Algunos tópicos de Lógica matemática y los Fundamentos de la matemática

Franklin Galindo

Octubre 2017

Comentario inicial

En su artículo "La Lógica Matemática de Russell" (1944) Gödel manifiesta [[Go4], pp. 325-326] que la Lógica Matemática ha tomado (o reasumido, porque la había abandonado después del surgimiento de las paradojas) una posición realista (o platonista) de la matemática a los fines de contar con suficiente poder como para estudiar los fundamentos de la matemática. Y Gödel está de acuerdo con esa tendencia y la promueve en dicho artículo y también en su otro artículo ¿Qué es el problema del continuo de Cantor? (1947). En este trabajo filosófico-matemático se intenta mostrar (con cuatro temas) como la Lógica Matemática contemporánea está en completa sintonía con las palabras y las aspiraciones de Gödel.

Resumen

En esta investigación se estudian cuatro tópicos de la Lógica matemática: El método de construcción de modelos llamado Ultraproductos, la Propiedad de Interpolación de Craig, las Álgebras booleanas y los Órdenes parciales separativos. El objetivo principal del trabajo es analizar la importancia que tienen dichos tópicos para el estudio de los Fundamentos de la matemática, desde el punto de vista del platonismo matemático. Para cumplir con tal objetivo se trabajará en el ámbito de la Matemática, de la Metamatemática y de la Filosofía de la matemática. El desarrollo de la investigación arrojó como resultado que tales tópicos son muy importantes para el estudio de los fundamentos de la matemática, desde el punto de vista del platonismo matemático, y al final de cada sección y del trabajo se explica detalladamente el porqué. El orden expositivo es el siguiente: (a) Primero se responderá la pregunta ¿en qué consiste el platonismo matemático, y cuál es su relación con los fundamentos de la matemática y con la Teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de elección (ZFC)? en el contexto de la Filosofía de la matemática. (b) Luego se estudiará el método de construcción de modelos llamado Ultraproductos en el contexto de la rama de la Lógica matemática

llamada Teoría de modelos. Dicho método fue inventado por Skolem (1930) y desarrollado por Loś (1955) y desde entonces se ha utilizado en los estudios de matemática (Análisis matemático, Teoría de la medida, Probabilidades, Topología, Teoría de números, etc) y de los Fundamentos de la matemática, siendo el mismo de gran utilidad para tales fines. En este trabajo se hará énfasis en su estudio con relación a los Fundamentos de la matemática, por ejemplo en su relación con el Teorema de compacidad (y sus implicaciones), con los Modelos no estándar (y sus implicaciones) y los grandes cardinales (Cardinales inaccesibles y cardinales medibles) y sus implicaciones. Vale la pena resaltar que en el estudio de cardinales medibles con ultraproductos se usarán lógicas infinitarias y/o fragmentos de la lógica de segundo orden. (c) Después se estudiará a la Propiedad de Interpolación de Craig en el contexto de la Teoría de modelos, se describirán dos demostraciones de dicha propiedad, una para la Lógica proposicional y otra para la Lógica de primer orden, y luego se conectarán tales resultados con el estudio de los fundamentos de la matemática, por ejemplo se estudiarán dos de sus consecuencias: El Teorema de definibilidad de Beth (1953) y el Teorema de consistencia de Robinson (1956). El Teorema de Interpolación fue demostrado por primera vez para la Lógica de primer orden por William Craig en 1957, y desde entonces se ha investigado la posibilidad de generalizarlo y aplicarlo. Dicho teorema tiene aplicaciones en Teoría de la Demostración, Teoría de modelos abstracta, Ciencias de la Computación, Lógica Modal, Lógica Intuicionista, Lógica de la relevancia, Filosofía de la ciencia, etc. Y (d) por último se estudiará una relación entre las Álgebras booleanas y los Órdenes parciales separativos: Se presentará una demostración de que las cortaduras regulares de un orden parcial separativo forman un álgebra booleana completa. Tal resultado es muy conocido y existen pruebas del mismo, por ejemplo pruebas topológicas, pero la que se presentará aca usa las definiciones de las operaciones booleanas entre cortaduras regulares que hace Jech en sus textos, "Set Theory" (1978) y "Set Theory"(2000), en dichos libros Jech enuncia el Teorema y formula las definiciones pero no hace explícito el porqué las mismas satisfacen las propiedades de álgebra booleana, aquí se hace una demostración matemática rigurosa de tal hecho.

Contenido

1 Introducción

En esta investigación se estudian cuatro tópicos de la Lógica matemática: *El método de construcción de modelos llamado Ultraproductos, la Propiedad de Interpolación de Craig, las Álgebras booleanas y los Órdenes parciales separativos.* **El objetivo principal del trabajo es analizar la importancia que tienen dichos tópicos para el estudio de los fundamentos de la matemática, desde el punto de vista del platonismo matemático**. El estudio matemático de tales tópicos se realiza en el contexto de la rama de la Lógica matemática denominada "Teoría de modelos", y el estudio filosófico se hace en el ámbito de la Filosofía de la matemática. La investigación matemática y filosófica realizada en este trabajo permite concluir que los Ultraproductos, la Propiedad de Interpolación de Craig, las Álgebras booleanas y los Órdenes parciales separativos son de mucha importancia para el estudio de los fundamentos de la matemática, desde el punto de vista del platonismo matemático.

La *Lógica matemática* es una rama de la matemática surgida en el siglo XX que está constituída por las siguientes cuatro subramas (entre otras): *Teoría de conjuntos*, *Teoría de modelos*, *Teoría de la demostración* y *Computabilidad.* [[Fe1], pp. 409], [Hor]

La *Filosofía de la matemática* es una rama de la filosofía que estudia los problemas filosóficos suscitados por la matemática [[Hac], pp. 21], [[Mou], pp. 11-12]. Vale la pena resaltar que debido a que el objeto de estudio de la matemática no es necesariamente espacio-temporal y los métodos de la matemática difieren en aspectos esenciales de los métodos de las ciencias naturales, la Filosofía de la Matemática ocupa un lugar distinto en la Filosofía de la ciencia al que ocupan las Filosofías de las ciencias naturales cuyo objeto de estudio es espacio-temporal [Hor], [[Mou], pp. 12]. Las matemáticas plantean problemas singulares de tipo filosófico: Problemas ontológicos, problemas epistemológicos, etc. ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos ?, ¿Cuáles son las leyes fundamentales que los gobiernan? y ¿Cómo adquirimos conocimientos matemáticos sobre ellos?, son tres preguntas (entre otras) que intenta responder la filosofía de la matemática. Algunos filósofos y/o matemáticos se han interesado por responder las mismas en el transcurso de la historia de la humanidad. Existen diversas concepciones filosóficas de la matemática: **Platonismo, Intuicionismo (constructivismo), Logicismo, Formalismo, Empirismo, Predicativismo, Convencionalismo, Nominalismo, Ficcionismo, Naturalismo, Estructuralismo**, etc. [Hor], [B-P], [AA]

¿Cuál es exactamente la relación entre los "Fundamentos de la matemática" y la "Filosofía de la matemática"?. Si se considera la manera en que está estructurado el texto clásico de Filosofía de la Matemática, "Philosophy of mathematics", de Benacerraf y Putnam [B-P], alguien podría verse tentado a concluir que los Fundamentos de la Matemática están incluídos estrictamente en la Filosofía de la Matemática, pues dicho libro se llama "Filosofía de la matemática" y tiene cuatro partes: (1)"Los fundamentos de la matemática", (2) "La existencia de los objetos matemáticos", (3) "La verdad matemática" y (4) "El concepto de conjunto". Sin embargo, hay autores que afirman que la frontera entre los "Fundamentos de la matemática" y la "Filosofía de la matemática" es difusa, por ejemplo Horsten en su artículo "Phylosophy of Mathematics" [Hor]. Y cuando uno revisa detalladamente las subpartes en que está dividida la parte 1 del texto antes mencionado de "Philosophy of mathematics" de Benacerraf y Putnam [B-P], da la impresión de que Horsten tiene razón en su afirmación sobre lo difuso de la frontera entre ambas categorías, porque hay muchos temas comunes (entre otras razones).

Desde el siglo XX se ha demostrado que se pueden estudiar problemas de Fundamentos de la matemática o de Filosofía de la matemática usando métodos matemáticos, esto se hace a partir de la Lógica matemática. Ferreirós caracteriza este hecho de la siguiente manera [[Fe1], pp. 409]:

" El estudio de los fundamentos de la matemática es desde hace un siglo, competencia de la lógica matemática. Se trata de un fenómeno bien característico del siglo XX: la propia matemática trata de dar cuenta de sus bases convirtiendose en una ciencia "reflexiva" que da lugar a la llamada **Metamatemática**. *Por usar la habitual metáfora de la ciencia en tanto edificio, es como si la arquitectura tratara de extender su campo de estudio para dar cuenta también de las bases geológicas en que tienen que asentarse, por necesidad, sus construcciones."*

Se puede apreciar en la cita anterior que para Ferreirós la *Metamatemática* es la disciplina matemática que estudia los fundamentos de la matemática usando métodos matemáticos. ¿Cuáles métodos? Precisamente los métodos de la Lógica matemática, los cuales en la actualidad están clasificados como se dijo anteriormente en: *Teoría de conjuntos*, *Teoría de modelos*, *Teoría de la demostración*, *Computabilidad*, etc. Siguiendo el párrafo citado de Ferreirós y el contenido de los textos *"Introducción a la Metamatemática"* de Kleene [Kle] e *"Introduction to Mathematical Logic"* de Mendelson [Me] quizá se pueda decir que en la actualidad "Lógica Matemática" y "Metamatemática" son dos nombres distintos para designar la misma rama de la ciencia matemática.

Es importante resaltar también que tal vez se pueda decir que una parte importante de los teoremas de cada rama de la Lógica matemática (por no decir que todos) tienen al menos dos "dimensiones": Por un lado se pueden estudiar como teoremas matemáticos, sin más nada (sin otro valor agregado), y por otro lado se pueden usar (aplicar) como un método (o como resultados) para estudiar los fundamentos de la propia matemática, para hacer filosofía de la matemática. A continuación se presentan algunos ejemplos:

Ejemplo 1: El "Teorema de Ramsey" finito, infinito y para árboles (Teorema de Halpern-L*ä*uchli), estas tres versiones del Teorema de Ramsey se pueden estudiar y valorar (aplicarlos a diversas ramas de las matemáticas, por ejemplo) como tres teoremas matemáticos de combinatoria finita y de combinatoria infinita (respectivamente), y más nada, pero también ellos han sido y son utilizados para probar teoremas metamatemáticos, teoremas de fundamentos de la matemática o de filosofía de la matemática como por ejemplo: (1) Decibilidad: Ramsey probó con su teorema en 1930 que un fragmento específico de la Lógica de primer orden es decidible [Ra], este es un resultado valioso con respecto a dicha lógica pues se sabe, por el Teorema de Indecibilidad de Church de 1936, que la misma es indecidible en general [[Da], pp. 89-115], [[Me], pp. 222]. Y (2) las demostraciones de que el Teorema del Ideal Primo no implica al Axioma de elección que hicieron Halpern (1964) en la "Teoría axiomática de conjuntos con átomos" (ZFA), y Halpern y Levy (1967) en la "Teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, sin el Axioma de elección" (ZF). Estas pruebas son importantes para la filosofía de la matemática pues el Axioma de elección es uno de los más importantes principos de la matemática, y además, como el Axioma del elección implica al Teorema del Ideal Primo tales resultados permiten concluir que dicha implicación es estricta, es decir, el Axioma de elección es un principio matemático más fuerte que el Teorema del ideal primo. En la prueba de Halpern se usó el Teorema de Ramsey finito y el "Modelo de permutaciones totalmente ordenado de Mostowski". Y en la demostración de Halpern y Levy se usó el Teorema de Halpern-Läuchli y el "Modelo básico de Cohen", el cual se construye con el método de construcción de modelos llamado "forcing de Cohen" y permutaciones [H-L], [[J2], pp. 97-100], [D5].

Ejemplo 2: Otro ejemplo es el principio de combinatoria infinita llamado "Δ-Lema" demostrado por Shanin en 1946: Tal resultado puede ser estudiado y valorado como un teorema de combinatoria infinita (aplicarlo a diversas ramas de las matemáticas, por ejemplo), y más nada, pero el mismo fue fundamental también para que Cohen demostrara en 1963-1964 que la negación de la Hipótesis del continuo ($\neg$HC) es consistente con ZFC ("La Teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de elección"), usando el método de construcción de modelos llamado "forcing" [[Ku], pp. 207], [J1], [Co1], [Co2], lo cual permitió terminar la prueba de que la HC es independiente de ZFC, pues ya Gödel había probado en 1938 que la HC es consistente con ZFC, usando otro método de contrucción de modelos distinto al forcing de Cohen, "la clase de los conjuntos constructibles de Gödel", **L**, [[Ku], capítulo IV], [J1], [[Go1], pp. 191-293]. Y esta independencia de la HC de ZFC es un resultado de los fundamentos de la matemática o de la filosofía de la matemática que tiene que ver con el cardinal del conjunto de los números reales.

Ejemplo 3: Y el último ejemplo tiene que ver con la prueba de la independencia de la Hipótesis de Suslin de ZFC, un resultado de los fundamentos de la matemática o de la filosofía de la matemática que se refiere a la estructura del sistema de los números reales, y que se debe a Tennenbaum(1968), Jech (1967), Solovay-Tennenbaum(1971) y Jensen (1968,1972). En dicha demostración de independencia fueron fundamentales los dos principios de combinatoria infinita llamados "Axioma de Martin" y "Principio Diamante", y también una carácterización de las "Lineas de Suslin" en términos de "Árboles de Suslin" demostrada por Kurepa en 1935. En estas pruebas se usaron también los métodos de contrucción de modelos "constructibles de Gödel" y "forcing de Cohen" [[J3], pp. 216-232]. Tales principios combinatorios y la carácterización pueden ser estudiados y valorados en combinatoria infinita demostrando teoremas con los mismos (aplicarlos a diversas ramas de las matemáticas, por ejemplo), sin más nada, pero en este caso también fueron muy valiosos para la Filosofía de la matemática, para el estudio de los fundamentos de la matemática, pues permitieron demostrar que la Hipótesis de Suslin es independiente de ZFC.

El término "Metamatemática" fue usado por Hilbert (inicios del siglo XX) para designar su Programa formalista de fundamentación de la matemática platonista de finales del siglo XIX, también lo llamó "Teoría de la demostración" [[Kle], pp. 59], [[Hil], pp. 53]. El significado actual de "Metamatemática" se parece en algunos aspectos al original de Hilbert pero difiere en otros, por ejemplo en algunos métodos que se usan, en la concepción de la filosofía de la matemática y en la finalidad del mismo. Estas variaciones experimentadas a través del tiempo por la metamatemática tal vez son consecuencia o se manifiestan en los siguientes dos aspectos (entre otros):

(1) La demostración de los teoremas de Incompletitud de Gödel de 1931 [[Go1], pp. 45-89], de Indecibilidad de Church de 1936 y de Indefinibilidad de Tarski de 1936 [[Me], pp. 154-224] que afectaron severamente el éxito total del Programa original de Hilbert sobre los fundamentos de la matemática platonista, por ejemplo hoy en día ya no se busca "El fundamento de la matemática" con la metamatemática como sí era la finalidad de Hilbert con su programa original, eso ya no es el objetivo de dicha ciencia, tampoco los métodos de la metamatemática hoy en día tienen que ser necesariamente finitos como Hilbert lo propuso originalmente, pueden ser finitos o transfinitos (por ejemplo), también contemporáneamente con la metamatemática se estudian problemas de fundamentos de la matemática más específicos que el problema general del Programa original de Hilbert los cuales se abordan desde algunas de las ramas mencionadas de la Lógica matemática, como por ejemplo (a) problemas de consistencia relativa o independencia de los axiomas de una teoría matemática específica formalizada, (b) problemas de independencia de términos primitivos de una teoría matemática específica formalizada, (c) las propiedades de corrección, completitud, consistencia, decibilidad, categoricidad, etc, de teorías matemáticas específicas formalizadas, (d) técnicas de construcción de modelos, (e) fundamentos de métodos computacionales específicos, (f) resolver problemas abiertos específicos de cada una de las ramas de la lógica matemática (*Teoría de conjuntos*, *Teoría de modelos*, *Teoría de la demostración*, *Computabilidad*, etc) que en principio no se le ve relación directa con el estudio de los fundamentos de la matemática, pero que en dicha rama son importantes, etc.

Y (2) el enorme desarrollo de la Lógica matemática: Por ejemplo han ocurrido nuevos descubrimientos y demostraciones de muchos resultados Lógicos matemáticos que aportan nuevos métodos de investigación a dicha ciencia.

Como se dijo anteriormente, en este trabajo se estudiarán cuatro tópicos de la Metamatemática o de la Lógica matemática desde una perspectiva matemática y filosófica: *Ultraproductos, La Propiedad de Interpolación de Craig, Álgebras booleanas y Órdenes parciales separativos.* Y se analizará la importancia de los mismos para el estudio de los fundamentos de la matemática, desde el punto de vista del platonismo matemático. Ultraproductos es un método de construcción de modelos que se estudia (por ejemplo) en Teoría modelos y Teoría de conjuntos. La Propiedad de Interpolación de Craig es una propiedad de la Lógica de primer orden (y de otros sistemas lógicos) que se estudia (por ejemplo) en Teoría de modelos, Teoría de modelos abstracta, Teoría de la demostración, Computabilidad y Teoría de conjuntos. Las Álgebras booleanas se estudian (por ejemplo) en Teoría de modelos, Teoría de conjuntos y Computabilidad. Y los Ordenes parciales separativos se estudian (por ejemplo) en Teoría de conjuntos y Teoría de modelos. También se dijo anteriormente que el estudio matemático de tales tópicos se realizará en el contexto de la Teoría de Modelos. Con respecto a la Teoría de Modelos se puede afirmar que según Chang y Keisler [[Ch-K], pp. 1] y Manzano [[Ma], pp. 31] la frontera entre dicha teoría y el Álgebra Universal es difusa. Siguiendo a tales autores se entenderá en esta investigación que:

Álgebra Universal + Lógica = Teoría de Modelos

Se trabajará en Teoría de modelos desde el punto de vista del platonismo matemático, un platonismo matemático que quizá es muy parecido al que usan Chang y Keisler en su texto “Model Theory” [Ch-K], es decir, se hará Teoría Modelos usando informalmente como principios matemáticos los axiomas de ZFC. Preguntas: ¿Está bien fundamentada ZFC? ¿Está bien fundamentado el método que se usará para hacer Teoría de Modelos en este trabajo? ¿Es consistente y completa ZFC? ¿Es indispensable ZFC para nuestras mejores teorías científicas (ciencias naturales)? En la siguiente sección (2) se tratará de explicar estas preguntas y también las siguientes: ¿en qué consiste el platonismo matemático? ¿cuál es la relación que existe entre el platonismo matemático, los fundamentos de la matemática y ZFC? ¿Hoy en día existe un fundamento matemático y/o filosófico para el platonismo matemático? ¿En qué consiste el platonismo matemático moderado de Bernays? ¿Cuál es la escala de Bernays del platonismo matemático moderado?. Además de intentar responder las preguntas mencionadas anteriormente, el autor de este trabajo tratará de presentar en la sección 2 algunos argumentos filosófico-matemáticos a favor de la idoneidad científico-matemática del método que usan la mayoría de los matemáticos profesionales en la actualidad para hacer investigación matemática, es decir, para hacer su trabajo matemático ("el quehacer matemático cotidiano"), dicho método fue descrito por Bernays en 1934 como "platonismo matemático moderado", y el mismo tiene una infinita variedad de gradaciones (la cual se llamará en esta investigación "La escala de Bernays del platonismo matemático moderado"). En dichos argumentos filosófico-matemáticos que se intentarán ofrecer a favor del "platonismo matemático moderado" en algunos casos se recurrirá a los artículos de Gödel donde dicho autor expone su concepción platonista sofisticada de la matemática,"¿Qué es el problema del cardinal del continuo de Cantor?" (1947) [Go2] y "La lógica matemática de Russell" (1944) [Go4], al artículo de Neumann, "El Matemático" (1947) [Ne], y a la descripción de la concepción platonista sofisticada de la matemática de Gödel que hace Horsten en su artículo "Philosophy of Mathematics" (2012) [Hor], se hará énfasis en la concepción de la matemática de Gödel más que en la Neumann, la razón de esta elección quizá tiene que ver con la concepción metafísica u ontológica sobre la matemática que tiene el autor de este trabajo. También se considerará a Hilbert y a Quine-Putnan. Es importante destacar que el autor de esta investigación esta consciente de que el problema de los fundamentos de la matemática no tiene porque interesarle a todo matemático, pues, en principio, es un problema de Filosofía de la matemática, y no un problema matemático.

Como se dijo anteriormente la teoría axiomática de conjuntos ZFC se usará informalmente en este trabajo, sin embargo es concido que la misma se puede formalizar como una teoría axiomática en primer orden: Los axiomas lógicos son los del "Cálculo de predicados de la lógica clásica de primer orden", por ejemplo los que están descritos en los textos [E1], [Ch-K] y [D1], entre otros. Y los axiomas propios son: *Axioma de extensionalidad, Axioma del conjunto vacío, Axioma de pares, Axioma de la unión, Axioma del* *conjunto de partes, Axioma de reemplazo, Axioma de comprensión (o de separación), Axioma del infinito, Axioma de fundamentación o de regularidad y Axioma de elección*. Una descripción de tales axiomas se puede encontrar en los textos [D2], [J1] y [E2], entre otros. El estudio matemático y matemático-filosófico riguroso de ZFC se hace especialmente en la rama de la Lógica matemática que se llama "Teoría de conjuntos", por ejemplo en los textos [D2], [E2], [H-J], [Ku], [J1], [J4] y [Me], entre otros.

También en la Teoría de modelos se estudian algunos aspectos matemáticos y matemático-filosóficos importantes de ZFC y de la Teoría de conjuntos en general, en el texto [Ch-K], entre otros, por ejemplo en esta investigación se estudiarán tres importantes teoremas relativos a cardinales grandes (cardinales inaccesibles y cardinales medibles) en el ámbito de la Teoría de modelos siguiendo (principalmente) al texto [Ch-K]. Otros estudios rigurosos que se hacen de ZFC y de la teoría de conjuntos en general provienen de la filosofía, por ejemplo de las fuentes (entre otras) [B-P], [Hil], [Ber], [Q1], [Q2], [Q3], [Mad], [Hor], [To]. La primera formulación de ZFC se debe a Zermelo en 1908 [[Hij], pp. 199-215], y en el perfeccionamiento posterior de la misma influyeron Skolem, Fraenkel y Neumann, entre otros, hoy en día ZFC continúa evolucionando, información sobre el desarrolo histórico de ZFC desde su surgimiento hasta la actualidad puede encontrarse (entre otros) en las fuentes [To], [Mad], [J5], [Ba], [Mo1], [Mo2], [Mos], [Gar], [J1], [J2], [AJ] y [D4].

Ahora bien, teniendo presente que anteriormente se dijo cual es el objetivo de esta investigación y cual es metadología que se utilizará, es pertinente preguntarse ahora ¿Cuál es la contribución principal de este trabajo?. La respuesta se puede dividir en cuatro partes:

(1) La primera contribución de este trabajo es que en el mismo se presentan demostraciones detalladas y rigurosas de teoremas importantes de la lógica matemática relacionados con los ultraproductos, con la propiedad de interpolación de Craig, con los ordenes parciales separativos y con las álgebras booleanas, los cuales son de gran utilidad para el estudio de los fundamentos de la matemática desde el punto de vista del platonismo matemático. Y luego se aplican algunos de dichos teoremas para investigar problemas de fundamentos de la matemática, las aplicaciones que se hacen son demostradas rigurosamente y en detalle. Se hace explícito el por qué el problema que se

esta estudiando es un problema de fundamentos de la matemática, cuestión que no es común encontrar en la bibliografía consultada.

Casi todas las demostraciones que se realizan en este trabajo son conocidas, son clásicas, pero en algunos casos importantes se escriben versiones propias usando ideas y ejemplos de varios textos y del autor de este trabajo (el Teorema fundamental de ultraproductos, el Teorema de Interpolación de Craig para la Lógica proposicional, el Teorema de Interpolación de Craig para la Lógica de Primer orden, entre otros). El último teorema que se demuestra, "Todo orden parcial separativo se puede extender a una álgebra booleana completa", es un importante teorema muy conocido y la demostración que se hace aca es original del autor de este trabajo, más rigurosamente, la prueba es original de Jech pues el formula las definiciones de las operaciones booleanas sobre cortaduras regulares de un orden parcial separativo en sus textos "Set Theory" (1978) [[J3], pp. 152-153] y "Set Theory" (2000) [[J1], pp. 82-83], pero Jech no demuestra que tales operaciones satisfacen los axiomas de álgebra booleana, Jech deja esa labor para el lector de sus libros, y el autor de este trabajo usando ideas propias hace la demostración rigurosa y detallada de que tales operaciones satisfacen los axiomas de álgebra booleana.

(2) La segunda contribución de este trabajo es que en el mismo se hace explícito el por qué los métodos usados en las demostraciones son platonistas, es decir, se hace explícito la conexión de los métodos lógicos-matemáticos usados en las pruebas (los cuales son métodos matemáticos) con la filosofía platonista de la matemática, algo que no es usual en la mayoría de los textos de lógica matemática consultados.

(3) La tercera contribución de este trabajo es en el ámbito de la filosofía de la práctica matemática, pues en el mismo se reflexiona sobre algunos métodos de dicha ciencia.

(4) Y la cuarta contribución de este trabajo es con respecto al fomento de la investigación futura en Lógica matemática (Teoría de conjuntos, Teoría de Modelos, Teoría de modelos abstracta, Teoría de la demostración, Computabilidad, etc), Fundamentos de la matemática, Filosofía de la matemática, Filosofía de la práctica matemática, etc, pues en el mismo quedan sugeridos varios problemas interesantes en tales temáticas que pueden convertirse en proyectos de investigación futura.

El orden expositivo del trabajo es el siguiente:

En la siguiente sección (2) se intentará responder las siguientes preguntas: ¿En que consiste el platonismo matemático? ¿Cómo se relaciona el platonismo matemático con los fundamentos de la matemática y con ZFC? ¿ Es ZFC consistente y completa? ¿ Hoy en día existe un fundamento matemático y/o filosófico para el platonismo matemático? ¿Cuál es la escala de Bernays del platonismo matemático moderado? ¿Cuál es la relación entre el "quehacer matemático cotidiano" y el platonismo matemático moderado de Bernays?.

En la siguiente sección (3) se estudiará el método de construcción de modelos llamado ultraproductos en el contexto de la Teoría de Modelos siguiendo principalmente el texto de Chang y Keisler [[Ch-K], pp. capítulo 4], esto significa que como se dijo anteriormente se usará informalmente la Teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de elección (ZFC) tal como es presentada y desarrollada en los textos [D2], [E2], [H-J], [J1], [J3] y [Ku], entre otros. Se trabajará entonces en el contexto del platonismo matemático, en un grado fuerte de platonismo, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (como se explicará en la sección 2).

El método de ultraproductos fue inventado por Skolem (1930) y desarrollado luego por Loś (1955) [Ch-K] [Lo], y desde entonces se ha utilizado en los estudios de matemática (Análisis matemático, Teoría de la medida y probabilidades, Topología, Teoría de números, etc [[Cor], pp. III]), y de los fundamentos de la matemática [J1],[D3], [Ch-K], [Ma], siendo el mismo de gran utilidad para tales fines.

El estudio se realizará en el siguiente orden expositivo: En las subsecciones 3.2 y 3.3 se definirán las nociones y resultados necesarios para construir los ultraproductos, por ejemplo: Filtro, ultrafiltro, el Lema de Zorn, el Teorema del Ultrafiltro, Lenguajes de primer orden, Estructuras o interpretaciones, relaciones entre estructuras (subestructura, isomorfismo, inmersión elemental, elementalmente equivalentes, etc), satisfacibilidad y verdad en una estructura, etc. En la subsección 3.4 se definirán los ultraproductos y se demostrará el Teorema fundamental de los ultraproductos (Teorema de Loś) siguiendo ideas principalmente de [[Ch-K], capítulo 4], [[J1], parte I(12)] y [[Me], pp. 129-138]. Y algunas ideas del autor de este trabajo.

En la subsección 3.5 se describirán las demostraciones de algunos teoremas cuya prueba se realiza usando el Teorema fundamental de los ultraproductos: Una prueba directa del Teorema de compacidad (Γ *tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de* Γ *tiene un modelo*) y tres teoremas sobre cardinales grandes, específicamete sobre cardinales medibles ((i) *Compacidad débil: Una versión de Compacidad para lógicas infinitarias cuyo cardinal es un cardinal medible*, (ii) *Si un cardinal* κ *es medible, entonces* κ *es un cardinal inaccesible y existen* κ *cardinales inaccesibles menores que* κ, y (iii) *Si existe un cardinal medible, entonces el Axioma de constructibilidad es falso*). Vale la pena resaltar que las últimas pruebas mencionadas sobre cardinales medibles usan lógicas infinitarias y/o fragmentos de la Lógica de segundo orden, además que las mismas se realizan utilizando ideas (principalmente) de [[Ch-K], capítulo 4]. También se hace un esbozo de la construcción del cuerpo ordenado no arquimideano de los Hiper-Reales y del Análisis no estándar de Robinson [Rob1], a partir del Teorema de compacidad siguiendo (principalmente) a [[Ma], pp. 225-232] y [Cor]. Y en la última subsección 3.6 se hacen algunas consideraciones matemáticas, metamatemáticas y filosóficas sobre los ultraproductos, compacidad, Análisis no estándar y cardinales medibles.

En la siguiente sección (4) se estudiará la Propiedad de Interpolación de Craig. El objetivo de esta sección es presentar dos demostraciones del Teorema de Interpolación, una para la Lógica proposicional y otra para la Lógica de primer orden, y luego se conectarán tales resultados con el estudio de los fundamentos de la matemática, de la filosofía de la matemática. Ambas demostraciones se realizan en el contexto de la Teoría de Modelos. El Teorema de Interpolación afirma que si φ y ψ son fórmulas, y φ no es una contradicción, y ψ no es válida, y ψ es una consecuencia lógica de φ ($\varphi \models \psi$), entonces existe una fórmula δ que está escrita en un lenguaje común al de φ y ψ tal que $\varphi \models \delta$ y $\delta \models \psi$.

El Teorema de Interpolación fue demostrado por primera vez para la Lógica de primer orden por William Craig en 1957 ([C1], [C2]), y desde entonces se ha investigado la posibilidad de generalizarlo y aplicarlo. Dicho teorema tiene aplicaciones en Teoría de la Demostración ([C2], [F]), Teoría de Modelos Abstracta ([Va1], [F]), Ciencias de la Computación ([T], [Am]), Lógica Modal ([Ga-Mak], [Hoo]), Lógica Intuicionista ([Ga-Mak], [Hoo]), Filosofía de la ciencia ([Ga-Mak], [Hoo]), etc.

Existen distintas pruebas del Teorema de Interpolación para la lógica proposicional que aparecen en la bibliografía sobre el tema. En este trabajo se realizará una demostración que es constructiva (platonista matemática moderada constructiva, en el sentido de Bernays, sección 2) y usa el Principio de inducción matemática utilizando ideas de una prueba que se encuentra en [[Hu], pp. 79-80], entre otros, y algunas ideas y ejemplos del autor de este trabajo. Es importante destacar que el autor de esta investigación no conoce la fecha exacta de la demostración del Teorema de Interpolación para la Lógica proposicional, en consecuencia no sabe si se demostró antes o después de la prueba de Interpolación de Craig para la Lógica de primer orden.

También existen distintas pruebas del Teorema de Interpolación para la Lógica de primer orden [Va1], por ejemplo pruebas con métodos de Teoría de la demostración ([C1] y [C2], 1957), pruebas con métodos de la Teoría de Modelos (por ejemplo [Hen2], 1963) y pruebas con métodos de Teoría de juegos y Teoría de conjuntos (por ejemplo Svenonious, 1965, [Va1]). En este trabajo se realizará una demostración en el contexto de la Teoría de modelos utilizando ideas de una prueba que se encuentra en [[Ch-K], pp. 87-89] que es original de Henkin (1963) [Hen2], ella se hace utilizando otro método de Henkin (1949) [Hen1] de construcción de modelos a partir de constantes con el cual dicho autor probó el Teorema de completitud de Gödel en 1949 (con tal método se puede construir un modelo para una teoría T que sea consistente) generalizado con la noción de "Par de teorías inseparables", lo cual proporciona un nuevo método de construcción de modelos para la unión de dos teorías $T_1 \cup T_2$, donde T_1 y T_2 son inseparables y consistentes. Dicha demostración se realiza por reducción al absurdo usando el Principio del tercero exluído y el resto de los axiomas de ZF, no requiere del Axioma de elección. Por lo tanto es una demostración platonista, en un grado no tan fuerte de platonismo según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (se explicará en la sección 2). La prueba que se realizará acá usa también ideas y ejemplos del autor de este trabajo.

Según Feferman [F], a pesar de la aparente simpleza del Teorema de Interpolación de Craig éste es una propiedad lógica central que se ha utilizado para revelar una profunda armonía entre la sintaxis y la semántica de la Lógica de primer orden.

Dos consecuencias muy conocidas del Teorema de Interpolación de Craig son el Teorema de definibilidad de Beth (1953) y el Teorema de consistencia de Robinson (1956), también el Teorema de consistencia Robinson implica al Teorema de Interpolación de Craig, es decir, ambos Teoremas son equivalentes. Y una mejora del Teorema de Interpolación de Craig es el Teorema de interpolación de Lyndon (1959) [[Ch-K], pp. 92-93]. En este trabajo se presentará una demostración de Teorema de definibilidad de Beth y otra demostración del Teorema de consistencia de Robinson a partir del Teorema de Interpolación de Craig siguiendo el texto [[Ch-K], pp. 90-91], entre otros.

La revisión de bibliográfía especializada sobre la Propiedad de interpolación Craig revela que tal tema es bastante amplio y profundo, abarca (como se dijo antes) Teoría de la demostración, Teoría de modelos abstracta, Ciencias de la Computación, Lógica Modal, Lógica Intuicionista, Lógica de la relevancia, Filosofía de la Ciencia, etc. Por ejemplo un aspecto de la investigación es si dicha propiedad la cumplen otros sistemas lógicos (Lógicas infinitarias, lógicas con cuanificadores generalizados, lógica de segundo orden, lógicas no clásicas, etc), y se han obtenido resultados positivos y negativos al respecto. En esta sección se presentará un breve resumen sobre este importante tema. Algunas de estas investigaciones se pueden desarrollar sólo con ZF (y puede ser que con menos grados de platonismo matemático moderado), pero existen otras, por ejemplo las que se refieren a la Teoría de modelos abstracta que usan el concepto de “Sistema Lógico” o “Lógica abastracta” el cual requiere mínimo de todo ZFC, de modo que Teoría de modelos abstracta es platonista matemática moderada en un grado fuerte, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (se explicará en la sección 2).

El orden de presentación de la sección es siguiente: En la siguiente subsección 4.2 se describirá la demostración del Teorema de Interpolación para la Lógica proposicional. En la subsección 4.3 se describirá la demostración del Teorema de Interpolación para la Lógica de primer orden. En la subsección 4.4 se describirán las demostraciones del Teorema de definibilidad de Beth y del Teorema de consistencia de Robinson. En las subsección 4.5 se presentará un breve comentario sobre algunas generalizaciones del Teorema de interpolación Craig a otros sistemas lógicos. En la subsección 4.6 se presentará un breve comentario sobre una caracterización de la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$ usando interpolación en el contexto de la Teoría de modelos abstracta. En la subsección 4.7 se presentará un breve comentario sobre dos problemas abiertos en Teoría de modelos abstracta relacionados con la Propiedad de

Interpolación. Y en la última subsección 4.8 se presentarán algunas consideraciones matemáticas, metamatemáticas y filosóficas sobre la Propiedad de interpolación de Craig.

Y por último, en la sección 5, se estudiará una relación entre las Álgebras booleanas y los Órdenes parciales separativos. El objetivo principal de esta sección es presentar una demostración de que las cortaduras regulares de un orden parcial separativo forman un álgebra booleana completa. Tal resultado es muy conocido y existen pruebas del mismo, por ejemplo pruebas topológicas en [[Ku], pp. 63-64] y [[Ja], pp. 258-275] . Y una prueba de que los abiertos regulares de un espacio topológico forman un álgebra booleana, lo cual está estrechamente vinculado con este hecho, puede encontrarse también en [[Hal], pp. 12-16].

Sin embargo, el desrrollo de la prueba que se presentará aca es propio del autor de este trabajo y se basa en la demostración ofrecida por Jech en [[J1], pp. 81-83] y [[J3], pp. 152-154], por ejemplo usa las definiciones de las operaciones booleanas entre cortaduras regulares que se hace en [[J1], pp. 81-83] y [[J3], pp. 152-154]. En tales libros se formulan las definiciones y se enuncia el Teorema, pero no se hace explícito el por qué las mismas satisfacen las propiedades de álgebra booleana, Jech deja ese trabajo al lector, aquí se realiza una demostración de tal hecho usando ideas propias del autor de este trabajo.

El resultado de que a cada orden parcial separativo le corresponde una única (salvo isomorfismo) álgebra booleana completa, que se demuestra en este trabajo, se puede extender a todo orden parcial, y es conocido que el álgebra booleana completa de las cortaduras regulares de un orden parcial es isomorfa al álgebra booleana completa de los abiertos regulares de un espacio topológico inducido por tal orden parcial ([J1], [J3], [[Bel2], pp. 3-4], [Ku], [Ja], entre otros). Entre el orden parcial y su correspondiente álgebra booleana completa asociada existe una relación de “inmersión densa”, dicha relación es importante desde el punto de vista matemático, metamatemático y filosófico (de la matemática) pues permite inferir (entre otros) que las dos versiones del forcing más usadas contemporáneamente, forcing con ordenes parciales y forcing con álgebras booleanas completas son equivalentes, es decir, producen los mismos modelos de ZFC [[Ku], pp. 221-222], [[J3], pp. 154-156].

Es conocido que el método de forcing de Cohen [Co1], [Co2] es de gran utilidad (desde su creación en 1963-64) para realizar pruebas metamatemáticas de Teoremas metamatemáticos (independencia o consistencia relativa) y también para realizar pruebas metamatemáticas de Teoremas matemáticos [Solovay]. En consecuencia, el método de forcing es importante para estudiar la propia matemática y también para estudiar los fundamentos de la matemática, la filosofía de la matemática. Por lo tanto el resultado matemático que se demostrará en esta sección también es valioso para los estudios de los fundamentos de la matemática y de la filosofía de la matemática, desde el punto de vista del platonismo matemático, porque el forcing es un método platonista matemático, en un grado fuerte de platonismo, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (se explicará en la sección 2). Es un método platonista matemático moderado fuerte porque el usa (mínimo) a ZFC. Abundantes ejemplos de la aplicación de dicho método en distintas versiones contemporáneas (con ordenes parciales o con álgebras booleanas) pueden encontrarse en los textos [Ku], [J1], [J3], [J4] y [Bel2]. En tales ejemplos se podrá apreciar que los ordenes parciales o las álgebras boolenas que se usan en la aplicación del forcing para resultados relevantes tienen cardinal mayor o igual que $\aleph_0$ y además son estructuras infinitas actuales complejas que requieren de todo ZFC para definirlas y para operar con las mismas.

El orden de exposición será el siguiente: En la siguiente subsección 5.1 se presentará la definición de álgebra booleana y se describirán algunos ejemplos clásicos. En la subsección 5.2 se definirá Orden parcial separativo y se describirán algunos ejemplos clásicos. En la subsección 5.3 se definirán las operaciones booleanas para las cortaduras regulares de un orden parcial separativo y se demostrará que la estructura resultante es un álgebra booleana. Y en la última subsección 5.4 se presentarán algunas consideraciones matemáticas, metamatemáticas y filosóficas sobre el contenido de esta sección.

Para finalizar con esta introducción se informa que en toda esta investigación se suponen los conceptos básicos de la Teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC) tal como son presentados y desarrollados en los textos [D2], [E2], [H-J], [Ku], [J1] y [J3], entre otros.

2 El Platonismo matemático, los Fundamentos de la matemática y ZFC

¿En que consiste el Platonismo matemático? ¿Cómo se relaciona el Platonismo matemático con los Fundamentos de la matemática y con ZFC? ¿Está bien fundamentada ZFC? ¿Es consistente y completa ZFC? ¿Es indispensable ZFC para nuestras mejores teorías científicas (ciencias naturales)? ¿ Hoy en día existe un fundamento matemático y/o filosófico para el Platonismo matemático? ¿En qué consiste el Platonismo matemático moderado de Bernays? ¿Cuál es la escala de Bernays del platonismo matemático moderado? ¿Cuál es la relación entre el "quehacer matemático cotidiano" y el Platonismo matemático moderado de Bernays?.

Según la biliografía consultada Bernays fue el primero en usar (1934) el término "platonismo" en las matemáticas en su artículo *"El Platonismo en Matemática"* [Ber]. En dicho ensayo Bernays dice: *"Dado que esta tendencia se basó especialmente en la filosofía de Platón, me permito llamarla "platonismo""* [[Ber], pp. 16]. A continuación se intentará describir el platonismo en matemáticas con el apoyo de Bernays [Ber], Ferreirós [Fe2], Alemán Pardo [AA], Mosterín y Torretti [M-T] y Mosterín [Mos], entre otros. Y también se intentará responder el resto de las preguntas planteadas en el párrafo anterior.

Se puede afirmar que para Bernays [Ber] y Ferreirós [Fe2], entre otros, el platonismo matemático es el método peculiar ("el modo de razonar") que se usa para la investigación matemática en el Análisis matemático, en la Teoría de conjuntos, en el Álgebra moderna y en la Topología, entre otras disciplinas matemáticas. Existen varias modalidades de platonismo matemático que se pueden encontrar descritas en la bibliografía. Por ejemplo para Bernays hay "Platonismo absoluto", "Platonismo moderado" y "Platonismo constructivo" [[Ber], pp. 9,10,11], más adelante se decribirá brevemente a los mismos. Y para Ferreirós hay "Platonismo interno" y "Platonismo externo", dicho autor explica en que consisten ambos tipos de platonismo en las siguientes citas: (a) "*Platonismo* **interno** *o propiamente* **matemático***: es carácterístico de las teorías de la matemática abstracta o moderna, donde se hace referencia a elementos cuya existencia se postula y se considera dada, se podría hablar de* **existencia ideal**. Y (b) *"Platonismo* **externo***, ontológico, o propiamente*

filosófico*(una de las posibles interpretaciones filosóficas de la matemática, en particular de la característica antes señalada de la matemática abstracta): consiste en la afirmación de que los objetos matemáticos gozan de una* **existencia real***, análoga en algún sentido (aunque diferente) a la existencia de los objetos físicos"* [[Fe2], pp. 2].

Para complementar la descripción de Ferreirós, se coloca una cita de Alemán Pardo quien describe al platonismo matemático de una manera que hace explícito un importante aspecto epistemológico del mismo, es decir, "la necesidad de la intuición intelectual" para conocer las entidades matemáticas (como por ejemplo lo planteaba Gödel [Go2], [Hor]), algo que se considera fundamental y no está presente en el párrafo anterior de Ferreirós: [AA, pp. 16]

"Para el platonismo, la realidad que describen (verdadera o falsamente) los enunciados lógicos y matemáticos no es la realidad empírica que percibimos a través de nuestros órganos sensoriales. Se trata de una realidad ideal, abstracta, no perceptible por los sentidos, sino mediante una facultad especial de la razón llamada comúmnente "intuición intelectual". La naturaleza especial de los objetos lógico-matemáticos como entidades no espacio-temporales requiere postular correlativamente (al menos en algunas versiones del platonismo) un tipo especial de vía de acceso cognoscitivo a tal tipo de objetos; de ahí la apelación a la intuición."

Bernays en [[Ber], pp. 15-16] describe al platonismo matemático de la siguiente manera:

"Tales modos de razonar (peculiares al análisis y a la teoría de conjuntos) se aplicaron por primera vez sistemáticamente para dar una forma rigurosa a los métodos del cálculo. [de acuedo con éstos], los objetos de una teoría se tratan como elementos de una totalidad tal que permite razonar como sigue]: Para cada propiedad expresable usando las nociones de la teoría, es un hecho objetivamente determinado si hay o no un elemento de la totalidad que posea tal propiedad. Asi mismo, se sigue de este punto de vista que o bien todos los elementos de un conjunto poseen una determinada propiedad , o bien hay al menos un elemento que no la posee".

También Bernays en [[Ber], pp. 20] dice lo siguiente:

"No resulta exagerado afirmar que el platonismo reina actualmente en la matemática".

Con respecto a la segunda cita de Bernays se puede decir que aunque fue escrita en 1934 tal vez lo afirmado por el autor siga siendo cierto en la actualidad, lo que se escribe en el resto de toda esta sección quizá explica el porqué.

Siguiendo a Bernays [Ber] y [Fer2] se puede afirmar que ZFC es una teoría platonista matemática, con un grado fuerte de platonismo porque [[Fer2], pp. 9] : *"no sólo consiste en admitir el infinito actual en su forma más elemental,* **la totalidad de los números naturales***"*, si no que *"asume un supuesto más fuerte que consiste en la admisión de las nociones de conjunto y función tal como se usan en la matemática moderna: lo que suele llamarse las nociones* **abstractas***, o la idea de conjunto y funciones arbitrarios"* . Sin embargo, ZFC se podría considerar como una teoría platonista moderada en comparación con la llamada Teoría de conjuntos ingenua usada en sus investigaciones matemáticas o de fundamentos de la matemática por Cantor, Dedekind y Frege (entre otros) hacia finales del siglo XIX [Ca1], [Ca2], [Fre]. La Teoría ingena de conjuntos se considera una teoría platonista absoluta, pues en la misma se usaba (entre otros) el Principio de comprensión intuitivo,"Toda propiedad determina un conjunto", el cual permitó derivar paradojas como la de Russell, Cantor y Burali-Forti (entre otras) descubiertas hacia finales del siglo XIX e inicios del siglo XX [[Lip], pp. 185-186], [To]. A este Platonismo absoluto tal vez Bernays lo entiende de una manera parecida a como Ferreirós entiende su Platonismo externo [[Ber], pp. 20], pues se correponde con la concepción de la matemática de Cantor, Dedekind y Frege, según la bibliografía consultada, por ejemplo [Mos], [Fe2] y [Ca2].

Zermelo, en su axiomática original de 1908 para la teoría de conjuntos (la primera versión de ZFC) [[Hil], pp. 199-215] **restringió** el Principio de comprensión intuitivo (entre otros) *"para salvar la teoría creada por Cantor y Dedekind"* de las contradicciones [[Gar], pp. 524], y por tal restricción se puede considerar a ZFC como platonista moderada. La restricción del Principio de comprensión intuitivo en la axiomática original de Zermelo se llama "Axioma III: Axioma de separación" [[Hil], pp. 202]. La diferencia entre ambos principios matemáticos es descomunal, pues el Axioma de separación afirma: *Si A es un conjunto y $P(x)$ es una propiedad, entonces existe* *el conjunto* $\{x \in A : P(x)$ *es cierta*$\}$. (Para cualquier conjunto A y para cualquier propiedad P). El Axioma de separación no afirma que existe el conjunto $\{x : P(x)$ es cierta$\}$, lo cual sí es afirmado por el Principio de comprensión intuitivo. Y afirmar que existe el conjunto $\{x : P(x)$ es cierta$\}$ (para cualquier propiedad P) podría producir "colecciones **demasiado** grandes" que pueden implicar contradicciones como por ejemplo "el conjunto de todos los conjuntos", "el conjunto de todos los números ordinales", "el conjunto de todos los números cardinales", "el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a si mismos", etc.

Cuando Zermelo publicó su axiomática original en 1908 escribió al inicio de su artículo:

"La Teoría de conjuntos es la rama de la matemática que se ocupa de investigar las nociones de "número", "orden" y "función" y de desarrollar los fundamentos lógicos de toda la aritmética y el análisis, por lo tanto constituye un componente indispensable de la ciencia matemática".

Con esta cita de Zermelo, más todo lo anteriormente dicho en esta sección y en la introducción de este trabajo, ya se puede apreciar la conexión entre el platonismo matemático, los fundamentos de la matemática y ZFC. Simplificando bastante se puede decir que: El platonismo matemático es la metodología de la Teoría de conjuntos, del Análisis matemático, del Álgebra abstracta, la Topología, etc. ¿Y en qué consiste tal metodología? Ya han dado una respuesta casi completa a esta pregunta Bernays y Ferreirós en citas anteriores. La Teoría de conjuntos ingenua (Platonismo absoluto) de Cantor, Dedekind, Frege, etc, se usó en el siglo XIX para establecer los Fundamentos Lógico-matemáticos del Cálculo diferencial y del Cálculo integral de Newton y Leibniz de segunda mitad del siglo XVII ([To], [Mos], [Pa-Ba], [Robl], [Roy], [Ah]), por ejemplo se dieron definiciones rigurosas del concepto de "número real" como *clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales* (Cantor) y como *cortaduras de racionales* (Dedekind) [[E2], pp. 111-113]. Luego, a finales del siglo XIX e inicios del siglo XX esta fundamentación conjuntista (absoluta) entró en contradicción con el surgimiento de las paradojas de Russell, Cantor, Burali-Forti, etc, motivado por uno de sus métodos: El Principio de comprensión intuitiva. Este acontecimiento se suele llamar en la bibliografía "crisis de los fundamentos de las matemáticas". Luego se reparó la Teoría de conjuntos ingenua (el Platonismo absoluto) restringiendo sus métodos, por ejemplo el Principio de comprensión de intuitivo, mediante una axiomática ofrecida por Zermelo en 1908, tal axiomática se perfeccionó y se convirtió en ZFC, donde se puede desarrollar toda la matemática conocida hasta los momentos y con la cual se puede realizar investigación matemática y de los fundamentos de la matemática de gran nivel (Vale la pena resaltar que existen otras axiomáticas de la teoría de conjuntos posteriores y distintas a ZFC y que son muy interesantes [[Me], pp. 225-304]: Por ejemplo "Newmann-Bernays-Gödel" (NBG), "Morse-Kelley" (MK), "La Teoría de Tipos" (ST), "Dos Teorías de conjuntos Quine" NF y ML, y la mencionada en la introducción de este trabajo: "La Teoría de conjuntos con átomos" (ZFA)).

Sin embargo, con respecto a ZFC y los fundamentos de la matemática es pertinente la siguiente pregunta ¿El problema de los fundamentos de la matemática está resuelto con ZFC? Para responder esta interrogante puede ser útil (entre otras opciones) conocer la respuesta a otra pregunta planteada en la introducción de este trabajo ¿Es completa y consistente ZFC? Por los Teoremas de Incompletitud de Gödel de 1931 [[Go1], pp. 45-89] se conoce que ZFC es esencialmente incompleta y además que no se puede probar la consistencia de ZFC con sus propios métodos, de modo que la pregunta por la consistencia de ZFC es un problema abierto en la actualidad. Tal vez esto significa que ZFC no se pueda considerar como un fundamento de las matemáticas en el sentido estricto del término. Empero, ZFC se considera un fundamento razonable para las matemáticas en la comunidad lógico-matemática mundial [Mo1] al menos por seis razones, según la opinión del autor de este trabajo (algunas de las razones que expondré quizá las comparte [Mo1], entre otros):

(1) Todo teorema matemático conocido hasta los momentos se puede reformular en el contexto de ZFC y demostrar como un teorema del mismo, en este sentido ZFC es completa. (2) ZFC es una teoría axiomática en primer orden, es decir, ella está escrita en el marco de la Lógica de primer orden, y dicha lógica tiene (entre otras) las propiedades de Corrección, Completitud, Compacidad, Löwenheim-Skolem-Tarski hacia abajo y Löwenheim-Skolem-Tarski hacia arriba, importantes propiedades para la investigación matemática *que no posee juntas* ninguna otra Lógica de mayor capacidad expresiva que la Lógica de primer orden [F-T-E], [Li], [Ch-K]. (3) La comunidad matemática universal reconoce los inmensos aportes de la Teoría de

conjuntos, y en especial de ZFC, al desarrollo de la ciencia matemática y de los fundamentos de la matemática. (4) En principio, ZFC es completable. Por ejemplo se puede usar la "intuición matemática" para descubrir nuevas verdades conjuntistas y agregarlas a ZFC a los fines de aumentar su capacidad deductiva (Gödel, [Go2]), agregarlas después de examinarlas rigurosamente y mediante una prueba de consistencia relativa, pues hay que tener cuidado con las "intuiciones matemáticas", el Principo de comprensión intuitivo de la Teoría de conjuntos ingenua confirma la necesidad de tener esta precaución. O agregarle nuevos principios con gran poder explicativo (ricos en consecuencias matemáticas importantes) también mediante pruebas de consistencia relativa. (5) se tiene la esperanza de que ZFC sea consistente, ya que por ahora no se le conoce ninguna contradicción, y si apareciera una contradicción en la misma, se piensa que ZFC se podría restructurar para mejor, para avanzar más, para profundizar más, para penetrar más en la "noción de conjunto", en el conocimiento más verdadero sobre los conjuntos, y eso es extraordinario ¿Existe algún matemático que no quiera aproximar la verdad matemática?. Y (6) La simplicidad de la Lógica de primer orden.

Con las conclusiones parciales obtenidas hasta ahora vale la pena continuar profundizando en las preguntas ¿En que consiste el platonismo matemático? ¿Cómo se relaciona el platonismo matemático con los fundamentos de la matemática y con ZFC? ¿Está bien fundamentada ZFC? ¿Es consistente y completa ZFC? ¿Es indispensable ZFC para nuestras mejores teorías científicas (ciencias naturales)? ¿ Hoy en día existe un fundamento matemático y/o filosófico para el platonismo matemático? ¿En qué consiste el platonismo matemático moderado de Bernays? ¿Cuál es la escala de Bernays del platonismo matemático moderado? ¿Cuál es la relación entre el "quehacer matemático cotidiano" y el platonismo matemático moderado de Bernays?.

