Rationelle Begründung des Kalküls mit Summenzeichen und Produktzeichen.

Von

Harry Schmidt und Klaus Härtig.

Rationelle Begründung des Kalküls mit Summenzeichen und Produktzeichen.

Von

Harry Schmidt und Klaus Härtig.

Kurz vor dem Tode meines hochverehrten Lehrers Harry Schmidt (im September 1951) betrachteten er und ich die vorliegende Abhandlung - das Hauptergebnis mehrjähriger gemeinsamer Arbeit - als nahezu fertiggestellt. Beim Ausfüllen der wenigen Lücken war ich aber doch noch zu größeren Änderungen innerhalb aller Teil gezwungen. Trotzdem glaube ich, daß Herr Professor Schmidt die Arbeit auch in dieser Fassung als seine und meine anerkannt hätte.

kleiner Druck, volle Breite!

Halle, Januar 1952 K.H.

Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden.

Richard Dedekind.

normale Größe

In der vorliegenden Mitteilung versuchen wir, eine begrifflich strenge und methodisch konsequente Theorie solcher Funktionen ganzzahligen Arguments zu entwickeln, die mit Hilfe von Summenzeichen oder Produktzeichen dargestellt werden. Wir befreien uns dabei von der üblichen Einschränkung, daß die obere Summations- bzw. Multiplikationsgrenze nicht kleiner als die untere Summations- bzw. Multiplikationsgrenze sein dürfe; unter (mindestens) dieser Einschränkung hat LANDAU[1] z.B. von den Ergebnissen unseres § 2 die Formeln (21), (23), (36), (42), (48) und (49) bewiesen.

Zwar finden Summenzeichen und Produktzeichen als Darstellungsmittel vielfach Verwendung - allein ihre Benutzung im Kalkül, die weit weniger verbreitet ist, wäre zur endgültigen Ausrottung der inhaltsleeren Pünktchensymbolik noch wesentlich wünschenswerter.

[1] E. Landau, Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930; §8: Summen und Produkte, §9: Potenzen.

Vorbemerkungen.

1. Aus der Arithmetik setzen wir die Kenntnis der grundlegenden Aussagen über Gleichheit und Ungleichheit, Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division komplexer Zahlen voraus, also Definitionen folgenden Musters:

$$A + B + C = (A+B) + C$$

(worin A, B und C komplexe Zahlen bedeuten)

oder z.B. den für komplexe A, B, C_1, C_2, D_1, D_2 gültigen Satz

$$(AC_1 + BC_2) + (A\cdot D_1 + B\cdot D_2) = A\cdot(C_1 + D_1) + B\cdot(C_2 + D_2).$$

Von Aussagen über Potenzen benutzen wir lediglich die für jede komplexe Zahl C getroffene Festsetzung

$$C^2 = C \cdot C. \tag{1}$$

2. Aus der Analysis werden in §5 einige Eigenschaften der Funktionen $\log x$ $(x>0)$ und e^z herangezogen; wir werden dort alle diese benutzten Eigenschaften aufzählen.

3. Sind a und b reelle Zahlen, so denken wir uns das abgeschlossene Intervall $[a,b]$ als die Menge derjenigen reellen Zahlen r definiert, die sowohl der Bedingung $r \geq a$ als auch der Bedingung $r \leq b$ genügen; demnach ist $[a,b]$ genau für $b<a$ mit der leeren Menge identisch.

Ferner verstehen wir unter

$$[a,b]_0 \text{ bzw. } (a,b] \text{ bzw. } [a,b) \text{ bzw. } (a,b)$$

diejenige Teilmenge von $[a,b]$, deren Elemente die in $[a,b]$ enthaltenen

ganzen bzw. von a verschiedenen bzw. von b verschiedenen bzw. sowohl von a als auch von b verschiedenen

Zahlen sind.

4. Ist a eine reelle Zahl, so gibt es genau eine ganze Zahl $\underline{a}$ und genau eine zu $[0,1)$ gehörende reelle Zahl $\underset{\smile}{a}$ derart, daß

$$a = \lfloor a \rfloor + \underbrace{a} \tag{2}$$

gilt.

~~Aus~~ Aus $a \leqq b$ folgt $\lfloor a \rfloor \leqq \lfloor b \rfloor$. (3)

Ist n_0 eine natürliche Zahl, und variiert n auf der Menge der ganzen Zahlen, so ist jedem Wert von n genau eine zu $[0, n_0-1]_0$ gehörende ganze Zahl $R_{n_0}(n)$ derart zugeordnet, daß die Relation

$$n = \lfloor n/n_0 \rfloor \cdot n_0 + R_{n_0}(n) \tag{4}$$

zutrifft, nämlich

$$R_{n_0}(n) = \underbrace{n/n_0} \cdot n_0 \; ; \tag{4a}$$

für n auf $[0, n_0-1]_0$ gilt $\lfloor n/n_0 \rfloor = 0$. (4b)

Ferner hat man

$$\lfloor a \pm n \rfloor = \lfloor a \rfloor \pm n \; ; \; \underbrace{a \pm n} = \underbrace{a} \,. \tag{5}$$

5. Neben Veränderlichen, die jeweils auf einer Menge komplexer Zahlen variieren, werden wir Parameter. die jeweils aus einer Menge komplexer Zahlen wählbar sind, zu betrachten haben. Insbesondere sprechen wir von einer reellen bzw. ganzzahligen Veränderlichen oder einem reellen bzw. ganzzahligen Parameter, wenn die betreffende Menge nur reelle bzw. nur ganze Zahlen enthält.

Nimmt eine Veränderliche z eine ihrem Variabilitätsbereich angehörende Zahl α als Wert an, so schreiben wir in üblicher, ebenso bequemer wie inkorrekter Weise $z = \alpha$.

