

# Identidade, Indiscernibilidade e Lógica

## *Identity, Indiscernibility, and Logic*

*Kherian Gracher<sup>1</sup>*

*Universidade Federal de Santa Catarina*

### **Resumo**

É a identidade fundamental para todo sistema formal? Ainda que um certo sistema não contenha a identidade, será que esse conceito não é pressuposto de algum modo – seja em um nível metalinguístico ou mesmo intuitivo? Nesse artigo iremos discutir esse problema. Otávio Bueno (2014, 2016) argumenta contra a eliminação da identidade, afirmando que esse conceito é fundamental e não-eliminável (mesmo nos sistemas que alegam fazê-lo). Décio Krause e Jonas Arenhart (2015), por outro lado, apresentam uma série de objeções à tese de Bueno. Em um primeiro momento analisaremos como o conceito de identidade foi compreendido na tradição filosófica, como também parte de seu tratamento formal. Examinaremos também a noção de indiscernibilidade, que pela abordagem tradicional da identidade, é equivalente à noção de identidade, mas que (argumentavelmente) não lhe é logicamente equivalente. Apresentaremos assim a estratégia proposta por Krause e Arenhart, na qual um sistema formal pode eliminar a identidade em prol da noção de indiscernibilidade. E, por fim, iremos expor as críticas de Bueno a tal estratégia, oferecendo algumas objeções contra ele.

---

*1* - Programa de Pós-Graduação em Filosofia. Grupo de Pesquisa em Lógica e Fundamentos da Ciência (CNPq)  
O autor agradece a Décio Krause, Jonas Arenhart, Otávio Bueno e Luiz Helvécio pelas discussões frutíferas e pela paciência.

## **Palavras-chave**

Identidade; Indiscernibilidade; Filosofia da Lógica; Metafísica.

## **Abstract**

Is identity fundamental to formal systems? Even if a system have no the identity relation, is that concept is not assumed in any way – whether in a metalinguistic or intuitive level? In this paper we shall discuss this issue. Otávio Bueno (2014, 2016) argues against the elimination of identity, holding that this concept is fundamental and non-eliminable (even in does systems that claim to do so). Décio Arenhart Krause and Jonas (2015), by the other hand, have a number of objections to Bueno's thesis. Firstly, we look at how the concept of identity was accounted in the philosophical tradition, as well as part of its formal account. We will also examine the notion of indiscernibility that, according to the traditional approach to identity, is equivalent to the notion of identity, but (arguably) is not it logically equivalent. Thus, we shall state Krause and Arenhart's strategy, according to, in a formal system we can eliminate identity in favor of the indiscernibility notion. Finally, we shall expose Bueno's criticism to such strategy, and then to put forward some objections against it.

## **Keywords**

Identity; Indiscernibility; Philosophy of Logic; Metaphysics. Metafísica.

Otávio Bueno, no artigo *Why Identity is Fundamental* (2014), formulou quatro razões que tornariam a identidade fundamental: (1) a identidade é pressuposta em todo sistema conceitual; (2) é requerida para uma caracterização mínima de indivíduo; (3) não pode ser definida mesmo nos sistemas que, alegadamente, têm poder expressivo para tal; (4) é necessária para a inteligibilidade dos quantificadores. Por outro lado, Décio Krause e Jonas Arenhart (2015) ofereceram diversos desafios para a tese de Bueno, apresentando

objeções contra cada uma das razões anteriores. Segundo eles, isso nos permite recusar a aparente fundamentalidade da identidade – argumentando a favor da possível eliminação desta noção em prol de uma noção que seria mais *fraca* (*viz.*, indiscernibilidade). O debate seguiu com a posterior publicação de Bueno (2016), respondendo às críticas de Krause e Arenhart e oferecendo objeções contra eles.

A discussão se tornou ampla, com argumentos cada vez mais sofisticados e desafios intelectuais que põem em causa crenças e princípios sedimentados na tradição filosófica – quiçá em nossas intuições mais básicas. Uma abordagem completa dessa discussão, com todas as suas implicações, não pode ser feita de maneira apressada e em um espaço tão curto quanto este que temos. Portanto, farei duas restrições. Primeiro, iremos discutir a primeira razão defendida por Bueno, *i.e.*, a identidade é fundamental porque é pressuposta em todo sistema conceitual. A segunda restrição nos deixará com o seguinte problema, que levaremos para o âmbito de sistemas formais: é a identidade pressuposta em todo sistema formal?

Em um primeiro momento veremos como a identidade é compreendida pela tradição filosófica – e, *en passant*, como esse conceito é entendido formalmente. Tão logo falamos sobre a identidade, outro conceito estritamente relacionado aparece: a indiscernibilidade. Devemos, pois, diferenciar essas duas noções. Após esse preâmbulo, onde as noções gerais serão introduzidas, apresentaremos uma estratégia proposta por Krause e Arenhart (2015, p.3), que defendem a possibilidade de um sistema formal assumir a indiscernibilidade (e não a identidade) como conceito primitivo – o que tornaria a identidade, de acordo com eles, pelo menos em princípio, eliminável. Por fim, apresentaremos as críticas oferecidas por Bueno (2016) e algumas objeções a elas.

## 1 A Teoria Tradicional da Identidade

O que é a identidade?<sup>2</sup> Ainda que este artigo não se centre especificamente nesse problema, enfrentá-lo é inevitável. Chamarei de “Teoria Tradicional da Identidade” (TTI) a concepção de identidade que foi sedimentada na tradição filosófica.<sup>3</sup> Como veremos, parece razoável afirmar que a TTI influenciou o modo pelo qual a identidade foi considerada nos sistemas formais usuais.

2 - Há diversos usos e noções para o conceito de identidade. Discutiremos aqui a noção *numérica* da identidade, ou identidade *out court*. De modo geral, esta noção é empregada em expressões como “dois mais dois é igual a quatro” ou “Batman é idêntico a Bruce Wayne”. A noção numérica da identidade se distingue da noção *qualitativa*. Caso o leitor não esteja familiarizado com essa distinção, ver (LOCKE, 1996, XXVII), (SIDER; CONEE, 2005, p. 7-8), (NOONAN; CURTIS, 2014), (KORFMACHER, 2006) e (MCGINN, 2000, p. 2-3).

3 - Vamos seguir a terminologia empregada por (BRAIDA; KRAUSE, 2013, p. 177-1784).

