[3] Como veremos, en algunos casos se aplica el cuantificador $\exists x$ de tal manera que permite postular la existencia de un objeto que *no puede construirse* mediante los objetos y relaciones básicos de la teoría. Esto es lo que ocurre en el Axioma de Elección, de ahí que su empleo causara polémicas en 1904. Fue precisamente la discusión con respecto al Axioma de Elección, y cuestiones similares, lo que llevó a los matemáticos a tomar conciencia de la diferencia clave entre lo dado y lo construido.

La matemática euclidea, y casi todas las contribuciones hechas hasta el XVIII, tendían al enfoque de lo construido. Los postulados de Euclides no constituyen un sistema axiomático en el sentido moderno, sino que, sobre todo, estipulan los medios de construcción de figuras admitidos (fundamentalmente, la idea de una geometría de regla y compás, de rectas y círculos); quizá podría decirse que el único *axioma* en el sentido moderno es precisamente el 5º, el de las paralelas. La deducción en Euclides no es sólo obtención de consecuencias lógicas, sino que tales consecuencias se basan en la elaboración de construcciones con los medios admitidos. Esta es una de las razones de que a Euclides se le 'escaparan' axiomas básicos de la geometría, en particular todo lo relativo a congruencia de segmentos y a la continuidad de rectas y círculos.

También el cálculo del XVIII tendía a enfatizar lo construido, como puede verse sobre todo en el desarrollo de la noción de *función*. En esa época, se concebía una función como una expresión analítica que involucra variables, constantes, y ciertas operaciones conocidas (+, √, sen, log). Los elementos en que se basaba la construcción eran aquí los números reales, las letras del alfabeto, y unas pocas operaciones o funciones elementales. Claro está que se admitían las funciones dadas a través de series infinitas, pero los miembros de la serie venían siempre dados a través de una ley de construcción. Se asumía, por descontado, que toda función será continua en el sentido moderno; tan asumido estaba que, de hecho, se entendía por función 'discontinua' aquella que (siendo continua en el sentido moderno) obedece distintas leyes o expresiones analíticas en su recorrido.

Como probablemente sabe el lector, hacia mediados del XVIII tuvo lugar una famosa polémica acerca de la forma analítica de representar el movimiento de una cuerda vibrante (por ejemplo, la cuerda de un violín al pulsarla). Euler se atrevió a sugerir que, en casos como estos, se debían aceptar incluso funciones (continuas) dadas por una gráfica trazada libremente, aun si no sabemos representarlas mediante una expresión analítica. Comenzaba a plantearse la cuestión de si son aceptables las funciones definidas en términos puramente abstractos, un tema que resurgiría con el estudio de las series de Fourier en el XIX. En esta época, Dirichlet propuso una definición perfectamente abstracta de función, de manera que su nombre quedó asociado a la idea de función arbitraria.[4] Su alumno Riemann comenzó a ampliar el análisis a las funciones abstractas, especialmente funciones discontinuas; pero otros, notablemente Weierstraß, pensaban que era absurdo hacer matemática con funciones que no sabemos representar analíticamente.

Lo que esto indica es que fue el desarrollo de una nueva forma de hacer matemática, la *matemática abstracta*, lo que trastocó el tradicional esquema de lo construido en favor de un nuevo planteamiento, el de lo dado. Puede decirse, al modo de Bernays, que la matemática abstracta se plantea como una investigación de relaciones que se dan entre objetos o elementos

[3] Aunque no necesariamente asumimos que esté dada como un conjunto: en teoría de conjuntos axiomática se asumen dados los conjuntos, pero estos no forman a su vez un conjunto (universal) sino en todo caso una *clase*, en el sentido técnico del término.

[4] Dirichlet dio el ejemplo de la función (que, desde su punto de vista, no era integrable)

$$f(x) = 0 \text{ para } x \text{ racional}, \; f(x) = 1 \text{ para } x \text{ irracional}.$$

Se trata de una función para la que no se conocía representación analítica, aunque cuarenta años más tarde (en 1870) Hermann Hankel mostró cómo representarla.

que se asumen existentes con independencia de nuestro pensamiento. En seguida trataremos de aclarar en qué consiste esto.

Pero antes conviene decir que, pese a todo, la matemática tradicional también incluía elementos no constructivos, y aquí sí que se puede hablar de *lo dado* en el sentido pleno. Para la matemática tradicional, los números expresaban magnitudes y proporciones entre magnitudes; los referentes últimos de la matemática (esas magnitudes) no eran objetos matemáticos sino objetos físicos. Por tanto, eran algo dado en el sentido pleno: volúmenes de agua, distancias entre lugares del espacio físico, etc. Se asumía, también, que el espacio físico es continuo, y de esta manera —vía proporciones— entraba en juego el *continuo*, la totalidad de los números reales. Los números reales no pueden construirse mediante operaciones aritméticas a partir de los naturales; para definir $\mathbb{R}$ partiendo de $\mathbb{N}$ se necesitan también conjuntos infinitos arbitrarios, es decir, se necesita recurrir al enfoque no constructivo, abstracto.

Para trabajar con $\mathbb{R}$ también podemos comenzar a la manera de Hilbert: dando un sistema axiomático que define un cuerpo ordenado, arquimediano y completo. Este enfoque se basa, precisamente, en asumir como existente un cierto conjunto de elementos, estipulando cuáles son las relaciones que se dan entre ellos (cuál es su estructura). A esto se refería Bernays al decir que la matemática moderna es investigación de relaciones que se dan entre objetos asumidos como existentes independientemente del matemático. Tomemos como ejemplo el axioma de completud de $\mathbb{R}$, que se puede formular, al modo de Weierstraß y Cantor, como sigue:

> Dada una sucesión infinita de intervalos cerrados y encajados de elementos de $\mathbb{R}$, existe al menos un número real que pertenece a todos esos intervalos (e.d., su intersección es no vacía).

El axioma estipula la existencia de ciertos números reales en ciertas condiciones. Sobre su base se puede demostrar, por ejemplo, que existe cota superior para un conjunto infinito y acotado de números reales. Pero esos números reales no pueden, en general, definirse por construcción aritmética a partir de los números naturales. Si no aceptáramos los conjuntos arbitrarios, perderíamos la completud de $\mathbb{R}$ y el teorema de la cota superior; esto es lo que ocurre cuando se trata de definir los reales partiendo de $\mathbb{N}$ y las operaciones aritméticas (ver más abajo, §3).

Siguiendo esta línea de razonamiento, el problema que estamos tratando puede reformularse en términos de la noción de *existencia*. Para el matemático constructivo, existe aquello que podemos determinar de una manera concreta y efectiva, lo que podemos construir paso a paso. Los números naturales pueden tratarse como meros símbolos que se obtienen, por ejemplo, por adjunción: escribimos |, ||, ||| y así sucesivamente; de modo que los naturales son admisibles (aunque no la totalidad infinita de ellos). A continuación, podemos definir las operaciones aritméticas habituales de una manera también admisible, y podemos tratar de reconstruir la matemática clásica mediante construcciones efectivas a partir de dicha base. Este intento se puede llevar bastante lejos, pero nunca hasta recuperar la noción del continuo, de un conjunto $\mathbb{R}$ completo.

