Warum die Mathematik keine ontologische Grundlegung braucht – Wittgenstein und die axiomatische Methode

Simon Friederich

Universität Göttingen

Zusammenfassung:

Einer weit verbreiteten Auffassung zufolge ist es eine zentrale Aufgabe der Philosophie der Mathematik, eine *ontologische Grundlegung* der Mathematik zu formulieren: eine philosophische Theorie darüber, ob mathematische Sätze wirklich wahr sind und ob mathematischen Gegenstände wirklich existieren. Der vorliegende Text entwickelt eine Sichtweise, der zufolge diese Auffassung auf einem Missverständnis beruht. Hierzu wird zunächst der Grundgedanke der Hilbert'schen axiomatischen Methode vorgestellt, die Axiome als implizite Definitionen der in ihnen enthaltenen Begriffe zu behandeln. Anschließend wird in Anlehnung an einen Wittgenstein'schen Gedanken zur normativen Rolle mathematischer Sprache argumentiert, dass im Kontext der Hilbert'schen Axiomatik mathematische Sätze als Standards für die Verwendung der in ihnen enthaltenen Begriffe dienen und dass dies die Idee einer ontologischen Grundlegung für die Mathematik untergräbt.

1. Einleitung

Der Begriff der *Grundlegung* der Mathematik wird in der Philosophie der Mathematik im Zusammenhang mit unterschiedlichen philosophisch motivierten Zugängen zur Mathematik verwendet. Einer historisch einflussreichen Verwendung zufolge ist er verbunden mit der reduktionistischen Idee einer Zurückführung aller Zweige der Mathematik auf die Begriffe und Sätze einer einzigen Teildisziplin, die beispielsweise aufgrund bestimmter erkenntnistheoretischer Kriterien als ausgezeichnet erscheint.[1] Zahlreiche in der heutigen Philosophie der Mathematik vertretenen Positionen sind als Antworten auf die Frage nach der *Existenz* mathematischer Gegenstände sowie auf die damit verbundene Frage nach der *Wahrheit* mathematischer Sätze konzipiert. Sie sind zwar im Allgemeinen nicht im erwähnten Sinn reduktionistisch, doch lassen auch sie sich als Versuche verstehen, eine Grundlegung– genauer gesagt, eine *ontologische* Grundlegung – für die Mathematik zu formulieren, und zwar insofern sie versuchen, anhand genuin philosophischer, über die mathematische Praxis hinausgehender Kriterien zu entscheiden, ob

1 Wichtige bzw. historisch einflussreiche Versuche, Grundlegungen der Mathematik auf diese reduktionistische Weise zu formulieren, sind der von Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* (Whitehead und Russell 1962) vertretene Logizismus, der mengentheoretische Reduktionismus W. V. Quines (siehe Quine 1960) sowie – je nach Lesart – bestimmte Versionen des kategorientheoretischen Strukturalismus wie etwa die in McLarty 2004 und Landry 2011 vertretenen Positionen. Wittgenstein entwickelt in (BGM III) einen gewichtigen Einwand gegen die philosophische Relevanz reduktionistischer Grundlegungen. Siehe hierzu den ausführlichen Kommentar Mühlhölzer 2010, der im Detail die Hintergründe und Pointen von Wittgensteins Kritik nachzeichnet und diskutiert. Der vorliegende Text konzentriert sich jedoch auf einen anderen Aspekt von Wittgensteins Nachdenken über Mathematik.

mathematische Sätze wirklich wahr sind und mathematische Gegenstände wirklich existieren. Je nachdem, wie eine Position die Fragen nach der Wahrheit mathematischer Sätze sowie der Existenz mathematischer Gegenstände beantwortet, wird sie entweder als „Wahrheitswert-Realismus“ oder „Wahrheitswert-Antirealismus“ beziehungsweise „ontologischer Realismus“ oder „ontologischer Antirealismus“ bezeichnet (Shapiro 2000: 24-33). Beiträge zu Debatten in der heutigen Philosophie der Mathematik verstehen sich nahezu durchweg als Verteidigung eines Standpunkts in den Auseinandersetzungen zwischen Realismus und Antirealismus in ihren unterschiedlichen Formen.

Fragen nach mathematischer Wahrheit und Existenz, wie sie die an ontologischen Grundlegungen interessierten Philosophen diskutieren, unterscheiden sich grundlegend von im Kontext der mathematische *Praxis* relevanten *inner-mathematischen* Fragen. Letztere beziehen sich etwa darauf, ob *bestimmte* mathematische Sätze wahr sind (wie etwa, um berühmte Beispiele zu nennen, die Poincaré'sche Vermutung oder die Goldbach'sche Vermutung) sowie ob *bestimmte* mathematische Gegenstände existieren (zum Beispiel, wie vom „großen Fermat'schen Satz“ verneint, eine natürliche Zahl n > 2, so dass x^n + y^n = z^n für natürliche Zahlen x, y, z). Antworten auf diese inner-mathematischen Fragen lassen sich nur auf Grundlage mathematischer Beweise geben. Fragen nach mathematischer Wahrheit und Existenz, wie sie von den an ontologischen Grundlegungen interessierten Philosophen aufgeworfen werden, zielen hingegen auf Antworten gemäß *externen*, philosophischen Kriterien ab, die sich nicht auf mathematische Beweise reduzieren lassen. Ein Beispiel für eine gemäß derartigen externen philosophischen Überlegungen gegebene Antwort auf die Frage nach der Existenz mathematischer Gegenstände ist die des *Nominalismus*: Nominalisten betrachten mathematische Gegenstände aufgrund ihrer Abstraktheit als erkenntnistheoretisch dubios, bestreiten daher ihre Existenz und vertreten insofern eine Version des „ontologischen Antirealismus“.[2]

