Zur Theorie und Anwendung von
Summenzeichen und Produktzeichen.
(Diplomarbeit.)

H (40)
(39504) 71635 31 8 48 10000

Zur Theorie und Anwendung von Summenzeichen und Produktzeichen.

Diplomarbeit
von

Klaus Härtig, Halle (Saale).

Inhalt.

Einleitung.

Daß man mit Summen= und Produktzeichen Rechenresultate nicht nur übersichtlich schreiben, sondern auch gewinnen kann, kurz: daß (und wie) sich mit diesen Symbolen rechnen läßt, lernte ich in Vorlesungen meines dankbar verehrten Lehrers Prof. Dr. Harry Schmidt. Seinen Anregungen folgend, stelle ich mir in der vorliegenden Arbeit zwei Aufgaben:

1.) Rechenregeln für die Symbole Σ und Π (oder: Summen= und Produkttransformationen) sollen bewiesen werden.

[Ein Buch wie J.J. Schwatt's „Introduction to the operations with series" (Philadelphia 1924), das von Σ, Π und zugkräftigen Transformationen geradezu strotzt, läßt schon die grundlegenden Prozesse „jede Formulierung von Voraussetzungen vermissen" [1] und bringt natürlich erst recht keine Legitimation für Transformationen „bloß endlicher" Summen und Produkte mit.]

2.) „Allgemeine" Summen $\sum_{\nu=n_1+1}^{n_2} a_\nu$, bei denen auch $n_2 < n_1$ sein kann, sollen erklärt werden, so daß die für „gewöhnliche" Summen $\sum_{\nu=n_1+1}^{n_2} a_\nu$ gültige Einschränkung $n_2 \geqq n_1$ hinfällig wird; das Analoge gilt für Produkte. Die in 1.) genannten Rechenregeln sind, auf „allgemeine" Summen ausgedehnt, nicht mehr unmittelbar einleuchtend und bedürfen der in 1.) geforderten Legitimation um so mehr. –

Zum II. Teil der Arbeit ist zu bemerken:

Braucht man lediglich Beispiele für das Rechnen mit „gewöhnlichen" Summen und Produkten, so ließe sich allein an mehr als hundert Binomialkoeffizientenrelationen [2] die Nützlichkeit des Kalküls demonstrieren. Die Beispiele der 1. Gruppe (§ 9) sollen aber nicht bloß geschickte

---

[1] So steht in Knopps Besprechung des Buches (Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, 34, S. 164 f.; 1926). Knopp nennt dort die „verwirrende Aneinanderreihung wertloser Rechnungen" „zu unübersichtlich und unkritisch" — bei aller „Fülle schöner Einzelergebnisse."

[2] Ich denke an die Formelsammlung des Hallischen Instituts für Angewandte Mathematik.

Rechnen (mit „gewöhnlichen" Summen und Produkten) zeigen, sondern
a) einige typische Anwendungen der Sätze aus §5 – §8 bringen und
b) deutlich machen, wie aus manchen unendlichen Aufgaben arithmetische hervorgehen.

Die Beispiele der 3. und 4. Gruppe (§11 und §12) betreffen das Charakteristische der „allgemeinen" Summen und Produkte.

I. Teil.

§1. Zusammenhängende Mengen ganzer Zahlen.

k sei eine beliebige ganze Zahl.
Wir verstehen unter $(k+\mathfrak{N})$ die Menge aller ganzen Zahlen $\geq k$,
unter $(k-\mathfrak{N})$ die Menge aller ganzen Zahlen $\leq k$
und unter $\mathfrak{K}$ die Menge $(k+\mathfrak{N})+(k-\mathfrak{N})$.

Eine nicht-leere Teilmenge von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, bezeichnen wir genau dann als zusammenhängend, wenn

$$1.)\ \text{aus } \{k\}\cdot\mathfrak{L}=\{k\}^{*)} \text{ und } \{k+1\}\cdot\mathfrak{L}=0 \quad (k+2+\mathfrak{N})\cdot\mathfrak{L}=0 \text{ folgt}$$
$$\text{und } 2.)\ \text{aus } \{k\}\cdot\mathfrak{L}=\{k\} \text{ und } \{k-1\}\cdot\mathfrak{L}=0 \quad (k-2-\mathfrak{N})\cdot\mathfrak{L}=0 \text{ folgt.}$$

Satz (α). Ist $\mathfrak{L}$ eine zusammenhängende Menge ganzer Zahlen und gilt $\{l_1\}\cdot\mathfrak{L}=\{l_1\}$, $\{l_2\}\cdot\mathfrak{L}=\{l_2\}$, so ist
$$(l_1+\mathfrak{N})(l_2-\mathfrak{N})+(l_2+\mathfrak{N})(l_1-\mathfrak{N})+\mathfrak{L}=\mathfrak{L}.$$

---

*) „$\mathfrak{A}$ ist Teilmenge von $\mathfrak{B}$" schreiben wir nicht so: $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$,
sondern so: $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{B}$
oder so: $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$.

Dann sieht z.B. die Aussage „7 gehört zu $\mathfrak{K}$" so aus: $\{7\}+\mathfrak{K}=\mathfrak{K}$,
oder auch so: $\{7\}\cdot\mathfrak{K}=\{7\}$.

Satz (β). Auf jede zusammenhängende Menge ganzer Zahlen trifft genau eine der folgenden vier Aussagen zu:

1.) $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}$.
2.) Für genau eine ganze Zahl K_1 ist $\mathfrak{L} = (K_1 + \mathfrak{N})$.
3.) Für genau eine ganze Zahl K_2 ist $\mathfrak{L} = (K_2 - \mathfrak{N})$.
4.) Für genau eine ganze Zahl K_3 und genau eine ganze Zahl $K_4 \geqq K_3$ ist $\mathfrak{L} = (K_3 + \mathfrak{N})(K_4 - \mathfrak{N})$.

§2. Bezeichnungen.

1) Für uns ist

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{K} \text{ die Menge aller ganzen Zahlen,} \\ \mathfrak{L} \text{ eine beliebige zusammenhängende Menge ganzer Zahlen,} \\ \mathfrak{M} \text{ eine beliebige zusammenhängende Menge ganzer Zahlen,} \\ \mathfrak{N} \text{ die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen,} \end{array}\right.$$

und ferner

$$\left\{\begin{array}{l} \ldots k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \ldots \\ l_k \\ m_k \\ n_k \end{array}\right\} \text{ ein beliebiges Element von } \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{K}, \\ \mathfrak{L}, \\ \mathfrak{M}, \\ \mathfrak{N}. \end{array}\right.$$

Auch m_{I}, m_{II}, m_{III} sind beliebige Elemente von $\mathfrak{M}$.

2) Wir verstehen unter $(\mathfrak{L}+k)$ die Menge aller Zahlen $l_0 + k$.
Dann bezeichnet

$$\left\{\begin{array}{l} k \\ l \\ m \\ n \end{array}\right\} \text{ ein beliebiges Element von } \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{K}(\mathfrak{K}+1), \\ \mathfrak{L}(\mathfrak{L}+1), \\ \mathfrak{M}(\mathfrak{M}+1), \\ \mathfrak{N}(\mathfrak{N}+1); \text{ d.h.: } n \geqq 1. \end{array}\right.$$

3) Ist im §3 in einer Aussage m_k einer (weiteren) Einschränkung unterworfen, so schreiben wir dort M_k statt m_k.

4) Schließlich verstehen wir unter

$a_m^{(l)}$ und a_m, b_m, c_m beliebige, eindeutig erklärte reelle oder komplexe Funktionen von m.

$\alpha^{(l)}$ und α, β, γ bedeuten beliebige reelle oder komplexe Zahlen.

§3. Hilfssatz zur Einführung des Summenzeichens.

Behauptung. Jedem Zahlenpaar (m_1, m_2) läßt sich eine Zahl $S(m_1, m_2)$ auf Grund der Forderungen

$$S(m_0, m) = S(m_0, m-1) + a_m \qquad [A]$$

und

$$S(m_0, m_0) = 0 \qquad [B]$$

genau dann zuordnen, wenn [B] zur folgenden, alle Fälle von Zahlenpaaren (m_1, m_2) umfassenden Zuordnungsvorschrift vervollständigt wird:

$$\left.\begin{array}{rl}
[1]: & S(M_1,M_2) = -(a_{M_2+1}+\dots+a_{M_1}) \text{ für } M_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(m+2) \text{ und } M_2 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(M_1-2-\mathfrak{N}) \\
[2]: & S(m, m-1) = -a_m \\
[3]\equiv[B]: & S(m_0, m_0) = 0 \\
[4]: & S(m-1, m) = a_m \\
[5]: & S(M_1,M_2) = a_{M_1+1}+\dots+a_{M_2} \text{ für } M_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(m-2) \text{ und } M_2 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(M_1+2+\mathfrak{N})
\end{array}\right\} [C]$$

Beweis. 1.) Wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\cdot(m_1-2-\mathfrak{N}) + \mathfrak{M}\{m_1-1\} + \{m_1\} + \mathfrak{M}\cdot\{m_1+1\} + \mathfrak{M}(m_1+2+\mathfrak{N})$ ist die Menge aller Zahlenpaare (m_1, m_2) die Vereinigungsmenge der folgenden fünf elementefremden Mengen von Zahlenpaaren (M_1, M_2) mit

1) M_1 aus $\mathfrak{M}\cdot(m+2)$, M_2 aus $\mathfrak{M}\cdot(M_1-2-\mathfrak{N})$.
2) M_1 aus $\mathfrak{M}\cdot(m+1)$, $M_2 = M_1 - 1$.
3) M_1 aus $\mathfrak{M}$, $M_2 = M_1$.
4) M_1 aus $\mathfrak{M}\cdot(m-1)$, $M_2 = M_1+1$.
5) M_1 aus $\mathfrak{M}\cdot(m-2)$, M_2 aus $\mathfrak{M}\cdot(M_1+2+\mathfrak{N})$.

Weil sich nun [C] in der Form

$$S(M_1,M_2) = \begin{cases} -(a_{M_2+1}+\dots+a_{M_1}) & \text{im Falle 1),} \\ -a_{M_1} & \text{im Falle 2),} \\ 0 & \text{im Falle 3),} \\ a_{M_1+1} & \text{im Falle 4),} \\ a_{M_1+1}+\dots+a_{M_2} & \text{im Falle 5)} \end{cases}$$

schreiben läßt, so ist evident, daß [C], wie behauptet, alle Fälle umfaßt.

2.) Die Bedingung ist notwendig:

a) Aus [A] und [B] mit $m_0 = m$ bzw. $m_0 = m-1$ folgt [2] bzw. [4].

b) Sei M_1 eine Zahl aus $\mathfrak{M}\cdot(m-2)$.
Addiert man [4] (mit $m = M_1+1$) zu [A] (mit $m_0 = M_1$, $m = M_1+2$), so erhält man [5] für $M_2 = M_1+2$. Gäbe es in $\mathfrak{M}\cdot(M_1+3+\mathfrak{N})$ eine oder mehrere Zahlen, für die [5] nicht gälte, so könnte man die kleinste dieser Zahlen mit M_2^*+1 bezeichnen, würde dann [A] (mit $m_0 = M_1$, $m = M_2^*+1$) zu [5] (mit $M_2 = M_2^*$) addieren und [5] für

$M_2 = M_2^* + 1$, also einen Widerspruch zur Annahme, erhalten.
Also gilt [5] für alle M_2 aus $\mathfrak{M}\cdot(M_1+2+\mathfrak{n})$.

c) Sei M_1 eine Zahl aus $\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{m}+2)$.
Subtrahiert man [2] (mit $m = M_1$) von [A] (mit $m_0 = M_1$, $m = M_1-1$), so erhält man [1] für $M_2 = M_1-2$. Gäbe es im $\mathfrak{M}\cdot(M_1-3-\mathfrak{n})$ eine oder mehrere Zahlen, für die [1] nicht gälte, so könnte man die größte dieser Zahlen mit M_2^*-1 bezeichnen, würde dann [A] (mit $m_0 = M_1$, $m = M_2^*$) von [1] (mit $M_2 = M_2^*$) subtrahieren und [1] für $M_2 = M_2^*-1$, also einen Widerspruch zur Annahme, erhalten.
Also gilt [1] für alle M_2 aus $\mathfrak{M}\cdot(M_1-2-\mathfrak{n})$.

3.) Die Bedingung ist hinreichend:

Die Menge aller Zahlenpaare (m_0, m) ist die Vereinigungsmenge der folgenden sechs elementefremden Mengen von Zahlenpaaren (M_1, M_2) mit

1) M_1 aus $\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{m}+3)$, M_2 aus $(\mathfrak{m}+1)\cdot(M_1-2-\mathfrak{n})$.
2) M_1 aus $\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{m}+2)$, $M_2 = M_1-1$.
3) M_1 aus $\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{m}+1)$, $M_2 = M_1$.
4) M_1 aus $\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{m}-1)$, $M_2 = M_1+1$.
5) M_1 aus $\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{m}-2)$, $M_2 = M_1+2$.
6) M_1 aus $\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{m}-3)$, M_2 aus $\mathfrak{M}\cdot(M_1+3+\mathfrak{n})$.

