Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 5, S. 209—215 (1959)

EINSTELLIGE FUNKTIONEN ALS GRUNDBEGRIFFE DER ELEMENTAREN ZAHLENTHEORIE

Von KLAUS HÄRTIG in Berlin

Nach JULIA ROBINSON[1]) kann man die Addition und die Multiplikation natürlicher Zahlen — und damit die „volle Arithmetik" — elementar durch die Nachfolgerfunktion und die Teilbarkeitsrelation ausdrücken. Hieran anknüpfend, hat MYHILL[2]) eine sehr einfache zweistellige zahlentheoretische Relation angegeben, die als *einziger* Grundbegriff der elementaren Arithmetik dienen kann. CHURCH und QUINE[3]) schließlich haben gezeigt, daß man sogar schon mit *einer* zweistelligen *symmetrischen* Relation auskommt, die insofern als „the simplest possible primitive for elementary number theory" gelten könne, als noch so viele *einstellige* zahlentheoretische Relationen (also *Eigenschaften* natürlicher Zahlen) nicht mehr für die elementare Definierbarkeit von Addition und Multiplikation ausreichen[4]).

Nun sind doch die k-stelligen Funktionen[5]) spezielle $(k+1)$-stellige Relationen, und andererseits läßt sich jede k-stellige Relation durch ihre charakteristische Funktion — also eine spezielle k-stellige Funktion — vertreten. In diesem Sinne liegen die einstelligen Funktionen echt *zwischen* den zwei- und den einstelligen Relationen, kommen also ebenfalls als „simplest possible primitives" in Frage.

Im Formalismus verwenden wir als Individuenvariablen die Grundzeichen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ und als einstellige arithmetische Funktoren die Grundzeichen f_1, f_2, f_3 und f, daneben $+$, $\cdot$ und die einzige Relationenkonstante $=$ wie sonst. Unter f^n bzw. f_2^n verstehen wir diejenige Zeichenreihe, die durch n-maliges Hintereinanderschreiben des Grundzeichens f bzw. f_2 entsteht, also insbesondre für $n = 0$ die leere Zeichenreihe. Durch prädikatenlogische Zusammensetzung entstehen aus Zeichenreihen $f^m x_i = f^n x_j$ $(i, j, m, n \geqq 0)$ die *f-Ausdrücke*, die wir, falls sie keine Variable frei enthalten, *f-Aussagen* nennen.

Bei der Allgemeingültigkeitsdefinition für die Ausdrücke benutzen wir *beschränkte* Belegungen $\mathfrak{B}$ der Variablen mit natürlichen Zahlen, also eindeutige Zuordnungen

$$x_i \longrightarrow \mathfrak{B}(x_i),$$

die nur für endlich viele, doch mindestens für diejenigen x_i erklärt sind, die in dem zu interpretierenden Ausdruck H frei vorkommen. Sind das etwa höchstens die

---

[1]) J. ROBINSON, Definability and decision problems in arithmetic. J. Symb. Log. **14** (1949), 98—114; Abschnitt 1.

[2]) J. R. MYHILL, A reduction in the number of primitive ideas of arithmetic. J. Symb. Log. **15** (1950), 130.

[3]) A. CHURCH and W. V. QUINE, Some theorems on definability and decidability. J. Symb. Log. **17** (1952), 179—187.

[4]) Siehe S. 186 (a. a. O.).

[5]) „Funktion" steht stets für „eindeutige Funktion".

Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und ist $\mathfrak{B}(x_\nu) = b_\nu$, so schreiben wir „$[b_1, \ldots, b_n]$ *ErfH*" statt „$\mathfrak{B}$ erfüllt H". Die Funktionenkonstanten f_1, f_2, f_3 und f werden interpretiert durch — jeweils vorher festzulegende — einstellige zahlentheoretische Funktionen φ_1 bzw. φ_2 bzw. φ_3 bzw. φ, ferner $+$ und $\cdot$ (und $=$) wie gewöhnlich. Unter φ^n bzw. φ_2^n verstehen wir die n-mal iterierte Funktion φ bzw. φ_2, also insbesondre für $n = 0$ die identische Abbildung.