6. Unter einer auf einer nicht-leeren Zahlenmenge $\mathfrak{M}$ erklärten Funktion einer Veränderlichen verstehen wir stets eine auf $\mathfrak{M}$ eindeutig erklärte Funktion, deren Wertebereich ebenfalls eine Menge komplexer Zahlen ist. Die Funktion variiert auf ihrem Wertebereich, während die Funktionswerte, wie wir sagen wollen, in jeder Zahlenmenge liegen, die den Wertebereich enthält (insbesondere also in ihrem Wertebereich).

Durch Vorgabe einer auf $\mathfrak{M}$ erklärten Funktion wird zugleich für jede Teilmenge $\mathfrak{M}_0$ von $\mathfrak{M}$ eine auf $\mathfrak{M}_0$ erklärte Funktion geliefert - eine Aussage, die wir auch für leeres $\mathfrak{M}_0$ als zutreffend ansehen.

Eine auf $\mathfrak{M}$ erklärte Funktion ist auf $\mathfrak{M}$ ein-eindeutig, wenn sie jedes Element ~~von als Wert annimmt.~~ ihres Wertebereichs für genau ein Element von $\mathfrak{M}$ als Wert annimmt.

7. Die Rollen von Parametern und Veränderlichen sind in dem Sinn vertauschbar, daß,

wenn U und V Parameter, u und v Veränderliche sowie $f_1(u;v)$ und $f_2(u;v)$ für u auf $\mathfrak{U}$ und v auf $\mathfrak{V}$ erklärte Funktionen von u und v bedeuten,

die Identitäten

$$\begin{aligned}
f_1(u;v) &= f_2(u;v) \quad \text{für } u \text{ auf } \mathfrak{U}\,,\ v \text{ auf } \mathfrak{V},\\
f_1(u;U) &= f_2(u;U) \quad \text{für } u \text{ auf } \mathfrak{U}\,,\ U \text{ aus } \mathfrak{V},\\
f_1(U;V) &= f_2(U;V) \quad \text{für } U \text{ aus } \mathfrak{U}\,,\ V \text{ aus } \mathfrak{V},\\
f_1(U;v) &= f_2(U;v) \quad \text{für } U \text{ aus } \mathfrak{U}\,,\ v \text{ auf } \mathfrak{V}
\end{aligned}$$

sich gegenseitig bedingen, denn jede von ihnen besagt, daß die Gleichung

$$f_1(\sigma;\tau) = f_2(\sigma;\tau)$$

für jede zu $\mathfrak{U}$ gehörende Zahl σ und für jede zu $\mathfrak{V}$ gehörende Zahl τ besteht.

8. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, werden wir im Rahmen von Beweisführungen meistens darauf verzichten, jede auftretende Gleichung mit Angabe ihrer Gültigkeitsbedingungen zu versehen, die Anwendbarkeit bereits bekannter Relationen in jedem Einzelfall ausdrücklich hervorzuheben sowie die Existenz jeweis benutzter Hilfsgrößen unter den aus der Formulierung des einschlägigen Satzes ersichtlichen Voraussetzungen besonders zu bestätigen.

§ 1. Definition der Summe einer Funktion bei ganzzahligen Summationsgrenzen.

Mit N_1 und $N_2 \geqq N_1 - 1$ bezeichnen wir ganze Zahlen, mit N einen ganzzahligen Parameter, mit n und ν ganzzahlige Veränderliche sowie mit $F(\nu)$ eine für ν auf $[N_1, N_2]_0$ erklärte Funktion von ν.

Lemma. Bei vorgegebenem N aus $[N_1, N_2+1]_0$ erfüllt eine für n auf $[N_1-1, N_2]_0$ erklärte Funktion $s(N;n)$ von n genau dann die Forderungen

$$\left.\begin{array}{c} s(N;n) = s(N;n-1) + F(n) \\ \left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1, N_2]_0\right) \end{array}\right\} \quad (6)$$

und

$$\left.\begin{array}{c} s(N, N-1) = 0 \\ \left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0\right), \end{array}\right\} \quad (7)$$

wenn sie den Bedingungen

$$s(N;n) = \begin{cases} s(N;n+1) - F(n+1) & \text{für } n \text{ auf } [N_1-1, N-2]_0, \quad (8a) \\ 0 & \text{für } n = N-1 \quad (8b) \\ s(N;n-1) + F(n) & \text{für } n \text{ auf } [N, N_2]_0 \quad (8c) \end{cases}$$

genügt.

Beweis. Die Gleichungen (7) und (8b) stimmen miteinander überein. (6) ist für n auf $[N, N_2]_0$ mit (8c) identisch und geht für n auf $[N_1, N-1]_0$ nach Ersatz von n durch $n+1$ in die mit (8a) äqivalente Relation

$$s(N;n+1) = s(N;n) + F(n+1) \quad \text{für } n+1 \text{ auf } [N_1, N-1]_0$$

über.

Umgekehrt verwandelt sich, wenn man n durch $n-1$ ersetzt, die eben genannte, mit (8a) äquivalente Relation in die Gleichung

$$s(N;n) = s(N;n-1) + F(n) \quad \text{für } n \text{ auf } [N_1-1, N-1]_0,$$

die mit (8c) zu (6) zusammengefaßt werden kann.

Satz 1. Bei vorgegebenem N aus $[N_1, N_2+1]_0$ gibt es genau eine für n auf $[N_1-1, N_2]_0$ erklärte Funktion $s(N;n)$ von n derart, daß die Beziehungen (6) und (7) bestehen.