En el caso del matemático 'clásico' o abstracto, la noción de existencia se toma en otro sentido. El signo lógico $\exists x$ se emplea para especificar ciertas propiedades del conjunto o la estructura a la que se refieren los axiomas, sin que 'existir' implique ninguna restricción constructivista. Donde Euclides postulaba que podemos unir dos puntos construyendo una recta, Hilbert establece el axioma de que, dados dos puntos, existe una recta que los une. 'Existe' en el conjunto de las rectas, una totalidad que se toma como dada de antemano: de nuevo vemos que la tendencia fundamental del platonismo es considerar los objetos de que habla la teoría como exentos de cualquier dependencia respecto al matemático. La única limitación a la libre postulación —resaltada ya por autores como Cantor, Dedekind y Hilbert— es que no atentemos contra la lógica, que el sistema resultante sea no contradictorio, *consistente*. Veamos con más calma esta cuestión.

2. *Existencia ideal y consistencia.*

El punto de vista constructivista comenzó a ser refinado y aclarado cuando el ascenso de la nueva matemática abstracta resultaba ya evidente. Esto sucedía en Alemania hacia 1870: el análisis de Dirichlet y Weierstraß, la teoría de funciones de Riemann, o la teoría de números algebraicos de Dedekind, mostraban claramente una tendencia abstracta. En reacción, el influyente matemático berlinés Kronecker comenzó a plantear un claro y ambicioso (aunque demasiado estricto) programa constructivista. Kronecker rechazaba la noción de conjunto, que se había empleado en diversas definiciones de los números reales o en la mencionada teoría de Dedekind, oponiéndose al principio de completud de | asumido por Weierstraß. Pretendía reducir todo, en matemática pura, a los números naturales y las operaciones con ellos; por estos motivos, criticó abiertamente a Weierstraß, a Dedekind y a Cantor.

Ante ello, Cantor escribió en un famoso artículo [1883, 182] que el matemático debe ser completamente libre en el desarrollo de sus ideas, y que las únicas restricciones consisten en que dichas ideas estén libres de contradicción, bien definidas, y que entren en relaciones ordenadas con las nociones matemáticas previamente aceptadas. Como se ve, no estamos todavía en el simple requisito de la consistencia, pero sí muy cerca. Cantor presentó la cuestión en términos que son interesantes en el contexto de este trabajo, ya que nos recuerdan la distinción entre platonismo interno y externo: el matemático atiende única y exclusivamente a la "realidad *inmanente*" de sus conceptos, es decir, a su aceptabilidad en el dominio del pensamiento puro; se despreocupa completamente de la "realidad *transiente*" de los objetos matemáticos, es decir, de su existencia real o su capacidad de representar relaciones o procesos del mundo externo [Cantor 1883, 181]. Esta es una manera muy adecuada de precisar el enfoque que, por esos mismos años, defenderían hombres como Dedekind y Hilbert.[5]

Pocos años después, Dedekind [1888, 105] respondía a las críticas que le había dirigido Kronecker diciendo que no le parecían justificadas las limitaciones que éste pretendía imponer a la libre formación de conceptos. En particular, afirmaba que un conjunto está bien determinado cuando se ha precisado un criterio que establezca si una cosa cualquiera pertenece o no al conjunto, completamente al margen de si conocemos un procedimiento efectivo que permita tomar esa decisión en cada caso concreto. El conjunto de los números reales trascendentes está bien definido, aún si hay números irracionales para los que no ha podido determinarse si son trascendentes o no. (Se debe decir que el planteamiento de Dedekind era ingenuo, en la medida en que los conjuntos paradójicos de Cantor y Russell están perfectamente definidos en su sentido.) Además, basta una demostración de consistencia lógica para que un concepto (en particular, el de conjunto infinito) sea admisible en matemática.[6]

Algún tiempo después, Hilbert [1899] aplicaba ese enfoque abstracto al tratamiento de la geometría y de la teoría de números reales. Al leer su obra sobre geometría, el gran lógico Frege se sorprendió de que Hilbert estuviera dispuesto a llamar 'puntos', 'rectas' y 'planos' a tres conjuntos arbitrarios de cosas, siempre y cuando la estructura de esos conjuntos satisficiera los axiomas geométricos. Más aún, Frege no comprendía cómo Hilbert pretendía establecer la aceptabilidad de los axiomas geométricos en base a demostraciones de consistencia. Para Frege, los axiomas euclideos eran *verdades* acerca del espacio intuitivo (en el sentido de Kant), y eso bastaba para hacer superflua una demostración de consistencia: es evidente (aquí en sentido estricto) que existe un modelo, y por tanto la teoría no puede ser contradictoria. Para Hilbert, en cambio, la demostración de consistencia establecía la existencia matemática:

> Si … se puede demostrar que los atributos conferidos a una noción no pueden, por aplicación de un número finito de deducciones lógicas, conducir nunca a una contradicción, diré que se ha demostrado la existencia matemática de la noción en cuestión, por ejemplo la existencia de un número o de una

[5] Hay que decir que, inmediatamente, Cantor iba más allá, porque sus convicciones filosóficas y metafísicas le hacían pensar que todo lo que existe inmanentemente tiene 'realidad transiente' (ver §4).

[6] Ver la carta a Keferstein de 1890 en Dedekind [1998]. No en vano Dedekind pensaba que la matemática pura es una parte de la lógica, lo que le convierte —junto a Frege— en padre del logicismo.

> función que cumplen ciertas condiciones … [o] … la existencia matemática del conjunto de todos los números reales, es decir, del continuo. [Hilbert 1900,]

La idea de Hilbert es justamente célebre, y forma un pilar ideológico —por así decir— de la matemática moderna, aunque no de la práctica matemática: las demostraciones de consistencia han resultado inalcanzables en los casos de interés.

Fue Hilbert mismo el que, un cuarto de siglo más tarde, intentó zanjar las disputas en torno a la matemática abstracta con una jugada genial: convirtiendo en problema matemático la propia cuestión de la existencia de las nociones matemáticas. Admitamos que la consistencia basta para garantizar la existencia matemática, y admitamos también que las nociones matemáticas pueden ser codificadas mediante teorías formales. Entonces, el problema de la consistencia se convierte en un problema combinatorio, analizable mediante una investigación matemática de la noción de demostración formal. La metamatemática, la *teoría de la demostración*, bastará para establecer la consistencia de las distintas teorías matemáticas axiomatizadas, y por tanto (por el principio de Hilbert) para dictaminar la existencia de las respectivas estructuras abstractas.

Como todo el mundo sabe, la arriesgada apuesta de Hilbert fracasó. Los medios combinatorios y finitarios no son suficientes ni siquiera para establecer la consistencia de la aritmética de Peano,[7] y nadie tiene ni la menor idea de cómo se podría demostrar la consistencia de un sistema axiomático para los números reales. Pero esto no ha impedido que la apelación a la consistencia siga formando parte del credo fundamental del matemático moderno, aunque sea al nivel de las buenas intenciones y la esperanza de que, algún día, alguien resolverá la cuestión. Todo esto nos lleva al tema de la posición formalista, sobre la que ya es hora de decir algunas palabras.