Ist $a \# b$ die Nummer von $[a, b]$ bei irgendeiner Abzählung (ohne Wiederholung) der geordneten Paare natürlicher Zahlen und wählt man

$$\varphi_1(a \# b) = a,$$
$$\varphi_2(a \# b) = b,$$
$$\varphi_3(a \# b) = a^b,$$

so gilt:

$[b_1, b_2, b_3]$ $Erf\,\exists x_0(f_1 x_0 = x_1 \wedge f_2 x_0 = x_2 \wedge f_3 x_0 = x_3)$ *genau dann, wenn* $b_1^{b_2} = b_3$ — womit die Potenzierung elementar explizit durch $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ definiert ist. Da sich Addition und Multiplikation leicht durch die Potenzierung elementar ausdrücken lassen, sind sie, fast trivialerweise, durch die **drei** genannten Funktionen definierbar.

Man kommt schon mit **zwei** *einstelligen Funktionen aus* und kann dabei für die eine die *Nachfolgerfunktion* wählen.

Von $a \# b$ fordern wir jetzt:

$$0 \# b = 4b \qquad (b \geqq 0),$$
$$a \# 0 = 4a - 2 \qquad (a \geqq 1).$$

Dann ist $a \# b$ genau für $ab = 0$ gerade. Wählen wir

$$\varphi_1(5(a \# b)) \quad = 0,$$
$$\varphi_1(5(a \# b) + 1) = a,$$
$$\varphi_1(5(a \# b) + 2) = b,$$
$$\varphi_1(5(a \# b) + 3) = a + b,$$
$$\varphi_1(5(a \# b) + 4) = a \cdot b$$

und

$$\varphi_2(m) = m + 1,$$

so werden die Ausdrücke

$$x_1 + x_2 = x_3 \longleftrightarrow \exists x_0 (f_1 x_0 = O \wedge f_1 f_2 x_0 = x_1 \wedge f_1 f_2^2 x_0 = x_2 \wedge f_1 f_2^3 x_0 = x_3 \wedge f_1 f_2^5 x_0 = O)$$

und

$$x_1 \cdot x_2 \ = x_3 \longleftrightarrow \exists x_0 (f_1 x_0 = O \wedge f_1 f_2 x_0 = x_1 \wedge f_1 f_2^2 x_0 = x_2 \wedge f_1 f_2^4 x_0 = x_3 \wedge f_1 f_2^5 x_0 = O)$$

allgemeingültig, wenn man für $f_1 f_2^n x_0 = O$ jeweils die Zeichenreihe $\sim \exists x_4\, f_2 x_4 = f_1 f_2^n x_0$ einsetzt.

Beweis. Daß jede Belegung, die die linke Seite der Äquivalenz erfüllt, auch die rechte erfüllt, ist evident; zu zeigen bleibt das Umgekehrte. — Wenn $\varphi_1(m) = \varphi_1(m+5) = 0$, so ist m durch 5 teilbar:

Wäre $m = 5(a \# b) + r$ und $m + 5 = 5(\bar{a} \# \bar{b}) + r$ mit $0 < r < 5$, so wäre

$$a = 0 \quad \text{und} \quad \bar{a} = 0$$

oder

$$b = 0 \quad \text{und} \quad \bar{b} = 0$$

oder

$$a + b = 0 \quad \text{und} \quad \bar{a} + \bar{b} = 0$$

oder

$$a \cdot b = 0 \quad \text{und} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = 0, \qquad (*)$$

so daß in jedem Falle (*) gälte. Wegen $\bar{a} \# \bar{b} = (a \# b) + 1$ ist aber $a \# b$ oder $\bar{a} \# \bar{b}$ ungerade, folglich $a \cdot b \neq 0$ oder $\bar{a} \cdot \bar{b} \neq 0$, im Widerspruch zu (*).

Erfüllt $[b_1, b_2, b_3]$ die rechte Seite der Äquivalenz, so gibt es eine natürliche Zahl b_0 mit

$$\varphi_1(b_0) = \varphi_1(b_0 + 5) = 0, \quad \varphi_1(b_0 + 1) = b_1, \quad \varphi_1(b_0 + 2) = b_2,$$
$$\varphi_1(b_0 + 3) = b_3 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_1(b_0 + 4) = b_3,$$

also auch Zahlen a, b mit

$$b_0 = 5 \cdot (a \# b), \quad b_1 = a, \quad b_2 = b, \quad b_3 = a \dot{+} b.$$

Dann ist $b_1 \dot{+} b_2 = b_3$, wie behauptet.