Anteriormente se habló del platonismo moderado desde el punto de vista de la restricción del platonismo absoluto, en especial de la restricción del Principio de comprensión intuitivo. Sin embargo vale la pena resaltar que por platonismo moderado Bernays entiende lo siguiente [[Ber], pp. 42]:

"al platonista moderado no le interesa en lo más mínimo saber "donde" existen las entidades matemáticas: en la mente de los hombres, en un paraíso platónico o en la mente de Dios. De lo que se trata es más bien de conocer qué relaciones formales mantienen las entidades abstractas entre sí y respecto de

los individuos que subsumen, y si es de alguna utilidad asumir la existencia de entidades caracterizadas por tales relaciones. En este sentido Russell de la segunda edición de los **Principia** *y el propio Gödel sostendrían un platonismo moderado".*

Quizá vale la pena resaltar dos cosas con respecto a la cita anterior: (a) Para el autor de este trabajo no necesariamente Gödel sostendría *totalmente* un platonismo moderado en el sentido de Bernays, según la bibliografía consultada ([Go2], [Hor], etc) el platonismo sofisticado y no ingenuo propio de Gödel podría ser más fuerte que el platonismo matemático moderado descrito por Bernays. Y (b) Para el autor de este trabajo el platonismo moderado que describe Bernays en su cita, ampliado con los nuevos métodos de la metamatemática contemporánea (Hilbert, Tarski, Gödel, Cohen, Solovay, Thennenbaum, Shelah, Chang, Keisler, Jech, Todorčević, Woodin, etc), nuevos métodos que se desarrollan en el contexto del platonismo moderado, modela la manera de trabajar de la mayoría de los matemáticos profesionales en la actualidad, modela "el quehacer matemático cotidiano", en este sentido lo que dijo Bernays en 1934, *"No resulta exagerado afirmar que el platonismo reina actualmente en la matemática"*, sigue siendo vigente en la actualidad.

¿Cuáles son los rasgos más platonistas de ZFC?. Respuesta: Tal vez se pueda decir que son tres de sus axiomas: (1) El Principio del tercero exluído ("Para cualquier proposición ϕ se cumple que (ϕ es verdadera o ϕ es falsa), (2) el Axioma del infinito ("Existe un conjunto inductivo", es decir, "Existe un conjunto A tal que $\emptyset \in A$ y para cada conjunto X, si $X \in A$, entonces $S(X) = X \cup \{X\} \in A$. Notar que como consecuencia de la propiedad de A que postula el axioma del infinito se cumple que A es infinito. Con este axioma (princialmente) se puede demostrar que en dicha teoría existe el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$), y (3) el Axioma de elección ("Todo conjunto tiene una función selectora").

Los tres axiomas antes mencionados son necesarios para desarrollar en ZFC la Teoría de los números transfinitos ordinales y cardinales de Cantor, teoría que llamó Hilbert *el "nucleo fundamental"* [[Hil], pp.90] de la Teoría de conjuntos ingenua de Cantor, en el caso del desarrollo de la aritmética transfinita cardinal es estrictamente necesario usar el Axioma del elección. Desde sus orígenes los números transfinitos ordinales y cardinales de Cantor fueron fuertemente cuestionados (entre otros) por los matemáticos que sostienen la

Filosofía de la matemática intuicionista (o constructivista), como por ejemplo Kronecker, Brouwer, Heyting, etc. Alemán Pardo describe al Inticionismo de la siguiente manera [[AA], pp. 17-18]:

"Frente al descriptivismo, compartido por platonismo y empirismo, aparece el constructivismo negando directamente la tesis común a ambos: los enunciados lógico-matemáticos no describen ningún tipo de realidad (ni ideal ni natural) preexistente a la propia actividad constructiva del matemático. La función propia de los enunciados lógico-matemáticos no es describir, sino **construir formas** *que pueden ser empleadas en la descripción de la realidad. Pero la realidad que se alude aquí no es la realidad ideal que pretende describir el platónico. En este punto el constructivismo coincide con el empirismo: no hay necesidad de postular dos tipos de realidad habitadas por dos tipos de objetos de naturaleza ontológica heterogénea: objetos empíricos espacio-temporales y objetos abtractos fuera del espacio-tiempo. Para el constructivismo no es necesario postular la existencia de objetos fuera del espacio-tiempo a fin de dar cuenta de la naturaleza de la lógica y la matemática, pues si los enunciados lógico-matemáticos no funcionan como descripciones, entonces no hace falta postular ninguna clase de objetos que describir."*

¿Cómo entender en la cita anterior la expresión "construir formas"?: "construir formas" significa para los intuicionistas hacerlas matemáticamente usando "procedimientos finitos y efectivamente computables" a partir de los números naturales considerados como ladrillos básicos, entendiendo a los números naturales como una sucesión infinito potencial (no como un conjunto infinito actual) [Hey1], [[Hey2], "Una disputación", pp. 13-22], [[Hey2], "II. Aritmética", pp. 23], [B-P], [AA]. Un ejemplo de "procedimiento finito y efectivamente computable" podría ser un procedimiento que se pueda caracterizar por una "función recursiva" de Gödel [[Go1], pp. 55-89], [[Me], pp. 174-175].

Con respecto a los números naturales, se puede encontrar en la bibliografía una proposición muy conocida atribuida al intuicista Kronecker que quizá valga la pena analizar por sí misma en el futuro, pero que sale del ámbito de estudio de la presente investigación: *" Dios hizo los naturales, el resto es obra del hombre"* [Mart], [[Ma], pp. 245]. Valdría la pena relacionarla (entre otras) con una afirmación de Cantor de una naturaleza ontológica (metafísica, teológica) parecida a la Kronecker pero quizá más fuerte: *"...los* *números enteros existen en el grado sumo de realidad, en tanto separados como en su totalidad actualmente infinita, en la forma de ideas eternas in intellectu Divino"* [[Fe2], pp. 1]. También puede ser importante compararla con otra afirmación de la misma naturaleza atribuida al atrónomo, filósofo, ingeniero, matemático y físico Galileo Galilei (1564-1642): *"Las matemáticas son el lenguaje en que Dios escribió el universo"* o *"La filosofía está escrita en este grandísimo libro que continuamente está abierto ante nuestros ojos (digo: el universo), pero no puede entenderse si antes no se procura entender su lengua y conocer los carácteres en los cuales está escrito. Este libro está escrito en lenguaje matemático, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es totalmente imposible entender humanamente una palabra, y sin las cuales nos agitamos vanamente en un oscuro laberinto"* [[FM], pp. 1426]. También compararla con una afirmación de una naturaleza parecida atribuida al físico y matemático Isaac Newton (1642-1727) que aparece en la bibliografía consultada como escrita en su magna obra de 1687 "Philosophia Naturalis Principia Mathematica" ("Principios Matemáticos de la Filosofía Natural"): *"Estas palabras tenía que escribirlas sobre Dios, que el estudio de Sus obras es el papel de la ciencia"* [[Cho], pp. 8], [[FM], pp. 2542-2545]. Y también con la busqueda que tenía uno de los mejores amigos Gödel, el destacado físico teórico Albert Einstein (1879-1955): *"la teoría del campo unificado"* [[FM], pp. 980-981], [Shah]. Analizar la concepción de la matemática que está detrás de todas estas frases y búsqueda (la metafísica involucrada en ellas), y poner las mismas en relación con la matemática contemporánea, la ciencia contemporánea, la filosofía contemporánea, y en general, con todo el conocimiento universal contemporáneo (sistemático o intuitivo), es un tema que interesa investigar al autor de este trabajo, pero escapa al ámbito del mismo, se deja para investigaciones futuras.

Para los intuicionistas los números transfinitos de Cantor no eran entidades matemáticas y por lo tanto su teoría tampoco era matemática. En la actualidad los seguidores de la Filosofía de la matemática intuicionista, consistentes con sus principios (finito-constructivistas), rechazan los tres axiomas de ZFC mencionados anteriormente como principios matemáticos universalmente válidos, y si se elimanan tales axiomas no se puede desarrollar el "nucleo fundamental" de la Teoría de conjuntos, teoría de quien Hilbert dijo *"en mi opinión, el sistema de Cantor constituye no sólo la flor más admirable que el espíritu matemático ha producido, sino igualmente uno de* *los logros más elevados de la actividad intelectual humana en general"* [[Hil], pp. 89]. El rechazo de los intuicionistas a dichos tres axiomas se explica a continuación:

Con respecto al Principio del tercero excluído pasa que nadie ha dado un procedimiento finito y efectivo que permita decidir que para cualquier proposición matemática ϕ, ocurre ϕ o $\neg\phi$, en consecuencia tal principio para los intuicionistas no puede ser aceptado como una proposición matemática verdadera, ni siquiera como una proposición matemática, salvo en el caso que se esté trabajando con universos finitos, donde si es decidible y efectivamente computable la verdad o falsedad de la misma. Vale la pena resaltar que también el Principio del tercero exluído permite demostrar existencia por el método de reducción al absurdo, y los intuicionistas no aceptan pruebas de existencia por esta vía, para ellos "existir" significa "poder ser construído usando procedimientos finitos y efectivamente computables".

En cuanto al Axioma del infinito el mismo postula la existencia de un conjunto infinito sin ofrecer un procedimiento finito y efectivamente computable para construir tal conjunto, entonces para los intuicionistas tal axioma no puede ser aceptado como una proposición matemática verdadera, ni siquiera como una proposición matemática.

En relación al Axioma de elección dicho axioma postula la existencia de una función selectora sin ofrecer un procedimiento finito y efectivamente computable que permita construirla, entonces para los intuicionistas tal axioma no puede ser aceptado como una proposición matemática verdadera, ni siquiera como una proposición matemática, a menos que se esté hablando de conjuntos finitos, donde si es decidible y efectivamente computable la definición de la misma.

Sin embargo, vale la pena destacar que el intuicionismo también puede ser interpretado como platonismo matemático según Bernays [[Ber], pp. 11], específicamente como una modalidad del platonismo moderado, como un tipo de platonismo moderado constructivo, pues es conocido que los "procedimientos finitos y efectivamente computables" pueden parar en un número natural n **muy grande** que el ser humano no puede construir en la práctica con el pensamiento. Un ejemplo en la actualidad se puede encontrar en la computación con las diferencias que existen entre "computable teóricamente" y "computable en la práctica", la primera no implica a la segunda, y ocurre que el intuicionista está en el ámbito de "computable teóricamente", por lo tanto el intuicionista es un platonista. Lo Monaco y Sánchez, en su introducción al texto [Ber] expresan esto de la sigiente manera:

"Como quiera que sea, lo más importante del análisis de Bernays es que la escuela **intuicionista** *puede ahora pasar a interpretarse como una especie de platonismo moderado constructivo. En efecto, en el sentido en que Bernays usa el término, los intuicionistas serían platonistas que aceptan la existencia de sólo algunas entidades abstractas, incluso aquellas entidades que no han sido siquiera mentalmente construidas. Por ejemplo, es azaz inverosímil que alguien tenga tiempo y bríos para construir el número* $10^{10^{10}}$*. Pues bien, los intuicionistas aceptarían la existencia de tal número, pues admiten la existencia de cualesquiera entidades para las que pueda establecerse un método por medio del cual "en principio" podrían ser efectivamente construidas"* [[Ber], pp. 11].

Para Ferreirós [[Fe2], pp. 9] el platonismo matemático según Bernays tiene dos extremos: El platonismo moderado constructivo instuicionista y el platonismo absoluto de la Teoría de conjuntos ingenua. El primero se puede defender a pesar de que limita enormemente las posibilidades teóricas, la segunda no se puede sostener por el problema de las paradojas. Entre tales extremos caben multiples posibilidades de grados de platonismo. En este trabajo se llamará a esta gradación: **La escala de Bernays del platonismo matemático moderado**.

Con respecto al platonismo y al intucionismo (constructivismo) Bernays afirma que ambos son necesarios para la ciencia matemática [[Ber], pp. 35]:

"Lo anterior es suficiente para mostrar que las dos tendencias, intuicismo y platonismo, son ambas necesarias; se complementan mutuamente con lo cual no tiene sentido renunciar a ninguna de ellas".

La relación entre el platonismo matemático y el intuicionismo (constructivismo) es presentada por Mosterín y Torretti desde un punto de vista interesante en la siguiente cita que aporta a esta investigación, pues se refieren a un resultado metamatemático (lógico matemático) de Gödel que relaciona ambas concepciones filosóficas de la matemática (*"la aritmética intuicionista* *no es más segura que la aritmética platonista"*) y también hablan del problema de los fundamentos de la matemática en el pasado reciente y en el presente [[M-T], pp. 307-308]:

"El programa intuicionista requiere abandonar el análisis matemático habitual y sustituirlo por una nueva matemática intuicionista, que emplea nuevas nociones, como la de secuencia de elecciones. El problema de las paradojas desaparece, pues son meras combinaciones de palabras a las que no corresponde construcción mental alguna. Durante cierto tiempo, el exigente intuicionismo paracía ofrecer la opción más segura para el desarrollo consistente de las matemáticas. Sin embargo, en 1932 Gödel probó que hay una manera de traducir la lógica y la aritmética clásica a la intuicionista, de tal manera que cualquier fórmula clásica válida es también intuicionistamente válida y a cualquier posible contradicción en la teoría clásica correspondería otra contradicción en la intuicionista. En otras palabras, Gödel probó la consistencia relativa de la lógica y la aritmética clásica respecto a la intuicionista. Por lo tanto la segunda no es más segura que la primera. Esto redujo considerablemente el atractivo del programa intuicionista. Además, la matemática intuicionista tiene que renunciar a gran parte de la riqueza, potencia y elegancia de la matemática clásica, así como a muchos de sus resultados y métodos. Además, en los casos en que los teoremas clásicos coinciden con los intuicionistas, las pruebas de los mismos resultados se vuelven mucho más complicadas. Por todo ello el intuicionismo no ha logrado gran aceptación en la comunidad científica y sigue siendo cultivado por una fracción minoritaria de los matemáticos, sobre todo en Holanda. De todos modos, la prueba de que un resultado clásico puede también obtenerse con los austeros medios intuicionistas es interesante por sí misma, con independencia de lo que uno pueda pensar de esta peculiar filosofía de la matemática."

Volviendo a ZFC la noción de "constructivo" en dicha teoría se usa en un sentido más amplio que el que sostiene la Filosofía de la matemática intuicionista, "construcción" en ZFC **incluye** la construcción intuicionista y la **extiende** para poder trabajar con conjuntos infinitos (actuales) y sistemas infinitos (actuales): El sistema de los números naturales, el sistema de los números enteros, el sistema de los números racionales, el sistema de los números reales, el sistema de los números complejos, $\mathbb{R}^n$, los números transfinitos ordinales y cardinales de Cantor, estructuras algebraicas generalizadas, espacios topológicos, lenguajes formales infinitarios, Sintaxis y

Semántica de sistemas formales de lógica que dependen de conjuntos infinitos actuales, etc. Lo que trae enormes ventajas para la investigación matemática desde dos puntos de vista: (1) la investigación dentro de las diversas teorías matemáticas específicas, y (2) la investigación sobre los fundamentos de la matemática. Las herramientas básicas de construcción en ZFC son sus axiomas lógicos y sus axiomas propios. Es sobresaliente resaltar algo que se ha dicho anteriormente en este trabajo: Los grandes aportes de ZFC a la investigación matemática hoy en día son reconocidos por la mayoría de los miembros de la comunidad matemática mundial [Fe1], [Mo1], [J5], [Ba]. ZFC y la Lógica matemática en general también aportan mucho a la Filosofía (contemporánea) de las ciencias naturales [[Mou], pp. 13], entre otras ramas del saber humano.

Vale la pena resaltar que a pesar del inmenso poder constructivo y deductivo que tiene ZFC dicha teoría cumple con el principio de limitación del tama*ñ*o (para evitar las paradojas conocidas), es decir, sus axiomas de existencia no introducen conjuntos demasiado grandes y los axiomas de construcción de conjuntos a partir de otros que ella tiene no permiten construir conjuntos demasiado grandes [[Mad], Cap.3: The Standard Axioms]. Esto implica que en ZFC no existen clases demasiado grandes como por ejemplo "el conjunto de todos los conjuntos" y "el conjunto de todo los ordinales", mencionados anteriormente. En la ontología determinada por ZFC sólo existen conjuntos, el universo determinado por ZFC es la clase de *La jeraquía acumulativa de conjuntos de von Neumann*, *El Universo de von Neumann*,**V**, la cual se construye a partir del conjunto vacío y del Axioma de partes usando inducción transfinita sobre los ordinales. **V** es una clase propia, no es un conjunto, y es tan grande como se quiera, es abierta porque la clase de los ordinales es infinita potencialmente (también es abierta, no está acotada). Y en **V** están todas las entidades matemáticas conocidas hasta la actualidad (o hay una copia isomorfa de las mismas) [D2], [J1], [Ku].

Ahora se mencionará otro intento filosófico de justificar al platonismo matemático que es distinto al utilizado por David Hilber en su Programa formalista (Metamatemática) referido en la introducción de este trabajo: Es el "Argumento de indispensabilidad de Quine-Putnan", el mismo suele formularse de la siguiente manera [Hor]:

Hay que tener compromisos ontológicos con todas las entidades, y sólo *con ellas, que son indispensables para las mejores teorías científicas (por ejemplo para las mejores teorías físicas). Las entidades matemáticas son indispensables para las mejores teorías científicas. En consecuencia: hay que tener compromisos ontológicos con las entidades matemáticas*

Sin embargo, tal argumento de indispensabilidad de Quine-Putnan no es aceptado por todos los filósofos de la matemática como suficiente para justificar la existencia de todas las entidades matemáticas que se construyen con ZFC, por ejemplo en el campo numérico se quedan por fuera los números transfinitos ordinales y cardinales de Cantor pues ellos no se usan (por los momentos) en las teorías científicas (las ciencias naturales) [Hor]. Pero los números transfinitos son el núcleo fundamental de ZFC, y de la teoría de conjuntos en general, entonces el argumento de indispensabilidad de Quine-Putnan no es suficiente para fundamentar ontológicamente a ZFC. Quizá tampoco puede fundamentar (hoy en día) a todo el Análisis real y complejo.

Se infiere de lo anteriormente dicho en esta sección que el Programa formalista original de Hilbert y el Argumento de indispensabilidad de Quine-Putnan son dos intentos muy interesantes para fundamentar matemática y/o filosóficamente el platonismo en matemática. Pero como se dijo antes el Programa de Hilbert no tuvo éxito total (por Gödel, Tarski, Church, etc), es decir falla para ZFC, entre otros. En la filosofía de la matemática sostenida por Hilbert, si se hubiese probado la consistencia y completitud de ZFC eso implicaría que existen las entidades de las cuales habla dicha teoría y además que las leyes que las rigen, los axiomas, son verdaderas [Mos], por ello (entre otras razones) tal programa implicaba la fundamentación del platonismo matemático. El Argumento de indispensabilidad de Quine-Putnan no es aceptado totalmente como un fundamento para ZFC por las razones antes mencionadas. Es decir, ZFC no tiene fundamentos matemáticos, ni filosóficos, al menos por esas dos propuestas de fundamentación referidas. Y como ZFC es una teoría platonista matemática (genuina) esto quiere decir que el platonismo matemático (genuino) no tiene fundamentos matemáticos, ni filosóficos en la actualidad, al menos por esas dos propuestas de fundamentación mencionadas. Y la tendencia de ZFC es a aumentar su nivel de platonismo pues existen investigaciones a los fines de ampliar su capacidad deductiva por medio de la incorporación a la misma de nuevos axiomas (Axiomas de grandes cardinales, Axioma de Martin Máximo (MM), Axioma de Forcing propio (PFA), etc), estos candidatos a nuevos axiomas son más fuertes que los de ZFC desde el punto de vista platonista [Ba1], [D4], [AJ], [J1].

Las conclusiones del párrafo anterior sugieren una reflexión matemática y filosófica (sin necesidad de analizar otras concepciones filosóficas de la matemática existentes en la actualidad que puedan ser capaces de fundamentar a ZFC , ni de estudiar otros métodos más poderosos a los existentes que pueda crear la matemática para estudiar sus propios fundamentos): ¿Dejarán los matemáticos de hacer matemática si los métodos que usan en "el quehacer matemático cotidiano" no tienen fundamentos matemáticos, ni filosóficos? ¿Desaparecerán las preguntas filosóficas de matemáticos y/o filósofos por los fundamentos de la matemática (ontológicas, espistemológicas, metodológicas, etc) si no se encuentran respuestas satisfactorias?. Según la historia de la humanidad, la búsqueda del conocimiento matemático y del conocimiento filosófico no se ha detenido por estos problemas, tales estudios han continuado, en consecuencia la respuesta a las dos preguntas anteriores podría ser que NO [Pa-Ba], [Hor], [Mou], [FM].

Lo expresado en el párrafo precedente quizá pueda explicarse considerando la siguiente hipótesis: "Existe LA VERDAD y todos los seres humanos por naturaleza desean conocerla, o aunque sea aproximarla". Hipótesis que se asume en todo este trabajo. La búsqueda de LA VERDAD es un acontecimiento físico y metafísico que hace posible que todo el conocimiento humano universal (científico, filosófico, etc) avance, en particular, posibilita el avance de la Ciencia matemática y de la Filosofía de la matemática. ([TK], [Pla], [Aris], [Kan], [Hor], [B-P], [Hil], [Ber], [AA], [Go2], [Go4], [[Mos], Cap 2: Georg Cantor], [Maim1], [Maim2], [Maim3], [Mou], [Pa-Ba], [Shah]).

Entonces parece razonable concluir de toda esta sección lo siguiente:

El platonismo matemático moderado descrito por Paul Bernays en su ensayo de 1934, que incluye a ZFC, ampliado con los nuevos métodos de la Metamatemática contemporánea, que incluyen también a ZFC, los cuales son igualmente platonista matemático moderados, puede ser el método más utilizado e idoneo que existe en la actualidad para "el quehacer matemático cotidiano", es decir, podría ser el método más adecuado para que los matemáticos profesionales continuen haciendo sus investigaciones en matemática pura en las distintas ramas de dicha ciencia, y para investigar problemas específicos de fundamentos de la matemática desde la propia matemática. Esto es así, a pesar de los “Problemas normales” de falta de fundamentación matemática y filosófica que enfrenta el platonismo matemático moderado en la contemporaneidad. Se dice “Problemas normales” porque en algunos aspectos la búsqueda de LA VERDAD por parte de los seres humanos parece proceder (naturalmente) por ensayo y error, quizá por nuestros (naturales) límites físicos y metafísicos, y de esto no escapa la búsqueda de LA VERDAD MATEMÁTICA.

En este sentido, el criterio para fundamentar una teoría matemática platonista moderada podría ser el siguiente (sugerencia del autor de este trabajo): *Una teoría matemática platonista moderada está bien fundamentada si y sólo si ella modela alguna región de la realidad: física o metafísica.* Para el aspecto metafísico del criterio puede pensarse en un platonismo sofisticado y no ingenuo como el que Gödel sostiene en sus artículos, “¿Qué es el problema del cardinal del continuo de Cantor?” (1947) [Go2] y “La lógica matemática de Russell” (1944) [Go4], o en otra versión fuerte de platonismo sofisticado que no sea ingenuo. La elaboración de este criterio esta motivada (entre otros) por la concepción platonista sofisticada de la matemática de Gödel, la cual puede resumirse de la siguiente manera siguiendo el artículo “Philosophy of Mathematics” (2012) de Horsten [[Hor], 3.1]:

“Gödel era un platonista con respecto a los abjetos matemáticos y con respecto a los conceptos matemáticos. Pero su visión platonista era más sofísticada que la del común de los matemáticos. Gödel sostuvo que existe un fuete paralelismo entre teorías plausibles de objetos matemáticos y sus conceptos, por un lado, y teorías plausibles de objetos físicos y sus propiedades por otro. Al igual que los objetos físicos y su propiedades, los objetos matemáticos y sus conceptos no son construídos por los seres humanos. Al igual que los objetos físicos y sus propiedades, los objetos matemáticos y sus conceptos no son reducibles a entidades mentales. Los objetos matemáticos y sus conceptos son tan objetivos como los objetos físicos y sus propiedades. Los objetos matemáticos y sus conceptos son, como los objetos físicos y sus propiedades, postulados para obtener una teoría altamente satisfactoria de nuestra experiencia. De hecho, de una manera análoga a nuestra relación perceptual con los objetos físicos y sus propiedades, a través de la **intuición matemática** *nos encontramos en una relación casi-perceptual con los objetos matemáticos*

y sus conceptos. Nuestra percepción de los objetos físicos y sus conceptos es falible y puede ser corregida. Del mismo modo la intuición matemática no es infalible (como lo demuestra la historia de la Ley Básica de Frege) pero puede ser entrenada y mejorada. A diferencia de los objetos físicos y sus propiedades, los objetos matemáticos no existen ni en el espacio ni en el tiempo, y los conceptos matemáticos no se instancian ni en el espacio ni en el tiempo."

El criterio expresado anteriormente también esta motivado por el artículo "El Matemático" (1947) de Neumann [Ne], realmente esta más motivado por Gödel que por Neumann, pero Neumann manifiesta en el artículo mencionado su preocupación por responder a la pregunta ¿qué se puede hacer para que la matemática no llegue a la vanalización cuando se encuentra en niveles muy abstractos? y plantea una solución para ello, en pocas palabras y según entiende el autor de esta investigación: volver al mundo espacio-tiempo. La preocupación de Neumann le parece muy importante al autor de este trabajo, aunque podría no estar de acuerdo totalmente con la solución que Neumann propone pues le parece que podría ser muy restrictiva del "quehacer matemático cotidiano", el autor de esta investigación se inclina por una respuesta a tal pregunta que considera más general que la de Neumann desde el punto de vista metafísico u ontológico, esta respuesta queda razonablemente recogida por la postura de Gödel anteriormente mencionada, aunque puede ser más general que la de Gödel, pues por ejemplo además de la "intuición matemática" los seres humanos también pueden poseer una "intuición metafísica general" (tal vez Gödel no rechazaría esta posibilidad). Quizá el criterio expresado contiene estrictamente al Programa metamatemático de Hilbert, y también contiene estrictamente al argumento de indispensabilidad de Quine-Putnan.

3 El Método de contrucción de modelos llamado Ultraproductos

3.1 Introducción

En esta sección se estudiará el método de construcción de modelos llamado ultraproductos en el contexto de la Teoría de Modelos siguiendo principalmente el texto de Chang y Keisler [[Ch-K], pp. capítulo 4], esto significa que se usará informalmente la Teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el Axioma de elección (ZFC) tal como es presentada y desarrollada en los textos [D2], [E2], [H-J], [J1], [J3] y [Ku], entre otros. Por lo tanto, se trabajará en el contexto del platonismo matemático, en un grado fuerte de platonismo, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2).

El método de ultraproductos fue inventado por Skolem en 1930 y luego desarrollado por Loś en 1955 [[Ch-K], pp. 211] [Lo], y desde entonces se ha utilizado en los estudios de matemática (Análisis matemático, Teoría de la medida y probabilidades, Topología, Teoría de números, etc [[Cor], pp. III]), y de los Fundamentos de la matemática [J1],[D3], [Ch-K], [Ma], siendo el mismo de gran utilidad para tales fines.

El estudio se realizará en el siguiente orden expositivo:

En las subsecciones 3.2 y 3.3 se definirán las nociones y resultados necesarios para construir los ultraproductos, por ejemplo: Filtro, ultrafiltro, el Lema de Zorn, el Teorema del Ultrafiltro, Lenguajes de primer orden, Estructuras o interpretaciones, relaciones entre estructuras (subestructura, subestructura elemental, isomorfismo, inmersión elemental, elementalmente equivalentes, etc), satisfacibilidad y verdad en una estructura, etc.

En la subsección 3.4 se definirán los ultraproductos y se demostrará el Teorema fundamental de los ultraproductos (Teorema de Loś) siguiendo ideas principalmente de [[Ch-K], capítulo 4], [[J1], parte I(12)] y [[Me], pp. 129-138]. Y algunas ideas del autor de este trabajo.

En la subsección 3.5 se describirán las demostraciones de algunos teoremas cuya prueba se realiza usando el Teorema fundamental de los ultraproductos: Una prueba directa del Teorema de compacidad (Γ *tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de* Γ *tiene un modelo*) y tres teoremas sobre cardinales grandes, específicamete sobre cardinales medibles ((i) *Compacidad débil: Una versión de Compacidad para lógicas infinitarias cuyo cardinal es un cardinal medible*, (ii) *Si un cardinal κ es medible, entonces κ es un cardinal inaccesible y existen κ cardinales inaccesibles menores que κ*, y (iii) *Si existe un cardinal medible, entonces el Axioma de constructibilidad es falso*). Vale la pena resaltar que las últimas pruebas mencionadas sobre cardinales medibles usan lógicas infinitarias y/o fragmentos de la Lógica de segundo orden, además que las mismas se realizan utilizando ideas (principalmente) de [[Ch-K], capítulo 4]. También se realiza un esbozo de la construcción del cuerpo ordenado no arquimideano de los Hiper-Reales y del Análisis no estándar de Robinson [Rob1], a partir del Teorema de compacidad siguiendo (principalmente) a [[Ma], pp. 225-232] y [Cor].

Y en la última subsección 3.6 se hacen algunas consideraciones matemáticas, metamatemáticas y filosóficas sobre los ultraproductos, compacidad, Análisis no estándar y cardinales medibles.

3.2 Filtros, Ultrafiltros, Lema de Zorn, Teorema del Ultrafiltro

Definición 3.2.1.

- *Un filtro sobre un conjunto no vacío S es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S tal que:*

  (i) $S \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

  (ii) Si $X \in \mathcal{F}$ y $Y \in \mathcal{F}$, entonces $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

  (iii) Si $X \in \mathcal{F}$ y $X \subseteq Y$, entonces $Y \in \mathcal{F}$.

- *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto S. $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si para cualquier $X \subseteq S$ se cumple que:*

$$X \in \mathcal{F} \leftrightarrow S \setminus X \notin \mathcal{F}.$$

- *Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre un conjunto S. $\mathcal{F}$ es no principal si y sólo si $\forall i \in S(\{i\} \notin F)$.*

Ejemplos de filtros ([J1], [Ch-K]): (1) *Filtro trivial*: $\mathcal{F} = \{S\}$. (2) Para cada $B \subseteq S$, $B \neq \emptyset$, el filtro $\mathcal{F}_B = \{Z \subseteq S : B \subseteq Z\}$ se llama *filtro principal* generado por B. Para $B = \{a\} \subseteq S$, $\mathcal{F}_B$ es escribe $\mathcal{F}_a$, $\mathcal{F}_a = \{Z \subseteq S : a \in Z\}$. Notar que $\mathcal{F}_a$ es un ultrafiltro principal. (3) Sea S un conjunto infinito, el filtro $\mathcal{F} = \{X \in P(S) :| S \setminus X |< \aleph_0\}$ se llama *filtro de Fréchet*. Notar que el filtro de Fréchet no es principal. Dado cualquier conjunto infinito S siempre se puede construir un filtro no principal sobre S, que extiende al filtro de Fréchet sobre S usando la propiedad de intercción finita, tal como lo afirma el teorema que viene a continuación (Teorema 3.2.2). Pregunta: Ya se demostró anteriormente que existen ultrafiltros principales, mediante un ejemplo, $\mathcal{F}_a$. Pero, ¿ Existen ultrafiltros no principales?. La existencia de tales entidades matemáticas sólo se puede garantizar por los momentos usando el Lema de Zorn, no hay otra manera [[J1], pp. 75], en este trabajo se demuestra el Teorema del Ultrafiltro (Tarski), Teorema 3.2.4, a partir del Lema de Zorn, que permitirá contar con tales entidades (ultrafiltros no principales) las cuales son fundamentales para la investigación matemática y se usan más adelante en este trabajo.

Una familia G de conjuntos tiene la *propiedad de intersección finita* si para cualquier conjunto finito $H = \{X_1, \ldots, X_n\} \subseteq G$ se cumple que $H_1 \cap \ldots \cap H_n \neq \emptyset$.

Teorema 3.2.2. *1. Si Δ es una familia de filtros sobre S, entonces $\bigcap \Delta$ es un filtro sobre S.*

2. Si Ω es una $\subseteq$-cadena de filtros sobre S (es decir, $\forall X, Y \in \Omega(X \subseteq Y \, o \, Y \subseteq X)$), entonces $\bigcup \Omega$ es un filtro sobre S.

3. Si $G \subseteq P(S)$ tiene la propiedad de intersección finita, entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ tal $G \subseteq \mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \{X \subseteq S : \exists Z_1, \ldots, Z_n \in G(Z_1 \cap \ldots \cap Z_n \subseteq X)\}$).

Una prueba de tal resultado puede encontrarse (entre otros) en [[J1], pp. 74] y [[Ch-K], pp. 212].

Teorema 3.2.3. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto S. Entonces:*

$$\mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro} \leftrightarrow \mathcal{F} \text{es máximal.}$$

Una prueba de tal resultado puede encontrarse (entre otros) en [[J1], pp. 74].

Teorema 3.2.4 (Teorema del Ultrafiltro(Tarski)). *Todo filtro se puede extender a un ultrafiltro.*

Como ya se dijo antes la demostración del Teorema del Ultrafiltro requiere del Lema de Zorn, una versión de dicha prueba puede encontrarse (entre otros) en [[J1], pp. 75] y [[Ch-K], pp. 214]. En este trabajo se presentará una demostración del Teorema del Ultrafiltro (la estándar) después de formular el Lema de Zorn y de unas definiciones previas:

Definición 3.2.5. *Sea A un conjunto y R una relación binaria en A(es decir, $R \subseteq A \times A$)*

1. *R es reflexiva si y sólo si $\forall x \in A(xRx)$*
2. *R es simétrica si y sólo si $\forall x, y \in A(xRy \to yRx)$*
3. *R es transitiva si y sólo si $\forall x, y, z \in A(xRy \land yRz \to xRz)$*
4. *R es antisimétrica si y sólo si $\forall x, y \in A(xRy \land yRx \to x = y)$.*
5. *R es una relación de equivalencia si R es una relación reflexiva, simétria y transitiva.*

Definición 3.2.6.
1. *Un orden parcial es un par $(P, \leq)$ donde P es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación en P que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
2. *Dado un orden parcial $(P, \leq)$ se dice $p < q \leftrightarrow p \leq q \land p \neq q$.*

3. *Sean* (P, R) *un orden parcial y* $D \subseteq P$. $x \in P$ *es un elemento minimal (máximal) de* D *si* $x \in D \ \wedge$ *no existe ningún* $y \in D$ *tal que* $y \neq x \ \wedge \ yRx$ (xRy). x *es una cota inferior (superior) de* D *si* $\forall y \in D(xRy \vee y = x)\,(yRx \vee y = x)$. x *es un ínfimo (supremo) de* D *si* x *es cota inferior (superior) de* $D \ \wedge$ *para todo* $y \in P$, *si* y *es una cota inferior (superior) de* D, *entonces* $yRx \vee y = x\,(xRy \vee y = x)$. x *es un menor (mayor) elemento de* D *si* $x \in D \ \wedge \ \forall y \in D(xRy \vee y = x)\,(yRx \vee y = x)$.

4. *Sea* (P, R) *un orden parcial.* (P, R) *es un orden total (o lineal) si la relación* R *satisface la propiedad de tricotomía:* $\forall x, y \in P(xRy \vee yRx \vee x = y)$.

5. *Sea* (P, R) *un orden parcial.* (P, R) *es un buen orden si para todo* $X \subseteq P$ *se cumple que: Si* $X \neq \emptyset$, *entonces* X *tiene un menor elemento. (Notar que todo conjunto bien ordenado es un conjunto totalmente ordenado).*

   (Un orden parcial o orden total o buen orden $(P, \leq)$ *a veces se denotará por* P*)*

Teorema 3.2.7 (Lema de Zorn). *Sea* (K, S) *un conjunto parcialmente ordenado tal que cada* $X \subseteq K$ *totalmente ordenado tiene una cota superior en* K. *Entonces* K *tiene un elemento máximal.*

Es conocido que el Lema de Zorn es equivalente al Axioma de elección. Donde el Axioma de elección es la siguiente sentencia: *Todo conjunto tiene una función selectora.* (Dado un conjunto Z se dice que la función f es una función de elección - o una función selectora - para Z si el $dom(f) = Z - \{\emptyset\}$ y para todo $W \in dom(f)$, se tiene que $f(W) \in W$). Una prueba de la equivalencia puede encontrarse (entre otros) en [[D2], pp. 83-85] y [[E2], pp. 151-153]. También es conocido que el Lema de Zorn es equivalente al Principio del Buen Orden (*Todo conjunto se puede bien ordenar*). Una prueba de tal equivalencia puede encontrarse (entre otros) en [[D2], pp. 82-85] y [[E2], pp. 151-153, 196-197].

Demostración del Teorema del Ultrafiltro usando el Lema de Zorn: Sea F un filtro sobre un conjunto S. Sea K el siguiente conjunto parcialmente ordenado por la inclusión:

$$K = \{G \subseteq P(S) : F \subseteq G \wedge G \,\text{es filtro sobre}\, S\}.$$

Sea $D \subseteq K$ un conjunto totalmente ordenado por la inclusión. Entonces $\cup D$ es un filtro tal que $F \subseteq \cup D$, es decir, $\cup D \in K$. De modo que K cumple con todas las hipótesis del Lema de Zorn. Entonces por dicho Lema existe un filtro H máximal en K. En consecuencia como H es filtro máximal si y sólo si H es ultrafiltro (Teorema 3.2.3), se tiene que $H \supseteq F$ es el ultrafiltro buscado que extiende a F. En conclusión, todo filtro se puede extender a un ultrafiltro. $\square$

3.3 Lenguajes de primer orden, Estructuras, Relaciones entre estructuras, Satisfacibilidad y Verdad en una estructura

3.3.1 Lenguajes de primer orden y Estructuras

A continuación se ofrecerán los conceptos usuales de "lenguaje de primer orden" y "estructuras o interpretaciones" para dichos lenguajes, las definiciones se harán siguiendo el orden y la notación (principalmente) de los textos [D1] y [Ch-K], pero se realizarán de manera gneralizada para cualquier cardinal.

Lenguajes de cualquier cardinalidad:

Un *lenguaje* es una colección de símbolos que puede ser numerable (finito o equipotente a $\mathbb{N}$) o de cualquier otra cardinalidad $\aleph_\sigma$, para algún ordinal $\sigma > 0$. Estos símbolos serán agrupados en tres clases:

Símbolos relacionales $\quad S_0, S_1, \ldots, S_\mu, \ldots \; (\mu \in \delta)$. Donde δ es un ordinal que puede ser infinito (de cualquier cardinalidad).

Símbolos funcionales $\quad g_0, g_1, \ldots, g_\beta, \ldots \; (\beta \in \gamma)$. Donde γ es un ordinal que puede ser infinito (de cualquier cardinalidad).

Símbolos constantes $d_0, d_1, \ldots, d_\theta, \ldots$ $(\theta \in \zeta)$. Donde ζ es un ordinal que puede ser infinito (de cualquier cardinalidad).

$$\mathcal{L} = \{S_\mu\}_{\mu \in \delta} \bigcup \{g_\beta\}_{\beta \in \gamma} \bigcup \{d_\theta\}_{\theta \in \zeta}.$$

O expresado como una lista:

$$\mathcal{L} = \{S_0, S_1, \ldots, S_\mu, \ldots \ (\mu \in \delta); g_0, g_1, \ldots, g_\beta, \ldots \ (\beta \in \gamma); \\ d_0, d_1, \ldots, d_\theta, \ldots \ (\theta \in \zeta)\}.$$

Todo símbolo relacional y todo símbolo funcional tiene asociado un número natural $n \geq 1$ (su número de argumentos), de este modo se tienen entonces símbolos relacionales o funcionales unarios, binarios, 3-arios, 4-arios, 5-arios, $\ldots$, n-arios, etc.

Como consecuencia de resultados básicos de la aritmética cardinal ([D2], [E2], [H-J]) se tiene que el cardinal de $\mathcal{L}$ es:

$$\mid \mathcal{L} \mid = \mid \delta \mid + \mid \gamma \mid + \mid \zeta \mid = \text{mayor}\{\mid \delta \mid, \mid \gamma \mid, \mid \zeta \mid\}.$$

Estructuras (o Interpretaciones) para un lenguaje $\mathcal{L}$:

Una *estructura* $\mathfrak{C}$ para un lenguaje $\mathcal{L}$ (o una *interpretación* $\mathfrak{C}$ para un lenguaje $\mathcal{L}$) está cosntituída por:

(1) Un conjunto no vacío C (el universo de $\mathfrak{C}$)

(2) Para cada símbolo relacional n-ario S_μ de $\mathcal{L}$, una relación

$$S_\mu^{\mathfrak{C}} \subseteq C^n$$

.

(3) Para cada símbolo funcional n-ario g_β de $\mathcal{L}$, una función

$$g_\beta^{\mathfrak{C}} : C^n \longrightarrow C$$

.

(4) Para cada símbolo constante d_θ de $\mathcal{L}$, un elemento

$$d_\theta^{\mathfrak{C}} \in C.$$

La estructura $\mathfrak{C}$ definida se puede escribir así:

$$\mathfrak{C} = \langle C, < S_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\delta}, < g_\beta^{\mathfrak{C}} >_{\beta\in\gamma}, < d_\theta^{\mathfrak{C}} >_{\theta\in\zeta} \rangle.$$

Ante la pregunta ¿ Cuál es la cardinalidad de la estructura $\mathfrak{C}$? La respuesta es: La cardinalidad de $\mathfrak{C}$ es la cardinalidad de su universo C.

Algunos ejemplos de lenguajes y de estructuras para dichos lenguajes son los siguientes:

(i) El siguiente conjunto $\{\widehat{\leq}, \widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{0}, \widehat{1}\}$; donde $\widehat{\leq}$, $\widehat{+}$, $\widehat{\bullet}$ son símbolos funcionales binarios, y $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$ son símbolos constantes; es un lenguaje. Una estructura para dicho lenguaje es por ejemplo $\langle \mathbb{N}, \leq, \bullet, 0, 1 \rangle$: La estructura que tiene como universo el conjunto de los números naturales, con su relación de orden usual, su operación de suma usual, su operación producto usual, su cero usual y su uno usual.

(ii) El siguiente conjunto de símbolos $\{\widehat{+}, \widehat{0}\}$, es un lenguaje. Una estructura para este lenguaje es $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, también $\langle \mathbb{R}, +, 0 \rangle$ y $\langle \mathbb{C}, +, 0 \rangle$. La primera estructura son los números enteros con su suma y cero usuales, la segunda estructura son los números reales con su suma y cero usuales, y la tercera estructura son los números complejos con su suma y cero usuales. Dichas estructuras tienen en común que son "grupos" [[E-F-T], pp. 4], [[Ch-K], pp. 39-40], [[Ma], pp. 34-37].

(iii) El siguiente conjunto $\{\widehat{\leq}\}$, donde $\widehat{\leq}$ es un símbolo relacional binario, es un lenguaje. Una estructura para este lenguaje es $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, y también $\langle P(A), \subseteq \rangle$, para cualquier conjunto A. La primera estructura es un "orden total" y la segunda es un "orden parcial" si A tiene al menos dos elementos [[Ma], pp. 37-39], [[Ch-K], pp. 37-38], [[E-F-T], pp. 43].

(iv) El siguiente conjunto de símbolos $\{\widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{'}, \widehat{0}, \widehat{1}\}$, donde $\widehat{+}$, $\widehat{\bullet}$, $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$ son símbolos definidos anteriormente y $\widehat{'}$ es un símbolo funcional unario, es un lenguaje. Una estructura para este lenguaje es por ejemplo el álgebra booleana $\langle P(A), \cup, \cap, ', \emptyset, A \rangle$, para cualquier conjunto A. $P(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A y $'$ es la relación de complemento en $P(A)$ [[J1], pp. 78-79], [[Ma], pp. 41-42], [[Ch-K], pp. 38-39]. (En la quinta sección de este trabajo se definirá rigurosamente la estructura de álgebra booleana).

(v) Sea α un ordinal. El siguiente conjunto $\{\widehat{\in}\} \cup \{d_\theta : \theta \in \aleph_\alpha\}$, donde $\widehat{\in}$ es un símbolo de relacional binario, y los d_θ son símbolos constantes; es un lenguaje infinito. Una estructura para este lenguaje es por ejemplo $\langle V_{\aleph_\alpha}, \in, < \theta >_{\theta \in \aleph_\alpha} \rangle$, donde el conjunto $V_{\aleph_\alpha}$ es el $\aleph_\alpha$ nivel de la Jerarquía acumulativa de von Neumann (la cual suele denotarse por $\mathbf{V}$, más adelante en esta misma sección se definirá la misma en el contexto del estudio de los cardinales medibles), y $\in$ es la relación usual conjuntista de "pertenencia" [D2].

3.3.2 Isomorfismo entre estructuras, Subestructuras, inmersión

Ahora se definirán tres relaciones entre estructuras: "isomorfismo", "subestructuras" e "inmersión". Otras importantes relaciones como "submodelo elemental", "inmersión elemental" y "elementalmente equivalentes" se definirán más adelante en esta misma sección.

¿ Cuándo dos estructuras son isomorfas?

Sean $\mathfrak{C} = \langle C, < S_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu \in \delta}, < g_\beta^{\mathfrak{C}} >_{\beta \in \gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu \in \zeta} \rangle$, y $\mathfrak{D} = \langle D, < S_\mu^{\mathfrak{D}} >_{\mu \in \delta}, < g_\beta^{\mathfrak{D}} >_{\beta \in \gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{B}} >_{\mu \in \zeta} \rangle$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son *isomorfas* ($\mathfrak{C} \cong \mathfrak{D}$) si y sólo si existe una función biyectiva $f : C \longrightarrow D$ que satisface las siguientes tres propiedades:

(1) Para cada símbolo relacional S_μ de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de S_μ, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$S_\mu^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow S_\mu^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(2) Para cada símbolo funcional g_β de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de g_β, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$f(g_\beta^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n)) = g_\beta^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(3) Para cada símbolo constante d_μ de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$f(d_\mu^{\mathfrak{C}}) = d_\mu^{\mathfrak{D}}.$$

Ejemplos: (a) Sea $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ y $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, < \rangle$. La función $g : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(n) = n - 1$ es una biyección que satisface la propiedad (1) antes mencionada, por lo tanto $\langle \mathbb{N}, < \rangle \cong \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, < \rangle$ [[Ma], pp. 57]. (b) Teorema (Cantor): Si $\langle B, <_B \rangle$ y $\langle A, <_A \rangle$ son dos ordenes totales, densos, no acotados y numerables, entonces $\langle B, <_B \rangle \cong \langle A, <_A \rangle$ [[J1], pp. 38-39]. (c) Teorema (Cantor): Si $\langle A, <_A \rangle$ es un orden total, denso, completo, y además $\langle A, <_A \rangle$ tiene un subconjunto numerable y denso E isomorfo a $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, $\langle E, <_A \rangle \cong \langle \mathbb{Q}, < \rangle$, entonces $\langle A, <_A \rangle \cong \langle \mathbb{R}, < \rangle$ [[J1], pp. 38-39]. (Un orden total $\langle A, <_A \rangle$ es "denso" si $\forall x \in A \forall y \in A(x <_A y \to \exists z \in A(x <_A z <_A y))$. Un conjunto $Y \subseteq A$ es un "subconjunto denso" de A si para todo $x <_A y$ en A existe un $z \in Y$ tal que $x <_A z <_A y$. Un conjunto ordenado es "no acotado" si él no tiene mayor, ni menor elemento. Un orden total $\langle A, <_A \rangle$ es "completo" si cualquier subconjunto $Y \subseteq A$ distinto de vacío tiene un supremo, es decir, una menor cota superior). (d) Teorema (Dedekind): Cualquier dos estructuras de Peano son isomorfas [[E-F-T], pp. 47-48]. Otros ejemplos de estructuras isomorfas pueden encontrarse en [[Ma], pp. 56-57] y en [Ch-K]. Y en el desarrollo de este trabajo de demostrará que algunas interesantes estructuras son isomorfas (se presentarán más ejemplos).

¿ Cuándo una estructura es subestructura de otra estructura ?

Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. Se dice que $\mathfrak{C}$ es una *subestructura* de $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \sqsubseteq \mathfrak{D}$, si y sólo si:

(1) $C \subseteq D$

(2) Para cada símbolo relacional n-ario S de $\mathcal{L}$,

$$S^{\mathfrak{C}} = S^{\mathfrak{D}} \cap C^n.$$

(3) Para cada símbolo funcional n-ario g de $\mathcal{L}$,

$$g^{\mathfrak{C}} = g^{\mathfrak{D}} \upharpoonright C^n.$$

(4) Para cada símbolo constante d de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$d^{\mathfrak{C}} = d^{\mathfrak{D}}.$$

Ejemplos: $\langle \mathbb{N}, +, \bullet \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{Z}, +, \bullet \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{Q}, +, \bullet \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{R}, +, \bullet \rangle$. Otros ejemplos pueden encontrarse en [[Ma], pp. 48] y en [Ch-K]. En el desarrollo de este trabajo se presentarán más ejemplos.

¿ Cuándo se dice que existe una inmersión de una estructura en otra estructura ?

Sean dos estructuras $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$. Una *inmersión* de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{C}$ y una subestructura $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{C}' \sqsubseteq \mathfrak{D}$). Otra manera de decirlo: Una función $h : C \longrightarrow D$ es una *inmersión* de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ si y sólo si h es inyectiva y h preserva las funciones, las relaciones y las constantes, es decir, h cumple con las cláusulas (1), (2) y (3) de la definición de isomorfismo presentada anteriormente.

Ejemplos: $\langle \mathbb{N}, +, \bullet \rangle$ está inmersa en $\langle \mathbb{Z}, +, \bullet \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, +, \bullet \rangle$ está inmersa en $\langle \mathbb{R}, +, \bullet \rangle$. Una demostración de estos resultados puede encontrarse en [[D2], pp. 25-42] y [[E2], pp. 90-127]. Otros ejemplos pueden conseguirse en [[Ma], pp. 55-56] y en [Ch-K]. En el desarrollo de trabajo se presentarán más ejemplos.

3.3.3 Formalización de un lenguaje (en primer orden)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje. Para formalizar a $\mathcal{L}$ se usan un conjunto de *símbolos lógicos*, los cuales se listan a continuación:

(i) Conectivas: $\neg, \quad \wedge, \; \vee, \; \rightarrow, \quad \leftrightarrow$ (negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional, respectivamente).

(ii) Cuantificadores: $\exists, \quad \forall$ (existencial y universal, respectivamente).

(iii) Símbolo de identidad: $\equiv$ (un símbolo relacional binario).

(iv) Variables: $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_k, \ldots \quad (k \in \aleph_0)$.

(v) Paréntesis: $), ($ (paréntesis derecho y paréntesis izquierdo, respectivamente).

(vi) La coma: ,

El conjunto de las variables se denotará por VAR.

A continuación se presentarán una lista de definiciones que tienen la finalidad de indicar cómo usar los símbolos lógicos y los símbolos de $\mathcal{L}$ para construir términos y fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$, términos y fórmulas que van a permitir hablar de las estructuras para $\mathcal{L}$:

Se empieza definiendo *Término* del lenguaje $\mathcal{L}$, utilizando inducción:

Definición 3.3.3.1. *(i) Toda variable y todo símbolo constantes es un término.*
(ii) Si g es un símbolo funcional n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $g(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.
(iii) Una sucesión de símbolos es un término sólo si se obtiene aplicando una cantidad finita de veces las cláusulas (i) y (ii).

El conjunto de los términos de $\mathcal{L}$ se denotará por $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Ahora se define *fórmula atómica* de $\mathcal{L}$, las fórmulas más simples del lenguaje $\mathcal{L}$:

Definición 3.3.3.2. *(i) Si t_1 y t_2 son términos, entonces $t_1 \equiv t_2$ es una fórmula atómica.*

(ii) Si S es un símbolo relacional n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $S(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica.

Con el concepto de fórmula atómica se procede ahora a definir lo que es una *fórmula* (*fórmula bien formada*) de $\mathcal{L}$, dicha definición se hace usando inducción:

Definición 3.3.3.3. *(i) Toda fórmula atómica es una forḿula.*

(ii) Si ϕ y χ son fórmulas, entonces $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \chi)$, $(\phi \wedge \chi)$,$(\phi \rightarrow \chi)$ y $(\phi \leftrightarrow \chi)$ son fórmulas.

(iii) Si v es una variable y ϕ es una fórmula, entonces $(\forall x)\phi$ y $(\exists x)\phi$ son fórmulas.

(iv) Una sucesión de símbolos es una fórmula sólo si se obtiene usando una cantidad finita de veces las cláusulas (i),(ii) y (iii).

Por simplicidad, cuando no exista ambiguedad se eliminarán los paréntesis externos de las fórmulas y de los cuantificadores, es decir, se escribirá $\neg\phi$ en lugar de $(\neg\phi)$ y $\forall x\phi$ en lugar de $(\forall x)\phi$, por ejemplo. El conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}$ se denotará por $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.

Como se ha podido apreciar las definiciones de término y de fórmula se hicieron inductivamente, por eso cuando se vaya a probar que alguna propiedad vale para todos los términos o para todas fórmulas conviene usar inducción basada en dicha construcción. Esto aplica igualmente para el caso de hacer definiciones para todos los términos o para todas las fórmulas. En este mismo orden de ideas es importante resaltar también que toda fórmula tiene un número natural asociado, su *rango*, el cual se define como su número de conectivas y cuantificadores. También a cada término se le puede asociar un único número natural, su *longitud*, su número de ocurrencias de símbolos. Esto trae como consecuencia interesante que se pueda aplicar inducción sobre esta longitud o sobre este rango con la finalidad de probar propiedades para todos los términos o para todas las fórmulas, y también con la finalidad de hacer definiciones relativas a todos los términos o a todas las fórmulas (Una aplicación al lenguaje de primer orden del el Principio de inducción matemática en $\mathbb{N}$).

Se dice que una ocurrencia de una variable en una fórmula es *libre* si esta ocurrencia no está bajo el alcance de algún cuantificador. Y dicha ocurrencia es *ligada* en caso contrario: Si ella está bajo el alcance de algún cuantificador. Según esta definición es evidente que una variable puede tener ocurrencias libres y ocurrencias ligadas en una fórmula. Una definición inductiva de estas nociones puede encontrarse en [[D1], pp. 41-42]. Con los dos conceptos anteriores se define cuándo una variable está libre en una fórmula: Una variable está libre en una fórmula si ella tiene al menos una ocurrencia libre en dicha fórmula. En caso contrario se dice que dicha variable no está libre en la fórmula. Dada una fórmula ϕ se escribe $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ para indicar que las variables libres de ϕ están entre $y_1, \ldots, y_n$.

3.3.4 Satisfacción y Verdad en una estructura

Se sabe que los términos del lenguaje denotan objetos en una estructura y que las fórmulas afirman hechos relativos a estos objetos en dicha estructura, ahora se definirán rigurosamente estas nociones. Después se definirá (entre otros conceptos) cuándo una fórmula es verdadera y cuando es falsa en una estructura.

Definición 3.3.4.1. *Sea $\mathfrak{C}$ una estructura para $\mathcal{L}$ y $s : VAR \longrightarrow C$. Se define el valor de un término de $\mathcal{L}$ en $\mathfrak{C}$ según s inductivamente en la complejidad del término. Dado un término t se denotará este valor por $t_{\mathfrak{C}}[s]$ y se omitirá mencionar la estructura $\mathfrak{C}$ en los casos donde no exista posibilidad de ambiguedad.*

(i) Si t es la variable v, $t_{\mathfrak{C}}[s] = s(v)$.