## 1.1 Tratamento Filosófico da Identidade

A tradição filosófica associa ao conceito de identidade certas características que esse conceito preservaria, cujo tratamento é geralmente oferecido pela concepção metafísica que se assume. Algumas das principais características, que encontramos na literatura filosófica, compreendem a identidade como:

- (1) Sendo uma relação universal. Ou seja, todas as entidades mantêm a relação de identidade consigo mesmo (por vezes tal característica é chamada de “auto-identidade”).
- (2) Sua natureza é descrita em termos da indiscernibilidade das entidades. Em linhas gerais, a indiscernibilidade é a relação mantida quando entidades têm *as mesmas* características distinguidoras.<sup>4</sup>
- (3) Preserva a substituição *salva veritate*. Tal característica garante que a substituição de termos co-referenciais (que têm *a mesma* referência) em uma proposição manterá o valor de verdade desta. Por exemplo, se a proposição *x é azul* é verdadeira (ou falsa), sendo *x igual a y*, a proposição *y é azul* será também verdadeira (ou falsa).

De modo geral, a tradição filosófica assumiu a chamada “Lei de Leibniz” como o modo de se caracterizar a identidade. Esse princípio pode ser formulado como: (LL) entidades são idênticas se, e somente se, são indiscerníveis. Nesta acepção a identidade é definida em termos da indiscernibilidade.<sup>5</sup> No entanto, a Lei de Leibniz pode ser analisada como a conjunção de duas diferentes teses:

### Identidade dos Indiscerníveis:

Se as entidades são indiscerníveis, então elas são idênticas.

---

<sup>4</sup> - Tais características dependem da metafísica subjacente que se assume. Se temos uma metafísica de entidades e propriedades, então a indiscernibilidade relaciona propriedades; se temos uma metafísica de substâncias, então consiste em terem ou não a mesma substância; etc..

<sup>5</sup> - Devemos notar que o próprio Leibniz não ofereceu esta formulação. Para mais, ver (RODRIGUEZ-PEREYRA, *No prelo*).

## Indiscernibilidade dos Idênticos:

Se as entidades são idênticas, então elas são indiscerníveis.

Dito em outros termos, a *Indiscernibilidade dos Idênticos* é a tese que: se  $x$  e  $y$  são numericamente idênticos (ou seja, são *o mesmo*; ou denotam o mesmo objeto), então toda característica distinguidora ou proposição atribuída a  $x$  será também característica distinguidora ou proposição atribuída a  $y$  (e vice-versa). Já a *Identidade dos Indiscerníveis* é a tese que: se  $x$  e  $y$  são indiscerníveis (ou seja, toda característica distinguidora ou proposição atribuída a  $x$  é também característica distinguidora ou proposição atribuída a  $y$ ), então  $x$  e  $y$  são, também, numericamente idênticos (ou seja, são *o mesmo* objeto).

## 1.2 Tratamento Formal da Identidade

É argumentável que a compreensão filosófica do conceito de identidade influenciou o modo como esse conceito é analisado em sistemas formais usuais, em particular da lógica clássica. De algum modo os sistemas formais clássicos assumem a TTI, no sentido de assumir ou incorporar algum aspecto da compreensão filosófica da identidade (e.g., a Lei de Leibniz) como sendo o modo de caracterizar a relação de identidade em seu sistema. Segue-se, portanto, que nas teorias que assumem a *Teoria Tradicional da Identidade*, nenhuma entidade é indiscernível de outra sem que isso resulte em serem as *mesmas* entidades (ou seja, sem que se assumam que as entidades são idênticas).<sup>6</sup>

A identidade nos sistemas clássicos é compreendida como uma relação binária (i.e., relaciona dois elementos) usualmente designada pelo símbolo “=”, garantindo as seguintes propriedades formais:

**Reflexividade:**  $\alpha = \alpha$

Todo objeto é idêntico a si mesmo.

6 - Não há um consenso sobre o que são sistemas formais clássicos, de modo que iremos compreender aqui a lógica clássica como sendo a lógica proposicional clássica, lógica clássica de predicados de *primeira-ordem* (adiante apenas lógica de *primeira-ordem* ou *elementar*) com ou sem identidade (além de alguns de seus subsistemas), as extensões conservativas da lógica de primeira-ordem, como a lógica clássica de predicados de ordem superior (teoria dos tipos), além de teorias clássicas de conjuntos, como *Zermelo-Fraenkel* (ZF), *von Neumann-Bernays-Gödel* (NBG), entre outras. Nota-se, portanto, que quando falo de *lógica* ou *lógica clássica*, assumo o que se conhece como *grande lógica*, envolvendo todos os sistemas de modo geral; se necessário, especificarei explicitamente a qual sistema estou me referindo. Assumirei que o leitor está familiarizado com a linguagem proposicional e de predicados. Para mais, ver (MENDELSON, 2010) e (KLEENE, 2002).

**Simetria:** Se  $\alpha = \beta$ , então  $\beta = \alpha$

Dado os objetos  $\alpha$  e  $\beta$ , se  $\alpha$  é idêntico a  $\beta$ , então  $\beta$  é idêntico a  $\alpha$ .

**Transitividade:** Se  $\alpha = \beta$  e  $\beta = \gamma$ , então  $\alpha = \gamma$

Dado os objetos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , se  $\alpha$  é idêntico a  $\beta$ , e  $\beta$  é idêntico a  $\gamma$ , então  $\alpha$  é idêntico a  $\gamma$ .

**Substitutividade:** Se  $\alpha = \beta$ , então  $(\varphi(\alpha) \rightarrow \varphi(\beta))$

Dado os objetos  $\alpha$  e  $\beta$ , se  $\alpha$  é idêntico a  $\beta$ , então se uma fórmula é satisfeita por  $\alpha$ , ela será satisfeita por  $\beta$  (ou, se  $\alpha$  satisfaz um certo predicado, então  $\beta$  também satisfaz este predicado).