Beweis. 1.) Es gibt bei jedem N_0 aus $[N_1-1, N-1]_0$ genau eine für n auf $[N_0, N-1]_0$ erklärte Funktion $s_{N_0}(n)$ von n, die den Bedingungen

$$s_{N_0}(n) = \begin{cases} s_{N_0}(n+1) - F(n+1) & \text{für } n \text{ auf } [N_0, N-2]_0, \quad (9a) \\ 0 & \text{für } n = N-1 \quad (9b) \end{cases}$$

genügt; die Richtigkeit dieser Aussage ist nämlich für $N_0 = N-1$ trivial, und ist sie für $N_0 = N_0^{(0)}$ aus $[N_1, N-1]_0$ erwiesen, so auch für $N_0 = N_0^{(0)} - 1$:

Bedeutet $t(n)$ eine für n auf $[N_0^{(0)}, N-1]_0$ erklärte Funktion von n, so sind nach unserer Annahme die Forderungen

$$t(n) = \begin{cases} t(n+1) - F(n+1) & \text{für } n \text{ auf } [N_0^{(0)}, N-2]_0, \\ 0 & \text{für } n = N-1 \end{cases}$$

genau für

$$t(n) = s_{N_0^{(0)}}(n) \qquad (n \text{ auf } [N_0^{(0)}, N-1]_0) \qquad (10)$$

erfüllt. Wir setzen nun

$$s_{N_0^{(0)}-1}(n) = \begin{cases} s_{N_0^{(0)}}(N_0^{(0)}) - F(N_0^{(0)}) & \text{für } n = N_0^{(0)}-1, \quad (11a) \\ s_{N_0^{(0)}}(n) & \text{für } n \text{ auf } [N_0^{(0)}, N-1]_0 \quad (11b) \end{cases} \quad (11)$$

und zeigen, daß genau diese Funktion den Bedingungen (9a) und (9b) mit $N_0 = N_0^{(0)} - 1$ oder den ihnen äquivalenten Bedingungen

$$s_{N_0^{(0)}-1}(n) = \begin{cases} s_{N_0^{(0)}-1}(N_0^{(0)}) - F(N_0^{(0)}) & \text{für } n = N_0^{(0)}-1, \quad (12a) \\ s_{N_0^{(0)}-1}(n+1) - F(n+1) & \text{für } n \text{ auf } [N_0^{(0)}, N-2]_0, \quad (12b) \\ 0 & \text{für } n = N-1 \quad (12c) \end{cases} \quad (12)$$

genügt:

(11) impliziert (12), denn (11a) läßt sich mit Hilfe von (11b) in (12a) umformen, während (12b) und (12c) wegen (10) aus (11b) folgen.

~~(12) impliziert (11), denn von (12b) und (12c) führt~~

(12) impliziert (11), denn von (12b) und (12c) führt (10) zu (11b), und (11a) läßt sich im Hinblick auf (11b) aus (12a) gewinnen.

2.) Ferner gibt es bei jedem N_0 aus $[N-1, N_2]_0$ genau eine für n auf $[N-1, N_0]_0$ erklärte Funktion $s_{N_0}(n)$ von n, die den Bedingungen

$$s_{N_0}(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = N-1, \quad (13a) \\ s_{N_0}(n-1) + F(n) & \text{für } n \text{ auf } [N, N_0]_0 \quad (13b) \end{cases}$$

genügt; die Richtigkeit dieser Aussage ist nämlich für $N_0 = N-1$ trivial, und ist sie für $N_0 = N_0^{(0)}$ aus $[N-1, N_2-1]_0$ erwiesen, so auch für $N_0 = N_0^{(0)} + 1$:

Bedeutet $t(n)$ eine für n auf $[N-1, N_0^{(0)}]_0$ erklärte Funktion von n, so sind nach unserer Annahme die Forderungen

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = N-1, \\ t(n-1) + F(n) & \text{für } n \text{ auf } [N, N_0^{(0)}]_0 \end{cases}$$

genau für

$$t(n) = s_{N_0^{(0)}}(n) \qquad (n \text{ auf } [N-1, N_0]_0) \qquad (14)$$

erfüllt. Wir setzen nun

$$s_{N_0^{(0)}+1}(n) = \begin{cases} s_{N_0^{(0)}}(n) & \text{für } n \text{ auf } [N-1, N_0^{(0)}]_0, \quad (15a) \\ s_{N_0^{(0)}}(N_0^{(0)}) + F(N_0^{(0)}+1) & \text{für } n = N_0^{(0)} + 1 \quad (15b) \end{cases} \qquad (15)$$

und zeigen, daß genau diese Funktion den Bedingungen (13a) und (13b) mit $N_0 = N_0^{(0)} + 1$ oder den ihnen äquivalenten Bedingungen

$$s_{N_0^{(0)}+1}(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = N-1 \quad (16a) \\ s_{N_0^{(0)}+1}(n-1) + F(n) & \text{für } n \text{ auf } [N, N_0^{(0)}]_0, \quad (16b) \\ s_{N_0^{(0)}+1}(N_0^{(0)}) + F(N_0^{(0)}+1) & \text{für } n = N_0^{(0)} + 1 \quad (16c) \end{cases} \qquad (16)$$

genügt:

einrücken

(15) impliziert (16), denn aus (15a) und (14) folgen (16a) und (16b), während sich (15b) mit Hilfe von (15a) in (16c) umformen läßt.

(16) impliziert (15), denn von (16a) und (16b) führt (14) zu (15a), und (15b) läßt sich unter Benutzung von (15a) aus (16c) gewinnen.

3.) Weil (8a) und (8b) keine Aussagen über die Funktionswerte $s(N;n)$ bei n aus $[N_1N_2]_0$ enthalten, erfüllt[1] eine für n auf $[N_1-1, N_2]_0$ erklärte Funktion $s(N;n)$ die Forderungen (8a) und (8b) genau dann, wenn sie für n auf $[N_1-1, N-1]_0$ mit $s_{N_1-1}(n)$ übereinstimmt.

Weil ferner (8b) und (8c) keine Aussagen über die Funktionswerte $s(N;n)$ bei n aus $[N_1-1, N-2]_0$ enthalten, erfüllt[2] eine für n auf $[N_1-1, N_2]_0$ erklärte Funktion $s(N;n)$ die Forderungen (8b) und (8c) genau dann, wenn sie für n auf $[N-1, N_2]_0$ mit $s_{N_2}(n)$ übereinstimmt.