(ii) Si t es el símbolo constante c, $t_{\mathfrak{C}}[s] = c^{\mathfrak{C}}$.

(iii) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos, g es un símbolo funcional n-ario y $t = g(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $t_{\mathfrak{C}}[s] = g^{\mathfrak{C}}(t_{1\mathfrak{C}}[s], \ldots, t_{n\mathfrak{C}}[s])$.

Informalmente, el valor de t en $\mathfrak{C}$ según s, es el elemento de C denotado por t cuando asignamos a la variables de t valores según s.

De lo anterior se desprende que si s y s' coinciden en las variables que aparecen en el término t, entonces $t_{\mathfrak{C}}[s] = t_{\mathfrak{C}}[s']$.

Sea $\mathfrak{C}$ una estructura para $\mathcal{L}$, $s : VAR \longrightarrow C$ y ϕ una fórmula de $\mathcal{L}$. Se procede a definir lo que significa que s satisface a ϕ en $\mathfrak{C}$, lo que se denota por $\mathfrak{C} \models \phi[s]$. El siginificado intuitivo de $\mathfrak{C} \models \varphi[s]$ es que el resultado de sustituir en ϕ las variables libres por sus valores según s, es una afirmación verdadera en $\mathfrak{C}$.

La definición se hace aplicando inducción en la construcción de las fórmula ϕ.

Definición 3.3.4.2. *(Caso base)*

(1) Si ϕ es una fórmula atómica, es decir, $\phi = t_1 \equiv t_2$ o $\phi = S(t_1, \ldots, t_n)$, entonces:

(1.1) $\mathfrak{C} \models t_1 \equiv t_2[s] \Longleftrightarrow t_{1\mathfrak{C}}[s] = t_{2\mathfrak{C}}[s]$.

(1.2) $\mathfrak{C} \models S(t_1, \ldots, t_n)[s] \Longleftrightarrow S^{\mathfrak{C}}(t_{1\mathfrak{C}}[s], \ldots, t_{n\mathfrak{C}}[s])$.

(Caso inductivo)

(2) Si $\phi = \neg\chi$ o $\phi = \chi \rightarrow \sigma$ o $\phi = \chi \wedge \sigma$ o $\phi = \chi \vee \sigma$ o $\phi = \chi \leftrightarrow \sigma$, donde χ y σ son fórmulas para las cuales se ha definido lo que se quiere, entonces:

(2.1) $\mathfrak{C} \models (\neg\chi)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \not\models \chi[s]$.

(2.2) $\mathfrak{C} \models (\chi \rightarrow \sigma)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \not\models \chi[s]$ *o* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]$.

(2.3) $\mathfrak{C} \models (\chi \wedge \sigma)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \chi[s]$ *y* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]$.

(2.4) $\mathfrak{C} \models (\chi \vee \sigma)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \chi[s]$ *o* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]$.

(2.5) $\mathfrak{C} \models (\chi \leftrightarrow \sigma)[s] \Longleftrightarrow \{\mathfrak{C} \models \chi[s]$ *y* $\mathfrak{C} \models \sigma[s]\}$ *o* $\{\mathfrak{C} \not\models \chi[s]$ *y* $\mathfrak{C} \not\models \sigma[s]\}$.

(2.6) $\mathfrak{C} \models ((\forall v)\chi)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \chi[s']$ *para toda $s' : VAR \longrightarrow C$ que difiere de s a lo sumo en el valor que le asigna a la variable v.*

(2.7) $\mathfrak{C} \models ((\exists v)\chi)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \chi[s']$ *para alguna $s' : VAR \longrightarrow C$ que difiere de s a lo sumo en el valor que le asigna a la variable v.*

Definición 3.3.4.3. *Sea $\mathfrak{C}$ una estructura para $\mathcal{L}$ y ϕ una fórmula de $\mathcal{L}$.*

(1) ϕ es satisfacible si existe una estructura $\mathfrak{C}$ y una $s : VAR \longrightarrow C$ tal que $\mathfrak{C} \models \phi[s]$.

(2) ϕ es verdad en $\mathfrak{C}$ si y sólo si $\mathfrak{C} \models \varphi[s]$, para toda $s : VAR \longrightarrow C$. Esto también se expresa diciendo que $\mathfrak{C}$ es un modelo de ϕ y se denota por $\mathfrak{C} \models \phi$.

(3) ϕ es falsa en $\mathfrak{C}$ si y sólo si $\mathfrak{C} \not\models \phi[s]$, para toda $s : VAR \longrightarrow C$.

(4) Si Γ es un conjunto de fórmulas, se dice que $\mathfrak{C}$ es un modelo de Γ si toda fórmula $\phi \in \Gamma$ es verdad en $\mathfrak{C}$.

Es importante resaltar que si ϕ es una fórmula con variables libres $v_{i1}, \ldots, v_{im}$, entonces el que $s : VAR \longrightarrow C$ satisfaga a ϕ en $\mathfrak{C}$ sólo depende de los valores de s en las variables $v_{i1}, \ldots, v_{im}$. Si $a_1 = s(v_{i1}), \ldots, a_m = s(v_{im})$, entonces se escribirá $\mathfrak{C} \models \phi[a_1, \ldots, a_m]$ en vez de $\mathfrak{C} \models \phi[s]$.

3.3.5 Validez, Contradicción, Consecuencia lógica

Definición 3.3.5.1. *(1) ϕ es lógicamente válida si es verdad en toda estructura (interpretación).*

(2) ϕ es contradictoria si $\neg\phi$ es lógicamente válida, es decir, si ϕ es falsa en toda estructura.

(3) Sea Γ un conjunto de fórmulas en un lenguaje $\mathcal{L}$ y γ una fórmula de $\mathcal{L}$. Se dice que γ es una Consecuencia lógica de Γ, $\Gamma \models \gamma$, si toda estructura para $\mathcal{L}$ que es un modelo de Γ también es un modelo de γ, es decir, si no existe una estructura para $\mathcal{L}$ que satisfaga a Γ y no satisfaga γ. Cuando se habla de consecuencia lógica de conjuntos unitarios, por ejemplo, $\{\varphi\} \models \psi$, se escribe $\varphi \models \psi$. Y cuando se habla de consecuencias lógicas del conjunto sentencias vácio, $\emptyset \models \psi$, se escribe así: $\models \psi$. Ocurre que ψ es lógicamente válida si y sólo si $\models \psi$.

3.3.6 Otras relaciones entre estructuras: Submodelo elemental, Inmersión elemental, elemetalmente equivalentes

Submodelo elemental:

Sea $\mathfrak{A}$ una subestructura de $\mathfrak{B}$. Se dice que $\mathfrak{A}$ es una *subestructura elemental* o un *submodelo elemental* de $\mathfrak{B}$, y se denota,

$$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B},$$

si para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Ejemplos: $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \prec \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$. Dos pruebas distintas de este resultado pueden encontrase en [[Ma] , pp. 147-148, 258-261]. Otros ejemplos pueden conseguirse en [[Ma], pp. 144] y en [Ch-K]. Y en el desarrollo de este trabajo se presentarán más ejemplos.

Inmersión elemental:

Sean $\mathfrak{C} = \langle C, < S_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\delta}, < g_\beta^{\mathfrak{C}} >_{\beta\in\gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{C}} >_{\mu\in\zeta} \rangle$, y $\mathfrak{D} = \langle D, < S_\mu^{\mathfrak{D}} >_{\mu\in\delta}, < g_\beta^{\mathfrak{D}} >_{\beta\in\gamma}, < d_\mu^{\mathfrak{B}} >_{\mu\in\zeta} \rangle$ dos estructuras para un lenguaje $\mathcal{L}$. Se dice que una función $f : C \longrightarrow D$ es una *inmersión elemental* de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ si y sólo si f es inyectiva y satisface las siguientes cuatro propiedades:

(1) Para cada símbolo relacional S_μ de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de S_μ, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$S_\mu^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow S_\mu^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(2) Para cada símbolo funcional g_β de $\mathcal{L}$, si n es la aridad de g_β, entonces para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$f(g_\beta^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n)) = g_\beta^{\mathfrak{D}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)).$$

(3) Para cada símbolo constante d_μ de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$f(d_\mu^{\mathfrak{C}}) = d_\mu^{\mathfrak{D}}.$$

(4) Para cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ y para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$:

$$\mathfrak{C} \models \phi[c_1, \ldots, c_n] \Leftrightarrow \mathfrak{D} \models \varphi[f(c_1), \ldots, f(c_n)].$$

Se dice que $\mathfrak{C}$ está *inmersa elementalmente* en $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{D}$, si existe una inmersión elemental de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$. En otras palabras, esto significa que $\mathfrak{D}$ contiene una subestructura elemental $\mathfrak{F}$ que es isormorfa a $\mathfrak{C}$.

Es claro que si $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. (La función f que garantiza la inmersión elemental sería la función identidad en A, que suele denotarse en la literatura por 1_A). Sin embargo, la dirección contraria de la implicación anterior, si $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, no necesariamente se cumple, evidentemente, porque los universos de las estructuras pueden ser disjuntos.

Ejemplos: $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \preceq \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$, pues como se comentó anteriormente $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \prec \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$. Otros ejemplos pueden encontrarse en [[Ma], pp. 150-151] y en [Ch-K]. En el desarrollo de este trabajo se presentarán más ejemplos.

Dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ para un lenguaje $\mathcal{L}$ se dice que son *elementalmente equivalentes*, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, si ellas satisfacen las mismas sentencias.

Ejemplos: (a) Como se cumple que las estructuras isomorfas satisfacen las mismas sentencias (esto se puede probrar usando inducción), entonces $\langle \mathbb{N}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, < \rangle$. (b) $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$, porque $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \prec \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$. (c) También son elementalmente equivalentes todo par de modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ de "La teoría de los órdenes totales densos sin extremos" o de "La teoría de los números naturales con el cero y la operación sucesor", $Teo(\langle \mathbb{N}, 0, S \rangle) = \{\phi : \langle \mathbb{N}, 0, S \rangle \models \phi\}$, pues tales teorías son completas.

(Una *teoría* de un lenguaje $\mathcal{J}$ es un conjunto de sentencias de $\mathcal{J}$. Una *teoría* Σ de un lenguaje $\mathcal{J}$ es *cerrada* si para cualquier sentencia σ del lenguaje $\mathcal{J}$ que sea consecuencia lógica de Σ, $\Sigma \models \sigma$, se cumple que $\sigma \in \Sigma$. Una teoría Σ se dice que es *completa* si y sólo si para cualquier sentencia σ ocurre exactamente una de las dos opciones: $\Sigma \models \sigma$ o $\Sigma \models \neg\sigma$).

"La teoría de los órdenes totales densos sin extremos" se definirá más adelante en esta misma sección. Una prueba de que ambas teorías son completas, usando tres teoremas sobre teorías, el "Teorema de eliminación de cuantificadores", el "Teorema de modelo-completitud" y el "Teorema del modelo principal de Robinson", puede encontrarse en [[Ma], pp. 256-263]. Otra versión de la demostración de que "La teoría de los órdenes totales densos sin extremos" es completa, pero que también usa eliminación de cuantificadores, puede encontrarse en [Ch-K], pp. 49-54]. "La Teoría de las álgebras de Boole sin átomos" también es completa, ello se puede probar usando eliminación de cuantificadores [[Ck-K], pp. 59], y "La Teoría de las álgebras de Boole numerables sin átomos" también es completa, ello se puede probar usando categoricidad por medio del "Teorema de completitud de Vaught (1954)" [[Ma], pp. 242-250] usando ideas parecidas al procedimiento de zig-zag que usó Cantor para probar su teorema referido anteriormente (Si $\langle B, <_B\rangle$ y $\langle A, <_A\rangle$ son dos ordenes totales, densos, no acotados y numerables, entonces $\langle B, <_B\rangle \cong \langle A, <_A\rangle$). Esto significa que cualquier dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ de dichas teorías son elementalmente equivalentes. La álgebras booleanas atómicas y no atómicas serán definidas y ejemplificadas en la quinta sección de este trabajo (última sección). Otros ejemplos de estructuras elementalmente equivalentes pueden encontrarse en [[Ma], pp. 141-142] y en [Ch-K]. Y en el desarrollo de este trabajo se presentarán más ejemplos.

Un resultado clave en la construcción de submodelos elementales es el siguiente: Un subconjunto $A \subseteq B$ forma un submodelo elemental de $\mathfrak{B}$ si y sólo si para cualquier fórmula $\varphi(u, x_1, \ldots, x_n)$, y para cualquier $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\exists b \in B \mathfrak{B} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n) \Longrightarrow \exists b \in A \mathfrak{B} \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n). \quad (\spadesuit)$$

Una función $h : B^n \longrightarrow B$ es una *función de Skolem* para φ si:

$$\exists b \in B \mathfrak{B} \models \varphi(b, b_1, \ldots, b_n) \Longrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(h(b_1, \ldots, b_n), b_1, \ldots, b_n),$$

para cualquier $b_1, \ldots, b_n \in B$. Usando el Axioma de elección, se puede construir una función de Skolem para cualquier φ. Si un subconjunto $A \subseteq B$ es cerrado bajo las funciones de Skolem de todas las fórmulas del lenguaje, entonces A satisface ($\spadesuit$), y por lo tanto forma un submodelo elemental de $\mathfrak{B}$ [[J1], pp. 156].

Este método de cerrar conjuntos bajos funciones de Skolem, más resultados de aritmética cardinal, permite demostrar el importante "Teorema de Löwenheim-Skolem" en su versión más simple [[J1], pp. 157]:

Teorema de Löwenheim-Skolem: *Cualquier estructura para un lenguaje numerable, tiene un submodelo elemental numerable.*

Y también en su versión más fuerte llamado "Teorema de Löwenheim -Skolem-Tarski hacia abajo" [[J1], pp. 66], [[Ma], pp. 210-212]:

Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia abajo (1956): *Si una teoría Σ en un lenguaje $\mathcal{J}$ tiene un modelo, entonces Σ tiene un modelo de cardinalidad menor o igual que el cardinal de $\mathcal{J}$.*

Es conocido que estos dos teoremas también se pueden demostrar como un colorario del Teorema de completitud de Gödel usando la técnica del conjunto máximal consistente de Henkin [[Ch-K], pp. 61-68], [FG4], más adelante, en la siguiente sección de este trabajo se usará dicha técnica de Henkin (ampliada) para demostrar que la Lógica de primer orden tiene la Propiedad de Interpolación de Craig. Y al final de esta misma sección se hablará de consecuencias matemáticas del Teorema Löwenheim-Skolem-Tarski hacia abajo. También se mencionarán al final de esta sección consecuencias matemáticas de otro importante método para construir modelos muy relacionado con este, el "Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia arriba":

Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia arriba (1956): *Si una teoría Σ en un lenguaje $\mathcal{J}$ tiene modelos infinitos, entonces tiene modelos de cualquier cardinalidad mayor o igual que el cardinal de $\mathcal{J}$.*

Una demostración de ellos puede encontrarse en [[Ch-K], pp. 61-68] y [[Ma], pp. 210-213]. Ambos teoremas son bastante valiosos para el estudio de los fundamentos de la matemática, desde la perpectiva del platonismo matemático. En el texto [[Ch-K], pp. 61-68] se prueba el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia abajo como un corolario del Teorema de completitud de Gödel para lenguajes de cualquier cardinalidad, y luego se demuestra el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia arriba usando el "Teorema de Compacidad" y el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia abajo (usando ambos resultados). El Teorema de Compacidad se demostrará directamente en este trabajo a partir del Teorema fundamental de los Ultraproductos (Teorema de Lós). Es conocido que en la actualidad suele probarse el Teorema de Compacidad como un corolario del Teorema de completitud de Gödel, pero también es importante estudiar esta demostración directa que usa ultraproductos desde el punto de vista pedagógico y de la investigación matemática, metamatemática y de la filosofía de la matemática. Ultraproductos, el Teorema de Lós, algunas aplicaciones matemáticas del mismo y algunas consideraciones filosóficas sobre los ultraproductos y dichas aplicaciones, es lo que se estudiará en las siguientes subsecciones 3.4, 3.5 y 3.6 de esta sección.

3.4 Ultraproductos, el Teorema Fundamental de Ultraproductos (Skolem 1930, Lós 1955)

Construcción de la estructura (el modelo) llamada Ultraproductos usando ultrafiltros siguiendo principalmente los textos [[Ch-K], capítulo 4], [[Me], pp. 129-135] y [[J1], pp. 158-161].

Supongamos que I es un subconjunto no vacío, D es un filtro sobre I y que para cada $i \in I$, A_i es un subconjunto no vacío. Entonces se considera el producto cartesiano de los conjuntos A_i, es decir:

$$C = \prod_{i \in I} A_i = \{f : f : I \longrightarrow \cup_{i \in I} A_i \,\wedge\, \forall i \in I(f(i) \in A_i)\}.$$

(Notar que si I es infinito para garantizar que el producto cartesiano $C = \prod_{i \in I} A_i$ sea distinto de vacío se requiere del Axioma de elección. Esto conecta los ultraproductos con todo ZFC y por lo tanto con el platonismo matemático. También para garantizar que I pueda ser infinito se require del Axioma de infinito, esto también conecta a los ultraproductos con ZF, y por lo tanto con el platonismo matemático. Hay otras conexiones que pueden hacerse)

Ahora se define una relación de equivalencia $\sim$ en $\prod_{i \in I} A_i$ de la siguiente manera:

$$f \sim g \longleftrightarrow \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D$$

Se cumple que la relación $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto $\sim$ es una relación de equivalencia. Entonces se considera el conjunto cociente de $\prod_{i\in I} A_i$ determinado por $\sim$ (llamado *producto reducido de los* A_i *módulo* D):

$$\prod_{i\in I} A_i/\sim = \{[f] : f \in \prod_{i\in I} A_i\}$$

Se denotará al conjunto cociente $\prod_{i\in I} A_i/\sim$ por $\prod_D A_i$ y la clase de equivalencia $[f]$ se denotará por $f_D \quad (\forall f \in \prod_{i\in I} A_i)$. Cuando D es un ultrafiltro $\prod_D A_i$ es llamado un *Ultraproducto.* Y en el caso de que todos los conjuntos A_i esan iguales, digamos, $A_i = A$ $(\forall i \in I)$,$\prod_D A$ es llamado la *Ultrapotencia de* A *módulo* D.

Ahora se definirá el *producto reducido de modelos* para un lenguaje $\mathcal{L}$ fijo:

Sea I un conjunto no vacío, D un filtro sobre I y para cada $i \in I$ sea $\mathfrak{A}_i$ una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$. Supongamos que para cada símbolo relacional P de $\mathcal{L}$ la interpretación de P en $\mathfrak{A}_i$ es R_i, los símbolos de función F son interpretados en $\mathfrak{A}_i$ por G_i y los símbolos constantes c son interpretados en $\mathfrak{A}_i$ por a_i.

El *producto reducido* $\prod_D \mathfrak{A}_i$ es una estructura para $\mathcal{L}$ definida de la siguiente manera:

(i) El universo de $\prod_D \mathfrak{A}_i$ es $\prod_D A_i$.

(ii) Sea P un símbolo de relación n-ário de $\mathcal{L}$. La interpretación de P en $\prod_D \mathfrak{A}_i$ es la relación n-ária S definida de la siguiente manera:

$$S(f_D^1, \ldots, f_D^n) \longleftrightarrow \{i \in I : R_i(f^1(i), \ldots, f^n(i))\} \in D$$

(iii) Sea F un símbolo de función n-ário de $\mathcal{L}$. Entonces F es interpretado en $\prod_D \mathfrak{A}_i$ por la función n-ária H definida de la siguiente manera:

$$H(f_D^1, \ldots, f_D^n) = \langle G_i(f^1(i), \ldots, f^n(i)) : i \in I\rangle_D$$

(iv) Sea c una constanta de $\mathcal{L}$. Entonces la interpretación de c en $\prod_D \mathfrak{A}_i$ es un $b \in \prod_D \mathfrak{A}_i$ que se define como sigue:

$$b = \langle a_i : i \in I\rangle_D$$

Se cumple que las definiciones realizadas anteriormente de $S(f^1_D, \ldots, f^n_D)$ y $H(f^1_D, \ldots, f^n_D)$ dependen solamente de las clases de equivalencia y no de sus representantes $f^1, \ldots, f^n$. Es decir, $f^1 \sim g^1, \ldots, f^n \sim g^n$, entonces :

$$\{i \in I : R_i(f^1(i), \ldots, f^n(i))\} \in D \leftrightarrow \{i \in I : R_i(g^1(i), \ldots, g^n(i))\} \in D$$

y

$$\langle G_i(f^1(i), \ldots, f^n(i)) : i \in I\rangle_D = \langle G_i(g^1(i), \ldots, g^n(i)) : i \in I\rangle_D.$$

Ahora se enunciará y demostrará el Teorema Fundamental de Ultraproductos (Loś-1955) :

Teorema 3.4.1 (Teorema Fundamental de Ultraproductos (Loś)). *Sea $\mathfrak{B}$ el ultraproducto $\prod_D \mathfrak{A}_i$, donde I es el conjunto de índices de los $\mathfrak{A}_i$. Entonces :*

(i) Para cada término $t(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ y elementos $f^1_D, \ldots, f^n_D \in B = \prod_D A_i$ se tiene que:

$$t_{\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D] = \langle t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I\rangle_D$$

(ii) Dada una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ y $f^1_D, \ldots, f^n_D \in B$ se tiene que:

$$\mathfrak{B} \models \varphi[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D$$

(iii) Para cada sentencia φ de $\mathcal{L}$ se tiene que:

$$\mathfrak{B} \models \varphi \leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in D$$

(Inuitivamente (iii) afirma que φ es verdadera en el ultraproducto $\mathfrak{B} = \prod_D \mathfrak{A}_i$ si y sólo si φ es verdadera en **"casi todos"** *los factores $\mathfrak{A}_i$ de $\mathfrak{B}$)*

Demostración: Es claro que la cláusula (iii) se deduce inmediatamente a partir de la cláusula (ii). Entonces se probarán sólo las cláusulas (i) y (ii), y esto se realizará utilizando inducción en la longitud de los términos y en el rango de las fórmulas.

(i) Sea el conjunto $E = \{m \in \mathbb{N} : \forall u \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}(longitud(u) = m \Rightarrow Q(u)\}$, donde Q es la propiedad descrita en (i). Se probará que $E = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ por inducción.

Caso Base: Se probará que $1 \in E$. Sea t un término tal que $longitud(t) = 1$. Se debe probar que $Q(t)$ es cierta. t es una constante o una variable:

Caso 1: t es una constante c :

$t_{\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D] = \langle a_i : i \in I \rangle_D = \langle a_i = t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D$. Por la definición de $\mathfrak{B}$ y la definición 3.3.4.1 sobre el valor de un término en una estructura según una asignación. Esto es lo que se quería probar.

Caso 2: t es una variable x_j tal que $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$t_{\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D] = f^j_D = \langle f^j(i) : i \in I \rangle_D = \langle f^j(i) = t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D$. Por la definición 3.3.4.1 . Esto es lo que se quería probar.

Caso inductivo: Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 1$ y supóngase que para cada $k \in \mathbb{N}$(si $k < m$ entonces $k \in E$). Se debe probar que $m \in E$. Sea t un término tal que $longitud(t) = m$. Se debe probar que $Q(t)$ es cierta. t de longitud m tiene la forma siguiente:

$$t(x_1, \ldots, x_n) = F(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_n))$$

Por la definición 3.3.4.1 se tiene que:

$$t_{\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D] = H(t_{1\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D], \ldots, t_{n\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D])$$

Por la Hipótesis Inductiva se tiene que para cada k, $1 \leq k \leq n$, se cumple que:

$$t_{k\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D] = \langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D$$

Para cada k, $1 \leq k \leq n$, se denota $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D$ por g^k_D y a $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle$ por g^k.

Aplicando la cláusula (iii) de la definición del ultraproducto $\mathfrak{B}$ se tiene que:

$$H(g^1_D, \ldots, g^n_D) = \langle G_i(g^1(i), \ldots, g^n(i)) : i \in I \rangle_D$$

Por otro lado, aplicando la definición 3.3.4.1 se tiene que:

$$t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] = G_i(t_{1\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)], \ldots, t_{n\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)])$$

Entonces combinando todo el desarrollo anterior se concluye que:

$$t_{\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D] = H(g^1_D, \ldots, g^n_D) = \langle t_{\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D$$

Lo que se quería probar. Por lo tanto $E = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ha terminado la prueba de la cláusula (i) del Teorema.

(ii) Sea el conjunto $Z = \{m \in \mathbb{N} : \forall \delta \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(rango(\delta) = m \Rightarrow K(\delta)\}$, donde K es la propiedad descrita en (ii). Se probará que $Z = \mathbb{N}$ por inducción.

Caso base: Se debe probar que $0 \in Z$. Sea una fórmula φ tal que $rango(\varphi) = 0$. Se debe probar que $K(\varphi)$ es cierta. φ es una fórmula atómica de alguna de estas dos formas: (1) $P(t_1, \ldots, t_n)$ o (2) $t_1 \equiv t_2$. (La prueba se hace siguiendo una sugerencia que está en [[Ch-k], pp. 218] la cual dice que se proceda de manera análoga al caso inductivo de la cláusula (i) para términos).

Caso 1: $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$.

$$\mathfrak{B} \models P(t_1, \ldots, t_n)[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow$$

(por definición de satisfacibilidad en una estructura y definición del ultraproducto)

$$S(t_{1\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D], \ldots, t_{n\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D]) \leftrightarrow$$

(por la cláusula (i))

$$S(\langle t_{1\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D, \ldots, \langle t_{n\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D) \leftrightarrow$$

(Procediendo como en la prueba de la cláusula (i): Para cada k, $1 \leq k \leq n$, se denota $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle_D$ por g^k_D y a $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I \rangle$ por g^k. Con esta definición y la definición de ultraproducto)

$$S(g^1_D, \ldots, g^n_D) \longleftrightarrow \underbrace{\{i \in I : R_i(g^1(i), \ldots, g^n(i))\}}_{\spadesuit} \in D$$

Se quiere probar que:

$$\mathfrak{B} \models P(t_1, \ldots, t_n)[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow$$
$$\underbrace{\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models P(t_1, \ldots, t_n)[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\}}_{\clubsuit} \in D$$

Y esto se cumple porque los conjuntos $\spadesuit$, $\clubsuit$ y $\triangle$ son iguales.

$$\underbrace{\{i \in I : R_i(t_{1\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)], \ldots, t_{n\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)])\}}_{\triangle} \in D$$

Fin de la prueba del Caso 1.

Caso 2: $\varphi = t_1 \equiv t_2$.

$$\mathfrak{B} \models t_1 \equiv t_2[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow$$

(por definición de satisfacibilidad en una estructura)

$$t_{1\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D] = t_{2\mathfrak{B}}[f^1_D, \ldots, f^n_D]) \leftrightarrow$$

(por la cláusula (i))

$$\langle t_{1\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I\rangle_D = \langle t_{2\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^2(i)] : i \in I\rangle_D \leftrightarrow$$

(Procediendo como en el caso anterior y en la prueba de la cláusula (i): Para cada k, $1 \leq k \leq 2$, se denota $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I\rangle_D$ por g^k_D y a $\langle t_{k\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] : i \in I\rangle$ por g^k. Y por la definición de la relación de equivalencia $\sim$ con que se definió el ultraproducto)

$$g^1_D = g^2_D \longleftrightarrow \underbrace{\{i \in I : (g^1(i) = g^2(i))\}}_{\spadesuit} \in D$$

Se quiere probar que:

$$\mathfrak{B} \models t_1 \equiv t_2[f^1_D, \ldots, f^n_D] \leftrightarrow$$
$$\underbrace{\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models t_1 \equiv t_2[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\}}_{\clubsuit} \in D$$

Y esto se cumple porque los conjuntos $\spadesuit$, $\clubsuit$ y $\triangle$ son iguales.

$$\underbrace{\{i \in I : t_{1\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)] = t_{2\mathfrak{A}_i}[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\}}_{\triangle} \in D$$

Fin de la demostración del Caso 2.

Caso inductivo: Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > 0$, y supóngase que para todo $k \in \mathbb{N}$(si $k < m$ entonces $k \in Z$). Se debe probar que $m \in Z$. Sea una fórmula φ tal que $rango(\varphi) = m$. Se debe probar que $K(\varphi)$ es cierta. Es suficiente con considerar a φ con las siguiente tres formas, pues toda fórmula se puede reexpresar de esa manera: (1) $\varphi = \neg\chi(x_1, \ldots, x_n)$, (2) $\varphi = (\chi \wedge \sigma)(x_1, \ldots, x_n)$ y (3) $\varphi = (\exists v)\chi(v, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Caso 1: $\varphi = \neg\chi(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\mathfrak{B} \models \neg\chi[f_D^1, \ldots, f_D^n] \leftrightarrow$$

(Definición de satisfacibilidad)

$$\text{no}\, \mathfrak{B} \models \chi[f_D^1, \ldots, f_D^n] \leftrightarrow$$

(Hipótesis Inductiva)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \notin D \leftrightarrow$$

(D es ultrafiltro)

$$\{i \in I : \text{ no}\, \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D \leftrightarrow$$

(Definición de satisfacibilidad)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \neg\chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D.$$

Caso 2: $\varphi = (\chi \wedge \sigma)(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\mathfrak{B} \models (\chi \wedge \sigma)[f_D^1, \ldots, f_D^n] \leftrightarrow$$

(Definición de satisfacibilidad)

$$\mathfrak{B} \models \chi[f_D^1, \ldots, f_D^n] \wedge \mathfrak{B} \models \sigma[f_D^1, \ldots, f_D^n] \leftrightarrow$$

(Hipótesis Inductiva)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D \wedge$$
$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \sigma[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D \leftrightarrow$$

(D es filtro)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \cap$$
$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \sigma[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D \leftrightarrow$$

(intersección y satisfacibilidad)

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models (\chi \wedge \sigma)[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D$$

Caso 3: $\varphi = (\exists v)\chi(v, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$\mathfrak{B} \models (\exists v)\chi[f_D^1, \ldots, f_D^n] \leftrightarrow$$

(satisfacibilidad)

$$\text{Existe } f_D \in B \text{ tal que } \mathfrak{B} \models \chi[f_D, f_D^1, \ldots, f_D^n] \leftrightarrow$$

(Hipótesis Inductiva)

$$(\text{*}) \text{ Existe } f_D \in B \text{ tal que } \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \chi[f_D(i), f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D$$

Como ocurre que si $\mathfrak{A}_i \models \chi[f_D(i), f^1(i), \ldots, f^n(i)]$, entonces $\mathfrak{A}_i \models (\exists v)\chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]$, (*) implica que:

$$(**)\, \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models (\exists v)\chi[f^1(i), \ldots, f^n(i)]\} \in D$$

Para probar que (*) es equivalente a (**) falta probar que (**) implica a (*). Si (**) ocurre se usa el Axioma de elección (para los casos donde existan universos de las estructuras $\mathfrak{A}_i$ que no son finitos o numerables, por ejemplo donde existan universos que sean no numerables y no bien ordenados) para definir una función $f \in \prod_{i \in I} A_i$ tal que (*) ocurra. Por lo tanto (*) y (**) son equivalentes. En consecuencia $Z = \mathbb{N}$, lo que se quería probar. La prueba de la cláusula (ii) del Teorema ha terminado, y la prueba de Teorema también. $\square$

Algunos colorarios (clásicos) del Teorema Fundamental de Ultraproductos son los siguientes:

Corolario 3.4.2. *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$ y sea $\prod_D \mathfrak{A}$ una ultrapotencia de $\mathfrak{A}$. Entonces $\mathfrak{A} \equiv \prod_D \mathfrak{A}$.*

Para enunciar el segundo corolario se requiere de una difinición previa: Sea I un conjunto no vacío, D un filtro sobre I y $\mathfrak{A}$ una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$. La *inmersión natural* de $\mathfrak{A}$ dentro de $\prod_D \mathfrak{A}$ es la función

$d : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_D \mathfrak{A}$ definda com sigue: $\forall a \in A(d(a) = \langle a : i \in I \rangle_D)$. El rango de d es denotado por $d(A)$ y la restricción de $\prod_D \mathfrak{A}$ a $d(A)$ es donotada por $d(\mathfrak{A})$.

Corolario 3.4.3. *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura para un lenguaje $\mathcal{L}$ y D un ultrafiltro. Entonces la inmersión natural de $\mathfrak{A}$ dentro de la ultrapotencia $\prod_D \mathfrak{A}$ es una inmersión elemental.*

Demostración: La función d es inyectiva y se puede chequear fácilmente que d cumple con las cláusulas (1), (2) y (3) de la definición de inmersión elemental. La prueba de la cláusula (4) se hace usando el Teorema Fundamental de Ultraproductos de la siguiente manera: Sea $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de $\mathcal{L}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$. Entonces:

$$\prod_D \mathfrak{A} \models \psi[d(a_1), \ldots, d(a_n)] \leftrightarrow$$

(Cláusula (ii) del Teorema Fundamental de Ultraproductos)

$$\{i \in I : \mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]\} \in D \leftrightarrow$$

(saisfacibilidad)

$$\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n]. \square$$

Vale la pena resaltar que el corolario anterior (3.4.3) muestra que la inmersión natural d es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ sobre $d(\mathfrak{A})$ y que $d(\mathfrak{A})$ es un submodelo elemental de la ultrapotencia $\prod_D \mathfrak{A}$ [Ch-K].

3.5 Algunas aplicaciones del Teorema Fundamental de Ultraproductos

3.5.1 Una prueba directa del Teorema de Compacidad usando ultraproductos

A continuación se ofrece una prueba directa del Teorema de Compacidad usando el Teorema fundamental de ultraproductos. Es conocido que tal teorema se prueba también (entre otros) como un corolario del Teorema de completitud de Gödel (1930) [[Go1], pp. 32]. El Teorema de Compacidad tiene importantes consecuencias matemáticas, metamatemáticas y filosfóficas. Dicho teorema es, entre otros, un poderoso método de construcción de modelos no estándar (más adelante en esta misma sección se definirá la noción "modelo no estándar"). Notar que la prueba de este teorema usa el Teorema del Ultrafiltro, por lo tanto requiere del Lema de Zorn necesariamente, es decir, tal demostración es esencialmente platonista, en un grado fuerte de platonismo según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2). Esto ocurrirá con todo lo que se realice en este trabajo que use al Teorema de Compacidad.

Teorema 3.5.1.1 (Teorema de Compacidad (1930)). *Sea* Γ *un conjunto de sentencias de un lenguaje* $\mathcal{L}$*, sea* $I = S_\omega(\Gamma)$ *el conjunto de todos los subconjuntos finitos de* Γ*, y para* $i \in I$*, sea* $\mathfrak{A}_\mathbf{i}$ *un modelo de* i*. Entonces existe un ultrafiltro* D *sobre* I *tal que el ultraproducto* $\prod_D \mathfrak{A}_\mathbf{i}$ *es un modelo de* Γ*.*

Demostración: Para cada $\gamma \in \Gamma$, se define $\hat{\gamma} = \{i \in I : \gamma \in i\}$. El conjunto $K = \{\hat{\gamma} : \gamma \in \Gamma\} \subseteq P(I)$ tiene la propiedad de intersección finita ya que para todo $\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n \in K$ se cumple que $\{\ \gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \in \hat{\gamma}_1 \cap \ldots \cap \hat{\gamma}_n$. Entonces se considera el filtro K^* sobre I generado por K que proporciona el Teorema 3.2.2 ($K \subseteq K^*$). Por el Teorema del ultrafiltro (3.2.4) K^* se puede extender a un ultrafiltro sobre I, sea D dicho ultrafiltro ($K \subseteq K^* \subseteq D$). Si $i \in \hat{\gamma}$, entonces $\gamma \in i$ y $\mathfrak{A}_\mathbf{i} \models \gamma$. En consecuencia:

$$\forall \gamma \in \Gamma(\hat{\gamma} \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_\mathbf{i} \models \gamma\}),$$

y como $\hat{\gamma} \in D$, entonces $\{i \in I : \mathfrak{A}_\mathbf{i} \models \gamma\} \in D$, porque D es filtro. Por lo tanto, por el Teorema Fundamental de Ultraproductos (cláusula (iii)) se tiene que,

$$\forall \gamma \in \Gamma(\prod_D \mathfrak{A}_\mathbf{i} \models \gamma),$$

es decir, $\prod_D \mathfrak{A}_\mathbf{i}$ es un modelo de Γ. Lo que se quería demostrar. $\Box$.

3.5.2 Modelos no estándar de la Aritmética y de la Teoría de los números reales

Con el Teorema de Compacidad se puede demostrar que existen modelos no estándar para la Aritmética y para la Teoría de los números reales (ambas en primer orden), se demostrarán tales resultados luego de unas definiciones previas, esto se realizará porque tiene importantes consecuencias en matemáticas, en metamatemáticas, en filosofía de la matemática, etc. Un ejemplo de ello es la creación del Análisis no estándar por parte de Robinson en 1960 [Rob1], [Ma], [Cor], [Ivo], [Ch-K], [Mi]. En el trabajo de licenciatura [FG1] se investigó sobre las limitaciones expresivas de la Lógica de primer orden como consecuencia de sus Propiedades de Compacidad y Löwenheim-Skolem, pero ellas se investigaron en relación con el Teorema de Lindström [Li], no en relación con el Método de Ultraproductos, es decir, dicho método no se estudió en [FG1]. En [FG1] tampoco se investigó sobre cardinales medibles, ni sobre Análisis no estándar lo cual sí se hace en este trabajo, por ejemplo se probarán tres interesantes teoremas sobre cardinales medibles. Con relación al Análisis no estándar sólo se explicará en esta investigación cómo se construye el Modelo de los Hiper-Reales de Robinson usando el Teorema de Compacidad, y cómo se pueden probar Teoremas de Análisis estándar usando técnicas de Análisis no estándar. La construcción del Modelo de los Hiper-Reales de Robinson y la prueba de los teoremas sobre cardinales medibles se realizarán en las dos subseciones siguientes a esta.

$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, S, +, \bullet, 0, 1, < \rangle$ es la estructura cuyo universo es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, S es la operación sucesor usual en $\mathbb{N}$, $+$ y $\bullet$ son la suma y el producto usual de $\mathbb{N}$, 0 y 1 son el cero y el uno usual de $\mathbb{N}$, y $<$ es el orden usual en $\mathbb{N}$. La *Aritmética* es el conjunto de todas las sentencias en primer orden en el lenguaje adecuado $\mathcal{L}_{\mathfrak{N}} = \{\widehat{<}, \widehat{S}, \widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{0}, \widehat{1}\}$ verdaderas en $\mathfrak{N}$, tal conjunto se denota así $TEO(\mathfrak{N})$, es decir, $TEO(\mathfrak{N}) = \{\phi \in \mathcal{L}_{\mathfrak{N}} : \mathfrak{N} \models \phi\}$. Una estructura la cual es elementalmente equivalente a $\mathfrak{N}$, pero no es isomorfa a ella, se dice que es un *modelo no estándar de la Aritmética* ($TEO(\mathfrak{N})$).

$\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, +, \bullet, 0, 1, < \rangle$ es la estructura cuyo universo es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, $+$ y $\bullet$ son la suma y el producto usual de $\mathbb{R}$, 0 y 1 son el cero y el uno usual de $\mathbb{R}$, y $<$ es el orden usual en $\mathbb{R}$. $\mathfrak{R}$ se puede carácterizar (salvo isomorfismo) como un cuerpo totalmente ordenado, denso, no acotado, completo y separable [J1], [J3]. Otra propiedad de $\mathfrak{R}$ es que es arquimidiano. Para este trabajo interesa definir las propiedades de cuerpo totalmente ordenado, arquimidiano, denso y sin extremos, el que $\mathfrak{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado, arquimidiano, denso y sin extremos significa que $\mathfrak{R}$ satisface los siguientes axiomas:

Axiomas de cuerpo: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que:

A1 $x + y = y + x$

A2 $(x + y) + z = x + (y + z)$

A3 $\forall x \in \mathbb{R} \exists 0 \in \mathbb{R}(x + 0 = x)$

A4 $\forall x \in \mathbb{R} \exists w \in \mathbb{R}(x + w = 0)$

A5 $x \bullet y = y \bullet x$

A6 $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$

A7 $\forall x \in \mathbb{R} \exists 1 \in \mathbb{R}(1 \neq 0 \wedge x \bullet 1 = x)$

A8 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists w \in \mathbb{R}(x \bullet w = 1)$

A9 $x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)$

(El w de A4 es único y se denota por $-x$ (el elemento simétrico de x). Y el w de A8 es único y se denota por x^{-1} (el elemento inverso de x))

Axiomas de orden total o lineal (estricto):

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que:

1. $x \not< x$
2. $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$
3. $x < y \vee y < x \vee x = y$

$\mathfrak{R}$ **es arquimidiano:**

$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}(x < \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{veces}})$.

$\mathfrak{R}$ **es denso:**

$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(x < y \rightarrow \exists z \in \mathbb{R}(x < z < y))$
$\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x \not\equiv y)$

$\mathfrak{R}$ **no tiene extremos:**

$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x < y)$
$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(y < x)$

El conjunto de todas las sentencias en primer orden en el lenguaje adecuado $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}} = \{\widehat{<}, \widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{0}, \widehat{1}\}$ verdaderas en $\mathfrak{R}$ se denota así $TEO(\mathfrak{R})$, es decir, $TEO(\mathfrak{R}) = \{\phi \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}} : \mathfrak{R} \models \phi\}$. Una estructura la cual es elementalmente equivalente a $\mathfrak{R}$, pero no es isomorfa a ella, se dice que es un *modelo no estándar de* $TEO(\mathfrak{R})$.

Corolario 3.5.2.1 (Modelos no estándar de $TEO(\mathfrak{N})$ y $TEO(\mathfrak{R})$). *Existen modelos no estándar de $TEO(\mathfrak{N})$ y de $TEO(\mathfrak{R})$.*

Demostración: Se probará primero que existe un modelo no estándar de $TEO(\mathfrak{N})$: Considérese el siguiente conjunto de sentencias que extiende a $TEO(\mathfrak{N})$:

$$\Delta = TEO(\mathfrak{N}) \cup \{\neg[(c \equiv \widehat{S}^n(\,\widehat{0}\,)] : n \in \mathbb{N}\},$$

donde c un símbolo constante nuevo, $\widehat{S}^n(\,\widehat{0}\,)$ es el término que resulta de aplicar $\widehat{S}$ n-veces a la constante $\widehat{0}$, y $\widehat{S}^0(\,\widehat{0}\,) = \widehat{0}$. Es claro que cada subconjunto finito de Δ tiene como modelo a la estructura expandida,

$$(\mathfrak{N}, n),$$

donde n es un número natural suficientemente grande al cual se interpreta la constante nueva c. Por lo tanto, por el Teorema de Compacidad, Δ tiene un modelo. Sea $\mathfrak{M} = \langle M, S^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \bullet^{\mathfrak{M}}, 0^{\mathfrak{M}}, 1^{\mathfrak{M}}, <^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}} \rangle$ dicho modelo.

Por la definición de Δ es claro que $\mathfrak{M} \models TEO(\mathfrak{N})$ y por lo tanto $\mathfrak{M} \restriction \mathcal{L}_{\mathfrak{N}}$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{N}$. Sin embargo, por la definición de Δ, $c^{\mathfrak{M}} \neq \widehat{S}^n(\widehat{0})^{\mathfrak{M}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia $\mathfrak{M} \restriction \mathcal{L}_{\mathfrak{N}}$ no es isomorfo a $\mathfrak{N}$.

Se probará ahora que existe un modelo no estándar de $TEO(\mathfrak{R})$ de una manera análoga al caso anterior: Considérese el siguiente conjunto de sentencias que extiende a $TEO(\mathfrak{R})$:

$$\Theta = TEO(\mathfrak{R}) \cup \{ \underbrace{\widehat{1}\widehat{+}\ldots\widehat{+}\widehat{1}}_{n\,\text{veces}} < c \, : n \in \mathbb{N}\},$$

donde c un símbolo constante nuevo, y $\underbrace{\widehat{1}\widehat{+}\ldots\widehat{+}\widehat{1}}_{0\,\text{veces}} = \widehat{0}$. Es claro que cada subconjunto finito de Θ tiene como modelo a la estructura expandida,

$$(\mathfrak{R}, n),$$

donde n es un número natural suficientemente grande al cual se interpreta la constante nueva c. Por lo tanto, por el Teorema de Compacidad, Θ tiene un modelo. Sea $\mathfrak{E} = \langle E, +^{\mathfrak{E}}, \bullet^{\mathfrak{E}}, 0^{\mathfrak{E}}, 1^{\mathfrak{E}}, <^{\mathfrak{E}}, c^{\mathfrak{E}} \rangle$ dicho modelo. Por la definición de Θ es claro que $\mathfrak{E} \models TEO(\mathfrak{R})$ y por lo tanto $\mathfrak{E} \restriction \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{R}$. Sin embargo, por la definición de Θ, $\underbrace{\widehat{1}^{\mathfrak{E}}\widehat{+}^{\mathfrak{E}}\ldots\widehat{+}^{\mathfrak{E}}\widehat{1}^{\mathfrak{E}}}_{n\,\text{veces}} < c^{\mathfrak{E}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia $\mathfrak{E} \restriction \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}$ no es isomorfo a $\mathfrak{R}$, pues $\mathfrak{R}$ es arquimidiano y $\mathfrak{E} \restriction \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ no lo es. $\square$

3.5.3 Un esbozo de la construcción del cuerpo ordenado y no arquimediano de los Hiper-Reales, y del Análisis no estándar de Robinson

El cuerpo ordenado y no arquimediano de los Hiper-Reales es una estructura,

$$\mathfrak{R}^* = \langle \mathbb{R}^*, +^{\mathfrak{R}^*}, \bullet^{\mathfrak{R}^*}, {}^{-*}, ||^*, 0^{\mathfrak{R}^*}, 1^{\mathfrak{R}^*}, <^{\mathfrak{R}^*} \rangle,$$

que se construye a partir del cuerpo ordenado y arquimidiano de las reales,

$$\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, +, \bullet, ^{-}, ||, 0, 1, < \rangle,$$

donde para facilitar algunas definiciones se le agrega la función $^{-}$ que a cada real le asigna su simétrico y la función valor absoluto $||$. $\mathfrak{R}^*$ es un modelo no estándar de $TEO(\mathfrak{R})$ tal que $\mathfrak{R} \prec \mathfrak{R}^*$. $\mathfrak{R}^*$ contiene a todos los reales estándar y satisface todas las propiedades $\mathfrak{R}$ que se pueden expresar con fórmulas de primer orden. La construcción puede hacerse (entre otros) usando el Teorema de compacidad directamente aplicando un procedimiento análogo al que se utilizó para construir en el teorema anterior el modelo no estándar para $\mathfrak{R}$ (como se hace en [Ma]), y también puede construirse (sin usar directamente el Teorema de compacidad) usando Ultrafiltros y el Teorema fundamental de ultraproductos, tal como se hace en [Cor].

La construcción, usando compacidad, se hace en [Ma] de la siguiente manera:

Sea $(\mathfrak{R}, \langle r : r \in \mathbb{R}\rangle)$ una estructura que extiende a $\mathfrak{R}$, donde aparecen destacados todos los elementos de $\mathbb{R}$. Un lenguaje apropiado para $(\mathfrak{R}, \langle r : r \in \mathbb{R}\rangle)$ es $\{\hat{<}, \hat{+}, \hat{\bullet}, \hat{^{-}}, \widehat{||}, \hat{0}, \hat{1}\} \cup \{c_r : r \in \mathbb{R}\}$. c_r es un nombre para r, para cada $r \in \mathbb{R}$. Considérese el siguiente conjunto de sentencias Θ':

$$\Theta' = TEO((\mathfrak{R}, \langle r : r \in \mathbb{R}\rangle)) \cup \{c_r < d : r \in \mathbb{R}\},$$

donde d un símbolo constante nuevo que no aparece en,

$\mathcal{L}_{(\mathfrak{R}, \langle r : r \in \mathbb{R}\rangle)} = \{\hat{<}, \hat{+}, \hat{\bullet}, {}^{-*}, ||^*, \hat{0}, \hat{1}\} \cup \{c_r : r \in \mathbb{R}\}$. Es claro que cada subconjunto finito de Θ' tiene como modelo a la estructura expandida,

$$((\mathfrak{R}, \langle r : r \in \mathbb{R}\rangle), a),$$

donde a es un número real suficientemente grande al cual se interpreta la constante nueva d. Por lo tanto, por el Teorema de Compacidad, Θ' tiene un modelo. Sea $\mathfrak{U}$ tal modelo. $\mathfrak{R}$ está inmerso elementalmente en $\mathfrak{U} \upharpoonright \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}$, donde $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}} = \{\hat{<}, \hat{+}, \hat{\bullet}, \hat{^{-}}, \widehat{||}, \hat{0}, \hat{1}\}$, por la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow U$ tal que $f(r) = c_r^{\mathfrak{U}}$, ya que $(\mathfrak{R}, \langle r : r \in \mathbb{R}\rangle) \equiv \mathfrak{U} \upharpoonright \{\hat{<}, \hat{+}, \hat{\bullet}, {}^{-*}, ||^*, \hat{0}, \hat{1}\} \cup \{c_r : r \in \mathbb{R}\}$. Como $\mathfrak{R}$ es isomorfo a un submodelo elememental de $\mathfrak{U} \upharpoonright \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}$, entonces identificando a cada $r \in \mathbb{R}$ con su imagen según f, $f(r) = c_r^{\mathfrak{U}}$, se concluye que $\mathfrak{R} \prec \mathfrak{U} \upharpoonright \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}$. Entonces $\mathfrak{U} \upharpoonright \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}$ es un cuerpo ordenado estrictamente, denso y sin extremos (ya que todas estas propiedades son expresables en primer orden con sentencias del lenguaje $\{\hat{<}, \hat{+}, \hat{\bullet}, \hat{^{-}}, \widehat{||}, \hat{0}, \hat{1}\}$). Se define $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{U} \upharpoonright \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}$,

$$\mathfrak{R}^* = \langle \mathbb{R}^*, +^{\mathfrak{R}^*}, \bullet^{\mathfrak{R}^*}, {}^{-*}, ||^*, 0^{\mathfrak{R}^*}, 1^{\mathfrak{R}^*}, <^{\mathfrak{R}^*} \rangle.$$

Por construcción se cumple que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^*$, pero $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}^*$. En efecto: $\mathbb{R}^*$ tiene nuevos elementos, por la definición de Θ' se sabe que existe un $z \in \mathbb{R}^*$, $(z = d^{\mathfrak{U}})$, tal que $r < z$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Como z es distinto de cero, entonces z tiene un inverso multiplicativo, $z^{-1^*} \in \mathbb{R}^*$. Se llamará *ilimitado* (o *infinito*) a los elementos de $\mathbb{R}^*$ del tipo de z, y se llamará *infinitisimal* a los elementos de $\mathbb{R}^*$ del mismo tipo de z^{-1^*}.

A continuación se definen en $\mathbb{R}^*$ las nociones de "número real ilimitado (o infinito)", "número real finito" y "número real infinitesimal":

$$ILIMITADO(\mathbb{R}^*) = \{x \in \mathbb{R}^* : \forall r \in \mathbb{R}(\mid r \mid^* <^* \mid x \mid^*)\},$$

$$FINITO(\mathbb{R}^*) = \{x \in \mathbb{R}^* : \exists r \in \mathbb{R}(\mid x \mid^* <^* \mid r \mid^*)\},$$

$$INFINITESIMAL(\mathbb{R}^*) = \{x \in \mathbb{R}^* : \forall r \in \mathbb{R}^+(\mid x \mid^* <^* r)\}.$$

Ahora bien, ¿ Cómo son los naturales $\mathbb{N}^*$ de $\mathbb{R}^*$? ¿Qué propiedades tiene $\mathbb{N}^*$?. Para responder estas preguntas se aplican algunos métodos de la Teoría de modelos, por ejemplo re-escribir el modelo estándar original, $\mathfrak{R}$, como una estructura que tiene como elementos destacados todas las funciones y relaciones posibles sobre $\mathbb{R}$,

$$\uparrow \mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, \langle f \rangle_{(f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}}, \langle P \rangle_{(P \subseteq \mathbb{R}^n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}} \rangle.$$

Y aplicando un procedimiento exactamente igual al que se realizó anteriormente para construir $\mathfrak{R}^*$ a partir de $\mathfrak{R}$, tal que $\mathfrak{R} \prec \mathfrak{R}^*$, usando el conjunto Θ' y el Teorema de compacidad, se construye otra estructura no estándar,

$$\uparrow \mathfrak{R}^* = \langle \mathbb{R}^*, \langle f^* \rangle_{(f^*:\mathbb{R}^{*n} \longrightarrow \mathbb{R}^*)_{n \in \mathbb{N}}}, \langle P^* \rangle_{(P^* \subseteq \mathbb{R}^{*n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}} \rangle,$$

tal que $\uparrow \mathfrak{R} \prec \uparrow \mathfrak{R}^*$. En el contexto de estas estructuras $\uparrow \mathfrak{R}$ y $\uparrow \mathfrak{R}^*$ es donde se responderán las preguntas anteriores. Es importante destacar que tales estructuras restringidas al lenguaje original de $\mathfrak{R}$,

$\mathcal{L}_{\mathfrak{R}} = \{\widehat{<}, \widehat{+}, \widehat{\bullet}, \widehat{-}, \widehat{||}, \widehat{0}, \widehat{1}\}$,

son iguales a $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}^*$, respectivamente.

Se conoce que $\mathbb{N}$ no es acotado en $\mathbb{R}$, es decir, "para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $y \in \mathbb{N}(x < y)$ ", entonces la sentencia $\forall x \exists y(Ny \wedge x < y)$ es verdad en $\uparrow \mathfrak{R}$, por lo tanto, por submodelo elemental se tiene que $\forall x \exists y(Ny \wedge x < y)$ es verdad $\uparrow \mathfrak{R}^*$, es decir, "Para todo $x \in \mathbb{R}^*$ existe un $y \in \mathbb{N}^*$ tal que $x <^* y$". Sea $w \in \mathbb{R}^*$ un elemento ilimitado y mayor que cero. Entonces existe un $u \in \mathbb{N}^*$ tal que $w <^* u$. En consecuencia, como $r < u$ para todo $r \in \mathbb{R}$, se conluye que u es también ilimitado, de modo que en $\mathbb{N}^*$ hay elementos ilimitados.