Nicht alle Philosophen der Mathematik betrachten das Projekt, eine ontologische Grundlegung für die Mathematik zu formulieren, als ausreichend motiviert. Manche bestreiten etwa, dass außerhalb eines klar umgrenzten (inner-) mathematischen Kontextes überhaupt sinnvoll nach mathematischer Wahrheit und Existenz gefragt werden kann. Auffassungen dieser Art stellen die Vorannahmen in Frage, die den Debatten um ontologische Grundlegungen der Mathematik zu Grunde liegen, und insofern lassen sie gleichsam „die Luft aus ihnen heraus.“ In Anlehnung an das englische Verb „deflate“ („die Luft herauslassen“) werden diese Auffassungen im Folgenden als „deflationäre Lesarten“ der Begriffe „mathematische Wahrheit“ und „mathematische Existenz“ bezeichnet. Ziel des vorliegenden Artikels ist es, mit Hilfe Wittgenstein'scher Überlegungen zur Verwendung

2 Siehe Burgess und Rosen 1997 für einen kritischen, systematischen Überblick über nominalistisch motivierte Versionen des ontologischen Antirealismus.

mathematischer Sprache deutlich zu machen, dass für die Begriffe der mathematischen Wahrheit und Existenz in der Tat deflationäre Lesarten angebracht sind. Dieses Resultat untergräbt die Idee einer ontologische Grundlegung für die Mathematik sowie die darum kreisenden Debatten.

Die verbleibenden Abschnitte dieses Textes gliedern sich wie folgt: Abschnitt 2 stellt die von William Tait vertretene, auf dem Hilbert'schen Zugang zur Axiomatik basierende deflationäre Lesart der Begriffe „mathematische Wahrheit“ und „mathematische Existenz“ vor sowie einen gegen sie gerichteten Einwand. Abschnitt 3 beginnt mit der Beantwortung dieses Einwands und stellt hierfür Überlegungen zur Verwendungsweise von Sätzen in gemäß dem Hilbert'schen Zugang (im Folgenden auch „Hilbert'sche Methode“) verwendeten Axiomensystemen an. In Anlehnung an Wittgensteins Deutung mathematischer Sätze als Regeln wird argumentiert, dass für diese Sätze nicht etwa eine *deskriptive,* sondern vielmehr eine *normative* Rolle charakteristisch ist, insofern sie nämlich als Standards dessen dienen, was als Verwendung der in ihnen auftretenden Begriffe zählt. Abschnitt 4 macht deutlich, inwiefern die zuvor entwickelten Überlegungen die von William Tait vertretene deflationäre Lesart der Begriffe „mathematische Wahrheit“ und „mathematische Existenz“ stützen und sich somit das Vorhaben erübrigt, eine ontologischen Grundlegung für die Mathematik zu formulieren.

2. Deflationismus und axiomatische Methode

Die vermutlich meistbeachtete deflationäre Lesart der Begriffe „mathematische Wahrheit“ und „mathematische Existenz“ ist die von William Tait entwickelte Auffassung, dass Fragen nach mathematischer Wahrheit und Existenz nur insofern Bedeutung haben, als sie sich auf Grundlage eines gemäß der Hilbert'schen axiomatischen Methode behandelten Axiomensystems beantworten lassen. Kerngedanke der Hilbert'schen axiomatischen Methode ist es, die Axiome als implizite Definitionen der in ihnen enthaltenen Begriffe zu behandeln. Im Folgenden rekapituliere ich kurz diesen erstmals 1899 in Hilberts *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert 1962) zur Anwendung gebrachten Zugang zur Axiomatik und erläutere seine Rolle in der Tait'schen Auffassung.

Definitionen im herkömmlichen Sinn – auch „explizite Definitionen“ genannt – führen einen neuen Begriff dadurch ein, dass er selbst (oder eine Begriffsverbindung, die ihn enthält) gleichgesetzt wird mit einer anderen Begriffsverbindung, die wiederum lediglich bereits bekannte Begriffe enthält. Die Definition des Begriffs der Primzahl ist ein Beispiel für eine solche Definition: Sie setzt den Begriff „Primzahl“ gleich mit dem Begriff „natürliche Zahl, die nur durch sich selbst und die Zahl 1 teilbar ist“ und erlaubt insofern die Ersetzung aller Vorkommnisse von „Primzahl“ durch Kombinationen anderweitig definierter oder bereits als bekannt vorausgesetzter Begriffe.

Im Unterschied zu expliziten Definitionen erlauben *implizite* Definitionen keine unmittelbare Ersetzung des definierten Begriffs (oder der definierten Begriffe) durch bereits bekannte, sondern legen vielmehr *per Definition* den Wahrheitswert einer Aussage, die die implizit definierten Begriffe enthält, als „*wahr*" fest. Der Hilbert'sche Zugang zur Axiomatik behandelt die Axiome als implizite Definitionen in eben diesem Sinne. Zumindest für die mathematische *Praxis* spielt keine Rolle, ob sie über die Anerkennung als primitive Wahrheiten „per Definition" hinaus auch gemäß externen, aus philosophischer Sicht relevanten Standards als „wahr" gelten können.[3]

Hilbert selbst charakterisiert diesen seinerzeit völlig neuartigen Zugang zur Axiomatik in einer Postkarte vom 22.9.1900 an Frege, der gewichtige Einwände dagegen erhebt, wie folgt:

> Meine Meinung ist eben die, dass ein Begriff nur durch seine Beziehungen zu anderen Begriffen logisch festgelegt werden kann. Diese Beziehungen, in bestimmten Aussagen formulirt, nenne ich Axiome und komme so dazu dass die Axiome (ev[tl]. mit Hinzunahme der Namengebungen für die Begriffe) die Definition der Begriffe sind. Diese Auffassung habe ich mir nicht etwa zur Kurzweil ausgedacht, sondern ich sah mich zu derselben gedrängt durch die Forderung der Strenge beim logischen Schliessen und beim logischen Aufbau einer Theorie. Ich bin zu der Ueberzeugung gekommen, dass man in der Mathematik und den Naturwissenschaften subtilere Dinge nur so mit Sicherheit behandeln kann, anderenfalls sich bloss im Kreise dreht. (Frege 1980: 22)