Es fragt sich, ob man bereits mit **einer** einstelligen Funktion die volle Arithmetik erhalten kann. Für mehrere Funktionenklassen konnte ich einen Unmöglichkeitsbeweis führen, nicht aber allgemein. Die Frage wäre natürlich geklärt, falls sich z. B. schon

$$b_1 \leqq b_2$$

nicht durch *eine* einstellige Funktion elementar definieren läßt.

Verlangt man nur ***schwache*** *Definierbarkeit der Addition und Multiplikation, so reicht eine einstellige Funktion φ als einziger Grundbegriff der elementaren Zahlentheorie aus.* Das heißt: Man kann eine Funktion φ angeben und jedem Ausdruck H der Arithmetik [mit $+$ und $\cdot$ als einzigen außerlogischen Konstanten[1])] einen f-Ausdruck $\hat{H}$ *konstruktiv* so zuordnen, daß H und $\hat{H}$ *allgemeingültigkeitsgleich* sind.

Den Ausdrücken H seien irgendwelche positiven GÖDEL-Zahlen $Gö(H)$ eineindeutig zugeordnet. Wir setzen

$$\begin{array}{lll} \varphi(2Gö(H) + 1) = 2Gö(H), & \text{falls } H \text{ eine } \textit{wahre} \text{ Aussage ist;} \\ \varphi(2m + 1) \quad = 0 & \text{sonst;} \\ \varphi(2m + 2) \quad = 2m & \text{für } m \geqq 0; \\ \varphi(0) \quad = 0. \end{array}$$

[1]) Diesen Zusatz lassen wir künftig weg, haben also einerseits Ausdrücke (Aussagen), andrerseits f-Ausdrücke (f-Aussagen).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir H als *Aussage* an und wählen für $\hat{H}$ die f-Aussage

$$\exists x_1 (f^{Gö(H)+2} x_1 = f^{Gö(H)+1} x_1 \neq f^{Gö(H)} x_1 \wedge \sim\exists x_2 f x_2 = x_1).$$

Behauptet wird:

H ist wahr genau dann, wenn $\hat{H}$ wahr ist.

Beweis. (1) Wenn H wahr ist, so erfüllt für $b_1 = 2Gö(H) + 1$ die Belegung $[b_1]$ den Klammerausdruck. Man beachtet, daß φ nur gerade Bildwerte hat, daß es also kein b_2 mit $\varphi(b_2) = b_1$ geben kann.

(2) Erfüllt $[b_1]$ den Klammerausdruck, so ist b_1 ungerade. Weil $\varphi(m) = m$ genau im Falle $m = 0$, wird $\varphi^{Gö(H)+1}(b_1) = 0 \neq \varphi^{Gö(H)}(b_1)$, also etwa $b_1 = 2Gö(H_0) + 1$, wobei H_0 eine *wahre* Aussage ist. Mit $Gö(H) = h$ und $Gö(H_0) = h_0$ haben wir die Voraussetzungen:

$$\varphi^{h+1}(2h_0 + 1) = 0, \qquad \text{(a)}$$

$$\varphi^{h}(2h_0 + 1) \neq 0. \qquad \text{(b)}$$

Für $h < h_0$ wäre $\varphi^{h+1}(2h_0 + 1) = \varphi^h(2h_0) = 2(h_0 - h) > 0$ — entgegen (a). Und für $h > h_0$ wäre $\varphi^h(2h_0 + 1) = \varphi^{h-h_0-1}(\varphi^{h_0+1}(2h_0 + 1)) = \varphi^{h-h_0-1}(0) = 0$ — entgegen (b). Also ist $h = h_0$, folglich $H = H_0$, folglich H wahr, q. e. d.

Die soeben konstruierte Funktion φ war nicht berechenbar. Wir werden jetzt eine ***berechenbare*** einstellige Funktion φ angeben und wieder jedem Ausdruck H einen f-Ausdruck $\hat{H}$ *konstruktiv* so zuordnen, daß H und $\hat{H}$ *allgemeingültigkeitsgleich* sind.