Weil schließlich $s_{N_1-1}(N-1) = 0 = s_{N_2}(N-1)$ gilt, dürfen wir

$$s(N;n) = \begin{cases} s_{N_1-1}(n) & \text{für } n \text{ auf } [N_1-1, N-1]_0, \\ s_{N_2}(n) & \text{für } n \text{ auf } [N-1, N_2]_0 \end{cases}$$

setzen;
da (von den für n auf $[N_1-1, N_2]_0$ erklärten Funktionen von n) genau die Funktion den Bedingungen (8a) und (8b) und (8c) genügt, ist im Hinblick auf das Lemma die Behauptung bewiesen.

Unter Einführung des Summenzeichens $\sum\limits_{\nu=N}^{n}$ mit der unteren Summationsgrenze N, der variablen oberen Summationsgrenze n sowie dem Summationsindex ν setzen wir nunmehr

$$\left.\begin{aligned} s(N;n) &= \sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) \\ \big(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ & n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\big) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

---

[1] wegen 1.) mit $N_0 = N_1 - 1$.
[2] wegen 2.) mit $N_0 = N_2$.

und bezeichnen die rechte Seite als die von N bis zu variablem n erstreckte Summe des Summanden $F(\nu)$. Gemäß (8a),(8b),(8c) besteht dann bei N aus $[N_1, N_2+1]_0$ die Beziehung

$$\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \begin{cases} \sum_{\nu=N}^{n+1} F(\nu) - F(n+1) & \text{für } n \text{ auf } [N_1-1, N-2]_0, & (18a) \\ 0 & \text{für } n = N-1, & (18b) \\ \sum_{\nu=N}^{n-1} F(\nu) + F(n) & \text{für } n \text{ auf } [N, N_2]_0, & (18c) \end{cases}$$

die in jedem Spezialfall eine expliziete Darstellung der Summe von $F(\nu)$ durch die Werte von $F(\nu)$ ermöglicht; man findet z.B.

$$\sum_{\nu=N}^{N-3} F(\nu) = -F(N-1) - F(N-2) \qquad \text{für } N \text{ aus } [N_1+2, N_2+1]_0, \qquad (19a)$$

$$\sum_{\nu=N}^{N-2} F(\nu) = -F(N-1) \qquad \text{für } N \text{ aus } [N_1+1, N_2+1]_0, \qquad (19b)$$

$$\sum_{\nu=N}^{N-1} F(\nu) = 0 \qquad \text{für } N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0, \qquad (19c)$$

$$\sum_{\nu=N}^{N} F(\nu) = F(N) \qquad \text{für } N \text{ aus } [N_1, N_2]_0, \qquad (19d)$$

$$\sum_{\nu=N}^{N+1} F(\nu) = F(N) + F(N+1) \qquad \text{für } N \text{ aus } [N_1, N_2-1]_0. \qquad (19e)$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ nicht-leere Mengen ganzer Zahlen, unter n_1 bzw. n_2 einen aus $\mathfrak{N}_1$ bzw. $\mathfrak{N}_2$ wählbaren Parameter, unter N'_{n_1,n_2} und $N''_{n_1,n_2} \geqq N'_{n_1,n_2}-1$ ganze Zahlen, unter $\Phi(n_1, n_2; \nu)$ eine für ν auf $[N'_{n_1,n_2}, N''_{n_1,n_2}]_0$ erklärte Funktion von ν, und fordern wir schließlich, daß

$$\left.\begin{array}{l} n_1 \text{ in } [N'_{n_1,n_2}, N''_{n_1,n_2}+1]_0 \\ \text{und } n_2 \text{ in } [N'_{n_1,n_2}-1, N''_{n_1,n_2}]_0 \end{array}\right\} \quad (20a)$$

enthalten sein soll, so können wir die durch die Relation

$$\left.\begin{array}{c} S_{n_1,n_2}(N;n) = \sum\limits_{\nu=N}^{n} \Phi(n_1,n_2;\nu) \\ \left(\begin{array}{l} n_1 \text{ aus } \mathfrak{N}_1,\ n_2 \text{ aus } \mathfrak{N}_2; \\ N \text{ aus } [N'_{n_1,n_2}, N''_{n_1,n_2}+1]_0, \\ n \text{ auf } [N'_{n_1,n_2}-1, N''_{n_1,n_2}]_0 \end{array}\right) \end{array}\right\} \quad (20b)$$

erklärten Funktionen von n zu der Festsetzung

$$\left.\begin{array}{c} T(n_1,n_2) = S_{n_1,n_2}(n_1;n_2) \\ (n_1 \text{ aus } \mathfrak{N}_1,\ n_2 \text{ aus } \mathfrak{N}_2) \end{array}\right\} \quad (20c)$$

und diese wiederum zu der <u>Definition</u>

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{\nu=N}^{n} \Phi(N,n;\nu) = T(N,n) \\ (N \text{ aus } \mathfrak{N}_1,\ n \text{ auf } \mathfrak{N}_2) \end{array}\right\} \quad (20d)$$

heranziehen; die linke Seite von (20d) bezeichnen wir als die von N bis zu variablem n erstreckte Summe des Summanden $\Phi(N,n;\nu)$.

Die Forderungen (20a) besagen übrigens dasselbe wie

$$N'_{n_1,n_2} \leq \min\{n_1, n_2+1\} \text{ und } N''_{n_1,n_2} \geq \max\{n_1-1, n_2\}.$$

§ 2. Grundformeln des Summenkalküls.

Für den Kalkül mit Summenzeichen ist die Kenntnis von Eigenschaften erforderlich, die die als Funktion von n aufgefaßte Summe $\sum\limits_{\nu=N}^{n} F(\nu)$ auf einer möglichst umfassenden Teilmenge ihres Definitionsbereichs besitzt. Hier sind natürlich zunächst die definierenden Eigenschaften (6) und (7) zu nennen: im Hinblick auf (17) nimmt (6) die Form

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum\limits_{\nu=N}^{n-1} F(\nu) + F(n) \\ (N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1, N_2]_0) \end{array}\right\} \quad (21)$$

an, während sich (7) mit (19c) deckt.