Deshalb ist die Herleitung von [A] gleichbedeutend mit der Bestätigung der Relation

$$S(M_1, M_2-1) + a_{M_2} = S(M_1, M_2)$$

für die sechs oben genannten Fälle:

1) $S(M_1,M_2-1)+a_{M_2} = \underbrace{-(a_{(M_2-1)+1}+\dots+a_{M_1})}_{\text{wegen [1]}}+a_{M_2} = -(a_{M_2+1}+\dots+a_{M_1}) = \underbrace{S(M_1,M_2)}_{\text{wegen [1]}}$

2) $S(M_1,M_2-1)+a_{M_2} = S(M_1,M_1-2)+a_{M_1-1} = \underbrace{-(a_{M_1-1}+a_{M_1})}_{\text{wegen [1]}}+a_{M_1-1} = -a_{M_1} = \underbrace{S(M_1,M_1-1)}_{\text{wegen [2]}} = S(M$ …

3) $S(M_1,M_2-1)+a_{M_2} = S(M_1,M_1-1)+a_{M_1} = \underbrace{-a_{M_1}}_{\text{wegen [2]}} + a_{M_1} = 0 = \underbrace{S(M_1,M_1)}_{\text{wegen [3]}} = S(M$ …

4) $S(M_1,M_2-1)+a_{M_2} = S(M_1,M_1)+a_{M_1+1} = \underbrace{0}_{\text{wegen [3]}} + a_{M_1+1} = a_{M_1+1} = \underbrace{S(M_1,M_1+1)}_{\text{wegen [4]}} = S(M$ …

5) $S(M_1,M_2-1)+a_{M_2} = S(M_1,M_1+1)+a_{M_1+2} = \underbrace{a_{M_1+1}}_{\text{wegen [4]}} + a_{M_1+2} = \underbrace{S(M_1,M_1+2)}_{\text{wegen [5]}} = S(M$ …

6) $S(M_1,M_2-1)+a_{M_2} = \underbrace{(a_{M_1+1}+\dots+a_{M_2-1})}_{\text{wegen [5]}}+a_{M_2} = (a_{M_1+1}+\dots+a_{M_2}) = \underbrace{S(M_1,M_2)}_{\text{wegen [5]}}$

§4. Definition des Summenzeichens.

$$\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \begin{cases} -(a_{m_2+1}+\dots+a_{m_1}) & \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}+2) \text{ und } m_2 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(m_1-2-\mathfrak{N}). \\ -a_{m_1} & \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}+1) \text{ und } m_2=m_1-1. \\ 0 & \text{für } m_2=m_1. \\ a_{m_1+1} & \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-1) \text{ und } m_2=m_1+1. \\ a_{m_1+1}+\dots+a_{m_2} & \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-2) \text{ und } m_2 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(m_1+2+\mathfrak{N}).\ ^{1)} \end{cases}$$

<u>Satz (1).</u> Die Zahl $\sum_{\kappa=k_1+1}^{k_2} A_\kappa$ ist genau dann eindeutig erklärt, wenn Zahlen A_κ für jedes κ aus $\mathfrak{K}^* = (k_1+1+\mathfrak{N})(k_2-\mathfrak{N}) + (k_2+1+\mathfrak{N})(k_1-\mathfrak{N})$ eindeutig erklärt sind.

<u>Beweis.</u> a) Bei $k_2<k_1$.

Aus den beiden ersten Zeilen der Definition ist evident, daß die Zahl $\sum_{\kappa=k_1+1}^{k_2} A_\kappa$ genau dann eindeutig erklärt ist, wenn Zahlen A_κ für jedes κ aus $\mathfrak{K}_1^* = (k_2+1+\mathfrak{N})(k_1-\mathfrak{N})$ eindeutig erklärt sind. Wegen $(k_1+1+\mathfrak{N})(k_2-\mathfrak{N})=0$ ist aber $\mathfrak{K}_1^*=\mathfrak{K}^*$.

b) Bei $k_2=k_1$.

Für $\mathfrak{M}=\{k_1\}$ ist nach §2, 2) und 4), A_m für jedes m aus $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}+1) = \{k_1\}\cdot\{k_1+1\}=0$, d. h. überhaupt nicht notwendig, zu erklären. Andererseits ist $0=(k_1+1+\mathfrak{N})(k_1-\mathfrak{N})+(k_1+1+\mathfrak{N})(k_1-\mathfrak{N})=\mathfrak{K}^*$.

c) Bei $k_2>k_1$.

Aus den beiden letzten Zeilen der Definition ist evident, daß die Zahl $\sum_{\kappa=k_1+1}^{k_2} A_\kappa$ genau dann eindeutig erklärt ist, wenn Zahlen A_κ für jedes κ aus $\mathfrak{K}_2^* = (k_1+1+\mathfrak{N})(k_2-\mathfrak{N})$ eindeutig erklärt sind. Wegen $(k_2+1+\mathfrak{N})(k_1-\mathfrak{N})=0$ ist aber $\mathfrak{K}_2^*=\mathfrak{K}^*$.

<u>Folgerung 1.</u> Da $\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu$ eindeutig erklärt ist,

ist a_μ erklärt für μ aus $(m_1+1+\mathfrak{N})(m_2-\mathfrak{N})+(m_2+1+\mathfrak{N})(m_1-\mathfrak{N})$,

also $a_{(m_1+1+m_2)+\mu}$ für μ aus

$$\begin{aligned}&\left(-[m_1+1+m_2]+m_1+1+\mathfrak{N}\right)\cdot\left(-[m_1+1+m_2]+m_2-\mathfrak{N}\right)\\ &+\left(-[m_1+1+m_2]+m_2+1+\mathfrak{N}\right)\cdot\left(-[m_1+1+m_2]+m_1-\mathfrak{N}\right)\\ &=(-m_2+\mathfrak{N})(-m_1-1-\mathfrak{N})+(-m_1+\mathfrak{N})(-m_2-1-\mathfrak{N})\\ &=(-m_1-1-\mathfrak{N})(-m_2+\mathfrak{N})+(-m_2-1-\mathfrak{N})(-m_1+\mathfrak{N}),\end{aligned}$$

deshalb $a_{m_1+1+m_2-\mu}$ für $(-\mu)$ aus $(-m_1-1-\mathfrak{N})(-m_2+\mathfrak{N})+(-m_2-1-\mathfrak{N})(-m_1+\mathfrak{N})$,

das heißt: für μ aus $(m_1+1+\mathfrak{N})(m_2-\mathfrak{N})+(m_2+1+\mathfrak{N})(m_1-\mathfrak{N})$.

Also ist $\underline{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_{m_1+1+m_2-\mu} \text{ eindeutig erklärt.}}$

---

1) Es sei $\sum_{\kappa=m_1+1}^{m_2} a_\kappa = \sum_{\lambda=m_1+1}^{m_2} a_\lambda = \sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \sum_{\nu=m_1+1}^{m_2} a_\nu$.

Folgerung 2. Die Relationen $k_0+1 \leqq n\left[\frac{k_0-k}{n}\right]+k+n$ und $n\left[\frac{k_0-k}{n}\right]+k \leqq k_0$ benutzen wir mit $k_0=m_1$ und mit $k_0=m_2$:

Da a_μ erklärt ist für μ aus $(m_1+1+\mathfrak{N})(m_2-\mathfrak{N})+(m_2+1+\mathfrak{N})(m_1-\mathfrak{N})$, ist a_μ erst recht erklärt für μ aus

$$\left(n\left[\frac{m_1-k}{n}\right]+k+n+\mathfrak{N}\right)\left(n\left[\frac{m_2-k}{n}\right]+k-\mathfrak{N}\right) + \left(n\left[\frac{m_2-k}{n}\right]+k+n+\mathfrak{N}\right)\left(n\left[\frac{m_1-k}{n}\right]+k-\mathfrak{N}\right).$$

Somit ist $a_{\mu+k}$ erklärt für μ aus

$$\left(n\left[\frac{m_1-k}{n}\right]+n+\mathfrak{N}\right)\left(n\left[\frac{m_2-k}{n}\right]-\mathfrak{N}\right)+\left(n\left[\frac{m_2-k}{n}\right]+n+\mathfrak{N}\right)\left(n\left[\frac{m_1-k}{n}\right]-\mathfrak{N}\right)$$

und erst recht $a_{n\mu+k}$ für μ aus

$$\left(\left[\frac{m_1-k}{n}\right]+1+\mathfrak{N}\right)\left(\left[\frac{m_2-k}{n}\right]-\mathfrak{N}\right)+\left(\left[\frac{m_2-k}{n}\right]+1+\mathfrak{N}\right)\left(\left[\frac{m_1-k}{n}\right]-\mathfrak{N}\right).$$

Also ist
$$\sum_{\mu=\left[\frac{m_1-k}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m_2-k}{n}\right]} a_{n\mu+k} \text{ eindeutig erklärt.}$$

Insbesondere $(n=1)$ ist
$$\sum_{\mu=m_1-k+1}^{m_2-k} a_{\mu+k} \text{ eindeutig erklärt.}$$

§5. Weitere Sätze über Summen.

Unmittelbare Folgerungen aus Definition und Hilfssatz sind Satz (2) und Satz (3):

Satz (2). (Hauptsatz) Ist jedem Zahlenpaar (m_1, m_2) eine Zahl $S(m_1,m_2)$ eindeutig zugeordnet, und bestehen die Beziehungen

$$S(m_0,m) = S(m_0,m-1)+a_m \qquad [A]$$

sowie
$$S(m_0,m_0) = 0, \qquad [B]$$

so ist
$$S(m_1,m_2) = \sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu .$$

Satz (3). (Abspaltung oben)
$$\sum_{\mu=m_0+1}^{m} a_\mu = \sum_{\mu=m_0+1}^{m-1} a_\mu + a_m$$

Die folgenden Sätze werden wir mit Hilfe der Sätze (2) und (3) beweisen – und nicht mit Hilfe der Definition, in der doch die lästigen Fallunterscheidungen vorkommen.

Satz (4). (Abspaltung unten)
$$\sum_{\mu=m}^{m_0} a_\mu = a_m + \sum_{\mu=m+1}^{m_0} a_\mu$$

Beweis. Setzt man

$$S(m_1,m_2) = \begin{cases} a_{m_1+1} + \sum_{\mu=m_1+2}^{m_2} a_\mu & \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-1), \\ \sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu & \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}-\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-1), \end{cases}$$

so ist

$$S(m_0,m) = \left\{\begin{array}{l} a_{m_0+1}+\sum\limits_{\mu=m_0+2}^{m} a_\mu = a_{m_0+1}+\sum\limits_{\mu=m_0+2}^{m-1} a_\mu + a_m \\ \qquad\qquad \text{für } m_0 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-1) \\ \sum\limits_{\mu=m_0+1}^{m} a_\mu = \sum\limits_{\mu=m_0+1}^{m-1} a_\mu + a_m \\ \qquad\qquad \text{für } m_0 \text{ aus } \mathfrak{M}-\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-1) \end{array}\right\} = S(m_0,m-1)+a_m. \quad [A]$$

$$\text{ferner ist } S(m_0,m_0) = \left\{\begin{array}{l} a_{m_0+1}+\sum\limits_{\mu=m_0+2}^{m_0} a_\mu = a_{m_0+1}+(-a_{m_0+1}) \\ \qquad\qquad \text{für } m_0 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-1) \\ \sum\limits_{\mu=m_0+1}^{m_0} a_\mu \quad \text{für } m_0 \text{ aus } \mathfrak{M}-\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-1) \end{array}\right\} = 0. \quad [B]$$

Nach dem Hauptsatz ist daher

$$\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \left\{\begin{array}{l} a_{m_1+1}+\sum\limits_{\mu=m_1+2}^{m_2} a_\mu \quad \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-1), \\ \sum\limits_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu \quad \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}-\mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-1). \end{array}\right.$$

Aus dem nicht-trivialen Teil dieser Relation folgt für $m_2=m_0$ und $m_1=m-1$ die Behauptung.

<u>Satz (5).</u>
(<u>Indexverschiebung</u>)

$$\underline{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \sum_{\mu=m_1-k+1}^{m_2-k} a_{\mu+k}} \quad {}^{1)}$$

<u>Beweis.</u> Setzt man $S(m_1,m_2)=\sum\limits_{\mu=m_1-k+1}^{m_2-k} a_{\mu+k}$,

so ist $S(m_0,m)=\sum\limits_{\mu=m_0-k+1}^{m-k} a_{\mu+k}$

$$=\sum_{\mu=m_0-k+1}^{(m-1)-k} a_{\mu+k} + a_{(m-k)+k} = S(m_0,m-1)+a_m. \quad [A]$$

Da ferner $S(m_0,m_0)=0$ ist, [B]

läßt sich der Hauptsatz anwenden.

---

1) Hier ein Beispiel, wie Indexverschiebung von Schwatt vorgenommen wird:

„ ..... $=\sum\limits_{k=0}^{\beta}\binom{\beta}{k} a_2^{\beta-k} a_3^{k} x^{\beta+k}$. Letting $\beta+k=k'$, and dropping the accent, then

..... $=\sum\limits_{k=\beta}^{2\beta}\binom{\beta}{k-\beta} a_2^{2\beta-k} a_3^{k-\beta} x^{k}$. “

(Seite 5, (22) bis (24).)

Satz (6).
(Innere Umkehrung)

$$\underline{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_{m_1+1+m_2-\mu}} \quad {}^{2)}$$

Beweis. Setzt man $S(m_1, m_2) = \sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_{m_1+1+m_2-\mu}$,

so ist $$S(m_0, m) = \sum_{\mu=m_0+1}^{m} a_{m_0+1+m-\mu} = a_{m_0+1+m-(m_0+1)} + \underbrace{\sum_{\mu=m_0+2}^{m} a_{m_0+1+m-\mu}}_{\text{wegen } (4)}$$

$$= a_m + \underbrace{\sum_{\mu=m_0+1}^{m-1} a_{m_0+1+m-(\mu+1)}}_{\text{wegen } (5)} = \sum_{\mu=m_0+1}^{m-1} a_{m_0+1+(m-1)-\mu} + a_m$$

$$= S(m_0, m-1) + a_m. \qquad \text{[A]}$$

da ferner $S(m_0, m_0) = 0$ ist, [B]
läßt sich der Hauptsatz anwenden.

Satz (7).
(Minus-Regel)

$$\underline{\sum_{\mu=(m_1+1)}^{m_2} a_\mu = \sum_{\mu=-m_2}^{-(m_1+1)} a_{-\mu}}$$

Beweis. $$\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \underbrace{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_{m_1+1+m_2-\mu}}_{\text{wegen } (6)} = \underbrace{\sum_{\mu=m_1+1-(m_1+1+m_2)}^{m_2-(m_1+1+m_2)} a_{m_1+1+m_2-(\mu+m_1+1+m_2)}}_{\text{wegen } (5)} = \sum_{\mu=-m_2}^{-(m_1+1)} a_{-\mu}$$

Satz (8).
(Innere Aufspaltung)

$$\underline{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2}\left\{\alpha + \sum_{\lambda=l_1+1}^{l_2} \alpha^{(\lambda)} \cdot a_\mu^{(\lambda)}\right\} = \alpha\cdot(m_2-m_1) + \sum_{\lambda=l_1+1}^{l_2}\left\{\alpha^{(\lambda)} \cdot \sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu^{(\lambda)}\right\}}$$

Beweis. Setzt man $a_m = \alpha + \beta\cdot b_m + \gamma\cdot c_m$

und $S(m_1, m_2) = \alpha(m_2 - m_1) + \beta\cdot\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} b_\mu + \gamma\cdot\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} c_\mu$,

so ist $$S(m_0, m) = \alpha(m - m_0) + \beta\cdot\sum_{\mu=m_0+1}^{m} b_\mu + \gamma\cdot\sum_{\mu=m_0+1}^{m} c_\mu$$

$$= \left\{\alpha(m-1-m_0) + \beta\cdot\sum_{\mu=m_0+1}^{m-1} b_\mu + \gamma\cdot\sum_{\mu=m_0+1}^{m-1} c_\mu\right\} + \left\{\alpha + \beta\cdot b_m + \gamma\cdot c_m\right\}$$

$$= S(m_0, m-1) + a_m. \qquad \text{[A]}$$

ferner ist $$S(m_0, m_0) = \alpha(m_0 - m_0) + \beta\cdot\sum_{\mu=m_0+1}^{m_0} b_\mu + \gamma\cdot\sum_{\mu=m_0+1}^{m_0} c_\mu = 0. \qquad \text{[B]}$$

---

2) Bei Schwatt findet man z.B. auf Seite 10 (nach (69)) innere Umkehrung einer Summe: „ $\ldots\ldots = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-k}\frac{1}{2n-2k+1}$.