Die entscheidende Errungenschaft von Hilberts Zugang zur Axiomatik ist der mit ihr einhergehende Gewinn an mathematischer Strenge und Klarheit. Stewart Shapiro erklärt dies damit, dass im Hilbert'schen Verständnis von Axiomatik die Rolle von Intuition und Beobachtung vollständig auf den außermathematisch-heuristischen Bereich beschränkt bleibt: "[T]he role of intuition and observation is explicitly limited to motivation and is heuristic. Once the axioms have been formulated, intuition and observation are banished. They are not part of mathematics." (Shapiro 2000: 151) Jede in einen Beweis eingehende Annahme wird entweder selbst als Axiom explizit gemacht oder muss als aus diesen ableitbar nachgewiesen werden. Darüber hinaus sind keine von den beteiligten Mathematikern geteilten gemeinsamen mathematischen *Intuitionen* notwendig, um zu gewährleisten, dass ein geführter Beweis als gültig und verbindlich anerkannt wird. In diesem Sinne sind die im Hilbert'schen Zugang zur Axiomatik verwendeten mathematische Begriffe von

3 Wie genau sich die Verwendungsweise der Axiome als implizite Definitionen in der mathematischen Praxis manifestiert, wird im Detail in Abschnitt 3 diskutiert.

maximaler Schärfe und die Beweise, die sie enthalten, von maximaler Strenge.

Taits deflationäre Lesart der Begriffe „mathematische Wahrheit“ und „mathematische Existenz“ verallgemeinert den gerade geschilderten Hilbert'schen Zugang zur Axiomatik zu der grundsätzlichen Haltung, dass allein diejenigen Fragen bezüglich mathematischer Wahrheit und Existenz sinnvoll sind, die sich im Rahmens eines gemäß der Hilbert'schen Methode behandelten Axiomensystems stellen lassen. Tait selbst charakterisiert die seiner Ansicht nach bestehenden Implikationen von Hilberts Auffassung der Axiome für mathematische Wahrheit und Existenz folgendermaßen:

> With the axioms in place, what objects exist and what is true of them become questions of what can be logically deduced from the axioms. By whatever dialectical process we come to adopt the axioms, whatever ‘intuitions’ lead us to them, the question of mathematical truth or existence becomes well-defined only with the introduction of the axioms. (Tait 2005: 89)

Tait selbst bezeichnet seine Auffassung als einen „Realismus“, und Horsten greift dies auf, indem er, auf das deflationäre Element von Taits Auffassung anspielend, von “deflating realism“[4] spricht. Nach Ansicht von Tait ist seine Auffassung insofern „realistisch“, als sie den Überzeugungen derjenigen entspricht, “[who] believe[...] mathematics is meaningful and [...] [who are] convinced that mathematical propositions cannot be reduced to propositions about something else or about nothing at all.”(Tait 2005: 91) In der Tat hat Taits Auffassung mit realistischen Positionen in Auseinandersetzung um ontologische Grundlegungen gemein, dass sie den in der Mathematik allgegenwärtigen Bezug auf abstrakte Gegenstände akzeptiert, anstatt auf einer aus nominalistischer Sicht akzeptablen Uminterpretation zu bestehen. Es handelt sich bei ihr jedoch nicht um einen „Realismus“ im Sinne der zuvor besprochenen Positionen „Wahrheitswert-Realismus“ und „ontologischer Realismus“, welche die Fragen nach mathematischer Wahrheit und Existenz anhand externen, philosophischen Kriterien beantworten. Tait bezeichnet diese Positionen, sich von ihnen abgrenzend, als Formen des „Super-Realismus“[5], doch scheint sich diese Terminologie nicht allgemein durchgesetzt zu haben. Sein eigener „Realismus“ ist weder „schwach“ noch „gemäßigt“ – im Sinne der Debatten um ontologische Grundlegungen –, sondern weist die in diesen Debatten getätigten Vorannahmen als ungerechtfertigt zurück.

Taits Bemühungen, seine deflationäre Auffassung plausibel zu machen, konzentrieren sich insbesondere auf die Beantwortung des Vorwurfs, dass sie auf einer – angesichts der berühmten

4 So der Titel von Abschnitt 3.3 in Horsten 2012.
5 Siehe Tait 2001 passim.

Gödel'schen Unvollständigkeitstheoreme – unhaltbaren Gleichsetzung von mathematischer Wahrheit mit Beweisbarkeit basiert. Als wichtigstes Argument gegen diesen Vorwurf führt er an, dass er Beweisbarkeit zwar als Kriterium für mathematische Wahrheit anerkennt, nicht jedoch als ihre Definition:

> [M]y assertion that provability is a criterion for truth is not intended as a definition of truth. Rather, it is a convenient and natural way to express the fact that the assertion of a mathematical proposition is warranted *only by a proof of it*. Of course, this notion of warrant is open-ended; but that is simply an *expression* of the essential incompleteness of mathematics; it is not a further problem arising from it. (Tait 2005: 96. Die Hervorhebung stammt von Tait.)

Für die Zwecke der vorliegenden Auseinandersetzung setze ich voraus, dass diese Verteidigung stichhaltig ist, und konzentriere mich auf einen Einwand anderer Art. Dieser setzt bei der Beobachtung an, dass viele Philosophen die Hilbert'sche Auffassung der Axiome als legitim und für die mathematische Praxis gewinnbringend und fruchtbar ansehen, ohne jedoch zugleich von dem Ziel abzurücken, eine ontologische Grundlegung der Mathematik zu formulieren. Geoffrey Hellman beispielsweise, ein Vertreter des heute einflussreichen *Strukturalismus* in der Philosophie der Mathematik, akzeptiert die Hilbert'sche Methode als zentral für die moderne mathematische Praxis: "[F]or all commonly studied structures and spaces, not only is the Hilbertian conception appropriate, it is part and parcel of standard modern practice." (Hellman 2006: 160) Zugleich spricht jedoch Hellman zufolge die Einsicht in die praktische Relevanz der Hilbert'schen Methode keineswegs gegen die Notwendigkeit einer ontologischen Grundlegung: Dass ontologische Fragen für die mathematische Praxis irrelevant sind, bedeutet aus seiner Sicht nicht, dass es unmöglich ist, ihnen eine klare Bedeutung zu *geben* und sie auf Grundlage philosophischer Überlegungen, die über die mathematische Praxis hinausgehen, zu beantworten.[6] In der Tat gibt Tait kein Argument dafür, warum es aus *prinzipiellen* Gründen unmöglich sein sollte, Kriterien zu entwickeln, anhand derer sich Fragen nach mathematischer Wahrheit und Existenz von einem externen, außer-mathematischen Standpunkt beantworten lassen.