Diejenige Teilaussage des Satzes 1, die (21) und (19c) zu Satz 1 ergänzt, formulieren wir neu als

Satz 1*. Bedeutet $S(N;n)$ bei N aus $[N_1, N_2+1]_0$ eine für n auf $[N_1-1, N_2]_0$ erklärte Funktion von n, die den Forderungen

$$S(N;n-1) + F(n) = S(N;n)$$
$$\left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0\,,\ n \text{ auf } [N_1, N_2]_0\right)$$

und

$$S(N;N-1) = 0 \qquad \left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0\right)$$

genügt, so besteht die Identität

$$\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = S(N;n)$$
$$\left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0\,,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right).$$

Satz 2. Sind $F_1(\nu)$ und $F_2(\nu)$ für ν auf $[N_1, N_2]_0$ erklärte Funktionen von ν, so besteht bei N aus $[N_1, N_2+1]_0$ die Beziehung

$$\sum_{\nu=N}^{n} F_1(\nu) = \sum_{\nu=N}^{n} F_2(\nu) \tag{22}$$

erstens für jeden Wert der auf $[N_1-1, N-2]_0$ variierenden Veränderlichen n, auf den die Aussage

$$F_1(\nu) = F_2(\nu) \quad \text{für } \nu \text{ auf } [n+1, N-1]_0 \tag{22a}$$

zutrifft,
zweitens für $n = N-1$ und
drittens für jeden Wert der auf $[N, N_2]_0$ variierenden Veränderlichen n, auf den die Aussage

$$F_1(\nu) = F_2(\nu) \quad \text{für } \nu \text{ auf } [N, n]_0 \tag{22b}$$

zutrifft. [1]

[1] oder für jeden Wert der auf $[N_1-1, N_2]_0$ variierenden Veränderlichen n, auf den die Aussage

$$F_1(\nu) = F_2(\nu) \quad \text{für } \nu \text{ auf } \left[\min\{N, n+1\}, \max\{N-1, n\}\right]_0$$

zutrifft.

Beweis. Die kleinste der Zahlen n_0 aus $[N_1-1, N-1]_0$ mit

$$F_1(\nu) = F_2(\nu) \quad \text{für } \nu \text{ auf } [n_0+1, N-1]_0$$

nennen wir n_1 ; dann ist (22a) für n auf $[N_1-1, n_1-1]_0$ falsch und für n auf $[n_1, N-2]_0$ richtig.

Die größte der Zahlen n_0 aus $[N-1, N_2]_0$ mit

$$F_1(\nu) = F_2(\nu) \quad \text{für } \nu \text{ auf } [N, n_0]_0$$

nennen wir n_2 ; dann ist (22b) für n auf $[n_1, n_2]_0$ richtig und für n auf $[n_2+1, N_2]_0$ falsch.

Wir haben demnach (22) für n auf $[n_1, n_2]_0$ zu beweisen. Wegen

$$F_1(\nu) = F_2(\nu) \quad \text{für } \nu \text{ auf } [n_1+1, n_2]_0$$

gilt tatsächlich

$$\sum_{\nu=N'}^{n} F_1(\nu) = \sum_{\nu=N'}^{n} F_2(\nu)$$

für N' aus $[n_1+1, n_2+1]_0$ – also insbesondere $N' = N$ – und n auf $[n_1, n_2]_0$.

Satz 3. Unter der Voraussetzung

$$F(\nu) > 0 \quad \text{für } \nu \text{ auf } [N_1, N_2]_0$$

gilt bei N aus $[N_1, N_2]_0$

$$\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) > 0 \text{ genau für } n \text{ auf } [N_1, N_2]_0 .$$

Beweis. Für $n = N-1$ trifft die Behauptung

$$\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) \leqq 0$$

wegen (18b) zu, und ist sie für $n = n^{(0)}$ (mit zu $[N_1, N-1]_0$ gehörendem $n^{(0)}$) richtig, dann wegen (18a) auch für $n = n^{(0)}-1$.

Für $n = N$ trifft die Behauptung

$$\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) > 0$$

wegen (19d) zu und ist sie für $n = n^{(0)}$ (mit zu $[N, N_2-1]_0$ gehörendem $n^{(0)}$) richtig, dann wegen (18c) auch für $n = n^{(0)}+1$.

<u>Satz 4a.</u> Bezeichnen c_1 und c_2 komplexe Zahlen sowie $F_1(\nu)$ und $F_2(\nu)$ für ν auf $[N_1, N_2]_0$ erklärte Funktionen von ν, so ist

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=N}^{n}\left\{c_1\cdot F_1(\nu)+c_2\cdot F_2(\nu)\right\}=c_1\cdot\sum_{\nu=N}^{n}F_1(\nu)+c_2\cdot\sum_{\nu=N}^{n}F_2(\nu)\\ &\qquad\left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0\,,\; n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right).\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

<u>Beweis.</u> Mit

$$F(\nu)=c_1\cdot F_1(\nu)+c_2\cdot F_2(\nu) \quad\text{und}\quad S(N;n)=c_1\cdot\sum_{\nu=N}^{n}F_1(\nu)+c_2\cdot\sum_{\nu=N}^{n}F_2(\nu)$$

ergibt sich bei Beachtung von (21) bzw. (19c)

$$\begin{aligned}S(N;n-1)+F(n)&=\left\{c_1\cdot\sum_{\nu=N}^{n-1}F_1(\nu)+c_2\cdot\sum_{\nu=N}^{n-1}F_2(\nu)\right\}+\left\{c_1\cdot F_1(n)+c_2\cdot F_2(n)\right\}\\ &=c_1\cdot\left\{\sum_{\nu=N}^{n-1}F_1(\nu)+F(n)\right\}+c_2\cdot\left\{\sum_{\nu=N}^{n-1}F(\nu)+F(n)\right\}\\ &=c_1\cdot\sum_{\nu=N}^{n}F(\nu)+c_2\cdot\sum_{\nu=N}^{n}F(\nu)=S(N;n)\end{aligned}$$

bzw.

$$S(N;N-1)=c_1\cdot\sum_{\nu=N}^{N-1}F_1(\nu)+c_2\cdot\sum_{\nu=N}^{N-1}F_2(\nu)=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0;$$

damit ist auf Grund von Satz 1* die Behauptung bewiesen.