Se puede demostrar usando $\uparrow \mathfrak{R} \prec \uparrow \mathfrak{R}^*$ que también se cumple:

$$\langle \mathbb{N}, S, +, \bullet, 0, 1, < \rangle \prec \langle \mathbb{N}^*, S^*, +^*, \bullet^*, 0^*, 1^*, <^* \rangle,$$

para ello es conveniente trasnformar las fórmulas que afirman hechos sobre los naturales en fórmulas relativizadas que afirman los mismos hechos pero en el lenguanje de la estructura de los reales ($\uparrow \mathfrak{R}$ y $\uparrow \mathfrak{R}^*$), es decir, cuando se afirma $\exists x \phi$ en el lenguaje de los naturales se toma la respectiva relativización en el lenguaje de los reales $\exists x(N(x) \wedge \phi')$, y cuando se afirma $\forall x \phi$ se considera $\forall x(N(x) \rightarrow \phi')$.

Ahora se procede a definir una relación en $\mathfrak{R}^*$ que será una relación de equivalencia: x está *infinitamente próximo* a y ($x \simeq y$) si y sólo si $(x -^* y)$ es infinitesimal.

Con esta definición se puede probar, en el Análisis no estándar, la siguiente proposición sobre convergencia de sucesiones, es importante resaltar que la proposición ofrece un método del Análisis no estándar para probar si una sucesión (del Análisis estándar) converge o no, es decir, la proposición proporciona un método no estándar para resolver problemas del Análisis estándar. Una prueba de la misma se encuentra en [[Cor], pp. 31]. Se enunciará la proposición luego de una definición previa:

Sea $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión, y $l \in \mathbb{R}$. Se dice que S *converge hacia* a l ($lim_{n \to \infty} S(n) = l$) si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural m tal que que para todos los números naturales n: si $n > m$, entonces $\mid S(n) - l) \mid < \epsilon$. Se dice que la sucesión S *converge* si converge hacia l para algún $l \in \mathbb{R}$, y que S *diverge* si no converge.

Proposición: Sea $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión, y $l \in \mathbb{R}$. S *converge hacia* a l si y sólo si $\forall n \in \mathbb{N}^*{}_\infty (S^*(n) \simeq l)$. Donde $\mathbb{N}^*{}_\infty$ es el conjunto de todos los naturales ilimitados de $\mathbb{N}^*$.

Para que tenga sentido la proposición anterior es importante resaltar que toda sucesión $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\mathfrak{R}$ tiene una correspondiente sucesión $S^* : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ en $\mathfrak{R}^*$ que la extiende. Esto se puede justificar en el contexto de $\uparrow \mathfrak{R} \prec \uparrow \mathfrak{R}^*$. Pues $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es una relación binaria que satisface existencia y unicidad (relativizada a N), lo cual es expresable en primer orden (con el nombre respectivo para S, $\widehat{S}$) y tal proposición se cumple en $\uparrow \mathfrak{R}$, y por lo tanto en $\uparrow \mathfrak{R}^*$, por ejemplo por una sentencia de la siguiente forma: $\forall x(N(x) \rightarrow \exists y[(\widehat{S}(x,y) \wedge \forall z \forall w(\widehat{S}(x,z) \wedge \widehat{S}(x,w) \rightarrow z \equiv w)]$. Tal proposición se cumple en $\uparrow \mathfrak{R}$, y en consecuencia en $\uparrow \mathfrak{R}^*$. También se cumple en $\uparrow \mathfrak{R}$ que $\forall x \forall y(\widehat{S}(x,y) \rightarrow N(x) \wedge R(y))$, en consecuencia tal sentencia es verdad en $\uparrow \mathfrak{R}^*$, de modo que $S^* : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ es la suceción en $\mathfrak{R}^*$ que extiende y se corresponde con S de $\mathfrak{R}$. (También, como $\uparrow \mathfrak{R} \sqsubseteq \uparrow \mathfrak{R}^*$, se cumple que: $S^{\uparrow \mathfrak{R}} = S^{\uparrow \mathfrak{R}^*} \cap \mathbb{R}^2$, y $S = S^{\uparrow \mathfrak{R}}$ y $S^* = S^{\uparrow \mathfrak{R}^*}$).

Vale la pena resaltar que así como se reformuló la definición de "límite de una sucesión" en el contexto del Análisis no estándar (ofreciendo la caráterización anterior) también se pueden reformular el resto de los conceptos del Análisis estándar: "continuidad de una función en un punto y sobre $\mathbb{R}$", "continuidad uniforme de una función sobre $\mathbb{R}$ ", "derivada de una función en un punto de $\mathbb{R}$", etc. Esto proporciona nuevos métodos para resolver problemas del Análisis [Mi], [Cor].

Escapa al ámbito de este trabajo profundizar más en este interesante tema, se deja para posteriores investigaciones, sin embargo, al final de esta sección (3) sobre Ultraproductos, en la última subsección llamada "Algunas consideraciones matemáticas, metamatemáticas y filosóficas sobre Ultraproductos, Compacidad, Análisis no estándar y Cardinales medibles" , se presentarán algunas reflexiones con respecto al Análisis estándar y al Análisis no estándar.

También vale la pena resaltar, con relación al Análisis no estándar, que quizá es muy interesante e instructivo desde el punto de vista matemático, lógico y filosófico (etc), estudiar la polémica de Berkeley con los analistas que ocurrió en el siglo XVIII después de la publicación en 1734 de su texto: *"El*

Análisis: ó un discurso dirigido a un matemático infiel. Donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno son concebidos más claramente o son deducidos con mayor evidencia que los misterios de la religión y los asuntos de la fe" [Robl], [Pa-Ba]. Escapa al ámbito de este trabajo profundizar en este interesante tema, se deja para posteriores investigaciones.

3.5.4 Cardinales grandes: Tres teoremas sobre cardinales medibles que se demuestran usando ultraproductos

A continuación se presenta la definición de "cardinal inaccesible" y también la de "cardinal medible" las cuales son necesarias para realizar esta sección.

Sea α un ordinal límite. Decimos que $\beta < \alpha$ es *cofinal* con α si existe una función creciente $f : \beta \longrightarrow \alpha$ tal que para todo $\xi < \alpha$, existe un $\delta < \beta$ tal $f(\delta) \geq \xi$ (es decir, la imagen de f es no acotada en α). Dado α, la *cofinalidad* de α, $cof(\alpha)$, es el menor ordinal cofinal con α. Con respecto a la cofinalidad se cumple lo siguiente: $cof(\alpha)$ es el menor cardinal β tal que existe una partición de α en β pedazos cada uno de los cuales tiene cardinalidad estrictamente menor que α. Un cardinal infinito κ es *regular* si es igual a su cofinalidad. Decimos que es *singular* en caso contrario ($cof(\alpha) < \alpha$). Un cardinal κ es un cardinal límite fuerte si para todo cardinal $\theta < \kappa$ se tiene que $2^\theta < \kappa$. Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ es inaccesible si es regular y límite fuerte (Notar que si se quita la condición de que $\kappa > \aleph_0$ se tiene que $\aleph_0$ es un cardinal inaccesible).

Sea α un cadinal infinito. Un filtro D sobre I se llama α-*completo* si y sólo si: $X \subseteq D$ y $\mid X \mid< \alpha$ implica $\bigcap X \in D$. Un cardinal $\alpha > \aleph_0$ se dice que es *medible* si y sólo si existe un ultrafiltro no principal y α-completo sobre α (Notar que si se quita la condición de que $\kappa > \aleph_0$ se tiene que $\aleph_0$ es un cardinal medible).

PRIMER TEOREMA SOBRE CARDINALES MEDIBLES:

Se demostrará el Teorema de Compacidad débil, una versión del Teorema de compacidad para Lógicas infinitarias. Es un primer ejemplo de la aplicación del método de ultraproductos que usa cardinales grandes, específicamente cardinales medibles.

Los lenguajes infinitarios $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$, donde κ es un cardinal mayor o igual que $\aleph_0$:

([D2], [E-F-T], [Ch-K], [Bel1])

Considérese un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ (conjunto de símbolos relacionales, funcionales y constantes) tal como fue definido anteriormente en este trabajo (3.3) y también considérese las reglas que se usaron para formalizar el mismo, es decir, para construir las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$. A la lista de símbolos lógicos agréguese los siguientes nuevos símbolos: $\bigwedge$ (conjuntor infinito) y $\bigvee$ (disyuntor infinito), y sustitúyase la lista numerable de variables por una lista de variables de cardinal κ. Para construir el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ se utilizan las mismas reglas que se usaron para contruir las fórmulas de lenguaje $\mathcal{L}$ (Ver definición 3.3.3.3), más las siguientes dos nuevas reglas:

(v) Si Φ es un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ tal que $\mid \Phi \mid < \kappa$, entonces $\bigwedge \Phi$ y $\bigvee \Phi$ también son formulas de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$.

(vi) Si φ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ y V es un conjunto de variables tal que $\mid V \mid < \kappa$, entonces $(\forall V)\Phi$ y $(\exists V)\Phi$ también son fórmulas de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$.

Semántica de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$: Una estructura para evaluar las formulas del lenguaje $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ es igual que una estructura para el lenguaje $\mathcal{L}$, pues tiene los mismos símbolos no lógicos. Sea ϕ una fórmula de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$, $\mathfrak{C}$ una estructura para $\mathcal{L}$ y $s : VAR_{\mathcal{L}_{\kappa\kappa}} \longrightarrow C$. La definición de $\mathfrak{C} \models \phi[s]$ es igual que la definición que se hizo para $\mathcal{L}$, más las siguientes reglas correspondientes a los nuevas fórmulas construídas mediante (v) y (vi):

(2.8) $\mathfrak{C} \models \bigwedge \Phi[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \varphi[s]$, para toda $\varphi \in \Phi$.

(2.9) $\mathfrak{C} \models \bigvee \Phi[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \varphi[s]$, para alguna $\varphi \in \Phi$.

(2.10) $\mathfrak{C} \models ((\forall V)\chi)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \chi[s']$ para toda $s' : VAR_{\mathcal{L}_{\kappa\kappa}} \longrightarrow C$ que difiere de s a lo sumo en los valores de las variables de V.

(2.11) $\mathfrak{C} \models ((\exists V)\chi)[s] \Longleftrightarrow \mathfrak{C} \models \chi[s']$ para alguna $s' : VAR_{\mathcal{L}_{\kappa\kappa}} \longrightarrow C$ que difiere de s a lo sumo en los valores de las variables de V.

Notar que si $\kappa = \aleph_0$, entonces $\mathcal{L}_{\aleph_0\aleph_0} = \mathcal{L}$ (Es decir, $\mathcal{L}_{\aleph_0\aleph_0}$ es la Lógica de primer orden definida al inicio de este trabajo y con la cual se ha venido trabajando en el trancurso del mismo).

Es importante destacar, porque se utilizará más adelante, que con dicho lenguaje infinitario, en particular con $\kappa > \aleph_0$ se puede caracterizar el concepto de "relación bien fundamentada" (una relación binaria R es bien fundamentada si no existen cadenas infinitas descendientes con respecto a R, por ejemplo "$\in$" en $\mathbf{V}$) y el concepto de "relación bien ordenada". En efecto: La siguiente sentencia afirma que la relación binaria que nombra el símbolo relacional binario $P(x, y)$ es bien fundamentada:

$$\text{RBF: } (\forall x_0 x_1 x_2 \ldots)\neg \bigwedge \{P(x_{n+1}, x_n) : n \in \aleph_0\},$$

y cuando se adiciona (con la conjunción finita $\wedge$) a la sentencia anterior los axiomas de orden total escritos con el lenguaje $\mathcal{L}$,

$$\text{RBO: } [(\forall x_0 x_1 x_2 \ldots)\neg \bigwedge \{P(x_{n+1}, x_n) : n \in \aleph_0\}] \wedge \text{Axiomas de orden total,}$$

se tiene que la relación determinada por $P(x, y)$ es un buen orden en la estructura respectiva donde $P(x, y)$ sea interpretado y se satisfaga la sentencia RBO.

El Teorema fundamental de Ultraproductos tiene versiones más fuertes. En efecto, se cumple que los ultrapoctuctos también preservan las fórmulas infinitarias (si se le agrega una hipótesis adicional al ultrafiltro, δ-completo, δ un cardinal mayor o igual que $\aleph_0$), ese es el significado del siguiente resultado, una prueba del mismo puede encontrarse en [[Ch-K], pp. 231-232]:

Lema 3.5.4.1 (Las fórmulas infinitarias son preservadas por los ultraproductos). *Sea $\mathfrak{B}$ el ultraproducto $\prod_D \mathfrak{A}_i$, donde I es el conjunto de índices de los $\mathfrak{A}_i$, y D es un ultrafiltro δ-completo (δ un cardinal mayor o igual que $\aleph_0$). Entonces:*

(i) Dada una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$ de $\mathcal{L}_{\delta\delta}$ y $f^1_D, \ldots, f^n_D, f^{n+1}_D, \ldots \in B$ se tiene que:

$$\mathfrak{B} \models \varphi[f^1_D, \ldots, f^n_D, f^{n+1}_D, \ldots] \leftrightarrow$$

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi[f^1(i), \ldots, f^n(i), f^{n+1}(i), \ldots]\} \in D$$

(ii) Para cada sentencia φ de $\mathcal{L}_{\delta\delta}$ se tiene que:

$$\mathfrak{B} \models \varphi \leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in D$$

El siguiente Teorema es una versión del Teorema de Compacidad para conjuntos de sentencias de lenguajes infinitarios cuyo cardinal sea un cardinal medible. La demostración supone ultraproductos y lenguajes infinitarios (preservados por ultraproductos). Con dicho teorema se abre la puerba para la definición de un nuevo tipo de cardinal grande: "Cardinal débilmente compacto". Se cumple que "cardinal medible" implica "cardinal débilmente compacto" (y algo más fuerte), pero "cardinal débilmente compacto" no implica "cardinal medible" [[Ch-K], pp. 243], [[D2], pp. 132]. Es decir, la hipótesis "existe un cardinal medible" es más fuerte que la hipótesis "existe un cardinal débilmente compacto". Los cardinales débilmente compactos se pueden caracteriazar también con propiedades de combinatoria infinita tipo Ramsey [[D2], pp. 118], después de la demostración del teorema se comentará brevemente este asunto.

Teorema 3.5.4.2 (Teorema de Compacidad débil). *Sea η un cardinal medible, y Γ un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}_{\eta\eta}$ tal que $\mid \Gamma \mid = \eta$ y cualquier subconjunto $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\mid \Gamma_0 \mid < \eta$ tiene un modelo. Entonces Γ tiene un modelo.*

Demostración:

Como η es medible se tiene que existe un ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η. Como H no contiene conjuntos unitarios y es η-completo, entonces H no contiene conjuntos de cardinal menor que η.

(para ver la intuición de este hecho se puede pensar que $\eta = \aleph_0$, aunque obviamente si η es medible es mayor que $\aleph_0$ por definición, es una sólo una idea para la intuición, y luego considerar que H es el filtro de Fréchet sobre $\aleph_0$, de este modo el hecho descrito se aprecia claramente. Una demostración mas general y rigurosa es la siguiente: Sea $A \in H$ tal que $\mid A \mid < \eta$. Para todo $x \in A$ se cumple que $\{x\} \notin H$ porque H es ultrafiltro no principal y entonces por definición no contiene conjuntos unitarios. Entonces para todo $x \in A(\eta \setminus \{x\} \in H)$ ya que H es ultrafiltro. En consecuencia, como H es η-completo se cumple que: $\bigcap_{x \in A}(\eta \setminus \{x\}) \in H$. Por lo tanto: $\emptyset = (\bigcap_{x \in A} \eta \setminus \{x\}) \cap A \in H$, pues H es un filtro. Contradicción)

Por lo tanto para cada $\delta < \eta$,

$$\{\theta : \delta < \theta < \eta\} \in H\,,$$

ya que el complemento de $\{\theta : \delta < \theta < \eta\}$ no pertenece a H porque tiene cardinal menor que η, y entonces como H es un ultrafiltro $\{\theta : \delta < \theta < \eta\} \in H$.

Sea la siguiente enumeración de Γ: $\Gamma = \{\phi_\beta : \beta < \eta\}$. Por hipótesis, para cada $\beta < \eta$, existe un modelo $\mathfrak{C}_\beta$ del conjunto $\{\phi_\delta : \delta < \beta\}$. Sea

el ultraproducto $\mathfrak{D} = \prod_H \mathfrak{C}_\beta$. Entonces para cada $\phi_\delta \in \Gamma$, se tiene que,

$$\{\theta < \eta : \mathfrak{C}_\theta \models \phi_\delta\} \supseteq \{\theta : \delta < \theta < \eta\} \in H.$$

En consecuencia, como los ultraproductos preservan las fórmulas infinitarias (por el Lema 3.5.4.1), se cumple que el ultraproducto $\mathfrak{D}$ es un modelo de Γ. Lo que se quería demostrar. $\square$

Definición de cardinal débilmente compacto y combinatoria infinita:

Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ es *débilmente compacto* si para todo conjunto Γ de sentencias de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ tal que $\mid \Gamma \mid = \kappa$ ocurre lo siguiente: Si cada subconjunto de Γ de cardinalidad menor que κ tiene un modelo, entonces Γ tiene un modelo. (Es decir, κ es débilmente compacto si cumple con el Teorema anteriormente demostrado, en otras palabras, un cardinal medible es débilmente compacto).

(Notar que el Teorema de compacidad demostrado para la Lógica de primer orden $\mathcal{L}_{\aleph_0\aleph_0}$ implica que $\aleph_0$ es débilmente compacto, si se elimina la restricción de que el cardinal débilmente compacto debe ser mayor que $\aleph_0$, es decir, la definición de cardinal débilmente compacto es una generalización de una propiedad de $\aleph_0$ para cardinales no numerables, algo análogo ocurre con la noción de cardinal inaccesible y la de cardinal medible)

Como se dijo anteriormente todo cardinal medible es débilmente compacto, pero lo inverso no ocurre, débilmente compacto no implica medible, una demostración de ello puede encontrarse en [[Ch-K], pp. 243].

La relación combinatoria $\kappa \rightarrow \kappa^2_2$ significa que para toda partición en dos clases del conjunto de subconjuntos de dos elementos de κ existe un subconjunto $H \subseteq \kappa$ cuyos subconjuntos de dos elementos están todos en el misma clase y H tiene cardinal κ. Esta definición se puede re-expresar de la siguiente manera teniendo presente que $[A]^2 = \{\{x, y\} : x \in A \wedge y \in A\}$ y que $F''[A] = \{F(x) : x \in A\}$. Entonces $\kappa \to \kappa_2^2$ significa que para toda función $F : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0, 1\}$ existe un subconjunto $H \subseteq \kappa$ tal que $\mid H \mid = \kappa$ y existe un $i \in \{0, 1\}$ tal que $F''[H]^2 = \{i\}$.

Se cumple el siguiente Teorema [[D2], pp. 118]:

Si κ es inaccesible, entonces κ es débilmente compacto si y sólo si $\kappa \to \kappa_2^2$.

Para culminar con los cardinales débilmente compactos vale la pena agregar lo siguente: *cardinal débilmente compacto* implica estrictamente *cardinal inaccesible*, es decir, la hipótesis “Existe un cardinal débilmente compacto” es más fuerte estrictamente que la hipótesis “Existe un cardinal inaccecible” [[D2], pp. 132].

SEGUNDO TEOREMA SOBRE CARDINALES MEDIBLES:

El segundo ejemplo de aplicación del método de ultraproductos en la Teoría de conjuntos con cardinales medibles es la demostración del teorema: *Si α es un cardinal medible, entonces α es un cardinal inaccesible y además α es el α-ésimo cardinal inaccesible, es decir, existen α cardinales inaccesibles menores que α.* Esto siginifica (entre otros) que la hipótesis conjuntista “Existen cardinales medibles” es estrictamente más fuerte que la hipótesis “existen cardinales inaccesibles” [Ch-K], [D2]. Es conocido que la existencia de cardinales inaccesibles no se puede demostrar de los axiomas estándar de la Teoría de conjuntos, por el Segundo Teorema de incompletitud de Gödel(1931) [Ch-K], [D2], [Ku], [J1], [Go1].

Vale la pena resaltar que en la prueba del Teorema se usarán lógicas infinitarias (como en el teorema anterior) y lógicas de segundo orden de un tipo específico, Σ_1^1 fórmulas, las cuales son preservadas por los ultraproductos.

Algunos resultados y definiciones que se presuponen en la prueba se enuncian a continuación:

El siguiente resultado se refiere a la expansión de propuctos reducidos, una prueba del mismo puede encontrarse en [[Ch-K], pp. 216-217]:

Lema 3.5.4.3 (Teorema de expansión de productos reducidos). *Sea un lenguaje $\mathcal{L}'$ que expande a un lenguaje $\mathcal{L}$. Sea I un conjunto no vacío y para cada $i \in I$ sea $\mathfrak{A}_i$ una estructura para $\mathcal{L}$, y $\mathfrak{B}_i$ una expansión de $\mathfrak{A}_i$ para $\mathcal{L}'$ (es decir, $\mathfrak{B}_i$ restringida a $\mathcal{L}$ es $\mathfrak{A}_i$, en otras palabras, los universos de $\mathfrak{B}_i$ y $\mathfrak{A}_i$ son iguales, y las interpretaciones de los símbolos de $\mathcal{L}$ en ambas también son iguales. $\mathfrak{B}_i$ difiere de $\mathfrak{A}_i$ sólo en la interpretación de los nuevos símbolos de $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$). Sea D un filtro sobre I. Entonces el producto reducido $\prod_D \mathfrak{B}_i$ es una expansión del producto reducido $\prod_D \mathfrak{A}_i$. (Es decir, $\prod_D \mathfrak{B}_i$ restringida a $\mathcal{L}$ es $\prod_D \mathfrak{A}_i$)*

Las Σ_1^1 fórmulas y los ultraproductos:

Un tipo específico de fórmulas de segundo orden son preservadas por los ultraproductos, las Σ_1^1 fórmulas, tal resultado se expresará a continuación mediante una definión y un lema, una demostración de dicho lema puede encontrarse en [[Ch-K], pp. 222]:

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, y sea una expansión de $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{Q_1, \ldots, Q_n, G_1, \ldots, G_m\}$, donde los Q_j y los G_i son símbolos de relación y de función, respectivamente, que no ocurren en $\mathcal{L}$. Una Σ_1^1 fórmula sobre $\mathcal{L}$ es una fórmula ϱ de la siguiente forma:

$$(\exists Q_1 \ldots Q_n G_1 \ldots Gm)\phi,$$

donde ϕ es una fórmula (en primer orden) del lenguaje expandido $\mathcal{L}'$. De modo que una Σ_1^1 fórmula es una fórmula de segundo orden donde todos los cuantificadores sobre relaciones y funciones ocurren al incio de dicha fórmula, y además de eso tales cuantificadores sólo son existenciales. La definición de satisfacibilidad de una Σ_1^1 fórmula se define como sigue: Si ϕ es una sentencia, entonces ϱ ocurre en una estructura $\mathfrak{C}$ para $\mathcal{L}$ si y sólo si existe una expansión $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{C}, P_1, \ldots, P_n, F_1, \ldots, F_m)$ de $\mathfrak{C}$ para $\mathcal{L}'$ tal que ϕ es verdad en $\mathfrak{C}'$. Si ϕ tiene una variable libre z, entonces $\mathfrak{C} \models \varrho[b]$ si y sólo si existe una expansión $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ para $\mathcal{L}'$ tal que $\mathfrak{C}' \models \phi[b]$.

Lema 3.5.4.4 (Σ_1^1 fórmulas son preservadas bajo ultraproductos). *Sea $\mathfrak{B}$ el ultraproducto $\prod_D \mathfrak{A}_i$, donde I es el conjunto de índices de los $\mathfrak{A}_i$, $f_D^1, \ldots, f_D^k \in B$, y $\varrho(z_1, \ldots, z_k)$ es una Σ_1^1 fórmula. Entonces:*

Si,

$$\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \varrho[f^1(i), \ldots, f^k(i)]\} \in D,$$

Entonces,

$$\mathfrak{B} \models \varrho[f_D^1, \ldots, f_D^k].$$

El siguiente resultado sobre cardinales medibles se usa en el teorema que se demostrará, una prueba del mismo puede encontrarse en [[Ch-K], pp. 233]:

Lema 3.5.4.5. *Sea η un cardinal medible, y sea H un ultrafiltro sobre η, no principal y η-completo. Se forma la ultrapotencia $\mathfrak{C} = \prod_H \langle \eta, < \rangle$. Entonces:*

(i) $\mathfrak{C}$ es una estructura bien ordenada de tipo de orden mayor que η.

(ii) Para cualquier $\delta < \eta$, $d(\delta)$ es el δ-ésimo elemeto de $\mathfrak{C}$.

La demostración del siguiente teorema usa ideas de la prueba que se encuentra en el texto [[Ch-K], pp. 233-236]. Otra prueba de este teorema que también usa ultraproductos pero que es distinta a la que se realizará aca se puede encontrar en [[J3], pp. 313].

Teorema 3.5.4.6. *Sea η un cardinal medible. Entonces η es un cardinal inaccesible y además η es el η-ésimo cardinal inaccesible, es decir, existen η cardinales inaccesibles menores que η.*

Demostración: Sea H un ultrafiltro no principal y η-completo sobre η. Se considera el modelo $\mathfrak{C} = \langle \eta, <, \rho \rangle_{\rho \in \eta}$ y se forma la ultrapotencia $\mathfrak{D} = \prod_H \mathfrak{C}$. Por el Lema anterior (3.5.4.5) $\mathfrak{D}$ es una estructura bien ordenada de tipo de orden mayor que η. Sea $\gamma > \eta$ el tipo de orden de $\mathfrak{D}$ y para cada $\delta < \gamma$, sea $\hat{\delta}$ el δ-ésimo elemento de $\mathfrak{D}$. Como por el Corolario 3.4.3 el rango de la inmersión natural $d : \langle \eta, <, \rho \rangle_{\rho \in \eta} \longrightarrow \prod_H \mathfrak{D}$, $rango(d) = \{d(\delta) : \delta \in \eta\}$, es un segmento inicial de $\mathfrak{D}$, entonces se cumple que $d(\delta) = \hat{\delta}$, para todo $\delta < \eta$. Por esta razón cada constante c_δ, $\delta < \eta$, es interpretada por δ en la estructura $\mathfrak{C}$ y por $d(\delta) = \hat{\delta}$ en la ultrapotencia $\mathfrak{D}$.

(I) Ahora se probará que el cardinal η es un cadinal inaccesible:

(I.1) Demostración de que η es un cardinar regular:

(Por reducción al absurdo) Supóngase que η no es un cardinal regular, es decir, η es un cardinal singular. Entonces existe un ordinal $\alpha < \eta$ cofinal con η, es decir, existe una función creciente $U : \alpha \longrightarrow \eta$ cuya imagen es no acotada en η. Entonces se define la siguiente función $U' : \eta \longrightarrow \eta$ de la siguiente manera: $U'(\beta) = 0$, para todo $\eta > \beta \leq \alpha$. Y $U'(\beta) = U(\beta)$, para todo $\beta < \alpha$. Con esta función U' se forma el modelo $(\mathfrak{C}, U')$, y la ultrapotencia,

$$\prod_H (\mathfrak{C}, U') = (\mathfrak{D}, W).$$

Para cada $\beta < \eta$, se tiene que:

$$W(\hat{\beta}) = W(d(\beta)) \overbrace{=}^{\spadesuit} d(U'(\beta)) = \hat{U'(\beta)} < \hat{\eta}.$$

$\spadesuit$: Como la inmersión natural d es una inmersión elemental, se está aplicando la cláusula (2) de la definición de inmersión elemental.

Por lo tanto, en la ultrapotencia $(\mathfrak{D}, W)$ es verdadera la siguiente sentencia:

$$\exists x \forall y (y < c_\alpha \rightarrow U'(y) < x),\ (\bullet)$$

para $x = \hat{\eta}$.

Sin embargo, como el rango de U' es cofinal en η, se cumple que la siguiente sentencia es verdad en la estructura $(\mathfrak{C}, U')$:

$$\forall x \exists y (y < c_\alpha \wedge x < U'(y)),\ (\circ)$$

y por lo tanto (por la relación de equivalencia elemental $\equiv$, corolario 3.4.2) tal sentencia es también verdadera en la ultrapotencia $(\mathfrak{D}, W)$. Pero las sentencias $(\bullet)$ y $(\circ)$ se contradicen mutuamente. Por lo tanto, η no puede ser un cardinal singular, en consecuencia η es un cardinal regular.

(I.2) Demostración de que η es un cardinal límite fuerte:

Hay que probar que para todo cardinal $\beta < \eta$ se tiene que $2^\beta < \eta$. Se hará la prueba por reducción al absurdo. Supóngase que existe un cardinal κ tal que,

$$\kappa < \eta \leq 2^\kappa.$$

En consecuencia existe un función inyectiva $W : \eta \longrightarrow P(\kappa)$. Sea $T \subseteq \eta \times \kappa$ una relación binaria, "la representante de W", que se define como sigue:

$$T(\theta, \sigma) \Longleftrightarrow \sigma \in W(\theta).$$

Entonces se forma la estructura $(\mathfrak{C}, T)$ y se considera la ultrapotencia:

$$\prod_H (\mathfrak{C}, T) = (\mathfrak{D}, Q).$$

Sea W' una función de dominio γ (γ es el tipo de orden de $\mathfrak{D}$ fijado anteriormente) definida de la siguiente manera:

$$W'(\delta) = \{\theta < \gamma : Q(\hat{\delta}, \hat{\theta})\}.$$

Se cumple que la función W' es una función inyectiva de γ en $P(\kappa)$, porque las dos sentencias siguientes ocurren en la estructura $(\mathfrak{C}, T)$ y por lo tanto (por $(\mathfrak{C}, T) \equiv (\mathfrak{D}, Q)$) en la ultrapotencia $(\mathfrak{D}, Q)$:

$$\forall x \forall y (T(x, y) \rightarrow y < c_\kappa),$$
$$\forall x \forall y [(x \not\equiv y) \rightarrow \exists z \neg (T(x, z) \leftrightarrow T(y, z))].$$

También se cumple que $W(\delta) = W'(\delta)$, para toda $\delta < \eta$, ya que d es una inmersión elemental de $(\mathfrak{C}, T)$ en $(\mathfrak{D}, Q)$. De lo anterior se puede inferir que

el conjunto $Z = W'(\eta)$ no está en el rango de W, a pesar de que $Z \in P(\kappa)$. De modo que la siguiente sentencia,

$$\exists x \forall y [T(x, y) \leftrightarrow \bigvee \{y \equiv c_\pi : \pi \in Z\}],$$

es falsa en la estructura $(\mathfrak{C}, T)$, pero es verdadera en la ultrapotencia $(\mathfrak{D}, Q)$ considerando a $x = \hat{\eta}$. Esto contradice el hecho de que $(\mathfrak{C}, T) \equiv (\mathfrak{D}, Q)$, incluyendo para fórmulas infinitarias, como consecuencia del lema 3.5.4.1. Por lo tanto η es un cardinal límite fuerte.

(II) Demostración de que η es el η-ésimo cardinal inaccesible:

Esta parte de la demostración se realiza considerando el Teorema que afirma que las Σ_1^1 fórmulas son preservadas por los ultraproductos (Lema 3.5.4.4).

Sea Θ la clase de todos los cardinales inaccesibles, Δ la clase de todos los ordinales los cuales no son cardinales regulares, y Ω la clase de todos los ordinales los cuales no son cardinales límite fuerte. En consecuencia $\alpha \in \Theta$ si y sólo si $\alpha \notin \Delta \cup \Omega$. Se probará que $\Theta \cap \eta$ es cofinal con η. En consecuencia, dado que η es regular, se cumple que $\mid \Theta \cap \eta \mid = \eta$, por lo tanto η es el η-ésimo cardinal inaccesible, lo que se quiere demostrar, es decir, (II) ocurre.

Como $\eta \subseteq \Theta \cup \Delta \cup \Omega$, es suficiente con demostrar que para cada $\beta < \eta$,
(1) existe un θ tal que $\beta \leq \theta < \eta$ y $\theta \notin \Delta \cup \Omega$.

Supóngase que para algún $\beta < \eta$, (1) no ocurre. Entonces para todo $\theta < \eta$ se cumple que:
(2) $\theta < \beta \quad \text{o} \quad \theta \in \Delta \quad \text{o} \quad \theta \in \Omega$.

Existe una Σ_1^1 fórmula $\phi_\Delta(v)$ tal que para cuaquier modelo $\langle \eta', < \rangle$ donde η' es un ordinal, y cualquier $\tau \in \eta'$,

$$(3)\ \tau \in \Delta \text{ si y sólo si } \langle \eta', < \rangle \models \phi_\Delta[\tau].$$

$\phi_\Delta(v)$ se obtiene formalizando la siguiente sentencia:
" Existe un $z < v$ y existe una función $J : z \longrightarrow v$ tal que el rango de J es cofinal con v".

También existe una Σ_1^1 fórmula $\varphi_\Omega(v)$ tal que para cuaquier modelo $\langle \eta', < \rangle$ donde η' es un ordinal, y cualquier $\tau \in \eta'$,

$$(4)\ \tau \in \Omega \text{ si y sólo si } \langle \eta', < \rangle \models \varphi_\Omega[\tau].$$

$\phi_\Delta(v)$ se obtiene formalizando la siguiente sentencia:
" Existe un $z < v$ y existe una relación $T \subseteq v \times z$ tal que T representa a una función inyectiva de v en $P(z)$".
Anteriormente (en esta demostración) se ha explicado como definir una relación T que representa a una función inyectiva $W : v \longrightarrow P(z)$ y también se ha explicado como decir que W es inyectiva usando a T.
A partir de (2), (3) y (4) se tiene que la fórmula,

$$(5)\ \ v < c_\beta \vee \phi_\Delta(v) \vee \varphi_\Omega(v),$$

es verdadera en $\langle \eta, < \rangle$ para todo $v \in \eta$.
Moviendo los cuantificadores de segundo orden para el inicio se puede apreciar que (5) es equivalente a una Σ_1^1 fórmula. Por lo tanto, por el Lema 3.5.4.4 (Las fórmulas Σ_1^1 son preservadas por ultraproductos), para cualquier

$g_H \in B$ la fórmula (5) es satisfecha por g_H en $\langle D, < \rangle$, donde $\langle D, < \rangle$ es la ultrapotencia correspondiente a la estructura $\langle \eta, < \rangle$, construida con el ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η. Dado que $\langle D, < \rangle$ es isomorfa a $\langle \gamma, < \rangle$, la fórmula (5) es verdad en $\langle \gamma, < \rangle$, para toda $v \in \gamma$. Poniendo $v = \eta$ se tiene que:

$\eta < \beta$ o $\phi_\Delta(\eta)$ o $\varphi_\Omega(\eta)$.

Usando (3) y (4), con $\gamma = \eta'$, se tiene que:

$\eta < \beta$ o $\eta \in \Delta$ o $\eta \in \Omega$. Pero esto contradice la hipótesis de que $\beta < \eta$ y que η es un cardinal inaccesible. Con esto termina la demostración del Teorema. $\square$

TERCER TEOREMA SOBRE CARDINALES MEDIBLES:

En este tercer teorema sobre cardinales medibles que usa ultraproductos se demuestra que *si existen cardinales medibles, entonces el "Axioma de constructibilidad" es falso.* Es conocido que el Axioma de constructibilidad implica la "Hipótesis generalizada del continuo" ($\forall \alpha \in \mathbf{Ord}(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$) y al "Axioma de elección" [J1], [Ku], [Go1]. La prueba se realiza utilizando ideas principalmente de Chang y Keisler en [[Ch-K], pp. 238-239]. Como en la demostración de los dos teoremas anteriores sobre cadinales medibles también se usan en esta prueba lenguajes infinitarios (los cuales son preservados por los ultraproductos). Otra demostración de este teorema que también usa ultraproductos pero que es distinta a la que se realizará aca se puede encontrar en [[J3], pp. 311].

A continuación se enuncian algunos resultados y definiciones previas:

V es la clase de los conjuntos bien fundamentados ("Jerarquía acumulativa de conjuntos de J. von Neumann") que se define como sigue (usando inducción en la clase de los ordinales):

$$V_0 = \emptyset$$

$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$$

$$V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta,\ \lambda \text{ límite.}$$

$$\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha\in Ord} V_\alpha.$$

Si $x \in \mathbf{V}$ entonces el *rango* de x, $\rho(x)$, es el menor ordinal α tal que $x \in V_{\alpha+1}$.

Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ ocurre que V_α es un conjunto transitivo (X es *transitivo* si $\forall z(z \in X \to z \subseteq X)$. También se cumple que: (i) Para cada $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$: Si $\alpha \leq \beta$, entonces $V_\alpha \subseteq V_\beta$. (ii) Para cada ordinal α: $\mathbf{V}_\alpha \cap \mathbf{Ord} = \alpha$. Y (iii) si η es un cardinal medible, entonces $\langle V_\eta, \in\rangle$ es un modelo de ZFC. [Ch-K], [J1], [J3].

L es la clase de los conjuntos constructibles de Gödel que se define informalmente como sigue (usando inducción en la clase de los ordinales):

Antes de dar la definición se introduce la definición de definibilidad en una estructura [Ch-K], [D2]: Sea una estructura $\mathfrak{A} = \langle A, < R^{\mathfrak{A}}_\beta >_{\beta\in\gamma}, < f^{\mathfrak{A}}_\mu >_{\mu\in\delta}, < c^{\mathfrak{A}}_\xi >_{\xi\in\eta}\rangle$ para un lenguaje $\mathcal{L}$. Se dice que un subconjunto $B \subseteq A$ es *definible* en $\mathfrak{A}$ si existe una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje $\mathcal{L}$ tal que $B = \{z \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[z]\}$. Se dice que B es definible en $\mathfrak{A}$ con parámetros si existe fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje $\mathcal{L}$ y existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que: $B = \{z \in A : \mathfrak{A} \models \varphi[z, a_1, \ldots, a_n]\}$.

$$L_0 = \emptyset$$

$$L_{\alpha+1} = \{X \subseteq L_\alpha : X \text{ es definible en la estructura } \langle L_\alpha, \in, \langle b : b \in L_\alpha\rangle\rangle\}$$

$$L_\lambda = \bigcup_{\beta\in\lambda} L_\beta\ , \quad \lambda \text{ límite.}$$

$$\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha$$

Es claro que en el paso sucesor la expresión "X es definible en la estructura $\langle L_\alpha, \in, \langle b : b \in L_\alpha\rangle\rangle$" supone que se tiene un lenguaje de primer orden con identidad, cuyos símbolos no lógicos son: Una constante $\underline{b}$ para cada $b \in L_\alpha$ y un símbolo relacional binario $\underline{\in}$ para la relación de pertenencia $\in$. Sin embargo también se puede hablar de "definible con parámetros" y eliminar las nuevas constantes agregadas al lenguaje inicial. Formalizaciones en ZF de la definición intuitiva de $\mathbf{L}$ pueden encuentrarse en [Ku] y [J1].

Se cumple que para $\alpha \in \mathbf{Ord}$: L_α es transitivo y $L_\alpha \subseteq V_\alpha$. También ocurre que para cada $n \in \aleph_0(L_n = V_n)$. Y también se cumple que: (i) $L_\omega = V_\omega$. Y (ii) para cada ordinal α: $\mathbf{L}_\alpha \cap \mathbf{Ord} = \alpha$.

Sea α un cardinal infinito. $H(\alpha)$ es el conjunto de todos los conjuntos hereditariamente de cadinal menor que α, es decir, $H(\alpha) = \{x :| TC(x) |< \alpha\}$, donde dado un conjunto D, $TC(D)$ es la *clausura transitiva* de D, es decir, $TC(D)$ es menor conjunto transitivo (con respecto a la relación inclusión) que contiene a D. Se cumpe que $z \in H(\alpha)$ si y sólo si existe un conjunto transitivo w tal que $z \subseteq w$ y $| w |< \alpha$. Entre las propiedades $H(\alpha)$ se encuentran [[Ch-K], pp. 237], [[Ku], pp. 130-133]:

Lema 3.5.4.7. *1. $H(\alpha)$ es un subconjunto transitivo de V_α.*

2. *Si $\alpha \leq \beta$, entonces $H(\alpha) \subseteq H(\beta)$.*

3. *$\alpha \subseteq H(\alpha)$.*

4. *Si $\alpha > \aleph_0$ es un cardinal regular, entonces $\langle H(\alpha), \in \rangle$ es un modelo de $ZF - P$.*

5. *$H(\alpha) \cap \mathbf{Ord} = \alpha$.*

Como se definió anteriormente en este trabajo: Una relación binaria E es *bien fundamentada* si no existen secuencias infinitas decrecientes con respecto a E, es decir, si no existen secuencias $\{x_n : n \in \aleph_0\}$ tal que: $\ldots, x_4 E x_3, x_3 E x_2, x_2 E x_1, x_1 E x_0$.

Sea X un conjunto y E una relación binaria bien fundamentada sobre X. La estructura $\langle X, E \rangle$ se llama estructura o modelo *bien fundamentado*.

Sea $\langle X, E \rangle$ una estructura bien fundamentada. Se dice que $a \in X$ es un *ordinal* de $\langle X, E \rangle$ si y sólo si ocurre lo siguiente:

$$\langle X, E\rangle \models \forall x\forall y[(x \in a \wedge y \in a \rightarrow x \in y \vee y \in x \vee x \equiv y)\wedge$$

$$(x \in a \wedge y \in x \rightarrow y \in a)].$$

Hecho $\star$: Dada la definición anterior se cumple que u es un ordinal de $\langle H(\alpha), \in\rangle$ si y sólo si $u \in \alpha$ [[Ch-K], pp. 238].

El siguiente resultado afirma que las relaciones bien fundamentadas sobre un conjunto dado X bien ordenan los ordinales de dicho conjunto X si $(X, E) \models ZF - P$, una prueba del mismo puede encontrarse en [[Ch-K], pp. 238]:

Lema 3.5.4.8. *Sea $\langle X, E\rangle$ un modelo bien fundamentado de ZF-P. Entonces el conjunto de los ordinales de $\langle X, E\rangle$ está bien ordenado por E.*

Sea $\langle X, E\rangle$ un modelo bien fundamentado de $ZF - P$. El *tipo de orden de* $\langle X, E\rangle$ es el tipo de orden del conjunto de ordinales de $\langle X, E\rangle$ según E.

Formulación del Axioma de constructibilidad:

Axioma de constructibilidad: Para cualquier cardinal regular $\mu > \aleph_0$ (todo modelo bien fundamentado $\langle A, S\rangle$ de $ZF - P$ de tipo de orden μ es isomorfo a $\langle H(\mu), \in\rangle$).

Se puede demostrar en ZFC que la versión formulada del Axioma de constructibilidad es equivalente a la versión usada normalmente en los textos de Teoría de conjuntos, es decir, la proposición $\forall x \exists \alpha \in \mathbf{Ord}(x \in L_\alpha)$, la cual se expresa simplificadamente en la bibliografía de la siguiente manera $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ [J1], [Ku], [Ch-K], etc.

El siguiente teorema afirma que si existen cardinales medibles, entonces el Axioma de constructibilidad es falso.

(Es conocido que Gödel demostró que se cumple $\langle \mathbf{L}, \in\rangle \models \mathbf{V} = \mathbf{L}$, este teorema implica entonces que en $\mathbf{L}$ no existen cardinales medibles [Go1], [J1], [Ku])

Teorema 3.5.4.9 (Teorema de Scott). *Si existe un cardinal medible, entonces el Axioma de constructibilidad es falso. (En consecuencia el Axioma de constructibilidad implica que no existen cardinales medibles).*

Demostración: Sea η el primer cardinal medible. Y sea $\theta = (2^{2^{2^\eta}})^+$. Entonces $V_{\eta+3}$ es un conjunto transitivo de cardinalidad menor que θ, pues:

$$\mid V_{\eta+1} \mid = \mid P(V_\eta) \mid = 2^{|V_\eta|} (\eta \, \text{es inaccesible}, \mid V_\eta \mid = \eta, [[J3], pp.72]) = 2^\eta,$$

$$\mid V_{\eta+2} \mid = \mid P(V_\eta + 1) \mid = 2^{|V_{\eta+1}|} = 2^{2^\eta},$$

$$\mid V_{\eta+3} \mid = \mid P(V_{\eta+2}) \mid = 2^{|V_{\eta+2}|} = 2^{2^{2^\eta}} < \theta.$$

Y también θ es un cardinal regular porque todo cardinal sucesor es regular [[D2], pp. 92].

En consecuencia $V_{\eta+3} \in H(\theta)$ y $\langle H(\theta), \in \rangle$ es un modelo de $ZF - P$, porque θ es un cardinal regular no numerable (Lema 3.5.4.7, cláusula 4).

Sea H un ultrafiltro no principal y η-completo sobre η. Con H y $\langle H(\theta), \in \rangle$ se forma la ultrapotencia,

$$(\mathfrak{D}, R) = \prod_H \langle H(\theta), \in \rangle.$$

Entonces como el concepto "relación bien fundamentada" se puede caracterizar con una fórmula del lenguaje infinitario $\mathcal{L}_{\aleph_1 \aleph_1}$,

$$\text{RBF: } (\forall x_0 x_1 x_2 \ldots) \neg \bigwedge \{P(x_{n+1}, x_n) : n \in \aleph_0\},$$

y los ultraproductos preservan las formulas infinitarias (Lema 3.5.4.1), entonces $(\mathfrak{D}, R)$ es un modelo bien fundamentado de $ZF - P$ (los axiomas de $ZF - P$ se cumplen en $(\mathfrak{D}, R)$ porque $\langle H(\theta), \in \rangle \equiv (\mathfrak{D}, R)$). En consecuencia, por el Lema 3.5.4.8, el conjunto de los ordinales de $(\mathfrak{D}, R)$ está bien ordenado por R.

Proposición: El conjunto de los ordinales de $(\mathfrak{D}, R)$ tiene tipo de orden θ.

Prueba de la Proposición: La inmersión natural d es un isomorfismo de $\langle H(\theta), \in\rangle$ en $(\mathfrak{D}, R) \restriction d(H(\theta))$. En consecuencia el conjunto de los ordinales de $(\mathfrak{D}, R)$ tiene tipo de orden al menos θ (tomar en cuenta el **Hecho** $\star$). Sea z cualquier ordinal de $(\mathfrak{D}, R)$. Entonces se concluye que $z = g_H$, para alguna función $g : \eta \longrightarrow \theta$.

(Nota: Usando la definición de "ordinal de una estructura bien fundamentada" y el Lema de buen orden 3.5.4.8 se puede probar que todo ordinal z de la ultrapontencia $(\mathfrak{D}, R) = \prod_H \langle H(\theta), \in\rangle$ tiene la forma g_H, para alguna función $g : \eta \longrightarrow \theta$.)

Como $cof(\theta) > \eta$, entonces g no es cofinal en θ es decir, el rango de g está acotado en θ. Por lo tanto existe un $\delta < \theta$ tal que $g : \eta \longrightarrow \delta$, es decir, $g \in {}^{\eta}\delta$. De lo anterior se sigue que si wRz, entonces $w = j_H$ para alguna $j \in {}^{\eta}\delta$. En consecuencia $\mid \{w : wRz\} \mid \leq \delta^{\eta}$, y como $\delta \leq 2^{2^{2^{\eta}}}$ (por definición de cardinal sucesor [[D2], pp. 76]), entonces $\delta^{\eta} < \theta$: En efecto, como $\delta \leq 2^{2^{2^{\eta}}}$, entonces por propiedades de potencias de cardinales [[J1], pp. 29] se tiene que $(\delta)^{\eta} \leq (2^{2^{2^{\eta}}})^{\eta} = 2^{(2^{2^{\eta}})\cdot\eta} = 2^{(2^{2^{\eta}})} < \theta$. Esto muestra que cualquier ordinal de $(\mathfrak{D}, R)$ tiene menos de θ predecesores. En consecuencia el conjunto de los ordinales de $(\mathfrak{D}, R)$ tiene a lo sumo tipo de orden θ. Por lo tanto, el tipo de orden del conjunto de los ordinales de $(\mathfrak{D}, R)$ es θ. Ha culminado la prueba de la Proposición.

Sea $\phi(z)$ una fórmula de la Teoría de conjuntos que afirma "z es el primer cardinal medible". Cuando se escribe en detalle dicha fórmula se puede apreciar que sus cuantificadores pueden ser restringidos a $P(P(P(z)))$ [[Ch-K], pp. 239]. En consecuencia, en el modelo $\langle H(\theta), \in\rangle$ un elemento a satisface $\phi(z)$ si y solamente si a es realmente el primer cardinal medible, $a = \eta$. De modo que en la ultrapotencia $(\mathfrak{D}, R)$ el único elemento que satisface $\phi(z)$ es $d(\eta)$. El ordinal $d(\eta)$ es mayor que el η-ésimo ordinal de $(\mathfrak{D}, R)$ ¿por qué? por el Lema 3.5.4.5 y considerando la estructura $\langle \eta, <\rangle$ se tiene que la ultrapotencia que se forma con la misma usando el ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η, $(\mathfrak{C}, K) = \prod_H \langle \eta, \in\rangle$, es una estructura bien ordenada de tipo de orden mayor que η y para cualquier $\delta < \eta$, $d(\delta)$ es el δ-ésimo elemeto de $\prod_H \langle \eta, \in\rangle$. Se cumple que $\prod_H \langle \eta, \in\rangle$ está inmersa en la ultrapotencia $(\mathfrak{D}, R) = \prod_H \langle H(\theta), \in\rangle$ ¿ cuál es una inmersión? La siguiente: Para cada $f \in {}^{\eta}\eta$ se considera $f_H \in (\mathfrak{C}, K) = \prod_H \langle \eta, \in\rangle$ y $f_H \in (\mathfrak{D}, R) = \prod_H \langle H(\theta), \in\rangle$, dicha correspondencia es una inmersión. Como tal inmersión preserva el orden y la ultrapontencia $(\mathfrak{C}, K)$ esta bien ordenada y su tipo de orden es mayor que η, entonces $(\mathfrak{C}, K)$ es un segmento inicial de los ordinales de la ultrapotencia bien fundamentada $(\mathfrak{D}, R)$ (todo ordinal z de las ultrapotencias $(\mathfrak{D}, R) = \prod_H \langle H(\theta), \in\rangle$ o $(\mathfrak{C}, K) = \prod_H \langle \eta, \in\rangle$ tiene la forma g_H, para alguna función $g : \eta \longrightarrow \delta$). Por lo tanto existe una función $u \in^\eta \eta$ tal que la clase de equivalencia u_H es el η-ésimo ordinal de $(\mathfrak{C}, R)$ y de $(\mathfrak{D}, R)$, es decir, u_H tiene η predecesores. Considerando a $d(\eta)$ en la ultrapotencia $(\mathfrak{D}, R)$ se tiene que ella es la clase de equivalencia de la función constante en η: $\langle \eta : \delta \in \eta\rangle$. Si se llama a tal función constante c se puede re-escribir la misma así: $c : \eta \longrightarrow H(\theta)$ tal que para cada $\delta \in \eta(c(\delta) = \eta)$. Por otro lado, u_H en $(\mathfrak{D}, R)$ es la clase de equivalencia de la función $u \in^\eta \eta$. Es decir, para cada $\delta \in \eta(u(\delta) \in c(\delta) = \eta))$. Por lo tanto, $\eta = \{\delta : u(\delta) \in c(\delta) = \eta\} \in H$. Entonces, por la definición de ultrapotencia, se cumple que: $u_H R d(\eta)$. En consecuencia las estructuras $\langle H(\theta), \in\rangle$ y $(\mathfrak{D}, R)$ no son isomorfas, pues cualquier isomorfismo asigna η al η-ésimo ordinal de $(\mathfrak{D}, R)$, $\hat{\eta}$, y $\hat{\eta}$ no satisface $\phi(z)$. Por lo tanto, el Axioma de constructibilidad es falso. Con esto termina la demostración del Teorema. $\square$

Observación: Antes de pasar a la siguiente subsección vale la pena destacar que una interesante lista de problemas abiertos de Teoría de modelos (desde el punto de vista platonista matemático) relacionados con ultraproductos, teorías matemáticas, cardinales, cardinales medibles, ZFC, etc, puede encontrarse en el texto de Chang y Keisler [[Ch-K], pp. 597-602 (Apéndice B)].

3.6 Algunas consideraciones matemáticas, metamatemáticas y filosóficas sobre Ultraproductos, Compacidad, Análisis no estándar y Cardinales medibles

(1)*Sobre la demostración del Teorema fundamental de Ultraproductos:*

La prueba del Teorema fundamental de ultraproductos requiere del Axioma de elección para que tenga validez universal, al menos en cuatro casos:

(1) El producto cartesiano posiblemente infinito en la construcción (El Axioma de elección es la garantía de que los productos cartesianos infinitos sean distintos del conjunto vacío), (2) La prueba inductiva (cláusula (ii)) de la fórmula existencial, la definición de una función de elección involucrada en la prueba puede requerir el uso del Axioma de elección, (3) Para que el conjunto I de índices pueda ser infinito requeriría del Axioma del infinito, y (4) para poder contar con la existencia de ultrafiltros que extienden a filtros no principales se requiere del Axioma de elección. Es decir se necesita de ZFC para su validez universal, de modo que este método de construcción de modelos es platonista matemático, con un nivel de platonismo fuerte en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2). Hay otras conexiones de dicha demostración con el platonismo matemático, éstos son sólo cuatro ejemplos.