Hellman und andere Strukturalisten sehen die zentrale Lektion der Hilbert'schen Methode nicht etwa darin, dass sie die Idee einer ontologischen Grundlegung verfehlt erscheinen lässt, sondern

6 Horsten schreibt Linsky und Zalta die Entwicklung eines "systematic way of answering precisely the sort of external questions that Tait approaches with disdain" zu (Horsten 2012, Abschnitt 3.3). Er verweist hierzu auf Linsky und Zalta 1995, wo für eine Position argumentiert wird, die Linsky und Zalta als „platonisierten Naturalismus" ("Platonized naturalism") bezeichnen. Inwiefern Linsky und Zalta in diesem Text darüber hinaus eine systematische Methode zur Beantwortung ontologischer Fragestellungen entwickeln, ist dem Autor des vorliegenden Textes nicht klar geworden.

vielmehr darin, dass sie die Axiome als Definitionen eines „Strukturtyps von mathematischem Interesse“ (“type of structure of mathematical interest”, Hellman 2005: 537) erscheinen lässt. Dieser Sichtweise zufolge haben die Axiome gemäß der Hilbert'schen Methode *algebraischen* Charakter, was bedeutet, dass sie „schematisch, bezogen auf jegliches System, das bestimmte Bedingungen erfüllt“ (“schematic, applying to any system of objects that meets certain conditions”, Shapiro 2005: 67).[7] sind. Anders ausgedrückt: Die Axiome eines Axiomensystems sind aus strukturalistischer Sicht Aussagen über jeden beliebigen Gegenstandsbereich, für den sie gemäß einer geeigneten Interpretation wahr sind. Damit bleibt für die nach ontologischen Grundlegungen suchenden Strukturalisten die Frage weiter offen, *welche* Gegenstandsbereiche (und damit welche Arten von Gegenständen) überhaupt als Grundlage zulässiger Interpretationen der Axiome anzuerkennen sind. Sowohl realistische als auch anti-realistische Versionen des Strukturalismus sind sich somit dahingehend einig, dass die Legitimität – wenn nicht gar die Notwendigkeit – ontologischer Grundlegungen durch das Akzeptieren des Hilbert'schen Zugangs zur Axiomatik für die mathematische Praxis unberührt bleibt.

Um diesen Einwand gegen die von Tait vertretene deflationäre Lesart mathematischer Wahrheit und Existenz zu entkräften, muss plausibel gemacht werden, dass die Hilbert'sche Methode ontologische Fragestellungen nicht allein für die mathematische Praxis obsolet macht, sondern auch darüber hinaus untergräbt. Letzteres nahe zu legen, ist Ziel der nun folgenden Argumentation.

3. Wittgenstein und mathematische Sätze als Normen

Der Kerngedanke der im Folgenden entwickelten Verteidigung von Taits deflationärer Lesart der Begriffe „mathematische Wahrheit“ und „mathematische Existenz“ entstammt der Philosophie der Mathematik des späten Wittgenstein. Er besagt, dass – anders als in philosophischen Abhandlungen für gewöhnlich vorausgesetzt – der Verwendungsmodus von mathematischer Sprache nicht etwa *deskriptiv* ist, sondern vielmehr *normativ*. In einem ersten Schritt wird im Folgenden gezeigt, dass für die gemäß der Hilbert'schen Methode als implizite Definitionen behandelten Axiome in der Tat eine normative Verwendungsweise charakteristisch ist. In einem zweiten Schritt argumentiere ich anschließend weiter, dass dies auch für die aus den Axiomen hergeleiteten Sätze („Theoreme“) zutreffen muss.[8]

7 Die für Shapiro wichtigste Quelle ist in diesem Zusammenhang ein Brief Hilberts an Frege, datiert auf den 29.12.1899 und von Frege exzerpiert: „Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z. B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger …, denke und dann nur meine sämtliche Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze […] auch von diesen Dingen. Mit anderen Worten: eine Theorie kann stets auf unendlich viele Systeme von Grundelementen angewandt werden.“ (Frege 1980: 13).

8 Vergleiche Friederich 2011 für eine ausführlichere Version des im Folgenden vorgebrachten Arguments.

Der Gedanke, mathematische Sätze als *Regeln* oder *Normen* zu begreifen, ist zentral für die Philosophie der Mathematik des späten Wittgenstein. Eine Bemerkung, in der Wittgenstein ihn zum Ausdruck bringt, lautet: „[W]ir werden in der Mathematik von *grammatischen* Sätzen überzeugt; der Ausdruck, das Ergebnis, dieser Überzeugtheit ist also, dass wir *eine Regel annehmen*."(BGM III: 26) An anderer Stelle schreibt er: „Was ich sage, kommt darauf hinaus, die Mathematik sei *normativ*"(BGM VII: 61), und vergleicht die Mathematik bald darauf mit einem „Netz von Normen."(BGM VII: 67) Dieses Bild lässt sich so verstehen, dass die auf normative Weise verwendeten mathematischen Sätze die Knoten des Netzes darstellen, während die sie verbindenden Beweise den Verbindungsfäden zwischen den Knoten entsprechen.

