

ANALÍTICA

REVISTA DE FILOSOFÍA N° 9

Lima, 2015

ARTÍCULOS

Philosophy of Science in Latin America.

Alberto Cordero Lecca

*Explicating Structural Realism in the Framework of the Structuralist
Meta-Theory*

Thomas Meier

*Actualización y Ampliación del Sistema de Aritmetización Completa del Nivel
de la Lógica Bivaluada de Hugo Padilla-Chacón*

Gabriel Garduño-Soto

Interpretation of intentional actions. Three non reducible features

Pablo Quintanilla

Reflexiones sobre ciencia y filosofía

Óscar Augusto García Zárate

NOTAS

Universidad e investigación en filosofía

Óscar Augusto García Zárate

Jørgensen's dilemma: The quest for semantic foundations of imperatives

Miguel Á. León Untiveros

El algoritmo de la selección natural como ácido universal: Taller sobre

La peligrosa idea de Darwin de Daniel C. Dennett

David Villena Saldaña

OBITUARIOS

Patrick Suppes (1922-2014)

Jaakko Hintikka (1929-2015)

Ingmar Pörn (1935-2014)

NOTICIAS

I Encuentro Latinoamericano de Filosofía Científica – Homenaje a
Mario Bunge

Taller de Filosofía Matemática

ANALÍTICA

Revista de Filosofía, N.º 9

Director

Óscar Augusto García Zárate

Comité Editorial

David Villena Saldaña
José Antonio Tejada Sandoval
Javier Vidal López
Pablo Quintanilla Pérez-Wicht
Miguel Ángel León Untiveros
Rafael Félix Mora Ramirez

Comité Consultivo Internacional

Alberto Cordero-Lecca
(City University of New York, EE. UU.)
Jean-Pierre Cometti
(Universidad de Provenza, Francia)
Pascal Engel
(Universidad de Ginebra, Suiza)
W. D. Hart
(Universidad de Illinois, Chicago, EE.UU.)
Øystein Linnebo
(Birkbeck College, University of London, Reino Unido)
Georg Meggle
(Universidad de Leipzig, Alemania)
Francisco Miró Quesada Cantuarias
(Sociedad Peruana de Filosofía)
Luis Piscoya Hermoza
(UNMSM, Perú)
Jorge Secada Koechlin
(Universidad de Virginia, EE. UU.)
Scott Soames
(Universidad de California Sur, EE. UU.)

**Revista indizada en LATINDEX (Sistema Regional de Información en línea
para Revistas Científicas de América Latina, España y Portugal)**

Correo-e: analitica@cesfia.org.pe

URL: <http://www.cesfia.org.pe/analitica>

Incluida en The Philosophers' Index

ISSN: 1996-1464

Depósito Legal: 2012-01040

ANALÍTICA

REVISTA DE FILOSOFÍA N° 9

SUMARIO

Presentación 5

ARTÍCULOS

Philosophy of Science in Latin America
Alberto Cordero Lecca 9

*Explicating Structural Realism in the Framework of the
Structuralist Meta-Theory*
Thomas Meier 43

*Actualización y Ampliación del Sistema de Aritmetización Completa
del Nivel de la Lógica Bivaluada de Hugo Padilla-Chacón*
Gabriel Garduño-Soto 69

Interpretation of Intentional Actions. Three non Reducible Features
Pablo Quintanilla 113

Reflexiones sobre ciencia y filosofía
Óscar Augusto García Zárate 123

NOTAS

Universidad e investigación en filosofía
Óscar Augusto García Zárate 145

*Jørgensen's dilemma: The quest for semantic foundations
of imperatives*
Miguel Á. León Untiveros 149

*El algoritmo de la selección natural como ácido universal: Taller
sobre La peligrosa idea de Darwin de Daniel C. Dennett*
David Villena Saldaña 167

OBITUARIOS

Patrick Suppes (1922-2014) 177

Jaakko Hintikka (1929-2015) 179

Ingmar Pörn (1935-2014) 181

NOTICIAS

I Encuentro Latinoamericano de Filosofía Científica – Homenaje a Mario Bunge	185
Taller de Filosofía Matemática	187

PRESENTACIÓN

El Centro de Estudios de Filosofía Analítica (CESFIA) ha cumplido once años de vida institucional en forma ininterrumpida, dedicando sus mejores esfuerzos al estudio, cultivo y difusión de la filosofía analítica dentro del Perú y el de fomentar el desarrollo de investigaciones en lengua castellana e inglés a nivel iberoamericano, emparentadas con la filosofía analítica y su historia, en tanto método y temática.

La filosofía analítica, como es sabido, se originó en los países anglosajones entre comienzos y mediados del siglo XX como resultado de la confluencia del positivismo lógico del Círculo de Viena, los proyectos lógicos de Frege, el análisis lógico de Russell, la filosofía del análisis del lenguaje ordinario de Moore y el estilo de reflexión de Wittgenstein. Constituye —qué duda cabe— una rica tradición de pensamiento y un estilo peculiar y fructífero de practicar la filosofía. La labor crítica de evaluar, expresada en el deseo no de fundar doctrina alguna, sino de evaluar sistemáticamente el lenguaje y el modo en que su articulación da lugar a los argumentos sobre los que se erigen los diversos discursos que se ordenan en los heterogéneos ámbitos de problematización que integran el quehacer filosófico, representa uno de los rasgos fundamentales de la tradición analítica. Estos once años dejan tras de sí numerosas satisfacciones y tiene como corolario la edición del noveno número de *Analítica*, revista de CESFIA, que ofrecemos hoy a la comunidad filosófica.

El Comité Editorial, con la venia de sus árbitros, ha considerado incluir, en este número, valiosas contribuciones de Alberto Cordero Lecca de la CUNY Graduate Center & Queens College CUNY, de Thomas Meier de la Munich Center for Mathematical Philosophy Ludwig-Maximilians-Universität München, de Gabriel Garduño-Soto de la Universidad Nacional Autónoma de México y de Pablo Quintanilla de la Pontificia Universidad Católica del Perú. A ellos nuestro reconocimiento y profunda gratitud por habernos hecho llegar generosamente sus importantes colaboraciones, que contribuyen con la institucionalización de espacios de debate para la filosofía analítica en la región.

Finalmente, gracias les sean dadas a la Facultad de Letras y Ciencias Humanas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos en la persona de su decano, el Dr. Raimundo Prado Redondez, por su auspicio institucional. De igual modo, al Dr. José Antonio Beraún Barrantes, rector de la Universidad de Huánuco, por el auspicio económico. Sin sus generosos apoyos, habría sido difícil llevar a término esta empresa editorial.

Óscar Augusto García Zárate

Presidente de CESFIA y director de *ANALÍTICA*

Lima, diciembre de 2015

ARTICULOS

ACTUALIZACIÓN Y AMPLIACIÓN DEL SISTEMA DE ARITMETIZACIÓN COMPLETA DEL NIVEL DE LA LÓGICA BIVALUADA DE HUGO PADILLA-CHACÓN

Gabriel Garduño-Soto
Universidad Nacional Autónoma de México
ygardho@ymail.com
México

1. Aritmetización del nivel de la lógica

La aritmetización de la lógica pasa por ser un tema novedoso actualmente, sin embargo, esto es debido al desconocimiento del trabajo de los autores que primeramente idearon y plantearon formalmente la posibilidad de esta aritmetización, como el filósofo alemán G.W. Leibniz –quien inicia este planteamiento en el s. XVIII, al proponer la noción de un cálculo exacto en lógica, llegando incluso presentar una versión aritmetizada de la silogística aristotélica (Sotirov, V., 1999)– y el lógico inglés G. Boole, quien desarrolla en 1854 lo que aun hoy llamamos álgebra booleana, la cual constituye, propiamente hablando, una aritmetización de la lógica. Entre numerosos autores involucrados en este terreno, es necesario considerar el importante trabajo de formalización teórica que abordaron G. Frege (1879), E. Schröder (1890-1910) y A.N. Whitehead y B. Russell (1910-1913), abriendo el camino que hizo posible el franco desarrollo de la aritmetización moderna, en la primera mitad del siglo XX (E.T. Bell, 1927, I.I. Zhegalkin, 1928 y K. Gödel, 1931), citando sólo algunos de los más destacados autores relacionados con la aritmetización de la lógica (Uckelman, S.L., 2010), que aun continúa siendo investigada y desarrollada.

Por otra parte, es preciso mencionar la actual tendencia hacia la implementación automática de los esquemas de aritmetización de la lógica, desde los inicios del diseño de las primeras computadoras (Quine, W.V.O, 1959) y aun más recientemente, se ha presentado una plétora de autores con los más novedosos –a veces farragosos– enfoques desde muy diversas áreas de la disciplina matemática, especialmente la algebraica. La gran mayoría de estos contemporáneos enfoques e implementaciones han tenido un propósito eminentemente práctico, ante la multiplicidad de problemas que involucra el diseño computacional, especialmente en nuestros días, con las exigencias que presupone la construcción de unidades lógicas de alto desempeño (VLSI:

very large scale integrators)¹. De modo tal que actualmente se impone una perspectiva de automatización que, en muchos aspectos, pasa por alto las exigencias teóricas y filosóficas que inicialmente inspiraron el proyecto de aritmetizar la lógica, al echarse mano en estas implementaciones de la más variopinta gama de recursos matemáticos –con el manejo de ingentes cantidades de memoria computacional– que en mucho rebasa la inicial aspiración o *desideratum* de usar solamente recursos propiamente aritméticos. Aun en medio de esta feraz competencia en microelectrónica por disponer de recursos ‘prácticos’ que circunvenzan los límites teóricos conocidos dentro de la lógica, especialmente en universos infinitos, se observa ya un retorno al propósito inicial dentro de la aritmética primitivista (Salehi P.S., 2002; Schang F., 2011).

Así pues, el sistema de aritmetización primitivista² de Hugo Padilla-Chacón, aquí actualizado y ampliado por este autor, aborda –desde una perspectiva finitaria y original– íntegramente el nivel de la lógica, para la solución de problemas estándares y no-estándares, que constituyen a su vez toda una novedad en el seno de la tradición lógica contemporánea.

2. Aritmetización y tablas de verdad

Hasta hace muy poco tiempo se consideraba que, aun en universos finitos, no existía un método infalible o algorítmico para llegar a establecer la irrefragable validez de una deducción, o corrección de una operación cualquiera en lógica, excepción hecha de las *tablas de verdad* concebidas independientemente por el lógico polaco Jan Łukasiewicz, el lógico austríaco Ludwig Wittgenstein y el lógico inglés Emil Post en el primer cuarto del siglo XX, si bien, según Quine, esta pauta de razonamiento fue cosa de Frege, Peirce y Schröder y data de 1880.

A continuación veamos la más explícita concepción de Ludwig Wittgenstein acerca de las funciones lógicas (funciones de verdad) como expresiones de “las posibilidades de verdad de los argumentos de verdad,” para cualquier número de proposiciones elementales, en este caso, de dos proposiciones elementales –también llamadas independientes– P y Q .³

1 Véase: Yanushkevich, S., 1995 y 1998.

2 Cuyos únicos recursos son los cuatro operadores aritméticos fundamentales (+, -, ×, ÷) y la función entero ([]).

3 Véase: *Tractatus Logico-Philosophicus* 5.101.

Tabla 2.1. Posibilidades de Verdad de los Argumentos de Verdad que Verifican a una Proposición (*Fundamentos de la Verdad*, según Wittgenstein).⁴

VVVV	(P, Q)	Tautología		Si P entonces P; si Q entonces Q (P → P) ∧ (Q → Q)	15
FVVV	(P, Q)	En palabras:	No conjuntamente P y Q	-(P ∧ Q)	7
VFVV	(P, Q)	»	Si Q entonces P	Q → P	11
VVVF	(P, Q)	»	Si P entonces Q	P → Q	13
VVVF	(P, Q)	»	P ó Q	P ∨ Q	14
FFVV	(P, Q)	»	No Q	¬Q	3
FVVF	(P, Q)	»	No P	¬P	5
FVVF	(P, Q)	»	P ó Q, no ambas	(P ∧ ¬Q) ∨ (Q ∧ ¬P)	6
VFFV	(P, Q)	»	Si P entonces Q y si Q entonces P	P ↔ Q	9
VFVF	(P, Q)	»	P	P	10
VVFF	(P, Q)	»	Q	Q	12
FFVV	(P, Q)	»	Ni P ni Q	(¬P ∧ ¬Q) ó (P Q)	1
FFVF	(P, Q)	»	P y no Q	(P ∧ ¬Q)	2
FVFF	(P, Q)	»	Q y no P	(Q ∧ ¬P)	4
VFFF	(P, Q)	»	P y Q	(P ∧ Q)	8
FFFF	(P, Q)	Contradicción		P y no P; y Q y no Q (P ∧ ¬P) ∧ (Q ∧ ¬Q)	0

Para ejemplificar la aplicación de estas funciones veritativas, veamos a continuación un ejemplo en el nivel lógico bivaluado (L_2), biproposicional (${}_2L_2$), es decir en lógica clásica tradicional con dos valores de verdad, a saber: (<Falso, Verdadero>, <-,>, <0,1>) y también en este caso, con dos proposiciones independientes, o elementales según Wittgenstein, (P y Q):

Tabla 2.2. Definición del Operador de la Conjunción Lógica (And)⁵ en ${}_2L_2$

Q	P	P	∧	Q
F	F	F	F	F
F	V	V	F	F
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

4 Para introducir desde el inicio la visión panorámica de la aritmetización de la lógica y su mapeo en los números naturales (\mathbb{N}_0), en esta tabla del *Tractatus* se ha adicionado la última columna a la derecha, que contiene la interpretación en sistema numérico decimal, de la lectura en sistema numérico binario de las funciones veritativas propuestas por Wittgenstein, en la primera columna de la izquierda: (V=1, F=0).