<u>Folgerungen.</u> Mit $c_1=c$ und $c_2=0$ sowie mit $F_1(\nu)=F(\nu)$ und $F_2(\nu)=1$ für ν auf $[N_1, N_2]_0$ wird (23) zu

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=N}^{n}c\cdot F(\nu)=c\cdot\sum_{\nu=N}^{n}F(\nu)\\ &\left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0\,,\; n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right),\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

ferner mit $c_1=1$ und $c_2=\pm 1$ zu

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=N}^{n}\left\{F_1(\nu)\pm F_2(\nu)\right\}=\sum_{\nu=N}^{n}F_1(\nu)\pm\sum_{\nu=N}^{n}F_2(\nu)\\ &\left(N \text{ aus } [N_1, N_2]_0\,,\quad n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right);\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

wählt man schließlich $c=0$ und $F(\nu)=F_1(\nu)=F_2(\nu)=0$ ~~und~~ für jeden Wert von ν, dann geht sowohl (24) als auch (25) in

$$\sum_{\nu=N}^{n}0=0 \qquad (26)$$

über.

Satz 4b. Seien M_1 und $M_2 \geqq M_1-1$ ganze Zahlen, M ein ganzzahliger Parameter, m und μ ganzzahlige Veränderliche sowie $F_0(\nu,\mu)$ eine für ν auf $[N_1,N_2]_0$ und μ auf $[M_1,M_2]_0$ erklärte Funktion von ν und μ. Dann kann

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{\nu=N}^{n}\left\{\sum_{\mu=M}^{m}F_0(\nu,\mu)\right\}=\sum_{\mu=M}^{m}\left\{\sum_{\nu=N}^{n}F_0(\nu,\mu)\right\}\\ \left(\begin{array}{ll}M \text{ aus } [M_1,M_2+1]_0, & m \text{ auf } [M_1-1,M_2]_0;\\ N \text{ aus } [N_1,N_2+1]_0, & n \text{ auf } [N_1-1,N_2]_0\end{array}\right)\end{array}\right\} \quad (27)$$

gesetzt, d.h. die Reihenfolge der Summation in Bezug auf ν und μ vertauscht werden.

Beweis. Mit

$$F(\nu)=\sum_{\mu=M}^{m}F_0(\nu,\mu) \quad \text{und} \quad S(N;n)=\sum_{\mu=M}^{m}\left\{\sum_{\nu=N}^{n}F_0(\nu,\mu)\right\}$$

findet man bei Beachtung von (25) und (21) einerseits

$$\begin{aligned}S(N;n-1)+F(n)&=\sum_{\mu=M}^{m}\left\{\sum_{\nu=N}^{n-1}F_0(\nu,\mu)\right\}+\sum_{\mu=M}^{m}F_0(n,\mu)\\&=\sum_{\mu=M}^{m}\left\{\sum_{\nu=N}^{n-1}F_0(\nu,\mu)+F_0(n,\mu)\right\}=\sum_{\mu=M}^{m}\left\{\sum_{\nu=N}^{n}F_0(\nu,\mu)\right\}=S(N;n),\end{aligned}$$

mit Hilfe von (19c) und (26) andererseits

$$S(N;N-1)=\sum_{\mu=M}^{m}\left\{\sum_{\nu=N}^{N-1}F_0(\nu,\mu)\right\}=\sum_{\mu=M}^{m}0=0,$$

so daß Satz 1* anwendbar ist.

Folgerung. Ist c_μ eine für μ auf $[M_1,M_2]_0$ erklärte Funktion von μ, und ist $F_\mu(\nu)$ eine für μ auf $[M_1,M_2]_0$ und ν auf $[N_1,N_2]_0$ erklärte Funktion von ν und μ, so ergibt sich aus (27) im Hinblick auf (24) die Beziehung

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{\nu=N}^{n}\left\{\sum_{\mu=M}^{m}c_\mu\cdot F_\mu(\nu)\right\}=\sum_{\mu=M}^{m}\left\{c_\mu\cdot\sum_{\nu=N}^{n}F_\mu(\nu)\right\}\\ \left(\begin{array}{ll}M \text{ aus } [M_1,M_2+1]_0, & m \text{ auf } [M_1-1,M_2]_0;\\ N \text{ aus } [N_1,N_2+1]_0, & n \text{ auf } [N_1-1,N_2]_0\end{array}\right),\end{array}\right\} \quad (28)$$

die (23) als Spezialfall enthält.

Satz 5. Sind n_1 und $n_2 \geqq n_1 - 1$ ganze Zahlen, und bedeutet M einen ganzzahligen Parameter, C einen komplexen Parameter sowie $f(v)$ eine für v auf $[n_1, n_2+1]_0$ erklärte Funktion von v, so gilt die Umformung

$$\sum_{v=N}^{n}\Big[f(v)\cdot F(v)\Big] = f(n+1)\cdot\Big\{C+\sum_{v=M}^{n}F(v)\Big\} - f(N)\cdot\Big\{C+\sum_{v=M}^{N-1}F(v)\Big\}$$

$$- \sum_{v=N}^{n}\Big[\big\{f(v+1)-f(v)\big\}\cdot\Big\{C+\sum_{\mu=M}^{v}F(\mu)\Big\}\Big]$$

$$\left(\begin{array}{l} M \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0\,;\; N \text{ aus } \big[\max\{n_1,N_1\},\, \min\{n_2,N_2\}+1\big]_0\,, \\ \qquad\qquad n \text{ auf } \big[\max\{n_1,N_1\}-1,\, \min\{n_2,N_2\}\big]_0 \end{array}\right),$$

die unter den Einschränkungen $C=0$ und n auf $[N, \min\{n_2, N_2\}]_0$ als <u>Abelsche Transformation durch partielle Summation</u> bekannt ist.