Letting $n-k=k'$, then

$\ldots\ldots = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{p}{n-k}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{1}{2k+1}$. "

Nach dem Hauptsatz ist daher $\sum\limits_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = S(m_1,m_2)$, also

$$\text{(8a)}\qquad \underline{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2}\left\{\alpha+\beta\cdot b_\mu+\gamma\cdot c_\mu\right\} = \alpha\cdot(m_2-m_1)+\beta\cdot\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} b_\mu+\gamma\cdot\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} c_\mu}$$

Setzt man in (8a) $\beta=\alpha^{(l_1+1)}$, $\gamma=\alpha^{(l_1+2)}$,

$b_\mu=a_\mu^{(l_1+1)}$, $c_\mu=a_\mu^{(l_1+2)}$, so erhält man (8) für $l_2=l_1+2$.

Wir beweisen (8) durch beiderseitige Induktion (bezüglich l_2): Ist (8) für $l_2=l_2^*$ bewiesen, so folgert man daraus die Richtigkeit für

$$\begin{cases} l_2=l_2^*+1, \text{ indem man (8a) mit } \beta=1,\ b_\mu=\sum\limits_{\lambda=l_1+1}^{l_2^*}\alpha^{(\lambda)}\cdot a_\mu^{(\lambda)},\ \gamma=\alpha^{(l_2^*+1)},\ c_\mu=a_\mu^{(l_2^*+1)} \text{ benutzt.}\\ l_2=l_2^*-1, \text{ indem man (8a) mit } \beta=1,\ b_\mu=\sum\limits_{\lambda=l_1+1}^{l_2^*}\alpha^{(\lambda)}\cdot a_\mu^{(\lambda)},\ \gamma=-\alpha^{(l_2^*)},\ c_\mu=a_\mu^{(l_2^*)} \text{ benutzt.}\end{cases}$$

(8b)
(Gliederzahl)
$$\underline{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2}\alpha = \alpha(m_2-m_1)}\qquad \left[\begin{array}{l}\text{(8) mit } l_2=l_1\\ \text{oder (8a) mit } \beta=\gamma=0.\end{array}\right]$$

(8c)
(Ausklammern eines Faktors)
$$\underline{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2}\beta\cdot b_\mu = \beta\cdot\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} b_\mu}\qquad [\text{(8a) mit } \alpha=\gamma=0.]$$

(8d) für $b_m>c_m$ ist $\sum\limits_{\mu=m_1+1}^{m_2} b_\mu \begin{Bmatrix}<\\=\\>\end{Bmatrix} \sum\limits_{\mu=m_1+1}^{m_2} c_\mu$ für $\begin{cases} m_1 \text{ aus } M\cdot(M+1) \text{ und } m_2 \text{ aus } M\cdot(m_1-1-N).\\ m_2=m_1.\\ m_1 \text{ aus } M(M-1) \text{ und } m_2 \text{ aus } M\cdot(m_1+1+N).\end{cases}$

Beweis. Man setzt $a_m=b_m-c_m$
und liest (8a) mit $\beta=1,\gamma=-1,\alpha=0$ von rechts nach links:

$$\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} b_\mu-\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} c_\mu=\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2}(b_\mu-c_\mu)$$

$$=\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu \begin{Bmatrix}<0\\=0\\>0\end{Bmatrix}$$ unter den behaupteten Bedingungen, was man, wegen $a_m>0$, unmittelbar aus der Definition abliest.

Satz (9).
(Äußere Aufspaltung)
$$\underline{\sum_{\mu=m_{k_1}+1}^{m_{k_2}} a_\mu = \sum_{\kappa=k_1+1}^{k_2}\left(\sum_{\mu=m_{\kappa-1}+1}^{m_\kappa} a_\mu\right)}$$

Beweis. Aus
$$\sum_{\nu=m_{II}+1}^{m_{III}}\left(\sum_{\mu=m_I+1}^{\nu} a_\mu\right)=\sum_{\nu=m_{II}+1}^{m_{III}}\left(\sum_{\mu=m_I+1}^{\nu-1} a_\mu + a_\nu\right)$$

folgt (nach innerer Aufspaltung) mit Hilfe einer Indexverschiebung

$$\sum_{\nu=m_{II}+1}^{m_{III}}\left(\sum_{\mu=m_I+1}^{\nu} a_\mu\right)=\sum_{\nu=m_{II}}^{m_{III}-1}\left(\sum_{\mu=m_I+1}^{\nu} a_\mu\right)+\sum_{\nu=m_{II}+1}^{m_{III}} a_\nu \quad \text{und hieraus}$$

$$\underbrace{\sum_{\nu=m_{II}+1}^{m_{III}-1}\left(\sum_{\mu=m_I+1}^{\nu} a_\mu\right)+\sum_{\mu=m_I+1}^{m_{III}} a_\mu}_{\text{(durch Abspaltung oben)}} = \underbrace{\sum_{\mu=m_I+1}^{m_{II}} a_\mu+\sum_{\nu=m_{II}+1}^{m_{III}-1}\left(\sum_{\mu=m_I+1}^{\nu} a_\mu\right)}_{\text{(durch Abspaltung unten)}}+\sum_{\mu=m_{II}+1}^{m_{III}} a_\mu, \quad \text{also}$$

(9a)
$$\sum_{\mu=m_I+1}^{m_{III}} a_\mu = \sum_{\mu=m_I+1}^{m_{II}} a_\mu + \sum_{\mu=m_{II}+1}^{m_{III}} a_\mu .$$

Setzt man in (9a) $m_I = m_{k_1}$, $m_{II} = m_{k_1+1}$, $m_{III} = m_{k_1+2}$, so erhält man (9) für $k_2 = k_1+2$. Überdies gilt ja (9) gewiss für $k_2 = k_1$. Wir beweisen (9) durch beiderseitige Induktion (bezüglich k_2): Ist (9) für $k_2 = k_2^*$ bewiesen:

$$(\alpha) \qquad \sum_{\mu=m_{k_1}+1}^{m_{k_2^*}} a_\mu = \sum_{\kappa=k_1+1}^{k_2^*}\left(\sum_{\mu=m_{\kappa-1}+1}^{m_\kappa} a_\mu\right),$$

so addiert man die Identität

$$(\beta) \qquad \sum_{\mu=m_{k_2^*}+1}^{m_{k_2^*+1}} a_\mu = \sum_{\mu=m_{k_2^*}+1}^{m_{k_2^*+1}} a_\mu$$

und erhält

$$(\gamma) \qquad \underbrace{\sum_{\mu=m_{k_1}+1}^{m_{k_2^*+1}} a_\mu}_{\text{wegen (9a)}} = \underbrace{\sum_{\kappa=k_1+1}^{k_2^*+1}\left(\sum_{\mu=m_{\kappa-1}+1}^{m_\kappa} a_\mu\right)}_{\text{wegen (3).}}, \quad \text{also (9) für } k_2 = k_2^*+1.$$

$$\text{mit}\begin{cases} m_I = m_{k_1}, \\ m_{II} = m_{k_2^*}, \\ m_{III} = m_{k_2^*+1}. \end{cases}$$

Ist hingegen (9) bewiesen für $k_2 = (k_2^*+1)$, so subtrahiert man (β) von (γ) und erhält (α), d. h. (9) für $k_2 = (k_2^*+1)-1$.

(9b)
(äußere Umkehrung)
$$\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = -\sum_{\mu=m_2+1}^{m_1} a_\mu$$

<u>1. Beweis.</u> In (9a) wählt man $m_I = m_{III} = m_1$ und $m_{II} = m_2$.
<u>2. Beweis.</u> In (9) wählt man $k_1 = 2$, $k_2 = 1$:

$$\sum_{\mu=m_2+1}^{m_1} a_\mu = \sum_{\kappa=3}^{1}\left(\sum_{\mu=m_{\kappa-1}+1}^{m_\kappa} a_\mu\right) = -\sum_{\mu=m_{\kappa-1}+1}^{m_\kappa} a_\mu\Bigg]_{\kappa=2} = -\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu .$$

Aus (9b) und (7) folgt

(9c) $$\underline{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = -\sum_{\mu=-m_1}^{-m_2-1} a_{-\mu}.}$$

<u>Satz (10).</u>
<u>(Aufspaltung nach Resten)</u>

$$\underline{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\sum_{\mu=\left[\frac{m_1-\nu}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m_2-\nu}{n}\right]} a_{n\mu+\nu}\right)}$$

<u>Beweis.</u> Setzt man die rechte Seite $= S(m_1, m_2)$, so ist $-S(m_0, m-1) + S(m_0, m)$

$$= -\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\sum_{\mu=\left[\frac{m_0-\nu}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m-\nu-1}{n}\right]} a_{n\mu+\nu}\right) + \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\sum_{\mu=\left[\frac{m_0-\nu}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m-\nu}{n}\right]} a_{n\mu+\nu}\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(-\sum_{\mu=\left[\frac{m_0-\nu}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m-\nu-1}{n}\right]} a_{n\mu+\nu} + \sum_{\mu=\left[\frac{m_0-\nu}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m-\nu}{n}\right]} a_{n\mu+\nu}\right) \qquad \text{wegen (8a)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\sum_{\mu=\left[\frac{m-\nu-1}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m_0-\nu}{n}\right]} a_{n\mu+\nu} + \sum_{\mu=\left[\frac{m_0-\nu}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m-\nu}{n}\right]} a_{n\mu+\nu}\right) \qquad \text{wegen (9b)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\sum_{\mu=\left[\frac{m-\nu-1}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m-\nu}{n}\right]} a_{n\mu+\nu}\right) \qquad \text{wegen (9a) mit} \begin{cases} m_I = \left[\frac{m-\nu-1}{n}\right] \\ m_{II} = \left[\frac{m_0-\nu}{n}\right] \\ m_{III} = \left[\frac{m-\nu}{n}\right] \end{cases}$$

$(m-\nu)$ ist für genau eine Zahl $\nu = \nu^*$ aus $\mathfrak{N}\cdot(n-1-\mathfrak{N})$ durch n teilbar.
Wir schreiben jetzt, indem wir (9) anwenden,

$S(m_0, m) - S(m_0, m-1)$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu^*-1}\left(\sum_{\mu=\left[\frac{m-\nu-1}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m-\nu}{n}\right]} a_{n\mu+\nu}\right) + \sum_{\mu=\left[\frac{m-\nu^*-1}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m-\nu^*}{n}\right]} a_{n\mu+\nu^*} + \sum_{\nu=\nu^*+1}^{n-1}\left(\sum_{\mu=\left[\frac{m-\nu-1}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m-\nu}{n}\right]} a_{n\mu+\nu}\right).$$

Wenn $(m-\nu)$ nicht durch n teilbar ist, also für $\nu \neq \nu^*$, ist $\left[\frac{m-\nu}{n}\right] = \left[\frac{m-\nu-1}{n}\right]$;
daher sind die beiden Doppelsummen $= 0$, und

$$S(m_0, m) - S(m_0, m-1) = \sum_{\mu=\left[\frac{m-\nu^*-1}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m-\nu^*}{n}\right]} a_{n\mu+\nu^*} = \sum_{\mu=\left(\frac{m-\nu^*}{n}-1\right)+1}^{\frac{m-\nu^*}{n}} a_{n\mu+\nu^*}$$

$$= a_{n\frac{m-\nu^*}{n}+\nu^*} = a_m. \qquad [A]$$

Da ferner

$$S(m_0, m_0) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\sum_{\mu=\left[\frac{m_0-\nu}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m_0-\nu}{n}\right]} a_{n\mu+\nu}\right) = \sum_{\nu=0}^{n-1} 0 = 0 \text{ ist}, \qquad [B]$$

können wir wieder den Hauptsatz anwenden.

§6. Auslassungszeichen.

Sei $\mathfrak{k}'\cdot\mathfrak{k}=\mathfrak{k}'$ und A_κ eine auf $\mathfrak{k}'$ erklärte eindeutige reelle oder komplexe Funktion von κ. Die Menge $\mathfrak{k}'+\sum_{\nu=1}^{n}\{k_\nu\}$ sei zusammenhängend.

Genau dann (so besagt Satz 1), wenn
$$\sum_{\nu=0}^{n}(k_\nu+1+\mathfrak{n})(k_{\nu+1}-1-\mathfrak{n})+\sum_{\nu=0}^{n}(k_{\nu+1}+\mathfrak{n})(k_\nu-\mathfrak{n})+\mathfrak{k}'=\mathfrak{k}'$$
gilt, ist $\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\kappa=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}-1}A_\kappa$ eindeutig erklärt, und dann <u>definieren</u> wir:
$$\underline{\sum_{\kappa=k_0+1}^{k_{n+1}-1}{}^{(k_1,k_2,\dots k_n)}A_\kappa=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\kappa=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}-1}A_\kappa .}$$

Die Klammer $(k_1,\dots,k_n)$ heißt Auslassungszeichen.

Für $n=1$ ist $\sum_{\kappa=k_0+1}^{k_2-1}{}^{(k_1)}A_\kappa=\sum_{\kappa=k_0+1}^{k_1-1}A_\kappa+\sum_{\kappa=k_1+1}^{k_2-1}A_\kappa$ genau dann eindeutig erklärt,

wenn $\mathfrak{k}''\equiv(k_0+1+\mathfrak{n})(k_1-1-\mathfrak{n})+(k_1+\mathfrak{n})(k_0-\mathfrak{n})+(k_1+1+\mathfrak{n})(k_2-1-\mathfrak{n})+(k_2+\mathfrak{n})(k_1-\mathfrak{n})+\mathfrak{k}'=\mathfrak{k}'$ ist.