5 Véase el penúltimo renglón de la tabla 2.1.

Es decir que la función *and* (en negritas) sólo es válida cuando ambas proposiciones *P* y *Q* son verdaderas. De este modo hemos de tomar en cuenta que la función *and* es solamente una de las dieciséis funciones que Wittgenstein propone para este nivel de la lógica. Para entender a cabalidad este lenguaje combinatorio que es el fundamento moderno de la lógica bivaluada biproposicional ($_2L_2$), debemos distinguir también otras propiedades de estas funciones lógicas, tales como: *a*) la *cardinalidad* del conjunto que las contiene a todas ellas, es decir su dominio, ya que su número (2^n)⁶ varía a medida que el número (*n*) de proposiciones independientes, o elementales, se incrementa; *b*) su nombre y su símbolo; *c*) la extensión de la aplicación de cada función (*aridad*), la cual nos habla acerca del número de proposiciones independientes sobre el cual realmente aplica la operación lógica que representa cada función de verdad, también comúnmente conocidas como “operadores lógicos”; *d*) el número de condiciones de verdad que cada función verifica (valuaciones no nulas); y asimismo, para los fines de la aritmetización de la lógica, *e*) su posible interpretación en el sistema numérico binario y decimal –o cualquier otro que convenga para ese mismo fin–.

Con este propósito en mente conviene especificar los dos niveles lógicos que anteceden a ($_2L_2$), es decir, el nivel de la lógica bivaluada con cero proposiciones –o variables lógicas–, al cual podemos llamar propiamente ceroádico ($_0L_2$) y el nivel de la lógica bivaluada monoproposicional, o monádica ($_1L_2$) –es decir, con una sola variable lógica–.

Tabla 2.3. Definición de las Dos (2^0) Expresiones Constantes 0-ádicas (cero variables) de la Lógica Bivalente ($_0L_2$)

Cero Variables Proposicionales	?	>
	(Contradicción o <i>Falsum</i>)	(Tautología o <i>Verum</i>)
	F	V

En el nivel de la lógica bivaluada ceroádica se podrá pensar éste como un ejercicio superfluo, ya que no contiene variable lógica alguna, sin embargo, conviene especificarlo para apreciar cómo la concepción, la construcción misma de toda lógica (bivaluada en este caso), conlleva desde el inicio mismo –aun en ausencia de carga proposicional– como rúbrica las funciones constantes que representan a la *contradicción* y a la *tautología*, funciones mismas que estarán siempre presentes en cualquier nivel proposicional.

6 Véase esta fórmula en: Post E. *Introduction to a general theory of Elementary Propositions*. 1921.

Como puede observarse en el siguiente nivel lógico monádico ($_1L_2$) las expresiones pueden dividirse en dos clases, las cuales prevalecerán siempre en cualquier nivel lógico –excepto en el nivel ceroádico ($_0L_2$) el cual únicamente contiene expresiones constantes–, es decir, a) la clase de las expresiones constantes o invariantes, a saber, como ya se mencionó arriba, la *contradicción* –siempre falsa bajo cualquier circunstancia veritativa– y la *tautología* –siempre verdadera bajo cualquier circunstancia veritativa– y b) la clase de las expresiones contingentes cuyos valores de verdad son a veces verdaderos y otras falsos.

Tabla 2.4. Definición de las Cuatro (2^2) Expresiones Posibles de la Lógica Bivalente Monádica ($_1L_2$).

Una sola variable proposicional (P)	? Contradicción o <i>Falsum</i>	$\neg P$ (negación de P)	P (variable única)	> Tautología o <i>Verum</i>
F	F	V	F	V
V	F	F	V	V
<i>Clase:</i>	<i>constante</i>	<i>contingente</i>	<i>contingente</i>	<i>constante</i>

Una vez definidas todas las expresiones posibles de los niveles lógicos ceroádico y monádico, es necesario examinar exhaustivamente el nivel bivaluado biproposicional ($_2L_2$), con el fin de mejor conocer todas las expresiones que lo conforman, así como sus propiedades.

En la tabla 2.5 se despliega una tabla de verdad tradicional para las funciones u operadores lógicos biproposicionales donde se ha sustituido los valores veritativos (F,V) por los valores binarios (0,1) respectivamente, tal como actualmente se representa a estos operadores lógicos en el área computacional. Esta interpretación, en diversas modalidades, se ha convertido en un estándar, si bien $\widetilde{\rightarrow}$ y $\widetilde{\leftarrow}$ son referidos compuestos como $(P \wedge \neg Q)$ y $(Q \wedge P)$.

Tabla 2.5. Tabla de Verdad para las 16 (2^2) Expresiones Posibles y Semánticamente Distintas del Nivel Bivaluado Biproposicional $_2L_2$.

Q	P	?	\downarrow	$\widetilde{\rightarrow}$	$\neg Q$	$\widetilde{\leftarrow}$	$\neg P$	ζ	j	\wedge	\leftrightarrow	P	\leftarrow	Q	\rightarrow	\vee	>
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Como podrá observarse, en la tabla anterior se despliega propiamente la interpretación veritativa que Wittgenstein propone ya en el *Tractatus* 5.101, para mejor apreciar esta similitud, con fines de aritmetizar completamente el nivel de la lógica, en la tabla 2.6 se reinterpreta, reordena y modifica la tabla original de Wittgenstein. En esta tabla se utiliza el método conocido como suma de productos, para que cada función, o expresión lógica, quede plenamente representada por su equivalente numérico en base decimal, tomemos por ejemplo el operador diádico del condicional ($P \rightarrow Q$) el cual es representado por las condiciones veritativas VVFV (véase el 4º renglón de la tabla 2.1), que una vez convertidas a la notación en sistema numérico binario nos produce la expresión **1101** (véase 16ª columna de la tabla 2.5), de modo tal que cada valuación no nula se utiliza como coeficiente para la respectiva multiplicación de la base 2 elevada a la potencia correspondiente de derecha a izquierda, así pues tenemos: $(1 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) = 8 + 4 + 1 = 13$.

Tabla 2.6. Aritmetización de las Condiciones de Verdad del Nivel Lógico Bivaluado Biproposicional $_2L_2$

Nombre de la función lógica	Notación simbólica	Aridad	Número de valuaciones no nulas	Posibilidades de verdad de la función lógica expresada como <i>Forma Normal Disyuntiva*</i>				Aritmetización: Suma de productos en base decimal
				$Q \wedge P$	$Q \wedge \neg P$	$\neg Q \wedge P$	$\neg Q \wedge \neg P$	
				Aritmetización: interpretación en base binaria**				
				1 1	1 0	0 1	0 0	
				Aritmetización: interpretación en base decimal				
				3	2	1	0	
				Aritmetización: Potenciación de la base 2				
				2^3	2^2	2^1	2^0	
Contradicción lógica (p.ej.: P y no P)	?	0	0	0	0	0	0	0
<i>Nor</i> : Negación de la alternativa "trazo de Peirce" (ni P ni Q)	↓	2	1	0	0	0	1	1
Negación del condicional (P y no Q)	↗	2	1	0	0	1	0	2
Negación de la variable Q	¬	1	2	0	0	1	1	3
Negación del condicional inverso (Q y no P)	↖	2	1	0	1	0	0	4

Negación de la variable P	$\neg P$	1	2	0	1	0	1	5
<i>Xor:</i> Alternativa exclusiva (P o Q , pero no ambas)	ζ	2	2	0	1	1	0	6
<i>Nand:</i> Negación de la conjunción "trazo de Sheffer" (no conjuntamente P y Q)	\jmath	2	3	0	1	1	1	7
<i>And:</i> Conjunción (P y Q)	\wedge	2	1	1	0	0	0	8
<i>Ssi o Iff:</i> Equivalencia lógica (si P entonces Q y si Q entonces P)	\leftrightarrow	2	2	1	0	0	1	9
Variable lógica P	P	1	2	1	0	1	0	10
Condicionales inverso (Si Q entonces P)	\leftarrow	2	3	1	0	1	1	11
Variable lógica Q	Q	1	2	1	1	0	0	12
Condicionales (si P entonces Q)	\rightarrow	2	3	1	1	0	1	13
<i>Or:</i> Alternativa lógica o Alternativa inclusiva (P o Q , o ambas)	\vee	2	3	1	1	1	0	14
Tautología (p.ej.: si P entonces P)	$>$	0	4	1	1	1	1	15

* Véase las dos primeras columnas de la tabla 2.2 (notación canónica: disyuntos de la FND).

** Véase las dos primeras columnas de la tabla 2.5.

Dado el intrincado y minucioso tejido conceptual y operativo que significa propiamente realizar el mapeo del nivel de la lógica bivaluada en los números naturales (\bullet_0), aun en este incipiente nivel biproposicional, será de utilidad abundar en este método, ilustrando sintéticamente a continuación toda la operación realizada en este nivel (${}_2L_2$), en la siguiente tabla 2.7, donde a las sumas de productos resultantes ubicadas en el último renglón, se les ha añadido, en *itálicas*, un subíndice a la izquierda para denotar la *aridad* de cada expresión ya codificada en un número del sistema decimal, de modo tal que las expresiones *constantes* o *invariantes* poseen un subíndice izquierdo cero (${}_00$ y ${}_015$), el cual denota su condición *ceroádica*, las expresiones correspondientes a cada *variable lógica* y sus respectivas negaciones poseen un subíndice izquierdo igual a la unidad (${}_13$, ${}_15$, ${}_110$ y ${}_112$), el cual denota su característica *monádica*, y las expresiones lógicas propiamente *aplicables sobre dos proposiciones* cualesquiera poseen un subíndice izquierdo igual a 2 (${}_21$, ${}_22$, ${}_24$, ${}_26$, ${}_27$, ${}_28$, ${}_29$, ${}_211$, ${}_213$ y ${}_214$) para denotar su naturaleza realmente *diádica*. El eventual

uso de este subíndice izquierdo italizado, es opcional y únicamente informativo, ya que no significa operación aritmética alguna, pues cada número decimal –amén de codificar directamente una expresión en lógica, perteneciente al dominio lógico correspondiente al número total de las variables lógicas incluidas en el cálculo de referencia (n)– es plena, propia y operativamente hablando, un número natural con todo el potencial de ser utilizado en cualquier operación aritmética:

Tabla 2.7. Síntesis del Proceso de Aritmetización Completa de Todas las Expresiones Posibles del Nivel Lógico Bivaluado Biproposicional

${}_2L_2 \cdot \dagger$

j	2^j	Q	P	$?$	\downarrow	\sim	\neg	\leftarrow	\neg	ζ	j	\wedge	\leftrightarrow	P	\leftarrow	Q	\rightarrow	\vee	$>$
0	$\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
2	$\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	$\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Σ	=	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ 6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 \\ 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9 \\ 9 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 10 \\ 10 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 11 \\ 11 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 12 \\ 12 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 13 \\ 13 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 14 \\ 14 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 15 \\ 15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 16 \\ 16 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 17 \\ 17 \end{matrix}$

† La primer columna “ j ” representa la lectura decimal de las condiciones de verdad en binario de las variables P y Q (4^a y 3^a columnas).

En la tabla 2.7 puede apreciarse una simetría bilateral numérica, tomando como eje de la simetría, la división existente entre la décimosegunda y la décimotercera columnas que contienen respectivamente a los números con código decimal 7 y 8, los cuales a su vez, representan la función *Nand* (j) y la función *And* (\wedge). Así pues, constatamos que cada columna tiene su contraparte o columna complementaria, en el área opuesta, a la misma distancia del centro de simetría, con los valores veritativos exactamente invertidos, esta característica nos permite ubicar claramente las funciones complementarias en cada caso, de este modo la variable P ubicada en la columna con número de código decimal 10, tiene su negación o complemento $\neg P$ en la columna opuesta con número de código decimal 5. Retomaremos esta simétrica propiedad más adelante para el cálculo de las negaciones de toda posible expresión en lógica.

Para finalizar esta revisión exhaustiva del nivel ${}_2L_2$, en la tabla 2.8 se muestra la representación matricial habitual para los operadores diádicos de este nivel.

Tabla 2.8. Representación Matricial de los 10 (16-4-2) Operadores Realmente Diádicos (de 2 Variables: P y Q) de la Lógica Bivaluada Biproposicional (${}_2L_2$).

	28			214			213			211			29		
	And			Or			Cond.			CndInv.			Equiv.		
Q	\wedge		Q	\vee		Q	\rightarrow		Q	\leftarrow		Q	\leftrightarrow		
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	F
	F	V		F	V		F	V		F	V		F	V	
	P			P			P			P			P		
	27			21			22			24			26		
	Nand			Nor			NegCnd.			NgCdn.			Xor		
Q	$ $		Q	\downarrow		Q	\rightarrow		Q	\leftarrow		Q	ζ		
V	V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	F	V	V	F	
F	V	V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V	
	F	V		F	V		F	V		F	V		F	V	
	P			P			P			P			P		

En la tabla 2.8 también se aprecia un eje de simetría que se establece entre los valores veritativos que contiene cada matriz, con aquellos de su contraparte vertical, es decir con su negación o complemento lógico. Asimismo resulta evidente, en los renglones superiores, la complementación entre los propios valores de los códigos numéricos decimales correspondientes, cuya suma resulta indefectiblemente ser el valor decimal de la tautología de este nivel bivaluado biproposicional (${}_{15}$ en este caso). Es importante visualizar esta representación pues más abajo se verá cómo estas estructuras de los operadores lógicos se verán reflejadas siempre, en forma independiente del número de variables (n) que constituyan un dominio de aplicación. Perfundiendo o percolando así, según se analice, la totalidad de las estructuras resultantes –las cuales, como veremos, se revelarán de naturaleza fractal (véase las figuras 5.1-5.10)– pertenecientes a dominios lógicos con mayor número de proposiciones independientes, es decir, variables lógicas.⁷

Hasta aquí hemos utilizado el método de las tablas de verdad para estudiar las definiciones de todas y cada una de las funciones de verdad posibles en los niveles lógicos ${}_0L_2$, ${}_1L_2$ y ${}_2L_2$, ahora se ilustrará su uso

7 Para conocer todas las expresiones del siguiente dominio lógico bivaluado, es decir, triproposicional (${}_3L_2$), véase Piaget J. *Essais sur les Transformations des Opérations Logiques. Les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions*. Bibliothèque de Philosophie Contemporaine. Logique et Philosophie des Sciences. PUF, Paris, 1952; Garduño-Soto G. "2. The Tripropositional Bivalent Level (${}_3L_2$) and its Relationship with the Aristotelic Syllogistic." En: *Opuscula Logica...*, Edición de autor. México D.F., 2008a (https://www.academia.edu/14750611/Opuscula_logica_2_The_Tripropositional_Bivalent_Level_3L2_and_its_Relationship_with_the_Aristotelic_Syllogistic) y Boll M., *Manuel...* Dunod, París, 1948.

para conocer el resultado de una operación lógica –cualquiera que se pudiera elegir entre aquellas que forman parte de la totalidad del elenco de un dominio lógico definido–, ya sea éste contingente, tautológico o contradictorio y sobre todo para evaluar la validez de una deducción lógica –a través del condicional– bajo cualquier eventual situación veritativa. Asimismo se mostrará las severas limitaciones que se revelan casi de inmediato –es decir propiamente desde los primeros niveles lógicos, ya sean éstos bivaluados o multivaluados– en el uso del método de las tablas de verdad.