<u>Beweis.</u> Wir bezeichnen, wie gewohnt, die rechte Seite der zu beweisenden Formel mit $S(N;n)$ und erhalten wegen

$$f(n)\cdot\Big\{C+\sum_{v=M}^{n-1}F(v)\Big\} + f(n)\cdot F(n) = f(n)\cdot\Big\{C+\sum_{v=M}^{n}F(v)\Big\}$$

$$= f(n+1)\cdot\Big\{C+\sum_{v=M}^{n}F(v)\Big\} - \big\{f(n+1)-f(n)\big\}\cdot\Big\{C+\sum_{\mu=M}^{n}F(\mu)\Big\}$$

zunächst

$$S(N;n-1) + f(n)\cdot F(n) = f(n+1)\Big\{C+\sum_{v=M}^{n}F(v)\Big\} - f(N)\Big\{C+\sum_{v=M}^{N-1}F(v)\Big\}$$

$$-\left(\sum_{v=N}^{n-1}\Big[\big\{f(v+1)-f(v)\big\}\cdot\Big\{C+\sum_{\mu=M}^{v}F(\mu)\Big\}\Big] + \big\{f(n+1)-f(n)\big\}\cdot\Big\{C+\sum_{\mu=M}^{n}F(\mu)\Big\}\right)$$

$$= S(N;n)\,;$$

ferner wird

$$S(N;n-1) = f(N)\cdot\Big\{C+\sum_{v=M}^{N-1}F(v)\Big\} - f(N)\cdot\Big\{C+\sum_{v=M}^{N-1}F(v)\Big\} - 0 = 0,$$

so daß die Behauptung gemäß Satz 1* richtig ist.

<u>Folgerungen aus Satz 5.</u>

1. Wir bezeichnen mit L einen Parameter aus $[n_1, n_2+1]_0$, mit $f_1(v)$ eine für v auf $[n_1, n_2]_0$ erklärte Funktion von v, mit $f_2(v)$ eine für v auf $[N_1, N_2]_0$ erklärte Funktion von v, dann nimmt (29), wenn man

$$C=0,\quad f(\nu)=\sum_{\mu=L}^{\nu-1} f_1(\mu) \quad \text{für } \nu \text{ auf } [n_1, n_2+1]_0$$

und

$$F(\nu)=f_2(\nu) \qquad \text{für } \nu \text{ auf } [N_1, N_2]_0$$

setzt, die Form

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=N}^{n}\left[f_1(\nu)\cdot\sum_{\mu=M}^{\nu} f_2(\mu)+f_2(\nu)\cdot\sum_{\mu=L}^{\nu-1} f_1(\mu)\right]=\sum_{\nu=L}^{n} f_1(\nu)\cdot\sum_{\nu=M}^{n} f_2(\nu)-\sum_{\nu=L}^{N-1} f_1(\nu)\cdot\sum_{\nu=M}^{N-1} f_2(\nu)\\ &\qquad\begin{pmatrix} L \text{ aus } [n_1, n_2+1]_0,\ M \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0;\\ N \text{ aus } [\max\{n_1, N_1\}, \min\{n_2, N_2\}+1]_0,\\ n \text{ auf } [\max\{n_1, N_1\}-1, \min\{n_2, N_2\}]_0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

an; für $L=M$ notieren wir den Spezialfall

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=N}^{n}\left[\{F(\nu)\}^2\right]=\Big\{\sum_{\nu=M}^{n} F(\nu)\Big\}^2-\Big\{\sum_{\nu=M}^{N-1} F(\nu)\Big\}^2-2\sum_{\nu=N}^{n}\Big[F(\nu)\cdot\sum_{\mu=M}^{\nu-1} F(\mu)\Big]\\ &\Big(M \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0;\ N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\Big).\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

2a. Mit $C=0$ und $f(\nu)=1$ für jeden Wert von ν reduziert sich (29) wegen (26) auf die Identität

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu)=\sum_{\nu=M}^{n} F(\nu)-\sum_{\nu=M}^{N-1} F(\nu)\\ &\Big(M \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0;\ N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\Big)\end{aligned}\right\}\quad(32a)$$

aus der wir auch ihr Gegenstück

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu)=\sum_{\nu=N}^{M} F(\nu)-\sum_{\nu=n+1}^{M} F(\nu)\\ &\Big(M \text{ aus } [N_1-1, N_2]_0;\ N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\Big)\end{aligned}\right\}\quad(32b)$$

herleiten können: (32a) ist ja gleichbedeutend mit

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=J}^{K-1} F(\nu)=\sum_{\nu=L}^{K-1} F(\nu)-\sum_{\nu=L}^{J-1} F(\nu)\\ &\text{worin } J \text{ und } K \text{ und } L \text{ Parameter aus } [N_1, N_2+1]_0 \text{ sind;}\end{aligned}\right\}\quad(*)$$

~~worin und und Parameter aus sind;~~
ersetzt man den aus $[N_1-1, N_2]_0$ wählbaren Parameter $J-1$ durch die auf $[N_1-1, N_2]_0$ variierende Veränderliche n, so geht (*) mit $K-1=M$ und $L=N$ in

$$\sum_{\nu=n+1}^{M} F(\nu) = \sum_{\nu=N}^{M} F(\nu) - \sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) ,$$

also in (32b), über.