Der Hilbert'sche Zugang zur Axiomatik scheint in Wittgensteins Überlegungen zur Philosophie der Mathematik keine nennenswerte Rolle gespielt zu haben, und Wittgensteins Art des Nachdenkens über Mathematik unterscheidet sich in Inhalt und Stil grundlegend von der Hilberts. Nichtsdestotrotz besteht eine interessante Affinität zwischen Wittgensteins Bemerkungen über mathematische Sätze als begriffliche Normen und Hilberts Auffassung der Axiome als implizite Definitionen. Einen ersten Hinweis auf diese Affinität gibt eine Bemerkung Wittgensteins in den *Lectures on the Foundations of Mathematics* (LFM), der zufolge "[i]n a most crude way [...] the difference between an experiential proposition and a mathematical proposition which looks exactly like it [...] [is] that we can always affix to the mathematical proposition a formula like 'by definition'."(LFM: 111) Der wesentliche Unterschied zwischen mathematischen Sätzen und äußerlich – d. h. abgesehen von ihrer Verwendung – von ihnen nicht zu unterscheidenden empirischen Sätzen besteht dieser Bemerkung zufolge darin, dass die Verwendungsweise mathematischer Sätze in wesentlichen Zügen der von Definitionen entspricht. Hilbert selbst charakterisiert zwar lediglich die Axiome als Definitionen der in ihnen enthaltenen Begriffe, während laut Wittgenstein die Mathematiker *alle* Sätze, die sie akzeptieren, „per Definition" ("by definition") gelten lassen; damit ergibt sich jedoch trotz aller grundlegenden Unterschiede in Wittgensteins und Hilberts Denken über Mathematik eine interessante Übereinstimmung im Hinblick auf die Rolle der Axiome.

Wittgensteins Gründe dafür, mathematische Sprache als normativ zu begreifen, sind vielschichtig und komplex, und sie sind zu einem nicht unerheblichen Anteil seinen Überlegungen zu außer-mathematischen Anwendungen der Mathematik geschuldet. Mathematische Sätze haben ihm zufolge in ihren außer-mathematischen Anwendungen insofern eine normative Funktion, als auf ihrer Grundlage darüber entschieden wird, welche Verwendungen nicht-mathematischer Ausdrücke sinnvoll sind und welche nicht.[9] Der Gedanke, dass für mathematische Sprache eine normative Verwendungsweise charakteristisch ist, lässt sich jedoch nicht allein im Hinblick auf außer-mathematische Anwendungen mathematischer Sprache vertreten, sondern auch im Hinblick auf die reine Mathematik, sofern sie im Einklang mit der Hilbert'schen axiomatischen Methode betrieben wird. Tatsächlich werden die Axiome in ihrer Rolle als implizite Definitionen insofern normativ gebraucht, als sie als *Maß* oder *Standard* dessen fungieren, was als Verwendung der in ihnen enthaltenen Begriffe zählt. Um diesen Punkt zu illustrieren, lohnt es sich, ein Beispiel zu betrachten, etwa das von Hilbert in seiner Axiomatisierung der Geomtrie so bezeichnete *1. Axiom der Ordnung*, welches besagt:

> Wenn ein Punkt *B* zwischen einem Punkt *A* und einem Punkt *C* liegt, so sind *A*, *B*, *C* drei verschiedene Punkte einer Geraden, und *B* liegt dann auch zwischen *C* und *A*. (Hilbert 1962: 4)

Um sich die Verwendungsweise dieses Satzes im Rahmen der Hilbert'schen Axiomatisierung der Geometrie zu vergegenwärtigen, stellen wir uns einen Sprecher vor, der – vorgeblich im Kontext der Hilbert'schen Axiomatisierung der Euklid'schen Geometrie – eine Behauptung verteidigt, der zufolge ein Punkt *B* zwischen zwei anderen Punkten *A* und *C* liegt, und zugleich eine andere Behauptung, der zufolge sich dieselben Punkte *A*, *B*, *C nicht* auf einer gemeinsamen Gerade befinden. Gehen wir mit Hilbert davon aus, dass das 1. Axiom der Ordnung implizit (mit den anderen Axiomen zusammen) definiert, was unter „Punkt“, „Gerade“ und „zwischen“ zu verstehen ist, erscheint es unpassend, diesen Sprecher als im Irrtum über geometrische Tatsachen zu beschreiben. Vielmehr verwendet er *andere* Begriffe als die durch die Hilbert'schen Axiome definierten (naheliegenderweise einen anderen Begriff des „zwischen“) – oder auch gar keine, falls sein Gebrauch der geometrischen Ausdrücke nicht die für die Verwendung von Begriffen notwendigen Regelmäßigkeiten erkennen lässt. Aufgrund des Definitionscharakters der Axiome ist es Voraussetzung dafür, die durch die Axiome definierten Begriffe *überhaupt* zu verwenden, die Axiome zu akzeptieren und auf Hinweise auf mit ihnen unverträgliche Behauptungen durch Korrektur zu reagieren. Die Axiome dienen somit als *Standards* dessen, worin die Verwendung der in ihnen enthaltenen Begriffe besteht, und fungieren in diesem Sinne als begriffliche Normen.[10]Im

---

9 Vergleiche (BGM IV: 9) für eine Wittgenstein'sche Bemerkung hierzu und Kapitel VII von Baker und Hacker 2009 (bzw. Kapitel VI der 1. Auflage) für eine detaillierte Diskussion dieser Überlegungen. Um sie in ihren Grundzügen zu verstehen, betrachte man als Beispiel die Sprache der Arithmetik, die Wittgenstein zufolge Normen für das Zählen und Zusammenfassen von Gegenständen bereitstellt, indem sie bestimmte Verwendungen von Zahlwörtern, angewendet auf empirische Gegenstände, zulässt und andere als sinnlos ausschließt. Dies lässt sich anhand eines Beispielsatzes veranschaulichen wie etwa “Alice, Bob und Eva essen je zwei Äpfel, also essen die drei zusammen insgesamt sieben.“ Dieser Satz ergibt offensichtlich keinen Sinn, und dies hängt Wittgenstein zufolge damit zusammen, dass er – wie auch die anderen Sätze der Arithmetik – als Norm zur Anwendung von Zahlwörtern auf empirische Gegenstände dient und insofern als Regel zur Beschreibung empirischer Sachverhalte.

10 Ein weiteres interessantes Beispiel ist das berühmte Parallelen-Axiom, dessen (temporäre) Zurückweisung keineswegs unüblich ist und typischerweise anzeigt, dass anstelle der *Euklid'schen* eine *nicht-Euklid'sche* Geometrie verwendet wird. Was im nicht-Euklid'schen Fall als korrekte Verwendung (und damit überhaupt als Verwendung)

Hinblick auf sie erscheint die Wittgenstein'sche Auffassung mathematischer Sätze als Normen daher plausibel.