A continuación se presenta un ejemplo de construcción de una tabla de verdad en lógica bivaluada triproposicional (${}_3L_2$) correspondiente al silogismo aristotélico *BARBARA*.⁸

Tabla 2.9. Validación del Silogismo *BARBARA* en Interpretación Triproposicional (${}_3L_2$).⁹

<i>R</i>	<i>Q</i>	<i>P</i>	$\{(Q \rightarrow R)\}$	\wedge	$\{(P \rightarrow Q)\}$	\rightarrow	$\{(P \rightarrow R)\}$
F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V

La expresión propuesta no es contradictoria, siempre falsa, ni tampoco una contingencia, a veces cierta, a veces falsa, sino que es completa y necesariamente válida (tautológica: \rightarrow), bajo cualquier circunstancia veritativa (véase la penúltima columna en negritas).

Como se ha mencionado anteriormente, el método de validación de deducciones a través la construcción de tablas de verdad es muy limitado, por el rápido crecimiento de estos arreglos combinatorios ya que el número de renglones está dado por la fórmula B^n y el número de columnas totales posibles por la fórmula (B^{B^n}) siendo B el número de valores de verdad del nivel lógico en que se trabaja y n el número de variables independientes involucradas en el cálculo de referencia. De este modo veremos cómo rápidamente el tamaño de estas tablas vuelve

8 En la silogística aristotélica las figuras válidas se forman combinando las primeras vocales de los vocablos latinos *AFIRMO* y *NEGO*, denotando de este modo el universal afirmativo (*A*), el particular afirmativo (*I*), el universal negativo (*E*) y el particular negativo (*O*). Véase, Łukasiewicz, J. *La silogística aristotélica*.

9 *P*: atenienses, *Q*: hombres, *R*: mortales, (interpretación proposicional de Christine Ladd-Franklin): $[\{(Q \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q)\} \rightarrow (P \rightarrow R)]$: Si todos los hombres son mortales y si todos los atenienses son hombres, luego entonces todos los atenienses son mortales (extraído de Jean Piaget: *Essai de logique opératoire*, 1971.)

difícil y hasta punto menos que imposible su manejo en muy pocos pasos.

Tabla 2.10. Expansión Combinatoria para la Construcción de Tablas de Verdad.

B	n	B^n (renglones)	(B^{B^n}) (número total de columnas semánticamente distintas en nL_B)
2	0	1	2
2	1	2	4
2	2	4	16
2	3	8	256
2	4	16	65, 536
2	5	32	4, 294, 967, 296
2	6	64	18, 446, 744, 073, 709, 551, 616
2	7	128	$3.4028236692093846346337460743177 \times 10^{38}$
2	8	256	$1.1579208923731619542357098500869 \times 10^{77}$
2	9	512	$1.3407807929942597099574024998206 \times 10^{154}$

Tabla 2.10. Expansión Combinatoria para la Construcción de Tablas de Verdad (cont.)

B	n	B^n (renglones)	(B^{B^n}) (número total de columnas semánticamente distintas en nL_B)
3	0	1	3
3	1	3	27
3	2	9	19, 683
3	3	27	7, 625, 597, 484, 987
3	4	81	$4.4342648824303776994824963061915 \times 10^{38}$
3	5	243	$8.7189642485960958202911070585861 \times 10^{115}$
3	6	729	$6.6281860542418717610517286421448 \times 10^{347}$
4	0	1	4
4	1	4	256
4	2	16	4, 294, 967, 296
4	3	64	$3.4028236692093846346337460743177 \times 10^{38}$
4	4	256	$1.3407807929942597099574024998206 \times 10^{154}$
4	5	1024	$3.2317006071311007300714876688669 \times 10^{616}$
4	6	4096	$1.0907481356194159294629842447338 \times 10^{2466}$

Habida cuenta de las ingentes dimensiones posibles para las tablas de verdad, nos vemos obligados a reconocer que su uso se restringe tan sólo a las primeras variables en cualquier nivel lógico bivaluado o multivaluado, ya que si, por ejemplo en la lógica bivaluada, suponemos, a título de ilustración, el uso de una cuadrícula de 0.5 cm² para la construcción de una tabla exhaustiva, tendríamos, en el caso de cuatro variables lógicas, una tabla de 327.68 m de largo, de 21, 474.83648 km en el caso de cinco variables y para el caso de seis variables de 92, 233, 720,

368, 547.75808 km. Estas dimensiones son prohibitivas, ya que escapan en definitiva a cualquier posibilidad razonable de manejo, incluso con el uso de supercomputadoras y aún con la compactación propuesta por Quine. Quedando así palmariamente establecida la utilidad de las tablas de verdad en un nivel muy reducido y provisorio para la visualización o prospección de modestos cálculos –nunca exhaustivos– con muy pocas variables, en cualquier lógica. Sólo la teoría podrá avanzar en esas cardinalidades.

Tomando en cuenta la antigüedad de la lógica desde sus orígenes en la cultura clásica griega (sV-sIV aC), debemos considerar que las tablas de verdad solamente fueron introducidas a principios del siglo XX y que el método usado en la lógica clásica para la validación de deducciones a partir de declaraciones primitivas o axiomas, era la aplicación de definiciones de operación y reglas, en principio tan sólo unas cuantas, que ampliadas con la silogística aristotélica constituyeron la única guía para el razonamiento humano durante más de veinticuatro siglos, transcurso durante el cual se registró muy pocas novedades en el ejercicio del pensamiento puro.

A la fecha aún se enseña estas definiciones de operación y reglas (ahora llamadas reglas de inferencia), que gravitan alrededor de 19 (Irving Copi), hasta aproximadamente unas 100 (Benson Mates), si bien siempre se ha buscado obtener el número más pequeño de operadores y reglas que garanticen su irrefragable completud dentro de la lógica, p.ej. en L_2 : $\{ \downarrow, (\neg, \wedge), (\neg, \vee), (\neg, \rightarrow) \}$, (Sheffer H.M., Peirce C.S., Whitehead A.N. y Russell B., Post E.L., Quine W.V.O., Enderton H.) Veamos algunos ejemplos de reglas lógicas tradicionales: a) Conjunción, b) Adición, c) Asociación, d) Distributividad, e) Simplificación, f) Absorción, g) Implicación material, h) Contraposición, i) Silogismo Constructivo, j) Silogismo Destructivo, k) *Modus Ponendo Ponens*, l) *Modus Tolendo Tollens*, m) *Reductio ad absurdum*, etcétera.

La humanidad no dispuso de otras herramientas para comprobar, aun en universos finitos, la irrefragable validez de un razonamiento puro hasta bien entrado el siglo XX, ahora, con el advenimiento de las computadoras (pseudo-razón exosomática),¹⁰ de la biblioteca global (Internet),¹¹ ahora, cuando nuestros modelos y representaciones más avanzados de la realidad no son discernidos con la cabeza,¹² sino en el interior de circuitos electrónicos preprogramados en lenguaje hexadecimal, y en última instancia binario, y a enorme velocidad, esta palmaria realidad apenas nos parece verosímil. Las posibles

10 Véase: Peter B. Medawar. *Los límites de la ciencia*. (Memoria exosomática). 1971.

11 Véase: Arthur C. Clarke. *Profiles of the Future*. 1958.

12 Véase: Yuval Noah Harari. *Sapiens. A Brief History of Humankind*. 2014.

razones de esta dilación en el avance de la lógica —ya señalada por Kant en 1787, al decir que la lógica nunca había dado un solo paso atrás, pero tampoco uno solo adelante— se encuentran, tal vez, en la complejidad misma del cálculo lógico ya sea deductivo o inductivo, en las enormes cardinalidades de los conjuntos de las posibles expresiones, y transformaciones (sintácticas o semánticas) lógicas, así como en el desconocimiento de las formalizaciones y límites teóricos que apenas se establecieron en los siglos XIX y XX. Ahora el panorama de la lógica es totalmente distinto, pues munidos de estos avances teóricos los lógicos contemporáneos disponen de una gama de recursos otrora impensables, más allá de las solas definiciones, reglas de operación y exhaustivas tablas de verdad, que constituían, hasta hace relativamente poco tiempo, el único apoyo al ejercicio del pensamiento puro.

Para finalizar este apartado sobre las tablas de verdad y con el fin de mostrar un ejemplo del cálculo lógico estándar (véase Rosser, J.B., 1953), es decir, a través de declaraciones primitivas, o premisas, de la aplicación de definiciones y reglas de operación, veremos a continuación un ejemplo de deducción natural¹³ en el dominio de cuatro variables lógicas (P, Q, R y S) y su comprobación a través de una tabla de verdad en este dominio (${}_4L_2$):

Ejemplo de deducción natural en lógica tradicional:

Premisas o Axiomas

1. $P \rightarrow R$
2. $Q \rightarrow S$
3. $S \vee R$
4. $Q \vee S$ ⊢ $\neg S \leftrightarrow P$

Deducciones

- | | |
|--|-------------------------|
| 5. $(Q \rightarrow S) \wedge (Q \vee S)$ | 2.4. Conjunción |
| 6. $(Q \vee S) \wedge (Q \vee S)$ | 5. Implicación material |
| 7. S | 6. Simplificación |
| 8. $\neg R$ | 3.7. Exclusión |
| 9. $S \vee P$ | 7. Adición |
| 10. $\neg S \rightarrow P$ | 9. Implicación material |
| 11. $(\neg P \vee R)$ | 1. Implicación material |

¹³ El término 'deducción natural' se refiere a un cálculo deductivo donde las declaraciones primitivas o premisas pueden ser o no tautológicas, en contraposición, el término 'deducción axiomática' se refiere a un cálculo deductivo donde las declaraciones primitivas o axiomas deban ser necesariamente tautologías.

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 12. $(\neg P \vee R) \wedge \neg R$ | 11.8. Conjunción |
| 13. $(\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg R \wedge R)$ | 12. Distribución |
| 14. $\neg P \wedge \neg R$ | 13. Simplificación |
| 15. $\neg P$ | 14. Simplificación |
| 16. $\neg P \vee \neg S$ | 15. Adición |
| 17. $P \rightarrow \neg S$ | 16. Implicación material |
| 18. $\neg S \leftrightarrow P$ | 10.17. Conjunción (<i>q.e.d.</i>) |

Tabla 2.11. Comprobación del Ejemplo Deductivo Anterior mediante una Tabla de Verdad*

S	R	Q	P	P	→	R	Q	→	S	S		R	Q	∨	S	&	→	¬S	↔	P
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1

*“&” simboliza la conjunción de todas las premisas o axiomas.

La validez de la deducción propuesta, previamente comprobada por el método tradicional, se certifica por verificarse ésta llanamente bajo cualquier circunstancia veritativa en todas y cada una de las instancias que puedan presentar sus argumentos (véase la columna en negritas).

Ahora bien, examinando la conjunción de todas las premisas ('&', en la 17ª columna) es decir:

$$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \wedge (S | R) \wedge (Q \vee S)$$

observamos que es posible postular su equivalencia con la expresión:

$$(S \widetilde{\rightarrow} P) \wedge \neg R$$

es decir:

$$[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \wedge (S | R) \wedge (Q \vee S)] \leftrightarrow [(S \widetilde{\rightarrow} P) \wedge \neg R]$$

Lo anterior podemos conocerlo a partir del hecho de que los únicos renglones (sombreados) donde se verifica la conjunción de las premisas, nos sugiere la negación del condicional entre S y P ($S \not\rightarrow P$), o bien literalmente, $(S \wedge \neg P)$, lo cual acontece únicamente bajo la circunstancia veritativa donde se registra simultáneamente la negación de R ($\neg R$).

Poniendo a prueba nuestra hipótesis de equivalencia lógica entre ambas expresiones, aparentemente distintas en virtud de su notación lógica o sintaxis, tenemos:

Tabla 2.12. Ejemplo de Transformación Tautológica de una Expresión Lógica.*

S	R	Q	P	$P \rightarrow R$	$Q \rightarrow S$	$S \mid R$	$Q \vee S$	$S \&$	\leftrightarrow	$S \not\rightarrow P$	$P \wedge$	$\neg R$
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1

Tabla 2.13. Verificación de la Identidad Deductiva de la Equivalencia Lógica Propuesta.*

S	R	Q	P	$S \not\rightarrow P$	$\neg R$	$\&$	\rightarrow	$\neg S$	\leftrightarrow	P
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0

* “&” simboliza la conjunción de todas las premisas o axiomas, atendiendo al dominio lógico de referencia en (L_2) , su número de código decimal es $2^8 + 2^{10} = 1280$ y el número de código decimal de la tautología (\rightarrow) es 65535, ya que sus respectivos códigos en binario son 0000010100000000 y 1111111111111111 (véase las columnas 17ª y 18ª en la tabla 2.12 y en la tabla 2.13, las columnas equivalentes 9ª y 10ª).

Resultando de todo punto y necesariamente válida la equivalencia propuesta en nuestra hipótesis (véase en tabla 2.12 la 18ª columna en negritas) podemos, sin temor a equivocarnos, afirmar que la conjunción de las premisas, tal como fue presentada al inicio del ejercicio de deducción $[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \wedge (S \mid R) \wedge (Q \vee S)]$ y la sucinta expresión $[(S \rightarrow P) \wedge \neg R]$ son, estrictamente hablando y desde el punto de vista semántico, tan sólo una y la misma función veritativa u operador lógico, ya que ambas apuntan al mismo contenido dentro de la lógica de referencia (L_2), teniendo contemporáneamente el mismo número de código decimal 1280 –a la par de las expresiones, o transformaciones, equivalentes: $((P \downarrow R) \wedge S)$, $((S \rightarrow P) \downarrow R)$, $((S \rightarrow R) \downarrow P)$, $((S \rightarrow P) \rightarrow R)$, $((S \rightarrow R) \rightarrow P)$ y $(S \rightarrow (P \vee R))$ – y por ende ambas –e incluso las seis expresiones equivalentes adicionales– permiten deducir válidamente la conclusión $(\neg S \leftrightarrow P)$.