(2)*Sobre la demostración directa del Teorema de Compacidad usando Ultraproductos:*

Se puede apreciar que la prueba directa del Teorema Compacidad usando ultraproductos requirió del Lema de Zorn para construir un ultrafiltro D sobre I que permitiera construir el ultraproducto $\prod_D \mathfrak{A}_\mathbf{i}$. En consecuencia dicha demostración necesita de todo ZFC, y por lo tanto es un resultado platonista matemático, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

(3)*Sobre las demostraciones de los modelos no estándar de la Aritmética y de la Teoría de los números reales (en primer orden):*

Como todos estos modelos no estándar se construyeron usando compacidad aplica lo mismo que en (2), es decir, ellos requieren de todo ZFC, y por lo tanto son resultados platonistas matemáticos, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Vale la pena agregar las siguientes dos consideraciones sobre el tema:

Como se demostró en esta investigación una de las consecuencias (clásicas) matemáticas y metamatemáticas del Teorema de compacidad es que con el mismo se pueden construir modelos no estándar para la Aritmética en primer orden y para la Teoría de los números reales en primer orden, es decir, modelos donde valen las mismas sentencias de primer orden que en el sistema estándar de los naturales y de los reales, respectivamente, pero que no son isomorfos a los mismos [Ch-K], [Ma], [F-T-E], [Me], [N-S]. También con dicho teorema (compacidad) se puede demostrar que existen importantes clases de estructuras matemáticas que no se pueden definir en primer orden, por ejemplo las clases de las estructuras isomorficas a las anteriormente mencionadas (La clase de las estructuras isomorfas a la estructura de los números reales (estándar) y la clase de las estructuras isomorfas a la estructura de los naturales (estándar)), es decir, la Lógica de primer orden tiene limitaciones expresivas como consecuencia de la propiedad de Compacidad [Ma], [E-F-T], [N-S], [FG1]. Esto también ocurre como consecuencia del Teorema de Löwenheim -Skolem-Tarski hacia arriba, dicho teorema permite demostrar que no hay teorías categóricas (teorías tal que todos sus modelos son isomormos) con modelos infinitos. Es claro que como estos resultados dependen del Teorema de compacidad, para demostrar los mismos se require entonces del Lema de Zorn, es decir, se necesita trabajar en ZFC para hacer dichas pruebas de construcción de modelos no estándar y de limitaciones expresivas de la lógica de primer orden, y ZFC es una teoría matemática platonista, con un fuerte grado de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Otra de las consecuencias (clásicas) matemáticas y metamatemáticas del Teorema fundamental de ultraproductos y de Compacidad es que con ellos se puede demostrar que algunas teorías matemáticas que son axiomatizables por un conjunto infinito de axiomas no son finitamente axiomatizables, es decir, no se pueden axiomatizar por un conjunto finito de axiomas, por ejemplo la *Teoría de los cuerpos de característica cero* (Un cuerpo tiene característica 0 si para todo número primo p: $p1 \neq 0$, donde $p1$ es una breviatura de $1+1+\ldots+1$ p-veces.) , la *Teoría de los cuerpos algebraicamete cerrados* (Un cuerpo es algebaicamente cerrado si todo polinomio con coheficientes en dicho cuerpo tiene una raíz en en el mismo), y la *Teoría de los grupos abelianos libre-torsión* (Un grupo abeliano es libre-torsión si todos sus elementos tienen orden infinito, es decir, si para todo elemento $x \neq 0$ de dicho grupo se cumple $xn \neq 0$, donde xn es $x + x + \ldots + x$ n-veces.) [Ch-K], [F-T-E], [Ma]. Como para probar estos resultados se usa el Teorema de compacidad [[Ch-K], pp. 220,225], entonces el Lema de Zorn es requerido, es decir, se necesita trabajar en ZFC para hacer las pruebas de que tales teorías matemáticas no son finitamente axiomatizables, y ZFC es una teoría matemática platonista, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

(4)*Sobre el esbozo de la construcción del cuerpo ordenado y no arquimediano de los Hiper-Reales y del Análisis no estándar de Robinson:*

Como toda la construcción del cuerpo ordenado y no arquimediano de los Hiper-Reales donde se desarrolla el Análisis no estándar de Robinson se hace usando el Teorema de Compacidad, entonces vale exactamente lo mismo que en (3), es decir, tales resultados requiren de todo ZFC, y por lo tanto son platonistas matemáticos, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Vale la pena agregar las siguientes cosideraciones sobre el tema:

Los modelos no estándar contruídos con compacidad son la base para la creación del *Análisis real no estándar* de Robinson en 1960 [Rob1], [Ma], [Cor], [Ivo], [Mi]. Tal análisis no estándar difiere del que se enseña contemporáneamente, es decir, el fundamentado en el cuerpo ordenado arquimideano, completo, denso y separable de los números reales $\langle \mathbb{R}, S, +, \bullet, 0, 1, < \rangle$ y el concepto de límite $\epsilon - \delta$, donde no existen números "infinitesimales", ni "ilimitados". Con compacidad Robinson construyó una estructura que es un cuerpo ordenado que "extiende" a,

$$\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, +, \bullet, ^{-}, ||, 0, 1, < \rangle,$$

tal estructura es llamada el cuerpo ordenado y no arquimediano de los Hiper-Reales,

$$\mathfrak{R}^* = \langle \mathbb{R}^*, +^{\mathfrak{R}^*}, \bullet^{\mathfrak{R}^*}, ^{-*}, ||^*, 0^{\mathfrak{R}^*}, 1^{\mathfrak{R}^*}, <^{\mathfrak{R}^*} \rangle,$$

donde sí existen elementos "infinitesimales" y elementos "ilimitados" [Cor], [Ma]. Se cumple que el cuerpo arquimideano de los reales es un submodelo elemental del cuerpo ordenado y no arquimediano de los Hiper-Reales. Y entonces dicho autor (Robinson) desarrolló su análisis no estándar con tal estructura.

Según Manzano [Ma] el Análisis no estándar de Robinson modela de cierta manera el Cálculo diferencial y el Cálculo integral tal como lo concibieron Newton y Leibniz cuando lo crearon en el siglo XVII. Quizá valga la pena estudiar la polémica creada por las críticas de Berkeley [Robl] a los métodos infinitesimales del Cálculo diferencial y del Cálculo integral creados por Newton y Leibniz, pues tal vez dicha crítica contribuyó para que se le buscara desde la matemática un fundamento Lógico-matemático a tales métodos: Ese fundamento fue "el Análisis estándar" que se estudia en la actualidad, donde no hay números infinitesimales, ni números ilimitados. Y ¿ Qué ventaja tiene el Análisis no estándar frente al Análisis estándar ? Según Manzano [[Ma], pp. 216] para los especialistas la ventaja sólo radica en la simplicidad (el Análisis no estándar es más simple), pues toda prueba que se realiza en el Análisis no estándar se puede hacer en el Análisis estándar, solo que de manera más engorrosa. *"como el propio Robinson señala, elegir análisis estándar o no es cuestión de gusto, no de necesidad"* [[Ma], pp. 216]. Sin embargo, según Corbillón [[Cor], pp. III, y pp.25] la comparación del poder deductivo del Análisis estándar y del Análisis no estándar todavía está en discusión.

Quizá Ivorra [Ivo] comparte la opinión de Manzano de que el Análisis no estándar no agrega verdades nuevas que no se puedan demostrar del Análisis estándar, y sostiene además que para valorar los métodos estándar y no estándar del Análisis de una manera más justa tal vez pueda ayudar intentar responder las siguientes preguntas: Por una parte, el Análisis no estándar da lugar a pruebas más ¿intuitivas?, ¿elegantes?, ¿sencillas? que el Análisis estándar. Por otra parte, el Análisis no estándar requiere un marco de razonamiento lógico ¿un poco?, ¿bastante?, ¿mucho? más complejo que el Análisis estándar.

Como se dijo anteriormente el Análisis no estándar es una teoría platonista matemática. Como también es platonista el Análisis estándar, tal como lo afirma Bernays en la sección 2 de este trabajo. Si ambas teorías tienen exactamente las mismas consecuencias, como se dijo antes, tal vez se pueda concluir que el Análisis estándar también requiere de todo ZFC como fundamento. Los resultados que arrojen las investigaciones mencionadas anteriormente por Corbillón en [[Cor], pp. III] tal vez arrojen luces para responder con mayor exactitud las diferencias platonistas del Análisis estándar y del no estándar, si realmente existen.

Es importante resaltar que para Gödel el Análisis no estándar sería el análisis del futuro [[Ma], pp. 216]. Ante esta apreciación de Gödel Manzano comenta lo siguiente [[Ma], pp. 217]: *"Aunque Gödel pudiera estar exagerando hoy nadie duda en considerar el Análisis no estándar como uno de los mayores inventos de la Lógica de la segunda mitad de este siglo"*.

Vale la pena resaltar que el Cálculo con herramientas no estándar hoy en día se enseña a nivel de pregrado en algunas universidades con adaptaciones que minimizan los preliminares de Lógica matemática que el mismo requiere a los fines de hacer más accesible sus fundamentos [Cor]. Según [[Cor], pp. III] las técnicas de Análisis no estándar introducidas por Robinson han sido generalizadas y aplicadas con éxito en análisis real, teoría de la medida y probabilidades, topología, análisis funcional, física, teoría de números, finanzas, etc. (En sus orígenes también se aplicó para resolver problemas (por ejemplo) de análisis y de teoría de números, según [[Ma], pp. 216]).

También es importante destacar que existe al menos una construcción del "cuerpo ordenado y no arquimediano de los hiper-reales" y del Análisis no estándar que no usa compacidad, ella se realiza directamente con ultrafiltros y el Teorema fundamental de ultraproductos, en tal construcción "el cuerpo ordenado de los hiper-reales" es la ultrapotencia del "cuerpo de los reales" considerando un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$(la relación entre los reales y la ultrapotencia, los hiper-reales, se llama "Principio de Transferencia (PdT)" y es la relación de equivalencia elemental ($\equiv$) entre estructuras). El Teorema fundamental de ultraproductos en este contexto dice entonces que "todo teorema del Análisis no estándar es un teorema de ZFC", no que "cualquier teorema demostrable usando Análisis no estándar puede demostrarse sin él" [[Cor], pp. 25]. Un desarrolo axiomático del Análisis no estándar puede encontrarse en el texto [Ivo].

(5)*Sobre la demostración del primer teorema de cardinales medibles: El Teorema de Compacidad débil, una versión del Teorema de compacidad para Lógicas infinitarias cuyo cardinal es un cardinal medible:*

Se puede constatar que dicha demostración necesita de todo ZFC, por lo tanto es platonista matemática, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado. Se presentan dos ejemplos para justificar esto (aunque hay más): (a) La definición de las lógicas infinitarias ($\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$) requiere de las nociones de "cardinal de un conjunto infinito de fórmulas" y de "cardinal de un conjunto infinito de variables", y éstas son imposible definirlas sin el Teorema del buen orden (Axioma de elección), y de todo ZFC. Y (b) Dentro de la prueba del Teorema de compacidad débil la garantía de que el ultraproducto utilizado ($\mathfrak{D} = \prod_H \mathfrak{C}_\beta$, donde H es un ultrafiltro no principal y η-completo sobre η, y $\beta < \eta$) tenga universo distinto de vacío, es decir, la garantía de que el mismo sea una estructura o interpretación en sentido estricto, es el Axioma de elección. Por lo tanto dichos resultados (la definición de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$, la extensión del Teorema de fundamental de Ultraproductos a lógicas infinitarias, Lema 3.5.4.1, y el Teorema de compacidad débil, 3.5.4.2) son platonistas matemáticos, en un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Vale la pena agregar lo siguiente: La definición de cardinal débilmente compacto requiere de lógicas infinitarias y ello necesita como se dijo antes de todo ZFC. La caracterización combinatoria de cardinal débilmente compacto que se presentó involucra la noción de cardinal inaccesible y para definir cardinal inaccecible se requiere aritmética cardinal (para la noción de "límite fuerte", por ejemplo) y esto sólo se puede hacer con el Axioma de elección. Desarrollar la aritmética cardinal requiere de todo ZFC. Por lo tanto también estos resultados mencionados son platonistas matemáticos, en un grado fuerte de platonismo según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Es sobresaliente resaltar que cardinal débilmente compacto implica estrictamente cardinal inaccesible [[D2], pp. 132]. Por lo tanto la hipótesis "Existe un cardinal débilmente compacto" es más fuerte estrictamente que la hipótesis "Existe un cardinal inaccesible". Es decir, la Teoría axiomática de conjuntos extendida ZFC + "Existe un cardinal débilmente compacto" tiene un rango platonista estrictamente mayor que la Teoría axiomática de conjuntos extendida ZFC + "Existe un cardinal inaccesible", según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

También es importante mencionar que como consecuencia del Segundo Teorema de incompletitud de Gödel (1931) no se puede demostrar con ZFC que existen cardinales inaccesibles [[J3], pp. 85-86], si ZFC es consistente. Entonces como los cardinales débilmente compactos son cardinales inaccesibles, se infiere que tampoco se puede demostrar en ZFC que existan cardinales débilmente compactos, si ZFC es consistente. Además, como se dijo en la sección 2, por los Teoremas de Incompletitud de Gödel de 1931 [[Go1], pp. 45-89], primero y segundo, se conoce que ZFC es esencialmente incompleta y además que no se puede probar la consistencia de ZFC con sus propios métodos, de modo que la pregunta por la consistencia de ZFC es un problema abierto en la actualidad. Estos dos resultados valen exactamente igual para las teorías extendidas ZFC + “Existe un cardinal inaccesible” y ZFC + “Existe un cardinal débilmente compacto”, es decir, dichas teorías son esencialmente incompletas y además no se puede probar la consistencia de ellas con sus propios métodos, de modo que la pregunta por la consistencia de ambas es un problema abierto en la actualidad.

(6)*Sobre la demostración del segundo teorema de cardinales medibles: Si η es un cardinal medible, entonces η es un cardinal inaccesible y además η es el η-ésimo cardinal inaccesible, es decir, existen η cardinales inaccesibles menores que η:*

La demostración de este teorema requiere de todo ZFC, por lo tanto es un resultado platonista matemático, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo moderado. Explicación mediante ejemplos:

(a) La demostración de que η es regular: Necesita de todo ZFC, pues por ejemplo: (i) Con el ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η se construyeron las ultrapotencias infinitas $\mathfrak{D} = \prod_H \mathfrak{C}$, donde $\mathfrak{C} = \langle \eta, <, \rho \rangle_{\rho \in \eta}$. Y $\prod_H (\mathfrak{C}, U') = (\mathfrak{D}, W)$. Y entonces para garantizar que el universo de cada una de estas estructuras sea distinto del conjunto vacío se requiere del Axioma de elección.

(b) La demostración de que η es límite fuerte: Requiere de todo ZFC, pues por ejemplo: (i) Se usó el Teorema de comparación de cardinales el cual es equivalente al Axioma de elección, (ii) Con el ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η se construyó la ultrapotencia infinita $\prod_H (\mathfrak{C}, T) = (\mathfrak{D}, Q)$, y (iii) se usó la lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\eta\eta}$, específicamene se utilizó la sentencia infinita $\exists x \forall y [T(x, y) \leftrightarrow \bigvee \{y \equiv c_\pi : \pi \in Z\}]$.

(c) La demostración de que η es el η-ésimo cardinal inaccesible: Necesita de todo ZFC, pues se usó la ultrapotencia infinita $\langle D, < \rangle$ correspondiente a la estructura $\langle \eta, < \rangle$, construida con el ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η.

Vale la pena resaltar que este segundo teorema sobre cardinales medibles implica (entre otros) que la hipótesis conjuntista "Existen cardinales medibles" es más fuerte estrictamente que la hipótesis conjuntista "Existen cardinales inaccesibles". Es decir, la Teoría axiomática de conjuntos extendida ZFC + "Existe un cardinal medible" tiene un rango platonista estrictamente mayor que la Teoría axiomática de conjuntos extendida ZFC + "Existe un cardinal inaccesible", según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

¿Y la hipótesis "Existe un cardinal medible" es más fuerte estrictamente que la hipótesis "Existe un cardinal débilmente compacto"? la respuesta es que SÍ [[D2], pp. 132]. En consecuencia, según la consideración anterior (5), se puede concluir que en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado el orden de las teorías respectivas es el siguiente: (ZFC + "Existe un cardinal inaccesible") menor estricta que (ZFC + "Existe un cardinal débilmente compacto") menor estricta que (ZFC + "Existe un cardinal medible").

También es importante destacar que en esta demostración se usaron lógicas infinitarias (como en el primer teorema sobre cardinales medibles) y lógica de segundo orden de un tipo específico, las Σ_1^1 fórmulas, las cuales son preservadas por los ultraproductos.

Con se dijo en (5) una consecuencia del Segundo Teorema de incompletitud de Gödel (1931) es que no se puede demostrar con ZFC que existen cardinales inaccesibles [[J3], pp. 85-86], si ZFC es consistente. Entonces como se demostró en este trabajo que los cardinales medibles son cardinales inaccesibles, se concluye que tampoco se puede demostrar en ZFC que existan cardinales medibles, si ZFC es consistente. Además, como se dijo en la sección 2 y en la consideración anterior (5), por los Teoremas de Incompletitud de Gödel de 1931 [[Go1], pp. 45-89], primero y segundo, se conoce que ZFC es esencialmente incompleta y además que no se puede probar la consistencia de ZFC con sus propios métodos, de modo que la pregunta por la consistencia de ZFC es un problema abierto en la actualidad. Estos dos resultados valen exactamente igual para la teoría extendida ZFC + "Existe un cardinal medible", es decir, dicha teoría es esencialmente incompleta y además no se puede probar la consistencia de ella con sus propios métodos, de modo que la pregunta por la consistencia de la misma es un problema abierto en la actualidad.

(7)*Sobre la demostración del tercer teorema de cardinales medibles: Si existen cardinales medibles, entonces el Axioma de constructibilidad (que implica la HGC y AE) es falso:*

Se pudo constatar en la demostración realizada que la misma requiere del Axioma de elección y de todo ZFC, por lo tanto dicho resultado es platonista matemático, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado. Algunas construcciones presentes en la prueba que requieren de todo ZFC son:

1. La utilización de "cardinal de un conjunto" y de la Aritmética cardinal. Ejemplos: (a) $\theta = (2^{2^{2^{\eta}}})^{+}$, (b) $\mid V_{\eta+3} \mid < \theta$ y (c) $(\delta)^{\eta} \leq (2^{2^{2^{\eta}}})^{\eta} = 2^{(2^{2^{\eta}}).\eta} = 2^{(2^{2^{\eta}})} < \theta$.

2. La definición de la ultrapotencia infinita con el ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η: $(\mathfrak{D}, R) = \prod_{H} \langle H(\theta), \in \rangle$.

3. La construcción de la lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\aleph_1 \aleph_1}$ para trabajar con la sentencia que caracteriza las relaciones bien fundamentadas:

   RBF: $(\forall x_0 x_1 x_2 \ldots) \neg \bigwedge \{P(x_{n+1}, x_n) : n \in \aleph_0\}$.

Es conocido que Gödel demostró que se cumple $\langle \mathbf{L}, \in \rangle \models \mathbf{V} = \mathbf{L}$. Entonces el teorema demostrado acá implica que en $\mathbf{L}$ no existen cardinales medibles. Tal vez por este resultado (*si existen cardinales medibles el Axioma de constructibilidad es falso*) y el hecho de que el Axioma de constructibilidad implica a la Hipótesis del continuo de Cantor ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), Hipótesis que hoy en día se cree que es falsa, muchos conjuntistas actuales piensan que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (algo que ya conjeturaba Gödel [Go3]), no se suele considerar mayoritariamente en la bibliografía contemporánea consultada al Axioma de constructibilidad como un candidato a nuevo axioma de la Teoría de conjuntos [AJ], [D4], [J1]. Quizá se considera que el Axioma de constructibilidad limita la investigación en Teoría de conjuntos, limita su potencial platonista matemático, limita el conocimiento de LA VERDAD sobre los conjuntos. $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ es importantante, pero no debería frenar el potencial investigativo de la Teoría de conjuntos. Este tema, la ampliaciación de la capacidad deductiva de ZFC mediante la incorporación de nuevos axiomas, es todo un problema de Teoría de conjuntos, de Meta-Teoría de conjuntos y de Filosofía de la teoría de conjuntos que se deja pendiente para abordar en posteriores investigaciones.

4 La Propiedad de Interpolación de Craig

4.1 Introducción

El objetivo de esta sección es presentar dos demostraciones del Teorema de Interpolación, una para la Lógica proposicional y otra para la Lógica de primer orden, y luego se conectarán tales resultados con el estudio de los fundamentos de la matemática, de la filosofía de la matemática. Ambas demostraciones se realizan en el contexto de la Teoría de Modelos. El Teorema de Interpolación afirma que si φ y ψ son fórmulas, y φ no es una contradicción, y ψ no es válida, y ψ es una consecuencia lógica de φ ($\varphi \models \psi$), entonces existe una fórmula δ que está escrita en un lenguaje común al de φ y ψ tal que $\varphi \models \delta$ y $\delta \models \psi$.

El Teorema de Interpolación fue demostrado por primera vez para la Lógica de primer orden por William Craig en 1957 ([C1], [C2]), y desde entonces se ha investigado la posibilidad de generalizarlo y aplicarlo. Dicho teorema tiene aplicaciones en Teoría de la Demostración ([C2], [F]), Teoría de Modelos Abstracta ([Va1], [F]), Ciencias de la Computación ([T], [Am]), Lógica Modal ([Ga-Mak], [Hoo]), Lógica Intuicionista ([Ga-Mak], [Hoo]), Filosofía de la ciencia ([Ga-Mak], [Hoo]), etc.

Existen distintas pruebas del Teorema de Interpolación para la lógica proposicional que aparecen en la bibliografía sobre el tema. En este trabajo se realizará una demostración que es constructiva (en el sentido de Bernays platonista matemática moderada constructiva, sección 2) y usa el Principio de inducción matemática utilizando ideas de una prueba que se encuentra en [[Hu], pp. 79-80], entre otros, y algunas ideas y ejemplos del autor de este trabajo. Es importante destacar que el autor de esta investigación no conoce la fecha exacta de la demostración del Teorema de Interpolación para la Lógica proposicional, en consecuencia no sabe si se demostró antes o después de la prueba de Interpolación de Craig para la Lógica de primer orden.

También existen distintas pruebas del Teorema de Interpolación para la Lógica de primer orden [Va1], por ejemplo pruebas con métodos de Teoría de la demostración ([C1] y [C2], 1957), pruebas con métodos de la Teoría de Modelos (por ejemplo [Hen2], 1963) y pruebas con métodos de Teoría de juegos y Teoría de conjuntos (por ejemplo Svenonious, 1965, [Va1]). En este trabajo se realizará una demostración en el contexto de la Teoría de modelos utilizando ideas de una prueba que se encuentra en [[Ch-K], pp. 87-89] que es original de Henkin (1963) [Hen2], ella se hace utilizando otro método de Henkin (1949) [Hen1] de construcción de modelos a partir de constantes con el cual dicho autor probó el Teorema de completitud de Gödel en 1949 (con tal método se puede construir un modelo para una teoría T que sea consistente) generalizado con la noción de "Par de teorías inseparables", lo cual proporciona un nuevo método de construcción de modelos para la unión de dos teorías $T_1 \cup T_2$, donde T_1 y T_2 son inseparables y consistentes. Dicha demostración se realiza por reducción al absurdo usando el Principio del tercero exluído y el resto de los axiomas de ZF, no requiere del Axioma de elección. Por lo tanto es una demostración platonista, en un grado no tan fuerte de platonismo, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2). La prueba que se realizará acá usa también ideas y ejemplos del autor de este trabajo.

Según Feferman [F], a pesar de la aparente simpleza del Teorema de Interpolación de Craig éste es una propiedad lógica central que se ha utilizado para revelar una profunda armonía entre la sintaxis y la semántica de la Lógica de primer orden.

Dos consecuencias muy conocidas del Teorema de Interpolación de Craig son el Teorema de definibilidad de Beth (1953) y el Teorema de consistencia de Robinson (1956), también el Teorema de consistencia Robinson implica al Teorema de Interpolación de Craig, es decir, ambos Teoremas son equivalentes. Y una mejora del Teorema de Interpolación de Craig es el Teorema de interpolación de Lyndon (1959) [[Ch-K], pp. 92-93]. En este trabajo se presentará una demostración de Teorema de definibilidad de Beth y otra demostración del Teorema de consistencia de Robinson a partir del Teorema de Interpolación de Craig siguiendo el texto [[Ch-K], pp. 90-91], entre otros.

La revisión de bibliográfía especializada sobre la Propiedad de interpolación Craig revela que tal tema es bastante amplio y profundo, abarca (como se dijo antes) Teoría de la demostración, Teoría de modelos abstracta, Ciencias de la Computación, Lógica Modal, Lógica Intuicionista, Lógica de la relevancia, Filosofía de la Ciencia, etc. Por ejemplo un aspecto de la investigación es si dicha propiedad la cumplen otros sistemas lógicos (Lógicas infinitarias, lógicas con cuanificadores generalizados, lógica de segundo orden, lógicas no clásicas, etc), y se han obtenido resultados positivos y negativos al respecto. En esta sección se presentará un breve resumen sobre este importante tema. Algunas de estas investigaciones se pueden desarrollar sólo con ZF (y puede ser que con menos grados de platonismo matemático moderado), pero existen otras, por ejemplo las que se refieren a la Teoría de modelos abstracta que usan el concepto de “Sistema Lógico” o “Lógica abastracta” el cual requiere mínimo de todo ZFC, de modo que la Teoría de modelos abstracta es platonista matemática moderada en un grado fuerte, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

El orden de presentación de esta sección es el siguiente: En la subsección 4.2 se describirá la demostración del Teorema de Interpolación para la Lógica proposicional. En la subsección 4.3 se describirá la demostración del Teorema de Interpolación para la Lógica de primer orden. En la subsección 4.4 se describirán las demostraciones del Teorema de definibilidad de Beth y del Teorema de consistencia de Robinson. En la subsección 4.5 se presentará un breve comentario sobre algunas generalizaciones del Teorema de interpolación Craig a otros sistemas lógicos. En la subsección 4.6 se presentará un breve comentario sobre una caracterización de la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$ usando interpolación en el contexto de la Teoría de modelos abstracta. En la subsección 4.7 se presentará un breve comentario sobre dos problemas abiertos en Teoría de modelos abstracta relacionados con la Propiedad de Interpolación. Y en la última subsección 4.8 se presentarán algunas consideraciones matemáticas, metamatemáticas y filosóficas sobre la Propiedad de interpolación de Craig.

4.2 El Teorema de Interpolación para la Lógica Proposicional

A continuación se presenta una demostración del Teorema de Interpolación para la Lógica proposicional. Tal demostración es constructiva (platonista moderada constructiva en el sentido de Bernays, sección 2) y se realiza utilizando el Principio de inducción matemática, para hacer la misma se definen primero los conceptos básicos sintácticos y semánticos de la Lógica proposicional tal como son presentados en la mayoría de los textos contemporáneos de Lógica matemática, por ejemplo [D1], [E1], [Me], [N-S], etc. Tales conceptos son los de "proposición", "valuación" (o "interpretación"), "tautología", "contradicción, "satisfacible", "consecuencia lógica" ($\Sigma \models \sigma$), etc. En esta sección se usarán las definiciones expuestas en los textos [D1], [E1] y [N-S]. La demostración que se realizará usa ideas de la prueba del teorema que se encuentra en el texto [[Hu], pp. 79-80], entre otros, y también usa ideas y ejemplos del autor de este trabajo.

Defininición del lenguaje de la Lógica proposicional: Sea $p_0, p_1, p_2, \ldots$ un conjunto numerable de letras proposicionales, se llamará a este conjunto LP. Para construir el lenguaje también se requiere de otros símbolos: Las conectivas y los paréntesis. Las conectivas son: $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (condicional material) y $\leftrightarrow$ (bicondicional). Y los paréntesis son: ")" paréntesis derecho y "(" paréntesis izquierdo. Con estas letras, más las conectivas y los paréntesis, se define lo que es una proposición usando inducción:

Definición 4.2.1. *(1) Toda letra proposional es una proposición.*

(2) Si φ y ψ son proposiciones, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$,$(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son proposiciones.

(3) Sólo son proposiciones las sucesiones finitas de símbolos que se puedan construir aplicando una cantidad finita de veces las cláusulas (1) y (2).

Se denota el conjunto de todas las proposiciones por $PROP$.

Ahora se definirá la semántica de a Lógica proposicional:

Definición 4.2.2. • *Una asignación de valores de verdad es una función* $A : LP \longrightarrow \{V, F\}$.

• *Una Valuación (o Interpretación) es una función* $I : PROP \longrightarrow \{V, F\}$ *tal que:*

1. $I(\neg\varphi) = V \iff I(\varphi) = F$.
2. $I(\varphi \to \psi) = V \iff I(\varphi) = F$ *o* $I(\psi) = V$.
3. $I(\varphi \wedge \psi) = V \iff I(\varphi) = V$ *y* $I(\psi) = V$.
4. $I(\varphi \vee \psi) = V \iff I(\varphi) = V$ *o* $I(\psi) = V$.
5. $I(\varphi \leftrightarrow \psi) = V \iff I(\varphi) = I(\psi)$.

Las asignaciones y las valuaciones guardan una estrecha relación que se describe a continuación: Sea A una asignación. Se cumple que para todo par de valuaciones $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{W}$, si $\mathcal{Z} \upharpoonright A = \mathcal{W} \upharpoonright A$, entonces $\mathcal{Z} = \mathcal{W}$.

Definición 4.2.3. *Una proposición* φ *es una tautología si* $I(\varphi) = V$, *para toda valuación* I. *Una proposición es una contradicción si toda valuación le asigna el valor F. Una proposición es satisfacible si existe una valuación que le asigna el valor V (es decir, si ella no es una cotradicción). Como en el caso de la lógica de primer orden: Sea* $\Gamma \subseteq PROP$ *un conjunto de proposiciones y* $\gamma \in PROP$ *una proposición. Se dice que* γ *es una Consecuencia lógica de* Γ, $\Gamma \models \gamma$, *si toda Valuación (o Interpretación)* I *que es un modelo de* Γ *(es decir:* $I(\sigma) = V$, *para toda* $\sigma \in \Gamma$*) también es un modelo de* γ, *es decir, si no existe una valuación* I *que sea modelo de* Γ *y* $I(\gamma) = F$. *Cuando se habla de consecuencia lógica de conjuntos unitarios, por ejemplo,* $\{\varphi\} \models \psi$, *se escribe* $\varphi \models \psi$. *Y cuando se habla de consecuencias lógicas del conjunto sentencias vácio,* $\emptyset \models \psi$, *se escribe así:* $\models \psi$. *Ocurre que* ψ *es una tautología si y sólo si* $\models \psi$.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Interpolación para la Lógica proposicional). *Sean* χ *y* ζ *dos proposiciones tal que* $\chi \models \zeta$. *Entonces: (i)* χ *es insatisfacible o (ii)* ζ *es válida o (iii) existe una proposición* λ *tal que* $\chi \models \lambda$

y $\lambda \models \zeta$, y cualquier letra proposicional que aparece en λ también aparece en χ y en ζ (en ambas).

(La proposición λ es llamada una "Interpolación de χ y ζ")

Ejemplos del Teorema de interpolación para la lógica proposicional:

(1) $\chi = \neg r \to (s \wedge t)$.
$\zeta = \neg r \to \neg\neg s$.
Es claro que $\chi \models \zeta$.
Una interpolación de χ y ζ es:
$\lambda = \neg r \to s$.

(2) $\chi = (p \to q) \wedge (p \to (q \to r))$.
$\zeta = p \to r$.
Es claro que $\chi \models \zeta$.
Una interpolación de χ y ζ es:
$\lambda = [p \to (r \vee \neg r) \wedge (p \to ((r \vee \neg r) \to r))] \vee [(p \to (r \wedge \neg r)) \wedge (p \to ((r \wedge \neg r) \to r))]$.

La proposición λ anterior del ejemplo (2) ha sido construída con un procedimiento efectivo que se describirá en la demostración del teorema. Tal procedimiento usa las letras proposicionales que están en χ y no están en ζ hasta eliminarlas todas sustituyéndolas por una tautología $(r \vee \neg r)$ o por una contradicción $(r \wedge \neg r)$ de una manera específica (utilizando disyunciones) para lograr construir la proposición interpolación.

Demostración del Teorema: Para probar el teorema se supone que (i) y (ii) no ocurren y se prueba que se cumple (iii). Como (i) y (ii) no ocurren entonces χ y $\neg\zeta$ son satisfacibles, es decir, existe una valuación $\mathcal{V} : PROP \longrightarrow \{V, F\}$ tal que $\mathcal{V}(\chi) = \mathcal{V}$ y existe una valuación $\mathcal{W} : PROP \longrightarrow \{V, F\}$ tal que $\mathcal{W}(\zeta) = \mathcal{F}$. Entonces χ y ζ tienen al menos una letra proposicional en común pues si esto no ocurre se puede definir una valuación $\mathcal{H} : PROP \longrightarrow \{V, F\}$ tal $\mathcal{H}$ coincide con $\mathcal{V}$ en los valores a las letras proposicionales de χ y $\mathcal{H}$ coincide con $\mathcal{W}$ en los valores a las letras proposicionales de ζ, en consecuencia $\mathcal{H}(\chi) = V$ y $\mathcal{H}(\zeta) = F$ (para definir $\mathcal{H}$ se usa la definición 4.2.2 y el Principio de inducción matemática), lo cual contradice la hipótesis $\chi \models \zeta$. Por lo tanto χ y ζ tiene al menos una letra proposicional en común.

Sea $\phi \in PROP$, y sea $LP(\phi)$ el conjunto de las letras proposicionales que aparecen en ϕ. Considérese el conjunto de las letras proposicionales que aparecen en ϕ y no aparecen en ζ, es decir, $LP(\phi) \setminus LP(\zeta)$. El cardinal de tal conjunto $\mid LP(\phi) \setminus LP(\zeta) \mid$ es un número natural. Entonces se probará (iii) por inducción en $\mathbb{N}$ usando $\mid LP(\phi) \setminus LP(\zeta) \mid$, se demostrará la siguiente Proposición $\bigoplus$ que implica (iii) y donde ζ está fija:

Proposición $\bigoplus$: $\forall n \in \mathbb{N} \forall \phi \in PROP$ [(Si $\phi \models \zeta$ y ϕ es satisfacible y $n =\mid LP(\phi) \setminus LP(\zeta) \mid) \Longrightarrow$ existe una proposición Interpolación de ϕ y ζ].

Prueba de la Proposición $\bigoplus$:

Caso base: $n = 0$. Sea σ una proposición tal que $\sigma \models \zeta$, σ es satisfacible y $0 =\mid LP(\sigma) \setminus LP(\zeta) \mid$. Entonces se toma $\lambda = \sigma$. Claramente se cumple que $\sigma \models \sigma$, y por hipótesis ocurre $\sigma \models \zeta$. También todas las letras proposicionales de σ estan en σ y en ζ (en ambas) porque $0 =\mid LP(\sigma) \setminus LP(\zeta) \mid$.

Caso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Y supóngase que para cualquier $r < k$ se cumple la Proposición $\bigoplus$. Es decir, $\forall r < k \forall \phi \in PROP$ [(Si $\phi \models \zeta$ y ϕ es satisfacible y $r =\mid LP(\phi) \setminus LP(\zeta) \mid) \Longrightarrow$ existe una proposición Interpolación de ϕ y ζ]. Se demostrará que la Proposición $\bigoplus$ se cumple para k, es decir, $\forall \phi \in PROP$ [(Si $\phi \models \zeta$ y ϕ es satisfacible y $k =\mid LP(\phi) \setminus LP(\zeta) \mid) \Longrightarrow$ existe una proposición Interpolación de ϕ y ζ].

Sea σ una proposición tal que $\sigma \models \zeta$, σ es satisfacible y $k =\mid LP(\sigma) \setminus LP(\zeta) \mid$. Como $k > 0$ sea $u \in LP(\sigma) \setminus LP(\zeta)$. Sea s una letra proposicional que aparece en σ y ζ. Se construyen dos proposiciones a partir de σ: Sea σ_1 la proposición que resulta de sustituir u por la tautología $(s \vee \neg s)$ en σ. Y sea σ_2 la proposición que resulta de sustituir u por la contradicción $(s \wedge \neg s)$ en σ. Se probará que $\sigma_1 \models \zeta$ y $\sigma_2 \models \zeta$. Prueba de que $\sigma_1 \models \zeta$: Sea $\mathcal{V}$ una valuación tal que $\mathcal{V}(\sigma_1) = V$. Se cumple que $\mathcal{V}(u) = V$ o $\mathcal{V}(u) = F$. Caso 1: Si $\mathcal{V}(u) = V$, entonces (por la construcción de σ_1 a partir de σ) como en σ_1 no aparece u y en los lugares donde estaba u aparece $(s \vee \neg s)$ y $\mathcal{V}((s \vee \neg s)) = V$, se concluye que $\mathcal{V}(\sigma) = V$. Luego, por hipótesis $\mathcal{V}(\zeta) = V$. Caso 2: $\mathcal{V}(u) = F$, entonces como u no aparece en σ_1 se define a partir de $\mathcal{V}$ otra valuación $\mathcal{V}'$ que coincide con $\mathcal{V}$ en los valores a todas las letras proposicionales menos u, es decir, $\mathcal{V}'(u) = V$. En consecuencia $\mathcal{V}'(\sigma) = V$. Luego, por hipótesis $\mathcal{V}'(\zeta) = V$. De modo que $\mathcal{V}(\zeta) = V$, pues como u no aparece en ζ se cumple que $\mathcal{V}'(\zeta) = \mathcal{V}(\zeta)$. La prueba de $\sigma_2 \models \zeta$ se realiza de manera análoga pero considerando la sustitución de $(s \wedge \neg s)$ por u en σ. Por lo tanto, como $\sigma_1 \models \zeta$ y $\sigma_2 \models \zeta$, se concluye que $\sigma_1 \vee \sigma_2 \models \zeta$. Entonces, como por construcción la proposición $\sigma_1 \vee \sigma_2$ tiene $k-1$ letras proposicionales que no aparecen en ζ, y es satisfacible porque σ lo es, se aplica la Hipótesis Inductiva y se tiene que existe una proposición λ Interpolación de $\sigma_1 \vee \sigma_2$ y ζ. Es decir, $\sigma_1 \vee \sigma_2 \models \lambda$ y $\lambda \models \zeta$, y cualquier letra proposicional que aparece en λ también aparece en $\sigma_1 \vee \sigma_2$ y en ζ (en ambas). Como se cumple que $\sigma \models \sigma_1 \vee \sigma_2$, entonces $\sigma \models \lambda$. Por lo tanto λ es una proposición Interpolación de σ y ζ. Lo que se quería demostrar. Ha terminado la domostración de la Proposición $\bigoplus$ y por lo tanto ha finalizado también la prueba del Teorema de Interpolación para la Lógica proposicional. $\square$

4.3 El Teorema de Interpolación para la Lógica de Primer Orden

A continuación se presenta una demostración del Teorema de Interpolación para la Lógica de primer orden. Tal prueba se hace utilizando el método de Henkin [Hen1] de construcción de modelos a partir de constantes (con el cual se puede construir un modelo para una teoría T que sea consistente), ampliado con la noción de "Par de teorías inseparables", lo cual proporciona un nuevo método de construcción de modelos para la unión de dos teorías $T_1 \cup T_2$, donde T_1 y T_2 son inseparables y consistentes. Para hacer la demostración se usarán los conceptos básicos de la sintaxis y la semántica de la Lógica de primer orden que se presentaron en la sección anterior (3). La demostración que se realizará utiliza ideas de la prueba del teorema que se encuentra en el texto [[Ch-K], pp. 87-89], la cual se debe originalmente a Henkin (1963) [Hen2].

Vale la pena resaltar que según [Va1] existen varias pruebas del Teorema interpolación de Craig: Con métodos de Teoría de la demostración (por ejemplo la original de Craig de 1957 [C1] y [C2]), con métodos de la Teoría de modelos (por ejemplo la de Henkin, 1963, [Hen2]) y con métodos de la Teoría de juegos y Teoría de conjuntos (por ejemplo Svenonious, 1965, [Va1]).

Antes de la demostración se presentan algunos conceptos y resultados previos:

El Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de primer orden (Gödel (1930), Henkin (1949):

¿ La Lógica de Primer Orden es axiomatizable?. **La respuesta es que sí** , al igual que la Lógica Proposicional, algunos sistemas de la Lógica modal, etc, pero diferente (por ejemplo) a la Aritmética, a la Teoría de Conjuntos, el Análisis matemático, a la Lógica de Segundo orden, a las Lógicas con cuantificadores generalizados y a las lógicas infinitarias, las cuales no son axiomatizables. Y existen varios sistemas axiomáticos completos y correctos para la Lógica de Primer Orden, a continuación se presenta uno ellos, el sistema axiomático presentado por Enderton en [[E1], pp. 166-167] (otros sistemas axiomáticos para la lógica de primer orden pueden encontrarse en [Me], [Ch-K], etc):

AXIOMAS LÓGICOS

(ESQUEMAS DE AXIOMAS)

Los Axiomas lógicos son todas las generalizaciones de fórmulas de la formas siguientes, donde x, y son variables y ϕ y χ son fórmulas (Definición: ϕ es una generalización de χ si ϕ es $\forall x_1, \ldots, x_n \chi$, para variables $x_1, \ldots, x_n$):

(1) Todas las instancias de tautologías de la Lógica proposicional.

(2) $\forall x\phi \rightarrow \phi_t^x$, donde t es substituible por x en ϕ.

(3)$\forall x(\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\chi)$.

(4) $\phi \rightarrow \forall x\phi$, donde x no ocurre libre en ϕ.

(5) $y \equiv y$.

(6) $(x \equiv y) \to (\phi \to \phi^{'})$, donde ϕ es una fórmula atómica y $\phi^{'}$ se obtiene de ϕ al reemplazar x por y en cero o más lugares (aunque no necesariamente en todos).

REGLA DE INFERENCIA

Modus Ponens: A partir de $\phi \to \chi$ y ϕ se puede inferir χ.

Definición 4.3.1. *Sea Γ un conjunto de fórmulas y ϕ una fórmula. Se dice que ϕ se deduce de Γ o que ϕ se demuestra a partir de Γ, lo que se denota por,*

$$\Gamma \vdash \phi,$$

si existe una sucesión finita $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ de fórmulas tales que $\sigma_m = \phi$, y cada σ_i es un axioma, o es un miembro de Γ, o se obtiene de dos fórmulas anteriores en la sucesión por la regla de inferencia Modus Ponens.

Si $\Gamma = \emptyset$, entonces se escribe $\vdash \phi$ en lugar de $\emptyset \vdash \phi$.

Teorema 4.3.2 (Teorema de Completitud de Gödel). *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje numerable $\mathcal{L}$ y φ una sentencia de $\mathcal{L}$. Entonces:*

(1) Primera versión:

$$\Sigma \text{ es consistente} \iff \Sigma \text{ tiene un modelo.}$$

(2) Segunda versión:

$$\Sigma \vdash \varphi \iff \Sigma \models \varphi.$$

Como esta sugerido en la formulación del teorema la Primera versión es equivalente a la Segunda versión.

El Teorema de Completitud de Gödel (como se dijo anteriormente) se utilizará en la prueba del Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden, en especial se usará la técnica de Henkin de construcción de modelos a partir de constantes (1949) que se aplica contemporáneamente en la demostración del mismo, dicha técnica permite construir un modelo para una teoría consistente T en un lenguaje $\mathcal{J}$ extendiéndola (inductivamente) a una teoría maximal consistente T' en un lenguaje expandido $\mathcal{J} \cup E$, donde E es un conjunto numerable de nuevos símbolos constantes que funcionan como "testigos" para T'. El modelo se construye con los términos cerrados de $\mathcal{J} \cup E$ o solamente con E, usando clases de equivalencia de los mismos y la propiedad de maximal consistencia. Más adelante se definirán estos conceptos. Una prueba del Teorema de Completitud de Gödel aplicando el método de Henkin (1949) puede encontrarse en los textos [[D1], pp. 56-60], [[Ch-K], pp. 61-66], [E-F-T], [[E1], pp. 198-208], [Me], [Ma], etc. La que se utilizará este trabajo es la demostración que aparece en [[Ch-K], pp. 61-66].

La aplicación del teorema que se realizará aca sólo necesita de lenguajes numerables, por lo tanto tal resultado se puede demostrar en ZF, de modo que es platonista, pero no tan fuerte, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2).

Vale la pena resaltar que el Teorema de Completitud de Gödel también se cumple para lenguajes de primer orden de cualquier cardinalidad, en tal caso se requiere de la Aritmética transfinita ordinal y cardinal, y por lo tanto del Axioma de elección para hacer la prueba [Ch-K], [FG4]. En tal caso tal resultado es platonista matemático, en un grado fuerte de platonismo según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

(Una prueba muy interesante del Teorema de Completitud de Gödel distinta a la de Henkin y muy parecida a la original de Gödel ([[Go1], pp. 15-34]) se puede encontrar en [FG5], ella usa el procedimiento efectivamente computable de Forma normal de Skolem y está basada en una que realiza Alonzo Church (1956) en [[Chu], pp. 233-237], se hace en ZF, en particular hay un paso clave de la misma donde se usa el Principio del tercero excluído, principio no aceptado por el platonismo matemático moderado contructivo, es decir, por el Intuicionismo.)

El Teorema de Compacidad para la Lógica de primer orden (1930):

Como se dijo en la sección anterior (3) una consecuencia muy conocida del Teorema de Completitud de Gödel es el Teorema de Compacidad, dicho teorema también se utilizará en la prueba del Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden. En la sección 3 se formuló el Teorema de Compacidad y se demostró el mismo usando el método de construcción de modelos llamado Ultraproductos. Una prueba de dicho teorema como corolario del Teorema de Completitud de Gödel puede encontrarse en los textos [[E1], pp. 208], [[D1], pp. 61], [[Ch-K], pp. 67] y [[Ma], pp. 131].

Es conocido que también la lógica proposicional cumple con la propiedad de compacidad ([E1], [D1]), pero no todo sistema lógico cumple con tal propiedad, por ejemplo la lógica de segundo orden y las lógicas infinitarias no cumplen con la misma, más adelante se mencionará un sistema lógico con cuantificadores generalizados que a pesar de no cumplir con compacidad, cumple con una versión débil de la misma: "Compacidad numerable". [E-F-T]

A continuación se presenta una formulación del Teorema de Compacidad para la Lógica de primer orden que es distinta pero equivalente a la que se presentó anteriormente en la sección 3 de este trabajo, es la versión que se aplicará en la demostración del Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden:

Corolario 4.3.3 (Teorema de Compacidad (1930)). *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje numerable $\mathcal{L}$ y φ una sentencia de $\mathcal{L}$. Entonces:*

$$\Sigma \models \varphi \iff \textit{Existe un subconjunto finito } \Sigma_0 \subseteq \Sigma \textit{ tal que } \Sigma_0 \models \varphi.$$

A continuación se formula y demuestra el Teorema de Interpolación para la Lógica de primer orden:

Teorema 4.3.4 (Teorema de Interpolación para la Lógica de primer orden (1957)). *Sean χ y ζ dos sentencias en primer orden tal que $\chi \models \zeta$. Entonces existe una sentencia λ tal que:*

(i) $\chi \models \lambda$ y $\lambda \models \zeta$.

(ii) Cualquier símbolo de relación, función o constante (excluyendo la identidad) que ocurra en λ también ocurre en χ y ζ.

(La sentencia λ es llamada una "Interpolación de χ y ζ")

Observación:

Los siguientes tres ejemplos muestran porque es necesario permitir que el símbolo de la identidad ocurra en λ y no necesariamente en χ y ζ, en efecto, notar que los siguientes pares de sentencias tienen el símbolo de identidad a lo sumo en una de ellas, y sin embargo, ellas no tienen interpolación λ que no tenga el símbolo de identidad [[Ch-K], pp. 87]:

(1) $\chi = \exists x(Sx \wedge \neg Sx)$ y $\zeta = \exists x Rx$. Una $\lambda = \neg\forall x(x \equiv x)$.
(2) $\chi = \exists x Rx$ y $\zeta = \exists x(Sx \vee \neg Sx)$. Una $\lambda = \forall x(x \equiv x)$.
(3) $\chi = \forall x \forall y(x \equiv y)$ y $\zeta = \forall x \forall y(Sx \leftrightarrow Sy)$. Una $\lambda = \forall x \forall y(x \equiv y)$.

Sin embargo, cuando el símbolo de identidad no aparece en χ ni en ζ, y χ no es una sentencia contadictoria y ζ no es una sentencia válida, entonces en la Interpolación λ de χ y ζ no aparece el símbolo de identidad [[Ch-K], pp. 88]. Por ejemplo:

$\chi = \forall x \forall y((T(x,y) \rightarrow C(x,y)) \wedge T(f(a),b))$ y $\zeta = C(f(a),b)) \wedge T(f(a),b))$. Una $\lambda = (T(f(a),b)) \rightarrow C(f(a),b)) \wedge T(f(a),b)$.

Otro ejemplo de interpolación es el siguiente:

$\chi = g(b) \equiv d \wedge Q(g(b))$ y $\zeta = (d \equiv e) \rightarrow Q(e)$. Una $\lambda = Q(d)$.

Demostración del Teorema:

Considerando la observación anterior se tiene que si χ es una sentencia insatisfacible, entonces una sentencia λ Interpolación de χ y ζ es $\neg\forall x(x \equiv x)$, y si ζ es una sentencia válida, entonces una sentencia λ Interpolación de χ y ζ es $\forall x(x \equiv x)$. En consecuencia para terminar de demostrar el teorema se considerará el caso en que χ no es una sentencia insatisfacible (χ es satisfacible) y ζ no es una sentencia válida ($\neg\zeta$ es satisfacible). Se demostrará este caso por reducción al absurdo. Supóngase que no existe una sentencia λ Interpolación para χ y ζ. Se obtendrá una contradicción demostrando que no ocurre $\chi \models \zeta$ contruyendo un modelo para $\chi \wedge \neg\zeta$. (Notar que la prueba que se realizará no es Intuicionista, pues se prueba existencia por reducción al absurdo. Es una prueba platonista matemática, sección 2).

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de todos los símbolos que ocurren en χ o en ζ o en ambas. Sea $\mathcal{L}_1$ el lenguaje de todos los símbolos que ocurren en χ, $\mathcal{L}_2$ el lenguaje de todos los símbolos que ocurren en ζ y $\mathcal{L}_0$ el lenguaje de todos los símbolos que ocurren en ambas (χ y ζ). Es decir:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2,$$

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2.$$

Ahora se extiende el lenguaje $\mathcal{L}$ a un lenguaje $\mathcal{L}'$ agregándole un conjunto numerable $C = \{c_n : n \in \aleph_0\}$ de nuevos símbolos constantes, es decir, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$. En correpondencia con esta extensión de $\mathcal{L}$ se definen las extensiones con C de $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ así:

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 \cup C,$$
$$\mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 \cup C,$$
$$\mathcal{L}'_2 = \mathcal{L}_2 \cup C.$$

La demostración se parece a la prueba del Teorema de Completitud de Gödel usando la técnica de Henkin de construcción de modelos a partir de constantes, pero usa una noción adicional: La de "Par de teorías inseparables".

Considérese un par de teorías K de $\mathcal{L}'_1$ y H de $\mathcal{L}'_2$ (la definición de "teoría" está en la página 52. También la de "teoría completa"). Se dice que una sentencia λ de $\mathcal{L}'_0$ *separa* a K y a H si y sólo si:

$$K \models \lambda \;\text{ y }\; H \models \neg\lambda.$$

Se dice que las teorías K y H son *inseparables* si y sólo si ninguna sentencia λ de $\mathcal{L}'_0$ separa a K y a H.

Proposición $\diamondsuit$: $\{\chi\}$ y $\{\neg\zeta\}$ son inseparables.

Demostración de la Proposición $\diamondsuit$: (Por reducción al absurdo). Supóngase que existe una sentencia $\lambda(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de $\mathcal{L}'_0$ que separa a $\{\chi\}$ y a $\{\neg\zeta\}$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in C$. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ variables que no ocurren $\lambda(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Entonces la sentencia $\forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n \lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ es una interpolación de χ y ζ, es decir,

$\chi \models \forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall v_n \lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ y $\forall z_1 \forall z_2 \ldots \forall z_n \lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n) \models \zeta$. Contradicción pues se está suponiendo que no existe una sentencia Interpolación para χ y ζ. Fin de la prueba de la proposición.

El conjunto de todas las sentencias de $\mathcal{L}'_1$ es numerable y también el conjunto de todas las sentencias de $\mathcal{L}'_2$. Considérese una lista de tales sentencias, primero las de $\mathcal{L}'_1$ y luego las de $\mathcal{L}'_2$:

$$\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots (n \in \aleph_0),\ \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots (n \in \aleph_0)$$

Ahora se construirán dos secuencias crecientes de teorías de $\mathcal{L}'_1$ y de $\mathcal{L}'_2$, respectivamente,

$$\{\chi\} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \ldots \subseteq K_n \ldots (n \in \aleph_0),$$

$$\{\neg\zeta\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \ldots \subseteq H_n \ldots (n \in \aleph_0),$$

tales que cumplen las siguientes propiedades:

(i) K_n y H_n son conjuntos finitos de sentencias inseparables.

(ii) Si $K_n \cup \{\chi_n\}$ es inseparable con H_n, entonces $\chi_n \in K_{n+1}$. Y Si K_{n+1} y $H_n \cup \{\zeta_n\}$ son inseparables, entonces $\zeta_n \in H_{n+1}$ (Notar que el procedimiento es en zigzag).

(iii) Si $\chi_n = \exists x \rho(x)$ y $\chi_n \in K_{n+1}$, entonces $\rho(a) \in K_{n+1}$, para alguna $a \in C$ tal que a no aparezca en $K_n \cup \{\chi_n\}$. Y si $\zeta_n = \exists x \tau(x)$ y $\zeta_n \in H_{n+1}$, entonces $\tau(b) \in H_{n+1}$, para alguna $b \in C$ tal que b no aparezca en $H_n \cup \{\zeta_n\}$.

Si han sido definidas las teorías K_n y H_n, entonces se pueden construir las teorías K_{n+1} y H_{n+1} de la manera usual:

$$K_{n+1} = \begin{cases} K_n \cup \{\chi_n\} & \text{si } K_n \cup \{\chi_n\} \text{ es inseparable con } H_n \text{ y } \chi_n \text{ no es existencial} \\ K_n \cup \{\chi_n\} \cup \{\rho(a)\} & \text{si } K_n \cup \{\chi_n\} \text{ es inseparable con } H_n, \text{ y } \chi_n = \exists x \rho(x) \\ K_n & \text{en caso de que } K_n \cup \{\chi_n\} \text{ no sea inseparable con } H_n \end{cases}$$

Donde a es la menor constante de C (en la numeración fijada al incio) que no aparece en $K_n \cup \{\chi_n\}$.

$$H_{n+1} = \begin{cases} H_n \cup \{\zeta_n\} & \text{si } H_n \cup \{\zeta_n\} \text{ es inseparable con } K_{n+1} \text{ y } \zeta_n \text{ no es existencial} \\ H_n \cup \{\zeta_n\} \cup \{\tau(b)\} & \text{si } H_n \cup \{\zeta_n\} \text{ es inseparable con } K_{n+1}, \text{ y } \zeta_n = \exists x \tau(x) \\ H_n & \text{en caso de que } H_n \cup \{\zeta_n\} \text{ no sea inseparable con } K_{n+1} \end{cases}$$

Donde b es la menor constante de C (en la numeración fijada al incio) que no aparece en $H_n \cup \{\zeta_n\}$.