Auf den ersten Blick mag es unplausibel erscheinen, nicht allein die Axiome, sondern auch die aus ihnen abgeleiteten Sätze – im Folgenden „Theoreme" genannt – als begriffliche Normen zu betrachten. Wie kann es möglich sein, mag man fragen, dass die Theoreme die bereits durch die Axiome definierten Begriffe auf normative Weise zusätzlich weiter „fixieren"? Es erscheint naheliegend, sich die unterschiedlichen Rollen von Axiomen und Theoremen im Kontext der Hilbert'schen Axiomatik so vorzustellen, dass die Axiome in ihrer Rolle als implizite Definitionen für maximal scharfe und präzise Begriffe sorgen, während in den Theoremen diese Begriffe anschließend dazu eingesetzt werden, auf nicht weniger scharfe und präzise Weise mathematische Tatsachen zu *beschreiben*. Im Gegensatz zu den Axiomen werden die Theoreme dieser Überlegung zufolge *deskriptiv* verwendet, und aus Sicht der an ontologischen Grundlegungen interessierten Philosophen schließt sich an diese Feststellung direkt die Frage an, ob die von den Theoremen gemäß dieser Sichtweise beschriebenen Tatsachen auch tatsächlich bestehen, d. h. ob die Theoreme auch wirklich wahr sind und die Gegenstände, von denen sie handeln, auch wirklich existieren.

Die gerade geschilderte Überlegung scheint zunächst die Suche nach einer ontologischen Grundlegung für die Mathematik zu rehabilitieren. Auf der Grundlage von ein wenig Reflexion erscheint sie jedoch als überaus problematisch. Grund hierfür ist der zweifelhafte Status der Idee einer allein auf deduktiver Logik basierenden Ableitung deskriptiver Sätze aus rein begrifflichen Normen: Wie soll es möglich sein, dass die Theoreme deskriptiv verwendete Sätze zur Beschreibung welcher Tatsachen auch immer sein können, wenn sie doch ihrer Genese zufolge nichts als logische Konsequenzen von Standards dessen sind, was als Verwendung der in ihnen enthaltenen Begriffe zählt? Diese Bedenken erhalten Nahrung durch die Beobachtung, dass es für den Beweis neuer Theoreme – und damit für ihre anschließende Verwendung – keine Rolle spielt, ob eine in einen Beweis eingehende Annahme als eigenständiges Axiom oder aufgrund eines Beweises aus den Axiomen (und somit als Theorem) akzeptiert wird. Dies lässt sich anhand zahlreicher Beispiele illustrieren. Besonders lehrreich ist der Fall des bisweilen als „Pasch-Theorem" (nicht zu verwechseln mit dem „Pasch-Axiom"[11]) bezeichneten Satzes der Euklid'schen Geometrie im Kontext der Hilbert'schen Axiomatisierung. Dem Pasch-Theorem zufolge lassen sich je vier beliebige auf einer gemeinsamen Gerade befindliche Punkte „stets [so] mit *A*, *B*, *C*, *D*,

der Ausdrücke „Punkt", „Gerade" und „zwischen" gilt, ist verschieden vom Euklid'schen Fall, und insofern entsprechen gleiche Ausdrücke im Euklid'schen und nicht-Euklid'schen Kontext verschiedenen Begriffen.

11 Das Pasch-Axiom besagt, dass jede Gerade, die durch eine Seite eines Dreiecks verläuft, auch durch eine andere Seite desselben Dreiecks verläuft.

bezeichnen, dass der mit *B* bezeichnete Punkt zwischen *A* und *C* und auch zwischen *A* und *D* und ferner der mit *C* bezeichnete Punkt zwischen *A* und *D* und auch zwischen *B* und *D* liegt."(Hilbert 1962: 6) Hilbert führt in der Originalfassung der Grundlagen der Geometrie diesen Satz als eigenständiges Axiom auf, doch bereits im Jahr 1902 wird von dem Mathematiker E. H. Moore eine Ableitung aus den anderen von Hilbert gewählten Axiomen veröffentlicht.[12] Zu diesem Zeitpunkt wird der Satz somit als Axiom im Rahmen der Hilbert'schen Axiomatisierung redundant. Für den Status von auf dem Pasch-Theorem basierenden Beweisen ist es jedoch vollkommen irrelevant, ob es als eigenständiges Axiom oder als aus den anderen Axiomen abgeleitetes Theorem betrachtet wird. Alle mit Hilfe des Pasch-Theorems bewiesenen Theoreme besitzen ihre Gültigkeit unabhängig davon, ob es ursprünglich als Axiom oder als Theorem eingeführt wird.

Allgemein gesprochen, unterscheiden sich Theoreme von Axiomen zwar durch ihre Genese, da erstere auf Grundlage einer Ableitung aus anderen mathematischen Sätzen akzeptiert werden, letztere hingegen als gleichsam *primitive* begriffliche Normen aufgrund extra-mathematischer, heuristischer Überlegungen. Im Hinblick auf ihre weitere Verwendung, d. h. was ihre Rolle beim Beweis neuer mathematischer Theoreme betrifft, lassen sich jedoch keine Unterschiede zwischen Axiomen und Theoremen feststellen. Auf Grundlage der vorher angestellten Überlegungen zur Rolle der Axiome als begriffliche Normen ergibt sich hieraus die Konsequenz, dass es in der Tat ein *grundsätzliches* Merkmal aller mathematischer Sätze im Kontext der Hilbert'schen Methode ist, als Standards dessen zu dienen, was als Gebrauch der in ihnen enthaltenen Begriffe zählt.[13]

4. Konsequenzen für ontologische Grundlegungen

Die im vorangegangenen Abschnitt entwickelten Überlegungen zur normativen Rolle mathematischer Sätze in gemäß der Hilbert'schen Methode behandelten Axiomensystemen stützen Taits deflationäre Sichtweise auf mathematische Wahrheit und Existenz. Um dies zu sehen, betrachten wir zunächst ihre Konsequenzen für den Begriff der mathematischen Wahrheit. Hier lohnt es sich, Fragen nach der Wahrheit mathematischer Sätze mit Fragen nach der Wahrheit von Sätzen zu vergleichen, die in anderen Kontexten als Normen im Sinne von Standards für korrektes Verhalten dienen. Regeln von Spielen wie Schach oder auch die Regeln des Straßenverkehrs sind solche Sätze. Auf diese Regeln lässt sich der Begriff „Wahrheit" insofern anwenden, als Spiel- bzw. Verkehrsteilnehmer sie in einem (deflationären) Sinn dann als „wahr" behandeln, wenn sie sich im