Baste este solo ejemplo para sentar como sólida base que en lógica la sola diferencia notacional o sintáctica entre dos expresiones no garantiza su diferencia semántica. Esta exactitud con la cual toda expresión lógica denota, estrictamente hablando, un determinado y único contenido lógico, incluso a través de muy diversas posibles y aun infinitas formas notacionales o sintácticas, permite que una vez aritmetizada cualquier expresión lógica, nos rinda, en un dominio lógico de referencia, un solo número, aun si esta expresión pueda presentarse en muy diversas notaciones, que a la intuición den tan sólo la *apariencia* de ser distintas, diversamente a aquellas en las cuales es relativamente sencillo percibir su identidad, por ejemplo, en el caso de la doble negación o cualquier negación con número de iteraciones par: $(P \leftrightarrow \neg\neg P, P \leftrightarrow \neg\neg\neg\neg P, P \leftrightarrow \neg\neg\neg\neg\neg\neg P)$, en contraposición con expresiones de las cuales difícilmente percibimos su identidad, en virtud de su más compleja notación o sintaxis, por ejemplo: $[P \leftrightarrow ((P \downarrow Q) \downarrow \neg P), P \leftrightarrow (\neg P \mid (P \rightarrow Q)), P \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q))]$, o bien, $P \leftrightarrow ((P \mid Q) \otimes (P \rightarrow Q))$.

Lo anterior nos permite distinguir, con toda claridad, dos niveles dentro de la lógica finitaria (y aun infinitaria), a saber: *a*) el nivel sintáctico y *b*) el nivel semántico, pudiéndose registrar, dentro de un dominio lógico finito de referencia, en el nivel sintáctico, infinitas formas notacionales –sin duda redundantes– para cada una de las expresiones posibles y en el nivel semántico, tan sólo un número finito, determinado y susceptible de ser conocido, de expresiones realmente distintas, en virtud de su contenido lógico.

3. El mapeo completo de la lógica

Como se mencionó más arriba, han existido diversos intentos por aritmetizar la lógica completamente, resultando esquemas funcionales

con fines específicos, en cambio, el planteamiento inicial del proyecto iniciado por Hugo Padilla-Chacón, más afín a la línea Poincaré-Brower-Weyl (intuicionismo) que a los enfoques Hilbert-Ackerman (formalismo) y definitivamente influido por los trabajos de Boole (*An investigation of the laws of thought...*, 1854), de Frege (*Begriffsschrift*, 1879) y de Gödel (*On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I*, 1931), no contempla un solo fin específico, sino la elaboración de un sucinto y autosuficiente sistema aritmético primitivista, con el uso de tan sólo los cuatro operadores aritméticos fundamentales y la función entero (+, -, ×, ÷ y []), que a la par de la lógica nos conduzca a la resolución de los problemas lógicos, en forma natural, para lo cual se plantea un total trasvase del nivel de la lógica en los números naturales, y su ulterior retorno al nivel de la lógica –una vez obtenidas las soluciones a los problemas propuestos–, entrando así directamente en el panorama teórico que se avizora en el teorema de Löwenheim y Skolem,¹⁴ donde –simplificando en pocas palabras– se establece que si un problema es resoluble en cualquier dominio, luego entonces es resoluble en el dominio de los números naturales. A la fortaleza de este conocido y doblemente comprobado teorema se adiciona, en dominios lógicos finitos, lo que ha venido a llamarse el *teorema cero* de Hugo Padilla-Chacón:

“Todo problema lógico es en el fondo un problema aritmético.” (P0)

El lector avezado en lógica y filosofía de las matemáticas seguramente percibirá la definitiva contundencia, y aun la estridencia, de esta declaración teórica, por primera vez formalmente emitida, a contraccorriente, en la historia de la lógica, cuando más bien la tradición ha transitado conceptualmente en sentido inverso, tratando de fundamentar las matemáticas en la lógica (Whitehead A.N. y Russell B. *Principia Mathematica*, 1910-1913); declaración teórica emitida aun en consonancia, con la formalización lógica de la aritmética (Peano G. *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita*, 1889.)¹⁵

Por otra parte, debe considerarse la fuerte oposición a considerar cualquier tipo de jerarquía u orden en el universo lógico. Veamos por ejemplo la opinión del lógico Ludwig Wittgenstein quien rechaza todo intento de introducir prioridades, distancias o cualquier otro tipo de orden en lógica, al decir que en lógica no hay estar uno al lado de otro,

14 Löwenheim L. *On possibilities in the calculus of relatives*, 1915. Skolem T. *Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: A simplified proof of a theorem by L. Löwenheim and generalizations of the theorem*, 1920. En: Heijenoort J.V. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, 1967.

15 En: Heijenoort J.V. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, 1967.

esto es, estar más adelante o más atrás, es decir, no existe la noción de sucesor. Wittgenstein expresa claramente esta postura en el *Tractatus*:

- 4.128 Las formas lógicas son anuméricas.
 No hay pues, en lógica números privilegiados, no hay tampoco ningún monismo o dualismo filosófico, etc.
- 5.453 En lógica todos los números deben ser susceptibles de justificación. O mejor; debe resultar esto: que en lógica no hay números. No hay números privilegiados.
- 5.454 En lógica no hay estar uno al lado de otro, no puede darse un más general y un más especial.

A pesar de esta tan intransigente postura de Wittgenstein, nada obsta para que a la lógica le pueda ser introducido o vinculado, a título provisorio, un ordenamiento cualquiera –como Wittgenstein mismo manifiesta: ‘Las funciones de verdad se pueden ordenar en series. Este es el fundamento de la teoría de la probabilidad.’¹⁶ entrando entonces lisa y llanamente, muy a pesar de sus previas objeciones, en el dominio de la aritmética–, para resolver un problema, sin que por ello se promulgue un cambio epistemológico en la naturaleza de la lógica, la solución así obtenida podrá siempre ser demostrable por los métodos tradicionales de la propia lógica, la única disciplina que, con la pretensión de devenir autónoma, se prohíbe a sí misma utilizar recursos ajenos a sus propios métodos.

Tabla 3.1. Asignación numérica a los signos usados

Número de Gödel	Símbolo	Significado
1	~	Negación
2	∨	Alternativa (or)
3	→	Condicional
4	∃	Existe un ...
5	=	Igual
6	0	Cero
7	s	Sucesor
8	(Puntuación
9)	Puntuación
10	,	Puntuación
11	+	Adición
12	x	Multiplicación

16 Véase : *Tractatus Logico-Philosophicus* 5.1.

17 Tomado de: Ernst Nagel, James R Newman. *Gödel's Proof*. (ed. Douglas R. Hofstadter) Edición revisada. New York, University Press, 2001.

Antes de explicitar el sistema aritmético de Hugo Padilla-Chacón y su actualización, no puede dejarse de mencionar como antecedente inmediato la aritmetización hecha por Gödel en su escrito de 1931 arriba mencionado. A continuación se ilustra en forma sucinta la aritmetización de Gödel.¹⁷

Tabla 3.3. Determinación de los exponentes a usar sobre la sucesión de números primos, p.ej. para la expresión: $(\exists x)(x=sy)$

(\exists	x)		(x	=	s	y)
8	4	13	9		8	13	5	7	17	9

de donde se desprende la expresión numérica decimal:

$$2^8 \times 3^4 \times 5^{13} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{13} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{17} \times 29^9 =$$

$$172225505803959398742621651659678877886965404082311908389214945877004912002249920215937500000000$$

El cual es el único número de Gödel correspondiente a $(\exists x)(x=sy)$.

La operación inversa se ejemplifica en la siguiente tabla.

Tabla 3.4 Obtención de expresiones lógicas a partir de su número de Gödel, p.ej. para el número 243, 000, 000

<i>Pasos</i>	<i>Operación Numérica</i>
A	243, 000, 000
B	$64 \times 243 \times 15, 625$
C	$2^6 \times 3^5 \times 5^6$
D	6 5 6
E	0 = 0

A toda expresión en lógica le corresponde un único número de Gödel, pero la relación recíproca no es necesariamente cierta, ya que no a todo número le corresponde necesariamente una expresión en lógica (Garduño-Soto G. *et al.*, 1989).

En el formalismo de Gödel no es posible conocer de primera vista, sin desplegar previamente la factorización en números primos, si un determinado número codifica o no una expresión lógica cabal, una fórmula lógica bien formada (WFF, por sus siglas en inglés).

En la aritmetización de Hugo Padilla-Chacón a todo número dentro de un dominio de referencia le corresponde indefectiblemente una expresión WFF en lógica –o su fórmula booleana canónica (normal

17 Tomado de: Ernst Nagel, James R Newman. Gödel's Proof. (ed. Douglas R. Hofstadter) Edición revisada. New York, University Press, 2001.

disyuntiva: FND o normal conjuntiva: FNC)- y viceversa. Lo anterior permite confirmar la extensión previamente propuesta (Garduño-Soto G. *et al.*, 1989) al teorema de Shannon (1938): Cada fórmula del álgebra booleana (FAB) es realizable como un circuito en serie paralelo (CSP) y cada circuito en serie-paralelo es representable como una fórmula del álgebra booleana. Luego entonces: a cada número (NUM) le corresponde un circuito en serie-paralelo y a cada circuito en serie-paralelo le corresponde un número, siendo válidas también todas las correspondencias recíprocas, a saber, dentro de una relación de correspondencia C , se forman los siguientes pares relacionados: *a*) $C(\text{FAB}, \text{CSP})$, *b*) $C(\text{CSP}, \text{FAB})$, *c*) $C(\text{FAB}, \text{NUM})$, *d*) $C(\text{NUM}, \text{FAB})$, *e*) $C(\text{NUM}, \text{CSP})$ y *f*) $C(\text{CSP}, \text{NUM})$. Esta extensión del teorema de Shannon da lugar a nuevas e insospechadas interpretaciones y aplicaciones de la lógica.

A continuación se muestra, por primera vez, los algoritmos que constituyen el sistema, actualizado y ampliado, de aritmetización completa de la lógica bivaluada finitaria; se enfatiza su carácter finitario, ya que el conocido teorema de incompletud de Gödel (1931), no opera en universos finitos, donde, en principio, siempre será posible verificar la validez de un teorema (D. Knuth, 1997). El lector percibirá que aun dado el carácter finitario del sistema, sus algoritmos operan en un infinito potencial, nunca en un infinito en acto, de modo tal que la única condicionante para su funcionamiento es la inicial declaración del número de variables lógicas (N), tan grande como se quiera y se pueda manejar, en que se encuadra un problema o una indagación lógica.

4. Actualización y Ampliación del Sistema Primitivista de Aritmetización Completa de la Lógica Binaria Proposicional Finitaria de Hugo Padilla-Chacón

Con el paso del tiempo se ha observado que el sistema original de Hugo Padilla-Chacón tal como fue por él presentado en la publicación original (Padilla-Chacón H., 1984), así como las adiciones a este sistema (*proyección*: deducción exhaustiva y *retroyección*: deducción inversa) presentadas en las conferencias internacionales UNAM-UNISYS (Garduño-Soto G. *et al.*, 1989) conservan aún íntegra su vigencia, ya que a pesar de la profusión de publicaciones en materia de deducción lógica, no ha sido reportado en la literatura un sistema similar, con toda su autonomía, funcionalidad y potencia, ni aun han sido siquiera avizorados los problemas no-clásicos de la proyección y la retroyección. Asimismo, se ha visto la necesidad de aligerar la notación y hacer más fluido el sistema -cuyo aprendizaje y dominio, vista su divergencia conceptual y operativa de los enfoques estándares, requería de dos

semestres académicos de posgrado–, coordinando mejor sus algoritmos –que eran inicialmente unos cien–, sustituyendo algunos de ellos por otros más tradicionales¹⁸ o sucintos y aun, como aquí se presenta, ampliándolo con nuevos conceptos y aportaciones personales del autor al proyecto aritmético primitivista original de Hugo Padilla-Chacón, como son la ‘progenitura’¹⁹ y la ‘libre operación’.²⁰

4.1. Funciones de inicialización

Número de variables lógicas involucradas en el cálculo

$$N = \text{Número total de variables} \quad (1)$$

Dominio Finito (DF) o rango de operación según el número (N) de variables involucradas:

$$DF_N = \{0, \dots, (2^N) - 1\} \quad (2)$$

Cardinalidad del Dominio Finito [DF] según el número (N) de variables involucradas:

$$[DF]_N = (2^N) \quad (3)$$

4.2. Valores de las funciones constantes

Función Contradicción:

$$FNC = 0 \quad (4)$$

Función Tautológica:

$$FNT = (2^N) - 1 \quad (5)$$

4.3. Funciones básicas

Función Identidad de fx:²¹

$$Ifx = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times V_2^j fx \quad (6)$$

18 Como los concebidos en el inicio de la ciencia computacional, citados en: Yanushkevich S., 1998.

19 La generación, a través del condicional, de todo posible conjunto de premisas y sus respectivas conclusiones –en proyección–, de modo tal que estos pares deductivos rindan como resultado de su operación una expresión cualquiera propuesta, ya sea ésta tautológica, contingente o contradictoria.

20 Función mediante la cual puede calcularse no solamente el resultado de aplicar un operador convencional sino que es posible también conocer el resultado de una operación libre propuesta al ser aplicada en forma directa sobre la serie de los argumentos (g(k)) que son el objeto de su operación.