Mientras escribo este trabajo, soy plenamente consciente de que la mayoría de los matemáticos, ante una discusión sobre temas de este tipo, se manifiestan como formalistas (por más que no pocos sientan algún malestar ante las limitaciones de ese planteamiento). Esto habrá tenido como consecuencia que muchas de las formulaciones anteriores les hayan creado cierta incomodidad. De acuerdo con el *formalismo* estricto, toda teoría matemática es (y sólo es) una combinación de símbolos carentes de significado: todo consiste en símbolos, reglas para la formación de expresiones (bien formadas) y reglas para la derivación de expresiones (incluyo aquí axiomas y reglas de inferencia). Las expresiones no tienen un referente externo, no tienen significado; en todo caso, los símbolos matemáticos son auto-referentes. El oficio del matemático es meramente la deducción formal.[8]

Ahora bien, el formalismo puro y duro no resulta adecuado ni como una respuesta al problema de los fundamentos, ni como una filosofía de la matemática. No es adecuado como fundamentación, porque la piedra de toque fundacional —en este planteamiento— es y sólo puede ser la demostración de consistencia. De manera que no disponemos de una fundamentación para el análisis, ni para el álgebra abstracta, etc., ni siquiera para la aritmética. No importa, se dirá, porque resulta claro que la aritmética de Peano o la teoría de los números reales no van a dar lugar a contradicción: una larga experiencia y un alto grado de familiaridad con ellas lo avalan. Pero si la fuente de nuestra convicción acerca de la consistencia no está en los propios métodos formales, resulta claro que el formalismo no alcanza a ser un punto de vista autosuficiente en fundamentación de la matemática. Como mínimo, habría que complementarlo con algún otro elemento que diera cuenta de las convicciones matemáticas que no surgen del puro juego formal. Esto es lo que ocurre en el caso de algunos formalistas conscientes, como puede ser Curry [1951], que complementa las ideas formalistas con una cierta *intuición* informal. Ahora bien, si aceptamos esta intuición como fuente de nuestras ideas acerca de estructuras como las de ⌉ y |, estamos abriendo la puerta al platonismo interno.

---

[7] La consistencia de la aritmética de Peano solo se ha podido establecer (Gentzen) empleando inducción transfinita (limitada, eso sí, a ordinales numerables) o (Gödel) suponiendo consistente la aritmética intuicionista.

[8] Todo el mundo sabe que el formalismo se relaciona con el gran nombre de Hilbert, aunque lo cierto es que Hilbert no era formalista, según la definición anterior. Lo que en Hilbert era un *medio* para demostrar la consistencia, ha sido convertido por otros en un fin, en todo lo que cabe decir acerca de la matemática.

Los problemas del formalismo no acaban ahí. Se trata de un enfoque muy insatisfactorio para dar cuenta del conocimiento matemático y su desarrollo, es decir, como filosofía de la matemática. Esto se debe, ante todo, a que no hace comprensible ni el desarrollo de la matemática, ni la práctica actual. Comenzando por la práctica matemática, ésta introduce toda una serie de elementos que están lejos de representar simplemente una aproximación formal a las teorías. Cuando el matemático en activo habla de la aritmética de Peano (AP), no está desarrollando un puro juego formal, sino razonando sobre una cierta estructura, un modelo de los axiomas. Quizá esto sería compatible con el formalismo si se estuviera considerando todos los posibles modelos del sistema, pero por supuesto el matemático en activo no está pensando en modelos no estándar de AP (desde un puro formalismo, éstos están exactamente al mismo nivel que el modelo pretendido). Lo mismo se aplica a la teoría de |: es el problema de la no categoricidad de las teorías axiomatizadas en lógica de primer orden.[9] La misma noción de finitud (prototipo de concepto que todos, clásicos o constructivistas, creemos captar intuitivamente) no es formalizable en primer orden. El matemático en activo está habituado a formular las teorías que le interesan en el marco de la teoría de conjuntos, pero no trabaja dentro de la teoría de conjuntos axiomática; esto le llevaría de nuevo a la existencia de modelos no estándar, a la paradoja de Skolem, etc. [(Ver los esfuerzos de Enriques y Mazurkievicz por comprender estos asuntos en las conversaciones de Zurich, Skolem [1970], 477–82).]

Otra dificultad clarísima que encuentra el formalismo es que hace incomprensible la historia de la matemática. El imperativo formalista, para la práctica matemática, sería: estudiar todos los sistemas formales consistentes. Pero los matemáticos nunca se han guiado por esa máxima, nunca han estudiado sistemas arbitrarios, sino sólo sistemas *interesantes* en conexión con el conocimiento matemático preexistente. Ni siquiera en la época del formalismo se han investigado sistemas formales arbitrarios: sólo se estudian sistemas que surgen de manera natural a partir de problemas, resultados y teorías precedentes; sólo se estudian ciertas estructuras de interés matemático, entre las infinitas estructuras posibles. Pero una filosofía de la matemática ¿no debería aclarar en qué puede consistir eso del 'interés matemático'? (y el problema de qué es 'interesante' nos llevaría de nuevo a cuestiones cercanas a la espinosa 'intuición').

Además, llamar 'matemáticos' a los autores de antes del siglo XX sería, estrictamente hablando, un abuso lingüístico. El enfoque formalista no permite entender a qué se ha llamado 'matemática' antes de (digamos) 1920, ni qué es lo que ha guiado el desarrollo de las ideas de los 'matemáticos' desde Grecia. No se entiende tampoco por qué

qué pasa si se aplica el planteamiento formalista habitual respecto a CH a, por ejemplo, el axioma de completud o el axioma de inducción antes de 1850??

Estamos ante la situación descrita por Dieudonné (ver cita al principio): el matemático en activo es platónico en días de trabajo y formalista los domingos. Dicen Davis y Hersh [1982, 247] que el platonismo es la fe de (casi) todos los matemáticos, pero que se trata de una religión oculta ejercitada en privado.

El enfoque abstracto y el planteamiento formalista ganaron la batalla, la disputa de los fundamentos, no porque se demostrara fehacientemente su validez, sino porque garantizaban mejor la libertad de acción del matemático. El formalismo es una ideología muy adecuada para el matemático abstracto: le garantiza *libertad* en la postulación de objetos y estructuras, y sobre todo le asegura una *autonomía* total en la decisión acerca de lo que es aceptable y lo que no en el campo de la matemática. El formalismo es, así, la ideología más conveniente para los

[9] Esto tiene otra consecuencia: una demostración de consistencia para | garantizaría la existencia de algún modelo de los axiomas, pero éste no tiene por qué ser el modelo pretendido, porque los axiomas en primer orden no caracterizan | categóricamente. (Agradezco a Ignacio Jané llamar mi atención sobre este punto, cuyas consecuencias podrían llevarse más lejos, aunque no lo haremos aquí.)

miembros de una comunidad matemática autónoma, para los representantes de una disciplina que pretende ser plenamente autosuficiente.[10]

Pero volvamos a la idea de Cantor de una existencia *inmanente*; según esta, todo lo que exige el matemático es la aceptabilidad en el dominio del pensamiento puro. Ya en [1872, 85] decía Dedekind que aún si supiéramos a ciencia cierta que el espacio físico (real) es discontinuo, "nada nos podría impedir, si así lo quisiéramos, hacerlo continuo en el pensamiento rellenando sus lagunas". La aceptabilidad de nociones como la del infinito o del continuo es independiente, en opinión de estos autores, de si existe algo real que sea continuo. En esta línea, se podría tratar de comprender la noción de existencia matemática empleada en la matemática moderna (§1) como una postulación de objetos en cuanto admisibles en el reino del pensamiento.