Estas propriedades que a identidade deve preservar garantem que ela seja uma *relação de congruência*, i.e., uma relação de equivalência que *preserva as características dos objetos* relacionados. Ao manter estas quatro características (que caracterizam uma *relação de congruência*), a identidade preserva as outras relações do sistema. Por exemplo, digamos que há em nossa linguagem uma relação binária  $R$ , que compreenderemos intuitivamente como sendo a relação de *ser pai de*. Portanto, interpretaremos  $xRz$  como sendo *x é pai de z*. Digamos agora que  $x$  é idêntico a  $y$ . Se é o caso que  $xRz$  e  $x = y$ , então se segue que  $yRz$ .  $\equiv$

Compreendemos, portanto, que a relação de identidade deve ser uma congruência. No entanto, cada sistema formal específico oferecerá algum modo para caracterizar ou definir a identidade – preservando as características apresentadas acima. Assim, há dois modos de se introduzir o conceito de identidade em um sistema formal elementar: como (1) conceito primitivo; ou como (2) conceito definido. Ao adotar um conceito como primitivo, o sistema formal deve *definir implicitamente* esse conceito através dos axiomas oferecidos. Por exemplo, nas formulações usuais de ZF a relação de *pertinência* (denotada pelo símbolo “ $\in$ ”) é tomado como primitiva no sistema, e seu funcionamento fica *implícito* através de seu uso nos axiomas oferecidos. Já ao definir um conceito, o modo comum é encontrar uma fórmula da linguagem da teoria que expresse o que se quer com o conceito. Por exemplo, na Axiomática de Peano para a aritmética, axiomatizada sobre uma linguagem de primeira-ordem, um dos conceitos usualmente adotados como primitivos é o conceito de *sucessor*, sendo algumas outras operações definidas em termos deste conceito. Como nota Krause (2002):

Não há, em princípio, qualquer conceito matemático que não possa ser definido. (...) Na verdade, tudo depende da axiomática particular que se está adotando; um conceito pode ser primitivo (logo, não definido) numa

axiomatização, mas definido em outra. (KRAUSE, 2002, p. 14-5)

A identidade é geralmente tomada como primitiva em uma lógica de predicados de primeira-ordem,<sup>7</sup> sendo os axiomas referentes à identidade:

**(Reflexividade)**  $\forall x (x = x)$

Para todo  $x$ ,  $x$  é idêntico a  $x$

**(Substitutividade)**  $\forall x \forall y (x = y \rightarrow (P(x) \leftrightarrow P(y)))$

Para todo  $x$  e  $y$ , se  $x$  é idêntico a  $y$ , e  $P(x)$  é uma fórmula qualquer que contém  $x$  livre, então  $P(y)$  resulta de  $P(x)$  pela substituição de  $x$  por  $y$  em algumas das ocorrências livres de  $x$ , desde que  $y$  seja livre para  $x$  em  $P(x)$ .

Através destes dois axiomas (e dos demais da lógica elementar) podemos obter como teorema que a identidade é simétrica e transitiva.<sup>8</sup> Devemos salientar alguns aspectos do Axioma da Substitutividade. O Axioma da Substitutividade é, na verdade, um *esquema de axiomas*. Em uma linguagem de primeira-ordem não quantificamos sobre fórmulas, de modo que o termo “ $P$ ” é uma metavaríavel que poderá ser substituído por qualquer fórmula que consta na linguagem. Por outro lado, compreende-se que linguagens de ordem-superior têm poder expressivo para que a identidade seja definida (e não tomada como primitiva) através de uma fórmula da linguagem, tal como se segue em uma lógica de segunda-ordem:

$$x = y =_{def} \forall P [P(x) \leftrightarrow P(y)]$$

onde  $x$  e  $y$  percorrem os termos individuais da linguagem e  $P$  é uma variável da própria linguagem para predicados de indivíduos.<sup>9</sup> Esta definição diz que se dois indivíduos são

7 - Quine (1986, p.63-4) ofereceu uma tentativa de definir a identidade em linguagens de primeira-ordem, mas essa alternativa enfrenta problemas. Cf. (SAVELLOS, 1990, p. 477) e (BÉZIAU, 2003). Devemos notar que podemos definir a identidade dentro de teorias específicas, erigidas sobre uma linguagem de primeira-ordem *sem* identidade – e.g., em certas formulações de ZF. Cf. (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1973, p. 27).

8 - Cf. (GRACHER, 2016, p. 107-8).

9 - Devemos notar que “=def” é uma abreviação para “é igual por definição”, sendo este símbolo metateórico, não pertencendo assim à linguagem objeto em análise.

numericamente idênticos, então eles compartilham todas as mesmas propriedades. Como podemos ver, esta parece ser uma interpretação mais caridosa da *Lei de Leibniz*. Devemos notar que podemos tomar a identidade como um conceito primitivo em uma linguagem de ordem-superior com o seguinte axioma:

$$\forall x \forall y [(x = y) \leftrightarrow \forall P (P(x) \leftrightarrow P(y))]$$

Esta fórmula pode ser introduzida na linguagem como um axioma, compreendendo assim a identidade como um conceito primitivo. No entanto, é argumentável que, uma vez que uma teoria tem capacidade expressiva para definir um conceito, é formalmente – e, para um realista quanto a natureza da lógica, também seria ontologicamente – mais econômico definir tal conceito em vez de tomá-lo como primitivo. Esta ideia poderia ser expressa como uma espécie de *navalha de Ockham* aplicado a sistemas formais: Quanto menor o conjunto de conceitos primitivos adotados por uma teoria, melhor.<sup>10</sup>

## 2 Identidade e Indiscernibilidade

Podemos dizer que a *Teoria Tradicional da Identidade* “colapsa” os conceitos de identidade e indiscernibilidade. De acordo com a Lei de Leibniz, entidades são idênticas se, e somente se, são também indiscerníveis. Como vimos, as abordagens formais (usuais) do conceito de identidade são influenciadas por essa concepção, de modo que a análise da identidade é feita através da noção de indiscernibilidade. Mas será que as coisas precisam ser assim? Será que a equivalência entre identidade e indiscernibilidade precisa sempre ser assumida?

Lembrando, a Lei de Leibniz (sendo ela uma bicondicional) é equivalente à conjunção de duas teses, a Indiscernibilidade dos Idênticos (se  $x$  e  $y$  são idênticos, então são indiscerníveis) e a Identidade dos Indiscerníveis (se  $x$  e  $y$  são indiscerníveis, então são idênticos). Se negarmos uma das duas teses teremos, portanto, a falha da equivalência entre identidade e indiscernibilidade.