Von der Gödel-Numerierung der Ausdrücke verlangen wir nunmehr, daß $Gö(H)$ aus H berechenbar ist, und daß bei jeder natürlichen Zahl m entweder die Nichtexistenz eines Ausdrucks H mit $Gö(H) = m$ oder aber *der* Ausdruck H mit $Gö(H) = m$ algorithmisch ermittelt werden kann. — Die Primzahlen werden der Größe nach numeriert:

$$2 = p_0, \quad 3 = p_1, \quad 5 = p_2, \ldots$$

Wir setzen

$$\varphi\left(2 \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} p_\lambda^{c_\lambda}\right) = 2 \cdot \prod_{\lambda=1}^{l-1} p_\lambda^{c_\lambda} \qquad \text{für beliebiges } l \geqq 1,\ c_\lambda \geqq 1;$$

$$\varphi\left(2^{p_g^\gamma} \cdot \prod_{\lambda=1}^{n} p_\lambda^{b_\lambda+1}\right) = 2^{p_g^{\gamma-1}} \cdot \prod_{\lambda=1}^{n} p_\lambda^{b_\lambda+1} \qquad \text{für } g \geqq \gamma \geqq 1,$$

falls es einen quantifikatorenfreien Ausdruck G mit $g = Gö(G)$ gibt, der genau die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ enthält und von der Belegung $[b_1, \ldots, b_n]$ erfüllt wird;

$$\varphi(2) = 2;$$

$$\varphi(0) = 1;$$

$$\varphi(m) = 0 \text{ sonst.}$$

Da sich bei jedem *quantifikatorenfreien* Ausdruck entscheiden läßt, ob eine vorgegebene Belegung ihn erfüllt oder nicht, ist diese Funktion φ, in der ein Stück Semantik arithmetisiert ist, *berechenbar*. Die Zahlen $2 \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} p_\lambda^{c_\lambda}$ mit $l \geqq 1$, $c_\lambda \geqq 1$ geben die (beschränkten) *Belegungen* wieder. Wir charakterisieren diese „Zahlen vom Typ (*)":

$$Bx_1 =_{\mathrm{Df}} f^2 x_1 \neq x_1 \wedge \exists x_2 \exists x_3 (x_2 \neq x_3 \wedge f x_2 = x_1 \wedge f x_3 = x_1).$$

Behauptung: $[b_1]\, Erf\, Bx_1$ genau dann, wenn es positive Zahlen $l, c_1, \ldots, c_l$ derart gibt, daß $b_1 = 2 \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} p_\lambda^{c_\lambda}$.

Beweis. Jede natürliche Zahl $2^\alpha \cdot \beta$ mit $\alpha = 0$ oder $\alpha \geqq 2$ und nicht durch 2 teilbarem β besitzt bei der Abbildung φ höchstens ein Urbild; 0 und 2 sind die Bilder je unendlich vieler Zahlen; $2 \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{c_\varkappa}$ schließlich ($k \geqq 1$, $c_k \geqq 1$) hat kein Urbild, wenn $\prod_{\varkappa=1}^{k-1} c_\varkappa = 0$, und andernfalls unendlich viele Urbilder.

Demnach besitzt b_1 *mindestens zwei Urbilder* genau dann, wenn b_1 vom Typ (*) oder $b_1 = 0$ oder $b_1 = 2$ ist. Da nun aber

$$\varphi^2(0) = \varphi(1) = 0, \qquad \varphi^2(2) = \varphi(2) = 2,$$

dagegen

$$\varphi^2(m) \leqq \varphi(m) < m \text{ bei jedem } m \text{ vom Typ } (*),$$

ist, *wie behauptet*, b_1 dann und nur dann vom Typ (*), wenn $\varphi^2(b_1) \neq b_1$ ist und b_1 mindestens zwei Urbilder hat.