21 A la forma numérica de una expresión lógica cualquiera se le denomina fx, fy, etcétera.

Valor de la negación de la expresión lógica fx (complemento de fx):

$$Cfx = \text{FNT} - fx \tag{7}$$

Valuación (0,1) de fx en la potencia j de la base 2 :

$$V_2^j fx = \left[\frac{fx}{2^j} \right] - \left(2 \times \left[\frac{\left[\frac{fx}{2^j} \right]}{2} \right] \right) \tag{8}$$

es decir:

$$V_2^j fx = \left[\frac{fx}{2^j} \right] \text{ mod } 2 \tag{9}$$

Se introduce la función módulo (mod) para simplificar la notación anterior, siendo esta función mod expresable, como puede observarse en (8), tan sólo con los cuatro operadores aritméticos fundamentales (+, -, ×, ÷) y la función entero ([]) que son las únicas herramientas utilizadas en este sistema aritmético primitivista.

Forma Normal Disyuntiva:

$$\text{FND}(fx) = \langle \overline{j_2} \rangle_j \tag{10}$$

para: $j = 2^N - 1 \text{ n } \dots \text{ n } 0$

y $V_2^j fx \neq 0$

La representación de la $\text{FND}(fx)$ se efectúa en notación vectorial inversa, para cada valuación no nula de fx , leyendo las potencias de la base 2 y las variables, ambas, de derecha a izquierda:

p.ej. 5: $2^2 + 2^0 = \langle 10 \rangle \text{ n } \langle 00 \rangle = \langle Q \text{ m} \neg P \rangle \text{ n } \langle \neg Q \text{ m} \neg P \rangle = \neg P$

y no: $2^0 + 2^2 = \langle 00 \rangle \text{ n } \langle 10 \rangle = \langle \neg P \text{ m} \neg Q \rangle \text{ n } \langle P \text{ m} \neg Q \rangle = \neg Q$

Número decimal de la variable lógica k :

$$V_k = \text{FNT} - \frac{\text{FNT}}{2^{2^{k-1}} + 1} \tag{11}$$

para: $k = 1, \dots, N$

4.4. Definición de los diez operadores lógicos diádicos (método de suma de productos)

Condicional:

$$\mathbf{fx} \rightarrow \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left(1 - \left[\frac{V_2^j \mathbf{fx} - V_2^j \mathbf{fy} + 1}{2} \right] \right) \quad (12)$$

Condicional inverso:

$$\mathbf{fx} \leftarrow \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left(1 - \left[\frac{V_2^j \mathbf{fy} - V_2^j \mathbf{fx} + 1}{2} \right] \right) \quad (13)$$

Conjunción:²²

$$\mathbf{fx} \wedge \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left[\frac{V_2^j \mathbf{fx} + V_2^j \mathbf{fy}}{2} \right] \quad (14)$$

o su forma booleana equivalente:

$$\mathbf{fx} \wedge \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times V_2^j \mathbf{fx} \times V_2^j \mathbf{fy} \quad (15)$$

Alternativa inclusiva (disyunción):

$$\mathbf{fx} \vee \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left[\frac{V_2^j \mathbf{fx} + V_2^j \mathbf{fy} + 1}{2} \right] \quad (16)$$

o su forma booleana equivalente:

$$\mathbf{fx} \vee \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left(V_2^j \mathbf{fx} + V_2^j \mathbf{fy} - (V_2^j \mathbf{fx} \times V_2^j \mathbf{fy}) \right) \quad (17)$$

22 Las funciones propuestas por Łukasiewicz: min para la conjunción y max para la disyunción –aun cuando son plenamente expresables con los cuatro operadores aritméticos fundamentales y la función entero– no han sido utilizadas para aligerar la notación.

Alternativa exclusiva (xor):

$$\mathbf{fx} \otimes \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times (\mathbf{V}_2^j \mathbf{fx} + \mathbf{V}_2^j \mathbf{fy}) \bmod 2 \quad (18)$$

o la forma booleana equivalente:

$$\mathbf{fx} \otimes \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times (\mathbf{V}_2^j \mathbf{fx} + \mathbf{V}_2^j \mathbf{fy} - (2 \times \mathbf{V}_2^j \mathbf{fx} \times \mathbf{V}_2^j \mathbf{fy})) \quad (19)$$

o bien, la forma más sucinta, propuesta por Łukasiewicz:

$$\mathbf{fx} \otimes \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left| \mathbf{V}_2^j \mathbf{fx} - \mathbf{V}_2^j \mathbf{fy} \right| \quad (20)$$

Se conserva la función valor absoluto utilizada por Łukasiewicz siendo ésta también expresable, con los cuatro operadores aritméticos fundamentales y la función entero.

Como se puede observar, ya han sido desplegados cinco diferentes operadores diádicos de los diez que integran el nivel lógico ${}_2L_2$ (véase la tabla 2.8), a continuación se expondrá sus respectivas formas complementarias.

Negación del condicional:

$$\mathbf{fx} \widetilde{\rightarrow} \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left[\frac{\mathbf{V}_2^j \mathbf{fx} - \mathbf{V}_2^j \mathbf{fy} + 1}{2} \right] \quad (21)$$

Negación del condicional inverso:

$$\mathbf{fx} \widetilde{\leftarrow} \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left[\frac{\mathbf{V}_2^j \mathbf{fy} - \mathbf{V}_2^j \mathbf{fx} + 1}{2} \right] \quad (22)$$

Negación de la conjunción (nand o trazo de Sheffer):

$$\mathbf{fx} | \mathbf{fy} = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left(1 - \left[\frac{\mathbf{V}_2^j \mathbf{fx} + \mathbf{V}_2^j \mathbf{fy}}{2} \right] \right) \quad (23)$$

o su forma booleana equivalente:

$$f_x | f_y = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left(1 - \left(V_2^j f_x \times V_2^j f_y \right) \right) \quad (24)$$

Negación de la alternativa inclusiva (nor o trazo de Peirce):

$$f_x \downarrow f_y = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left(1 - \left[\frac{V_2^j f_x + V_2^j f_y + 1}{2} \right] \right) \quad (25)$$

o su forma booleana equivalente:

$$f_x \downarrow f_y = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times CV_2^j f_x \times CV_2^j f_y \quad (26)$$

Equivalencia lógica (negación del xor):

$$f_x \leftrightarrow f_y = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left(V_2^j f_x - V_2^j f_y + 1 \right) \bmod 2 \quad (27)$$

o la forma equivalente basada en el xor de Łukasiewicz:

$$f_x \leftrightarrow f_y = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times \left(1 - \left| V_2^j f_x - V_2^j f_y \right| \right) \quad (28)$$

4.5. Funciones asociadas a la deducción lógica

Deducibilidad de f_x (el número de deducciones posibles para f_x):

$$Df_x = 2 \sum_{j=0}^{2^N-1} \left(1 - V_2^j f_x \right) \quad (29)$$

es decir:

$$Df_x = 2^{\text{núm. de ceros en la expresión } f_x} \quad (30)$$

Deducibilidad inversa de f_y (el número de antecedentes válidos para f_y):

$$Dif_y = 2 \sum_{j=0}^{2^N-1} V_2^j f_y \quad (31)$$

es decir:

$$\text{Dif}_y = 2^{\text{núm. de unos en la expresión } f_y} \quad (32)$$

La dilucidación semántica de todas y cada una de las expresiones proposicionales contenidas en la cardinalidad de los conjuntos Df_x y Dif_y puede realizarse: *a*) a través del método de *fuerza bruta* (sumamente ineficiente) aplicando serial e indiscriminadamente el condicional, bajo las siguientes restricciones: $\{\forall f_y | f_y \geq f_x\}$, para Df_x (proyección de f_x) y, valga la redundancia, $\{\forall f_x | f_x \leq f_y\}$, para Dif_y (retroyección de f_y) y *b*) mediante la aplicación de los más eficientes algoritmos (33) y (34), respectivamente.

4.6. Soluciones a problemas no-clásicos, nunca antes vistos, ni planteados, dentro de la tradición lógica de la civilización occidental

Proyección de f_x (serie semántica de todas las deducciones válidas para f_x):

$$\text{Pry}(f_x, i) = f_x + \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times (1 - V_2^j f_x) \times V_2^{\left(\sum_{n=0}^i (1 - V_2^n f_x)\right)-1} i \quad (33)$$

$$\text{para: } i = 0, \dots, \left(2^{\sum_{k=0}^{2^N-1} (1 - V_2^k f_x)} \right) - 1$$

Retroyección de f_y (serie semántica de todos los antecedentes válidos para f_y):

$$\text{Rtry}(f_y, i) = C \left(C f_y + \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times (1 - V_2^j C f_y) \times V_2^{\left(\sum_{n=0}^i (1 - V_2^n C f_y)\right)-1} i \right) \quad (34)$$

$$\text{para: } i = \left(2^{\sum_{k=0}^{2^N-1} (1 - V_2^k C f_y)} \right) - 1, \dots, 0$$

4.6.1. Ampliación del sistema de aritmetización²³

Progenitura de fz. Serie semántica de todos los posibles antecedentes (fx's) y consecuentes (fy's) válidos para una expresión fz propuesta a manera de resultado de una deducción a través del condicional:

$$\text{Prg}(fz, i, s) = \text{Pry}(\text{Pry}(\text{Cfz}, i), s) \quad (35)$$

$$\text{para: } i = 0, \dots, \left(2^{\sum_{k=0}^{2^N-1} (1-V_2^k \text{Cfz})} \right) - 1$$

$$\text{para: } s = 0, \dots, \left(2^{\sum_{i=0}^{2^N-1} (1-V_2^i \text{Pry}(\text{Cfz}, i))} \right) - 1$$

La sucesión de los numerales 'i' corresponde consecutivamente a cada antecedente válido (fx) y depende solamente de fz –si bien en su cálculo, debido a las propiedades del operador condicional, parte necesariamente del complemento de fz–, por otra parte, la sucesión de los numerales 's' corresponde a todos los consecuentes válidos para cada uno de los antecedentes válidos, por lo tanto depende tanto de fz como del valor que adquiere la i-ésima proyección de Cfz que constituye cada antecedente válido (fx).

Libre operación de cualquier operador (o función veritativa) sobre la serie de argumentos g(k):

$$\text{LibOp}(\text{Op}, \{g(k_N), \dots, g(k_1)\}, N) = \sum_{j=0}^{2^N-1} 2^j \times V_2^{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k \times V_2^j (g(k+1))} (\text{Op}) \quad (36)$$

La aritmetización permite esta novedosa función adicional mediante la cual puede calcularse no solamente el resultado de aplicar un operador

23 Los conceptos que originan los algoritmos (35) y (36) no forman parte del proyecto original de Hugo Padilla Chacón, son aportaciones personales de este autor y constituyen parte de un proyecto de aritmetización completa en lógicas multivaluadas que data del año 2000, actualmente en proceso de edición.

convencional previamente conocido en la tradición ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, j, \downarrow, \leftrightarrow, \zeta$, etc.), o algunos que ya han sido reportados en la literatura,²⁴ sino que también es posible, utilizando su número de código decimal –el cual es posible obtener por los métodos anteriores–, conocer inmediatamente y en un solo procedimiento, el resultado de la operación libre propuesta al ser aplicada en forma directa sobre la serie de los argumentos ($g(k)$) que son el objeto de su operación, dichos argumentos deberán ser inversamente ordenados, es decir de derecha a izquierda. La principal característica de este algoritmo (36) es su generalidad y universal aplicación en cualquier nivel lógico finito, bivaluado o multivaluado, necesitándose tan sólo sustituir la base binaria por la base multivaluada de que se trate.

4.7. Características del sistema

4.7.0. Todos los algoritmos son válidos, su validez ha sido probada por el método de *inducción matemática*, ya que, si bien, éstos operan en dominios finitos, donde en principio, de acuerdo con Donald Knuth (1997), es posible verificarlos exhaustivamente, especialmente en dominios cuya cardinalidad sea humanamente abordable, también es cierto que la ingente dimensión de los conjuntos resultantes y pertenecientes a dominios de muchas variables lógicas, impone ciertas restricciones a la verificación exhaustiva –incluso para su ‘inspección visual’: el método utilizado por Kiss S.A., (1947)–, por otra parte, habiéndose planteado este sistema para su funcionamiento irrestricto, con cualquier número, previamente definido, de variables lógicas, su validez integral como sistema, también ha sido corroborada por *inducción matemática*, aun tomando en cuenta que su aplicación es posible en un infinito potencial, pero nunca en un infinito en acto.