É comum aceitarmos a Indiscernibilidade dos Idênticos, pois é razoável a ideia que se  $x$  e  $y$  são idênticos, isso implica que eles têm as mesmas características. Pensemos na versão contrapositiva da Indiscernibilidade dos Idênticos: se há alguma característica que  $x$  tenha,

**10** - Os modos usuais de se introduzir a identidade em linguagens de predicados (seja de primeira ou de ordem-superior) enfrentam problemas. Para uma análise desses problemas, ver (GRACHER, 2016, p. 71-85).



mas não  $y$ , então  $x$  e  $y$  não são idênticos. Esta tese parece razoável. Por outro lado, será que a Identidade dos Indiscerníveis é uma tese inquestionável? Será o caso que se  $x$  e  $y$  são indiscerníveis isso implicará que eles são idênticos?

A intuição geral que temos é de preservarmos a Identidade dos Indiscerníveis. Contudo, suas principais dificuldades aparecem com o desenvolvimento das ciências modernas. Consideremos os compostos químicos. Dois átomos de hidrogênio e um de oxigênio, ligados de um certo modo, produzirão o composto químico que chamamos de “água”. Pense que um químico está no laboratório trabalhando com uma molécula de água. Ele sai do laboratório para almoçar e um amigo resolve lhe *pregar uma peça*, tirando um átomo de hidrogênio da molécula de água e colocando *outro* no lugar. Fará diferença a troca? O químico extrairá outras conclusões de seus experimentos por conta disso? A resposta é: não. Alguém poderá argumentar que houve uma modificação metafísica. No início tínhamos uma molécula de água, e agora temos “outra”. No entanto, se houve esta alteração (*strictu sensu*) significa que há alguma característica que o primeiro átomo de hidrogênio tem, que o segundo não tem. Mas há diferença entre átomos da mesma espécie? Se houver, a química encontrará grandes problemas, pois se assume que todos os átomos de uma mesma espécie são indiscerníveis entre si (*i.e.*, têm as mesmas características).

O exemplo anterior pode não convencer meu leitor mais exigente. Vejamos outro caso. Na mecânica quântica os estados de uma partícula são descritos em termos de *vetores* (em um dado espaço vetorial). Pensemos agora que temos um fóton que se localiza no polo norte, cujo estado é descrito pelo vetor  $|\psi_1\rangle$ , e um fóton no polo sul, cujos estados são descritos pelo vetor  $|\psi_2\rangle$ . Tudo ocorrerá normalmente quando tratamos cada um dos fótons separadamente. Contudo, o que ocorrerá se quisermos tratar do sistema com esses dois fótons? Teremos de fazer uma combinação linear entre esses dois vetores (que é chamado de “superposição”), que simplificarmente pode ser:

$$|\psi_1, \psi_2\rangle = a. |\psi_1\rangle + b. |\psi_2\rangle^{11}$$

A função acima é tal que qualquer medida realizada sobre o sistema conjunto, neste estado, é tal que o fóton no polo sul e o fóton no polo norte não poderão ser discernidos. Ou seja, nunca se poderá determinar qual é qual. Deste modo, temos *dois* fótons que não

**11** - Os coeficientes  $a$  e  $b$ , quando elevados ao quadrado, representarão a probabilidade do sistema  $|\psi_1, \psi_2\rangle$  de colapsar no estado  $|\psi_1\rangle$  (com probabilidade  $a^2$ ) ou  $|\psi_2\rangle$  (com probabilidade  $b^2$ ). Portanto, a soma dos coeficientes elevados ao quadrado (*i.e.*, a soma das probabilidades) será tal que  $a^2 + b^2 = 1$ . Ou seja, os estados descritos pela combinação linear descreverão todos os estados possíveis no qual o sistema combinado  $|\psi_1, \psi_2\rangle$  pode colapsar.

são discerníveis. Haveria, portanto, um caso de objetos que não são idênticos (pois não são *o mesmo*), mas são indiscerníveis – o que negaria a Identidade dos Indiscerníveis.<sup>12</sup>

Há diversas perguntas que podem ser feitas. Um leitor atento poderá, prontamente, questionar a existência de propriedades não descritas (ou capturadas) pelo formalismo. Essa alternativa é chamada de “Interpretação das Variáveis Ocultas” (ou “Interpretação de Bohm”, que faz referência ao físico David Bohm). Todavia, essa interpretação sofre de problemas latentes.<sup>13</sup> Outra pergunta relevante é que as propriedades de *estar no polo sul* e *estar no polo norte* distinguiriam os fótons. Contudo, se a teoria e suas interpretações usuais capturam corretamente os fenômenos quânticos, então todos os estados são descritos naquela combinação linear (inclusive a posição).

Se tais interpretações (que são amplamente aceitas) estão corretas, então há fortes razões para negarmos a Identidade dos Indiscerníveis. Todavia, como vimos antes, tanto a lógica (quanto a matemática) que usamos preserva o Princípio de Identidade. Se temos toda uma teoria da mecânica quântica que afirma que dois fótons podem entrar em estados nos quais eles são indiscerníveis, sobre qual teoria formal deveremos oferecer a semântica para isso? Usualmente fazemos a semântica de uma teoria sobre uma teoria usual dos conjuntos, todavia essas teorias podem ser ditas “leibnizianas”, no sentido que: se  $x$  e  $y$  estão nos mesmos conjuntos (podendo ser entendido como  $x$  e  $y$  *têm as mesmas propriedades*), então  $x$  e  $y$  são idênticos. Se fizermos a semântica das teorias quânticas em uma teoria usual de conjuntos, então não teremos uma interpretação adequada para entidades que são indiscerníveis, mas *não* idênticas.

Uma solução aparentemente viável foi apresentada por Décio Krause, através da teoria chamada de “quase-conjuntos”.<sup>14</sup> Nesta teoria apenas a *pertinência* e a *indiscernibilidade* (e não a identidade) que são tomadas como conceitos primitivos, de modo que a indiscernibilidade não equivale à identidade. Aparentemente essa é uma teoria segura para oferecermos a semântica da mecânica quântica. Contudo, o interessante desta teoria – para nossos propósitos atuais – é que ela é um sistema formal no qual a identidade não é pressuposta (ou tomada como primitiva) pelo sistema. Mas será que é assim mesmo?

---

**12** - Existem diversos casos nos quais, aparentemente, a Identidade dos Indiscerníveis falha. Um exemplo intuitivo é pensarmos no dinheiro em uma conta bancária. Duas unidades de valor são indiscerníveis entre si, ainda que não sejam a mesma (pois são duas, e não uma e a mesma). Cf. (FRENCH; KRAUSE, 2006, Cap. 1).