Entonces como por construcción se tiene a las teorías $K_0 = \{\chi\}$ y $H_0 = \{\neg\zeta\}$, se puede continuar construyendo inductivamente, mediante la regla de definición anterior, a las dos secuencias de teorías K_i y H_i, para cada $i \in \aleph_0$. Por el Principio de inducción matemática existen tales secuencias. Se demostrará que tales secuencias tienen las propiedades (i), (ii) y (iii): (i) Hay que probar que $\forall i \in \aleph_0 (K_i\, y\, H_i$ son finitos e inseparables). Se hará por inducción en $\mathbb{N}$: Caso base: $n = 0$. Obviamente K_0 y H_0 son finitos y también son inseparables (Ver Proposición $\diamondsuit$). Caso inductivo: Sea $n \in \mathbb{N}$ y supóngase K_n y H_n cumplen con lo que se quiere, es decir, son finitos e inseparables. Se debe probar que K_{n+1} y H_{n+1} son finitos e inseparables. El que son finitos es inmediato por la construcción. Para probar que son inseparables hay que considerar varios casos según la definición inductiva (K_{n+1} y H_{n+1} tienen tres posibilidades de ser cada uno), pero la idea principal de dicha prueba se puede presentar demostrando un caso modelo de todos los posibles, los demás casos salen usando esa idea y/o la hipótesis inductiva y/o la definición inductiva: Considérese el siguiente caso:

$$K_{n+1} = K_n \cup \{\chi_n\} \cup \{\rho(a)\},$$

$$H_{n+1} = H_n \cup \{\zeta_n\} \cup \{\tau(b)\},$$

donde $\chi_n = \exists x \rho(x)$, $\zeta_n = \exists x \tau(x)$, a es la menor constante de C (en la numeración fijada al incio) que no aparece en $K_n \cup \{\chi_n\}$, y b es la menor constante de C (en la numeración fijada al incio) que no aparece en $H_n \cup \{\zeta_n\}$.

Supóngase que K_{n+1} y H_{n+1} son separables. Es decir, existe una sentencia λ de $\mathcal{L}'_0$ tal que:

$$K_{n+1} \models \lambda \ \text{ y } \ H_{n+1} \models \neg\lambda.$$

Aplicando el Teorema de completitud de Gödel y el Teorema de la deducción en H_{n+1} se tiene que:

$$H_n \cup \{\zeta_n\} \vdash \tau(b) \to \neg\lambda.$$

Entonces, como b no aparece en $H_n \cup \{\zeta_n\}$ se aplica la regla de introducción del generalizador y se tiene que:

$$H_n \cup \{\zeta_n\} \vdash \forall x(\tau(x) \to \neg\lambda).$$

Volviendo a aplicar el Teorema de completitud de Gödel se concluye que:

$$H_n \cup \{\zeta_n\} \models \forall x(\tau(x) \to \neg\lambda),$$

En consecuencia se tiene que:

$$H_n \cup \{\zeta_n\} \models \neg\lambda.$$

Entonces K_{n+1} y $H_n \cup \{\zeta_n\}$ son separables. Esto contradice la definición de H_{n+1} en el caso analizado (Ver definición). Por lo tanto K_{n+1} y H_{n+1} son inseparables, lo que se quería probar. Con esto termina la demostración de la propiedad (i): $\forall i \in \aleph_0 (K_i\, y\, H_i$ son finitos e inseparables). Las propiedades (ii) y (iii) se cumplen por contrucción.

Sean,

$$K_\omega = \bigcup_{n \in \omega} K_n,$$

$$H_\omega = \bigcup_{n \in \omega} H_n.$$

Proposición ♣: K_ω y H_ω son inseparables.

Demostración de la Proposición $\clubsuit$: (Por reducción al absurdo) Si K_ω y H_ω son separables, entonces existe una sentencia λ de $\mathcal{L}'_0$ tal que $K_\omega \models \lambda$ y $H_\omega \models \neg\lambda$. Entonces por el Teorema de Compacidad existen conjuntos finitos $\Gamma_0 \subseteq K_\omega$ y $\Gamma_1 \subseteq H_\omega$ tal que $\Gamma_0 \models \lambda$ y $\Gamma_1 \models \neg\lambda$. Luego, por la construcción K_ω y H_ω existe $j \in \aleph_0$ tal que $\Gamma_0 \subseteq K_j$ y $\Gamma_1 \subseteq H_j$. En consecuencia $K_j \models \lambda$ y $H_j \models \neg\lambda$. Por lo tanto K_j y H_j son separables. Esto contradice la cláusula (i) probada anteriormente. Entonces K_ω y H_ω son inseparables. Fin de la prueba de la Proposición $\clubsuit$.

Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje $\mathcal{J}$. Σ es *maximal consistente* si Σ es consistente y no existe un conjunto de sentencias consistente Γ que contenga propiamente a Σ, es decir, un Γ tal que $\Sigma \subseteq \Gamma$ y exista una sentencia γ tal $\gamma \in \Gamma$ y $\gamma \notin \Sigma$.

Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje $\mathcal{J}$ y E un conjunto de constantes de $\mathcal{J}$. Se dice que E es un *conjunto de testigos para* Σ *en* $\mathcal{J}$ si para toda fórmula φ de $\mathcal{J}$ con a lo sumo una variable libre(digamos, x) existe una $e \in E$ tal que:

$$\Sigma \vdash \exists x\varphi(x) \to \varphi(e).$$

Proposición $\triangle$: K_ω y H_ω son teorías maximal consistentes en $\mathcal{L}'_1$ y $\mathcal{L}'_2$, respectivamente. Y ambas tienen al conjunto de constantes C como conjunto de testigos (en $\mathcal{L}'_1$ y $\mathcal{L}'_2$, respectivamente).

Demostración de la Proposición $\triangle$:

Primero se probará que K_ω y H_ω son consistentes, luego se probará que son máximal consistentes, y por último se probará que el conjunto de constantes C es un conjunto de testigos para K_ω y también para H_ω (en $\mathcal{L}'_1$ y $\mathcal{L}'_2$, respectivamente).

Para probar que K_ω y H_ω son consistentes primero se probará que $\forall i \in \aleph_0(K_i\, y\, H_i$ son consistentes) por inducción en $\mathbb{N}$: Caso base: $n = 0$. K_0 tiene un modelo, pues por hipótesis χ no es insatisfacible, y H_0 tiene un modelo, pues por hipótesis ζ no es válida, entonces por el Teorema de completitud de Gödel K_0 y H_0 son consistentes. Caso inductivo: Sea $n \in \mathbb{N}$ y supóngase que K_n y H_n cumplen con lo que se quiere, es decir, ellas son consistentes. Se debe probar que K_{n+1} y H_{n+1} son consistentes. Para probar que son consistentes hay que considerar varios casos según la definición inductiva

(K_{n+1} y H_{n+1} tienen tres posibilidades de ser cada uno), pero la idea principal de dicha prueba se puede presentar demostrando un caso modelo de todos los posibles, los demás casos salen usando esa idea y/o la hipótesis inductiva y/o la definición inductiva: Considérese el siguiente caso:

$$K_{n+1} = K_n \cup \{\chi_n\} \cup \{\rho(a)\},$$

$$H_{n+1} = H_n \cup \{\zeta_n\} \cup \{\tau(b)\},$$

donde $\chi_n = \exists x \rho(x)$, $\zeta_n = \exists x \tau(x)$, a es la menor constante de C (en la numeración fijada al incio) que no aparece en $K_n \cup \{\chi_n\}$, y b es la menor constante de C (en la numeración fijada al incio) que no aparece en $H_n \cup \{\zeta_n\}$.

Supóngase que K_{n+1} es inconsistente. Entonces cualquier proposición de $\mathcal{L}'_1$ es consecuencia lógica de K_{n+1}. Sea λ una sentencia contradictoria de $\mathcal{L}'_0$. Entonces:

$$K_{n+1} \models \lambda.$$

Aplicando el Teorema de completitud de Gödel y el Teorema de la deducción en K_{n+1} se tiene que:

$$K_n \cup \{\chi_n\} \vdash \rho(a) \rightarrow \lambda.$$

Entonces, como a no aparece en $K_n \cup \{\chi_n\}$ se aplica la regla de introducción del generalizador y se tiene que:

$$K_n \cup \{\chi_n\} \vdash \forall x(\rho(x) \rightarrow \lambda).$$

Volviendo a aplicar el Teorema de completitud de Gödel se concluye que:

$$K_n \cup \{\chi_n\} \models \forall x(\rho(x) \rightarrow \lambda),$$

En consecuencia se tiene que:

$K_n \cup \{\chi_n\}$ es insatisfacible. Y por lo tanto, $K_n \cup \{\chi_n\} \models \lambda$. Y como $\neg\lambda$ es una sentencia válida se tiene que $H_n \models \neg\lambda$. Entonces $K_n \cup \{\chi_n\}$ y H_n son separables. Esto contradice la definición de K_{n+1} en el caso analizado (ver definición). Por lo tanto K_{n+1} es cosistente.

Si H_{n+1} es inconsistente, entonces se aplica un razonamiento análogo al caso anterior de K_{n+1} y se concluye que $H_n \cup \{\zeta_n\}$ y K_{n+1} son separables lo cual contradice a definición de H_{n+1} en el caso analizado (ver definición). Por lo tanto H_{n+1} es consistente. Con esto termina la demostración de la primera parte de la Proposición $\triangle$, es decir, se tiene que $\forall i \in \aleph_0$: K_i y H_i son consistentes.

Ahora se probará que K_ω y H_ω son consistentes: Si K_ω es inconsistente, entonces por la defininción de deducibilidad se tiene que existe un conjunto finito $\Gamma_0 \subseteq K_\omega$ tal que Γ_0 es inconsistente. En consecuencia (por construcción) existe un $j \in \aleph_0$ tal que $\Gamma_0 \subseteq K_j$. Por lo tanto K_j es inconsistente. Esto contradice el resultado anterior. Entonces K_ω es consistente. Aplicando un razonamiento análogo se prueba que H_ω es consistente.

Ahora se probará que K_ω y H_ω son maximal consistente en $\mathcal{L}_1'$ y $\mathcal{L}_2'$, respectivamente. Se demostrará que H_ω es máximal consistente en $\mathcal{L}_2'$: Es suficiente con demostrar que $\forall i \in \aleph_0$ ($\zeta_i \in H_\omega$ o $\neg\zeta_i \in H_\omega$). Se probará por reducción al absurdo. Supóngase que existe un $n \in \aleph_0$ tal que $\zeta_n \notin H_\omega$ y $\neg\zeta_n \notin H_\omega$. Entonces por construcción ambas proposiciones fueron sacadas en el paso corespondiente a su subíndice, ζ_n en H_{n+1}, y supóngase que $\neg\zeta_n$ en H_{r+1}, donde $r \in \aleph_0$, es decir, por construcción: $H_n \cup \{\zeta_n\}$ es separable con K_{n+1} y $H_r \cup \{\zeta_r\}$ es separable con K_{r+1}, donde $\neg\zeta_n = \zeta_r$. En consecuencia existe una sentencia λ de $\mathcal{L}_0'$ tal que $H_n \cup \{\zeta_n\} \models \lambda$ y $K_{n+1} \models \neg\lambda$. Y existe una sentencia λ' de $\mathcal{L}_0'$ tal que $H_r \cup \{\neg\zeta_n\} \models \lambda'$ y $K_{r+1} \models \neg\lambda'$. Sin perder generalidad supóngase que $r > n$. Entonces por construcción $H_n \subseteq H_r$ y $K_{n+1} \subseteq K_{r+1}$. Y se tiene que:

$$H_r \models \zeta_n \to \lambda,\ K_{r+1} \models \neg\lambda,$$

$$H_r \models \neg\zeta_n \to \lambda',\ K_{r+1} \models \neg\lambda'.$$

Luego:

$$H_r \models (\lambda \vee \lambda'),\ K_{r+1} \models \neg(\lambda \vee \lambda').$$

En consecuencia:

$$H_\omega \models (\lambda \vee \lambda'),\ K_\omega \models \neg(\lambda \vee \lambda').$$

Por lo tanto, K_ω y H_ω son separables. Esto contradice lo desmostrado anteriormente en la Proposición $\clubsuit$. Entonces $\forall i \in \aleph_0$ ($\zeta_i \in H_\omega$ o $\neg\zeta_i \in H_\omega$) y se concluye que H_ω es maximal consistente. La prueba de que K_ω es maximal consistente se realiza de manera análoga.

Por último se probará que el conjunto de constantes C es un conjunto de testigos para K_ω y para H_ω (en $\mathcal{L}_1'$ y $\mathcal{L}_2'$, respectivamente): Se demostrará que C es un conjunto de testigos para K_ω en $\mathcal{L}_1'$: Sea $\exists x\varphi(x)$ una sentencia de $\mathcal{L}_1'$. Como K_ω es maximal consistente, entonces $\exists x\varphi(x) \in K_\omega$ o $\neg\exists x\varphi(x) \in$

K_ω. Sin $\exists x\varphi(x) \in K_\omega$, entonces por construcción para alguna constante $a \in C$ se tiene que $\varphi(a) \in K_\omega$. Entonces $K_\omega \vdash \varphi(a)$. En consecuencia $K_\omega \vdash \exists x\varphi(x) \to \varphi(a)$. Si $\neg\exists x\varphi(x) \in K_\omega$, entonces $K_\omega \vdash \neg\exists x\varphi(x)$. Luego, $K_\omega \vdash (\neg\exists x\varphi(x)) \vee \varphi(a)$, para cualquier constante $a \in C$. En consecuencia, $K_\omega \vdash \exists x\varphi(x) \to \varphi(a)$, para cualquier constante $a \in C$. En conclusión, C es un conjunto de testigos para K_ω en $\mathcal{L}'_1$. La demostración de que C es un conjunto de testigos para H_ω (en $\mathcal{L}'_2$) se realiza de manera análoga. Con esto termina la prueba de la Proposición $\triangle$: K_ω y H_ω son teorías maximal consistentes en $\mathcal{L}'_1$ y $\mathcal{L}'_2$, respectivamente. Y ambas tienen al conjunto de constantes C como un conjunto de testigos (en $\mathcal{L}'_1$ y $\mathcal{L}'_2$, respectivamente).

Proposición $\spadesuit$: $K_\omega \cap H_\omega$ es una teoría maximal consistente en $\mathcal{L}'_0$.

Demostración de la Proposición $\spadesuit$: Como $K_\omega \cap H_\omega \subseteq K_\omega$ y $K_\omega \cap H_\omega \subseteq H_\omega$ y K_ω y H_ω son teorías consistentes, entonces $K_\omega \cap H_\omega$ es consistente. Se probará que $K_\omega \cap H_\omega$ es maximal consistente demostrando que para toda proposición ϕ de $\mathcal{L}'_0$ se cumple que $\phi \in K_\omega \cap H_\omega$ o $\neg\phi \in K_\omega \cap H_\omega$. Sea una proposición ϕ de $\mathcal{L}'_0$. Como K_ω y H_ω son inseparables, entonces no puede ocurrir que $\phi \in K_\omega$ y $\neg\phi \in H_\omega$ o que $\neg\phi \in K_\omega$ y $\phi \in H_\omega$. Entonces como K_ω y H_ω son teorías maximal consistentes en $\mathcal{L}'_1$ y $\mathcal{L}'_2$, respectivamente, se concluye que $\phi \in K_\omega \cap H_\omega$ o $\neg\phi \in K_\omega \cap H_\omega$. Por lo tanto $K_\omega \cap H_\omega$ es maximal consistente. Con esto termina la prueba de la Proposición $\spadesuit$.

Ahora se procederá a construir un modelo para la teoría $K_\omega \cup H_\omega$, y como $\chi \in K_\omega$ y $\neg\zeta \in H\omega$ entonces se tendrá el modelo buscado para $\chi \wedge \neg\zeta$. Con esto terminará la demostración del teorema:

Usando la técnica de construcción de modelos a partir de constantes de Henkin que se aplica para demostrar en Teorema de completitud de Gödel en [[Ch-K], pp. 61-66] se puede construir un modelo para la teoría K_ω y otro modelo para la teoría H_ω, pues se ha demostrado (Proposición $\triangle$) que dichas teorías son maximal consistentes en $\mathcal{L}'_1$ y $\mathcal{L}'_2$, respectivamente, y además ambas tienen al conjunto numerable de nuevas constantes $C = \{c_n : n \in \aleph_0\}$ como un conjunto de testigos (en $\mathcal{L}'_1$ y $\mathcal{L}'_2$, respectivamente).

Sea $\mathfrak{A}$ una estructura para $\mathcal{L}'_1$ que es un modelo para K_ω construída utilizando la técnica referida anteriormente. Es decir, $\mathfrak{A}$ se construye como sigue:

Sea $C = \{c_n : n \in \aleph_0\}$ el conjunto de nuevas constantes. Para no tener problemas con las sentencias atómicas de K_ω se define sobre C una relación de equivalencia $\sim$ de la siguiente manera:

Sean $c_i \in C$ y $c_j \in C$, entonces:

$$c_i \sim c_j \text{ si y sólo si } c_i \equiv c_j \in K_\omega.$$

Notar que $\sim$ es una relación de equivalencia porque la relación de identidad es reflexiva, simétrica y transitiva.

Sea $C/\sim = \{[c_n] : c_n \in C\}$ el conjunto cociente determinado por $\sim$.

Notar que el cardinal de $C/\sim$ es a lo sumo numerable.

El universo A de la estructura $\mathfrak{A}$ es el conjunto cociente $C/\sim$. Y las interpretaciones en $\mathfrak{A}$ para los símbolos de $\mathcal{L}'_1$ son las siguientes:

(1) Si $c_1, \ldots, c_n$ son constantes de C y R es un símbolo relacional n-ario de $\mathcal{L}'_1$ entonces,

$$R^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) \Longleftrightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \in K_\omega.$$

(2) Si a es un símbolo constante de $\mathcal{L}'_1$, entonces,

$$a^{\mathfrak{A}} = [c_i],$$

para alguna constante $c_i \in C$ tal que $a \equiv c_i \in K_\omega$. Tal constante existe pues $\vdash \exists x(a \equiv x)$, y por lo tanto $\exists x(a \equiv x) \in K_\omega$. Luego, como C es un conjunto de testigos para K_ω se concluye que existe una constante $c_i \in C$ tal que $(a \equiv c_i) \in K_\omega$. Notar que por las propiedades de la relación de identidad $\equiv$ la interpretación de a en A, $a^{\mathfrak{A}}$, es única. Notar también que $\forall j \in \aleph_0$ si $c_j \in C$, entonces $c_j^{\mathfrak{A}} = [c_j]$, pues $c_j \equiv c_j \in K_\omega$.

(3) Si $c_1, \ldots, c_n$ son constantes de C y f es un símbolo funcional n-ario de $\mathcal{L}'_1$ entonces,

$$f^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c_i],$$

para alguna constante $c_i \in C$ tal que $(f(c_1, \ldots, c_n) \equiv c_i) \in K_\omega$. Como en el caso anterior tal constante c_i existe pues $\exists x(f(c_1, \ldots, c_n) \equiv x) \in K_\omega$ y C

es un conjuntos de testigos para K_ω. Notar también que por las propiedades de la relación de identidad está garantizada la unicidad de la imagen en A de $f^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n])$.

Con esto termina la definición de la estructura $\mathfrak{A}$ que es un modelo de la teoría K_ω.

Sea una esructura $\mathfrak{B}$ para $\mathcal{L}'_2$ que es un modelo para H_ω que se construye de manera análoga a la estructura $\mathfrak{A}$ para $\mathcal{L}'_1$.

Los universos de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son los siguientes (por construcción):

$$A = \{[c_n] : c_n \in C\},$$

$$B = \{[c_n]' : c_n \in C\}.$$

Como $K_\omega \cap H_\omega$ es una teoría maximal consistente en $\mathcal{L}'_0$ (Proposición ♠) pues K_ω y H_ω son inseparables (Proposición ♣), se cumple que $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}'_0$ y $\mathfrak{B} \upharpoonright \mathcal{L}'_0$ son isomorfas. Donde $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathcal{L}'_0$ es la estructura para $\mathcal{L}'_0$ que tiene el mismo universo de $\mathfrak{A}$ y preserva la misma interpretación de $\mathfrak{A}$ para los símbolos de $\mathcal{L}'_0$, y $\mathfrak{B} \upharpoonright \mathcal{L}'_0$ es la estructura para $\mathcal{L}'_0$ que tiene el mismo universo de $\mathfrak{B}$ y preserva la misma interpretación de $\mathfrak{B}$ para los símbolos de $\mathcal{L}'_0$. En efecto: Sea $f : A \longrightarrow B$ una función de A en B definida así: $f([c_n]) = [c_n]'$. Claramente f es sobreyectiva, y f es inyectiva porque $K_\omega \cap H_\omega$ es una teoría maximal consistente en $\mathcal{L}'_0$. Por lo tanto f es una función biyectiva. Se demostrará que f preserva las funciones, relaciones y constantes corrrespondientes a $\mathcal{L}'_0$:

Sea R un símbolo de relación n-ario de $\mathcal{L}'_0$. Hay que probar que:

$$R^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}([c_1]', \ldots, [c_n]').$$

$R^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) \Leftrightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \in K_\omega$ (por definición) $\Leftrightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \in H_\omega$ (porque $K_\omega \cap H_\omega$ es maximal consistente) $\Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}([c_1]', \ldots, [c_n]')$ (por definición).

Sea g un símbolo de función n-ario de $\mathcal{L}'_0$. Hay que probar que:

$$f(g^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n])) = g^{\mathfrak{B}}(f([c_1]), \ldots, f([c_n])).$$

$g^{\mathfrak{B}}(f([c_1]), \ldots, f([c_n])) = g^{\mathfrak{B}}([c_1]', \ldots, [c_n]')$ (por definición de f)$= [c_i]'$ (por definición, donde $g(c_1, \ldots, c_n) \equiv c_i \in H_\omega$)$= f([c_i])$ (por definición de

$f)= f(g^{\mathfrak{A}}([c_1], \ldots, [c_n])$ (porque $g(c_1, \ldots, c_n) \equiv c_i \in K_\omega$ ya que $K_\omega \cap H_\omega$ es maximal consistente).

Sea c_i una constante de C: Entonces por definición $c_i^{\mathfrak{A}} = [c_i]$ y $c_i^{\mathfrak{B}} = [c_i]'$. En consecuencia $f(c_i^{\mathfrak{A}})= f([c_i])= [c_i]' = c_i^{\mathfrak{B}}$.

Sea a una constante de $\mathcal{L}'_0$ que no está en C. Entonces existe un $j \in \aleph_0$ tal que $c_j \in C$ y $a \equiv c_j \in K_\omega$. Luego, también $a \equiv c_j \in H_\omega$ pues $K_\omega \cap H_\omega$ es maximal consistente. En consecuencia, por definición, $a^{\mathfrak{A}} = [c_j]$ y $a^{\mathfrak{B}} = [c_j]'$. En conclusión $f(a^{\mathfrak{A}})=a^{\mathfrak{B}}$. Con esto termina la demostración de que $\mathfrak{A} \restriction \mathcal{L}'_0$ y $\mathfrak{B} \restriction \mathcal{L}'_0$ son isomorfas. Entonces podemos considerar que $A = B$, es decir, que $\forall n \in \aleph_0([c_n] = [c_n]')$. Sea D un conjunto equipotente a B y $h : B \longrightarrow D$ una función biyectiva de B en D. Entonces se construye una extensión de la estructura $\mathfrak{B}$ al lenguaje $\mathcal{L}'$ de la manera usual (teniendo presente la definición de estructuras isomorfas), es decir, se construye de la manera natural una estructura $\mathfrak{D}$ para $\mathcal{L}'$ tal que $\mathfrak{D} \restriction \mathcal{L}'_2$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas, y $\mathfrak{D} \restriction \mathcal{L}'_1$ y $\mathfrak{A}$ son isomorfas. En consecuencia $\mathfrak{D}$ es un modelo de $T_\omega \cup H_\omega$. Y como $\chi \in K_\omega$ y $\neg\zeta \in H\omega$ entonces $\mathfrak{D}$ es un modelo de $\chi \wedge \neg\zeta$. Lo que se quería demostrar. Con esto terminará la prueba del Teorema de Interpolación para la Lógica de Primer Orden. $\square$

4.4 Algunas consecuencias del Teorema de Interpolación

4.4.1 El Teorema de Definibilidad de Beth (1953)

Se demostrará el Teorema de Definibilidad de Beth [Beth], el cual relaciona "definibilidad implícita" (semántica) con "definibilidad explícita" (sintáctica), a partir del Teorema de Interpolación de Craig siguiendo a [[Ch-K], pp. 90-91]. Algunas definiciones previas para formular y demostrar dicho teorema son las siguientes:

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Y Q y Q' dos nuevos símbolos de relación n-ários que no están en $\mathcal{L}$. Sea $\Gamma(Q)$ un conjunto de sentencias del lenguaje $\mathcal{L} \cup \{Q\}$, y sea $\Gamma(Q')$ el correspondiente conjunto de sentencias formado a partir de $\Gamma(Q)$ reemplazando Q por Q' en todos los lugares donde aparece. Se dice que $\Gamma(Q)$ *define implícitamente* a Q si y sólo si:

$$\Gamma(Q) \cup \Gamma(Q') \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n [Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow Q'(x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

Equivalentemente: Si $(\mathfrak{C}, S)$ y $(\mathfrak{C}, S')$ son modelos de $\Gamma(Q)$, entonces $S = S'$. Donde $\mathfrak{C}$ es una estructura para $\mathcal{L}$ y S y S' son las interpretaciones de Q.

Se dice que $\Gamma(Q)$ *define explícitamente* a Q si y sólo si existe una fórmula $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ tal que se cumple:

$$\Gamma(Q) \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n [Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

Es obvio que si $\Gamma(Q)$ define a Q explícitamente, entonces también lo define implícitamente. El Teorema de definibilidad de Beth afirma que la dirección inversa también ocurre, es decir, que definición implícita implica definición explícita.

Teorema 4.4.1.1 (Teorema de definibilidad de Beth, 1953). $\Gamma(Q)$ *define a* Q *implícitamente si y sólo si* $\Gamma(Q)$ *define a* Q *explícitamente.*

Demostración:

La dirección $\Leftarrow$ es inmediata. Se probará la dirección $\Rightarrow$.

Supóngase que $\Gamma(Q)$ define a Q implícitamente. Se adicionan nuevas constantes $d_1, d_2, \ldots, d_n$ al lenguaje $\mathcal{L}$. Entonces:

$$\Gamma(Q) \cup \Gamma(Q') \models Q(d_1, d_2, \ldots, d_n) \rightarrow Q'(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Por el Teorema de Compacidad, existen subconjuntos finitos $\Phi_0 \subseteq \Gamma(Q)$ y $\Phi_1 \subseteq \Gamma(Q')$ tal que,

$$\Phi_0 \cup \Phi_1 \models Q(d_1, d_2, \ldots, d_n) \rightarrow Q'(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Sea $\varphi(Q)$ la conjunción de todas las $\gamma(Q) \in \Gamma(Q)$ tal que $\gamma(Q) \in \Phi_0$ o $\gamma(Q') \in \Phi_1$. Sea $\varphi(Q')$ la sentencia conjuntiva obtenida a partir de $\varphi(Q)$ sustituyendo Q por Q'. Entonces:

$$\varphi(Q) \wedge \varphi(Q') \models Q(d_1, d_2, \ldots, d_n) \rightarrow Q'(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Reordenando el símbolo Q de un lado y el símbolo de Q' de otro lado se tiene que:

$$\varphi(Q) \wedge Q(d_1, d_2, \ldots, d_n) \models \varphi(Q') \rightarrow Q'(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Entonces, por el Teorema de Interpolación de Craig, existe una sentencia $\lambda(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de $\mathcal{L} \cup \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ tal que:

$$\text{(i) } \varphi(Q) \wedge Q(d_1, d_2, \ldots, d_n) \models \lambda(d_1, d_2, \ldots, d_n),$$

$$\text{(ii) } \lambda(d_1, d_2, \ldots, d_n) \models \varphi(Q') \rightarrow Q'(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Como cualquier modelo $(\mathfrak{D}, S')$ para $\mathcal{L} \cup \{Q', d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ es también un modelo para $\mathcal{L} \cup \{Q, d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ interpretando Q por S', se cumple que (ii) implica:

$$\text{(iii) } \lambda(d_1, d_2, \ldots, d_n) \models \varphi(Q) \rightarrow Q(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

En consecuencia, por (i) y (iii) se tiene que:

$$\varphi(Q) \models Q(d_1, d_2, \ldots, d_n) \leftrightarrow \lambda(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Como las nuevas constantes $d_1, d_2, \ldots, d_n$ no ocurren en $\varphi(Q)$ (el cual se construyó a partir de $\Gamma(Q)$) se tiene que:

$$\varphi(Q) \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n [Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

donde las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no ocurren en $\lambda(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Por lo tanto,

$$\Gamma(Q) \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n [Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

Es decir, $\Gamma(Q)$ define a Q explícitamente. Lo que se quería demostrar. $\square$

4.4.2 El Teorema de consistencia de Robinson (1956)

Se probará el Teorema de Consistencia de Robinson [Rob2] a partir del Teorema de Interpolación de Craig siguiendo a [[Ch-K], pp. 91], también se puede probar que el Teorema de consistencia de Robinson implica al Teorema de Interpolación de Craig, es decir ambos resutados son equivalentes [[Ch-K], pp. 95].

Si T_1 y T_2 son dos teorías consistentes, no necesariamente la unión de ambas teorías $T_1 \cup T_2$ es consistente, por ejemplo por el Teorema de incompletitud de Gödel (1931) existe una proposición indecidible ϑ de la Aritmética en primer orden (AP_1), es decir, $AP_1 \nvdash \vartheta$ y $AP_1 \nvdash \neg\vartheta$. Entonces, $AP_1 \cup \{\vartheta\}$ y $AP_1 \cup \{\neg\vartheta\}$ son teorías consistentes. Sin ambargo la unión de ambas $AP_1 \cup \{\vartheta, \neg\vartheta\}$ es inconsistente. Algo análogo ocurre con la Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC) y la Hipótesis del continuo (HC): Por Gödel (1938) y Cohen (1963-64) se sabe que HC es independiente de ZFC, es decir, $ZFC \nvdash HC$ y $ZFC \nvdash \neg HC$, es decir, $ZFC \cup \{\neg HC\}$ y $ZFC \cup \{HC\}$ son teorías consistentes. Sin embargo, la unión de ambas $ZFC \cup \{\neg HC, HC\}$ es una teoría inconsistente. En los dos casos anteriores se cumple que las teorías iniciales AP_1 y ZFC son incompletas, y esto puede sugerir que si no ocurriera esto (la incompletitud) con la teoría inicial puede garantizarse que la unión de las dos teorías (que contienen la inicial) sea consistente. Esto es lo que afirma el Teorema de consistencia de Robinson, que la unión de dos Teorías consistentes será consistente si ellas están contenidas en una misma teoría completa (la definición de "teoría completa" está en la página 52).

Teorema 4.4.2.1. *Sean $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$ dos lenguajes y sea $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$. Supóngase que K es una teoría completa en $\mathcal{J}$, y $K_1 \supseteq K$ y $K_2 \supseteq K$ son dos teorías consistentes en $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$, respectivamente. Entonces $K_1 \cup K_2$ es una teoría consistente en $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$.*

Demostración :

(Por reducción al absurdo) Supóngase que $K_1 \cup K_2$ es inconsistente. Entonces existen subconjuntos finitos $\Gamma_1 \subseteq K_1$ y $\Gamma_2 \subseteq K_2$ tal que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es inconsistente. Sea γ_1 la conjunción de las sentencias de Γ_1 y γ_2 la conjunción de la sentencias de Γ_2. Se cumple que $\gamma_1 \models \neg\gamma_2$. Por el Teorema de Interpolación de Craig existe una sentencia λ tal que $\gamma_1 \models \lambda$ y $\lambda \models \neg\gamma_2$, y cualquier símbolo de relación, función o constante que ocurre en λ ocurre en γ_1 y γ_2 (en ambas). λ es una sentencia de $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$. Considerando a K_1 se tiene que $K_1 \models \lambda$ y dado que K_1 es consistente se cumple que $K_1 \not\models \neg\lambda$. Entonces como $K \subseteq K_1$ se tiene que $K \not\models \neg\lambda$. Sin embargo, considerando a K_2 se cumple que $K_2 \models \neg\lambda$, y por la consistencia de K_2 se infiere que $K_2 \not\models \lambda$. Por lo tanto, como $K \subseteq K_2$ se tiene que $K \not\models \lambda$. Esto contradice la hipótesis de K es completa. Fin de la demostración. $\square$

4.5 Algunas generalizaciones del Teorema de Interpolación Craig a otros sistemas lógicos

La revisión de bibliográfía especializada sobre la Propiedad de interpolación Craig revela que tal tema es bastante amplio y profundo, (como se dijo antes) abarca Teoría de la demostración, Teoría de modelos abstracta , Ciencias de la Computación, Lógica Modal, Lógica Intuicionista, Lógica de la relevancia, Filosofía de la Ciencia, etc. Por ejemplo se ha investigado si dicha propiedad la cumplen otros sistemas lógicos, y entre los resultados obtenidos se encuentran los siguientes según [Hoo], [F], [Va1], [Ga-Mak]:

Antes de enunciar dichos resultados se presentarán dos maneras de formular la Propiedad de Interpolación Craig que exiten (entre otras) en la bibliografía especializada: La *Propiedad de interpolación Craig* ($PIC^{\rightarrow}$), también llamada *Propiedad de interpolación local o Propiedad de interpolación fuerte*, y $\models$-*Propiedad de Interpolación Craig* ($PIC^{\models}$), también llamada *Propiedad de interpolación global o Propiedad de interpolación débil*, ambas propiedades no son comparables, es decir, ninguna implica a la otra ($PIC^{\rightarrow} \not\Longrightarrow PIC^{\models}$ y $PIC^{\models} \not\Longrightarrow PIC^{\rightarrow}$), una prueba de ello puede encontrarse en [[Hoo], pp. 31]. Aunque bajo algunas condiciones (*Teorema de deducción local*) se cumple que $PIC^{\rightarrow} \Longrightarrow PIC^{\models}$ [[Hoo], pp. 30]:

$PIC^{\rightarrow}$: Sea L una lógica la cual tiene la implicación entre sus conectivas lógicas. Se dice que L tiene la *Propiedad de interpolación Craig*, o que $PIC^{\rightarrow}$ ocurre para ella, si para cualquier par de fórmulas χ y ζ del lenguaje de L tal que $\models_L \chi \rightarrow \zeta$, existe una fórmula *interpolante* en L. Es decir, existe una fórmula λ del lenguaje de L, con un lenguaje común a χ y ζ tal que:

$\models_L \chi \to \lambda$ y $\models_L \lambda \to \zeta$.

Observación: En el caso de que la lógica L no contenga fórmulas constantes las cuales denoten *verdad* y *falsedad*, la existencia de una interpolante para $\models_L \chi \to \zeta$ es requirida sólo en el caso de $\not\models \neg\chi$ y $\not\models \zeta$. Un ejemplo de una lógica con estas características es la lógica de primer orden sin identidad, esta lógica no tiene $PIC^{\to}$, pues por ejemplo no existe interpolante para $\models_L Q(x) \to (T(x) \leftrightarrow T(x))$. Sin embargo, el Teorema de interpolación ocurre para tal lógica si se agrega a la definición $PIC^{\to}$ la observación anterior.

$PIC^{\models}$: Sea L una lógica. Se dice que L tiene la $\models$ - *Propiedad de interpolación Craig*, o que $PIC^{\models}$ ocurre para ella, si para cualquier par de fórmulas χ y ζ del lenguaje de L tal que $\chi \models_L \zeta$, existe una fórmula *interpolante* en L. Es decir, existe una fórmula λ del lenguaje de L, con un lenguaje común a χ y ζ tal que: $\chi \models_L \lambda$ y $\lambda \models_L \zeta$. (Aplica para $PIC^{\models}$ la misma observación que para $PIC^{\to}$).

Notar que $PIC^{\to}$ depende de la noción de validez y $PIC^{\models}$ depende de la relación de consecuencia lógica.

En la bibliografía consultada se pueden encontrar varias tablas que resumen algunos resultados obtenidos, dichos resúmenes son con $PIC^{\to}$ y otros son con $PIC^{\models}$, y ellos tienen algunos resultados similares, se elige presentar aquí una parte de la tabla resumen que se encuentra en [[Hoo], pp. 40], la cual se hace considerando $PIC^{\to}$, tal elección se hace porque en tal resumen aparecen sistemas lógicos no clásicos, además de los clásicos, algo que no ocurre con otros resúmenes revisados:

Algunas logícas que cumplen $CIP^{\to}$:

1. Lógica proposicional. [[Hoo], pp. 40], (En este trabajo se probó que también cumple con $PIC^{\models}$).

2. Lógica de primer orden. (Craig, 1957. En este trabajo se probó que también cumple con $PIC^{\models}$).

3. $L_{\omega_1\omega}$: Lógica infinitaria que admite conjunciones y disyunciones numerables. (Lopez-Escobar, 1965). También cumple con $PIC^{\models}$, [Va1],

(Lopez-Escobar, 1965).

4. Lógica Modal proposicional T. (Gabbay, 1972). [[Hoo], pp. 40].

5. Lógica Modal proposicional S4. (Gabbay, 1972). [[Hoo], pp. 40].

6. Lógica Modal proposicional S5. (Schumm, 1976). [[Hoo], pp. 40].

7. Lógica Modal en primer orden T (sin la fórmula de Barcan). (Gabbay, 1972). [[Hoo], pp. 40].

8. Lógica Modal en primer orden S4 (sin la fórmula de Barcan). (Gabbay, 1972). [[Hoo], pp. 40].

9. Lógica intuicionista de predicados. (Sch$\ddot{u}$tte, 1962). [[Hoo], pp. 40]

Agunas lógicas que no cumplen $CIP^{\rightarrow}$:

1. Lógica de segundo orden. [F]. (Lopez-Escobar, Barwise).(Observación: La Lógica de segundo orden cumple con $PIC^{\models}$ [[Sha], pp. 163-164])

2. Lógicas con cuantificadores generalizados: $L(Q_\alpha)$, para todo ordinal $\alpha \geq \aleph_0$. $Q_\alpha xPx \iff \mid \{x : P(x)\} \mid \geq \aleph_\alpha$. [F]. (Lopez-Escobar, Barwise).

3. Lógicas infinitarias: $L_{\alpha\omega}$, para todo $\alpha > \omega_1$, o $\alpha = \infty$. ($L_{\alpha\omega}$ admite conjunciones y disyunciones de cardinal menor que α, y $L_{\infty\omega}$ admite conjunciones y disyunciones de cuaquier cardinalidad). (Malitz, 1971). [[Hoo], pp. 40]. También no cumple con $PIC^{\models}$, [Va1], (Malitz, 1971).

4. Lógica Modal S5 en primer orden. (Fine, 1979). [[Hoo], pp. 40].

5. Las lógicas con varios valores de verdad de Lukasiewuiz, para $n > 2$. (Krzystek y Zachorowski, 1977). [[Hoo], pp. 30].

6. Lógica de la Relavancia R. (Urquart, 1999). [[Hoo], pp. 40].

7. Entailment logic E. (Urquart, 1999). [[Hoo], pp. 40].

4.6 Una caracterización de la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$ usando interpolación en el contexto de la Teoría de modelos abstracta

Por los resultados presentados en la sección anterior se tiene que la lógica $L_{\omega_1\omega}$ satisface el Teorema de interpolación Craig (Lopez-Escobar, 1965). También se tiene que D. Scott y E. Engeler probaron (de manera independiente) que ($\star$) *Toda estructura numerable para un lenguaje numerable puede ser ser caracterizada, salvo isomorfismo, con una sentencia de* $L_{\omega_1\omega}$ [[Mak], pp. 17]. Después de eso Johann Makowsky probó en 1973 el siguiente teorema que carateriza a $L_{\omega_1\omega}$ con tal propiedad ($\star$) e Interpolación [[Mak], pp. 23], la caracteriza como la menor lógica (desde el punto de vista de la expresividad) que satisface la Propiedad de Interpolación de Craig y cumple con ($\star$):

Es importante destacar que la caracterización que se presentará supone los conceptos abstractos de "Sistema Lógico" o "Lógica abastracta", L, y de cuándo una lógica abstracta L' es "al menos más fuerte" que otra lógica abstracta L: $L \leq L'$. Estas nociones son fundamentales para desarrollar la Teoría de modelos abstracta. Tales conceptos no se definen en este trabajo por consideraciones de simplicidad. Basta decir al respecto que estos conceptos fueron formulados para modelar sistemas lógicos y relaciones entre ellos (que se han mencionado en este trabajo y otros que no). Por ejemplo son "Sistemas Lógicos" o "Lógicas abstractas" los siguientes: La lógica de primer orden, la lógica de segundo orden, las lógicas infinitarias, las lógicas con cuantificadores generalizados (Q_α), etc. Y por eso el enunciado que se presentará a continuación se puede entender intuitivamente pensando en dichas lógicas y en el poder expresivo de las mismas para la relación $\leq$. Una definición rigurosa de estos conceptos puede encontrarse en [[E-F-T], pp. 193-194] y [[Ch-K], pp. 128].

Teorema 4.6.1. *Sea L una lógica abstracta que satisface el Teorema de interpolación de Craig y además se cumple que toda estructura numerable para un lenguaje numerable puede ser ser caracterizada, salvo isomorfismo, con una sentencia de L. Entonces $L_{\omega_1\omega} \leq L$.*

Por lo dicho anteriormente vale la pena resaltar que el concepto de "Sistema Lógico" o "Lógica abastracta" requiere mínimo de todo ZFC, de modo que esta caraterización de $L_{\omega_1\omega}$ (la cual supone dicho concepto) es un resultado platonista matemático moderado en un grado fuerte, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

4.7 Algunos problemas abiertos en Teoría de modelos abstracta relacionados con la Propiedad de Interpolación

A continuación se presentan dos problemas abiertos que relacionan "lógicas abstractas", "cuantificadores generalizados", la "propiedad de interpolación" y la "Lógica de primer orden". El autor de este trabajo no tiene información de que hayan sido resueltos:

Problema abierto 1:(Feferman, Friedman y Shelah [[Va2], pp. 2]) *¿ Existe una lógica abstracta L que sea extensión propia de la Lógica de primer orden y que satisfaga las siguientes dos propiedades: (a) Compacidad numerable y (b) Interpolación Craig ?.*

(Una lógica abstracta L tiene la propiedad de *Compacidad numerable* si satisface el Teorema de Compacidad (Teorema 3.5.1.1 o Corolario 4.3.3) para todo conjunto numerable de sentencias $\Sigma \subseteq$ Lenguaje de L.)

Por ejemplo la lógica $L(Q_1)$ es numerablemente compacta [[F], pp. 18], [[E-F-T], pp. 142-143] y [[Ch-K], pp. 134]. Y sin embargo no satisface la Propiedad de Interpolación de Craig como aparece referido en el resumen de sistemas lógicos que no satisfacen la Propiedad de Interpolación expuesta anteriormente (subsección 4.5).

Problema abierto 2: ([[F], pp. 22]) *¿ Existe una lógica abstracta L que sea extensión propia de $L_{\omega\omega}$ y sea "razonable"?.*

Donde se ha sugerido que para que una lógica L sea "razonable" ella debe satisfacer Compacidad numerable y Δ-Interpolación (Interpolación $\rightarrow$ Δ-Interpolación $\rightarrow$ Propiedad de Beth), o al menos la Propiedad de Beth.

Por ejemplo la lógica $L(Q_1)$ es numerablemente compacta y sin embargo no satisface la Propiedad de Δ-Interpolación [[F], pp. 14].

Vale la pena resaltar (como se dijo en la caracterización de $L_{\omega_1\omega}$) que el concepto de "Sistema Lógico" o "Lógica abastracta" requiere mínimo de todo ZFC, de modo que estos problemas abiertos son platonistas matemáticos moderados en un grado fuerte, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Otros interesantes problemas abiertos sobre la Propiedad de Interpolación en el contexto de la Teoría de modelos abstracta pueden encontrarse en [F] y [Va2], entre otros.

4.8 Algunas consideraciones matemáticas, metamatemáticas y filosóficas sobre la Propiedad de interpolación de Craig

(1) Sobre la demostración del Teorema de interpolación para la Lógica proposicional:

La demostración que se realizó fue en ZF, pues (por ejemplo) se trabajó con los infinitos actuales (numerables): $\mathbb{N}$, $PROP$, "Asignación", "Valuación", etc. Por lo tanto dicho resultado es platonista, con un grado de platonismo que no es tan fuerte según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2). Sin embargo, según dicha escala el platonismo de ZF es más fuerte que el platonismo matemático moderado contructivo (Intuicionista). No obstante, como tal prueba proporciona un procedimiento efectivamente computable para construir una proposición λ Interpolación de χ y ζ, usando las letras proposicionales que están en χ y no están en ζ hasta eliminarlas todas sustituyéndolas por una tautología $(s \vee \neg s)$ o por una contradicción $(s \wedge \neg s)$ de una manera específica (utilizando disyunciones) para lograr construir la proposición interpolación, se puede considerar que dicho resultado es más genuinamente platonista matemático moderado constructivo, es decir, es Intuicionista. Por lo tanto, su grado de platonismo es el menor grado de platonismo matemático moderado en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (el platonismo matemático moderado constructivo (Intuicismo) quizá también admite gradaciones).

(2) Sobre la demostración del Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden:

La demostración realizada para la Lógica de primer orden no es constructiva ya que se demuestra la existencia de la sentencia λ Interpolación de χ y ζ por reducción al absurdo usando el Principio del tercero excluído y ZF (no se usa el Axioma de elección) sin ofrecer un procedimiento efectivo para calcularla. Por lo tanto la prueba es platonista, con un grado de platonismo que no es tan fuerte según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado. Es importante destacar que la técnica usada para dicha prueba (Henkin en 1963) es una generalización del método de construcción de modelos a partir de constantes de Henkin (1949) mediante la noción de “teorías inseparables”. El nuevo método de construcción de modelos resultante permite construir un modelo para la unión de dos teorías $K_0 \cup H_0$ en un lenguaje $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, las cuales son consistentes e inseparables, expandiéndolas simultáneamente (por inducción y en zigzag) a dos teorías K_ω y H_ω maximal consistentes e inseparables en un lenguaje extendido $\mathcal{L}_1 \cup C$ y $\mathcal{L}_2 \cup C$, respectivamente, donde C es un conjunto numerable de nuevos símbolos constantes que funciona como testigos para ambas. También se cumple (por la maximal consistencia e inseparabilidad) que la teoría $K_\omega \cap H_\omega$ es maximal consistente. El modelo buscado $\mathfrak{D}$ para $K_0 \cup H_0$ se construye aplicando el hecho de que $K_\omega \cap H_\omega$ es maximal consistente (o que K_ω y H_ω son inseparables) a dos modelos previos : Un modelo $\mathfrak{A}$ para K_ω y un modelo $\mathfrak{B}$ para H_ω que se construyen mediente el método de Henkin (1949).

(3) Sobre el Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden:

Si se considera que actualmente un modelo lógico-matemático de la matemática aceptado mundialmente por la comunidad lógico-matemática es ZFC [Mo1], como se dijo en la sección 2 de este trabajo, y que el lenguaje de tal sistema axiomático es de primer orden, y si considera también que ZFC es usado para estudiar los fundamentos de la matemática, entonces siendo la Propiedad de Interpolación Craig una propiedad de la lógica de primer orden, se puede concluir que el Teorema de Interpolación de Craig revela (en si mismo) un avance en el estudio de los fundamentos de la matemática, de la filosofía de la matemática.

(4) Sobre una consecuencia del Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden: El Teorema de definibilidad de Beth:

Se describe a continuación una aplicación del Teorema de definibilidad de Beth, y por lo tanto del Teorema de interpolación de Craig, para el estudio de los fundamentos de la matemática, de la filosofía de la matemática, especialmente para los estudios de la metamatemática contemporánea incluyendo la metamatemática platonista para cualquier grado de platonismo, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado. En pocas palabras se puede decir que el Teorema de definibilidad de Beth proporciona un método para probar independencia de términos primitivos en una teoría formal axiomatizada [[Ce], pp. 760-761]. Algunos ejemplos introductorios de aplicación de este método pueden encontrarse en el texto "Introducción a la Lógica Simbólica" de Suppes [[Sup], pp. 217-222].

En un sistema axiomático formal se puede hacer un paralelismo entre la dupla Axiomas-Teoremas y la dupla Términos primitivos-Términos definidos: Los Teoremas se deducen de los Axiomas y los Términos definidos se definen a partir de los Términos primitivos, en este sentido la noción de deducibilidad se corresponde con la noción de definibilidad. Entonces en un sistema axiomático formal riguroso debería de probarse independencia de los términos primitivos así como se prueba la independencia de los axiomas [[Ce], pp. 760-761]. En este orden de ideas, el Teorema de definibilidad de Beth, el cual se puede demostrar a partir del Teorema de interpolación de Craig como se hizo en este trabajo, ofrece un método para probar independencia de términos primitivos usando "definición implícita" (semántica) y "definición explícita" (sintaxis).

La idea es la siguiente (el ejemplo es del autor este trabajo):

Supóngase que se tiene un sistema axiomático en primer orden con diez axiomas $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, y cinco términos primitivos $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ que son símbolos relacionales con diferente aridad. Y supónase que se quiere probar que Q_5 es independiente del resto de los otros cuatro términos primitivos. Entonces es suficiente con demostrar, vía dos modelos, que los diez axiomas no definen implícitamente a Q_5, es decir, se debe demostrar que existen un par de estructuras para el lenguaje $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$, $(\mathfrak{C}, {Q_5}')$ y $(\mathfrak{C}, {Q_5}^{\circ})$ que son modelos de los diez axiomas $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, y que se cumple que ${Q_5}' \neq {Q_5}^{\circ}$, donde $\mathfrak{C}$ es una estructura para $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ y ${Q_5}'$ y ${Q_5}^{\circ}$ son las interpretaciones de Q_5 en dichas estructuras, respectivamente. Pues si se demuestra lo contrario, es decir, si se prueba que para cada par de modelos de los diez axiomas (con las propiedades de las estructuras anteriormente mencionadas) se cumple que ${Q_5}' = {Q_5}^{\circ}$, entonces esto quiere decir que los diez axiomas $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ definen implícitamente a Q_5, y aplicando el Teorema de definbilidad de Beth se tiene que existe una fórmula ϕ en lenguaje $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ tal que los diez axiomas definen explícitamente a Q_5. Entonces se pueden re-escribir los diez axiomas sustituyendo a Q_5 por la fórmula en el lenguaje restringido que lo define ϕ y se tendría otro sistema de diez axiomas equivalente al anterior (que tiene los mismos teoremas) pero que está escrito en el lenguaje restringido $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, es decir, no tiene a Q_5.

(5) Sobre otra consecuencia del Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden: El Teorema de consistencia de Robinson:

El Teorema de consistencia de Robinson (el cual es equivalente al Teorema de interpolación de Craig) ofrece un método para probar que la unión de dos teorías consistentes es consistente: Si T_1 y T_2 son dos teorías consistentes, no necesariamente la unión de ambas teorías $T_1 \cup T_2$ es consistente, será consistente si ellas están contenidas en una misma teoría completa. Al igual que el Teorema de definibilidad de Beth este teorema es importante para el estudio de los fundamentos de la matemática, de la filosofía de la matemática, especialmente para los estudios de la metamatemática contemporánea incluyendo la metamatemática platonista, para cualquier grado de platonismo, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Observación: El Teorema de Interpolación de Craig también proporciona un método para probar que $T_1 \cup T_2$ es consistente: Lo que hay que hacer (según dicho teorema) es probar que T_1 y T_2 son inseparables.

(6) Sobre algunas generalizaciones del Teorema de interpolación Craig a otros sistemas lógicos, Una caracterización de la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$ usando interpolación en el contexto de la Teoría de modelos abstracta, y algunos problemas abiertos en Teoría de modelos abstracta relacionados con la Propiedad de Interpolación:

La revisión de bibliográfía especializada sobre la Propiedad de interpolación de Craig revela que tal tema es bastante amplio y profundo, abarca Teoría de la demostración, Teoría de modelos abstracta, Ciencias de la Computación, Lógica Modal, Lógica Intuicionista, Lógica de la relevancia, Filosofía de la Ciencia, etc.

Por ejemplo un aspecto de la investigación es si dicha propiedad la cumplen otros sistemas lógicos (Lógicas infinitarias, lógicas con cuanificadores generalizados, lógica de segundo orden, lógicas no clásicas, etc), y se han obtenido resultados positivos y negativos al respecto. Ejemplos de investigaciones más abstractas sobre la propiedad de interpolación son las caracterizaciones de sistemas lógicos en el contexto de la teoría de modelos abstracta usando interpolación, y otros problemas abiertos de lógicas abstractas vinculados con la Propiedad de Interpolación.

Vale la pena resaltar que el concepto de “Sistema Lógico” o “Lógica abastracta” requiere mínimo de todo ZFC, de modo que Teoría de modelos abstracta es platonista matemática moderada en un grado fuerte, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

5 Una relación entre las Álgebras booleanas y los Ordenes parciales separativos

El objetivo principal de esta sección es presentar una demostración de que las cortaduras regulares de un orden parcial separativo forman un álgebra booleana completa. Tal resultado es muy conocido y existen pruebas del mismo, por ejemplo pruebas topológicas en [[Ku], pp. 63-64] y [[Ja], pp. 258-275] . Y una prueba de que los abiertos regulares de un espacio topológico forman un álgebra boolena, lo cual está estrechamente vinculado con este hecho, puede encontrarse también en [[Hal], pp. 12-16].

Sin embargo, el desrrollo de la prueba que se presentará aca es propio del autor de este trabajo y se basa en la demostración ofrecida por Jech en [[J1], pp. 81-83] y [[J3], pp. 152-154], por ejemplo usa las definiciones de las operaciones booleanas entre cortaduras regulares que se hace en [[J1], pp. 81-83] y [[J3], pp. 152-154]. En tales libros se formulan las definiciones y se enuncia el Teorema, pero no se hace explícito el porqué las mismas satisfacen las propiedades de álgebra booleana, Jech deja ese trabajo al lector, aquí se realiza una demostración de tal hecho usando ideas propias del autor de este trabajo.

El resultado de que a cada orden parcial separativo le corresponde una única (salvo isomorfismo) álgebra booleana completa se puede extender a todo orden parcial, y es conocido que el álgebra booleana completa de las cortaduras regulares de un orden parcial es isomorfa al álgebra booleana completa de los abiertos regulares de un espacio topológico inducido por tal orden parcial ([J1], [J3], [[Bel2], pp. 3-4], [Ku], [Ja], entre otros). Entre el orden parcial y su correspondiente álgebra booleana completa asociada existe una relación de "inmersión densa", dicha relación es importante desde el punto de vista matemático, metamatemático y filosófico (de la matemática) pues permite inferir (entre otros) que las dos versiones del forcing más usadas contemporáneamente, forcing con ordenes parciales y forcing con álgebras booleanas completas son equivalentes, es decir, producen los mismos modelos de ZFC [[Ku], pp. 221-222], [[J3], pp. 154-156].