El propio Hilbert, en sus escritos sobre fundamentos, enfatizaba que la matemática moderna introduce continuamente *elementos ideales*. Al decir esto tenía ejemplos concretos en mente, como los puntos en el infinito de la geometría proyectiva o los números ideales de Kummer. Pero apuntaba también a ese planteamiento según el cual el dominio de la matemática es el reino del pensamiento puro. Zermelo, que fue su discípulo, afirmó en el mismo espíritu [1930, 43] que la consistencia de los axiomas del sistema ZF entraña "la *existencia* (matemática, es decir, ideal)" de modelos para la misma. En la tradición de Dedekind, Cantor y Hilbert, existencia matemática no es más que existencia ideal. Este es el planteamiento que motivó la equivalencia hilbertiana *consistencia* ↔ *existencia*: porque en el dominio del mero pensamiento es admisible todo aquello que cabe pensar sin contradicción.

> El problema filosófico fundamental en relación con la matemática moderna o abstracta sería aclarar qué quiere decir eso y, sobre todo, cómo algo meramente postulado puede presentarse como objetivo. Elementos hipotéticos o de construcción simbólica en la teorización humana.

Así que, a fin de cuentas, el matemático abstracto se arroga la máxima libertad a la hora de asumir objetos y estructuras como existentes independientemente de nuestras construcciones (y por tanto, independientemente de lo que podríamos definir paso a paso, de modo efectivo, a partir de un dominio limitado de objetos y relaciones dados, p.e. la aritmética elemental). Volvemos una vez más a la idea de Bernays: la matemática moderna investiga relaciones que se dan entre objetos postulados, asumidos como existentes independientemente de nuestras construcciones. Desde el punto de vista histórico, podemos ver esa característica como una herencia del elemento no-constructivo que había en la matemática tradicional. Solo que antiguamente se tenía la creencia (que muchos calificarían de metafísica) de que existen magnitudes continuas en la realidad física, mientras que ahora pocos piensan (o pocos se atreven a decir) que haya una relación inmediata entre la matemática y la realidad.

3. Grados de platonismo interno.

En realidad, la cuestión del platonismo interno no se plantea en términos de todo o nada. Caben múltiples posiciones que desarrollarían una gama de compromisos platónicos crecientes [Bernays 1935]. Los polos extremos serían un constructivismo radical, al modo de Kronecker y Brouwer, que elimina cualquier elemento platónico; y un platonismo extremo, que postularía un mundo ideal conteniendo todos los objetos y relaciones de los que podría ocuparse la matemática. La primera posición es defendible, aunque limita terriblemente las posibilidades teóricas, pero la segunda es inadmisible, tal como mostraron las paradojas (en especial la de

[10] A este nivel, pues, el de explicar por qué (históricamente) ha triunfado el formalismo, me parece muy acertada una explicación sociológica. Pero conviene decir que, en general, estoy muy lejos del sociologismo con respecto a la matemática o la ciencia en general.

Russell y Zermelo).[11] Si aceptamos los conceptos habituales de conjunto y función en toda su generalidad, no puede hablarse de una totalidad que abarque todos los objetos matemáticos, pues esto nos lleva a una contradicción. Esto hizo posible que Zermelo [1908] convirtiera la paradoja mencionada en una demostración rigurosa de la no existencia de un conjunto universal.

Ahora bien, las paradojas solo muestran la inadmisibilidad del platonismo extremo. Fuera de esta limitación, cualquier género de platonismo es (hasta donde sabemos) admisible en el sentido de no llevar a contradicción. Los tipos de compromiso platónico más importantes son, esencialmente, solo dos [Bernays 1935, 63–64]:

1. El supuesto más débil consiste en admitir el infinito actual en su forma más elemental, la *totalidad de los números naturales*, como algo que goza de existencia objetiva. Al hacerlo, nos vemos llevados a admitir el principio de tercio excluso para los naturales: dada una propiedad aritmética, o bien la propiedad se aplica a todos los naturales, o bien existe un número de ⎤ que no la cumple. (Este principio no resulta natural si no se asumen como preexistentes, en algún sentido, *todos* los números.)

2. El supuesto más fuerte consiste en la admisión de las nociones de conjunto y función tal como se usan en la matemática moderna: lo que suele llamarse las nociones *abstractas*, o la idea de conjuntos y funciones *arbitrarios*. Se trata, por ejemplo, de hablar de conjuntos numéricos (subconjuntos de ⎤), o sucesiones de números, o funciones φ: ⎤ → ⎤, completamente al margen de posibilidades efectivas de definición. Las leyes de formación y las definiciones que se dan para ejemplos particulares de conjuntos o funciones se contemplan, desde esta perspectiva, sólo como métodos de determinación de objetos que existen independientemente.

Por supuesto, caben otras opciones, habitualmente exploradas solo por expertos en fundamentos: la misma opción (2.) que acabo de señalar no exige adoptar el sistema Zermelo–Fraenkel de teoría de conjuntos, sino que (como ha señalado Dieudonné) podríamos eliminar el Axioma de Reemplazo y debilitar el de Elección dejándolo en su versión numerable. Por otro lado, se han propuesto diversos sistemas todavía más débiles (por ejemplo el Σ de Wang), y los expertos en teoría de conjuntos dedican sus esfuerzos a explorar compromisos mucho más fuertes (axiomas de infinitud fuertes, grandes cardinales). Pero estas opciones alternativas no tienen, de momento, grandes implicaciones para la práctica habitual, a diferencia de las dos que hemos resaltado, siguiendo a Bernays [1935].

En el momento en que Bernays presentó estas ideas en su clarificador artículo, ya existían buenos ejemplos de las diversas posturas mencionadas. Kronecker había planteado, y Brouwer desarrollado, el punto de vista constructivista estricto, que trata la noción de infinito en el sentido potencial, y nunca en el actual; Dedekind y Russell, mientras tanto, daban ejemplos de platonismo extremo con su aproximación ingenua a la teoría de conjuntos. La interesante posición esbozada en (1.) fue, de hecho, adoptada por Hermann Weyl en su libro *Das Kontinuum* [1918]. Weyl aplicaba la lógica clásica cuantificando sobre el dominio de los naturales, pero se negaba a admitir subconjuntos infinitos arbitrarios de ⎤. Su argumento era que la característica principal de lo infinito es ser *inexhaustible*, y por eso mismo no puede decirse que exista una analogía entre lo finito y lo infinito. Dado un conjunto finito, podemos razonar asumiendo subconjuntos arbitrarios suyos, porque siempre es posible (en principio) formar dichos subconjuntos seleccionando elemento por elemento. Esto es, justamente, lo que según Weyl (y otros autores) no se puede hacer en el caso infinito, de ahí que sólo podamos hablar de un subconjunto infinito de ⎤ cuando disponemos de una propiedad que lo defina. Y para formar propiedades o relaciones debemos partir de las propiedades y relaciones básicas de la aritmética.

[11] Se trata de la contradicción a que lleva admitir la existencia de un conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos, $Z = \{x : x \notin x\}$. Es fácil ver que, en ese caso, $Z \in Z$ si y solo si $Z \notin Z$. Zermelo descubrió la contradicción independientemente de Russell (y algo antes), aunque fue éste quien la publicó en 1903.