Wir wenden uns der Konstruktion von $\hat{H}$ zu. Der vorgegebene Ausdruck H wird zunächst durch Generalisierungen zu einer *Aussage* abgeschlossen und diese in pränexe Normalform überführt. In der entstandenen Aussage $\Psi_0 H_0$ — mit quantifikatorenfreiem Kern H_0 — mögen die Variablen des Präfixes Ψ_0 der Reihe nach die Zeichen $x_1, \ldots, x_n$ sein ($n \geqq 1$); durch Umbenennungen läßt sich das erreichen. Alle diese (*allgemeingültigkeitsgleichen*) Umformungen kann man nach einem einheitlichen Verfahren vornehmen, bei dem $\Psi_0 H_0$ durch H eindeutig bestimmt ist. Als Ψ_ν bezeichnen wir (für $1 \leqq \nu \leqq n$) das auf $\forall x_\nu$ oder $\exists x_\nu$ folgende Endstück von Ψ_0; insbesondre ist Ψ_n leer. Wir setzen noch $Gö(H_0) = h$ und definieren der Reihe nach gewisse f-Ausdrücke als die „Reduzierten" der Ausdrücke $\Psi_n H_0, \Psi_{n-1} H_0, \ldots, \Psi_1 H_0, \Psi_0 H_0$:

$$Rd(H_0) =_{\mathrm{Df}} \exists x_{n+1} (f x_{n+1} = x_n \wedge \exists x_{n+2} f^{h-1} x_{n+2} = x_{n+1} \wedge \sim \exists x_{n+2} f^h x_{n+2} = x_{n+1}).$$

$$\left.\begin{aligned} Rd(\forall x_\nu \Psi_\nu H_0) &=_{\mathrm{Df}} \forall x_\nu (Bx_\nu \wedge f x_\nu = x_{\nu-1} \rightarrow Rd(\Psi_\nu H_0)), \\ Rd(\exists x_\nu \Psi_\nu H_0) &=_{\mathrm{Df}} \exists x_\nu (Bx_\nu \wedge f x_\nu = x_{\nu-1} \wedge Rd(\Psi_\nu H_0)), \end{aligned}\right\} \text{ für } n \geqq \nu \geqq 2.[1]$$

$$Rd(\forall x_1 \Psi_1 H_0) =_{\mathrm{Df}} \forall x_1 (x_1 \neq f x_1 = f^2 x_1 \rightarrow Rd(\Psi_1 H_0)),$$

$$Rd(\exists x_1 \Psi_1 H_0) =_{\mathrm{Df}} \exists x_1 (x_1 \neq f x_1 = f^2 x_1 \wedge Rd(\Psi_1 H_0)).$$

Als $\hat{H}$ wählen wir $Rd(\Psi_0 H_0)$.

[1]) Innerhalb von Bx_1 sind dabei selbstverständlich x_2 und x_3 etwa in x_{n+1} und x_{n+2} umzubenennen, ehe x_ν für x_1 eingesetzt wird.

Hilfssatz. Bildet man zu gegebenen natürlichen Zahlen $b_1, \ldots, b_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ für $1 \leqq \lambda \leqq \nu$ die Zahlen $b'_\lambda = 2 \cdot \prod_{\varkappa=1}^{\lambda} p_\varkappa^{b_\varkappa+1}$, so gilt:

$$[b_1, \ldots, b_\nu]\, Erf\, \Psi_\nu H_0 \textit{ genau dann, wenn } [b'_1, \ldots, b'_\nu]\, Erf\, Rd(\Psi_\nu H_0).$$

Beweis für $\nu = n$. (1) Wenn $[b'_1, \ldots, b'_n]\, Erf\, Rd(H_0)$, so gibt es eine Zahl c mit $\varphi(c) = b'_n$ derart, daß zwar die Gleichung $\varphi^{h-1}(d) = c$, nicht aber $\varphi^h(d) = c$ lösbar ist. Für c bestehen folgende beiden Möglichkeiten:

(a) $c = b'_n \cdot p_{n+1}^{c_{n+1}}$ mit $c_{n+1} \geqq 1$;

(b) $c = 2^{p_g} \cdot \frac{b'_n}{2}$, wobei g die GÖDEL-Nummer eines quantifikatorenfreien Ausdrucks G ist, der genau die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ enthält und für den gilt:

$$[b_1, \ldots, b_n]\, Erf\, G.$$

Fall (a) kann nicht eintreten, weil $\varphi^h(d) = c$ die Lösung $d = c \cdot \prod_{\lambda=n+1}^{n+h+1} p_\nu$ besäße. Nehmen wir also (b) mit dem genannten G an! Die *einzige* Zahl e mit $\varphi^{g-1}(e) = c$ ist $e = 2^{p_g^g} \cdot \frac{b'_n}{2}$ (I), und dieses e besitzt *kein* Urbild mehr (II). Wäre $h > g$, so erhielte man $c = \varphi^{h-1}(d) = \varphi^{g-1}(\varphi^{h-g}(d))$, also $\varphi^{h-g}(d) = e$ auf Grund von I, also $\varphi(\varphi^{h-g-1}(d)) = e$ — entgegen II. Und wäre $h < g$, so müßte, da $\varphi^h(d) = c$ unlösbar ist, erst recht $\varphi^{g-1}(d) = c$ unlösbar sein — entgegen I. So ergibt sich:

$$h = g,\ H_0 = G,\ [b_1, \ldots, b_n]\, Erf\, H_0.$$

(2) Wenn $[b_1, \ldots, b_n]\, Erf\, H_0$, so wird

$$\varphi(2^{p_h-1} \cdot b'_n) = b'_n \quad \text{und} \quad \varphi^{h-1}(2^{p_h^h-1} \cdot b'_n) = 2^{p_h-1} \cdot b'_n,$$

$$\text{und es gibt kein } m \text{ mit } \varphi^h(m) = 2^{p_h-1} \cdot b'_n.$$

Das besagt gerade: $[b'_1, \ldots, b'_n]\, Erf\, Rd(H_0)$.

Beweis für die übrigen ν durch Schluß von ν auf $\nu - 1$ $(n \geqq \nu \geqq 2)$. Für $\Psi_{\nu-1} = \forall x_\nu \Psi_\nu$ sind folgende Feststellungen gleichbedeutend:

$[b_1, \ldots, b_{\nu-1}]\, Erf\, \Psi_{\nu-1} H_0$.

Für jedes b_ν: $[b_1, \ldots, b_\nu]\, Erf\, \Psi_\nu H_0$.

Für jedes b_ν: $[b'_1, \ldots, b'_{\nu-1}, b'_{\nu-1} p_\nu^{b_\nu+1}]\, Erf\, Rd(\Psi_\nu H_0)$.

Für jedes b: Wenn b vom Typ (*) ist und $\varphi(b) = b'_{\nu-1}$ ist, so
$[b'_1, \ldots, b'_{\nu-1}, b]\, Erf\, Rd(\Psi_\nu H_0)$.

$[b'_1, \ldots, b'_{\nu-1}]\, Erf\, \forall x_\nu (Bx_\nu \wedge fx_\nu = x_{\nu-1} \to Rd(\Psi_\nu H_0))$.

$[b'_1, \ldots, b'_{\nu-1}]\, Erf\, Rd(\Psi_{\nu-1} H_0)$.

Ganz entsprechend verläuft der Nachweis für $\Psi_{\nu-1} = \exists x_\nu \Psi_\nu$.

Satz. *Der Ausdruck H ist allgemeingültig genau dann, wenn die f-Aussage $\widehat{H}$ wahr ist.*

Beweis. Bei der Abbildung φ hat 2 genau die Urbilder $2 \cdot 3^c$ $(c \geqq 0)$, und 2 ist das einzige m mit $\varphi(m) = m$. Für die Zahlen b der Form $2 \cdot 3^{b_1+1}$ ist demnach charakteristisch, daß $b \neq \varphi(b) = \varphi^2(b)$.

Im Falle $\Psi_0 = \forall x_1 \Psi_1$ erweisen sich folgende Feststellungen als gleichbedeutend:

$\Psi_0 H_0$ ist wahr.

Für jedes b_1: $[b_1]\, Erf\, \Psi_1 H_0$.

Für jedes b_1: $[2 \cdot 3^{b_1+1}]\, Erf\, Rd(\Psi_1 H_0)$
(Anwendung des Hilfssatzes mit $\nu = 1$).

Für jedes b: Wenn $b \neq \varphi(b) = \varphi^2(b)$, so $[b]\, Erf\, Rd(\Psi_1 H_0)$.

$Rd(\Psi_0 H_0)$ ist wahr.

Für $\Psi_0 = \exists x_1 \Psi_1$ verfährt man analog. Damit ist der Satz bewiesen, denn H und $\Psi_0 H_0$ waren ja allgemeingültigkeitsgleich.

(Eingegangen am 16. Dezember 1958)