4.7.1. El sistema de aritmetización completa de la lógica bivaluada parte del uso inicial de fórmulas bien formadas (WFF) ya que en su aplicación no admite, en modo alguno, por improcedentes, expresiones mal formadas, pudiéndose sin embargo, acoplársele a este sistema, dada su modularidad, cualquier interfase o analizador sintáctico, como fue el caso de las versiones presentadas años atrás en las conferencias internacionales UNAM-UNISYS.²⁵

24 Véase p.ej.: Piaget J., 1952; Birkhoff G.- Kiss S.A., 1947 y Kiss S.A., 1948.

25 Véase Garduño-Soto G. *et al.*, 1989.

- 4.7.2. Permite transformar cualquier fórmula bien formada, con cualquier número y combinación de los operadores lógicos conocidos, o cualquier otra función veritativa, en una fórmula canónica (normal disyuntiva).
- 4.7.3. Permite decidir si una fórmula determinada cualquiera, con cualquier número y combinación de los operadores lógicos conocidos, o cualquier otra función veritativa, es o no un teorema de un cálculo proposicional axiomatizado.
- 4.7.4. Permite decidir, en deducción natural, todas las conclusiones semánticamente distintas que se deducen de un conjunto de premisas dado. A esta función se le conoce como: *Proyección*.
- 4.7.5. Resuelve un problema inusual dentro de la lógica. A saber: Permite obtener, en deducción natural, todos los conjuntos semánticamente distintos de premisas de los cuales se deduce -una vez determinado el número de variables en que se quiera encuadrar el problema- una fórmula cualquiera propuesta a manera de conclusión. A esta función se le llama: *Retroyección*.
- 4.7.6. La presente ampliación del sistema permite conocer todos los pares deductivos (antecedente: fx y consecuente: fy) que producen como resultante, a través del operador condicional, una expresión cualquiera (fz) propuesta, sea ésta contradictoria, contingente o tautológica. A esta función se le denomina: *Progenitura*.
- 4.7.7. En la ampliación del sistema se ha incluido la posibilidad de conocer el valor resultante de aplicar indistintamente cualquier operador o función veritativa sobre la serie de argumentos que son el objeto de su operación, dentro del dominio finito de referencia, con un número definido de variables lógicas (N). A esta función se le reconoce como: *Libre operación*.
- 4.7.8. Los problemas se pueden plantear con cualquier número y combinación de los operadores lógicos tradicionales, o de cualquier otra función veritativa, las soluciones, en los casos 4.7.4, 4.7.5, 4.7.6. y 4.7.7 se obtienen en forma normal disyuntiva.
- 4.7.9. En el presente sistema los grupos y subgrupos de algoritmos resuelven problemas específicos, pero todos son interrelacionables permitiendo de este modo resolver, teóricamente sin límite, problemas de mayor grado de complejidad, el sistema al cual previamente se ha

denominado 'SD' se define como: $SD = \langle \{A_1, A_2, \dots, A_n\}, \{0, 1, 2, \dots, n\}, R \rangle$,²⁶ en donde $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es el conjunto de algoritmos, $\{0, 1, 2, \dots, n\}$, es el conjunto de los valores que pueden cobrar las variables y constantes de los algoritmos y R es una relación que permite la interconexión entre los algoritmos.²⁷

- 4.7.10. El sistema permite trabajar, en principio, con cualquier número finito de variables proposicionales (N), tan grande como se desee, definiendo de este modo el nivel de la lógica elegido ($_N L_2$). La limitación para el uso del sistema se establece, tan sólo, de acuerdo con la capacidad de cómputo o supercómputo disponible, o bien, siguiendo los criterios de eficiencia para algoritmos de Donald Knuth (1997), de acuerdo con la cantidad de papel y lápiz del que se pueda disponer en un tiempo finito. Aun con esta limitación, el sistema se desempeña mejor que las tablas de verdad u otros métodos actualmente tan en boga –tanto en lógicas finitarias, como infinitarias–, como las expansiones booleanas en series Reed-Muller, *tableaux*, cálculo lógico diferencial, etcétera, donde se puede apreciar la aparición de comportamientos indeseables, actualmente abordados, en los límites del colapso catastrófico, con sofisticuerías conceptuales extremas y técnicas como: *no-care* y *no-care-about-no-care*, en nada compatibles con los principios filosóficos que inspiran este sistema exacto.

5. Propiedades y desempeño del sistema de aritmetización de la lógica

Una vez que ha sido desplegado, actualizado y ampliado, el entramado conceptual y operativo del sistema primitivista de aritmetización completa de la lógica bivaluada finitaria, es procedente, antes de finalizar este escrito, mostrar algunos resultados concretos de

26 Véase: Garduño-Soto *et al.*, 1989.

27 Poco se ha tratado aquí sobre R , más allá de su implícita inserción en los algoritmos mismos, sobre esta relación se tratará, dado el espacio disponible, en otro lugar. El lector interesado encontrará una valiosa introducción a este fascinante aspecto de las relaciones y transformaciones de las expresiones lógicas en las poco conocidas y ya olvidadas publicaciones de los químicos Stephen Anthony Kiss (1947) y Marcel Boll (1948), así como en el libro del filósofo Jean Piaget (1952), donde por vez primera introduce y justifica formalmente su concepto de las transformaciones INRC: idéntica, inversa, recíproca y correlativa, para a su vez, incorporarlas posteriormente en su doctrina de epistemología genética como: '*opérations réelles de l'esprit parmi l'ensemble des opérations possibles*'; véase también Schang F., 2011.

su aplicación, trayendo previamente a la memoria la humana aspiración –cabalmente expresada en el ‘*Calculemus*’ de Leibniz–, por alcanzar en lógica la fluidez y sencilla armonía de un cálculo exacto, similar al aritmético según Frege, a este respecto conviene citar de nueva cuenta al lógico austríaco Ludwig Wittgenstein:

Las soluciones de los problemas lógicos deben ser sencillas, pues ellas establecen los tipos de la simplicidad.

Los hombres han tenido siempre la vaga idea que debía haber una esfera de cuestiones cuyas respuestas –*a priori*– estuvieran simétricamente unidas en una estructura acabada y regular.

Una esfera en la cual sea válida la proposición *simplex sigillum veri*.²⁸

Ludwig Wittgenstein. *Tractatus Logico-Philosophicus*. 5.4541

asímismo resulta interesante la apreciación de Stephen Anthony Kiss²⁹ quien primero alcanzó a percibir, si bien desde la cultura algebraica, las generales estructuras, ahora conocidas como ‘fractales’, subyacentes en el seno de la lógica, estructuras que son, a la vez, el motivo y la posibilidad de su aritmetización a través los algoritmos arriba expuestos:

La atención del lector es atraída nuevamente hacia la importancia del concepto de Estructura como base de todo conocimiento, ya sea resultante del razonamiento inductivo o deductivo. Las manifestaciones, leyes y regularidades de esta Estructura pueden ser percibidas por cualquier persona inteligente cuyas sensibilidades no hayan sido perturbadas por sus emociones o sus preocupaciones materiales o de otro tipo.

Stephen Anthony Kiss.

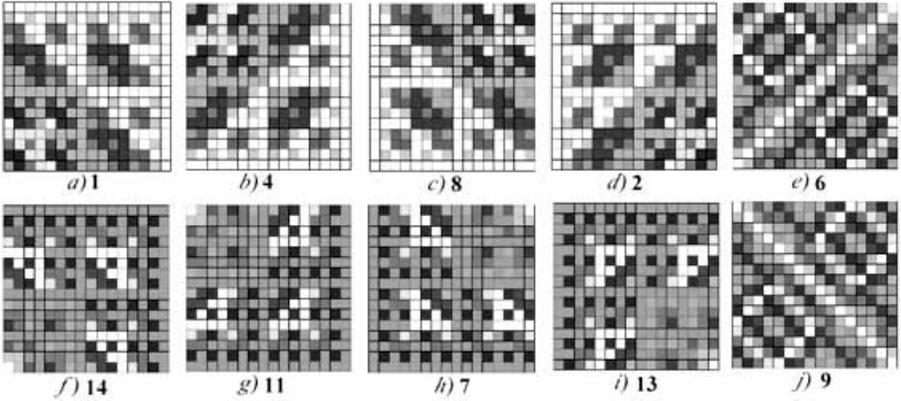
Transformation on Lattices and Structures of Logic

A continuación se muestra en las figuras 5.1 y 5.2 el desplegado completo de los resultados de la aplicación de los diez operadores diádicos del nivel ${}_2L_2$ (véase la tabla 2.8), así como sus propiedades de complementación, rotación y reflexión, en suma, su estructura:

²⁸ La sencillez es el sello de la verdad.

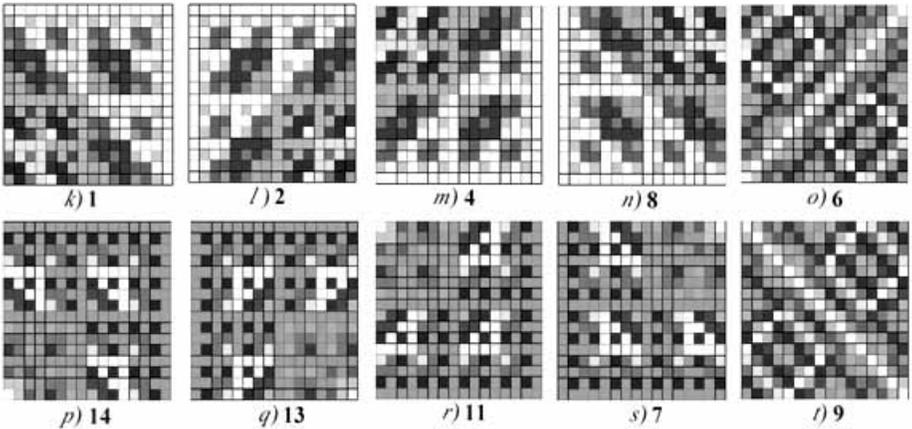
²⁹ Totalmente ignorado y despreciado por los lógicos y matemáticos profesionales, dada su proveniencia de la disciplina química, excepción hecha de Garrett Birkhoff quien subrayó la enorme importancia de sus descubrimientos para el futuro, ya que según dijo, su época no estaba preparada todavía para apreciarlos.

Figura 5.1. Matrices resultantes de la aplicación de los diez operadores diádicos en ${}_2L_2$



a) Nor, b) Negación del Condicional Inverso, c) And, d) Negación del Condicional, e) Xor, f) Or, g) Condicional Inverso, h) Nand, i) Condicional, j) Equivalencia lógica. La variable P se sitúa en el eje de las abscisas de 0 a 15^{30} y la variable Q en el eje de las ordenadas también de 0 a 15. Coloración arbitraria.³¹

Figura 5.2. Propiedades de rotorreflexión de los diez operadores diádicos del nivel lógico ${}_2L_2$



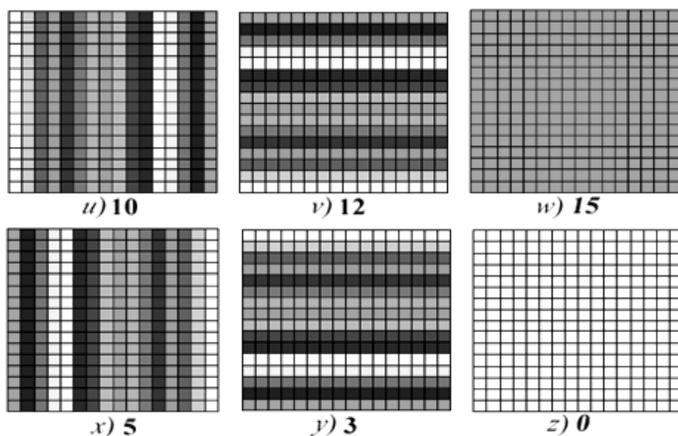
30 Los valores numéricos de 0 al 15 –aquí representados con colores– corresponden a las expresiones lógicas pertenecientes al dominio lógico $2L_2$, tal como se relaciona en las tablas 2.6 y 2.7.

31 Paul Saint Denis del MIT redescubrió independientemente estas matrices, muchos años después de Stephen Anthony Kiss y de Hugo Padilla-Chacón, véase: Saint Denis, P. y Grim P. *Fractal Images of Formal Systems*, 1997 y su *Philosophical Computer* (Grim, P. et al., 1998).

k) Nor, l) Negación del Condicional, m) Negación del Condicional Inverso, n) And, o) Xor, p) Or, q) Condicional, r) Condicional Inverso, s) Nand, t) Equivalencia lógica. La variable P se sitúa en el eje de las abscisas de 0 a 15 y la variable Q en el eje de las ordenadas también de 0 a 15. Coloración arbitraria.³²

En la figura 5.3 se presenta la caracterización gráfica de la aplicación ‘mecánica’ (conforme define su columna veritativo-funcional en la tabla de verdad) de las funciones veritativas correspondientes a las expresiones monádicas, es decir, las variables lógicas P , Q y sus negaciones $\neg P$ y $\neg Q$ (expresiones cuya *aridad* es igual a la unidad), asimismo se presenta la caracterización gráfica de las expresiones ceroádicas o constantes (expresiones cuya *aridad* es igual a cero), es decir, la contradicción (?) y la tautología (>). Resultando de esta aplicación ‘mecánica’ unas matrices pseudodiádicas, cuyo único objetivo es mostrar la improcedencia de aplicar una función de menor *aridad* en un nivel lógico de mayor *aridad* –la aplicación recíproca es aun más improcedente–, pues el desplegado gráfico, en su invariabilidad y constancia, nos informa acerca de la futilidad o insignificancia de una de las variables en el caso monádico o de ambas variables en el caso ceroádico.³³

Figura 5.3. Propiedades de complementación en las expresiones monádicas y desplegado de las constantes ceroádicas en ${}_2L_2$ ³⁴



u) P , v) Q , w) Tautología (>), x) $\neg P$, y) $\neg Q$, z) Contradicción (?). La variable P se ubica en el eje de las abscisas de 0 a 15 y la variable Q en el eje de las ordenadas también de 0 a 15. Ejercicio introducido con el solo fin de visualizar la invariabilidad de estas funciones veritativas. Coloración arbitraria.

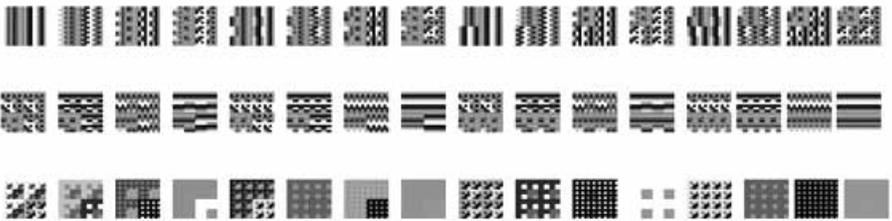
32 Los códigos, autómatas y tapicerías de Stephen Wolfram no apuntaron nunca directa, ni indirectamente, hacia el declarado propósito de discernir la estructura profunda de la lógica.

33 Véase la discusión referente a la *aridad* en el párrafo que antecede a la tabla 2.7.

34 Véase las tablas 2.3 y 2.4.

En las figuras 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7 se muestra el desplegado gráfico de la función ternaria $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ en el dominio ${}_3L_2$, este desplegado (originalmente de 0-255), se ha restringido al rango de las expresiones $(0-15)^{35}$ para mejor apreciar la progresión y distribución de esta estructura cúbica, a nivel numérico, en su representación gráfica. En la figura 5.4 se muestra condensados todos los cortes que sobre los ejes cartesianos x , y y z se realiza, para visualizar en estas caras el patrón que esta función exhibe al mantener fijo en cada corte el valor que en cada caso cobran las variables proposicionales P (en el eje de las x : figura 5.5), Q (en el eje de las y : figura 5.5) y R (en el eje de las z : figura 5.6) respectivamente, de modo tal que es posible apreciar –sin los huecos que otros autores del área computacional, o diseñadores, proponen para la representación tridimensional del triángulo de Sierpinski– la completa saturación de la función $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$, cuyo número de código decimal es: 242, ó: 11110010 en número de código binario.