Por razones similares, Weyl estaba de acuerdo con Poincaré en que se deben evitar las definiciones impredicativas. Desarrollando coherentemente esas ideas, Weyl pasaba a tratar la teoría de | y las cuestiones del análisis. Pensemos en | definido a través de cortaduras, al modo de Dedekind; si reformamos esta idea en el sentido de Weyl, no dispondremos de cortaduras arbitrarias, y sólo alcanzaremos a definir aquellos números reales que corresponden a una ley aritmética. Ya no tenemos un conjunto | completo, sino el correlato de un conjunto de leyes aritméticas; nos alejamos de la idea intuitiva del continuo, una idea de origen geométrico. Weyl conseguía rehacer buena parte del análisis, pero desde luego tenía que renunciar a cosas tan básicas, en la concepción clásica, como el teorema de la cota superior. Obtenía una aproximación 'atomizada' a | y una versión predicativa del análisis.[12]

En cuanto a la versión fuerte del platonismo (2.), existían múltiples ejemplos de ella, ya que —como afirmaba Bernays en la cita que dimos al principio— se convirtió en la tendencia dominante en el siglo XX. Sus orígenes pueden trazarse ya en Dirichlet y Riemann, haciéndose explícita en Dedekind, Cantor y Hilbert, por citar solo algunos de los grandes nombres, y quedando formalizada en el sistema Zermelo–Fraenkel. Para esa concepción plenamente general o arbitraria de conjuntos y funciones, Bernays acuñó otra expresión que ha tenido éxito, diciendo que dichos conceptos son entendidos en sentido 'cuasi-combinatorio'. Es decir, se establece una analogía entre lo finito y lo infinito, tal como lo hemos sugerido ya al hablar de Weyl: en el caso infinito también podemos, por analogía con lo finito, asumir subconjuntos arbitrarios. Casi todos los autores, hacia 1900, admitían que puede determinarse un conjunto infinito indicando una 'ley de formación' o propiedad característica de sus elementos. El matemático abstracto va más lejos y asume que no hay nada imposible, ni mucho menos contradictorio, en la idea de una cantidad infinita de determinaciones perfectamente independientes unas de otras. Es fácil darse cuenta de que el Axioma de Elección es una consecuencia natural de ese enfoque, un caso paradigmático de planteamiento abstracto.

En su artículo, Bernays dedicaba la mayor parte del espacio a discutir las virtudes y defectos de la matemática platónica por comparación con la matemática constructiva. En su opinión, ambas tiene un papel que desempeñar, y sería antinatural el forzarse a prescindir de la una o la otra [1935, 75]. En su discusión, mostraba cómo las distintas ramas de la matemática sugieren uno u otro nivel de platonismo, y concluía esta parte diciendo:

> A modo de sumario podemos decir que el intuicionismo es adecuado para la teoría de números; el método semi-platónico que emplea la idea de una totalidad de los números enteros, pero evita los conceptos cuasi-combinatorios, es adecuado para la teoría de los números reales; y el método platónico habitual se ajusta a la teoría geométrica del continuo. Esta situación no es de ningún modo sorprendente; pues al matemático actual le resulta familiar el aplicar en cada disciplina sólo los presupuestos que sean necesarios para ella. [Bernays 1935, 68]

Como puede verse, Bernays afirmaba que la idea del continuo es de origen geométrico (o quizá, añadiríamos, cinemático), por más que en el campo del análisis se traduzca a un lenguaje aritmético-conjuntista [1935, 74]. La matemática constructivista, que evita el platonismo de la forma más radical, no representa más que una tendencia minoritaria o una rama particular: la mayor parte de la matemática actual es infinitista y platónica, en el sentido del platonismo interno. Además, a consecuencia de la familiaridad con el análisis y con nociones tan básicas como puede serlo la de número real (el continuo), al matemático le resulta incluso artificial cuestionar el Axioma del Infinito.[13]

[12] Los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell estaban cerca del platonismo débil, tal como lo presentó Weyl, pero 'emborronaron' su planteamiento al admitir el famoso (o infame) axioma de reducibilidad y al empeñarse en defender la posición logicista. Weyl afirma que llegó a sus concepciones sin haber leído a Russell.

[13] Sin embargo, el polémico Axioma de Elección puede verse, simplemente, como una consecuencia natural de emplear las nociones de infinito actual y de conjunto (arbitrario o cuasi-combinatorio).

4. *Platonismo filosófico o externo.*

¿Cómo puede entenderse y justificarse el platonismo (interno) de la matemática moderna? Ante esta pregunta cabe una diversidad de posiciones, algunas de las cuales serán meramente pragmáticas, argumentando, por ejemplo, que el análisis es extraordinariamente útil como herramienta para la descripción científica del mundo físico. Otras posiciones pueden llamarse teóricas o quizá filosóficas, y entre ellas (aunque sólo como una entre muchas) encontramos por fin el platonismo externo. En este apartado consideraremos algunas versiones del platonismo filosófico, comenzando por Platón, y deteniéndonos sobre todo en los clásicos planteamientos de Cantor. Pero el platonismo, como tantos otras enfoques, ha sido refinado y desarrollado durante el siglo XX, y hoy encontramos versiones del mismo que son mucho más complejas. Valgan como ejemplos el platonismo [crítico?, hipotético?] de Gödel, el llamado 'platonismo de compromiso' de Quine, y el platonismo naturalista de Maddy. No tendría sentido intentar aquí un resumen de todos esos enfoques, así que me limitaré a comentar las ideas de Gödel, enfatizando lo que tienen de novedoso y moderno.[14]

Antes de comenzar, vale la pena decir que, en realidad, el platonismo encaja a la perfección con una interpretación ingenua de la experiencia normal del matemático en activo. Éste tiene, naturalmente, la sensación de estar *descubriendo* resultados acerca de objetos de un tipo peculiar (superficies, funciones, espacios, anillos) que desde luego ofrecen resistencia: no todo vale, ni muchísimo menos. Es natural —aunque no forzoso— interpretar la objetividad de la matemática como equivalente a la existencia (real, en algún sentido) de objetos matemáticos. Por ello no es de extrañar que, como se ha dicho tantas veces, los investigadores matemáticos adopten una posición de platonismo los días hábiles y formalismo los domingos. Uno de los integrantes de Bourbaki explicaba la posición oficial del grupo diciendo:

> En lo relativo a fundamentos, creemos en la realidad de la matemática, pero, por supuesto, cuando los filósofos nos atacan con sus paradojas corremos a escondernos tras el formalismo diciendo: "La matemática es sólo una combinación de símbolos carentes de significado", y entonces sacamos los capítulos 1 y 2 [de los *Eléments de mathématiques*] sobre teoría de conjuntos. Finalmente nos dejan en paz y podemos volver a nuestra matemática, haciéndola como siempre, trabajando en algo real. [Dieudonné 1970]

Dicho esto, comencemos por el principio.

4.1. De Platón a Cantor.

Desde luego, el platonismo filosófico no surgió históricamente del intento de responder a la pregunta sobre la matemática abstracta que hacíamos más arriba. Su origen está, más bien, en cuestiones muy elementales como pueden ser las siguientes: ¿qué son los números? ¿qué tipo de realidad tienen? O una típica cuestión griega: dado que los triángulos y los círculos que podemos encontrar en la naturaleza, o construir nosotros mismos, no son figuras geométricas perfectas, ¿qué es un triángulo geométrico? ¿dónde se encuentra?

Platón, empeñado en la búsqueda de una auténtica realidad que se ocultaría detrás del mundo de apariencias y opiniones que nos rodea, postuló la existencia de un Mundo de las Ideas o Formas (recordemos el famoso mito de la caverna, en la *República*). Las cosas perceptibles deben su existencia y su ser a las Formas de las que participan; además,

> Platón afirmó que entre las cosas sensibles y las Formas existen los entes matemáticos, que se diferencian de los sensibles por ser eternos e inmóviles, y de las Formas por haber muchos individuos similares, mientras la Forma es en sí misma única y singular. (Aristóteles, *Metafísica*, libro A, cap. 6)

[14] Del lógico y filósofo Quine puede verse su [1953, caps. 1 y 7] y [1968, caps. 2 y 4], así como también las exposiciones de Maddy en [1990] y [1998].