**13** - Cf. (FRENCH, 2015) e (FRENCH; KRAUSE, 2006).

**14** - Cf. (KRAUSE, 1992), (FRENCH; KRAUSE, 2010) e (FRENCH; KRAUSE, 2006, Cap. 7).

### 3 Indiscernibilidade como Conceito Primitivo e Críticas de Bueno

Como resposta à tese de Bueno (2014, p. 325-6), que todo sistema formal assume a identidade, Krause e Arenhart (2015, p. 3) propuseram a teoria de quase-conjuntos como contra-exemplo. Como eles notam, o conceito de indiscernibilidade pode ser analisado sem implicar, necessariamente, no conceito de identidade. Isto é, ao menos em princípio o conceito de indiscernibilidade não é logicamente equivalente ao conceito de identidade. Deste modo, como dito anteriormente, haveria sistemas conceituais nos quais a identidade não é pressuposta, mas sim a indiscernibilidade.

Bueno apresenta dois problemas à estratégia advogada por Krause e Arenhart (BUENO, 2016, p. 3). O primeiro problema afirma que mesmo que o conceito de indiscernibilidade seja tomado como primitivo, isso não implica que o conceito de identidade não seja pressuposto. Isso ocorreria uma vez que a própria tentativa de distinguir a identidade da indiscernibilidade pressupõe a identidade, pois ao dizermos que a identidade não é o mesmo conceito que a indiscernibilidade, estamos apenas dizendo que o conceito de identidade não é idêntico ao conceito de indiscernibilidade.

O segundo problema afirma que mesmo nos sistemas nos quais a indiscernibilidade é tomada como primitiva (e ela não implica na identidade), a própria formulação do conceito de indiscernibilidade naqueles sistemas pressupõe a identidade. Para exemplificar este ponto Bueno apresenta os três primeiros axiomas da teoria de quase-conjuntos, que expressam o conceito primitivo de indiscernibilidade, representado simbolicamente por “ $\equiv$ ”, como sendo uma relação de equivalência:

$$(A1) \quad \forall x(x \equiv x)$$

$$(A2) \quad \forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$$

$$(A3) \quad \forall x \forall y \forall z((x \equiv y \wedge y \equiv z) \rightarrow x \equiv z)$$

De acordo com Bueno, nos três axiomas o conceito de identidade é pressuposto, uma vez que em (A1), por exemplo, *as mesmas* variáveis precisam ser usadas em cada lado de “ $\equiv$ ”; e nos outros axiomas *as mesmas* variáveis precisam ser ligadas pelos quantificados em cada lado de “ $\rightarrow$ ”. Ao pedir esclarecimentos quanto a esse tópico, Bueno afirmou que o papel funcional [*functional role*] dos símbolos precisam ser o mesmo.<sup>15</sup> Isso implicaria a identidade. Compreende-se a função de expressão de um símbolo como a funcionalidade

---

15 - Os pontos a seguir foram apresentados por Bueno em comunicação pessoal, expostos aqui com sua permissão.

(ou papel) que o símbolo desempenha em uma certa expressão. De acordo com Bueno, podemos dizer que as variáveis denotam algum elemento do domínio de quantificação.

Para sermos mais precisos, consideremos novamente o axioma (A1):  $\forall x(x \equiv x)$ . Vamos separar as ocorrências simbólicas, chamando de “*esq.x*” o símbolo “*x*” a esquerda de “ $\equiv$ ” e “*dir.x*” o símbolo “*x*” a direita. Seja  $\varphi(y)$  a função que designará o que é expresso (interpretado, ou denotado) pelo símbolo “*y*”. Ou seja,  $\varphi(y)$  será uma abreviação para “a função expressiva de *y*”, que será o objeto denotado pela variável *y*.<sup>16</sup> Seguindo as definições anteriores, podemos transcrever o que Bueno afirma como:

$$\varphi(\textit{esq.x}) = \varphi(\textit{dir.x})$$

Podemos nos perguntar agora: por que não é o caso que  $\varphi(\textit{esq.x}) \equiv \varphi(\textit{dir.x})$ ? Ou seja, por que não é o caso que a função expressiva dos símbolos não sejam apenas indiscerníveis, em vez de idênticas?

O problema com essa alternativa, de acordo com Bueno, é que a indiscernibilidade não é “forte o suficiente para caracterizar o conteúdo dos enunciados em questão, já que indiscerníveis podem ser distintos”. Assim, quando afirmamos que a expressão  $(A \vee \neg A)$  é uma verdade lógica (ao menos de acordo com a lógica clássica), é necessário “excluir a possibilidade de que a segunda ocorrência da variável ‘*A*’ seja distinta da primeira”, denotando assim uma proposição diferente daquela que denota a primeira ocorrência de “*A*”. Ou seja, temos de excluir a possibilidade de obter, a partir de  $(A \vee \neg A)$ , a fórmula  $(A \vee \neg B)$  – que evidentemente não é uma verdade lógica. Se as ocorrências de “*A*” forem apenas indiscerníveis, “não temos como garantir a exclusão dessa possibilidade, já que indiscernibilidade não implica identidade”. Deste modo, a identidade é requerida para garantir a própria formulação do conteúdo dos enunciados em apreço.

---

**16** - Devo notar que, de acordo com Bueno, o papel funcional de um símbolo não necessariamente é uma função (no sentido matemático do termo), mas apenas o papel que desempenha numa expressão. Portanto, a utilização que faço de “ $\varphi(y)$ ” não deve ser entendido, diretamente, como uma função metalinguística, mas sim uma simbolização que visa deixar *mais claro* o que estamos tratando. De modo geral, estamos em um nível intuitivo. Contudo, nada nos impede de formalizar tais intuições – pois, basicamente, foi isso que nos levou à lógica formal.

## 4. Objeções a Bueno

Os argumentos apresentados por Bueno, contra a estratégia de Krause e Arenhart, são fortes uma vez que se baseiam em uma análise tradicional (e intuitiva) do modo como se estruturam sistemas formais. Mas essa posição enfrentará alguns problemas interessantes.