<u>Beispiel.</u> $\mathfrak{k}'=\mathfrak{k}-\{0\}$; $A_\kappa=\frac{1}{\kappa}$; $k_0=1,\ k_1=0,\ k_2=-1$:
$$\begin{aligned}\mathfrak{k}''&=(2+\mathfrak{n})(-1-\mathfrak{n})+(0+\mathfrak{n})(1-\mathfrak{n})+(1+\mathfrak{n})(-2-\mathfrak{n})+(-1+\mathfrak{n})(0-\mathfrak{n})+\mathfrak{k}'\\&=0+\{0,1\}+0+\{-1,0\}+\mathfrak{k}'\\&=\mathfrak{k}'+\{0\}=\mathfrak{k}\neq\mathfrak{k}'.\end{aligned}$$
Also ist $\sum_{\kappa=2}^{-2}{}^{(0)}\frac{1}{\kappa}$ durch unsere Definition nicht erklärt.

<u>Satz (11a).</u> Ist $\{k_\nu\}\cdot\mathfrak{m}(\mathfrak{m}+1)=\{k_\nu\}$ für jedes ν aus $(1+\mathfrak{n})(n-\mathfrak{n})$, so ist
$$\underline{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2}{}^{(k_1,\dots k_n)}a_\mu=\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2}a_\mu-\sum_{\nu=1}^{n}a_{k_\nu}.}$$

<u>Beweis.</u> Wegen $\left(\sum_{\nu=1}^{n}\{k_\nu\}\right)\cdot\mathfrak{m}(\mathfrak{m}+1)=\sum_{\nu=1}^{n}\{k_\nu\}$ ist a_{k_ν} auf $(1+\mathfrak{n})(n-\mathfrak{n})$ und damit auch $\sum_{\nu=1}^{n}a_{k_\nu}$ erklärt.

Setzt man $m_1=k_0$ und $m_2=k_{n+1}-1$, so ist (nach Satz 9)
$$\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2}a_\mu-\sum_{\nu=1}^{n}a_{k_\nu}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\sum_{\mu=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}}a_\mu+\sum_{\mu=k_n+1}^{k_{n+1}-1}a_\mu-\sum_{\nu=1}^{n}a_{k_\nu}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\sum_{\mu=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}-1}a_\mu+a_{k_{\nu+1}}\right)+\sum_{\mu=k_n+1}^{k_{n+1}-1}a_\mu-\sum_{\nu=1}^{n}a_{k_\nu}=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=k_\nu+1}^{k_{\nu+1}-1}a_\mu+\underbrace{\sum_{\nu=0}^{n-1}a_{k_{\nu+1}}-\sum_{\nu=1}^{n}a_{k_\nu}}_{0}.$$

<u>Satz (11b).</u> Ist $\{k_\nu\}\cdot\mathfrak{m}\cdot(\mathfrak{m}+1) = \{k_\nu\}$ für jedes ν aus $(1+\mathfrak{n})(n-\mathfrak{n})$ und $(k'_1, k'_2, \dots k'_n)$ irgendeine Permutation der n Zahlen k_ν, so ist

$$S' = \underbrace{\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2\,(k'_1,\dots k'_n)} a_\mu = \sum_{\mu=m_1+1}^{m_2\,(k_1,\dots k_n)} a_\mu} = S.$$

(Kurz: die Reihenfolge der „Glieder" des Ausschaltungszeichens ist dann beliebig.)

Das folgt daraus, daß in (11a) die Reihenfolge der Summanden in der (gewöhnlichen) Summe $\sum_{\nu=1}^{n} a_{k_\nu}$ beliebig ist.

Will man davon aber keinen Gebrauch machen (und also nicht auf die Definition der Summen zurückgehen, was wir ja auch bisher möglichst vermieden), dann kann man so verfahren:

(Ich beschränke mich auf den Fall $n=2$.)

$$S - S' = \left(\sum_{k_0+1}^{k_1-1} + \sum_{k_1+1}^{k_2-1} + \sum_{k_2+1}^{k_3-1}\right) - \left(\sum_{k_0+1}^{k_2-1} + \sum_{k_2+1}^{k_1-1} + \sum_{k_1+1}^{k_3-1}\right)$$

(der Summand ist immer a_μ.)

$$= \Bigl(\underbrace{\sum_{k_0+1}^{k_1-1}}_{1.} + \underbrace{\sum_{k_1+1}^{k_2-1}}_{2.} + \underbrace{\sum_{k_2+1}^{k_3-1}}_{3.}\Bigr) + \underbrace{\sum_{k_2}^{k_0}}_{4.} + \underbrace{\sum_{k_1}^{k_2}}_{5.} + \underbrace{\sum_{k_3}^{k_1}}_{6.} \quad \text{(nach Satz 9b)}$$

$$= 1.+5.+3.+6.+2.+4. = \sum_{\mu=k_0+1}^{k_0} a_\mu = 0.$$

<u>Satz (11c).</u> Ist $\{k_\nu\}\cdot\mathfrak{m}\cdot(\mathfrak{m}+1) = \{k_\nu\}$ für jedes ν aus $(1+\mathfrak{n})(n-\mathfrak{n})$ und sind alle n Zahlen k_ν verschieden, so ist

$$\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2\,(k_1,\dots k_n)} a_\mu = \sum_{\mu=m_1+1}^{m_2} \psi_\mu \cdot a_\mu$$

$$\text{mit } \psi_m = \begin{cases} 0 \text{ für } m = k_\nu\ (1\leqq\nu\leqq n) \\ 1 \text{ für } m \neq k_\nu\ (1\leqq\nu\leqq n) \end{cases} \text{falls für jedes } \nu \text{ aus } (1+\mathfrak{n})(n-\mathfrak{n})\ m_1+1 \leqq k_\nu \leqq m_2 \text{ ist.} \qquad (\alpha)$$

$$\phantom{\text{mit } \psi_m =} \begin{cases} 1 \text{ für } m \neq k_\nu\ (1\leqq\nu\leqq n) \\ 2 \text{ für } m = k_\nu\ (1\leqq\nu\leqq n) \end{cases} \text{falls für jedes } \nu \text{ aus } (1+\mathfrak{n})(n-\mathfrak{n})\ m_2+1 \leqq k_\nu \leqq m_1 \text{ ist.} \qquad (\beta)$$

Zum <u>Beweis</u> bemerke ich nur, daß wegen

$$\sum_{\mu=m_1+1}^{m_2\,(k_1,\dots k_n)} a_\mu = \underbrace{-\sum_{\mu=m_2+1}^{m_1} a_\mu}_{\text{nach (9b)}} - \sum_{\nu=1}^{n} a_{k_\nu} = -\sum_{\mu=m_2+1}^{m_1\,(k_1,\dots k_n)} a_\mu - 2\sum_{\nu=1}^{n} a_{k_\nu}$$

(β) aus (α) folgt.

§7. Eine Doppelsummen-Transformation.

Aus der Fülle von Transformationen des Typs $\sum\limits_{\lambda=\dots}^{\dots}\Big(\sum\limits_{\mu=\dots}^{\dots} A_{\lambda,\mu}\Big) = \sum\limits_{\mu=\dots}^{\dots}\Big(\sum\limits_{\lambda=\dots}^{\dots} A_{\lambda,\mu}\Big)$ [1]
soll hier nur ein Satz willkürlich herausgegriffen werden:

Bei jedem κ aus $(0+\mathfrak{N})(k-\mathfrak{N})+(k+1+\mathfrak{N})(-1-\mathfrak{N}) = k^*$
soll $A_{\kappa,\lambda}$ für λ aus $(0+\mathfrak{N})(n\kappa-\mathfrak{N})+(n\kappa+1+\mathfrak{N})(-1-\mathfrak{N})$ eindeutig erklärt sein.
Nach (1) ist dann $\sum\limits_{\lambda=0}^{n\kappa} A_{\kappa,\lambda}$ für κ aus k^* eindeutig erklärt, also auch $\sum\limits_{\kappa=0}^{k}\sum\limits_{\lambda=0}^{n\kappa} A_{\kappa,\lambda}$.

<u>Satz (12).</u>

$$\sum_{\kappa=0}^{k}\sum_{\lambda=0}^{n\kappa} A_{\kappa,\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{nk}\sum_{\kappa=\left[\frac{\lambda-1}{n}\right]+1}^{k} A_{\kappa,\lambda}$$

<u>Beweis.</u> Für $k=0$ ist der Satz richtig.[2] Wir wenden beiderseitige Induktion an:
Ist (12) bewiesen für $k=k^*$:

$$(\alpha)\qquad \sum_{\kappa=0}^{k^*}\sum_{\lambda=0}^{n\kappa} A_{\kappa,\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{nk^*}\sum_{\kappa=\left[\frac{\lambda-1}{n}\right]+1}^{k^*} A_{\kappa,\lambda},$$

so addiert man die Identität

$$(\beta)\qquad \sum_{\lambda=0}^{nk^*} A_{k^*+1,\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{nk^*} A_{k^*+1,\lambda}$$

und erhält

$$(\gamma)\qquad \sum_{\kappa=0}^{k^*}\sum_{\lambda=0}^{n\kappa} A_{\kappa,\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{nk^*} A_{k^*+1,\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{nk^*}\sum_{\kappa=\left[\frac{\lambda-1}{n}\right]+1}^{k^*+1} A_{\kappa,\lambda};$$

dann addiert man die Identität

$$(\delta)\qquad \sum_{\lambda=nk^*+1}^{n(k^*+1)} A_{k^*+1,\lambda} = \sum_{\lambda=nk^*+1}^{n(k^*+1)}\sum_{\kappa=\left[\frac{\lambda-1}{n}\right]+1}^{k^*+1} A_{\kappa,\lambda}$$

und erhält

$$\sum_{\kappa=0}^{k^*}\sum_{\lambda=0}^{n\kappa} A_{\kappa,\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{n(k^*+1)} A_{k^*+1,\lambda}$$

$$(\varepsilon)\qquad = \sum_{\kappa=0}^{k^*+1}\sum_{\lambda=0}^{n\kappa} A_{\kappa,\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{n(k^*+1)}\sum_{\kappa=\left[\frac{\lambda-1}{n}\right]+1}^{k^*+1} A_{\kappa,\lambda},$$

also (12) für $k=k^*+1$.

Ist (12) bewiesen für $k=(k^*+1)$, so subtrahiert man von (ε) erst (δ), dann (β) und erhält (α), d. h. (12) für $k=(k^*+1)-1$.

---

1) Schwatt benutzt solche „principles" oft. —
Unser Satz (8) (mit $\alpha=0$, $\alpha^{(\lambda)}\equiv 1$): $\sum\limits_{\mu=m_1+1}^{m_2}\sum\limits_{\lambda=l_1+1}^{l_2} A_{\lambda,\mu} = \sum\limits_{\lambda=l_1+1}^{l_2}\sum\limits_{\mu=m_1+1}^{m_2} A_{\lambda,\mu}$
ist der einfachste Fall dieses Typs, weil bei ihm die Grenzen der inneren Summen vom Index (μ bzw. λ) der äußeren unabhängig sind.

2) Für $k=-1$ ist die Verifikation von (12) weniger trivial.

§ 8. Produktzeichen.

Ist für jedes m $a_m \neq 0$, so kann man ohne die mindeste Mühe die Analoga für Produkte zu den Sätzen über Summen aufstellen: $\sum$ ist durch $\prod$, $+$ durch $\cdot$, $-$ durch $:$, 0 durch 1 zu ersetzen.

Es ist jedoch – mancher Anwendungen wegen – zweckmäßig, $\prod\limits_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu$ für gewisse m_1 und m_2 auch dann zu erklären, wenn nicht für alle m $a_m \neq 0$ ist.

Sei $\overline{\mathfrak{M}}$ die Menge derjenigen Zahlen m, für die $a_m = 0$ ist. (a_μ ist also $\neq 0$ für μ aus $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}+1)-\overline{\mathfrak{M}}$.) Das Produktzeichen wird genau dann definiert, wenn $\overline{\mathfrak{M}}\cdot(m_2+1+\mathfrak{N})\cdot(m_1-\mathfrak{N}) = 0$ ist, also insbesondere immer, wenn $m_2 \geqq m_1$ ist.

Definiert man:

$$\prod_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{m_2+1}\cdots a_{m_1}} & \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}(\mathfrak{M}+2) \text{ und } m_2 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(m_1-2-\mathfrak{N}), \\ & \qquad \text{wenn } \overline{\mathfrak{M}}\cdot(m_2+1+\mathfrak{N})(m_1-\mathfrak{N}) = 0 \text{ ist}, \\ \dfrac{1}{a_{m_1}} & \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}+1) \text{ und } m_2 = m_1-1, \text{ wenn } \overline{\mathfrak{M}}\cdot\{m_1\} = 0 \text{ ist}, \\ 1 & \text{für } m_2 = m_1, \\ a_{m_1+1} & \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-1) \text{ und } m_2 = m_1+1, \\ a_{m_1+1}\cdots a_{m_2} & \text{für } m_1 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(\mathfrak{M}-2) \text{ und } m_2 \text{ aus } \mathfrak{M}\cdot(m_1+2+\mathfrak{N}), \end{cases}$$

so gibt es auch für das Produktzeichen z. B.