Las figuras matemáticas y los números se cuentan entre aquellas nociones accesibles a nuestra razón que son más próximas al verdadero mundo de las Formas.[15]

Como es bien sabido, Aristóteles rechazó la distinción de su maestro entre un universo de auténticas realidades y un universo de apariencias. Según él, la unidad o la circularidad se abstraen de los objetos materiales, pero no tienen existencia independiente de esos objetos. Conviene recordarlo aquí, porque algunas posiciones filosóficas que se califican de 'platónicas' están, en realidad, más cerca del aristotelismo.

Las ideas de Platón adquirieron tintes nuevos al mezclarse con la tradición judeo-cristiana. San Agustín situó las Ideas en la mente de Dios, igual que hacía Cantor con los números en la carta a Hermite citada al principio. Y, por cierto, eso llevó a San Agustín a afirmar que la totalidad infinita de los números naturales existe en acto en el intelecto divino, porque ¿quién será tan demente para decir que la ciencia de Dios se detiene en un cierto número *n*, por grande que sea?[16] La idea de Dios siguió presente en muchos otros autores que atribuyeron existencia real a los objetos de la matemática.

Así pues, el platonismo filosófico postula una bifurcación de la realidad: existe una realidad física perceptible por los sentidos, y una realidad matemática perceptible a la intuición, a un supuesto 'ojo de la mente'. La mayoría de los platónicos adoptan un *apriorismo*; como dice Putnam:

> Desgraciadamente, la creencia en la objetividad de la matemática ha ido, en general, junto con la creencia en los 'objetos matemáticos' entendidos como una realidad incondicionada y no física, y junto con la idea de que el tipo de conocimiento que tenemos en la matemática es estrictamente *a priori*. [Putnam 1975, 60]

La intuición que se postula debe hacer que tengamos un conocimiento cierto y seguro de las proposiciones matemáticas, que son, pues, *verdades* en sentido estricto. Ni que decir tiene que el desarrollo de la matemática en el último siglo y medio ha planteado graves dificultades a un planteamiento tan ingenuo. Pero ya veremos que hay versiones sofisticadas del platonismo, como la de Gödel.

Ya hemos visto que el platonismo seguía vivo entre los grandes matemáticos del XIX, por ejemplo en Hermite, así como en Frege y otros.[17] Pero de todos los platónicos de aquél siglo, el más famoso es sin duda Cantor, inventor (¿o descubridor?) de la teoría de conjuntos transfinitos. Según vimos, Cantor distinguió dos sentidos de "realidad", el *inmanente* que es el único que compete a la matemática, y el *transiente* que incumbe a las ciencias (y a la metafísica). Pero enseguida de fijar la distinción seguía escribiendo una frase bastante llamativa:

> Desde la base totalmente realista, pero a la vez no poco idealista, de mis consideraciones, no admite para mí ninguna duda que estas dos formas de realidad siempre se encuentran, en el sentido de que una noción que haya que caracterizar como existente en el primer sentido, posee siempre en algún respecto e incluso en infinitos una realidad transiente, cuya determinación constituye generalmente una de las tareas más fatigosas y difíciles de la metafísica. [Cantor 1883, 181]

Lo que existe en matemáticas, existe también en la mente divina, y aun más, existe en la naturaleza. Por este motivo, requería que no sólo se investigaran las relaciones matemáticas entre los números transfinitos, sino también sus manifestaciones en la naturaleza [1883, 177, 205], y de hecho intentó avanzar por este camino en los años siguientes (ver [Ferreirós 1993], cap. 10). Conviene señalar que no hay por qué atribuir estos párrafos de Cantor a la locura; cuando los escribió faltaban unos 2 años para que sufriera su primera crisis maníaco-depresiva,

---

[15] Parece ser que, en sus enseñanzas orales, Platón llegó a afirmar que las Ideas son números, aunque no los números matemáticos, sino Números ideales; estos Números-Idea se engendrarían a partir del Uno y de la Díada de lo grande y lo pequeño. La fuente de estas afirmaciones es la *Metafísica* de Aristóteles.

[16] Agustín de Hipona, *La ciudad de Dios* (escrito hacia el año 420), citado por Cantor [1932, 401].

[17] Resulta también fácil dar ejemplos de otras posturas, como pueden ser los casos de Riemann y Dedekind (ver [Ferreirós 1993], cap. 10).

y estaba en lo más alto de su creatividad matemática: fue justamente cuando introdujo los números ordinales transfinitos y demostró el teorema de Cantor–Bendixson.

Para Cantor, pues, los conjuntos y los números transfinitos existían en un reino platónico (o mente divina) y en la naturaleza, lo que sin duda le salvaba de sufrir dudas constructivistas al estilo de Kronecker. Cantor tenía plena confianza en la *realidad* del infinito actual, en la *existencia* de los conjuntos. Y en su mente había una relación directa entre sus nuevas nociones y las ideas de Platón (así como las de Leibniz y Spinoza); dando por primera vez una definición de conjunto, escribió:

> Por 'variedad' o 'conjunto' entiendo en general cualquier Muchos que puede concebirse como Uno, e.d. cualquier colección de elementos determinados que puede ser reunida en un todo mediante una ley; y con ello creo definir algo emparentado con el γ⊃∗≅H o ∅∗Ξ∀ platónico. [Cantor 1883, 204]

Otro modo en que enfatizó esta posición ontológica y epistemológica fue a través de las citas que encabezaban sus dos últimos artículos. Con Newton, decía: "hypotheses non fingo", e incluía el siguiente texto de Francis Bacon:

> Pues no damos leyes al intelecto o a las cosas a nuestro arbitrio, sino como escribas fieles las recibimos y copiamos de la voz revelada de la naturaleza misma. [Cantor 1895, 282]

Ya en 1884, le había escrito a Mittag-Leffler que con respecto al contenido de sus trabajos era solo un escribano, un funcionario.[18] Dios mismo, o la Naturaleza, parecía ser la inspiración de sus novedosas y radicales creaciones.

Tales ideas tuvieron como consecuencia que, ante el descubrimiento de las paradojas del conjunto de los ordinales y el conjunto de los alefs, Cantor ni siquiera se inmutara. Vio enseguida que las paradojas suponían un grave problema para otros autores interesados en la teoría de conjuntos, especialmente para los planteamientos ingenuos de los logicistas. Pero a Cantor no le parecían "antinomias" o contradicciones, sino resultados bastante naturales que incluso trató de aprovechar para demostrar el teorema de buen orden. Lo transfinito, en su opinión, se sitúa en el terreno intermedio entre lo finito y el Absoluto divino. Lo absoluto, Dios, no es comprensible para la razón humana, por lo que no es matematizable [Cantor 1883, 205]. Y las paradojas tenían que ver precisamente con totalidades absolutas, por lo que no era extraño que el intento de razonar matemáticamente sobre ellas llevara a contradicciones. Como vemos, a lo largo de toda su carrera, el platonismo fue para Cantor un punto de apoyo importante, al darle confianza para desarrollar sus innovadoras teorías sobre el infinito e inmunizarle de posibles dudas escépticas.