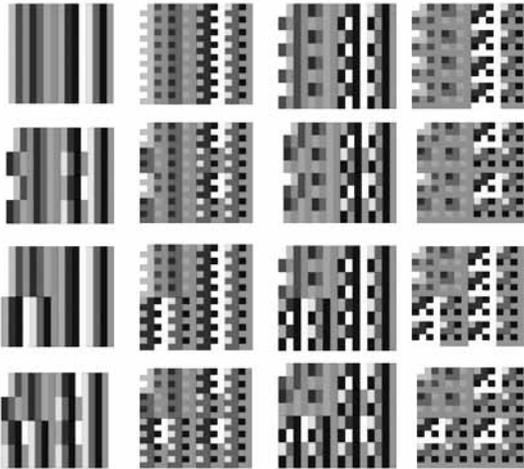
Figura 5.4. Desplegado completo del cubo resultante de la aplicación del operador ternario $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ en ${}_3L_2$, cortes sobre los ejes X , Y y Z .



Cortes sobre los ejes x , y y z en orden descendente. En el primer renglón (variable P constante) La variable R se ubica en el eje de las abscisas de 0 a 15 y la variable Q en el eje de las ordenadas también de 0 a 15. En el segundo renglón (variable Q constante) La variable P se ubica en el eje de las abscisas de 0 a 15 y la variable R en el eje de las ordenadas también de 0 a 15. En el tercer renglón (variable R constante) La variable P se ubica en el eje de las abscisas de 0 a 15 y la variable Q en el eje de las ordenadas también de 0 a 15. Coloración arbitraria.

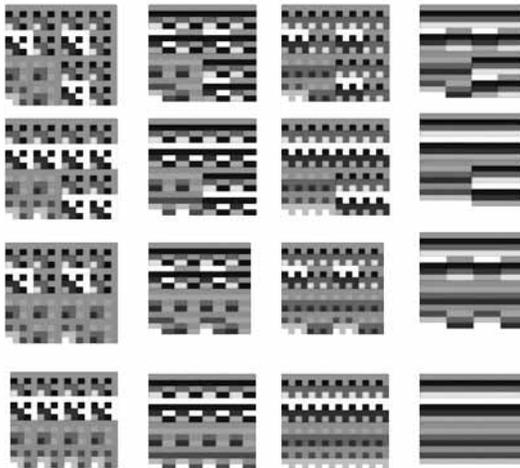
35 Debe aclararse que la semántica lógica de los valores del rango (0-15) en el dominio ${}_3L_2$ difiere por completo de la semántica de los mismos números correspondientes al dominio ${}_2L_2$ (véase la tabla 2.7), correspondiendo entonces el rango (0-15) en ${}_3L_2$ a las expresiones lógicas listadas en la tabla 5.1 (véase: Garduño-Soto, G. 2008a), se ha mantenido la misma coloración, solamente para su mejor visualización.

Figura 5.4. Cortes transversales sobre el eje X del cubo del operador ternario $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$



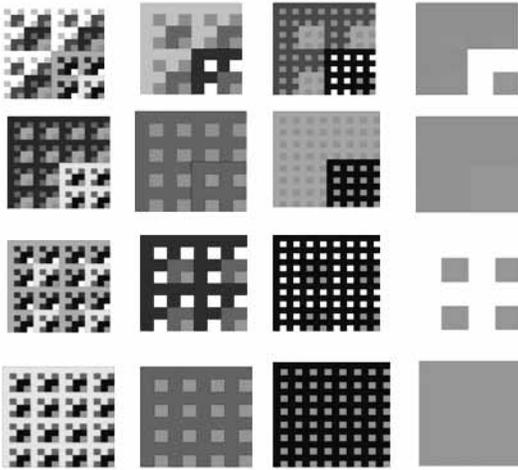
Progresión de los patrones de las caras para la variable P constante en cada matriz (cortes correspondientes para P de 0 a 15 en orden horizontal de izquierda a derecha y descendente). La variable R se ubica en el eje de las abscisas de 0 a 15 y la variable Q en el eje de las ordenadas también de 0 a 15. Coloración arbitraria.

Figura 5.5. Cortes transversales sobre el eje Y del cubo del operador ternario $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$



Progresión de los patrones de las caras para la variable Q constante en cada matriz (cortes correspondientes para Q de 0 a 15 en orden horizontal de izquierda a derecha y descendente). La variable P se ubica en el eje de las abscisas de 0 a 15 y la variable R en el eje de las ordenadas también de 0 a 15. Coloración arbitraria.

Figura 5.6. Cortes transversales sobre el eje Z del cubo del operador ternario $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$



Progresión de los patrones de las caras para la variable R constante en cada matriz (cortes correspondientes para R de 0 a 15 en orden horizontal de izquierda a derecha y descendente). La variable P se ubica en el eje de las abscisas de 0 a 15 y la variable Q en el eje de las ordenadas también de 0 a 15. Coloración arbitraria.

Tabla 5.1. Listado de la relación entre valores numéricos y su semántica lógica, para las primeras dieciséis expresiones del dominio ${}_3L_2$.³⁶

Número de código decimal	Semántica lógica	Aridad	Variables lógicas involucradas	Forma normal disyuntiva (FND)
0	Contradicción (?)	0	Ninguna	Sin disyuntos ({ \emptyset })
1	$(P \vee Q) \downarrow R$	3	P, Q y R	$(\neg R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$
2	$(R \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \sim Q)$ (antecedente de bArOco) ³⁷	3	P, Q y R	$(\neg R \wedge \neg Q \wedge P)$
3	$Q \downarrow R$	2	Q y R	$(\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$
4	$(Q \rightarrow P) \downarrow R$	3	P, Q y R	$(\neg R \wedge Q \wedge \neg P)$
5	$P \downarrow R$	2	P y R	$(\neg R \wedge Q \wedge \neg P) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$
6	$(P \leftrightarrow Q) \downarrow R$	3	P, Q y R	$(\neg R \wedge Q \wedge \neg P) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge P)$

³⁶ Para ver el listado completo de las 256 expresiones lógicas (con número de código decimal de 0 a 255) pertenecientes al dominio ${}_3L_2$, véase: Garduño-Soto G., 2008a.

7	$(P \wedge Q) \downarrow R$	3	$P, Q, y R$	$(\neg R \wedge Q \wedge \neg P) \vee$ $(\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee$ $(\neg R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$
8	$(Q \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow R)$ (antecedente de fErIO, fEstInO, bOcArdO, fErIsOn y frEsIsOn)	3	$P, Q, y R$	$(\neg R \wedge Q \wedge P)$
9	$(P \otimes Q) \downarrow R$	3	$P, Q, y R$	$(\neg R \wedge Q \wedge P) \vee$ $(\neg R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$
10	$P \rightarrow R$ (consecuente de fErIO, fEstInO, bArOcO, fELApOn, fErIsOn, fEsApO y frEsIsOn)	2	$P, y R$	$(\neg R \wedge Q \wedge P) \vee$ $(\neg R \wedge \neg Q \wedge P)$
11	$(Q \rightarrow P) \downarrow R$	3	$\dot{P}, Q, y R$	$(\neg R \wedge Q \wedge P) \vee$ $(\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee$ $(\neg R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$
12	$(Q \rightarrow R)$	2	$Q, y R$	$(\neg R \wedge Q \wedge P) \vee$ $(\neg R \wedge Q \wedge \neg P)$
13	$(P \rightarrow Q) \downarrow R$	3	$P, Q, y R$	$(\neg R \wedge Q \wedge P) \vee$ $(\neg R \wedge Q \wedge \neg P) \vee$ $(\neg R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$
14	$(P \downarrow Q) \downarrow R$	3	$P, Q, y R$	$(\neg R \wedge Q \wedge P) \vee$ $(\neg R \wedge Q \wedge \neg P) \vee$ $(\neg R \wedge \neg Q \wedge P)$
15	$\neg R$	1	R	$(\neg R \wedge Q \wedge P) \vee$ $(\neg R \wedge Q \wedge \neg P) \vee$ $(\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee$ $(\neg R \wedge \neg Q \wedge \neg P)$

El algebraísta avezado reconocerá de inmediato en las matrices de las figuras 5.4, 5.5 y 5.6, la estructura algebraica de grupo, si bien en la actualidad no se ha establecido, formal, sólidamente y con fluidez, la relación entre la lógica y la teoría de grupos, relación que será tratada por este autor en otro lugar, es necesario hacer notar que algunos progresos se ha hecho en este sentido, al haber ya reconocido algunos autores (entre los primeros: Kiss, S.A., 1948; Boll, M., 1948 y Piaget J., 1952, y más recientemente: Yanushkevich S., 1998) la estructura de anillo dentro de la lógica y su operar sistemático.

Por otra parte, en las estructuras fractales anteriores y las subsecuentes, el lector podrá notar la similitud del condicional y otros operadores con el triángulo fractal de Sierpinski.

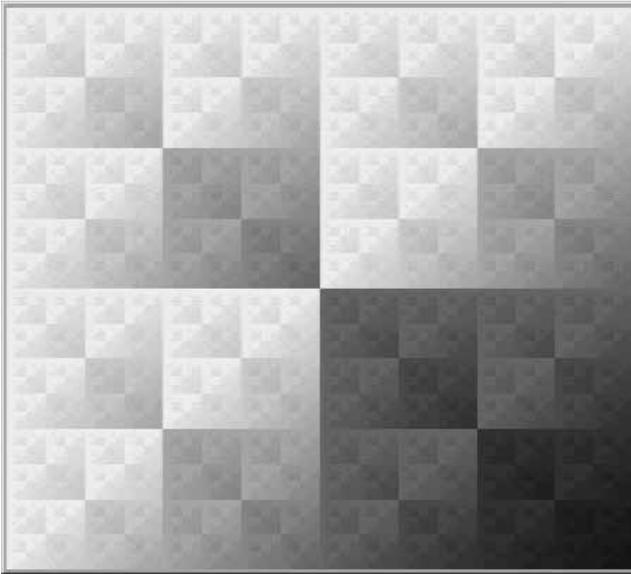
A continuación, a título de ilustración final, de la capacidad y perfecto encaje dentro del nivel de la lógica tradicional, de este sistema de aritmetización de la lógica, en las figuras 5.7, 5.8, 5.9 y 5.10³⁸ se muestra

37 Véase la nota al pie de página número 8 sobre la notación silogística.

38 Algunos gráficos similares, sin especificación alguna de su razón constructiva, circulan ya en la WWW, por otros autores, algunos diseñadores, a partir de fechas muy posteriores a las primeras implementaciones del sistema aquí presentado (por ejemplo: http://www.fractalnet.org/gallery2/v/FRACTAL/Sierpinski_html, ca. 2010).

el desplegado completo de los resultados de la aplicación aritmetizada de los operadores lógicos del condicional, la negación del condicional, el *XOR* y la equivalencia lógica (Garduño-Soto G., 2008b) en el dominio triproposicional (${}_3L_2$).

Figura 5.7. Matriz del condicional lógico en ${}_3L_2$ ³⁹ (coloración constructiva)⁴⁰



39 La variable *P* en el eje de las abscisas de 0 a 255 y la variable *Q* en el eje de las ordenadas también de 0 a 255.

40 La coloración en los desplegados fractales se ha construido sobre el patrón de la tricromía aditiva: rojo, verde y azul (RGB por sus siglas en inglés) con valores proporcionales (0-255) para los canales R, G, B, de acuerdo con las correspondientes valuaciones numéricas binarias de cada expresión o variable lógica.

Figura 5.8. Matriz de la negación del condicional lógico en ${}_3L_2$ (coloración constructiva)

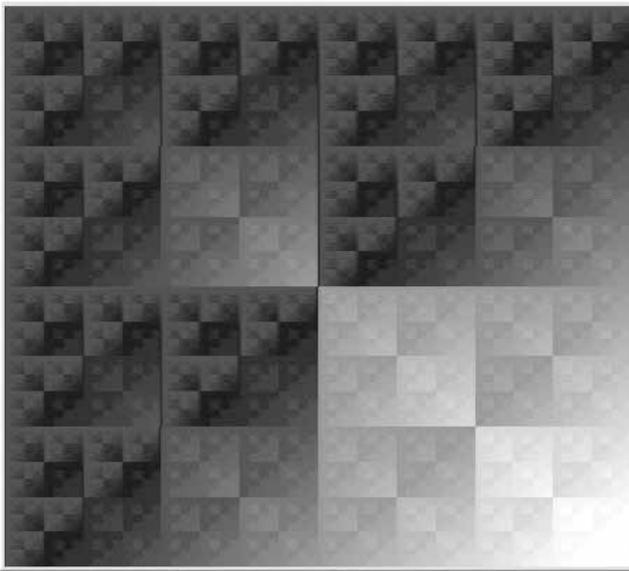


Figura 5.9. Matriz del XOR en ${}_3L_2$ (coloración constructiva)

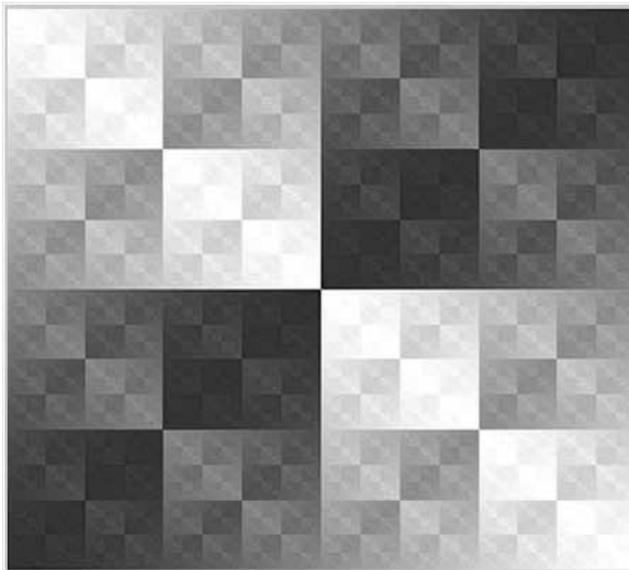
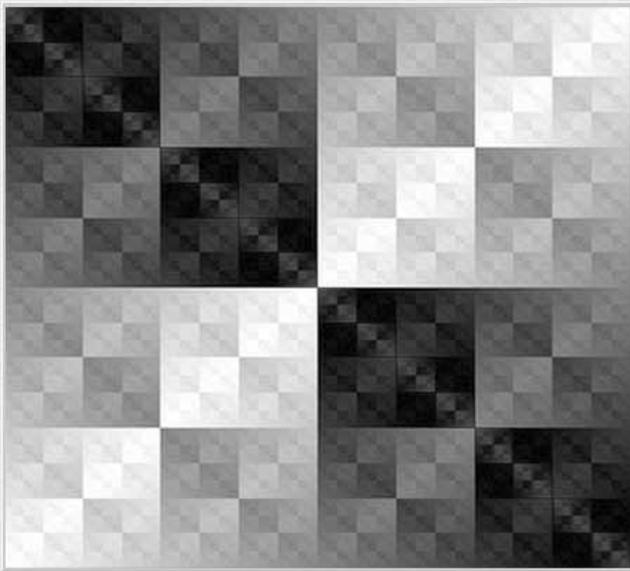


Figura 5.10. Matriz de la equivalencia lógica en ${}_3L_2$ (coloración constructiva)



6. A manera de conclusión

Como el lector ha podido apreciar, el sistema de aritmetización completa de la lógica bivaluada finitaria aquí presentado es cabalmente funcional y se apega estrictamente, en su desempeño, a la estructura y a las operaciones mismas de la lógica tradicional, a punto tal que, incluso con un número pequeño de variables lógicas, es capaz de producir grandes sorpresas⁴¹ al operador de las distintas implementaciones existentes, ya que la capacidad de abstracción normal del ser humano no es naturalmente competente en el manejo de más allá de cuatro objetos lógicos independientes, según ha sido demostrado en montajes experimentales realizados por connotados psicólogos cognitivos.⁴² Es en este sentido que los conceptos filosóficos que han inspirado la construcción de este sistema, encuentran un sólido soporte que permite proseguir la investigación sobre esta vía, con la fundada esperanza de encontrar nuevos caminos que permitan seguir avanzando a la lógica -inactiva después de más de veinticuatro siglos sin adiciones

41 Si bien el autor adhiere al criterio de Wittgenstein según el cual en la lógica, formalmente hablando, no hay sorpresas, ya que toda consecuencia en lógica está definida de antemano (v. *Tractatus* 6.125, 6.1251 y 6.1262).