### 4.1 Variáveis como Denotadores

A primeira objeção recai sobre a ideia de que variáveis têm como *papel funcional* denotar algum elemento de um dado domínio. As variáveis de uma certa linguagem devem ser entendidas como posições “em branco”, de modo que toda a fórmula só se tornará uma sentença quando tais posições forem preenchidas por termos (que, essas sim, têm papel denotativo).<sup>17</sup> Não devemos tomar as variáveis como tendo papel denotativo – ou como nomes próprios dos elementos do domínio. Enquanto nomes são intersubstituíveis por terem a mesma intenção, duas variáveis devem ser mantidas distintas mesmo que seu domínio seja determinado por um mesmo conceito. Alonzo Church usa do seguinte exemplo para esclarecer tal ponto:

Cada uma das letras  $x$  e  $y$  são variáveis cujo domínio são os números reais, sendo nós obrigados a distinguir as duas desigualdades  $x(x+y) \geq 0$  e  $x(x+x) \geq 0$  como diferentes – de fato, a segunda desigualdade é universalmente verdadeira, e a primeira não. (CHURCH, 1956, p. 10 – *Trad. Nossa*)

#### 4.1.1 Fortalecendo o Argumento de Bueno

Podemos fortalecer o argumento de Bueno, tendo em vista o problema apresentado. Seguindo nossa leitura do raciocínio de Church, assumimos que as desigualdades, por ele mencionadas, são distintas devido ao fato que  $x$  e  $y$  são variáveis distintas (o que implicará no uso da identidade). Também se assume que as três ocorrências de  $x$  em  $x(x+x) \geq 0$ , quando forem substituídas por um termo, devem ser substituídas pelo mesmo termo (e a

<sup>17</sup> - Esta analogia é oferecida por Tarski: “The role of the variable in a sentential function has sometimes been compared very adequately with that of the blanks left in a questionnaire; just as the questionnaire acquires a definite content only after the blanks have been filled in, a sentential function becomes a sentence only after constants have been inserted in place of the variables.” (TARSKI, 1993, p. 5).

identidade estará em jogo de novo). E, por fim, quando oferecermos uma estrutura que modele nossa teoria e uma função interpretação, que interpretará os termos da linguagem em elementos do domínio de nossa estrutura, a ocorrência de um mesmo termo precisa ser interpretado como *o mesmo* elemento do domínio (e eis a identidade novamente).

Isto é, seja  $D$  o domínio da estrutura que modele nossa linguagem,  $\rho$  uma função interpretação e  $a$  e  $b$  duas constantes da linguagem, tais que  $\rho(a) = a^D$  e  $\rho(b) = b^D$  (sendo “ $a^D$ ” e “ $b^D$ ” nomes de elementos de  $D$ ). Usando da estratégia de separar as ocorrências simbólicas, temos o *esq.x*, *meio.x* e *dir.x*, que seriam as três ocorrências de  $x$  na expressão  $x(x + x) \geq 0$ . Precisamos garantir que a substituição de *esq.x*, *meio.x* e *dir.x* seja feita pelo mesmo termo (por exemplo,  $a$ ), tal que  $(esq.x) = (esq.a)$ ,  $(meio.x) = (meio.a)$  e  $(dir.x) = (dir.a)$ , para que então, usando a função interpretação, possamos obter  $\rho(esq.a) = a^D$ ,  $\rho(meio.a) = a^D$  e  $\rho(dir.a) = a^D$ . Ou seja, precisamos usar *duplamente* a identidade, com efeito, primeiro devemos garantir que substituimos as três ocorrências de  $x$  pela *mesma* constante, para que disso elas possam ser interpretadas pelo *mesmo* elemento do domínio. Se substituirmos *esq.x*, *meio.x* e *dir.x* de modo diferente, então podemos obter uma expressão na forma  $a(a + b) \geq 0$  a partir de  $x(x + x) \geq 0$  – e isso só pode ocorrer se já obtivermos antes, como teorema, que  $a = b$  (mas pressupomos a identidade aqui também). Além do mais, caso as interpretações das ocorrências simbólicas sejam diferentes, como  $\rho(esq.a) = a^D$ ,  $\rho(meio.a) = a^D$  e  $\rho(dir.a) = b^D$ , obteremos que  $a^D(a^D + b^D) \geq 0$ . Anãoserque tenhamos que  $a^D = b^D$  (a que pressupõe a identidade novamente, não seja uma relação entre termos da linguagem, mas entre elementos do domínio), isso resultará em problemas também.

Portanto, o argumento inicial de Bueno era que no *papel funcional* das variáveis, em  $\forall x(x \equiv x)$ , as ocorrências de  $x$  precisavam ser as mesmas. No entanto, o argumento dele se torna fortalecido quando falamos também em substituição de variáveis por constantes. Pois agora precisamos garantir que as ocorrências das variáveis  $x$  precisam ser substituídas pelo *mesmo* termo, e que termos iguais precisam ser interpretados por elementos iguais da estrutura.

#### 4.1.2 Respondendo ao Argumento Fortalecido

Podemos distinguir dois níveis (ou tipos de usos) da identidade. (1) Um nível trata da identidade sobre a linguagem, nos referindo ao uso de variáveis e substituição de variáveis por termos. (2) Outro nível trata da identidade dentro das estruturas que modelam a linguagem, nos referindo à interpretação e aos elementos do domínio da estrutura. Nos dois níveis Bueno enfrentará problemas.

(1) No uso da identidade sobre a linguagem, podemos perguntar: qual identidade estamos usando? Aparentemente Bueno poderá formular duas respostas aqui.

(1.a) A identidade que usamos para falar *sobre* a linguagem é uma relação de identidade intuitiva. Ou seja, intuitivamente dizemos que existe uma identidade entre as duas ocorrências da variável  $x$  em  $\forall x (x \equiv x)$ , ou entre duas ocorrências de um termo, como as duas ocorrências da constante  $a$  em  $a = a$ . Mas será que é essa identidade intuitiva que é fundamental? O que determina algo ser ou não intuitivo? E o que garante que a identidade intuitiva é, de fato, uma relação de *identidade* e não uma relação de *indiscernibilidade*?<sup>18</sup>

(1.b) Outra possível resposta é afirmar que a noção de identidade utilizada, quando falamos *sobre* uma linguagem, é uma noção metalinguística de identidade. Ou seja, distinguimos dois níveis de linguagens, a linguagem objeto – onde ocorre o uso das variáveis e termos –, e outro nível é a metalinguagem desta linguagem objeto – que é onde temos a noção de identidade que nos permite afirmar que duas variáveis (ou termos) da linguagem objeto são ou não idênticas. Um problema que Bueno encontraria agora é: podemos oferecer uma metalinguagem onde os termos ou variáveis da linguagem objeto são tomados não como idênticos, mas apenas como indiscerníveis. Isto é, podemos oferecer uma metalinguagem quase-conjuntista para a linguagem que é objeto de nossa análise, o que vai contra a sua tese.