Es conocido que el método de forcing de Cohen [Co1], [Co2] es de gran utilidad (desde su creación en 1963-64) para realizar pruebas metamatemáticas de Teoremas metamatemáticos (independencia o consistencia relativa) y también para realizar pruebas metamatemáticas de Teoremas matemáticos [Solovay]. En consecuencia, el método de forcing es importante para estudiar la propia matemática y también para estudiar los fundamentos de la matemática, la filosofía de la matemática. Por lo tanto el resultado matemático que se demostrará en esta sección también es valioso para los estudios de los fundamentos de la matemática y de la filosofía de la matemática, desde el punto de vista del platonismo matemático, porque el forcing es un método platonista matemático, en un grado fuerte de platonismo, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2). Es un método platonista matemático moderado fuerte porque el usa (mínimo) a ZFC. Abundantes ejemplos de la aplicación de dicho método en distintas versiones contemporáneas (con ordenes parciales o con álgebras booleanas) pueden encontrarse en los textos [Ku], [J1], [J3], [J4] y [Bel2]. En tales ejemplos se podrá apreciar que los ordenes parciales o las álgebras boolenas que se usan en la aplicación del forcing para resultados relevantes tienen cardinal mayor o igual que $\aleph_0$ y además son estructuras infinitas actuales complejas que requieren de todo ZFC para definirlas y para operar con las mismas.

El orden de exposición será el siguiente: En la siguiente subsección 5.1 se presentará la definición de álgebra booleana y se describirán algunos ejemplos clásicos. En la subsección 5.2 se definirá Orden parcial separativo y se descibirán algunos ejemplos clásicos. En la subsección 5.3 se definirán las operaciones booleanas para las cortaduras regulares de un orden parcial separativo y se demostrará que la estructura resultante es un álgebra booleana. Y en la última subsección 5.4 se presentarán algunas consideraciones matemáticas, metamatemáticas y filosóficas sobre el contenido de esta sección.

5.1 Definición de Álgebra booleana: Axiomas. Y algunos ejemplos clásicos.

Definición 5.1.1. *Un álgebra booleana es un conjunto B con al menos dos elementos, 0 y 1(cero y uno), dotado de dos operaciones binarias (suma)+ y (producto)* $\centerdot$*, y una operación unaria (complemento)*$'$*, las cuales satisfacen las siguientes propiedades (axiomas):*

$$(\textit{Leyes conmutativas})$$

$$a+b=b+a\ ,\ a\centerdot b=b\centerdot a$$

$$(\textit{Leyes asociativas})$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)\ ,\ (a\centerdot b)\centerdot c=a\centerdot(b\centerdot c)$$

$$(\textit{Leyes distributivas})$$

$$a\centerdot(b+c)=(a\centerdot b)+(a\centerdot c)\ ,\ a+(b\centerdot c)=(a+b)\centerdot(a+c)$$

$$(\textit{Leyes de idempotencia})$$

$$a+a=a\ ,\ a\centerdot a=a$$

$$(\textit{Leyes de absorción})$$

$$a\centerdot(a+b)=a\ ,\ a+(a\centerdot b)=a$$

$$(\textit{Leyes de identidad (elementos neutros y dominación)})$$

$$a+1=1\ ,\ a\centerdot 1=a$$

$$a+0=a\ ,\ a\centerdot 0=0$$

$$(\textit{Leyes de complemento})$$

$$a+(a')=1\ ,\ a\centerdot(a')=0$$

$$(a')'=a$$

$$(\textit{Leyes de De Morgan})$$
$$(a+b)' = a' \centerdot b' \ , \ (a \centerdot b)' = a' + b'$$

Denotaremos a tal álgebra booleana así: $\mathcal{B} = \langle B, +, \centerdot, ', 0, 1 \rangle$.

Por simplicidad consideraremos que $\mathcal{B} = B$, a menos que el contexto requiera distinguirlos.

El orden parcial de $\mathcal{B}$ se define así,

$$p \leq q \leftrightarrow p \centerdot q' = 0.$$

Si $a, b \in \mathcal{B}$, entonces: $a + b$ es el supremo de a y b, $a \centerdot b$ es el ínfimo de a y b, a' es el único $c \in \mathcal{B}$ tal que $a + c = 1$ y $a \centerdot c = 0$. También: $a \leq b \leftrightarrow a + b = b \leftrightarrow a \centerdot b = a$. Dos elementos a, b de $\mathcal{B}$ son incompatibles si y sólo si $a \centerdot b = 0$. $a - b = a \centerdot b'$. $D \subseteq \mathcal{B}$ es denso en $\mathcal{B}$ si $D \subseteq \mathcal{B} - \{0\}$ y D es denso en $\mathcal{B} - \{0\}$, es decir, si $\forall b \in \mathcal{B} - \{0\} \exists d \in D(d \leq b)$. $\mathcal{B}$ es completa si el supremo de S $(\sum S)$ y el ínfimo de S $(\prod S)$ existen en $\mathcal{B}$, para cualquier $S \subseteq \mathcal{B}$. Sea κ un cardinal regular no numerable. $\mathcal{B}$ es κ-completa si $\sum X$ y $\prod X$ existen en $\mathcal{B}$, para todo subconjunto X de $\mathcal{B}$ tal que $|X| < \kappa$. Si $\mathcal{B}$ es $\aleph_1$-completa se dice que $\mathcal{B}$ es σ-completa. Un *átomo* del álgebra boolena $\mathcal{B}$ es un $a \in \mathcal{B}$ tal que $a \neq 0$ y no hay ningún elemento $x \in \mathcal{B}$ que esté entre 0 y a, es decir, $0 \leq x \leq a$ y $x \neq 0$ y $x \neq a$. Se dice que $\mathcal{B}$ es *atómica* si para cada $z \in \mathcal{B}$, $z \neq 0$, existe un átomo $w \in \mathcal{B}$ tal que $w \leq z$.

ALGUNOS EJEMPLOS CLÁSICOS DE ÁLGEBRA BOOLEANAS:

(1) EL ÁLGEBRA BOOLEANA DE LINDENBAUM:

Se definirá el Álgebra de Lindembaum siguiendo (principalmente) los textos [D1], [Me] y [J1]. El procedimiento es el siguiente:

Es conocido que la lógica proposicional es axiomatizable y que existen varios sistemas axiomáticos para la misma, a continuación formulamos uno de ellos [D1]:

(ESQUEMAS DE AXIOMAS)

Los Axiomas lógicos son todas las fórmulas que tengan alguna de las formas siguientes:

(1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(2) $(\varphi \to (\psi \to \phi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \phi))$

(3) $(\neg\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \neg\psi) \to \varphi)$

REGLA DE INFERENCIA:

Modus Ponens: A partir de $\varphi \to \psi$ y φ podemos inferir ψ.

La relación de "deducibilidad" o "derivabilidad" en el sistema axiomático se define de manera análoga a como se hizo en una sección anterior de este trabajo (Sección 3: "La propiedad de Interpolación de Craig") para el caso de sistema axiomático para la lógica de primer orden, es decir:

Definición 5.1.2. *Sea $\Sigma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$. Se dice que φ se deduce de Σ o que φ se demuestra a partir de Σ, lo que se denota por,*

$$\Sigma \vdash \varphi,$$

si existe una sucesión finita $\psi_1, \ldots, \psi_n$ de fórmulas tales que $\psi_n = \varphi$, y cada ψ_i es un axioma, o es un miembro de Σ, o se obtiene de dos fórmulas anteriores en la sucesión por la regla de inferencia Modus Ponens.

Si $\Sigma = \emptyset$, entonces se escribe $\vdash \varphi$ en vez de $\emptyset \vdash \varphi$.

Teorema 5.1.3 (Teorema Completitud para la lógica proposicional). *Sea* $\Sigma \subseteq PROP$ *y* $\varphi \in PROP$*. Entonces:*

$$\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi.$$

Una prueba de este resultado se puede encuentrar en [D1], entre otros.

Ahora se define una relación de equivalencia en $PROP$ de la siguiente manera: $\chi \sim \sigma$ si y sólo si $\vdash \chi \leftrightarrow \sigma$. Existen procedimientos decidibles en la Lógica proposicional para determinar cuando una proposición es tautología o no: Tablas de verdad, Forma normal conjuntiva, Tablas (Árboles) semánticas, Resolución, etc. Entonces aplicando en Teorema de completitud se tiene que dados cualesquiera proposiciones χ y σ se puede determinar en un número finito de pasos si se cumple $\vdash \chi \leftrightarrow \sigma$ o no se cumple, es decir, se puede determinar en un número finito de pasos si cumple $\chi \sim \sigma$ o no se cumple. Esto significa que la relación $\sim$ es efectivamente calculable (computable). Se puede demostrar sin dificultad que la relación $\sim$ es reflexiva , simétrica y transitiva, por lo tanto ella es una relación de equivalencia, entonces se considera el conjunto cociente:

$$PROP/\sim = \{[p] : p \in PROP\}$$

Y se definine el *Álgebra de Lindenbaum* $\mathcal{C} = \langle C, +, \centerdot, ', 0, 1\rangle$ de la siguiente manera:

$$C = PROP/\sim$$

$$[\psi]' = [\neg\psi]$$

$$[\psi] \centerdot [\chi] = [\psi \wedge \chi]$$

$$[\psi] + [\chi] = [\psi \vee \chi]$$

$$0 = [\psi \wedge \neg\psi]$$

$$1 = [\psi \vee \neg\psi]$$

Teorema 5.1.4. *$\mathcal{C}$ es un álgebra booleana.*

Demostración: Por la definición de $\mathcal{C}$ es suficiente con demostrar que las siguientes proposiciones, correspondientes a las leyes del álgebra booleana, son tautologías, y entonces por el teorema de completitud son teoremas del sistema. La prueba de que ellas son tautologías se puede hacer sin dificultad:

$$(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \phi)\ ,\ (\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \phi)$$

$$((\phi \vee \psi) \vee \varphi) \leftrightarrow (\phi \vee (\psi \vee \varphi))\ ,\ ((\phi \wedge \psi) \wedge \varphi) \leftrightarrow (\phi \wedge (\psi \wedge \varphi))$$

$$((\phi \wedge (\psi \vee \varphi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \varphi))\ ,\ ((\phi \vee (\psi \wedge \varphi)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \varphi))$$

$$(\phi \vee \phi) \leftrightarrow \phi\ ,\ (\phi \wedge \phi) \leftrightarrow \phi$$

$$\phi \wedge (\phi \vee \varphi) \leftrightarrow \phi\ ,\ \phi \vee (\phi \wedge \varphi) \leftrightarrow \phi$$

$$\phi \vee (\varphi \vee (\neg\varphi)) \leftrightarrow (\varphi \vee (\neg\varphi))\ ,\ \phi \wedge (\varphi \vee (\neg\varphi)) \leftrightarrow \phi$$

$$(\phi \vee (\varphi \wedge (\neg\varphi))) \leftrightarrow \phi\ ,\ (\phi \wedge (\varphi \wedge (\neg\varphi))) \leftrightarrow (\varphi \wedge (\neg\varphi))$$

$$(\phi \vee (\neg\phi)) \leftrightarrow (\varphi \vee (\neg\varphi))\ ,\ (\phi \wedge (\neg\phi)) \leftrightarrow (\varphi \wedge (\neg\varphi))$$

$$(\neg(\neg\phi)) \leftrightarrow \phi$$

$$(\neg(\phi \vee \varphi)) \leftrightarrow ((\neg\phi) \wedge (\neg\varphi))\ ,\ (\neg(\phi \wedge \varphi)) \leftrightarrow ((\neg\phi) \vee (\neg\varphi)).\ \square$$

(2) EL ÁLGEBRA BOOLEANA DE LOS CONJUNTOS:

Definición 5.1.5. *Sea S un conjunto no vacío.*

1. *Un álgebra de conjuntos (o cuerpo de conjuntos) sobre S es una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de S, con las siguientes propiedades:*
   (a) $S \in \mathcal{F}$
   (b) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $S - A \in \mathcal{F}$.
   (c) Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{F}$ y $A \cap B \in \mathcal{F}$.

   El conjunto $S - A$ se llama el complemento de A y se denota por A^c.

2. *Si además de (a),(b) y (c) $\mathcal{F}$ satisface (d) se dice que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de conjuntos sobre S:*

$$(d)\, Si\, \{A_i : i \in \aleph_0\} \subseteq \mathcal{F} \;\; entonces \bigcup_{i\in\aleph_{,}} A_i \in \mathcal{F} \;\;\; y \bigcap_{i\in\aleph_0} A_i \in \mathcal{F}.$$

3. *Sea $Z \subseteq P(S)$. $\sigma(Z) = \bigcap\{\mathcal{F} : Z \subseteq \mathcal{F} \,\wedge\, \mathcal{F}\, es\, \sigma -\, álgebra\}.\, \sigma(Z)$ es la menor σ-álgebra de conjuntos sobre S que contiene a Z.*

Teorema 5.1.6. *El álgebra de conjuntos (o cuerpo de conjuntos) $\langle \mathcal{F}, \cup, \cap, ^c, \emptyset, S\rangle$ es un álgebra booleana.*

Demostración: Es suficiente con demostrar de manera general las leyes booleanas sobre los conjuntos, lo cual se hace sin dificultad (por ejemplo, los digramas de Venn o de Venn-Euler son un método de prueba muy útil para algunos de estos casos), a continuación se listan las mismas:

$$A \cup B = B \cup A \;,\; A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \;,\; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \;,\; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup A = A \;,\; A \cap A = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A \;,\; A \cup (A \cap B) = A$$

En las siguientes leyes U denota el conjunto universal que se este considerando, en el caso de la definición escrita arriba U es el conjunto S

$$A \cup U = U \;,\; A \cap U = A$$

$$A \cup \emptyset = A \;,\; A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup A^c = U \;,\; A \cap A^c = \emptyset$$

$$(A^c)^c = A$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \;,\; (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \;\square$$

También ocurre la dirección inversa al teorema anterior, es decir, que toda álgebra booleana es un álgebra de conjuntos (o cuerpo de conjuntos), en rigor, se cumple el **Teorema de Representación de Stone (1936):** *Toda álgebra booleana es isomorfa a un álgebra de conjuntos* . Una prueba del mismo puede encontrarse en [[J1], pp. 81], entre otros. Es importante destacar que la prueba de dicho teorema requiere de la existencia de ultrafiltros (al igual que el método de construcción de modelos llamado ultraproductos, sección 3 de este trabajo), por lo tanto necesita del Lema de Zorn, y todo ZFC, en consecuencia es un resultado platonista matemático, en un grado fuerte, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

En el ejemplo anterior, un caso bastante usado es cuando $\mathcal{F} = P(S)$. Es decir, el álgebra de conjuntos:

$$\langle P(S), \cup, \cap, ^c, \emptyset, S\rangle.$$

Sea S un conjunto con al menos dos elementos. Entonces el álgebra booleana $\langle P(S), \cup, \cap, ^c, \emptyset, S\rangle$ es atómica. Los átomos son precisamente todos los subcojuntos unitarios $\{x\}$ de S. Una álgebra booleana que no es atómica es [Pe]:

$$\langle J([0,1]), \cup, \cap, ^c, \emptyset, [0,1)\rangle,$$

donde $[0,1]$ es el intervalo cerrado de los números reales de extremos cero y uno, es decir, $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $J([0,1])$ es el conjunto de todas las uniones finitas de intervalos cerrados-abiertos $[a,b)$, con $a \leq b$, incluídos en $[0,1]$, $\cup$ es la unión conjuntista usual, $\cap$ es la intersección conjuntista usual, y la operación ^{c} no es el complemento (relativo) usual de los conjuntos, el complemento de un $[a_1,b_1) \cup [a_2,b_2), \cup [a_3,b_3) \cup \ldots \cup [a_k,b_k) \in J([0,1])$, $([a_1,b_1) \cup [a_2,b_2) \cup [a_3,b_3) \ldots \cup [a_k,b_k))^c$, es el conjunto diferencia $[0,1) \setminus$ *Unión finita de intervalos cerrados-abiertos*, es decir, es la unión finita de intervalos cerrados abiertos complementarios de la unión anterior, tal conjunto es: $[0,a_1) \cup [b_1,a_2) \cup [b_2,a_3) \cup \ldots \cup [b_k,1)$. Es claro que cada $x \in J([0,1])$ cumple que $x \cap x^c = \emptyset$, y $x \cup x^c = [0,1)$. Es decir: $([a_1,b_1) \cup [a_2,b_2) \cup [a_3,b_3) \ldots \cup [a_k,b_k)) \cap ([0,a_1) \cup [b_1,a_2) \cup ([b_2,a_3) \cup \ldots \cup [b_k,1)) = \emptyset$, y que $([a_1,b_1) \cup [a_2,b_2) \cup [a_3,b_3) \ldots \cup [a_k,b_k)) \cup ([0,a_1) \cup [b_1,a_2) \cup ([b_2,a_3) \cup \ldots \cup [b_k,1)) = [0,1)$.

Vale la pena resaltar que dos ejemplos de álgebra booleana de conjuntos muy usados en matemáticas son la "σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue" y la "σ-álgebra de los conjuntos borelianos de un espacio topológico", la definición de la "σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue" puede encontrarse (entre otros) en los textos [Bet], [Roy], [J1] y [D-U], y la definición de la "σ-álgebra de los conjuntos borelianos de un espacio topológico" se define a continuación siguiendo los textos [Bet], [Roy], [D-U] y [J1].

Definición 5.1.7. *Un espacio topológico es un par $(Y, \mathcal{T})$ donde Y es un conjunto no vacío, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ y se cumple (a), (b) y (c):*

(a) $Y \in \mathcal{T}$, $\emptyset \in \mathcal{T}$

(b) Si $O_1 \in \mathcal{T}$ *y* $O_2 \in \mathcal{T}$, *entonces,* $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

(c) Si $Z \subseteq \mathcal{T}$, *entonces,* $\cup Z \in \mathcal{T}$.

Se dice que $\mathcal{T}$ es una topología para Y. Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman abiertos. $Z \subseteq Y$ es cerrado $\leftrightarrow Y - Z$ es abierto. Sea $W \subseteq Y$. El interior de W, W°, es el mayor subconjunto abierto de Y que esta contenido en W. La clausura de $W, \overline{W}$, es el menor subconjunto cerrado de Y que contiene a W.

Definición 5.1.8. *Sea $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico. σ(Abiertos de Y) es la σ-álgebra de Borel de Y (o los conjuntos Borelianos de Y). σ(Abiertos de Y) se suele denotar por $\mathcal{B}(Y)$.*

5.2 Definición de Orden parcial separativo y algunos ejemplos clásicos

Definición 5.2.1.

1. *Sea $(P, \leq)$ un orden parcial y $p, q \in P$. Se dice que p y q son compatibles si existe un $r \in P(r \leq p \wedge r \leq q)$. Y se dice que p y q son incompatibles si no existe un $r \in P(r \leq p \wedge r \leq q)$.*

2. *Un orden parcial $(P, \leq)$ es separativo si para todo $p, q \in P$ (Si $p \not\leq q$, entonces existe $r \leq p$ tal que r es incompatible con q).*

ALGUNOS EJEMPLOS DE ORDENES PARCIALES SEPARATIVOS (Y UNO QUE NO LO ES):

(1) El orden parcial (simple con mayor elemento) de Cohen $(\mathsf{C}, \leq, \mathsf{1})$ se define como sigue:

- $\mathsf{C} = \{p : p \text{ es función} \wedge |p| < \aleph_0 \wedge \mathrm{dom}(p) \subseteq \aleph_0 \wedge \mathrm{ran}(p) \subseteq \aleph_0\}$
- $p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p$
- $1 = \emptyset$.

Este orden parcial es separativo.

(Tal orden parcial aparece referido en relación con el método de forcing en [J4], [FG2] y [FG3], entre otros.)

(2) Sea $A = \{1, 2\}$. El orden parcial $\langle P(A), \subseteq \rangle$ no es separativo, pues $P(A)$ tiene dos átomos, $\{1\}$ y $\{2\}$, y el conjunto vacío está incluído en todo conjunto.

(3) Sea $\alpha \geq \aleph_0$ un ordinal. C_α es un orden parcial de Cohen que se define como sigue:

$$\mathsf{C}_\alpha = \{p :| \, p \, |< \aleph_0 \ \wedge \ dom(p) \subseteq \alpha \times \aleph_0 \ \wedge rango(p) \subseteq 2\},$$

$$p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p.$$

Este orden parcial es separativo.

(Tal orden parcial aparece referido en ralación con el método de forcing en [J4], [FG2] y [FG3], entre otros.)

(4) El orden parcial (con mayor elemento) de Sacks $(\mathsf{S_a}, \leq, 1)$ se define así,

- $\mathsf{S_a} = \{p : p \text{ es subárbol perfecto y no vacío del árbol binario completo}\}$.

- $p \leq q \leftrightarrow p \subseteq q$
- 1= El árbol binario completo.

Este orden parcial es separativo.

Donde el par $(T, \leq)$ es un árbol si y sólo si $(T, \leq)$ es un orden parcial y para cada $x \in T$ el par $(\{y \in T : y < x\}, <)$ es un buen orden estricto (Un conjunto parcialmente ordenado por $<$ es un buen orden estricto si cada subcojunto distinto de vacío de dicho conjunto tiene un menor elemento según $<$, y además se cumple que para cada x, $x \not< x$.). Los elementos de T se llaman nodos. Un subárbol de T es un subconjunto $T^{'} \subseteq T$ con el orden inducido tal que, $\forall x \in T^{'} \forall y \in T(y < x \rightarrow y \in T^{'})$. El álbol binario completo es el orden parcial $(2^{<\aleph_0}, \leq)$ constituído por todas las sucesiones finitas de ceros y unos, ordenadas por la relación de extensión. Es decir, $2^{<\aleph_0} = \bigcup\{2^n : n \in \aleph_0\}$ y $s \leq t$ si y sólo si $s \subseteq t$ si y sólo si t extiende a s. $(2^{<\omega}, \leq)$ se denomina el árbol binario completo de altura $\aleph_0$. Si $s \in 2^{<\aleph_0}$ tal que $dom(s) = n$ y $i = 0$ o $i = 1$, entonces $s^\wedge i = s \cup \{(n, i)\}$. Sea p un subárbol del árbol binario completo. El conjunto de las ramas de p, $[p]$, es $\{f \in 2^{\aleph_0} : \forall n(f \upharpoonright n \in p)\}$. Por ejemplo, $[2^{<\aleph_0}] = 2^{\aleph_0}$. p es *perfecto* si y sólo si $\forall s \in p \exists t \supseteq s$ tal que $t^\wedge 0 \in p$ y $t^\wedge 1 \in p$.

(Tal orden parcial aparece referido en relación con el método de forcing en [J4], [FG2] y [FG3], entre otros.)

5.3 Todo orden parcial separativo se puede extender a una única álgebra booleana completa

A continuación se define el álgebra booleana completa de las cortaduras regulares de un orden parcial separativo siguiendo a [J1] y [J3]: Sea $(P, \leq)$ un orden parcial separativo. Un subconjunto $W \subseteq P$ es una *cortadura* en P si W es cerrado hacia bajo, es decir, si para todo $p, q \in P$ (Si $p \leq q$ y $q \in W$, entonces $p \in W$). Notar que esta definición de cortadura se parece a la definición de cortadura que usó Dedekind para definir los números reales a partir de los números racionales ([D2], [E2], entre otros). Para cualquier $p \in P$, sea $W_p = \{x : x \leq p\}$. Por la definición de W_p y la definición de cortadura se tiene que W_p es una cortadura en P. Una cortadura W en P es *regular* si para todo $p \in P$ (Si $p \notin W$, entonces existe $q \leq p$ tal que $W_q \cap W = \emptyset$). Como P es separativo se cumple que W_p es regular, para todo $p \in P$. Sea D el conjunto de todas las cortaduras regulares en P. Si W es una cortadura en P se define $\overline{W} = \{p : (\forall q \leq p) W \cap W_q \neq \emptyset\}$. Se cumple (por definición) que $\overline{W}$ es una cortadura regular y además que es la menor (con respecto a la inclusión $\subseteq$) cortadura regular que contiene a W, esto se puede probar sin dificultad usando reducción al absurdo. Entonces se define para todo $X, Y \in D$ las siguientes tres operaciones:

$$X \centerdot Y = X \cap Y$$

$$X + Y = \overline{X \cup Y}$$

$$X' = \{p : W_p \cap X = \emptyset\}$$

$$0 = \emptyset$$

$$1 = P$$

Sea $\mathcal{D} = \langle D, +, \centerdot, ', 0, 1\rangle$.

Teorema 5.3.1. *$\mathcal{D}$ es un álgebra booleana completa (El álgebra booleana de las cortaduras regulares en P).*

Demostración: (1.1) $A + B = B + A$: $\overline{A \cup B} = \overline{B \cup A}$ se cumple porque $A \cup B = B \cup A$ es una ley del álgebra boolena de conjuntos. (1.2) $A \centerdot B = B \centerdot B$: Se cumple porque $A \cap B = B \cap A$ es una ley del álgebra booleana de los conjuntos. (2.1) $(A+B)+C = A+(B+C)$: (i) Desarrollando la definición del lado izquierdo de la igualdad (2.1) se tiene lo siguiente:

$$\underbrace{\overline{\overline{A \cup B} \cup C}}_{\clubsuit} = \{p : \forall q \leq p((\overline{A \cup B} \cup C) \cap W_q \neq \emptyset)\}$$

$$= \{p : \forall q \leq p(\overline{A \cup B} \cap W_q \cup C \cap W_q \neq \emptyset)\}$$

Y también que:

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \{s : \forall r \leq s((A \cup B) \cap W_r \neq \emptyset)\}\\ &= \{s : \forall r \leq s(A \cap W_r \cup B \cap W_r \neq \emptyset)\}\end{aligned}$$

$$\overline{A \cup B} \cap W_q = \{s : \forall r \leq s(A \cap W_r \cup B \cap W_r \neq \emptyset)\} \cap W_q$$

(ii) Desarrollando la definición del lado derecho de la igualdad (2.1) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\underbrace{\overline{A \cup \overline{B \cup C}}}_{\spadesuit} &= \{p : \forall q \leq p((A \cup \overline{B \cup C}) \cap W_q \neq \emptyset)\}\\ &= \{p : \forall q \leq p((A \cap W_q \cup \overline{B \cup C} \cap W_q \neq \emptyset)\}\end{aligned}$$

Y también que:

$$\begin{aligned}\overline{B \cup C} &= \{s : \forall r \leq s((B \cup C) \cap W_r \neq \emptyset)\}\\ &= \{s : \forall r \leq s(B \cap W_r \cup C \cap W_r \neq \emptyset)\}\end{aligned}$$

$$\overline{B \cup C} \cap W_q = \{s : \forall r \leq s(B \cap W_r \cup C \cap W_r \neq \emptyset)\} \cap W_q$$

Hecho 5.3.2. *1. $p \in \clubsuit \Leftrightarrow$ Para todo $q \leq p(W_q \cap A \neq \emptyset \vee W_q \cap B \neq \emptyset \vee W_q \cap C \neq \emptyset)$.*

2. $p \in \spadesuit \Leftrightarrow$ Para todo $q \leq p(W_q \cap A \neq \emptyset \vee W_q \cap B \neq \emptyset \vee W_q \cap C \neq \emptyset)$.

Demostración del hecho: (1) ($\Rightarrow$): (Por reducción al absurdo) Sea $p \in \clubsuit$ y supongamos que existe un $q \leq p(W_q \cap A = \emptyset \wedge W_q \cap B = \emptyset \wedge W_q \cap C = \emptyset)$. Entonces $p \notin \clubsuit$, por la definición de $\clubsuit$ desarrollada en (i). Contradicción con la hipótesis: $p \in \clubsuit$. ($\Leftarrow$): Se debe probar que $p \in \clubsuit$. Sea $q \leq p$. Considerando la definición de $\clubsuit$ desarrollada en (i) hay que probar que $\overline{A \cup B} \cap W_q \cup C \cap W_q \neq \emptyset$. Esto se hace directamente por casos: Caso 1: $W_q \cap C \neq \emptyset$. Caso 2: $W_q \cap B \neq \emptyset$. Caso 3: $W_q \cap A \neq \emptyset$. Se puede apreciar claramente, por la definición de $\clubsuit$ desarrollada en (i), que en cada caso se cumple $\overline{A \cup B} \cap W_q \cup C \cap W_q \neq \emptyset$. Por lo tanto $p \in \clubsuit$. Fin de la demostración. De manera análoga se demuestra, considerando la definición desarrollada en (ii), la cláusula (2) del hecho, tanto la dirección ($\Rightarrow$) como la dirección ($\Leftarrow$). Fin de la prueba del hecho.

Considerando el hecho anterior se tiene que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$ y que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$, por lo tanto, $\clubsuit = \spadesuit$. Lo que se quería demostrar.

(2.2) $(A \mathbf{.} B) \mathbf{.} C = A \mathbf{.} (B \mathbf{.} C)$: Se cumple porque $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ es una ley del álgebra booleana de conjuntos.

(3.1) $A \mathbf{.} (B + C) = (A \mathbf{.} B) + (A \mathbf{.} C)$: $A \cap \overline{B \cup C} = \overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)}$.
(i) Desarrollando el lado izquierdo de igualdad (3.1) se tiene que:

$$\underbrace{A \cap \overline{B \cup C}}_{\clubsuit} = A \cap \{p : \forall q \leq p((B \cup C) \cap W_q \neq \emptyset)\}$$

$$= A \cap \{p : \forall q \leq p((B \cap W_q) \cup (C \cap W_q) \neq \emptyset)\}$$

(ii) Desarrollando el lado derecho de la igualdad (3.1) se tiene que:

$$\underbrace{\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)}}_{\spadesuit} = \{p : \forall q \leq p([(A \cap B) \cup (A \cap C)] \cap W_q \neq \emptyset)\}$$

$$= \{p : \forall q \leq p([(A \cap B) \cap W_q \cup (A \cap C) \cap W_q] \neq \emptyset)\}$$

Ahora bien, es claro que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$ se cumple por el desarrollo expuesto en (i) y (ii). La prueba de que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$ usa el desarrollo (i) y (ii), reducción al absurdo y regularidad: Sea $p \in \spadesuit$ y supongase que $p \notin A$. Entonces como A es regular se tiene que existe un $q \leq p$ tal que $A \cap W_q = \emptyset$. Entonces $p \notin \spadesuit$. Contradicción, pues por hipótesis: $p \in \spadesuit$. Por lo tanto $p \in A$. Entonces considerando el desarrollo (i) y (ii) se concluye que $p \in \clubsuit$. En consecuencia $\spadesuit \subseteq \clubsuit$. Entonces $\clubsuit = \spadesuit$, lo que se quería probar.

(3.2) $A + (B \mathbf{.} C) = (A + B) \mathbf{.} (A + C)$: (i) Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad (3.2) se tiene que:

$$\underbrace{\overline{A \cup (B \cap C}}_{\clubsuit} = \{p : \forall q \leq p([A \cup (B \cap C)] \cap W_q \neq \emptyset\}$$

$$= \{p : \forall q \leq p([(A \cup B) \cap (A \cup C)] \cap W_q \neq \emptyset\}$$

(ii) Desarrollando el lado derecho de la igualdad (3.2) se tiene que:

$$\overline{A \cup B} = \{p : \forall q \leq p[(A \cup B) \cap W_q \neq \emptyset]\} = \{p : \forall q \leq p[(A \cap W_q) \cup (B \cap W_q)] \neq \emptyset)\}$$

$$\overline{A \cup C} = \{p : \forall q \leq p[(A{\cup}C){\cap}W_q \neq \emptyset]\} = \{p : \forall q \leq p[(A{\cap}W_q){\cup}(C{\cap}W_q)] \neq \emptyset)\}$$

$$\underbrace{\overline{A \cup B} \cap \overline{A \cup C}}_{\spadesuit} = \{p : \forall q \leq p([(A{\cap}W_q){\cup}(B{\cap}W_q) \neq \emptyset]{\wedge}[(A{\cap}W_q){\cup}(C{\cap}W_q) \neq \emptyset]\}$$

Entonces por el desarrollo (i) y (ii) es claro que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$. ¿ por qué ocurre $\spadesuit \subseteq \clubsuit$: Sea $p \in \spadesuit$. Se debe probar que $p \in \clubsuit$. Sea $q \leq p$. Se cumple que $W_q \cap A = \emptyset$ o $W_q \cap A \neq \emptyset$. Si $W_q \cap A \neq \emptyset$, entonces por el desarrollo (i) y (ii) se cumple claramente que $[(A \cup B) \cap (A \cup C)] \cap W_q \neq \emptyset$. Si $W_q \cap A = \emptyset$, entonces $B \cap W_q \neq \emptyset$ y $C \cap W_q \neq \emptyset$. De modo que existe un $t \in C \cap W_q$ y existe un $s \in B \cap W_q$. Ocurre que $s \in C$ o $t \in B$: Pues si $s \notin C$ y $t \notin B$, entonces por reguralidad de las cortaduras existen $i \leq s$ y $j \leq t$ tal que $W_i \cap C = \emptyset$ y $W_j \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, como $i, j \leq q$ y $W_q \cap A = \emptyset$, se tiene $W_i \cap A = \emptyset$ y $W_j \cap A = \emptyset$. En consecuencia i, j no cumplen con la condición del último conjunto del desarrollo (ii) y $i, j \leq p$. En consecuencia $p \notin \spadesuit$. Contradicción con la hipótesis. Luego, $s \in C$ o $t \in B$, y por lo tanto $C \cap B \cap W_q \neq \emptyset$. Entonces $p \in \clubsuit$. Es decir, $\spadesuit \subseteq \clubsuit$. En conclusión $\clubsuit = \spadesuit$, lo que se quería probar.

(4.1) $A + A = A$:

Hecho 5.3.3. *Si X es una cortadura regular, entonces $X = \overline{X}$.*

Demostración de hecho: $X \subseteq \overline{X}$. Como $X \subseteq X$ y $\overline{X}$ es a menor cortadura regular (con respecto a la relación de inclusión) que contiene a X, entonces $\overline{X} \subseteq X$. Por lo tanto $X = \overline{X}$. Fin de la prueba del hecho.

Usando el hecho anterior y la ley del álgebra booleana de conjuntos $A \cup A = A$, la demostración de (4.1) es la siguiente: $\overline{A \cup A} = \overline{A} = A$

(4.2) $A \,\blacksquare\, A = A$: Se cumple porque $A \cap A = A$ es una ley del álgebra booleana de conjuntos.

Las siguientes propiedades (5.1) y (5.2) resultan obvias cuando se escribe su definición: (5.1) $A \,\blacksquare\, (A + B) = A$. Definición: $[A \cap (\overline{A \cup B})] = A$. (5.2) $A + (A \,\blacksquare\, B) = A$. Definición: $[A \cup (A \cap B)] = A$. Por el trabajo realizado previamente, por ejemplo el Hecho 5.3.3 y las leyes del álgebra booleana de conjuntos, las siguientes propiedades (6.1), (6.2), (6.3) y (6.4) resultan obvias cuando se escribe su definición: (6.1) $A + 1 = 1$. Definición: $\overline{A \cup P} = P$.

(6.2) $A \cdot 1 = A$. Definición: $A \cap P = A$. (6.3) $A + 0 = A$. Definición: $\overline{A \cup \emptyset} = A$. (6.4) $A \cdot 0 = 0$. Definición: $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(7.1) $A + (A') = 1$:

$$\underbrace{\overline{A \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\}}}_{\clubsuit} = P$$

Es claro que $\clubsuit \subseteq P$, por definición de cortadura regular de P. Para demostrar que $P \subseteq \clubsuit$ se realiza el siguiente desarrollo y luego se aplica reducción al absurdo:

$$\overline{A \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\}} = \{i : \forall j \leq i[(A \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\}) \cap W_j \neq \emptyset]\}$$

$$\{i : \forall j \leq i[(A \cap W_j \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j) \neq \emptyset]\}$$

Supongamos que $p \in P$ y $p \notin \clubsuit$. Entonces existe un $j \leq p[(A \cap W_j \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j) = \emptyset]$. Entonces $j \notin A$, pues si $j \in A$ se cumple que $A \cap W_j \neq \emptyset$. En consecuencia, por la regularidad de A, se tiene que existe $k \leq j$ tal que $W_k \cap A = \emptyset$. Por lo tanto $k \in \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j$. Luego, $(A \cap W_j \cup \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap W_j) \neq \emptyset$. Contradicción con la hipótesis. Entonces $p \in \clubsuit$, lo que se quería demostrar.

(7.2) $A \cdot (A') = 0$: $A \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} = \emptyset$. Supongamos que $A \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$. Entonces existe un $z \in A$ tal que $W_z \cap A = \emptyset$, pero $z \in W_z \cap A$. Contradicción. Por lo tanto se cumple la identidad (7.2).

(7.3) $(A')' = A$:

$$\underbrace{\{q : W_q \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} = \emptyset\}\}}_{\clubsuit} = A$$

Se probará que $\clubsuit \subseteq A$ por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $z \in \clubsuit$ tal que $z \notin A$. Entonces por regularidad de A existe $l \leq z$ tal que $W_l \cap A = \emptyset$. En consecuencia $l \in \{p : W_p \cap A = \emptyset\}$, y como $l \in W_z$ se tiene que $W_z \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $z \notin \clubsuit$. Contradicción con la hipótesis. Luego, $\clubsuit \subseteq A$. Prueba de que $A \subseteq \clubsuit$: Si $z \in A$, entonces $W_z \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} = \emptyset$. En consecuencia $z \in \clubsuit$. Luego, $\clubsuit \subseteq A$, y se concluye $\clubsuit = A$, lo que se quería demostrar.

(7.4) $(A + B)' = A' \cdot B'$:

$$\underbrace{\{p : W_p \cap \overline{A \cup B} = \emptyset\}}_{\clubsuit}$$

$$= \{p : W_p \cap \{z : \forall l \leq z(W_l \cap (A \cup B) \neq \emptyset)\} = \emptyset\}$$

$$= \{p : W_p \cap \{z : \forall l \leq z(W_l \cap A \cup W_l \cap B) \neq \emptyset)\} = \emptyset\}$$

$$\underbrace{\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\}}_{\spadesuit}$$

$$= \{p : W_p \cap A = \emptyset \wedge W_p \cap B = \emptyset\}$$

Entonces considerando el desarrollo realizado se demostrará que $\clubsuit = \spadesuit$. $\clubsuit \subseteq \spadesuit$: Si $m \in \clubsuit$, entonces $W_m \cap \{z : \forall l \leq z(W_l \cap A \cup W_l \cap B) \neq \emptyset)\} = \emptyset$. Si $m \notin \spadesuit$, se concluye que $W_m \cap A \neq \emptyset \vee W_m \cap B \neq \emptyset$. Considerando el primer caso de la disyunción se tiene que existe un $k \in W_m \cap A$. Luego, $W_k \cap A \neq \emptyset$ y más todavía: $k \in \{z : \forall l \leq z(W_l \cap A \cup W_l \cap B) \neq \emptyset\}$, pues como $k \in A$ se cumple que $\forall l \leq k(W_l \cap A \neq \emptyset)$. En consecuencia, como $k \in W_m$ se tiene que:

$$W_m \cap \{z : \forall l \leq z(W_l \cap A \cup W_l \cap B) \neq \emptyset\} \neq \emptyset$$

Entonces $m \notin \clubsuit$, contradicción con la hipótesis. Si se toma el segundo caso de la disyunción,$W_m \cap B \neq \emptyset$, se aplica el mismo procedimiento y se obtiene la misma contradicción. Por lo tanto $\clubsuit \subseteq \spadesuit$. Ahora se probará que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$: Sea $z \in \spadesuit$. Entonces $W_z \cap A = \emptyset$ y $W_z \cap B = \emptyset$. También $\forall l \leq z(W_l \cap A = \emptyset \wedge W_p \cap B = \emptyset)$. Si $z \notin \clubsuit$, entonces:

$$W_z \cap \{z : \forall l \leq z(W_l \cap A \cup W_l \cap B) \neq \emptyset)\} \neq \emptyset$$

En consecuencia existe un $s \leq z$ tal que $\forall l \leq s(W_l \cap A \cup W_l \cap B) \neq \emptyset$. De modo que que $W_z \cap A \neq \emptyset \vee W_z \cap B \neq \emptyset$. Contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, $z \in \clubsuit$. Luego, $\spadesuit \subseteq \clubsuit$.

(7.5) $(A \centerdot B)' = A' + B'$:

$$\underbrace{\{p : W_p \cap (A \cap B) = \emptyset\}}_{\clubsuit}$$

$$\underbrace{\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cup \{p : W_p \cap B = \emptyset\}}_{\spadesuit} =$$

$$\{k : \forall m \leq k[(W_m \cap (\{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cup \{p : W_p \cap B = \emptyset\}) \neq \emptyset]\}$$

$$\{k : \forall m \leq k[(W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \cup W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\}) \neq \emptyset]\}$$

Se debe probar que $\clubsuit = \spadesuit$. $\clubsuit \subseteq \spadesuit$: Sea $z \in \clubsuit$. Entonces $W_z \cap (A \cap B) = \emptyset$. Sea $m \leq z$. Caso1: Si $W_m \subseteq A$, entonces por hipótesis $W_m \cap B = \emptyset$ y en consecuencia $W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset$. Caso 2: Si $W_m \subseteq B$, entonces por hipótesis $W_m \cap A = \emptyset$ y en consecuencia $W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$. Caso 3: $W_m \cap A = \emptyset$ y $W_m \cap B = \emptyset$, entonces $W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$ y $W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset$. Caso 4: $W_m \cap A \neq \emptyset$. Entonces existe $r \in W_m$ tal que $r \in A$. r no puede estar en B, pues si estuviera, como él pertenece a $W_m \subseteq W_z$ se tendría que $W_z \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis. Luego, $r \notin B$. Entonces por regularidad de la cortadura B existe un $d \leq r$ tal que $W_d \cap B = \emptyset$. $d \in W_m$, por lo tanto $W_m \cap \{p : W_p \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset$. Caso 5: $W_m \cap B \neq \emptyset$. Se procede de manera análoga al Caso 4 y se obtiene el resultado buscado $W_m \cap \{p : W_p \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$. En consecuencia $z \in \spadesuit$, de modo que $\clubsuit \subseteq \spadesuit$. Ahora se realiza la prueba de que $\spadesuit \subseteq \clubsuit$: (Por reducción al absurdo) Supongamos que existe un $z \in \spadesuit$ y que $z \notin \clubsuit$. Entonces $W_z \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Por lo tanto existe un $d \leq z$ tal que $d \in A \cap B$. Si $W_d \cap \{p : W_d \cap A = \emptyset\} \neq \emptyset$, entonces existe un $s \leq d$ tal que $W_s \cap A = \emptyset$. Pero $s \in A$ y $s \in W_s$, contradicción. Luego, $W_d \cap \{p : W_d \cap A = \emptyset\} = \emptyset$. Si $W_d \cap \{p : W_d \cap B = \emptyset\} \neq \emptyset$, entonces existe un $s \leq d$ tal que $W_s \cap B = \emptyset$. Pero $s \in B$ y $s \in W_s$, contradicción. Luego, $W_d \cap \{p : W_d \cap A = \emptyset\} = \emptyset$ y $W_d \cap \{p : W_d \cap B = \emptyset\} = \emptyset$. En consecuencia $z \notin \spadesuit$, contradicción con la hipótesis. Por o tanto, $\spadesuit \subseteq \clubsuit$.

Para terminar con con la prueba del Teorema sólo falta demostrar $\mathcal{D}$ que es completa:

$\mathcal{D}$ es completa si el supremo de S ($\sum S$) y el ínfimo de S ($\prod S$) existen en $\mathcal{D}$, para cualquier $S \subseteq \mathcal{D}$. Esto se cumple pues si $S = \{S_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{D}$, entonces se prueba sin dificultad usando las definiciones de cortaduras regulares que $\prod S = \bigcap_{j\in J} S_i \in \mathcal{D}$ y $\sum S = \overline{\bigcup_{j\in J} S_j} \in \mathcal{D}$. Ha terminado la demostración del Teorema ($\mathcal{D}$ es un álgebra booleana completa). $\square$

Como $\mathcal{D}$ es el álgebra booleana completa de las cortaduras regulares en P se denota $\mathcal{D} = c.r(P)$. Vale la pena resaltar que la función $e : P \longrightarrow \mathcal{D}$, definida $e(p) = W_p$, es una función que preserva el orden y además el conjunto $\{e(p) : p \in P\} \subseteq \mathcal{D} \setminus \{0\}$ es denso en $\mathcal{D}$, es decir, es denso en $\mathcal{D} \setminus \{\emptyset\}$. Se dice que la función e es una *inmersión densa* de P en $\mathcal{D}$.

También se puede probar que $\mathcal{D}$ es única salvo isomorfismo [J1], [J3], [Ku], [Bel2], [Ja]. En efecto: Dadas dos álgebras booleanas completas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ que tienen a P como subconjunto denso la función $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ definida así:

$$\pi(c) = \sum^{\mathcal{E}} \{p \in P : p \leq_{\mathcal{C}} c\},$$

es un isomorfismo entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$, una demostración de este hecho procede como sigue:

Sea $h : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C}$ definida así:

$$h(e) = \sum^{\mathcal{C}} \{p \in P : p \leq_{\mathcal{E}} e\}.$$

Se probará que las funciones compuestas $h \circ \pi = 1_{\mathcal{C}}$ y que $\pi \circ h = 1_{\mathcal{E}}$ para concluir que $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ es una función biyecctiva.

$h \circ \pi = 1_{\mathcal{C}}$: Se probará que $p \leq_{\mathcal{C}} c \iff p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)$, para cada $p \in P$ y cada $c \in \mathcal{C}$. Si $p \leq_{\mathcal{C}} c$, entonces $\pi(p) = p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)$, por la propiedad del supremo. En la dirección inversa: Si $p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)$, entonces $p \bullet \pi(c) = p$ y $p \bullet \sum^{\mathcal{E}} \{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\} = \sum^{\mathcal{E}} \{p \bullet q : q \leq_{\mathcal{C}} c\} = p$, porque $\mathcal{E}$ es una álgebra booleana completa y satisface la propiedad de distributividad generalizada. Como se cumple que si $q \leq_{\mathcal{C}} c$, entonces $p \bullet q \leq_{\mathcal{C}} p \bullet c \leq_{\mathcal{C}} c$, entonces $p \leq_{\mathcal{C}} c$ (por la propiedad del supremo, ya que c es una cota superior. También se usa que las álgebras booleanas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ restringidas al orden parcial P son isomorfas). En consecuencia: $p \leq_{\mathcal{C}} c \iff p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)$. Por lo tanto, como por la densidad de P en $\mathcal{C}$ se tiene que,

$$c = \underbrace{\sum^{\mathcal{C}} \{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\}}_{Sup},$$

(Explicación de hecho anterior: (i) $Sup \leq_{\mathcal{C}} c$, ya que c es una cota superior del conjunto $\{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\}$. Y (ii) $c \leq_{\mathcal{C}} Sup$: Esto ocurre porque si $c \nleq_{\mathcal{C}} Sup$, entonces $c \bullet (Sup)' \neq 0$. Luego, por la densidad de P se tiene que existe un $q \in P$, $q \neq 0$, tal que $q \leq_{\mathcal{C}} c \bullet (Sup)'$. De modo que $q \leq_{\mathcal{C}} c$ y $q \leq_{\mathcal{C}} (Sup)'$. Como $q \leq_{\mathcal{C}} c$, entonces $q \in \{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\}$, y por lo tanto $q \leq_{\mathcal{C}} Sup$. Así que $q \leq_{\mathcal{C}} (Sup)'$ y $q \leq_{\mathcal{C}} Sup$. Esto implica que $q = 0$ (pues en toda álgebra booleana se cumple que $z \leq w$ y $x \leq y$, entonces $z \bullet x \leq w \bullet y$).)

se concluye (volviendo a la última linea antes de la explicación expresada entre paréntesis) que,

$$c = \sum^{\mathcal{C}} \{q \in P : q \leq_{\mathcal{C}} c\} = \sum^{\mathcal{C}} \{q \in P : q \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)\} = h(\pi(c)),$$

es decir, $h \circ \pi = 1_{\mathcal{C}}$.

Ahora se debe probar que $\pi \circ h = 1_{\mathcal{E}}$: Se demostrará que $p \leq_{\mathcal{E}} e \iff p \leq_{\mathcal{C}} h(e)$, para cada $p \in P$ y cada $e \in \mathcal{E}$. La prueba se realiza de manera análoga al caso anterior. Por lo tanto, $\pi \circ h = 1_{\mathcal{E}}$. De modo que $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ es una función biyecctiva.

Se cumple que $\pi(0_{\mathcal{C}}) = 0_{\mathcal{E}}$ y $\pi(1_{\mathcal{C}}) = 1_{\mathcal{E}}$. Entonces falta probar que π preserva las funciones de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ y como tales funciones se pueden definir con el orden parcial de cada una de ellas (definido a su vez por sus operaciones booleanas), es suficiente con probar que π preserva el orden entre ambas estructucturas, es decir, que $(\mathcal{C}, \leq_{\mathcal{C}})$ es isomorfa con $(\mathcal{E}, \leq_{\mathcal{E}})$. Se probará que:

$$c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2 \iff \pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2).$$

(1) Si $c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2$, entonces $\pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$. Por la propiedad de supremo.

(2) Si $\pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$, entonces $c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2$. Pues (por reducción al absurdo) si $c_1 \nleq_{\mathcal{C}} c_2$, entonces $c_1 \bullet c_2' \neq 0$. De modo que como P es un subconjunto denso de $\mathcal{C}$ existe un $p \in P$, $p \neq 0$, tal que $p \leq_{C} (c_1 \bullet c_2')$. En consecuencia $p \leq_{C} c_1$ y $p \leq_{C} c_2'$. Por lo tanto, $p \bullet c_2' = p \neq 0$. Es decir, $p \nleq_{\mathcal{C}} c_2$. Y como se tiene por lo anteriormente demostrado que $p \leq_{\mathcal{C}} c \iff p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c)$, para cada $p \in P$ y cada $c \in \mathcal{C}$, se concluye que $p \nleq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$ $(\star)$. Por otro lado, se tiene, por la hipótesis y por la propiedad de supremo que, $p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_1) \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$, entonces $p \leq_{\mathcal{E}} \pi(c_2)$ $(\star\,\star)$. Las proposiciones $(\star)$ y $(\star\,\star)$ son contradictorias. Por lo tanto, $c_1 \leq_{\mathcal{C}} c_2$. Con esto termina la prueba de que π es un isomorfismo de entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$, es decir, $\mathcal{C} \cong \mathcal{E}$.

Vale la pena resaltar que $\mathcal{D}$ tiene una versión topológica [J1], [J3], [Ku], [S], [Hal], [Bel2], [Ja]. En efecto: Los abiertos básicos de dicha topología para P son los subconjuntos de P con se trabajó anteriormente, es decir, los W_p, para cada $p \in P$. Un conjunto abierto X de un espacio topológico se dice que es *abierto regular* si $X = (\overline{X})^{\circ}$, es decir si X es igual al interior de su clausura. Sea Z el conjunto de los abiertos regulares de la topología para P descrita, es decir, la topología que tiene por base el conjunto $\{W_p : p \in P\}$. Se difinen la operaciones booleanas de la siguiente manera:

$$X \centerdot Y = X \cap Y$$

$$X + Y = (\overline{X \cup Y})^{\circ}$$

$$X' = P \setminus \overline{X}$$

$$0 = \emptyset$$

$$1 = P$$

Se cumple que $\mathcal{Z} = \langle Z, +, \centerdot, ', 0, 1\rangle$ es un álgebra booleana completa, el álgebra de los abietos regulares de P, por eso algunos libros la denotan así : $\mathcal{Z} = a.r(P)$. Tal álgebra aparece referida (entre otros) en [J1], [J3], [Ku], [Hal],[S] y [Ja], y una demostración de que es álgebra booleana completa puede encontrarse en [Ku], [Hal] y [Ja], entre otros. Por la unicidad de la completación de P que se mencionó anteriomente se puede concluir que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{Z}$ son isomorfas.

En el teorema demostrado anteriormente (Teorema 5.3.1) se supuso que el orden parcial $(P, \leq)$ es separativo, si P no fuera separativo se puede construir un orden parcial $(Q, \preceq)$ que es separativo tal que existe una función $h : P \longrightarrow Q$ que cumple (i) y (ii): (i) Si $x \leq y$, entonces $h(x) \preceq h(y)$. Y (ii) x y z son compatibles en P si y sólo si $h(x)$ y $h(z)$ son comptibles en Q. La definición de $(Q, \preceq)$ y h son las siguientes: Se define una relación de equivalencia en Q así : $x \sim y$ si y sólo si $\forall z$(z es compatible con x si y sólo si z es compatible con y). Sea $Q = P/\sim = \{[p] : p \in P\}$, donde $[p] = \{q \in Q : p \sim q\}$. $[x] \preceq [y]$ si y sólo si $\forall z \leq x$(z y y son compatibles). $(Q, \preceq)$ es separativo y la función h que cumple con (i) y (ii) se puede definir así $h(p) = [p]$, para todo $p \in P$. Se puede probar que $(Q, \preceq)$ es único salvo isomorfismo [J1], [J3].

Y entonces con este resultado sobre $(P, \leq)$ y $(Q, \preceq)$, más el Teorema 5.3.1 que se demostró anteriormente, y más el isomorfismo π, se puede inferir el siguiente resultado general como corolario ([J1], [J3], [Ku], [Bel2]), dicho resultado fue demostrado por primera vez por Stone en 1936 [Sto] [J1]:

Corolario 5.3.4 (Stone, 1936). *Para cualquier orden parcial* $(P, \leq)$ *existe un álgebra booleana completa única (salvo isomorfismo)* $\mathcal{D} = c.r(P)$ *(o* $\mathcal{D} = a.r(P)$*) y una función* $e : P \longrightarrow \mathcal{D}$ *tal que:*

1. *Si* $p \leq q$ *entonces* $e(p) \leq e(q)$*.*
2. p *y* q *son compatibles si y sólo si* $e(p) \cdot e(q) \neq \emptyset$*.*
3. $\{e(p) : p \in P\} \subseteq \mathcal{D} \setminus \{0\}$ *es denso en* $\mathcal{D} \setminus \{0\}$*.*

La función e *se llama "inmersión densa" de* P *en* $\mathcal{D}$*.*

Observación: Antes de pasar a la siguiente subsección vale la pena destacar que una interesante lista de 25 problemas abiertos de Álgebras boolenas (desde el punto de vista platonista matemático) que relaciona álgebra, topología, lógica, teoría de conjuntos y teoría de ordenes, puede encontrarse en el artículo de Bekkali [Bek].

5.4 Algunas consideraciones matemáticas, metamatemáticas y filosóficas sobre el contenido de esta sección

(1) Sobre los ejemplos clásicos presentados de álgebras booleanas y ordenes parciales separativos:

A pesar de los pocos ejemplos clásicos sobre álgebras booleanas y ordenes parciales separativos que se expusieron en esta sección, se puede apreciar que tales estructuras son indispensables para las matemáticas y para el "quehacer matemático cotidiano", y en particular son indispensables para la Lógica Matemática (o Metamatemática) y para el "quehacer lógico matemático cotidiano".