Abspaltung oben: $$\prod_{\mu=m_0+1}^{m} a_\mu = \left(\prod_{\mu=m_0+1}^{m-1} a_\mu\right)\cdot a_m \qquad (\text{wenn } \overline{\mathfrak{M}}\cdot(m+\mathfrak{N})(m_0-\mathfrak{N}) = 0 \text{ ist}),$$

Abspaltung unten: $$\prod_{\mu=m}^{m_0} a_\mu = a_m \cdot \prod_{\mu=m+1}^{m_0} a_\mu \qquad (\text{wenn } \overline{\mathfrak{M}}(m_0+1+\mathfrak{N})(m-\mathfrak{N}) = 0 \text{ ist}),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Indexverschiebung:} && \prod_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \prod_{\mu=m_1-k+1}^{m_2-k} a_{\mu+k}, \\
&\text{innere Umkehrung:} && \prod_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \prod_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_{m_1+1+m_2-\mu}, \\
&\text{die Minus-Regel:} && \prod_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \prod_{\mu=-m_2}^{-(m_1+1)} a_{-\mu}, \\
&\text{Aufspaltung nach Resten:} && \prod_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \prod_{\nu=0}^{n-1} \prod_{\mu=\left[\frac{m_1-\nu}{n}\right]+1}^{\left[\frac{m_2-\nu}{n}\right]} a_{n\mu+\nu},
\end{aligned}\right\} (\text{wenn } \overline{\mathfrak{M}}(m_2+1+\mathfrak{N})(m_1-\mathfrak{N}) = 0 \text{ ist})$$

äußere Umkehrung: $$\prod_{\mu=m_1+1}^{m_2} a_\mu = \frac{1}{\prod\limits_{\mu=m_2+1}^{m_1} a_\mu} \qquad (\text{wenn } \overline{\mathfrak{M}}(m_2+1+\mathfrak{N})(m_1-\mathfrak{N}) + \overline{\mathfrak{M}}(m_1+1+\mathfrak{N})(m_2-\mathfrak{N}) = 0 \text{ ist}).$$

dem Satz (8a) z. B. entspricht hier $\prod\limits_{\mu=m_1+1}^{m_2} \alpha = \alpha^{m_2-m_1}$ ($m_2 \geqq m_1$, falls $\alpha = 0$ ist).

Eine vollständige Aufzählung der Sätze (auch über Auslassungszeichen bei Produkten) lasse ich fort, und ebenfalls die Beweise, obwohl sie – weil auf $\overline{\mathfrak{M}}$ Rücksicht genommen werden muß – nicht in der völligen Analogie zu § 5 und § 6 verlaufen, die für $\overline{\mathfrak{M}} = 0$ auftritt.

II. Teil.

§9. Beispiele — 1. Gruppe.

Die beiden ersten Beispiele bringen Anwendungen der Sätze des §5.

Beispiel 1.
$$\prod_{v=1}^{n}\cos\alpha_v = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{\mu=1}^{2^{n-1}}\cos\left\{\sum_{v=1}^{n}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n-v}}\right]}\alpha_v\right\} \qquad (n\geqq 1)$$ [1]

Beweis. Wir beweisen die für $n=1$ offensichtlich richtige Formel durch vollständige Induktion: wir zeigen, daß sie für $n=n_1+1$ richtig ist, wenn sie für $n=n_1$ $(\geqq 1)$ gilt. In der folgenden Rechnung schreiben wir (der Übersichtlichkeit halber) n statt n_1.

Als richtig nehmen wir also an: $\prod_{v=1}^{n}\cos\beta_v = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{\mu=1}^{2^{n-1}}\cos\left\{\sum_{v=1}^{n}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n-v}}\right]}\beta_v\right\}$.

Nach Multiplikation mit $\cos\alpha_2$ und Anwendung der Identität
$\cos\alpha_2\cdot\cos\Sigma = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha_2+\Sigma)+\cos(-\alpha_2+\Sigma)\right\}$ erhält man
$$\cos\alpha_2\cdot\prod_{v=1}^{n}\cos\beta_v = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\mu=1}^{2^{n-1}}\cos\left\{\beta_1+\alpha_2+\sum_{v=2}^{n}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n-v}}\right]}\beta_v\right\}+\sum_{\mu=1}^{2^{n-1}}\cos\left\{\beta_1-\alpha_2+\sum_{v=2}^{n}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n-v}}\right]}\beta_v\right\}\right).$$

Man setzt nun $\beta_v = \begin{cases}\alpha_v & \text{für } v=1,\\ \alpha_{v+1} & \text{für } v\geqq 2\end{cases}$:

$$\prod_{v=1}^{n+1}\cos\alpha_v = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\mu=1}^{2^{n-1}}\cos\left\{\alpha_1+\alpha_2+\sum_{v=2}^{n}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n-v}}\right]}\alpha_{v+1}\right\}+\sum_{\mu=1}^{2^{n-1}}\cos\left\{\alpha_1-\alpha_2+\sum_{v=2}^{n}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n-v}}\right]}\alpha_{v+1}\right\}\right)$$

(Indexverschiebung:) (Indexverschiebung:)

$$= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\mu=1}^{2^{n-1}}\cos\left\{\alpha_1+\alpha_2+\sum_{v=3}^{n+1}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n+1-v}}\right]}\alpha_v\right\}+\sum_{\mu=1}^{2^{n-1}}\cos\left\{\alpha_1-\alpha_2+\sum_{v=3}^{n+1}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n+1-v}}\right]}\alpha_v\right\}\right)$$

durch abermalige Indexverschiebung transformiert man die zweite Summe zu $\sum_{\mu=2^{n-1}+1}^{2^n}\cos\left\{\alpha_1-\alpha_2+\sum_{v=3}^{n+1}(-1)^{\left[\frac{\mu-2^{n-1}-1}{2^{n+1-v}}\right]}\alpha_v\right\}$

und weiter wegen
$(-1)^{\left[\frac{\mu-2^{n-1}-1}{2^{n-v+1}}\right]} = (-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n+1-v}}-2^{v-2}\right]} = (-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n+1-v}}\right]}$ $(v\geqq 3)$ zu $\sum_{\mu=2^{n-1}+1}^{2^n}\cos\left\{\alpha_1-\alpha_2+\sum_{v=3}^{n+1}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n+1-v}}\right]}\alpha_v\right\}$.

Deshalb ist [2]
$$\prod_{v=1}^{n+1}\cos\alpha_v = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\mu=1}^{2^{n-1}}\cos\left\{\sum_{v=1}^{n+1}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n+1-v}}\right]}\alpha_v\right\}+\sum_{\mu=2^{n-1}+1}^{2^n}\cos\left\{\sum_{v=1}^{n+1}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n+1-v}}\right]}\alpha_v\right\}\right)$$
$$= \frac{1}{2^n}\sum_{\mu=1}^{2^n}\cos\left\{\sum_{v=1}^{n+1}(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n+1-v}}\right]}\alpha_v\right\},$$ was ja zu zeigen war.

---

1) Solche Voraussetzungen werden wir von jetzt ab hinschreiben, weil wir uns im II. Teil nicht mehr unbedingt an die Festsetzungen des §2 halten wollen.

2) Für $1\leqq\mu\leqq 2^{n-1}$ ist nämlich $(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n+1-v}}\right]} = 1$ für $v=1$ und $v=2$,
und für $2^{n-1}+1\leqq\mu\leqq 2^n$ ist $(-1)^{\left[\frac{\mu-1}{2^{n+1-v}}\right]} = \begin{cases}1 & \text{für } v=1,\\ -1 & \text{für } v=2.\end{cases}$

Beispiel 2. Knopp stellt in seiner Aufgabensammlung zur Funktionentheorie[1]) folgende Aufgabe:

„Man berechne (ohne Benützung des Cauchy'schen Integralsatzes) das Integral

$$\underline{\int_{(\mathfrak{L})}(z-z_0)^m\,dz} \quad (=J_m)$$

für den Fall, daß $\mathfrak{L}$ ein Quadrat ist, dessen Mittelpunkt in z_0 liegt und dessen Seiten zu den Achsen parallel sind."

Wir begnügen uns mit dem Fall $m \geqq 0$[2]), Seitenlänge $=2$.

Unsere Rechnung ist also eine Verifikation des Cauchy'schen Integralsatzes.

(Im Gegensatz zu Knopps Lösung[3]) führen wir die Zerlegung in reelle Integrale genau so durch, wie Knopp es in FktTh. I, §10, entwickelt.)

Wir setzen $z_0 = x_0 + iy_0$ und teilen den Weg $\mathfrak{L}$ in die Wegstücke I, II, III, IV auf:

I	II	III	IV
$x = x_0 + t$	$x = x_0 - 1$	$x = x_0 + t$	$x = x_0 + 1$
mit t von 1 nach -1	$y = y_0 + t$	mit t von -1 nach 1	$y = y_0 + t$
$y = y_0 + 1$	mit t von 1 nach -1	$y = y_0 - 1$	mit t von -1 nach 1
$x' = 1$	$x' = 0$	$x' = 1$	$x' = 0$
$y' = 0$	$y' = 1$	$y' = 0$	$y' = 1$

Setzt man das in die von Knopp angegebene Regel ein, so erhält man

$$J_m = \int_1^{-1}(t+i)^m\,dt + \int_1^{-1}(-1+it)^m\,i\,dt + \int_{-1}^{1}(t-i)^m\,dt + \int_{-1}^{1}(1+it)^m\,i\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1}\Big\{-\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}t^{m-\mu}i^{\mu} - \sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}(it)^{\mu}(-1)^{m-\mu}\cdot i + \sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}t^{m-\mu}(-i)^{\mu} + \sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}(it)^{\mu}\cdot i\Big\}\,dt$$

Wir spalten auf nach Potenzen und trennen Real- und Imaginärteil:

$$J_m = \int_{-1}^{1}\Big\{\underbrace{\sum_{\mu=0}^{[\frac{m}{2}]}\binom{m}{2\mu}(-1)^{\mu+1}t^{m-2\mu}}_{[1]} + \underbrace{\sum_{\mu=0}^{[\frac{m-1}{2}]}\binom{m}{2\mu+1}(-1)^{m-\mu}t^{2\mu+1}}_{[2]} + \underbrace{\sum_{\mu=0}^{[\frac{m}{2}]}\binom{m}{2\mu}(-1)^{\mu}t^{m-2\mu}}_{[3]} + \underbrace{\sum_{\mu=0}^{[\frac{m-1}{2}]}\binom{m}{2\mu+1}(-1)^{\mu+1}t^{2\mu+1}}_{[4]}\Big\}\,dt$$

$$+\,i\cdot\int_{-1}^{1}\Big\{\underbrace{\sum_{\mu=0}^{[\frac{m-1}{2}]}\binom{m}{2\mu+1}(-1)^{\mu+1}t^{m-2\mu-1}}_{[5]} + \underbrace{\sum_{\mu=0}^{[\frac{m}{2}]}\binom{m}{2\mu}(-1)^{m-\mu+1}t^{2\mu}}_{[6]} + \underbrace{\sum_{\mu=0}^{[\frac{m-1}{2}]}\binom{m}{2\mu+1}(-1)^{\mu+1}t^{m-2\mu-1}}_{[7]} + \underbrace{\sum_{\mu=0}^{[\frac{m}{2}]}\binom{m}{2\mu}(-1)^{\mu}t^{2\mu}}_{[8]}\Big\}\,dt$$

Das vereinfacht sich, denn $[1]+[3]=0$, und $[2]=0=[4]$, weil die Integranden ungerade Funktionen sind. Also ist J_m rein-imaginär.

1.) Bei $m \equiv 0,(2)$. Dann ist $[6]+[8]=0$, und $[5]=0=[7]$, weil die Integranden ungerade Funktionen sind. Also ist $\underline{J_m = 0}$.

2.) Bei $m \equiv 1,(2)$. Dann wird in $[6]$ $(-1)^{m+1}=1$ und daher $[6]=[8]$. Außerdem ist ja $[5] \equiv [7]$, also

---

1) I, §7, 3a.

2) Auf den (interessanteren) Nachweis für $J_m = 0$ im Falle $m \leqq -2$ verzichte ich, weil diese Rechnungen gar zu umfangreich sind.

3) Seite 84.

$$J_m = 4i \cdot \int_0^1 \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2\mu+1} (-1)^{\mu+1} t^{m-2\mu-1} + \sum_{\mu=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2\mu} (-1)^{\mu} t^{2\mu} \right\} dt .$$

Die erste Summe werde innen umgekehrt:

$$J_m = 4i \cdot \int_0^1 \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{m-2\mu} (-1)^{\frac{m-1}{2}-\mu+1} t^{2\mu} + \sum_{\mu=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2\mu} (-1)^{\mu} t^{2\mu} \right\} dt$$

$$= 4i \cdot \int_0^1 \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2\mu} (-1)^{\mu} t^{2\mu} \right\} dt \cdot \left\{ (-1)^{\frac{m-1}{2}+1} + 1 \right\}$$

<u>a)</u> Sei <u>$m \equiv 1,(4)$</u>. Dann ist $m-1 \equiv 0,(4)$, also $\frac{m-1}{2}+1 \equiv 1,(2)$, also $(-1)^{\frac{m-1}{2}+1} = -1$, also $\boxed{J_m = 0}$.

<u>b)</u> Sei <u>$m \equiv 3,(4)$</u>. Dann ist $(-1)^{\frac{m-1}{2}+1} = +1$,

also $J_m = 8i \cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2\mu} (-1)^{\mu} \int_0^1 t^{2\mu} dt = 8i \cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2\mu} \frac{(-1)^{\mu}}{2\mu+1}$.

Wir benutzen die Identität $\binom{m}{2\mu}\frac{1}{2\mu+1} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{2\mu+1}$.

$$J_m = \frac{8i}{m+1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\mu} \binom{m+1}{2\mu+1}$$

$$= \frac{8i}{m+1} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m+1}{4}-1} (-1)^{\mu} \binom{m+1}{2\mu+1} + \sum_{\mu=\frac{m+1}{4}}^{\frac{m+1}{2}-1} (-1)^{\mu} \binom{m+1}{2\mu+1} \right\}$$

$$= \frac{8i}{m+1} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m+1}{4}-1} (-1)^{\mu} \binom{m+1}{2\mu+1} + \sum_{\mu=0}^{\frac{m+1}{4}-1} (-1)^{\mu+\frac{m+1}{4}} \binom{m+1}{2\mu+2\frac{m+1}{4}+1} \right\} \quad \text{(Index=verschiebung)}$$

$$= \frac{8i}{m+1} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\frac{m+1}{4}-1} (-1)^{\mu} \binom{m+1}{2\mu+1} + \sum_{\mu=0}^{\frac{m+1}{4}-1} (-1)^{\frac{m+1}{4}-1-\mu+\frac{m+1}{4}} \binom{m+1}{2\left(\frac{m+1}{4}-1-\mu\right)+2\frac{m+1}{4}+1} \right\}$$

(inneren Umkehrung)

die zweite Summe ist $= \sum_{\mu=0}^{\frac{m+1}{4}-1} (-1)^{-1-\mu} \binom{m+1}{m-2\mu} = -\sum_{\mu=0}^{\frac{m+1}{4}-1} (-1)^{\mu} \binom{m+1}{2\mu+1}$.