4.2. Gödel.

Similares posiciones de corte platónico pueden encontrarse en Gödel, quien también indicó que el platonismo fue crucial para que pudiera llegar a resultados del calibre de su célebre primer teorema de incompletud, o de la independencia del Axioma de Elección y la Hipótesis del Continuo [Wang 1987]. Algunos han visto en ello argumentos no poco impresionantes a favor de esa posición filosófica. Pero lo que nos interesa aquí es que la versión del platonismo que da Gödel se distingue por ser ciertamente más sutil que la de Cantor.

Gödel plantea ciertas similitudes entre la teorización científica y la teorización en matemáticas, anticipándose a puntos de vista propios de lo que se ha llamado "cuasi-empirismo": un nombre que, por cierto, yo eliminaría, sustituyéndolo por hablar de una *concepción hipotética* de (partes de) la matemática. En realidad, la idea de que en las teorías matemáticas hay elementos hipotéticos fue otro de los resultados del debate sobre fundamentos,

[18] Año en que introdujo varias nociones clave de la teoría de conjuntos de puntos (incluyendo la de contenido exterior) y demostró que los conjuntos perfectos (y por tanto los cerrados no numerables) tienen la potencia del continuo.

aceptado de manera muy general. Se encuentra en autores tan diferentes como el empirista Russell, Hilbert, el constructivista Weyl, von Neumann, y Gödel.

En su trabajo sobre la lógica matemática de Russell, Gödel se atreve a comparar la aceptación de los conjuntos "como objetos reales" con la aceptación de los cuerpos físicos:

> las clases y los conceptos pueden concebirse como objetos reales … Me parece que la aceptación de tales objetos es tan legítima como la aceptación de los cuerpos físicos y que hay tantas razones para creer en la existencia de aquéllos como en la de éstos. Son necesarios para obtener un sistema de matemática satisfactorio en el mismo sentido en que los cuerpos físicos lo son para una teoría satisfactoria de nuestras percepciones sensibles, y en ambos casos es imposible interpretar los enunciados acerca de estas entidades como enunciados acerca de «datos»… [Gödel 1944, 310]

Conviene tener en cuenta, aquí, que Gödel está aceptando (con Russell) que los objetos físicos no son un 'dato', sino entidades teóricas que postulamos para dar cuenta de los fenómenos percibidos. Algo parecido sucedería con los conjuntos.

Gödel cita muy positivamente la idea de Russell de comparar los axiomas de la matemática con las leyes naturales, y la evidencia matemática con la percepción sensible. En cuanto a los datos básicos de la evidencia matemática, el ejemplo obvio al que Gödel vuelve una y otra vez son las proposiciones de la teoría finitaria de números, que Hilbert tomó como la piedra de toque para las demostraciones de consistencia absoluta. Así, la 'evidencia' matemática se limitaría a elementos tales como los números naturales y sus leyes, que servirían de base para un proceso de desarrollo teórico en el que se habrían ido introduciendo elementos cada vez más abstractos. Dice:

> los axiomas no tienen por qué ser necesariamente evidentes por sí mismos, sino que su justificación estriba (como en la física) en el hecho de que permiten que estas "percepciones sensibles" sean deducidas; esto no excluiría, por supuesto, que tuviesen también una suerte de plausibilidad intrínseca similar a la que se da en física. Creo que (en el supuesto de que "evidencia" se entienda de un modo suficientemente estricto) este punto de vista ha sido ampliamente justificado por posteriores desarrollos y se puede esperar que aún lo sea más en el futuro. [Gödel 1944, 300]

Gödel admite que al plantear un método hipotético-deductivo en conexión con la matemática, ésta puede perder buena parte de su "absoluta certeza" [1944, 300], pero insiste en que las hipótesis de que se trata nunca son puramente convencionales.

En un trabajo posterior, Gödel afirmaría que lo "dado" que subyace a la matemática está muy relacionado con elementos abstractos contenidos en nuestros conceptos empíricos, como es el concepto mismo de objeto. El que tales "datos" no sean de origen perceptual no implica subjetividad:

> Pueden representar más bien un aspecto de realidad objetiva, pero, en oposición a las sensaciones, su presencia en nosotros puede deberse a otro tipo de relación entre la realidad y nosotros mismos.[19] [Gödel 1964, 360]

Ya hemos visto que el platonismo tiende a enlazar con una concepción apriorista del conocimiento matemático; en el mismo artículo, Gödel llega a decir:

> a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible. [Gödel 1964, 359]

Desde luego, este tipo de ideas resultan ya demasiado exageradas y muy difíciles de compartir. Lo más interesante es quedarse con la idea de que Gödel no era un platónico ingenuo, que

[19] Esta frase permitiría conectar con una teoría naturalista del conocimiento matemático, y Maddy [1990] trata de aprovechar esta circunstancia.

pensara que todo lo que afirma (por ejemplo) la teoría de conjuntos se limita a describir una realidad exterior. Su posición era más sofisticada, admitiendo que entre los principios de la teoría hay elementos que se introducen por razones puramente teóricas, como pueden ser la búsqueda de generalidad explicativa, e incluso motivos de simplicidad y conveniencia.

4.3. Otras perspectivas.

No es éste el lugar para tratar de desarrollar una filosofía de la matemática propia, pero no me gustaría abandonar el tema sin esbozar muy rápidamente una perspectiva alternativa. Creo que se puede aceptar y tratar de comprender el platonismo interno desde un punto de vista que no adopte el platonismo externo. Parece de sentido común que las nociones abstractas no existen al margen de la mente humana, y que en este sentido las teorías matemáticas son simplemente una creación humana. Asimismo es de sentido común que el pensamiento va más allá de lo dado y lo perceptible, y también de lo que puede ser definido atendiendo a requisitos constructivistas. No hay nada de extraño en pensar que somos capaces de elaborar "universos ideales", por así decir, que solo existen en el mundo del pensamiento, y a los que nos referimos usando un lenguaje construido como el lenguaje habitual: nos referimos a ellos *como si* gozaran de existencia real.

Esta es, en realidad, una concepción que puede encontrarse en Riemann [1868], cuando reflexionaba sobre la geometría y sugería que el sustrato real (físico) de la idea de espacio podría ser discontinuo e incluso finito. Su amigo Dedekind venía a decir lo mismo en una frase que ya hemos citado: el espacio físico puede muy bien ser discontinuo, y esto no nos impediría pensar en un espacio continuo e incluso representar dentro de él los fenómenos físicos. Ningún físico es tan ingenuo como para pensar que todos los detalles de sus teorías y modelos matemáticos son realistas, lo que implica la libertad de pensamiento a la que antes me refería.

A fin de cuentas, no hago más que sugerir que las concepciones propuestas por Riemann, Dedekind y Hilbert son viables. Relación con la idea de que en matemáticas se investigan posibilidades abstractas, estructuras posibles: Putnam, enfoque modal.