12 Siehe Moore 1902.

13 Vergleiche Abschnitt 5 von Friederich 2011 für ein weiteres diese Behauptung illustrierendes Beispiel. Dort wird die Verwendungsweise des Auswahlaxioms, des Zorn'schen Lemmas und des Zermelo'schen Wohlordnungssatzes im Kontext der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ZF) im Lichte ihrer wechselseitigen deduktiven Ableitbarkeit untersucht.

Rahmen des jeweiligen Spiels bzw. des Straßenverkehrs nach ihnen richten und sich gegebenenfalls in Worten explizit zu ihnen bekennen. Insofern hier von Wahrheit geredet werden kann, handelt es sich um „Wahrheit“ in einem *internen* Sinn – welcher dem Sinn entspricht, in dem Mathematiker ein Axiom oder einen aus den Axiomen hergeleiteten Satz als „wahr“ bezeichnen, wenn sie sich in einem bestimmten Axiomensystem bewegen. Dieser interne Sinn von „wahr“ ist im Hinblick auf die Sätze von gemäß der Hilbert'schen Methode behandelten Axiomensystemen unproblematisch. William Taits deflationärer Lesart des Begriffs „mathematische Wahrheit“ zufolge ist er der einzig legitime Begriff mathematischer Wahrheit.

Sowohl hinsichtlich der Regeln des Schach als auch hinsichtlich derer des Verkehrs lassen sich jenseits der *internen* Frage nach ihrer Wahrheit auch Fragen stellen, die auf Antworten gemäß *externen* Kriterien abzielen. Beispielsweise lässt sich sinnvoll fragen, ob die Menschen sich in der Praxis tatsächlich an die jeweils gesellschaftlich festgelegten Regeln halten, oder auch, ob diese Regeln angesichts der mit ihnen verbundenen Zielsetzungen gut gewählt sind. Hier werden die Regeln in der Tat nach *externen* Kriterien bewertet: die Verkehrsregeln (unter anderem) danach, ob sie zu Sicherheit und zügigem Vorankommen im Verkehr beitragen, die Spielregeln (unter anderem) danach, ob sie das jeweilige Spiel kurzweilig und interessant machen. Diese Fragen betreffen die *Zweckmäßigkeit* – nicht die *Wahrheit* – angesichts externer Kriterien. Analoge Fragen nach der Zweckmäßigkeit – nicht weniger sinnvoll und legitim – lassen sich auch für mathematische Sätze im Kontext der Hilbert'schen Methode stellen. So lässt sich beispielsweise fragen, ob Axiomensysteme der nicht-Euklid'schen Geometrie eine ökonomischere und elegantere Beschreibung der Struktur von Raum und Zeit ermöglichen als ein Euklid'sches Axiomensystem. Wie bereits erläutert, hat eine Frage wie diese im Rahmen der Hilbert'schen Methode *heuristische* Relevanz, insofern sich Mathematiker an ihr bei der Auswahl der zu untersuchenden Axiomensysteme orientieren mögen. Fragen nach *Wahrheit* gemäß externen Kriterien ergeben hingegen im Hinblick auf Spiel- oder Verkehrsregeln keinen Sinn. Nicht weniger verfehlt erscheint es im Lichte der hier angestellten Überlegungen, Antworten auf Fragen nach mathematischer Wahrheit gemäß externen, philosophischen, Kriterien geben zu wollen.

Im Hinblick auf mathematische Existenz ergibt sich aus diesen Überlegungen eine ähnliche Perspektive wie im Hinblick auf mathematische Wahrheit. Wittgenstein selbst betrachtet es als unproblematisch, mathematische Sätze als Aussagen „über“ mathematische Gegenstände zu charakterisieren und sich insoweit zur Existenz mathematischer Gegenstände zu bekennen. Ihm zufolge ist es allein deswegen angebracht, einen Satz wie '15 + 20 = 35', als „Aussage über Zahlen“ (“statement about numbers“) zu bezeichnen,weil es sich bei ihm, wie er schreibt, um eben das handelt, „was wir eine Aussage über Zahlen nennen“ (“what we call a statement about numbers”, LFM: 112). Diese Bemerkung drückt insofern eine deflationäre Haltung gegenüber mathematischer Existenz aus, als sie die mathematische Praxis zum Maßstab für Existenzaussagen über mathematische Gegenstände erklärt und nicht eine dieser Praxis vermeintlich vorgängige philosophische Reflexion.

Eine deflationäre Lesart des Begriffs der mathematischen Existenz ergibt sich zudem auf natürliche Weise aus der hier vertretenen Auffassung, dass für die Sätze in gemäß der Hilbert'schen Methode verwendeten Axiomensystemen eine normative Verwendungsweise charakteristisch ist. Verstehen wir etwa, um wiederum das Beispiel der Euklid'schen Geometrie heranzuziehen, geometrische Sätze als Normen zur Verwendung geometrischer Begriffe wie etwa „Gerade“ und „Punkt“, so handelt es sich bei ihnen um Aussagen *über* Geraden und Punkte in genau dem (deflationären) Sinn, in dem es sich bei den Regeln des Schach um Aussagen *über* Bauern, Läufer, Türme etc. handelt. Stellen wir uns einen Menschen vor, der den Regeln des Schach ablehnend gegenübersteht und seiner Ablehnung Ausdruck verleiht durch die besorgte Frage, ob man denn auch sicher sein könne, dass die Schachfiguren (als durch ihre Bewegungsmöglichkeiten und Ausgangspositionen definierte Objekte) *tatsächlich existieren*, so hat dieser Mensch missverstanden, worin Sinn und Zweck der Schachregeln bestehen: Diese stellen nicht etwa deskriptive *Behauptungen* über die Schachfiguren dar, sondern einerseits *Vorschriften* darüber, wie die Schachfiguren zu bewegen sind, und andererseits *Definitionen* der für das Schachspiel wesentlichen Begriffe wie etwa „Bauer“, „Läufer“, „Turm“, „Rochade“ oder „Schachgebot“. Als solche beruhen sie nicht auf bestimmten ontologischen Präsuppositionen, die sich von einem externen Standpunkt aus sinnvoll hinterfragen ließen. Eine entsprechende Verwendungsweise ist den hier entwickelten Überlegungen zufolge für die Sätze in gemäß der Hilbert'schen Methode verwendeten Axiomensystemen charakteristisch, und so ist es ebenso wenig sinnvoll, die Existenz mathematischer Gegenstände auf Grundlage externer Kriterien in Zweifel zu ziehen. Sowohl nominalistische Skrupel hinsichtlich der Existenz mathematischer Gegenstände als auch darauf antwortende ontologisch-realistische Theorien basieren somit auf einen Missverständnis hinsichtlich der Natur und Verwendungsweise mathematischer Sprache.