Also ist für <u>jedes</u> $m \geq 0$ $\boxed{J_m = 0}$.

Beim Ausrechnen der beiden Residuen, die als nächste Beispiele folgen, wird Satz (12) angewandt.

<u>Beispiel 3.</u> Sei $n \geq 2$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ nicht nirgends konvergent. Berechnen wollen wir das Residuum $R_n = \left[\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu}{z^{n-1}(1-z)^2(1+z)} \right]_{z=0}$.

Nach Cauchy's Regel zur Multiplikation zweier Potenzreihen ist für hinreichend kleine $|z|$

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu}{1+z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-z)^\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu (-z)^\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-z)^\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu a_\nu \text{, ferner}$$

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu}{(1-z)(1+z)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} z^\mu \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} z^\mu \cdot \left\{ (-1)^\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu a_\nu \right\} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} z^\lambda \sum_{\mu=0}^{\lambda} \left\{ (-1)^\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu a_\nu \right\}$$

und schließlich $\dfrac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu}{(1-z)^2(1+z)} = \sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} \sum\limits_{\lambda=0}^{\kappa} \sum\limits_{\mu=0}^{\lambda} (-1)^\mu \sum\limits_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu a_\nu$, also

$$R_n = \sum_{\lambda=0}^{n-2} \sum_{\mu=0}^{\lambda} (-1)^\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu a_\nu = \sum_{\lambda=0}^{n-2} \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^\nu a_\nu \sum_{\mu=\nu}^{\lambda} (-1)^\mu$$ (nach Satz 12 – das dortige n ist = 1 gesetzt)

$$= \sum_{\lambda=0}^{n-2} \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^\nu a_\nu \frac{(-1)^\lambda + (-1)^\nu}{2} = \sum_{\nu=0}^{n-2} \sum_{\lambda=\nu}^{n-2} a_\nu \frac{(-1)^{\lambda-\nu}+1}{2}$$ (wieder nach Satz 12)

$$= \sum_{\nu=0}^{n-2} a_\nu \sum_{\lambda=0}^{n-2-\nu} \frac{(-1)^\lambda + 1}{2} = \sum_{\nu=0}^{n-2} a_\nu \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n-2-\nu}{2}\right]} 1$$ (nach Satz 10 – das dortige n ist = 2 gesetzt)

$$= \sum_{\nu=0}^{n-2} a_\nu \left(\left[\frac{n-2-\nu}{2}\right]+1\right) = \sum_{\nu=0}^{n-2} a_{n-2-\nu}\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]+1\right)$$ (innere Umkehrung)

Verschiebt man noch den Index, so erhält man $\underline{R_n = \sum\limits_{\nu=2}^{n} a_{n-\nu}\left[\frac{\nu}{2}\right]}$.

<u>Beispiel 4.</u> Wir wollen das Residuum $\left[\left(az+b+\frac{c}{z}\right)^n\right]_{z=0}$ bestimmen.

$(n \geq 1;\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$

Für $z \neq 0$ ist
$$\left(az+b+\frac{c}{z}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (az+b)^\nu \left(\frac{c}{z}\right)^{n-\nu}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\frac{c}{z}\right)^{n-\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu-\mu} (az)^\mu b^{\nu-\mu}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{n}{\nu}\binom{\nu}{\nu-\mu} a^\mu b^{\nu-\mu} c^{n-\nu} z^{\mu+\nu-n}$$

(Indexverschiebung:)
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=\nu}^{2\nu} \binom{n}{\nu}\binom{\nu}{2\nu-\mu} a^{\mu-\nu} b^{2\nu-\mu} c^{n-\nu} z^{\mu-n}$$

(wegen $\binom{\nu}{2\nu-\mu}=0$ für $\mu<\nu$:)
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{2\nu} \binom{n}{\nu}\binom{\nu}{2\nu-\mu} a^{\mu-\nu} b^{2\nu-\mu} c^{n-\nu} z^{\mu-n}$$

(wegen (12), das dortige n = 2 gesetzt:)
$$= \sum_{\mu=0}^{2n} \left(\sum_{\nu=\left[\frac{\mu+1}{2}\right]}^{n} \binom{n}{\nu}\binom{\nu}{2\nu-\mu} a^{\mu-\nu} b^{2\nu-\mu} c^{n-\nu} \right) z^{\mu-n}$$

Für $\mu = n-1$ ist die eingeklammerte Summe der Koeffizient von z^{-1}, also das gesuchte Residuum:
$$\sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n} \binom{n}{\nu}\binom{\nu}{2\nu-n+1} a^{n-1-\nu} b^{2\nu-n+1} c^{n-\nu}$$

Als obere Grenze dieser Summe kann man $n-1$ statt n einsetzen, weil $\binom{\nu}{2\nu-n+1}$ für $\nu=n$ $=\binom{n}{n+1}=0$ ist. Schreiben wir noch $\binom{\nu}{n-1-\nu}$ statt $\binom{\nu}{2\nu-n+1}$, so erhalten wir

$$\underline{\left[\left(az+b+\frac{c}{z}\right)^n\right]_{z=0} = \left(\frac{ac}{b}\right)^{n-1} \cdot c \cdot \sum_{\nu=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n-1} \binom{n}{\nu}\binom{\nu}{n-1-\nu}\left(\frac{b^2}{ac}\right)^\nu}$$

Im nächsten Beispiel benutzen wir Abspaltungsgriffe.

Beispiel 5. Die Summe S der im Endlichen gelegenen Residuen der Funktion $f(z) = \dfrac{\sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu z^\mu}{\prod_{\lambda=1}^{n}(z-z_\lambda)}$ soll berechnet werden. Dabei sei $n \geqq 1$; die n Zahlen z_λ seien alle verschieden. Nach dem Residuensatz ist

$$S = \frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(z)\,dz ,$$

wenn z.B. C der einmal im positiven Sinne zu durchlaufende Kreis $|z| = 1 + \sum_{\lambda=1}^{n}|z_\lambda|$ ist.

Hilfsformel [1].
$$g(z) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{z-z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda} = 1 \text{ für jedes } z. \qquad (n \geqq 1)$$

1. Beweis. Sei $1 \leqq k \leqq n$. Dann ist
$$g(z_k) = \sum_{\nu=1}^{n}{}^{(k)} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{z_k - z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda} + \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(k)} \frac{z_k - z_\lambda}{z_k - z_\lambda}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{k-1} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu,k)} \frac{z_k - z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda}\cdot\frac{z_k - z_k}{z_\nu - z_k} + \sum_{\nu=k+1}^{n} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(k,\nu)} \frac{z_k - z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda}\cdot\frac{z_k - z_k}{z_\nu - z_k} + 1 = 0+0+1 = 1.$$
Das Polynom $g(z)$ hat also die n (verschiedenen) Einsstellen z_k. Da es aber höchstens vom Grade $(n-1)$ ist, ist $g(z) \equiv 1$.

2. Beweis. (vollständige Induktion). [1] werde für ein bestimmtes n als gültig vorausgesetzt. Dann ist (für $z \neq z_\lambda$ $[1 \leqq \lambda \leqq n]$)
$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \prod_{\lambda=1}^{n+1}{}^{(\nu)} \frac{z-z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda} = \sum_{\nu=1}^{n} \prod_{\lambda=1}^{n+1}{}^{(\nu)} \frac{z-z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda} + \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{z-z_\lambda}{z_{n+1} - z_\lambda}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{\frac{(z_\nu - z_{n+1}) + (z - z_\nu)}{z_\nu - z_{n+1}}}_{\text{(Abspaltung oben)}} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{z-z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda} + \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{z-z_\lambda}{z_{n+1} - z_\lambda}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{z_\nu - z_{n+1}}{z_\nu - z_{n+1}} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{z-z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{z - z_\nu}{z_\nu - z_{n+1}} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{z-z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda} + \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{z-z_\lambda}{z_{n+1} - z_\lambda}$$
$$= 1 + \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{z-z_\lambda}{z_{n+1} - z_\lambda}\cdot\left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{z - z_\nu}{z_\nu - z_{n+1}} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{z-z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda}\cdot \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{z_{n+1}-z_\lambda}{z - z_\lambda}\cdot\frac{z_{n+1}-z_\nu}{z - z_\nu} + 1 \right\}$$
$$= 1 + \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{z-z_\lambda}{z_{n+1} - z_\lambda}\cdot\left\{ -\sum_{\nu=1}^{n} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{z_{n+1}-z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda} + 1 \right\}$$
$$= 1 + \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{z-z_\lambda}{z_{n+1} - z_\lambda}\cdot\left\{ -1 + 1 \right\} = 1 .$$

Hilfsformel [2].
$$T_n^{(k)} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \frac{z_\nu^k}{\prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)}(z_\nu - z_\lambda)} = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leqq k \leqq n-2 \\ 1 \text{ für } \quad k = n-1 \end{cases}$$

Beweis. a) $k=0$. Man liest ab, daß $T_1^{(0)} = 1$ ist. Für $n \geqq 2$ ist
$$T_n^{(0)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)}(z_\nu - z_\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^{n-1}{}^{(\nu)}(z_\nu - z_\lambda)\cdot(z_\nu - z_n)} + \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^{n-1}(z_n - z_\lambda)}$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{n-1}(z_n - z_\lambda)} \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \prod_{\lambda=1}^{n-1}{}^{(\nu)} \frac{z_n - z_\lambda}{z_\nu - z_\lambda} \cdot \underbrace{\frac{z_n - z_\nu}{z_\nu - z_n}}_{-1} + 1 \right\}$$

Jetzt kann man [1] mit $z = z_n$, $n/n-1$ anwenden, weil $n-1 \geqq 1$ ist:

$$T_n^{(0)} = \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{n-1}(z_n - z_\lambda)} \cdot \left\{-1+1\right\} = 0 \quad \text{für } n \geqq 2.$$

b) <u>Eine Rekursionsformel</u>. Sei $k \geqq 0$, n (sei jetzt immer) $\geqq 1$.

$$T_n^{(k+1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(z_\nu - z_n + z_n)\cdot z_\nu^{\,k}}{\prod\limits_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)}(z_\nu - z_\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(z_\nu - z_n)\cdot z_\nu^{\,k}}{\prod\limits_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)}(z_\nu - z_\lambda)} + z_n \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \frac{z_\nu^{\,k}}{\prod\limits_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)}(z_\nu - z_\lambda)}$$

Kürzt man in der ersten Summe um $(z_\nu - z_n)$, so erhält man die Formel

$$\underline{T_n^{(k+1)} = T_{n-1}^{(k)} + z_n \cdot T_n^{(k)}}$$

c) Beweis von [2] durch <u>Schluß von k auf $k+1$</u>.

Daß [2] für $k=0$ richtig ist, besagt a).

Aus $T_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \geqq k+2, \\ 1 & \text{für } n = k+1 \end{cases}$

ist jetzt $T_n^{(k+1)} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \geqq k+3, \\ 1 & \text{für } n = k+2 \end{cases}$ herzuleiten.

Sei $n \geqq k+3$. Wegen b) ist dann $T_n^{(k+1)} = \underbrace{T_{n-1}^{(k)}}_{(n-1)\geqq k+2} + z_n \cdot \underbrace{T_n^{(k)}}_{n > k+2} = 0 + z_n \cdot 0 = 0$.

Für $n = k+2$ hat man $T_{k+2}^{(k+1)} = T_{k+1}^{(k)} + z_n \cdot T_{k+2}^{(k)} = 1 + z_n \cdot 0 = 1$.

<u>Lösung der oben gestellten Aufgabe</u>. Wegen [1] gilt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_\mu z^\mu}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(z - z_\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_\mu z^\mu}{z - z_\nu} \cdot \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{1}{z_\nu - z_\lambda} \text{. deshalb ist}$$

$$^{(K)}\!\!\int \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_\mu z^\mu}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(z - z_\lambda)}\,dz = {}^{(K)}\!\!\int \sum_{\nu=1}^{n} \underbrace{\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_\mu z^\mu - \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_\mu z_\nu^\mu}{z - z_\nu}} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{1}{z_\nu - z_\lambda}\,dz + {}^{(K)}\!\!\int \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_\mu z_\nu^\mu}{z - z_\nu} \prod_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)} \frac{1}{z_\nu - z_\lambda}\,dz$$

(das ist für jedes ν ein Polynom in z;
nach Cauchy's Integralsatz ist also das erste der beiden Integrale $= 0$.)

$$= \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{z_\nu^{\,\mu}}{\prod\limits_{\lambda=1}^{n}{}^{(\nu)}(z_\nu - z_\lambda)} \, {}^{(K)}\!\!\int \frac{dz}{z - z_\nu} \right\} = \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu \left\{ T_n^{(\mu)} \cdot 2\pi i \right\}.$$

[2] besagt aber, daß $T_n^{(\mu)} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq \mu \leqq n-2, \\ 1 & \text{für } \mu = n-1. \end{cases}$ Wegen $S = \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} a_\mu \cdot T_n^{(\mu)}$ ist

$$\underline{S = a_{n-1}}.$$

§10. Beispiele — 2. Gruppe (Determinanten).

Definition der Determinante.

A sei eine quadratische Matrix n. Ordnung ($n \geqq 2$), und es sei $1 \leqq k \leqq n-1$; sind die k Zahlen ν_κ ($1 \leqq \kappa \leqq k$) alle verschieden und alle aus $(1+N)(n-N)$, so verstehen wir unter $A_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_k}$ diejenige quadratische Matrix $(n-k)$. Ordnung, die aus A dadurch hervorgeht, daß die ersten k Zeilen und die ν_1., die ν_2., … die ν_k. Spalte weggelassen werden.

Jeder quadratischen Matrix A wird eine Zahl $|A|$, die Determinante von A, durch folgendes rekursive Bildungsgesetz eindeutig zugeordnet:

$$|a_{\mu\nu}|_0^n \equiv \begin{vmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\mu 0} & \cdots & a_{\mu n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{00} & \text{für } n = 0, \\ \sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_{0\nu}\,|A_\nu| & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

[Wir definieren die Determinante also durch ihre Entwicklung nach Unterdeterminanten der ersten Zeile (wo $\mu = 0$ ist).]

Wir setzen $|A_{\nu_1,\dots\nu_k}| = \Delta_{\nu_1,\dots\nu_k}$.