(2) Sobre el Teorema 5.3.1, y el Corolario 5.3.4:

La inmersión densa $e : P \longrightarrow \mathcal{D}$ entre el orden parcial $(P, \leq)$ y su correspondiente álgebra booleana completa de cortaduras regulares o abiertos regulares, $\mathcal{D} = c.r(P)$ o $\mathcal{D} = a.r(P)$, expuesta en el Teorema 5.3.1 y en el Corolario 5.3.4, es fundamental para demostrar que el "forcing con ordenes parciales" y el "forcing con álgebras booleanas" producen los mismos modelos de ZFC. Una prueba de ello puede encontrarse en [[Ku], pp. 221-222] y en [[J3], pp. 154-156].

La prueba del Teorema 5.3.1 se hizo en ZF, es decir, es un resultado platonista matemático no tan fuerte, teniendo en cuenta la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2). Sin embargo, para las aplicaciones metamatemáticas relevantes de este resultado, por ejemplo con la aplicación del método de forcing, se requiere mínimo de todo ZFC. Es decir, desde el punto de vista de las aplicaciones metamatemáticas del forcing es más conveniente considerar que el teorema 5.3.1 es un resultado platonista matemático fuerte, teniendo en cuenta la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Un ejemplo de definición del método de forcing con ordenes parciales con abundantes aplicaciones al estudio de los fundamentos de la matemática (Metamatemática), clásicos y contemporáneos, puede encontrarse en el texto de Kunen [Ku]. Un ejemplo de definición del método de forcing con álgebras boolenas con abundantes aplicaciones al estudio de los fundamentos de la matemática (Metamatemática), clásicos y contemporáneos, puede encontrarse en los textos de Jech [J1], [J3] y [J4]. Otro ejemplo (clásico) de presentación del método de forcing con álgebras booleanas con algunas aplicaciones a los estudios de los fundamentos de la matemática (Metamatemática) puede encontrarse en el texto de Bell [Bel2]. Una aplicación (Metamatemática) del método de forcing para probar teoremas matemáticos puede encontrarse en [Solovay].

6 Conclusiones

Conclusión general del trabajo:

En esta investigación se ofrecieron abundantes argumentos para justificar la importancia del método de construcción de modelos llamado Ultraproductos, de la Propiedad de Interpolación de Craig, de las Álgebras booleanas y de los Órdenes parciales separativos para el estudio de los fundamentos de la matemática, desde el punto de vista del platonismo matemático. Tales argumentos se expondrán detalladamente a continuación usando las conclusiones específicas de las secciones 3 ("El método de construcción de modelos llamado Ultraproductos"), 4 ("La Propiedad de Interpolación de Craig") y 5 ("Una relación entre la Álgebras booleanas y los Ordenes parciales separativos"):

Conclusiones de la sección 3: El método de construcción de modelos llamado Ultraproductos:

(1)*Sobre la demostración del Teorema fundamental de Ultraproductos:*

La prueba del Teorema fundamental de ultraproductos requiere del Axioma de elección para que tenga validez universal, al menos en cuatro casos: (1) El producto cartesiano posiblemente infinito en la construcción (El Axioma de elección es la garantía de que los productos cartesianos infinitos sean distintos del conjunto vacío), (2) La prueba inductiva (cláusula (ii)) de la fórmula existencial, la definición de una función de elección involucrada en la prueba puede requerir el uso del Axioma de elección, (3) Para que el conjunto I de índices pueda ser infinito requeriría del Axioma del infinito, y (4) para poder extender filtros no principales a ultrafiltros se requiere del Axioma de elección. Es decir se necesita de ZFC para su validez universal, de modo que este método de construcción de modelos es platonista matemático, con un nivel de platonismo fuerte en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2). Hay otras conexiones de dicha demostración con el platonismo matemático, éstos son sólo cuatro ejemplos.

(2)*Sobre la demostración directa del Teorema de Compacidad usando Ultraproductos:*

Se puede apreciar que la prueba directa del Teorema Compacidad usando ultraproductos requirió del Lema de Zorn para construir un ultrafiltro D sobre I que permitiera construir el ultraproducto $\prod_D \mathfrak{A}_{\mathbf{i}}$. En consecuencia dicha demostración necesita de todo ZFC, y por lo tanto es un resultado platonista matemático, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

(3)*Sobre las demostraciones de los modelos no estándar de la Aritmética y de la Teoría de los números reales (en primer orden):*

Como todos estos modelos no estándar se construyeron usando compacidad aplica lo mismo que en (2), es decir, ellos requieren de todo ZFC, y por lo tanto son resultados platonistas matemáticos, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Vale la pena agregar las siguientes dos consideraciones sobre el tema:

Como se demostró en esta investigación una de las consecuencias (clásicas) matemáticas y metamatemáticas del Teorema de compacidad es que con el mismo se pueden construir modelos no estándar para la Aritmética en primer orden y para la Teoría de los números reales en primer orden, es decir, modelos donde valen las mismas sentencias de primer orden que en el sistema estándar de los naturales y de los reales, respectivamente, pero que no son isomorfos a los mismos [Ch-K], [Ma], [F-T-E], [Me], [N-S]. También con dicho teorema (compacidad) se puede demostrar que existen importantes clases de estructuras matemáticas que no se pueden definir en primer orden, por ejemplo las clases de las estructuras isomorficas a las anteriormente mencionadas (La clase de las estructuras isomorfas a la estructura de los números reales (estándar) y la clase de las estructuras isomorfas a la estructura de los naturales (estándar)), es decir, la Lógica de primer orden tiene limitaciones expresivas como consecuencia de la propiedad de Compacidad [Ma], [E-F-T], [N-S], [FG1]. Esto también ocurre como consecuencia del Teorema de

Löwenheim -Skolem-Tarski hacia arriba, dicho teorema permite demostrar que no hay teorías categóricas (teorías tal que todos sus modelos son isomormos) con modelos infinitos. Es claro que como estos resultados dependen del Teorema de compacidad, para demostrar los mismos se require entonces del Lema de Zorn, es decir, se necesita trabajar en ZFC para hacer dichas pruebas de construcción de modelos no estándar y de limitaciones expresivas de la lógica de primer orden, y ZFC es una teoría matemática platonista, con un fuerte grado de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Otra de las consecuencias (clásicas) matemáticas y metamatemáticas del Teorema fundamental de ultraproductos y de Compacidad es que con ellos se puede demostrar que algunas teorías matemáticas que son axiomatizables por un conjunto infinito de axiomas no son finitamente axiomatizables, es decir, no se pueden axiomatizar por un conjunto finito de axiomas, por ejemplo la *Teoría de los cuerpos de característica cero* (Un cuerpo tiene característica 0 si para todo número primo p: $p1 \neq 0$, donde $p1$ es una breviatura de $1+1+\ldots+1$ p-veces.) , la *Teoría de los cuerpos algebraicamete cerrados* (Un cuerpo es algebaicamente cerrado si todo polinomio con coheficientes en dicho cuerpo tiene una raíz en en el mismo), y la *Teoría de los grupos abelianos libre-torsión* (Un grupo abeliano es libre-torsión si todos sus elementos tienen orden infinito, es decir, si para todo elemento $x \neq 0$ de dicho grupo se cumple $xn \neq 0$, donde xn es $x + x + \ldots + x$ n-veces.) [Ch-K], [F-T-E], [Ma]. Como para probar estos resultados se usa el Teorema de compacidad [[Ch-K], pp. 220,225], entonces el Lema de Zorn es requerido, es decir, se necesita trabajar en ZFC para hacer las pruebas de que tales teorías matemáticas no son finitamente axiomatizables, y ZFC es una teoría matemática platonista, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

(4)*Sobre el esbozo de la construcción del cuerpo ordenado y no arquimediano de los Hiper-Reales y del Análisis no estándar de Robinson:*

Como toda la construcción del cuerpo ordenado y no arquimediano de los Hiper-Reales donde se desarrolla el Análisis no estándar de Robinson se hace usando el Teorema de Compacidad, entonces vale exactamente lo mismo que en (3), es decir, tales resultados requiren de todo ZFC, y por lo tanto son platonistas matemáticos, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Vale la pena agregar las siguientes cosideraciones sobre el tema:

Los modelos no estándar contruídos con compacidad son la base para la creación del *Análisis real no estándar* de Robinson en 1960 [Rob1], [Ma], [Cor], [Ivo], [Mi]. Tal análisis no estándar difiere del que se enseña contemporáneamente, es decir, el fundamentado en el cuerpo ordenado arquimideano, completo, denso y separable de los números reales $\langle \mathbb{R}, S, +, \bullet, 0, 1, < \rangle$ y el concepto de límite $\epsilon - \delta$, donde no existen números "infinitesimales", ni "ilimitados". Con compacidad Robinson construyó una estructura que es un cuerpo ordenado que "extiende" a,

$$\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, +, \bullet, ^{-}, ||, 0, 1, < \rangle,$$

tal estructura es llamada el cuerpo ordenado y no arquimediano de los Hiper-Reales,

$$\mathfrak{R}^* = \langle \mathbb{R}^*, +^{\mathfrak{R}^*}, \bullet^{\mathfrak{R}^*}, ^{-*}, ||^*, 0^{\mathfrak{R}^*}, 1^{\mathfrak{R}^*}, <^{\mathfrak{R}^*} \rangle,$$

donde sí existen elementos "infinitesimales" y elementos "ilimitados" [Cor], [Ma]. Se cumple que el cuerpo arquimideano de los reales es un submodelo elemental del cuerpo ordenado y no arquimediano de los Hiper-Reales. Y entonces dicho autor (Robinson) desarrolló su análisis no estándar con tal estructura.

Según Manzano [Ma] el Análisis no estándar de Robinson modela de cierta manera el Cálculo diferencial y el Cálculo integral tal como lo concibieron Newton y Leibniz cuando lo crearon en el siglo XVII. Quizá valga la pena estudiar la polémica creada por las críticas de Berkeley [Robl] a los métodos infinitesimales del Cálculo diferencial y del Cálculo integral creados por Newton y Leibniz, pues tal vez dicha crítica contribuyó para que se le buscara desde la matemática un fundamento Lógico-matemático a tales métodos: Ese fundameto fue "el Análisis estándar" que se estudia en la actualidad, donde no hay números infinitesimales, ni números ilimitados. Y ¿ Qué ventaja tiene el Análisis no estándar frente al Análisis estándar ? Según Manzano

[[Ma], pp. 216] para los especialistas la ventaja sólo radica en la simplicidad (el Análisis no estándar es más simple), pues toda prueba que se realiza en el Análisis no estándar se puede hacer en el Análisis estándar, solo que de manera más engorrosa. *"como el propio Robinson señala, elegir análisis estándar o no es cuestión de gusto, no de necesidad"* [[Ma], pp. 216]. Sin embargo, según Corbillón [[Cor], pp. III] la comparación del poder deductivo del Análisis estándar y del Análisis no estándar todavía está en discusión.

Quizá Ivorra [Ivo] comparte la opinión de Manzano de que el Análisis no estándar no agrega verdades nuevas que no se puedan demostrar del Análisis estándar, y sostiene además que para valorar los métodos estándar y no estándar del Análisis de una manera más justa tal vez pueda ayudar intentar responder las siguientes preguntas: Por una parte, el Análisis no estándar da lugar a pruebas más ¿intuitivas?, ¿elegantes?, ¿sencillas? que el Análisis estándar. Por otra parte, el Análisis no estándar requiere un marco de razonamiento lógico ¿un poco?, ¿bastante?, ¿mucho? más complejo que el Análisis estándar.

Como se dijo anteriormente el Análisis no estándar es una teoría platonista matemática. Como también es platonista el Análisis estándar, tal como lo afirma Bernays en la sección 2 de este trabajo. Si ambas teorías tienen exactamente las mismas consecuencias, como se dijo antes, tal vez se pueda concluir que el Análisis estándar también require de todo ZFC como fundamento. Los resultados que arrojen las investigaciones menciones anteriormente por Corbillón en [[Cor], pp. III] tal vez arrojen luces para responder con mayor exactitud las diferencias platonistas del Análisis estándar y del no estándar, si realmente existen.

Es importante resaltar que para Gödel el Análisis no estándar sería el análisis del futuro [[Ma], pp. 216]. Ante esta apreciación de Gödel Manzano comenta lo siguiente [[Ma], pp. 217]: *"Aunque Gödel pudiera estar exagerando hoy nadie duda en considerar el Análisis no estándar como uno de los mayores inventos de la Lógica de la segunda mitad de este siglo"*.

Vale la pena resaltar que el Cálculo con herramientas no estándar hoy en día se enseña a nivel de pregrado en algunas universidades con algunas adaptaciones que minimizan los preliminares de Lógica matemática que el mismo requiere a los fines de hacer más accecible sus fundamentos [Cor].

Según [[Cor], pp. III] las técnicas de Análisis no estándar introducidas por Robinson han sido generalizadas y aplicadas con éxito en análisis real, teoría de la medida y probabilidades, topología, análisis funcional, física, teoría de números, finanzas, etc. (En sus orígenes también se aplicó para resolver problemas (por ejemplo) de análisis y de teoría de números, según [[Ma], pp. 216]).

También es importante destacar que existe al menos una construcción del "cuerpo ordenado y no arquimediano de los hiper-reales" y del Análisis no estándar que no usa compacidad, ella se realiza directamente con ultrafiltros y el Teorema fundamental de ultraproductos, en tal construcción "el cuerpo ordenado de los hiper-reales" es la ultrapotencia del "cuerpo de los reales" considerando un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$(la relación entre los reales y la ultrapotencia, los hiper-reales, se llama "Principio de Transferencia (PdT)"). El Teorema fundamental de ultraproductos en este contexto dice entonces que "todo teorema del Análisis no estándar es un teorema de ZFC", no que "cualquier teorema demostrable usando Análisis no estándar puede demostrarse sin él" [[Cor], pp. 25]. Un desarrolo axiomático del Análisis no estándar puede encontrarse en el texto [Ivo].

(5)*Sobre la demostración del primer teorema de cardinales medibles: El Teorema de Compacidad débil, una versión del Teorema de compacidad para Lógicas infinitarias cuyo cardinal es un cardinal medible:*

Se puede constatar que dicha demostración necesita de todo ZFC, por lo tanto es platonista matemática, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado. Se presentan dos ejemplos para justificar esto (aunque hay más): (a) La definición de las lógicas infinitarias ($\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$) requiere de las nociones de "cardinal de un conjunto infinito de fórmulas" y de "cardinal de un conjunto infinito de variables", y éstas son imposible definirlas sin el Teorema del buen orden (Axioma de elección), y de todo ZFC. Y (b) Dentro de la prueba del Teorema de compacidad débil la garantía de que el ultraproducto utilizado ($\boldsymbol{\mathfrak{D}} = \prod_H \boldsymbol{\mathfrak{C}}_\beta$, donde H es un ultrafiltro no principal y η-completo sobre η, y $\beta < \eta$) tenga universo distinto de vacío, es decir, la garantía de que el mismo sea una estructura o interpretación en sentido estricto, es el Axioma de elección. Por lo tanto dichos resultados (la definición de $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$, la extensión del Teorema de fundamental de Ultraproductos a lógicas infinitarias, Lema 3.5.4.1, y el Teorema de compacidad débil, 3.5.4.2) son platonistas matemáticos, en un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Vale la pena agregar lo siguiente: La definición de cardinal débilmente compacto requiere de lógicas infinitarias y ello necesita como se dijo antes de todo ZFC. La caracterización combinatoria de cardinal débilmente compacto que se presentó involucra la noción de cardinal inaccesible y para definir cardinal inaccecible se requiere aritmética cardinal (para la noción de "límite fuerte", por ejemplo) y esto sólo se puede hacer con el Axioma de elección. Desarrollar la aritmética cardinal requiere de todo ZFC. Por lo tanto también estos resultados mencionados son platonistas matemáticos, en un grado fuerte de platonismo según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Es sobresaliente resaltar que cardinal débilmente compacto implica estrictamente cardinal inaccesible [[D2], pp. 132]. Por lo tanto la hipótesis "Existe un cardinal débilmente compacto" es más fuerte estrictamente que la hipótesis "Existe un cardinal inaccesible". Es decir, la Teoría axiomática de conjuntos extendida ZFC + "Existe un cardinal débilmente compacto" tiene un rango platonista estrictamente mayor que la Teoría axiomática de conjuntos extendida ZFC + "Existe un cardinal inaccesible", según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

También es importante mencionar que como consecuencia del Segundo Teorema de incompletitud de Gödel (1931) no se puede demostrar con ZFC que existen cardinales inaccesibles [[J3], pp. 85-86], si ZFC es consistente. Entonces como los cardinales débilmente compactos son cardinales inaccesibles, se infiere que tampoco se puede demostrar en ZFC que existan cardinales débilmente compactos, si ZFC es consistente. Además, como se dijo en la sección 2, por los Teoremas de Incompletitud de Gödel de 1931 [[Go1], pp. 45-89], primero y segundo, se conoce que ZFC es esencialmente incompleta y además que no se puede probar la consistencia de ZFC con sus propios métodos, de modo que la pregunta por la consistencia de ZFC es un problema abierto en la actualidad. Estos dos resultados valen exactamente igual para las teorías extendidas ZFC + "Existe un cardinal inaccesible" y ZFC + "Existe un cardinal débilmente compacto", es decir, dichas teorías son esencialmente incompletas y además no se puede probar la consistencia de ellas con sus propios métodos, de modo que la pregunta por la consistencia de ambas es un problema abierto en la actualidad.

(6)*Sobre la demostración del segundo teorema de cardinales medibles: Si η es un cardinal medible, entonces η es un cardinal inaccesible y además η es el η-ésimo cardinal inaccesible, es decir, existen η cardinales inaccesibles menores que η:*

La demostración de este teorema requiere de todo ZFC, por lo tanto es un resultado platonista matemático, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo moderado. Explicación mediante ejemplos:

(a) La demostración de que η es regular: Necesita de todo ZFC, pues por ejemplo: (i) Con el ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η se construyeron las ultrapotencias infinitas $\mathfrak{D} = \prod_H \mathfrak{C}$, donde $\mathfrak{C} = \langle \eta, <, \rho \rangle_{\rho \in \eta}$. Y $\prod_H (\mathfrak{C}, U') = (\mathfrak{D}, W)$. Y entonces para garantizar que el universo de cada una de estas estructuras sea distinto del conjunto vacío se requiere del Axioma de elección.

(b) La demostración de que η es límite fuerte: Requiere de todo ZFC, pues por ejemplo: (i) Se usó el Teorema de comparación de cardinales el cual es equivalente al Axioma de elección, (ii) Con el ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η se construyó la ultrapotencia infinita $\prod_H (\mathfrak{C}, T) = (\mathfrak{D}, Q)$, y (iii) se usó la lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\eta\eta}$, específicamene se utilizó la sentencia infinita $\exists x \forall y [T(x, y) \leftrightarrow \bigvee \{y \equiv c_\pi : \pi \in Z\}]$.

(c) La demostración de que η es el η-ésimo cardinal inaccesible: Necesita de todo ZFC, pues se usó la ultrapotencia infinita $\langle D, < \rangle$ correspondiente a la estructura $\langle \eta, < \rangle$, construida con el ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η.

Vale la pena resaltar que este segundo teorema sobre cardinales medibles implica (entre otros) que la hipótesis conjuntista “Existen cardinales medibles” es más fuerte estrictamente que la hipótesis conjuntista “Existen cardinales inaccesibles”. Es decir, la Teoría axiomática de conjuntos extendida ZFC + “Existe un cardinal medible” tiene un rango platonista estrictamente mayor que la Teoría axiomática de conjuntos extendida ZFC + “Existe un cardinal inaccesible”, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

¿Y la hipótesis "Existe un cardinal medible" es más fuerte estrictamente que la hipótesis "Existe un cardinal débilmente compacto"? la respuesta es que SÍ [[D2], pp. 132]. En consecuencia, según la consideración anterior (5), se puede concluir que en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado el orden de las teorías respectivas es el siguiente: (ZFC + "Existe un cardinal inaccesible") menor estricta que (ZFC + "Existe un cardinal débilmente compacto") menor estricta que (ZFC + "Existe un cardinal medible").

También es importante destacar que en esta demostración se usaron lógicas infinitarias (como en el primer teorema sobre cardinales medibles) y lógica de segundo orden de un tipo específico, las Σ_1^1 fórmulas, las cuales son preservadas por los ultraproductos.

Como se dijo en (5) una consecuencia del Segundo Teorema de incompletitud de Gödel (1931) es que no se puede demostrar con ZFC que existen cardinales inaccesibles [[J3], pp. 85-86], si ZFC es consistente. Entonces como se demostró en este trabajo que los cardinales medibles son cardinales inaccesibles, se concluye que tampoco se puede demostrar en ZFC que existan cardinales medibles, si ZFC es consistente. Además, como se dijo en la sección 2 y en la consideración anterior (5), por los Teoremas de Incompletitud de Gödel de 1931 [[Go1], pp. 45-89], primero y segundo, se conoce que ZFC es esencialmente incompleta y además que no se puede probar la consistencia de ZFC con sus propios métodos, de modo que la pregunta por la consistencia de ZFC es un problema abierto en la actualidad. Estos dos resultados valen exactamente igual para la teoría extendida ZFC + "Existe un cardinal medible", es decir, dicha teoría es esencialmente incompleta y además no se puede probar la consistencia de ella con sus propios métodos, de modo que la pregunta por la consistencia de la misma es un problema abierto en la actualidad.

(7)*Sobre la demostración del tercer teorema de cardinales medibles: Si existen cardinales medibles, entonces el Axioma de constructibilidad (que implica la HGC y AE) es falso:*

Se pudo constatar en la demostración realizada que la misma requiere del Axioma de elección y de todo ZFC, por lo tanto dicho resultado es platonista matemático, con un grado fuerte de platonismo en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado. Algunas construcciones presentes en la prueba que requieren de todo ZFC son:

1. La utilización de "cardinal de un conjunto" y de la Aritmética cardinal. Ejemplos: (a) $\theta = (2^{2^{2^\eta}})+$, (b) $\mid V_{\eta+3} \mid < \theta$ y (c) $(\delta)^\eta \leq (2^{2^{2^\eta}})^\eta = 2^{(2^{2^\eta}).\eta} = 2^{(2^{2^\eta})} < \theta$.

2. La definición de la ultrapotencia infinita con el ultrafiltro H no principal y η-completo sobre η: $(\mathfrak{D}, R) = \prod_H \langle H(\theta), \in \rangle$.

3. La construcción de la lógica infinitaria $\mathcal{L}_{\aleph_1\aleph_1}$ para trabajar con la sentencia que caracteriza las relaciones bien fundamentadas:

   RBF: $(\forall x_0 x_1 x_2 \ldots)\neg \bigwedge\{P(x_{n+1}, x_n) : n \in \aleph_0\}$.

Es conocido que Gödel demostró que se cumple $\langle \mathbf{L}, \in \rangle \models \mathbf{V} = \mathbf{L}$. Entonces el teorema demostrado acá implica que en $\mathbf{L}$ no existen cardinales medibles. Tal vez por este resultado (*si existen cardinales medibles el Axioma de constructibilidad es falso*) y el hecho de que el Axioma de constructibilidad implica a la Hipótesis del continuo de Cantor ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), Hipótesis que hoy en día se cree que es falsa, muchos conjuntistas actuales piensan que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (algo que ya conjeturaba Gödel [Go3]), no se suele considerar mayoritariamente en la bibliografía contemporánea consultada al Axioma de constructibilidad como un candidato a nuevo axioma de la Teoría de conjuntos [AJ], [D4], [J1]. Quizá se considera que el Axioma de constructibilidad limita la investigación en Teoría de conjuntos, limita su potencial platonista matemático, limita el conocimiento de LA VERDAD sobre los conjuntos. $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ es importantante, pero no debería frenar el potencial investigativo de la Teoría de conjuntos. Este tema, la ampliaciación de la capacidad deductiva de ZFC mediante la incorporación de nuevos axiomas, es todo un problema de Teoría de conjuntos, de Meta-Teoría de conjuntos y de Filosofía de la teoría de conjuntos que se deja pendiente para abordar en posteriores investigaciones.

Conclusiones de la sección 4: La Propiedad de Interpolación de Craig:

(1) Sobre la demostración del Teorema de interpolación para la Lógica proposicional:

La demostración que se realizó fue en ZF, pues (por ejemplo) se trabajó con los infinitos actuales (numerables): $\mathbb{N}$, $PROP$, "Asignación", "Valuación", etc. Por lo tanto dicho resultado es platonista, con un grado de platonismo que no es tan fuerte en según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2). Sin embargo, según dicha escala el platonismo de ZF es más fuerte que el platonismo matemático moderado contructivo (Intuicionista). No obstante, como tal prueba proporciona un procedimiento efectivamente computable para construir una proposición λ Interpolación de χ y ζ, usando las letras proposicionales que están en χ y no están en ζ hasta eliminarlas todas sustituyéndolas por una tautología $(s \vee \neg s)$ o por una contradicción $(s \wedge \neg s)$ de una manera específica (utilizando disyunciones) para lograr construir la proposición interpolación, se puede considerar que dicho resultado es más genuinamente platonista matemático moderado constructivo, es decir, es Intuicionista. Por lo tanto, su grado de platonismo es el menor grado de platonismo matemático moderado en la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (el platonismo matemático moderado constructivo (Intuicismo) quizá también tiene gradaciones).

(2) Sobre la demostración del Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden:

La demostración realizada para la Lógica de primer orden no es constructiva ya que se demuestra la existencia de la sentencia λ Interpolación de χ y ζ por reducción al absurdo usando el Principio del tercero excluído y ZF (no se usa el Axioma de elección) sin ofrecer un procedimiento efectivo para calcularla. Por lo tanto la prueba es platonista, con un grado de platonismo que no es tan fuerte según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado. Es importante destacar que la técnica usada para dicha prueba (Henkin en 1963) es una generalización del método de construcción de modelos a partir de constantes de Henkin (1949) mediante la noción de "teorías inseparables". El nuevo método de construcción de modelos resultante permite construir un modelo para la unión de dos teorías

$K_0 \cup H_0$ en un lenguaje $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, las cuales son consistentes e inseparables, expandiéndolas simultáneamente (por inducción y en zigzag) a dos teorías K_ω y H_ω maximal consistentes e inseparables en un lenguaje extendido $\mathcal{L}_1 \cup C$ y $\mathcal{L}_2 \cup C$, respectivamente, donde C es un conjunto numerable de nuevos símbolos constantes que funciona como testigos para ambas. También se cumple (por la maximal consistencia e inseparabilidad) que la teoría $K_\omega \cap H_\omega$ es maximal consistente. El modelo buscado $\mathfrak{D}$ para $K_0 \cup H_0$ se construye aplicando el hecho de que $K_\omega \cap H_\omega$ es maximal consistente (o que K_ω y H_ω son inseparables) a dos modelos previos : Un modelo $\mathfrak{A}$ para K_ω y un modelo $\mathfrak{B}$ para H_ω que se construyen mediente el método de Henkin (1949).

(3) Sobre el Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden:

Si se considera que actualmente un modelo lógico-matemático de la matemática aceptado mundialmente por la comunidad lógico-matemática es ZFC [Mo1], como se dijo en la sección 2 de este trabajo, y que el lenguaje de tal sistema axiomático es de primer orden, y si considera también que ZFC es usado para estudiar los fundamentos de la matemática, entonces siendo la Propiedad de Interpolación Craig una propiedad de la lógica de primer orden, se puede concluir que el Teorema de Interpolación de Craig revela (en si mismo) un avance en el estudio de los fundamentos de la matemática, de la filosofía de la matemática.

(4) Sobre una consecuencia del Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden: El Teorema de definibilidad de Beth:

Se describe a continuación una aplicación del Teorema de definibilidad de Beth, y por lo tanto del Teorema de interpolación de Craig, para el estudio de los fundamentos de la matemática, de la filosofía de la matemática, especialmente para los estudios de la metamatemática contemporánea incluyendo la metamatemática platonista para cualquier grado de platonismo, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado. En pocas palabras se puede decir que el Teorema de definibilidad de Beth proporciona un método para probar independencia de términos primitivos en una teoría formal axiomatizada [[Ce], pp. 760-761]. Algunos ejemplos introductorios de aplicación de este método pueden encontrarse en el texto "Introducción a la Lógica Simbólica" de Suppes [[Sup], pp. 217-222].

En un sistema axiomático formal se puede hacer un paralelismo entre la dupla Axiomas-Teoremas y la dupla Términos primitivos-Términos definidos: Los Teoremas se deducen de los Axiomas y los Términos definidos se definen a partir de los Términos primitivos, en este sentido la noción de deducibilidad se corresponde con la noción de definibilidad. Entonces en un sistema axiomático formal riguroso debería de probarse independencia de los términos primitivos así como se prueba la independencia de los axiomas [[Ce], pp. 760-761]. En este orden de ideas, el Teorema de definibilidad de Beth, el cual se puede demostrar a partir del Teorema de interpolación de Craig como se hizo en este trabajo, ofrece un método para probar independencia de términos primitivos usando "definición implícita" (semántica) y "definición explícita" (sintaxis).

La idea es la siguiente (el ejemplo es del autor este trabajo):

Supóngase que se tiene un sistema axiomático en primer orden con diez axiomas $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, y cinco términos primitivos $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ que son símbolos relacionales con diferente aridad. Y supónase que se quiere probar que Q_5 es independiente del resto de los otros cuatro términos primitivos. Entonces es suficiente con demostrar, vía dos modelos, que los diez axiomas no definen implícitamente a Q_5, es decir, se debe demostrar que existen un par de estructuras para el lenguaje $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}$, $(\mathfrak{C}, Q_5{}')$ y $(\mathfrak{C}, Q_5{}^\circ)$ que son modelos de los diez axiomas $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, y que se cumple que $Q_5{}' \neq Q_5{}^\circ$, donde $\mathfrak{C}$ es una estructura para $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ y $Q_5{}'$ y $Q_5{}^\circ$ son las interpretaciones de Q_5 en dichas estructuras, respectivamente. Pues si se demuestra lo contrario, es decir, si se prueba que para cada par de modelos de los diez axiomas (con las propiedades de las estructuras anteriormente mencionadas) se cumple que $Q_5{}' = Q_5{}^\circ$, entonces esto quiere decir que los diez axiomas $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ definen implícitamente a Q_5, y aplicando el Teorema de definbilidad de Beth se tiene que existe una fórmula ϕ en lenguaje $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ tal que los diez axiomas definen explícitamente a Q_5. Entonces se pueden re-escribir los diez axiomas sustituyendo a Q_5 por la fórmula en el lenguaje restringido que lo define ϕ y se tendría otro sistema de diez axiomas equivalente al anterior (que tiene los mismos teoremas) pero que está escrito en el lenguaje restringido $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, es decir, no tiene a

Q_5.

(5) Sobre otra consecuencia del Teorema de interpolación para la Lógica de primer orden: El Teorema de consistencia de Robinson:

El Teorema de consistencia de Robinson (el cual es equivalente al Teorema de interpolación de Craig) ofrece un método para probar que la unión de dos teorías consistentes es consistente: Si T_1 y T_2 son dos teorías consistentes, no necesariamente la unión de ambas teorías $T_1 \cup T_2$ es consistente, será consistente si ellas están contenidas en una misma teoría completa. Al igual que el Teorema de definibilidad de Beth este teorema es importante para el estudio de los fundamentos de la matemática, de la filosofía de la matemática, especialmente para los estudios de la metamatemática contemporánea incluyendo la metamatemática platonista, para cualquier grado de platonismo, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Observación: El Teorema de Interpolación de Craig también proporciona un método para probar que $T_1 \cup T_2$ es consistente: Lo que hay que hacer (según dicho teorema) es probar que T_1 y T_2 son inseparables.

(6) Sobre algunas generalizaciones del Teorema de interpolación Craig a otros sistemas lógicos, Una caracterización de la lógica infinitaria $L_{\omega_1\omega}$ usando interpolación en el contexto de la Teoría de modelos abstracta, y algunos problemas abiertos en Teoría de modelos abstracta relacionados con la Propiedad de Interpolación:

La revisión de bibliográfía especializada sobre la Propiedad de interpolación Craig revela que tal tema es bastante amplio y profundo, abarca Teoría de la demostración, Teoría de modelos abstracta, Ciencias de la Computación, Lógica Modal, Lógica Intuicionista, Lógica de la relevancia, Filosofía de la Ciencia, etc.

Por ejemplo un aspecto de la investigación es si dicha propiedad la cumplen otros sistemas lógicos (Lógicas infinitarias, lógicas con cuanificadores generalizados, lógica de segundo orden, lógicas no clásicas, etc), y se han obtenido resultados positivos y negativos al respecto. Ejemplos de investigaciones más abstractas sobre la propiedad de interpolación son las caracterizaciones de sistemas lógicos en el contexto de la teoría de modelos abstracta usando interpolación, y otros problemas abiertos de lógicas abstractas vinculados con la Propiedad de Interpolación.

Vale la pena resaltar que el concepto de "Sistema Lógico" o "Lógica abastracta" requiere mínimo de todo ZFC, de modo que Teoría de modelos abstracta es platonista matemática moderada en un grado fuerte, según la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Conclusiones de la sección 5: Una relación entre la Álgebras booleanas y los Órdenes parciales separativos:

(1) Sobre los ejemplos clásicos presentados de álgebras booleanas y ordenes parciales separativos:

A pesar de los pocos ejemplos clásicos sobre álgebras booleanas y ordenes parciales separativos que se expusieron en esta sección, se puede apreciar que tales estructuras son indispensables para las matemáticas y para el "quehacer matemático cotidiano", y en particular son indispensables para la Lógica Matemática (o Metamatemática) y para el "quehacer lógico matemático cotidiano".

(2) Sobre el Teorema 5.3.1, el Corolario 5.3.4:

La inmersión densa $e : P \longrightarrow \mathcal{D}$ entre el orden parcial $(P, \leq)$ y su correspondiente álgebra booleana completa de cortaduras regulares o abiertos regulares, $\mathcal{D} = c.r(P)$ o $\mathcal{D} = a.r(P)$, expuesta en el Teorema 5.3.1 y en el Corolario 5.3.4, es fundamental para demostrar que el "forcing con ordenes parciales" y el "forcing con álgebras booleanas" producen los mismos modelos de ZFC. Una prueba de ello puede encontrarse en [[Ku], pp. 221-222] y en [[J3], pp. 154-156].

La prueba del Teorema 5.3.1 se hizo en ZF, es decir, es un resultado platonista matemático no tan fuerte, teniendo en cuenta la escala de Bernays del platonismo matemático moderado (sección 2). Sin embargo, para las aplicaciones metamatemáticas relevantes de este resultado, por ejemplo con la aplicación del método de forcing, se requiere mínimo de todo ZFC. Es decir, desde el punto de vista de las aplicaciones metamatemáticas del forcing es más conveniente considerar que el teorema 5.3.1 es un resultado platonista matemático fuerte, teniendo en cuenta la escala de Bernays del platonismo matemático moderado.

Un ejemplo de definición del método de forcing con ordenes parciales con abundantes aplicaciones al estudio de los fundamentos de la matemática (Metamatemática), clásicos y contemporáneos, puede encontrarse en el texto de Kunen [Ku]. Un ejemplo de definición del método de forcing con álgebras boolenas con abundantes aplicaciones al estudio de los fundamentos de la matemática (Metamatemática), clásicos y contemporáneos, puede encontrarse en los textos de Jech [J1], [J3] y [J4]. Otro ejemplo (clásico) de presentación del método de forcing con álgebras booleanas con algunas aplicaciones a los estudios de los fundamentos de la matemática (Metamatemática) puede encontrarse en el texto de Bell [Bel2]. Una aplicación (Metamatemática) del método de forcing para probar teoremas matemáticos puede encontrarse en [Solovay].

Referencias

[A-M-O] C. Alchourrón, J. Méndez y R. Orayen. (Editores) *Lógica*. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Consejo Superior de Investigaciones científicas. Trotta. Madrid. 2005.

[AA] A. Alemán. *Lógica, matemáticas y realidad*. Tecnos. Madrid. 2011.

[Ah] L. Ahlfors. *Complex Analysis. An introduction to the of analytic functions of one complex variable*. McGraw-Hill Book Company. New York. 1966.

[Am] E. Amir. *Interpolation theorems for Nonmonotonic Reasoning Systems*. Appear in 8th European Conference on Logic in Artificial Intelligence (JELIA 2002).

[Aris] Aristóteles. *Metafísica*. Editorial Sramericana. Buenos Aires. 1986.

[AJ] J. Amor. *El Problema del Continuo después de Cohen (1964-2004)*. Aportaciones Matemáticas. Memorias 35 (2005), 71-80.

[A-B] A. Anderson y R. Belnap. *Entailment. The Logic of relevance and necesity*. Princeton University Press. 1975.

[Ba] J. Bagaria. *La teoría de conjuntos*. La Gaceta de la RSME, Vol. 15 (2012), Núm. 2, Pás. 1-20.

[Ba1] J.Bagaria. *Natural Axioms of set theory and the continuum problem*. Institució Catalana de Recerca i Estudis Avacats (ICREA), and Departament de Lógica, História i Filosofia de la Ciéncia. Universitat de Barcelona. 2004.

[Bel1] J. Bell. *Infinitary Logic*. Enciclopedia de Filosofía de la universidad de Stanford. 2016. https://plato.stanford.edu/entries/logic-infinitary/

[Bel2] J. Bell. *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*. Clarendon Press. Oxford.1979.

[B-P] P. Benacerraf y H. Putnan. *Philosophy of Mathematics*. Cambridge University Press. 1983.

[Ben] J. van Benthem. *Interpolation, Annotated Proofs, and Inference Across Models*. Interpolations Conference in Honor of William Craig. Universidad de Stanford. 2007. http://math.stanford.edu/ feferman.

[Bek] M. Bekkali. *Open problems in boolean algebras over partially ordered sets*. University Side Mohamed Ben Abdullah (USMBA). Fez, Marocco. 2010. (bekka@menara.ma).

[Ber] P. Bernays. *El Platonismo en Matemáticas* (1934). Universidad Central de Venezuela. Caracas. 1982.

[Beth] E. Beth. *On Padoa's method in the theory of definition*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 56 = Indagationes Math., 15: 330-339. (1953).

[Bet] C. Betz. *Introducción a la Teoría de la Medida e Integración*. Universidad Central de Venezuela-Facultad de Ciencias. 1992.

[Bra] F. Bravo. *Introducción a la filosofía de Platón*. Eduven. 1990.

[Ca1] G. Cantor. *Contributions to the founding of the theory of transinite numbers* (1895-97). Dover Publications, Inc. 1955.

[Ca2] C. Cantor. *Fundamentos para una Teoría General de Conjuntos* (1883). Crítica. 2005.

[Co1] P. Cohen. *The Independence of continuum Hypothesis II*. Procedings of the National Academy of Science U.S.A. 51 (1964), 105-110.

[Co2] P. Cohen. *Set Theory and The Continuum Hypothesis*. W. A. Benjamin, Inc. 1966.

[Cor]. M. Corbillón. *Análisis real no estándar*. Tesis de licenciatura en Matemáticas. Tutor: Dr. Josep Maria Font Llovet. Facultat de Matemátiques. Universitat de Barcelona. 2015.

[Ce] E. Craig. (Editor). *Routledge Encyclopedia of Philosophy*. Volumen 4 (Genealogy-lqbal, Muhammad). New York. 1998.

[C1] W. Craig. *Linear reasoning. A new form the Herbrand-Gentzen theorem*. The Journal of Symbolic Logic 22 (1957), $n°$ 3, 250-258.

[C2] W. Craig. *Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory*. The Journal of Symbolic Logic 22 (1957), n° 3, 269-285.

[Ch-K] C. Chang - H. Keisler. *Model Theory*. Dover Publications. 2012.

[Cho] S. Chocrón. *Yo Creo. Los 13 principios de la fe de Maimónides comentados en términos actuales*. Editorial Jerusalem de México. México. 2008.

[Chu] A. Church. *Introduction to mathematical logic. Volume I*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey. 1956.

[Da] M. Davis. *The Undecidable. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable function*. Raven Press. 1965.

[De] J. De Lorenzo. *Del Hacer Matemático y sus Folosofías*. ILUIL, Vol. 26, 2003, 903-917.

[D1] C. Di Prisco. *Introdución a la Lógica Matemática*. Emalca Amazonia. 2009.

[D2] C. Di Prisco. *Teoría de Conjuntos*. Universidad Central de Venezuela: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico. 2009.

[D3] C. Di Prisco. *Inmersiones elementales y grandes cardinales*. Notas no publicadas. 1982.

[D4] C. Di Prisco. *Are we closer to a solution of the continuum problem?*. Rev. Int. Fil., Campinas, V. 28, n. 2, p. 331-350. 2005.

[D5] C. Di Prisco. *Mathematics versus metamathematics in Ramsey theory of the real numbers*. En "Logic, Methology and Phylosophy of Science. Procceding of the twelfth International Congress". Petr Hajek, Luis Valdes-Villanueva, Dag Westerstalhl. Eds. Kings College Publications. London. 2005.

[D-U] C.Di Prisco-C.Uzcátegui.*Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Asociación Matemática Venezolana,1991.

[E1] H. Enderton. *Una Introducción Matemática a la Lógica*. Universidad Nacional Autónoma de México. México. 2004.

[E2] H. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press. New York. 1977.

[E-F-T] H. Ebbingahaus - J. Flum - W. Thomas. *Mathematical Logic.* Springer. 1996.

[F] S. Feferman. *Harmonious Logic: Craigs Interpolation Theorem and its Descendants*. Interpolations Conference in Honor of William Craig. Universidad de Stanford. 2007. http://math.stanford.edu/ feferman.

[Fe1] J. Ferreirós. *Kurt Gödel: Revolución en los Fundamentos de las matemáticas*. ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura. CLXXXIII 725, mayo-junio (2007), 409-418.

[Fe2] J. Ferreirós. *Matemáticas y Platonismo(s)*. La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas 2 (1999), 446-473.

[FG1] F. Galindo. *Una demostración del Teorema de Lindström*. Tesis de licenciatura en Filosofía. Escuela de Filosofía. Universidad Central de Venezuela. Tutor: Dr. Carlos Di Prisco. 1997.

[FG2] F. Galindo. *Forcing y Reales genéricos*. Tesis de maestría. Postgrado de matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. Tutor: Dr. Carlos Di Prisco. 2003.

[FG3] F. Galindo. *Propiedades de conjuntos perfectos en modelos de ZF*. Tesis doctoral. Postgrado de matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. Tutor: Dr. Carlos Di Prisco. 2010.

[FG4] F. Galindo. *Tres Tópicos de Lógica*. Trabajo de Ascenso para agregado. Escuela de Filosofía. Universidad Central de Venezuela. 2012.

[FG5] F. Galindo. *Algunos métodos de la lógica. Y una revisión crítica de los mismos en relación con los fundamentos de las matemáticas*. Trabajo de ascenso para asociado. Escuela de Filosofía. Universidad Central de Venezuela. 2014.

[FG6] F. Galindo. *Una presentación de la demostración directa del teorema de compacidad de la lógica de rimer orden que usa el método de ultraproductos*. UNA INVESTIGACI@CIÓN, Vol. VIII, $N°$ 15 (2016).

[FG7] F. Galindo. *Dos Teoremas de Interpolación.* Divulgaciones Matemáticas, Vol. 17, N 2(2016), pp. 15-42.

[FG8] F. Galindo. *Álgebras booleanas, órdenes parciales y el axioma de elección.* Divulgaciones Matemáticas. Vol. 18, N 1 (2017). Por aparecer.

[FM] J. Ferrater. *Diccionario de Filosofía.* Editorial Ariel, S. A. Barcelona. 2001.

[Fre] G. Frege. *Conceptografía (Un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro) (1879). Los Fundamentos de la Aritmética (Una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número) (1884). Otros estudios filosóficos* (1891, 1892, 1904). Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Investigaciones Filosóficas. México. 1972.

[Gar] M. Garrido. *Lógica Simbólica.* Tecnos. 2003.

[Ga-Mak] D. Gabbay y L. Maksimova. *Interpolation and Definability: Modal and Intuitionistic Logics.* Clarendon Press. Oxford. 2005.

[Go1] K. Gödel. *Obras completas.* Alianza. Madrid. 1981.

[Go2] K. Gödel. *¿Qué es el problema del cardinal del continuo de Cantor?* (1947). En "Obras completas" de Gödel, Alianza, Madrid, 1981. Páginas 340-362.

[Go3] K. Gödel. *Some cosiderations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is* $\aleph_2$. En K. Gödel *Collected Works* , vol. 3. S. Feferman, J. Dawson Jr., W. Goldfarb, C. Parsons and R. Solovay(eds.). Oxford: Oxford niversity Press. 2001.

[Go4] K. Gödel. *La lógica matemática de Russell* (1944). En "Obras completas" de Gödel, Alianza, Madrid, 1981. Páginas 297-327.

[Go5] K. Gödel. *Ensayos inéditos.* Biblioteca Mondadori. 1994. Editor: Francisco Consuegra. Prólogo: W. V. Quine.

[Hac] S. Hacck. *Filosofía de las Lógicas.* Cátedra. Madrid. 1982.

[Hal] P. Halmos. *Lectures on Boolean Algebras.* Van Nostrand. 1963.

[H-L] J. Halpern y A. Lévy. *The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice*. En " Axiomatic Set Theory" (D. S. Scoott, ed), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, 1967.

[Hen1] L . Henkin. *The completeness of the firs-orden functional calculus.* The Journal of Symbolic Logic 14 (1949) 159-166.

[Hen2] L. Henkin. *An extension of the Craig-Lyndon interpolation theorem.* The Journal of Symbolic Logic 28 (1963) 201-216.

[Hey1] A. Heyting. *Los fundamentos intuicionistas de la matemática* (1930). En "Philosophy of Mathematics", Editores: P. Benacerraf y H. Putnan, Cambridge University Press, 1998.

[Hey2] A. Heyting. *Introducción al intuicionismo* (1955). Tecnos. Madrid. 1976.

[Hij] J. Hijenoort.*From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Harvard University Press. 1976.

[Hil] D. Hilbert. *Los fundamentos de las matemáticas*. Mathema. 1993.

[Hoo] E. Hoogland. *Definability and Interpolation. Model-Theoretic investigations*. Institute for Logic, Language and Computation. Universiteit van Amsterdam. Promotor: Prof. dr. D. H. J. de Jongh. 2001.

[Hor] L. Horsten. *Philosophy of Mathematics*. Enciclopedia de Filosfía de la Universidad de Stanford. https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/. 2012.

[H-R] P. Howard - J. Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*. American Mathematical Society. 1998.

[H-J] K. Hrbacek y T. Jech. *Introducton to set theory*. Marcel Dekker, Inc. New York. 1999.

[Hu-Cre] G. Hughes y M. Cresswell. *Introducción a la lógica modal*. Tecnos. Madrid. 1973.

[Hu]G. Hunter. *Metalógica. Introducción a la metateoría de la lágica clásica de primer orden*. Paraninfo. Madrid. 1981.

[Ivo] Ivorra. *Análisis no estándar*. Internet. 2016.

[Ja] I. Jané. *Álgebras de Boole y Lógica*. Publicacions Universitat de Barcelona. 1989.

[J1] T. Jech. *Set Theory*. Springer. New York. 2000.

[J2] T. Jech. *The Axiom of Choice*. Dover Publications. 2008.

[J3] T. Jech. *Set Theory*. Academic Press. New York. 1978.

[J4] T. Jech. *Multiple Forcing*. Cambridge University Press. 1986.

[J5] T. Jech. *El Infinito*. La Gaceta de la RSME, Vol. 8.2 (2005), Pás. 369-377.

[JV] J. Vital. *Etz Jaím*. Tel Aviv. 1960.

[Ka] A. Kanamori. *The Higher Infinite. Large Cardinal in Set Theory from their Beginnings*. Springer. Berlin. 1997.

[Kan] I. Kant. *Crítica de la razón pura*. Ediciones Taurus. México. 2006.

[Kle] S. Kleene. *Introducción a la Metamatemática*. Tecnos. Madrd. 1974.

[Kne] W. Kneale y M. Kneale. *E Desarrollo de la lógica*. Tecnos. Madrid. 1980.

[Ku] K. Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. College Publications. 2011.

[Li] P. Lindström. *On extensions of elementary logic*. Teoria, Vol. 39, pp. 1-11.

[Lip] S. Lipschutz. *Teoría de conjuntos y temas afines*. Libros McGraw-Hill. México. 1970.

[Lop] C. Lopez. *El Infinito en la Historia de la Matemática*. Ciencia y Tenología, 14, 2014, pp. 277-298.

[Lo] J. Loś. *Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres*. En " Mathematical Interpretation of Formal Systems" (T. Skolem et al.,eds.). North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1955, 98-113.

[Mak] J. Makowsky. *Model Theory in computer science: My Own Recurrent themes (and some lessons I learned)*. Faculty of Computer Science Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Israel. 2016.

[Mad] P. Maddy. *Naturalism in Mathematics*. Clarendon Press. Oxford. 1997.

[Maim1] M. ben Maimon (Maimónides). *Guía de Perplejos*. Trotta. Madrid. 1998.

[Maim2] M. ben Maimon (Maimónides). *Obras Filosóficas y Morales* (*El libro de la ciencia, del conocimiento*). Obelisco. Barcelona. 2006.

[Maim3] M. ben Maimon (Maimónides). *Mishné Torá*. Editorial Tel-Aviv. Israel.

[Ma] M. Manzano. *Teoría de Modelos*. Alianza. Madrid. 1989.

[Manc] P. Mancosu. *Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática*. Disputatio. Philosophical Research Bulletin 5:6(2016): pp. 131-156.

[Mart] M. Macho. *'Dios hizo los naturales, el resto es obra del hombre'*. divulgaMat. Centro virtual de divulgación de las matemáticas. Real Sociedad Matemática Española (RSME). 2016.

[Me] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapman and Hall/CRL. U.S.A. 2009.

[Mi] A. Miquel.*Introducción al análisis no estándar*. Univesidad de la República (Uruguay). Facultad de Ingenería. Equipo de lógica. Centro de matemática. 2015.

[Mo1] G. Moore. *A House divide against itself: The emergence of first-Order logic as the basis for mathematics*. En "Studies in the History of Mathematics". Esther R Phillips (ed.). Mathematical Association of America. pp. 98-136. 1987.

[Mo2] G. Moore. *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*. Dover Publications. 2013.

[Mo3] G. Moore. *The emergence of First-Order Logic*. En “History and Philosophy of Modern Mathematics”. Volume XI. Editores: W. Aspray y P. Kitcher. University of Minesota Press, Minneapolis. 1988.

[Mos] J. Mosterín. *Los Lógicos*. Espasa. Madrid. 2000.

[M-T] J. Mosterín y R. Torretti. *Diccionario de Lógica y Filosofía de la Ciencia*. Alianza. 2002.

[Mou] U. Moulines. (Editor). *La Ciencia: Su Estructura y Desarrollo*. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Trotta. Madrid. 2013.

[N-S] A. Nerode - R. Shore. *Logic for Applications*. Springer-Verlag. New York. 1993.

[Ne] J. Neumann. *El Matemático* (1947). En “Sigma: El mundo de las matemáticas”, J. Neuman, Grijalbo, Vol. V., 1968.

[Pa-Ba]. J. Pastor y J. Babini. *Historia de la matemática*. Dos Volúmenes. Gedisa. Barcelona. 2000.

[Pe] A. Petrovich. *Álgebras de Boole*. Universidad Nacional del Sur. Bah´ ia Blanca. 2007. www.matematica.uns.edu.ar/IXCongresoMonteiro/Comunicaciones/Boolean.pdf.

[Pla] Platón. *Diálogos*. Ediciones universales. Bogotá. 1988.

[Q1] W. Quine. *Filosofía de la lógica*. Alianza. Madrid. 1998.

[Q2] W. Quine. *Acerca de lo que hay*. En “Desde un punto de vista lógico”, W. Quine, Ariel, 1962.

[Q3] W. Quine. *Set Theory and its Logic*. Harvard University Press. 1969.

[Q4] W. Quine. *Dos dogmas del empirismo*. En “Desde un punto de vista lógico”, W. Quine, Ariel, 1962.

[Ra] F. Ramsey. *On a problem of formal logic*. Proceedings of the London Mathematical Society, 30 (1930), 264-286.

[Rob1] A. Robinson. *Non-standard analysis*. Amsterdam. North Holland. 1974.

[Rob2] A. Robinson. *A result on consistency and its application to the theory of definition*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 59 = Indag. Math., 18: 47-58.

[Robl] J. Robles. *Los escritos matemáticos de George Berkeley y la polémica sobre El Analista*. Universidad Autónoma de México. Instituto de Investigaciones Filosóficas. 2006.

[Roy] H. Royden. *Real Analysis*. Pearson.2010.

[Shah] H. Shahen. *Relatividad para principiantes*. Fondo de Cultura Económica. México. 1995.

[Sha] S. Shapiro. *Foundations without Foundationalism. A Caso for Second-order Logic*. Clarendon Press. Oxford. 2002.

[S] R. Sikorski. *Boolean Algebras*. Springer-Verlag. 1960.

[So1] D. Solow. *The Keys to Advancep Mathematics: Recurrent Themes in Abstract Reasoning*. BookMstaer Distribution Center. U.S.A. 1995.

[So2] D. Solow. *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas?*. Limusa. 1993.

[Solovay] R. Solovay. *On the cardinalidad de Σ_1^2 sets of reals*. en "Foundations of Mathematics. Symposium Papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel". Jack J. Bullof, Thomas, C. Holyoke and S. W. Hahn, Editors. Springer-Verlag. 1969.

[Stan] *Philosophy of mathematics*. Stanford Encyclopeia of Philosophy. 2017. Enlace:

https://plato.stanford.edu/search/search?query=philosophy+of+mathematics

[Ste] I. Stewart. *17 Equaciones que cambiaron al mundo. Capítulo 3: Fantasmas de cantidades difuntas*. www.librosmaravillosos.com

[Sto] M. Stone. *The theory of representations for Boolean algebras*. Trans.Amer. Math. Soc. 40 (1936), 37-111. zbl.014.34002.

[Sup] P. Suppes. *Introducción a la Lógica Simbólica*. Compañía Editorial Continental, S. A. México. 1980.

[T] C. Tinelli. *The Impact of Craig's Interpolation Theorem in Computer Science*. Interpolations Conference in Honor of William Craig. Universidad de Stanford. 2007. http://math.stanford.edu/ feferman.

[TK] T. Kuhn. *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de Cultura Económica. Madrid. 2000.

[To] R. Torretti. *El Paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía de la matemática*. Universidad Nacional Andrés Bello. 1998.

[Va1] J. Väänänen. *The Interpolation Theorem in Abstract Model Theory*. Interpolations Conference in Honor of William Craig. Universidad de Stanford. 2007. http://math.stanford.edu/ feferman.

[Va2] J. Väänänen. *Barwise: Abstract Model Theory and Generalized Quantifiers*. The Bulletin Symbolic Logic. Volumen 10, Número 1, Marzo 2004.