(2) Temos, por fim, o segundo nível no qual tratamos a identidade, *i.e.*, quando nos referimos à identidade entre elementos do domínio da estrutura. Pressupomos essas relações de identidade quando oferecemos uma semântica clássica para a nossa linguagem, que é usualmente feita sobre uma teoria clássica de conjuntos (como *ZF*). Em princípio poderíamos oferecer também uma semântica não-clássica, onde a indiscernibilidade é primitiva (e não a identidade), e os elementos de nosso domínio podem ser apenas elementos indiscerníveis. Nessa semântica (provavelmente erigida sobre uma teoria de quase-conjuntos, ou similar), a indiscernibilidade entre elementos não implicaria na identidade entre eles. Nesta alternativa não precisamos garantir que a interpretação das duas ocorrências de uma constante  $a$  em  $a = a$  sejam tais que  $\rho(esq.a) = \rho(dir.a)$ , mas

---

**18** - Existem problemas com a possibilidade de analisarmos conceitos tomados como primitivos (ou, em outros termos, intuitivos). Bueno assume que conceitos são determinados por suas intenções, de modo que a identidade entre conceitos é determinada por terem ou não a mesma intenção. Em (GRACHER, *Manuscrito*), faço uma análise da posição de Bueno e apresento um conjunto de objeções a ele, sendo algumas dessas objeções pertinentes ao tópico que aqui tratamos.

apenas que  $\rho(esq.a) \equiv \rho(dir.a)$ .

Contudo, Bueno afirma que isso não poderia ocorrer, uma vez que a indiscernibilidade não é “forte o suficiente para caracterizar o conteúdo dos enunciados em questão, já que indiscerníveis podem ser distintos”. Ou seja, o papel funcional dos termos precisam ser tais que denotem entidades diferentes (ou iguais), e não apenas discerníveis (ou indiscerníveis) – uma vez que, segundo Bueno, entidades indiscerníveis poderiam ser diferentes. Mas essa interpretação da indiscernibilidade padecerá de um grave problema que veremos a seguir.

## 4.2 Implicação Modal da Indiscernibilidade

Bueno afirma que entidades indiscerníveis podem ser distintas – ou que a indiscernibilidade *não exclui* a possibilidade das entidades serem distintas. O que se quer afirmar com o termo “podem”? Aparentemente a interpretação modal que podemos oferecer da tese de Bueno é:

$$(x \equiv y) \rightarrow \diamond(x \neq y).$$

Ou seja, se  $x$  e  $y$  são indiscerníveis, então é possível que eles sejam distintos. No entanto esta afirmação sofre de vários problemas. Se  $(x \equiv y) \rightarrow \diamond(x \neq y)$ , e uma vez que é razoável que  $(x \equiv y)$ , então disso se seguirá que  $\diamond(x \neq x)$  - o que não é minimamente razoável. Além disso, se é o caso que  $(x \equiv y) \rightarrow \diamond(x \neq y)$ , então sua contrapositiva também é verdadeira, *i.e.*,  $\Box(x = y) \rightarrow \diamond(x \neq y)$ . Ou seja, se é uma verdade necessária que  $x$  e  $y$  são idênticos, isso implicaria que  $x$  é discernível de  $y$  – o que, novamente, não é razoável. Vejamos dois outros raciocínios, cujas conclusões baseiam-se na interpretação de Bueno para a indiscernibilidade e em qualquer sistema modal usual, como  $K$ :

[1.]  $(x \equiv y) \rightarrow \diamond(x \neq y)$  - Tese de Bueno

[2.]  $(x = y) \rightarrow (x \equiv y)$  - Indiscernibilidade dos Idênticos

[3.]  $(x = y) \rightarrow \diamond(x \neq y)$



Ou seja, se aceitarmos que a indiscernibilidade não exclui a possibilidade das entidades indiscerníveis serem diferentes, e uma vez que a identidade implica na indiscernibilidade, então a própria identidade não garantirá tal exclusão defendida por Bueno. Outro argumento se segue do seguinte modo, aqui exposto em linhas gerais e sem detalhes óbvios:

[1.]  $(x = y) \rightarrow \Box(x = y)$  - Necessidade da Identidade

[2.]  $(x = y) \rightarrow \Diamond(x \neq y)$  – Resultado do Argumento Anterior

[3.]  $\Box(x = y) \rightarrow (x \neq y)$  – Contraposição de 2.

[4.]  $(x = y) \rightarrow (x \neq y)$

Os dois argumentos anteriores se seguem por conta de assumirmos que a identidade implica a indiscernibilidade – Indiscernibilidade dos Idênticos. Uma estratégia possível de Bueno seria afirmar que tal princípio é falso:<sup>19</sup>

$$(x = y) \wedge (x \neq y)$$

Ou seja, ainda que duas entidades sejam idênticas, isso não implicará que elas sejam indiscerníveis. Todavia, Bueno encontrará, novamente, o mesmo problema apontado anteriormente: a identidade não garantirá a exclusão da possibilidade das entidades terem características distintas, pois ainda que sejam idênticas, elas seriam discerníveis – e, se são discerníveis, há algo que diferencia uma da outra, o que iria contra a tese de Bueno.

Com os argumentos anteriores estabelecemos que a indiscernibilidade não implica na possibilidade dos objetos serem diferentes. A única coisa que a indiscernibilidade nos diz é que as entidades indiscerníveis têm, efetivamente, as mesmas características. Há casos nos quais indiscerníveis são objetos diferentes,<sup>20</sup> como há casos nos quais indiscerníveis são idênticos. Portanto, as implicações modais que podem ser inferidas do argumento de Bueno aparentemente não se seguem. Dito isto, parece razoável a empreitada de oferecermos

<sup>19</sup> - Como notou Arenhart (comunicação pessoal), a tese de Bueno vai contra a abordagem usual da identidade em cálculos modais, que mantêm a *necessidade da identidade*. Portanto, outra rota alternativa que Bueno poderia tomar seria adotar cálculos modais com identidade contingente.