Hilfssatz. Seien zwei Determinanten $A = |a_{\mu\nu}|_0^n$ und $A' = |a'_{\mu\nu}|_0^n$ gegeben.

Ist $a'_{\mu\nu} = \begin{cases} a_{\mu\nu} & \text{für } \nu \neq k \\ c \cdot a_{\mu\nu} & \text{für } \nu = k \end{cases}$ für ein k aus $N(n-N)$, dann ist $\underline{A' = cA}$.

Beweis. Für $n = 0$ ist das Behauptete trivial; den Induktionsbeweis deute ich nur an:

$$\begin{aligned} A' = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a'_{0\nu}\,\Delta'_\nu &= \sum_{\nu=0}^{n\,(k)}(-1)^\nu a'_{0\nu}\,\Delta'_\nu + (-1)^k a'_{0k}\,\Delta'_k \\ &= \sum_{\nu=0}^{n\,(k)}(-1)^\nu a_{0\nu}(c\cdot\Delta_\nu) + (-1)^k(a_{0k}\cdot c)\cdot\Delta_k \\ &= \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_{0\nu}\cdot c\cdot\Delta_\nu = cA. \end{aligned}$$

Dieser Hilfssatz ermöglicht es uns, die bekannte Produktdarstellung der Vandermonde'schen Determinante ohne Hilfe sonstiger Sätze über Determinanten aus der Definition herzuleiten:

Behauptung: Sei $n \geqq 0$. Die $(n+1)$ Zahlen x_ν ($0 \leqq \nu \leqq n$) seien alle verschieden.

Dann ist $\underline{V_n \equiv |x_\nu^\mu|_0^n = \prod_{\nu=0}^{n-1}\prod_{\mu=\nu+1}^{n}(x_\mu - x_\nu)}$

Beweis. Ich beschränke mich wieder auf das Kernstück des Induktionsbeweises: die Behauptung wird für ein spezielles n als bewiesen angenommen; zu zeigen ist dann: $V_{n+1} = |x_\nu^\mu|_0^{n+1} = \prod_{\nu=0}^{n}\prod_{\mu=\nu+1}^{n+1}(x_\mu - x_\nu)$.

Nach Definition ist $V_{n+1} = \sum_{\lambda=0}^{n+1}(-1)^\lambda x_\lambda^0 \,\Delta_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{n+1}(-1)^\lambda \,\Delta_\lambda$.

Da die 0. Zeile und die λ. Spalte von V_{n+1} in Δ_λ ausgelassen sind, ist $\Delta_\lambda \equiv |y_{\mu\nu}|_0^n$ so gebaut: $\quad y_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} x_\nu^{\mu+1} \text{ für } 0 \leqq \nu \leqq \lambda-1 \\ x_{\nu+1}^{\mu+1} \text{ für } \lambda \leqq \nu \leqq n \end{Bmatrix} (0 \leqq \mu \leqq n)$.

Nach dem Hilfssatz ist also $\Delta_\lambda = \prod_{\kappa=0}^{n+1}{}^{(\lambda)} x_\kappa \cdot |y'_{\mu,\nu}|_0^n$ mit $y'_{\mu,\nu}$

$$= \begin{Bmatrix} x_\nu^\mu \text{ für } 0 \leqq \nu \leqq \lambda-1 \\ x_{\nu+1}^\mu \text{ für } \lambda \leqq \nu \leqq n \end{Bmatrix} (0 \leqq \mu \leqq n).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist, wenn man noch $y_\nu = \begin{cases} x_\nu \text{ für } 0 \leqq \nu \leqq \lambda-1, \\ x_{\nu+1} \text{ für } \lambda \leqq \nu \leqq n \end{cases}$ setzt,

$$\Delta_\lambda = \prod_{\kappa=0}^{n+1}{}^{(\lambda)} x_\kappa \cdot |y_\nu^\mu|_0^n = \prod_{\kappa=0}^{n}{}^{(\lambda)} x_\kappa \cdot \prod_{\nu=0}^{n-1} \prod_{\mu=\nu+1}^{n} (y_\mu - y_\nu)$$

$$= \prod_{\kappa=0}^{n+1}{}^{(\lambda)} x_\kappa \cdot \prod_{\nu=0}^{\lambda-1} \prod_{\mu=\nu+1}^{\lambda-1} (y_\mu - y_\nu) \cdot \prod_{\nu=0}^{\lambda-1} \prod_{\mu=\lambda}^{n} (y_\mu - y_\nu) \cdot \prod_{\nu=\lambda}^{n-1} \prod_{\mu=\nu+1}^{n} (y_\mu - y_\nu)$$

$$= \prod_{\kappa=0}^{n+1}{}^{(\lambda)} x_\kappa \cdot \prod_{\nu=0}^{\lambda-1} \prod_{\mu=\nu+1}^{\lambda-1} (x_\mu - x_\nu) \cdot \prod_{\nu=0}^{\lambda-1} \prod_{\mu=\lambda}^{n} (x_{\mu+1} - x_\nu) \cdot \prod_{\mu=\lambda}^{n-1} \prod_{\mu=\nu+1}^{n} (x_{\mu+1} - x_{\nu+1}).$$

Durch Indexverschiebung erhält man

$$\Delta_\lambda = \prod_{\kappa=0}^{n+1}{}^{(\lambda)} x_\kappa \cdot \prod_{\nu=0}^{\lambda-1} \prod_{\mu=\nu+1}^{\lambda-1} (x_\mu - x_\nu) \cdot \prod_{\nu=0}^{\lambda-1} \prod_{\mu=\lambda+1}^{n+1} (x_\mu - x_\nu) \cdot \prod_{\nu=\lambda+1}^{n} \prod_{\mu=\nu+1}^{n+1} (x_\mu - x_\nu)$$

$$= \prod_{\kappa=0}^{n+1}{}^{(\lambda)} x_\kappa \cdot \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{\lambda-1} (x_\lambda - x_\nu)} \cdot \prod_{\nu=0}^{\lambda-1} \prod_{\mu=\nu+1}^{n+1} (x_\mu - x_\nu) \quad \cdot \prod_{\nu=\lambda+1}^{n} \prod_{\mu=\nu+1}^{n+1} (x_\mu - x_\nu)$$

$$= \prod_{\kappa=0}^{n+1}{}^{(\lambda)} x_\kappa \cdot \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{\lambda-1} (x_\lambda - x_\nu) \cdot \prod_{\mu=\lambda+1}^{n+1} (x_\mu - x_\lambda)} \cdot \prod_{\nu=0}^{n} \prod_{\mu=\nu+1}^{n+1} (x_\mu - x_\nu)$$

$$= \prod_{\kappa=0}^{n+1}{}^{(\lambda)} x_\kappa \cdot \frac{(-1)^\lambda}{\prod_{\mu=0}^{\lambda-1} (x_\mu - x_\lambda) \prod_{\mu=\lambda+1}^{n+1} (x_\mu - x_\lambda)} \cdot \prod_{\nu=0}^{n} \prod_{\mu=\nu+1}^{n+1} (x_\mu - x_\nu).$$

daher ist $V_{n+1} = \sum_{\lambda=0}^{n+1} (-1)^\lambda \Delta_\lambda = \left(\prod_{\nu=0}^{n} \prod_{\mu=\nu+1}^{n+1} (x_\mu - x_\nu) \right) \cdot \sum_{\lambda=0}^{n+1} \prod_{\mu=0}^{n+1}{}^{(\lambda)} \frac{x_\mu}{x_\mu - x_\lambda}$.

Ersetzt man nun in der Hilfsformel [1] aus §9 (Aufgabe 5) n durch $n+2$ und setzt $z=0$ sowie $z_\mu = x_{\mu-1}$ für $1 \leqq \mu \leqq n+2$, so erhält man

$$1 = \sum_{\nu=1}^{n+2} \prod_{\mu=1}^{n+2}{}^{(\nu)} \frac{x_{\mu-1}}{x_{\mu-1} - x_{\nu-1}} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \sum_{\mu=1}^{n+2}{}^{(\nu+1)} \frac{x_{\mu-1}}{x_{\mu-1} - x_\nu} = \sum_{\nu=0}^{n+1} \sum_{\mu=0}^{n+1}{}^{(\nu)} \frac{x_\mu}{x_\mu - x_\nu} :$$

tatsächlich ist also
$$V_{n+1} = \prod_{\nu=0}^{n} \prod_{\mu=\nu+1}^{n+1} (x_\mu - x_\nu).$$

Als Beispiel dafür, wie man aus der eingangs aufgestellten Definition die grundlegenden Determinantensätze gewinnen kann, soll die Vertauschung der beiden ersten Zeilen behandelt werden:

Satz. Gegeben seien die Determinanten $A=|a_{\mu\nu}|_0^n$ und $A'=|a'_{\mu\nu}|_0^n$ $(n\geqq 2)$.

Ist $a'_{\mu\nu} = \begin{cases} a_{\mu\nu} & \text{für } \mu\geqq 2,\\ a_{0\nu} & \text{für } \mu=1,\\ a_{1\nu} & \text{für } \mu=0,\end{cases}$ so ist $\underline{A'=-A.}$

Beweis. $A' = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a'_{0\nu}\,\Delta'_\nu$

$$= \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a'_{0\nu}\sum_{\lambda=0}^{\nu-1}(-1)^\lambda a'_{1\lambda}\,\Delta'_{\nu,\lambda} + \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a'_{0\nu}\sum_{\lambda=\nu+1}^{n}(-1)^{\lambda+1} a'_{1\lambda}\,\Delta'_{\nu,\lambda}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_{1\nu}\sum_{\lambda=0}^{\nu-1}(-1)^\lambda a_{0\lambda}\,\Delta_{\lambda,\nu} + \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_{1\nu}\sum_{\lambda=\nu+1}^{n}(-1)^{\lambda+1} a_{0\lambda}\,\Delta_{\lambda,\nu}$$

Wir wenden Satz (12) an (bzw. eine nahe verwandte Transformationsregel):

$$A' = \sum_{\lambda=0}^{n-1}(-1)^\lambda a_{0\lambda}\sum_{\nu=\lambda+1}^{n}(-1)^\nu a_{1\nu}\,\Delta_{\lambda,\nu} + \sum_{\lambda=1}^{n}(-1)^{\lambda+1} a_{0\lambda}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}(-1)^\nu a_{1\nu}\,\Delta_{\lambda,\nu}$$

$$= -\sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^\lambda a_{0\lambda}\sum_{\nu=0}^{\lambda-1}(-1)^\nu a_{1\nu}\,\Delta_{\lambda,\nu} - \sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^\lambda a_{0\lambda}\sum_{\nu=\lambda+1}^{n}(-1)^{\nu+1} a_{1\nu}\,\Delta_{\lambda,\nu} = -A.$$

§11. Beispiele — 3. Gruppe.

Die beiden folgenden Beispiele sollen zeigen, wie man „allgemeine" Produkte (und natürlich ebenso Summen) in „gewöhnliche" umformen kann.

Beispiel 1. $\underline{\prod_{\mu=0}^{m}\mu}$ ist zwar für $m\geqq 0$ $=0$, aber nicht für $m\leqq -1$: denn ist

$$\prod_{\mu=0}^{m}\mu = \frac{1}{\prod\limits_{\mu=m+1}^{-1}\mu} = \underset{\text{(Minus-Regel)}}{\frac{1}{\prod\limits_{\mu=1}^{-m-1}(-\mu)}} = \frac{(-1)^{m+1}}{(-m-1)!}.$$

Beispiel 2. $$\underline{P_n \equiv \prod_{\nu=1}^{n}\frac{n+\nu}{2(2\nu-1)} = \begin{cases}1 & \text{für } n\geqq 0,\\ 2 & \text{für } n\leqq -1.\end{cases}}$$

Beweis. Nach (10) ist $\prod_{\nu=1}^{n}(2\nu-1) = \prod_{\nu=1}^{2n}\nu : \prod_{\nu=1}^{n}(2\nu)$, falls $n\geqq 0$ ist.

Für $n\geqq 0$ ist daher $P_n = \prod_{\nu=1}^{n}(n+\nu)\dfrac{\prod_{\nu=1}^{n}(2\nu)}{\prod_{\nu=1}^{n}2\cdot\prod_{\nu=1}^{2n}\nu} = \dfrac{\prod_{\nu=1}^{n}\nu\cdot\prod_{\nu=n+1}^{2n}\nu}{\prod_{\nu=1}^{2n}\nu} = 1.$

Für $n\leqq -1$ verwandeln wir P_n durch äußere Umkehrung in ein „gewöhn=

liches" Produkt nun:

$$P_n = \prod_{v=1}^{n} \frac{n+v}{2(2v-1)} = \prod_{v=n+1}^{0} \frac{2(2v-1)}{n+v} = \prod_{v=0}^{-n-1} \frac{2(-2v-1)}{n-v} = \prod_{v=0}^{-n-1} \frac{2(2v+1)}{-n+v}.$$

Nun ist erstens $\prod_{v=0}^{-n-1}(2v+1) = \prod_{v=1}^{-n}\left(2[v-1]+1\right) = \prod_{v=1}^{-n}(2v-1)$

und zweitens (n ist ja $\leqq -1$) $\prod_{v=0}^{-n-1}(-n+v) = -n\cdot\prod_{v=1}^{-n-1}(-n+v) = \frac{-n}{-2n}\cdot\prod_{v=1}^{-n}(-n+v)$,

also $P_n = 2\cdot\prod_{v=1}^{-n}\frac{2(2v-1)}{-n+v} = \frac{2}{P_{-n}} = 2$, denn $P_{-n} = 1$ wegen $-n \geqq 1$.

Beispiel 3. Sei n eine ganze Zahl und $\mathfrak{M} = (1+\mathfrak{N})(n-\mathfrak{N}) + (n+1+\mathfrak{N})(0-\mathfrak{N})$. Die Zahlen a_v mit v aus $\mathfrak{M}$ seien entweder alle >0 oder alle dem (offenen) Intervall $(-1,0)$ entnommen.

Dann ist
$$\prod_{v=1}^{n}(1+a_v) \begin{cases} = 1+\sum_{v=1}^{n} a_v & \text{für } n=0,\ n=1. \\ > 1+\sum_{v=1}^{n} a_v & \text{für } n\neq 0,1. \quad (*) \end{cases}$$

Beweis. Wir führen vollständige Induktion „auf beiden Seiten hin" durch:

1.) Ist für ein bestimmtes $n \geqq 1$ $\quad \prod_{v=1}^{n}(1+a_v) \geqq 1+\sum_{v=1}^{n} a_v$,

dann ist $\quad \prod_{v=1}^{n+1}(1+a_v) > 1+\sum_{v=1}^{n+1} a_v$.