Zum Abschluss lohnt es sich festzuhalten, dass die hier vorgeschlagene Sichtweise auf mathematische Sätze als begriffliche Normen nicht in Konflikt mit der am Ende von Abschnitt 2 vorgestellten, insbesondere von Hilbert und den Strukturalisten vertretenen Auffassung steht, der zufolge die Axiome in der Hilbert'schen Methode unbegrenzt anwendbar sind und insofern einen *schematischen* – „algebraischen“ – Charakter haben. Weit entfernt davon, mit der Normativität der

Axiome unverträglich zu sein, lässt sich die unbegrenzte Anwendbarkeit der Axiome als Aspekt eben dieser Normativität begreifen. Der Grund hierfür ist folgender: Wo mathematische Sätze als Standards für die korrekte Verwendung der in ihnen enthaltenen Begriffe dienen, ist für diese Verwendung allein entscheidend, ob man die Axiomen und bewiesenen Sätze tatsächlich anerkennt und bereit ist, sie zur Herleitung weiterer Sätze zu benutzen. Welche Vorstellungen man mit den mathematischen Begriffen und den unter sie fallenden Gegenständen verbindet, ist irrelevant, und ebenso wenig spielt eine Rolle, welche Anwendungen auf außer-mathematische Gegenstandsbereiche man im Blick hat. Dementsprechend kann ein Axiomensystem gerade aufgrund der Verwendung seiner Sätze als begriffliche Normen, wie von Hilbert betont, „stets auf unendlich viele Systeme von Grundelementen angewandt werden.“ (Frege 1980: 13) Die unbeschränkte Anwendbarkeit von gemäß der Hilbert'schen Methode behandelten Axiomensystemen ist somit mit der Perspektive auf mathematische Sätze als begriffliche Normen nicht nur verträglich, sondern lässt sich als einer ihrer zentralen Aspekte begreifen.

Literatur

Baker, Gordon und Hacker, Peter M. S.: *Wittgenstein: Rules, Grammar and Necessity. Volume 2 of an Analytical Commentary on the Philosophical Investigations*, 2. Auflage, Oxford 2009.

Burgess, John P. und Gideon Rosen: *A Subject with No Object*, Oxford 2007.

Frege, Gottlob: *Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell, sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges*, Gottfried Gabriel, Friedrich Kambartel und Christian Thiel (Hrsg.), Hamburg 1980.

Friederich, Simon: „Motivating Wittgenstein's perspective on mathematical sentences as norms“, *Philosophia Mathematica* 19: 1-19, 2011.

Hellman, Geoffrey: *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-structural Interpretation*, Oxford 1989.

Hellman, Geoffrey: „Structuralism“, in: *The Oxford Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic*, Stewart Shapiro (Hrsg.), Oxford 2005.

Hellman, Geoffrey: „What is categorical structuralism?“, in: *The Age of Alternative Logics. Assessing philosophy of logic and mathematics today*, Johan van Benthem, Gerhard Heinzmann, Manuel Rebuschi und Henk Visser (Hrsg.), Dordrecht 2006.

Hilbert, David: *Grundlagen der Geometri*e, 9. Auflage, revidiert und ergänzt von Paul Bernays, Suttgart 1962.

Horsten, Leon: „Philosophy of mathematics“, in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2012 Edition)*, Zalta, Edward N. (Hrsg.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/philosophy-mathematics/> 2012.

Landry, Elaine: „How to be a structuralist all the way down“, *Synthese*, 179:435-454, 2011.

Linsky, Bernard und Zalta, Edward N.: „Naturalized Platonism vs. Platonized Naturalism“, *Journal of Philosophy*, 92: 525–555, 1995.

McLarty, Colin: „Exploring categorical structuralism“, *Philosophia Mathematica*, 12: 37–53, 2004.

Moore, Eliakim Hastings: „On the projective axioms of geometry“, *Transactions of the American Mathematical Society*, 3: 142-158, 1902.

Mühlhölzer, Felix: *Braucht die Mathematik eine Grundlegung? Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins 'Bemerkungen uber die Grundlagen der Mathematik'*, Frankfurt a. M. 2010.

Quine, Willard Van Orman: *Word and Object*, Cambridge, Mass. 1960.

Shapiro, Stewart: *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics*, Oxford, New York 2000.

Shapiro, Stewart: „Categories, structures, and the Frege-Hilbert controversy: The status of meta-mathematics", *Philosophia Mathematica*, 13: 61-77, 2005.

Tait, William W.: „Bexond the axioms: the question of objectivity in mathematics", *Philosophia Mathematica* 9: 21-36, 2001, abgedruckt als Kapitel 4 in Tait 2005, 89-194, Seitenzahlen beziehen sich auf Tait 2005.

Tait, William W.: *The Provenance of Pure Reason. Essays on the Philosophy of Mathematics and its History*, New York und Oxford 2005.

Whitehead, Alred N. und Russell, Bertrand: *Principia Mathematica*, 2. Auflage, Cambridge 1962.