<sup>20</sup> - Tal como discutido anteriormente, casos que são descritos por certas interpretações em mecânica quântica.

uma semântica quase-conjuntista para um sistema formal clássico, de modo que a função interpretação das duas ocorrências de uma constante  $a$ , em  $a = a$ , serão tais que  $\rho(esq.a) \equiv \rho(dir.a)$  (e não  $\rho(esq.a) = \rho(dir.a)$ ).<sup>21</sup>

### 4.3 Indiscernibilidade e Verdades Lógicas

Outra objeção ao argumento de Bueno seria a seguinte. Tome duas proposições logicamente equivalentes,  $P$  e  $Q$ . Seja  $P$  a proposição  $(A \rightarrow B)$   $Q$  proposição  $(\neg A \vee B)$ . Indiferente ao modo como expressamos linguisticamente essas proposições,<sup>22</sup>  $P$  e  $Q$  são proposições diferentes –  $P$  é uma proposição condicional enquanto  $Q$  é uma disjunção. No entanto,  $P$  e  $Q$  são indiscerníveis no tocante as características relevantes para afirmarmos que  $(P \vee \neg Q)$  é uma verdade lógica (ao menos na lógica clássica). O que temos de levar em conta não é se as proposições são *as mesmas* (no sentido identitativo), mas sim se suas funções de verdade (ou atribuições) são indiscerníveis – lembrando que indiscernibilidade não implica que seja *possível* haver funções de verdade (ou atribuições) diferentes.

Outro aspecto interessante é pensarmos nas álgebras de Lindenbaum, onde obtemos o conjunto quociente (ou das *classes de equivalência*) de todas as tautologias (que chamaremos de  $\Gamma$ ). Sejam  $X$  e  $Y$  duas proposições pertencentes  $\Gamma$ . Segue-se que  $(X \vee \neg Y)$  é uma tautologia, ainda que o papel funcional de  $X$  seja diferente da de  $Y$ . Fica claro com isso que o importante para ser uma tautologia não é que  $\Phi(X) = \Phi(Y)$  – pois as proposições podem ser completamente diferentes –, mas sim que  $X$  e  $Y$  tenham funções de verdade indiscerníveis. A indiscernibilidade, nesse caso, não trará perda teórica.

## 5 Conclusão

Ainda que os argumentos de Bueno sejam razoáveis, não parece que eles se sustentam de modo geral. A posição de Bueno é forte, uma vez que se baseia em uma análise intuitiva (e clássica) do modo como se estruturam nossos sistemas formais. De fato a tradição atribuiu um papel central para a identidade nos mais diversos aspectos. Contudo, ao analisarmos caridosamente posições não-*standard* (que negam o papel fundamental da identidade, por

21 - Esta noção parece ter sido empregada pelo próprio Bueno (2000) em seu artigo que explora a relação entre a teoria de quase-verdade e quase-conjuntos. Cf. (BUENO, 2000, p. 42).

22 - Devo notar que não assumo uma posição “bourbakista” da lógica ou matemática. Isto é, matemática não é a mera manipulação de símbolos sobre um papel, mas sim algo que corresponde a uma entidade independente da linguagem ou notação usada.

exemplo), podemos ver que há dificuldades latentes a essa posição tradicional face essas posições e aos problemas que elas apresentam.

## Referências

- BÉZIAU, J.-Y. 2000. Quine on identity. *Principia: an international journal of epistemology*, Florianópolis, v. 7, n. 1-2, p. 1-15.
- BRAIDA, C.R.; KRAUSE, D. 2013. *Ontologia II*. 2 ed. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina.
- BUENO, O. 2000. Quasi-truth in quasi-set theory. *Synthese, Springer*, v. 125, n. 1-2, p. 33-53.
- BUENO, O. 2014. Why identity is fundamental. *American Philosophical Quarterly*, v. 51, n. 4.
- BUENO, O. 2016. Identity in physics and elsewhere. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência (no prelo)*.
- CHURCH, A. 1956. *Introduction to mathematical logic*. Princeton: Princeton University Press.
- FRAENKEL, A.A.; BAR-HILLEL, Y.; LEVY, A. 1973. *Foundations of set theory*. Elsevier.
- FRENCH, S. 2015. Identity and individuality in quantum theory. In: ZALTA, E.N. (ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2015.
- FRENCH, S.; KRAUSE, D. 2006. *Identity and physics: a historical, philosophical and formal analysis*. Oxford: Oxford University Press.
- FRENCH, S.; KRAUSE, D. 2010. Remarks on the theory of quasi-sets. *Studia Logica*, v. 95, n. 1-2, p. 101-124.
- GRACHER, K. 2016. *É a identidade fundamental?* Florianópolis. 113p. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina.
- GRACHER, K. *Manuscrito*. Identidade e sistemas conceituais.
- KLEENE, S.C. 2002. *Mathematical logic*. Courier Corporation.
- KORFMACHER, C. 2006. Personal identity. *Identity encyclopedia of philosophy*.

- KRAUSE, D. 1992. On a quasi-set theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Duke University Presse, v. 33, n. 3, p. 402-11.
- KRAUSE, D. 2002. *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência*. E.P.U.
- LOCKE, J. 1996. *An essay concerning human understanding*. Abridge: Hackett Publishing Company, Inc.
- MCGINN, C. 2000. *Logical properties: identity, existence, predications, necessity, truth*.
- MENDELSON, E. 2010. *Introduction to mathematical logic*. 5 ed. New York: Wadsworth and Brooks.
- NOONAN, H.; CURTIS, B. Identity. In: ZALTA, E.N. (ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2014.
- QUINE, W.V.O. 1986. *Philosophy of Logic*. Harvard: Harvard University Press.
- RODRIGUEZ-PEREYRA, G. No Prelo. The principles of contradiction, sufficient reason, and identity of indiscernibles. In: ANTOGNAZZA, M.R. (Ed.). *Oxford handbook of Leibniz*. Oxford: Oxford University Press.
- SAVELLOS, E.E. 1990. On defining identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, University of Notre Dame Press, v. 31, n. 3, p. 476-484.
- SIDER, T.; CONEE, E. 2005. *Riddles of existence: a guided tour of metaphysics*.
- TARSKI, A. 1993. *Introduction to logic and to the methodology of the deductive sciences*. Oxford: Oxford University Press.