Das ergibt sich so:

$$\prod_{v=1}^{n+1}(1+a_v) \geqq (1+a_{n+1})\left(1+\sum_{v=1}^{n} a_v\right) = 1+\sum_{v=1}^{n+1} a_v + \underbrace{a_{n+1}\cdot\sum_{v=1}^{n} a_v}_{\text{diese Summe}}$$

ist >0, weil ja $a_{n+1}\cdot a_v > 0$ und $n \geqq 1$ ist. (*) ist dadurch für $n \geqq 2$ bewiesen.

2.) Ist für ein bestimmtes $n \leqq 0$ $\quad \prod_{v=1}^{n}(1+a_v) \geqq 1+\sum_{v=1}^{n} a_v$,

dann ist $\quad \prod_{v=1}^{n-1}(1+a_v) > 1+\sum_{v=1}^{n-1} a_v$.

Wäre nämlich $\quad \prod_{v=1}^{n-1}(1+a_v) \leqq 1+\sum_{v=1}^{n-1} a_v$,

so entstünde daraus

$$\prod_{v=1}^{n}(1+a_v) \leqq (1+a_n)\left(1+\sum_{v=1}^{n-1} a_v\right) = 1+\sum_{v=1}^{n} a_v + a_n\sum_{v=1}^{n-1} a_v = 1+\sum_{v=1}^{n} a_v - \underbrace{\left(a_n\sum_{v=n}^{0} a_v\right)}_{\text{diese Summe}}$$

ist >0, weil ja $a_n\cdot a_v > 0$ und $n \leqq 0$ ist. Es gälte also die Ungleichung

$$\prod_{v=1}^{n}(1+a_v) > 1+\sum_{v=1}^{n} a_v,$$

aber das ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

(*) ist somit auch für $n \leqq -1$ bewiesen.

Folgerung. Setzt man alle die $a_\nu = a$, so gelangt man zur Bernoulli'schen Ungleichung:

$$\underline{(1+a)^n \begin{cases} = 1+na & \text{für } n=0,\ n=1 \\ > 1+na & \text{für jedes andere ganze } n \end{cases} \qquad (-1<a\neq 0)}$$

Anmerkung. In der oben bewiesenen Ungleichung ersetzen wir n durch $-n$ und a_ν durch b_ν: für $n \geqq 1$ ist $\prod\limits_{\nu=1}^{-n}(1+b_\nu) > 1+\sum\limits_{\nu=1}^{-n} b_\nu$. Durch äußere Umkehrung entsteht hieraus $\prod\limits_{\nu=-n+1}^{0}\frac{1}{1+b_\nu} > 1-\sum\limits_{\nu=-n+1}^{0} b_\nu$ und

weiter $\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{1+b_{-\nu}} > 1-\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} b_{-\nu}$. Setzen wir noch $b_{-\nu}=a_{\nu+1}$!

Wir gelangen zu der Ungleichung $\underline{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1+a_\nu} > 1-\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}$,

die gewissermaßen die Übersetzung von (*) in „gewöhnliche" Summen und Produkte ist (und zwar desjenigen Teils von (*), der ebenso zu übersetzen ist).

§ 12. Beispiele – 4. Gruppe (unbestimmte Integrale).

Ableitungsketten. Jeder ganzen Zahl μ soll genau eine auf dem Intervall J erklärte eindeutige Funktion $f_\mu(x)$ zugeordnet sein, die auf J differenzierbar ist.

Wir sagen: die Funktionen $f_\mu(x)$ bilden eine Ableitungskette, und schreiben $f_\mu(x) = f^{(\mu)}(x)$,
wenn für jedes μ auf ganz J $\underline{\frac{d}{dx} f_\mu(x) = f_{\mu+1}(x)}$ gilt.

Für $f^{(0)}(x)$ schreiben wir auch $f(x)$.

Hier sind einige leicht verifizierbare Beispiele:

[1] $\left\{(ax+b)^{\alpha}\right\}^{(\mu)} = a^{\mu}(ax+b)^{\alpha-\mu}\prod\limits_{\lambda=0}^{\mu-1}(\alpha-\lambda)$ ($\mu>\alpha$, wenn α eine negative ganze Zahl ist)

[2] $\left\{(ax^2+bx+c)^n\right\}^{(\mu)} = \frac{1}{2^n(2a)^{n-\mu}}\sum\limits_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(4ac-b^2)^{n-\nu}\prod\limits_{\lambda=0}^{\mu-1}(2\nu-\lambda)(2ax+b)^{2\nu-\mu}$

$(a\neq 0;\ n\geqq 0)$

(Rechnet man nur mit „gewöhnlichen" Produkten, so muß man die Verifikation für positive und negative μ getrennt vornehmen.)

[3] $\left\{\alpha^{\beta x}\cdot\sin(\gamma x+\delta)\right\}^{(\mu)} = \left(\sqrt{(\beta\cdot\ln\alpha)^2+\gamma^2}\right)^{\mu}\cdot\alpha^{\beta x}\cdot\sin\left\{\gamma x+\delta+\mu\cdot\arccos\frac{\beta\cdot\ln\alpha}{\sqrt{(\beta\cdot\ln\alpha)^2+\gamma^2}}\right\}$

$(\alpha>0,\ (\beta\cdot\ln\alpha)^2+\gamma^2\neq 0)$

[4] $\left\{(Ax+B)^{\alpha}\ln|Ax+B|\right\}^{(\mu)} = A^{\mu}(Ax+B)^{\alpha-\mu}\prod\limits_{\lambda=0}^{\mu-1}(\alpha-\lambda)\left\{\sum\limits_{\nu=0}^{\mu-1}\frac{1}{\alpha-\nu}+\ln|Ax+B|\right\}$

$(A\neq 0;\ x\neq -\frac{B}{A};\ \alpha\neq\nu$ für ν aus $\mathfrak{N}\cdot(\mu-1-\mathfrak{N})+(\mu+\mathfrak{N})(-1-\mathfrak{N})$.)

Wir bestätigen [4]:

$$f^{(\mu)\prime} = A^{\mu+1}(Ax+B)^{\alpha-(\mu+1)}\prod_{\lambda=0}^{\mu}(\alpha-\lambda)\left\{\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\frac{1}{\alpha-\nu}+\ln|Ax+B|\right\}$$
$$+A^{\mu+1}(Ax+B)^{\alpha-\mu}\prod_{\lambda=0}^{\mu-1}(\alpha-\lambda)\cdot\frac{1}{Ax+B}$$
$$= A^{\mu+1}(Ax+B)^{\alpha-(\mu+1)}\prod_{\lambda=0}^{\mu}(\alpha-\lambda)\cdot\left\{\sum_{\nu=0}^{\mu}\frac{1}{\alpha-\nu}+\ln|Ax+B|\right\} = f^{(\mu+1)}.$$

<u>Eine Formel von Kronecker</u>[1]

Gelten die Ableitungsketten $\{f(x)\}^{(\mu)}$ und $\{g(x)\}^{(\mu)}$ beide auf dem Intervall J, so ist doch auf J (für jedes ganze n und jedes ganze ν)

$$\left(f^{(\nu-1-n)}g^{(n-\nu)}\right)' = f^{(\nu-n)}g^{(n-\nu)} + f^{(\nu-1-n)}g^{(n-\nu+1)},$$ was wir mit $(-1)^\nu$ multiplizieren und dann von 1 bis n summieren:

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu f^{(\nu-1-n)}g^{(n-\nu)}\right\}' = \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu f^{(\nu-n)}g^{(n-\nu)} - \sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu f^{(\nu-n)}g^{(n-\nu)}$$

(In der 2. Summe wurde der Index verschoben.)

$$= (-1)^n fg - f^{(-n)}g^{(n)}.$$

Daher ist ein unbestimmtes Integral

$$\underline{(-1)^n\int f(x)\,g(x)\,dx = \int f^{(-n)}(x)\,g^{(n)}(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu f^{(\nu-1-n)}(x)\,g^{(n-\nu)}(x).}$$ [2] [3]

Um den Grundstock für eine Sammlung unbestimmter Integrale zu schaffen, kann man systematisch Ableitungsketten herstellen und in diese Formel einsetzen. Wir wollen uns mit zwei Beispielen ~~aus~~ aus diesem Anwendungsbereich der Kronecker'schen Formel begnügen.

<u>Beispiel 1.</u> Sei $x>0$, $m\geq 0$ und α keine ganze Zahl. Dann ist

$$J = \int (ax+b)^m x^\alpha \ln x\,dx$$
$$= (-1)^n\int\left(x^\alpha\ln x\right)^{(-n)}\left\{(ax+b)^m\right\}^{(n)}dx - \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu\left(x^\alpha\ln x\right)^{(-\nu)}\left\{(ax+b)^m\right\}^{(\nu-1)}$$

Wir wählen $n=m+1$; dann ist nämlich $\left\{(ax+b)^m\right\}^{(n)}=0$, und wir haben

$$J = -\sum_{\nu=1}^{m+1}(-1)^\nu x^{\alpha+\nu}\prod_{\lambda=0}^{-\nu-1}(\alpha-\lambda)\left\{\sum_{\kappa=0}^{-\nu-1}\frac{1}{\alpha-\kappa}+\ln x\right\}\cdot a^{\nu-1}(ax+b)^{m-\nu+1}\cdot\prod_{\lambda=0}^{\nu-2}(m-\lambda).$$

Mit „gewöhnlichen" Summen und Produkten schreibt sich diese Formel so:

---

1) „Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel", Sitzungsber. d. Preuß. Akad. der Wissenschaften zu Berlin, <u>38</u>, S. 841. (1885)

2) Bei Kronecker ist $n\geq 1$.

3) Benützen werden wir diese Formel in der (durch eine Umkehrung gewonnenen) Form

$$\underline{\int fg\,dx = (-1)^n\int f^{(-n)}g^{(n)}dx - \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu f^{(-\nu)}g^{(\nu-1)}.}$$

$$J = \sum_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu} x^{\alpha+\nu} \prod_{\lambda=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha+\lambda} \left\{ \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha+\kappa} - \ln x \right\} a^{\nu-1} (ax+b)^{m-\nu+1} \prod_{\lambda=0}^{\nu-2}(m-\lambda);$$

ob und wie man sie noch weiter umformt, richtet sich nach ihrem jeweiligen Verwendungszweck.

<u>Beispiel 2.</u> Wir wollen $J_m = \int (ax+b)^m e^x \sin(\gamma x+\delta)\, dx$ berechnen: $(a \neq 0)$

$$\begin{aligned} J_m &= (-1)^n \int \left\{e^x \sin(\gamma x+\delta)\right\}^{(-n)} \left\{(ax+b)^m\right\}^{(n)} dx - \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} \left\{e^x \sin(\gamma x+\delta)\right\}^{(-\nu)} \left\{(ax+b)^m\right\}^{(\nu-1)} \\ &= (-1)^n \int \left(\sqrt{1+\gamma^2}\right)^{-n} e^x \sin\left(\gamma x+\delta - n \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right) a^n (ax+b)^{m-n} \prod_{\lambda=0}^{n-1}(m-\lambda)\, dx \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} \left(\sqrt{1+\gamma^2}\right)^{-\nu} e^x \sin\left(\gamma x+\delta - \nu \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right) a^{\nu-1} (ax+b)^{m-\nu+1} \prod_{\lambda=0}^{\nu-2}(m-\lambda) \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt (ganz gleich, ob m positiv oder negativ ist) $n=m+1$ und berücksichtigen dabei die Identität $\prod_{\lambda=0}^{m}(m-\lambda) = \prod_{\lambda=0}^{m} \lambda$:

$$\begin{aligned} J_m &= \left(\frac{-a}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right)^{m+1} \cdot \prod_{\lambda=0}^{m} \lambda \cdot \int \frac{e^x}{ax+b} \sin\left(\gamma x+\delta - [m+1] \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right) dx \\ &\quad + e^x \cdot \sum_{\nu=1}^{m+1} (-a)^{\nu-1} \left(\sqrt{1+\gamma^2}\right)^{-\nu} \prod_{\lambda=0}^{\nu-2}(m-\lambda) \cdot (ax+b)^{m-\nu+1} \cdot \sin\left(\gamma x+\delta - \nu \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right). \end{aligned}$$

Nach §11 ist $\prod_{\lambda=0}^{m} \lambda \neq 0$ für $m \leqq -1$. [Im Falle $\gamma = 0$, $\delta \neq k\pi$ z.B. ist es ja (seit Liouville's Untersuchungen darüber) bekannt, daß J_{-1} nicht geschlossen durch die elementaren Funktionen darstellbar ist.]

Wenn man nicht innerhalb des Kalküls weiterrechnet, wird man – wenn $m \leqq -1$ ist – das Ergebnis durch „gewöhnliche" Summen und Produkte darstellen wollen. Darauf verzichte ich hier, zumal ich ja solche „Übersetzungen" in den einfachen Beispielen der 3. Gruppe (§11) durchgeführt habe.

<u>Schlußbemerkung.</u>

Beliebig oft iterierte Summen 1), Summen mit reellen Grenzen 2), Summen mit komplexen Gitterpunkten als Grenzen – das wären naheliegende weitere Verallgemeinerungen des Summenbegriffs. Einzelne

---

1) Mit ihrer Hilfe wären z.B. die Determinanten, der polynomische Lehrsatz, die Bernoulli'schen Zahlen darstellbar.

2) Ob man sie ohne Grenzprozesse einführen kann?

schon gefundenen Zusammenhänge zwischen „Summen im komplexen Gitter" und der Funktionentheorie lassen es wenigstens als denkbar erscheinen, daß eine weitere Ausdehnung unseres Kalküls – ganz unabhängig von den Anwendungen – aufschlußreich wäre. In der vorliegenden Arbeit jedoch ist der Kalkül nicht sogenannter Selbstzweck, sondern Mittel: arithmetisches Hilfsmittel praktischer Analysis.

Ich versichere, daß ich die Arbeit „Zur Theorie und Anwendung von Summenzeichen und Produktzeichen" selbständig verfaßt und außer den zitierten Stellen der im Text erwähnten Bücher keine weiteren Hilfsmittel benutzt habe.

Halle, 26.4.1950. Klaus Härtig.