Se trata de una perspectiva que admite y casi requiere la concepción hipotética que hemos visto a propósito de Gödel, elaborándola en una dirección muy distinta. Pero, como saben bien los físicos, las hipótesis interesantes nunca son puramente convencionales ni arbitrarias, y esto es aun más cierto en el caso de las matemáticas.[20] Por eso, el principal problema al que se enfrenta una posición como ésta, si se hace en serio el esfuerzo de intentar convertirla en una teoría viable, es el de la *objetividad* de la matemática. Hay que explicar cuál es la base de dicha objetividad, teniendo en cuenta que se está planteando una objetividad sin objetos reales (solo con objetos mentales o ideales). Esto implica la necesidad de explicar cómo distintas personas pueden, en determinados ámbitos del pensamiento, alcanzar un acuerdo casi perfecto.[21] Ahora bien, sólo el solipsismo o el subjetivismo más extremos podrían hacer pensar que no hay ninguna base para un acuerdo. Si pensamos en el hombre como un ser biológico que desarrolla sus habilidades físicas y mentales en un mundo de objetos, y que maneja el lenguaje (elemento intersubjetivo y social donde los haya), parece haber ya una base mínima para avanzar.[22]

Dicha concepción podría llamarse "naturalista", porque trata de entender la matemática como un desarrollo, todo lo sofisticado que se quiera, de las capacidades naturales adquiridas por los miembros de la especie humana. Ahora bien, hay que decir que el término *naturalismo* está demasiado de moda entre filósofos en los últimos años, con lo que se emplea de manera bastante abusiva y, sobre todo, ambigua. En concreto, el enfoque naturalista que he esbozado está muy lejos del naturalismo de Maddy [1998].

---

[20] De hecho, uno de los problemas para ésta y cualquier otra concepción es explicar la especificidad del conocimiento matemático.

[21] En el siguiente sentido: también los constructivistas admiten que la demostración habitual de (por ejemplo) la existencia de una clausura algebraica para un cuerpo cualquiera, es correcta según los estándares de la matemática abstracta.

[22] Estas ideas van, inicialmente al menos, en la dirección de la epistemología de Piaget. He tratado de elaborarlas un poco en un trabajo anterior [Ferreirós 1997], aunque me temo que de una manera demasiado telegráfica.

Referencias

Bernays, P. 1935. Sur le platonisme dans les mathématiques, *L'Enseignement Mathématique* **34**, 52–69. También en [Bernays 1976] y versión inglesa en P. Benacerraf & H. Putnam, eds., *Philosophy of Mathematics: selected readings*, Cambridge University Press, 1983.
— 1976. *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Cantor, G. 1883. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, en [Cantor 1932], 165–208; traducción inglesa en [Ewald 1996], vol.2.
— 1895. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, en [Cantor 1932], 282–351.
— 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Berlin, Springer; reimpresión: Hildesheim, G. Olms, 1966.

Curry, H. B. 1951. *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North-Holland.

Davis, P. J. & R. Hersh. 1982. *Experiencia matemática*, Barcelona, Labor/MEC, 1989.

Dedekind, R. 1872. *Continuidad y números irracionales*, en [Dedekind 1930/32], vol.3, 315–334; versión española en [Dedekind 1998].
— 1888. *¿Qué son y para qué sirven los números?*, en [Dedekind 1930/32], vol.3; versión española en [Dedekind 1998].
— 1998. *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*, Madrid, Alianza/UAM, 1998.

Dieudonné, J. 1970. The Work of Nicolas Bourbaki, *American Mathematical Monthly* **77**, 134–45.

Ewald, W.B. 1996. *From Kant to Hilbert*, 2 vols., Oxford University Press.

Ferreirós, J. 1993. *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854–1908*, Publicaciones Univ. Autónoma de Madrid.
— 1997. 1, 2, 3, ... ω: historia, epistemología y matemática, *Actas II Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, Publicaciones Univ. Autónoma de Barcelona.

Gödel, K. 1944. La lógica matemática de Russell, en *Obras completas*, Madrid, Alianza, 1980.
— 1964. ¿Qué es el problema del continuo de Cantor?, en *Obras completas*, Madrid, Alianza, 1980.

Hilbert, D. 1899. *Fundamentos de la geometría*, Madrid, CSIC, 1991.
— 1900. Über den Zahlbegriff, *Jahresbericht Deutschen Math.-Vereinigung* **8**; en [Hilbert 1899], apéndice 6.

Maddy, P. 1990. *Realism in Mathematics*, Oxford Univ. Press.
— 1998. *Naturalism in Mathematics*, Oxford Univ. Press.

Meschkowski, H. 1983. *Georg Cantor. Leben, Werk und Wirkung*, Mannheim, Bibliographisches Institut.

Putnam, H. 1975. What is mathematical truth?, en *Mathematics, matter and method*, Cambridge Univ. Press, 1975.

Quine, W. V. 1953. *Desde un punto de vista lógico*, Barcelona, Ariel, 1962.
— 1969. *La relatividad ontológica y otros ensayos*, Madrid, Tecnos, 1974.

Riemann, B. 1868. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, en *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, Teubner, 1892. Versión inglesa en [Ewald 1996], vol. 2; versión española en preparación (CSIC).

Wang, H. 1987. *Reflexiones sobre Kurt Gödel*, Madrid, Alianza, 1992.

Weyl, H. 1918. *Das Kontinuum*, Leipzig, Veit; reimpresión: New York, Chelsea. Hay versión inglesa.

Zermelo, E. 1908. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I, *Mathematische Annalen* **65**. Versión inglesa en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard Univesity Press, 1967.
— 1930. Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Fundamenta Mathematicae* **16**. Versión inglesa en [Ewald 1996], vol.2.

Putnam [1975] argumenta que la matemática debe ser interpretada en sentido realista (afirmaciones objetivas y *alguna* contrapartida de nociones como 'set' y 'function'); pero que esto no implica que la realidad se bifurque del algún modo (una realidad material y una 'realidad matemática'). Los 'objetos' matemáticos son dependientes de los objetos materiales y, en cierto sentido, son meras posibilidades abstractas (estructuras posibles e imposibles). Así, Putnam habla de realismo sin platonismo, de algo real y objetivo pero no existente; Frege hablaba, inversamente, de objetos matemáticos, pero en el sentido de algo objetivo y no real.

Recurriendo a ese tipo de base naturalista, y aceptando el carácter hipotético —pero no por ello arbitrario— de buena parte de los constructos matemáticos, parece posible elaborar una epistemología compatible con algunas intuiciones del platonismo, pero que supera sus problemas. Entre estos problemas, uno de los más famosos es el llamado *problema del acceso*, o "desafío de Benacerraf": si postulamos la existencia de entidades matemáticas subsistentes, nuestro conocimiento de ellas, nuestro "acceso epistemológico", parece inexplicable. Por supuesto, esto sólo es un inconveniente para versiones fuertes del platonismo, y ni siquiera está claro hasta qué punto las primeras ideas de Gödel (en 1944) dan pie a semejantes pegas.

En lo dicho hasta aquí, los conocedores de Quine habrán encontrado elementos familiares. De hecho, Maddy basa su platonismo de compromiso en ideas de Quine. La diferencia más notable entre los puntos de vista de Quine y Gödel estriba en la famosa tesis holista que Quine ha defendido desde 1952. Quine presupone que, aparte cuestiones de simplicidad y similares, el único criterio posible para juzgar una teoría es el apoyo empírico, aun en el caso de que se trate de una teoría matemática. Gödel, en cambio, acepta algún tipo de "evidencia" característicamente matemática, a la que denomina *intuición*. Esa diferencia entre Gödel y Quine implica que el segundo elimine la tradicional idea de la especificidad del conocimiento matemático. El motivo último se debe encontrar, pues, en que la epistemología de Quine tiene como base un empirismo radical.[23]

[23] "Del mismo modo que la matemática ha de reducirse ... a la lógica y la teoría de conjuntos, así el conocimiento natural ha de basarse de alguna manera en la experiencia sensible" [Quine 1968, 95]. Es un principio "irrebatible" que "la evidencia, cualquiera que ésta sea, que *hay* para la ciencia, *es* evidencia sensorial" (100); y la matemática no es más que una parte del todo de la ciencia.