42 Véase: Johnson-Laird, P.N. *et al.*, 1994.

sustantivas, hasta los inicios del siglo XX- ya que el autor considera que este enfoque de la disciplina lógica apenas ha comenzado a producir sus propios frutos, sus propios panoramas, donde se descubre que la deducción lógica tradicional (véase: Wittgenstein L., *Tractatus*, 6.1262), que ha orientado, como única noción y vía de consecuencia válida, a los lógicos durante siglos, no es sino una sola vía posible, entre varias, para el ejercicio racional.

7. Referencias

- Bell, E.T. *Arithmetic of Logic*. AMS, 1927.
- Birkhoff, Garrett y Kiss, Anthony Stephen. "A ternary operation in distributive lattices." *Bull. Amer. Math. Soc.* 53, 749-752, 1947.
- Boll, Marcel. *Manuel de logique scientifique. Remplaçant et complétant les Elements de Logique Scientifique*, 1942. Dunod, Paris, 1948.
- Boole, George. *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Walton and Maberly, Londres, 1854. Reimpresión: Dover, Nueva York, 1958.
- Clarke, Arthur C. *Profiles of the Future*. © 1958. Harper and Row, 1963.
- Copi, Irving Marmer. *Introduction to logic*. Nueva York, MacMillan, 1953.
- Ernst Nagel, James R. Newman. *Gödel's Proof*. (ed. Douglas R. Hofstadter), edición revisada. New York University Press, 2001.
- Enderton, H.B. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, Nueva York, 1972.
- Frege, Gottlob. *Begriffsschrift*. Halle, Nebert, 1879. (Primera traducción al español por Hugo Padilla-Chacón con el título *Conceptografía*. México, Universidad Nacional Autónoma de México, 1972.)
- Frege, Gottlob. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau, Marcus, 1884. (Traducción de Hugo Padilla-Chacón con el título *Los Fundamentos de la Aritmética*. Publicada en conjunto con la *Conceptografía* en 1972. Obra de Frege también traducida por Ulises Moulines con el mismo título, Barcelona, Laia, 1972.)
- Garduño-Soto, G., Thierry-García D.R., Vidal-Urbe R., Padilla-Chacón H. "Sistema experto para resolver problemas lógicos de deducción." *Va. Conferencia Internacional: Las Computadoras en Instituciones de Educación y de Investigación*. Cómputo Académico, UNAM, UNISYS, México, noviembre 14-16, 1989. (https://www.academia.edu/4981008/SISTEMA_EXPERTO_PARA_RESOLVER_PROBLEMAS_L%C3%93GICOS_DE_DEDUCCI%C3%93N ó <http://es.scribd.com/doc/181374929/Sistema-Experto-para-Resolver-Problemas-Logicos-de-Deduccin>).
- Garduño-Soto, G. "2. The tripropositional bivalent level (${}_3L_2$) and its relationship with the aristotelic syllogistic." En: *Opuscula logica (${}_2L_2$ - ${}_3L_2$ / ${}_1L_3$ - ${}_2L_3$)*. Edición de autor. Registro Secretaría de Educación Pública-Indautor 03-2008-090813382900-01. México D.F., 2008a. (<https://www.academia.edu>).

- edu/14750611/Opuscula_logica._2._The_Tripropositional_Bivalent_Level_3L2_and_its_Relationship_with_the_Aristotelic_Syllogistic_).
- Garduño-Soto, G. *Colección de diseños gráficos no. 1. (Operadores bivalentes – once variaciones en RGB)*. Edición de autor. Registro Secretaría de Educación Pública-Indautor 03-2008-080111390900-14. México D.F., 2008b.
- Göedel, Kurt. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I*. 1931. ("On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I." En: Heijenoort J.V. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, 1967. Existe también la traducción al español por Jesús Mosterín, en: Göedel K. *Obra Completa*, Alianza Universidad, Madrid, 1981.)
- Grim, Patrick; Mar, Gary R.; Saint Denis, Paul. *The Philosophical Computer*. MIT Press, Cambridge, Massachussets, 1998.
- Harari, Yuval Noah. *Sapiens. A Brief History of Humankind*. © 2011. Random House, Londres, 2014.
- Heijenoort, J.V. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, 1967.
- Kiss, Stephen Anthony. *Transformation on Lattices and Structures of Logic*. Edición de autor, auspiciada por Standard Oil Development Co., Nueva York, 1947.
- Kiss, Stephen Anthony. "Semilattices and a ternary operation in modular lattices." *Bull. Amer. Math. Soc.* 54, 1176-1179, 1948.
- Kiss, Stephen Anthony. *An introduction to algebraic logic*. Edición de autor, Westport, Connecticut, enero, 1961.
- Knuth, Donald Ervin. *Fundamental Algorithms. The Art of Computing Programming*. Vol. 1, 3a. ed. Addison-Wesley, Reading, Massachussets, 1997.
- Johnson-Laird, P.N.; Byrne, R.M.; Schaeken, W. "Propositional reasoning by model." *Psychol. Rev.* Oct. 101, (4), 711-724, 1994.
- Łukasiewicz, Jan. *La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna*. Tecnos, Madrid, 1977.
- Mates, Benson. *Elementary Logic*. Oxford University Press, Nueva York, 1965.
- Medawar, Peter B., *Los límites de la ciencia*. FCE, México, 1971.
- Padilla-Chacón, H. "Enfoque matemático de la semántica del cálculo proposicional." *Revista de Filosofía*. Universidad Iberoamericana. México, D.F. Enero-abril, (44), 158-175, 1984. (http://es.scribd.com/doc/101816136/Enfoque-matematico-de-la-semantica-del-calculo-proposicional-de-Hugo-Padilla?in_collection=3733275).
- Piaget, Jean. *Essais sur les Transformations des Opérations Logiques. Les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions*. Bibliothèque de Philosophie Contemporaine. Logique et Philosophie des Sciences. PUF, París, 1952.
- Piaget, Jean. *Essai de logique opératoire*. Dunod, París, 1971. (Traducción al español de la 2ª ed. por María Rosa Morales de Spagnolo, con el título: *Ensayo de lógica operatoria*. Guadalupe, Buenos Aires, 1977.)

- Post, Emil Leon. *Introduction to a general theory of elementary propositions*. 1921. En: Heijenoort J.V. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, 1967.
- Quine, W.V.O. *Methods of logic*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1959. (Traducción al español por Acero J.J y Guasch N. con el título *Los métodos de la lógica*. Col. Obras maestras del pensamiento contemporáneo. No. 32. Planeta-De Agostini, Barcelona, 1993.)
- Rosser, J.B. *Logic for mathematicians*. McGraw-Hill Book Co., 1953.
- Saint Denis, P. y Grim P. "Fractal Images of Formal Systems." *The Journal of Philosophical Logic*, 26, 181-222, 1997.
- Salehi, P. Saeed. "Decidable formulas of intuitionistic primitive recursive arithmetic." *RML*, 2002.
- Schang, Fabien. "An arithmetization of the logic of oppositions." LHSP Henri Poincaré, Nancy 2. Simposio afiliado: *The Logic of Opposition*. CLMPS, Nancy (julio 19-26, 2011). (Disponible en: www.academia.edu).
- Schröder, Ernst. *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik)*. 3 vols. (I – III). Leipzig, B.G. Teubner, (1890–1910).
- Shannon, C.E. "A symbolic analysis of relay and switching circuits." *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*. (57), 713-723, 1938.
- Sheffer, H.M. "A set of five independent postulates for boolean algebras." *Transactions of the American Mathematical Society*. (14), 481-488, 1913.
- Sotirov, V. "Arithmetizations of syllogistic à la Leibniz." *J. App. Non-Class. Log.* 9, (2–3), 387–405, 1999.
- Uckelman, S.L. *Computing with Concepts, Computing with Numbers: Llull, Leibniz, & Boole*. CIE, 2010. (Disponible en: www.academia.edu).
- Whitehead, A.N. y Russell B. *Principia Mathematica*. I (1910) – II (1912) – III (1913), Cambridge, University, 2a. ed., 1925 – 1927.
- Wittgenstein, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Kegan-Paul, Londres, 1922. (Traducción al español por Enrique Tierno Galván en: *Revista de Occidente*, Madrid, 1957. Existen otras ediciones en español, p.ej. en: Alianza Universidad y Tecnos de Madrid, así como en la WWW).
- Wolfram S. *Cellular automata as simple self-organizing systems*. Caltech preprint CALT-68-938, 1982.
- Wolfram S. "Statistical mechanics of cellular automata." *Reviews of Modern Physics*, 55, 601-644, julio, 1983.
- Wolfram, S.; Martin, O.; Odlyzko, A.M. "Algebraic properties of cellular automata." *Communications in Mathematical Physics*, 93, 219-258, marzo, 1984.
- Yanushkevich, S. "Arithmetical canonical expansion of Boolean and MVL functions as generalized Reed-Muller series." *Proceedings IFIP WG 10.5 Workshop on applications of the Reed-Muller Expansion in circuit design-Reed-Muller'95*. 300-307, Japón, 1995.

- Yanushkevich, S. *Logic differential calculus in multi-valued logic design*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecinskiej. Szczecin, Polonia, 1998, (tesis doctoral).
- Zhegalkin, I.I. О технике вычислений предложений в символической логике. *Rec. Math.*, XXXIV: 1; Moscú, 1927. (Resumen en francés. *Sur le calcul des propositions dans la logique symbolique.*)
- Zhegalkin, I.I. Арифметизация символической логики. *Rec. Math.*, XXXV : 3 - 4; Moscú, 1928. (Resumen en francés. *L'arithmetisation de la logique symbolique.*)



CENTRO DE ESTUDIOS DE FILOSOFÍA ANALÍTICA

Analítica

Revista de Filosofía

Analítica es la revista del Centro de Estudios de Filosofía Analítica (CESFIA). Es una publicación de periodicidad anual y sus artículos son arbitrados. La revista tiene como objetivo difundir el estudio y cultivo de la filosofía analítica dentro del Perú y fomentar el desarrollo de investigaciones emparentadas con la filosofía analítica y su historia, en tanto método y temática.

Los textos presentados a *Analítica* serán arbitrados y deberán adecuarse a las siguientes formalidades:

1. Tratar temas relacionados con la investigación en el campo de la filosofía o temas científico-culturales abordados filosóficamente.
2. Estar escritos en castellano o inglés.
3. Ser originales e inéditos.
4. El envío será preferentemente vía correo electrónico, como archivo adjunto, a analitica@cesfia.org.pe
5. El formato del archivo debe, en principio, ser PDF. Aunque también se recibirán documentos de extensión DOC, DOCX o RTF.
6. Si el autor lo prefiere puede remitir su trabajo vía postal a:
Analítica, Revista de Filosofía, Centro de Estudios de Filosofía Analítica. Albacete 138, La Molina, Lima, Perú. En este caso, se requieren tres copias impresas en papel A4 por una sola cara y a doble espacio, las mismas que no serán devueltas.
7. Los textos deben presentar el siguiente orden:
 - a) Título, nombre del autor, filiación institucional, correo electrónico y resumen biográfico. (El nombre del autor solo irá en esta primera página y no deberá repetirse en las ulteriores para asegurar una evaluación objetiva por parte de los jueces.)
 - b) Resúmenes en castellano e inglés de no más de 150 palabras cada uno.
 - c) Palabras clave en castellano e inglés.
 - d) Texto del trabajo.
 - e) Referencias bibliográficas en estilo APA.
8. *Analítica* consta de las siguientes secciones.
 - Artículos: Sección cuyos trabajos no sobrepasarán las 10,000 palabras incluyendo notas a pie de página y referencias bibliográficas.
 - Reseñas: Sección cuyos trabajos no sobrepasarán las 4,000 palabras incluyendo notas a pie de página y referencias bibliográficas.
 - Notas: Sección cuyos trabajos no sobrepasarán las 2,000 palabras.
 - Noticias. Sección cuyos trabajos no sobrepasarán las 1,000 palabras.

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR
EN DICIEMBRE DE 2015
LIMA - PERÚ

ISSN 1996 - 1464



CEFA CENTRO DE ESTUDIOS
DE FILOSOFÍA ANALÍTICA