2b. Ferner erhalten wir aus (*) mit $K=N+1$ und $L=N+1$ nach Ersatz des Parameters J durch die Variable n die Identität

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=n}^{N} F(\nu) = -\sum_{\nu=N+1}^{n-1} F(\nu) \\ &\left(N \text{ aus } [N_1-1, N_2]_0 ,\ n \text{ auf } [N_1, N_2+1]_0\right), \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

in der – wie schon in (32b) – die Summe der Funktion bei variabler <u>unterer</u> Summationsgrenze auftritt; diese Summe genügt der Funktionalgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=n}^{N} F(\nu) = F(n) + \sum_{\nu=n+1}^{N} F(\nu) \\ &\left(N \text{ aus } [N_1-1, N_2]_0 ,\ n \text{ auf } [N_1, N_2]_0\right), \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

die aus (*) mit $K-1=N$ hervorgeht, wenn man erst $J=L+1$ wählt [1] und dann die Variable n an die Stelle des Parameters L setzt. Von (34) gelangen wir über

$$\sum_{\nu=n}^{N} F(\nu) = F(n) + \sum_{\nu=n+1}^{N-1} F(\nu) + F(N)$$

zu

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) + \sum_{\nu=n}^{N} F(\nu) = F(n) + F(N) \\ &\left(N \text{ aus } [N_1, N_2]_0 ,\ n \text{ auf } [N_1, N_2]_0\right), \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

indem wir (32b) mit $M=N-1$ anwenden.

2c. Schließlich setzen wir in (*) $J=M$ und $L=N$, führen statt des Parameters $K-1$ die Variable n ein und erhalten

[1] natürlich nur bei L aus $[N_1, N_2]_0$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum_{\nu=N}^{M-1} F(\nu) + \sum_{\nu=M}^{n} F(\nu) \\ &\left(M \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0 ;\ N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0 ,\, n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right). \end{aligned}\right\} (36)$$

(34) oder (21) verhilft uns von (36) zu

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum_{\nu=N}^{M-1} F(\nu) + F(M) + \sum_{\nu=M+1}^{n} F(\nu) \\ &\left(M \text{ aus } [N_1, N_2]_0 ;\ N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0 ,\, n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right). \end{aligned}\right\} (37)$$

Eine Verallgemeinerung von (36) ist der

Satz: Sind L_1 und $L_2 \geqq L_1$ ganze Zahlen, und liegen für λ aus $[L_1, L_2]_0$ die Zahlen M_λ in $[N_1, N_2+1]_0$, so ist

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=M_L}^{M_\ell-1} F(\nu) = \sum_{\lambda=L}^{\ell-1} \sum_{\nu=M_\lambda}^{M_{\lambda+1}-1} F(\nu) \\ &\left(M_\lambda \text{ in } [N_1, N_2+1]_0 \text{ für } \lambda \text{ auf } [L_1, L_2]_0 ;\, L \text{ aus } [L_1, L_2]_0 ,\, \ell \text{ auf } [L_1, L_2]_0\right). \end{aligned}\right\} (38)$$

Zum Beweis setzen wir

$$\Phi(\ell) = \sum_{\nu=M_\ell}^{M_{\ell+1}-1} F(\nu) \qquad \text{für } \ell \text{ auf } [L_1, L_2-1]_0$$

und

$$S(L;\ell) = \sum_{\nu=M_L}^{M_{\ell+1}-1} F(\nu) \qquad \text{für } L \text{ aus } [L_1, L_2]_0 ,\, \ell \text{ auf } [L_1-1, L_2-1]_0 ;$$

wir finden erstens - mit Hilfe von (36) -

$$S(L;\ell-1) + \Phi(\ell) = \sum_{\nu=M_L}^{M_\ell-1} F(\nu) + \sum_{\nu=M_\ell}^{M_{\ell+1}-1} F(\nu) = \sum_{\nu=M_L}^{M_{\ell+1}-1} F(\nu) = S(L;\ell)$$

$$\text{für } L \text{ aus } [L_1, L_2]_0 ,\, \ell \text{ auf } [L_1, L_2-1]_0 ,$$

und zweitens wird

$$S(L;L-1) = \sum_{\nu=M_L}^{M_L-1} F(\nu) = 0 \qquad \text{für } L \text{ aus } [L_1, L_2]_0 ;$$

gemäß Satz 1* besteht demnach die Relation

$$S(L;\ell)=\sum_{\nu=L}^{\ell}\Phi(\lambda) \qquad \left(L \text{ aus } [L_1,L_2]_0,\ \ell \text{ auf } [L_1-1,L_2-1]_0\right),$$

die nach Ersatz von ℓ durch $\ell-1$ in (38) übergeht.

3. Mit $C=0$ und $f(\nu)=\nu$ für jeden Wert von ν wird (29) zu

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\nu=N}^{n}\nu\cdot F(\nu)=(n+1)\sum_{\nu=M}^{n}F(\nu)-N\cdot\sum_{\nu=M}^{N-1}F(\nu)-\sum_{\nu=N}^{n}\sum_{\mu=M}^{\nu}F(\mu)\\ \left(M \text{ aus } [N_1,N_2+1]_0\ ;\ N \text{ aus } [N_1,N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1,N_2]_0\right)\end{array}\right\}\quad(39)$$

oder im Hinblick auf (25) und (32a) zu

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\nu=N}^{n}(\nu-N)F(\nu)=(n+1-N)\cdot\sum_{\nu=M}^{n}F(\nu)-\sum_{\nu=N}^{n}\sum_{\mu=M}^{\nu}F(\mu)\\ \left(M \text{ aus } [N_1,N_2+1]_0;\ N \text{ aus } [N_1,N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1,N_2]_0\right);\end{array}\right\}\quad(40)$$

für $M=N$ reduziert sich (39) auf

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\nu=N}^{n}(n+1-\nu)F(\nu)=\sum_{\nu=N}^{n}\sum_{\mu=N}^{\nu}F(\mu)\\ \left(N \text{ aus } [N_1,N_2+1]_0\ ,\ n \text{ auf } [N_1-1,N_2]_0\right).\end{array}\right\}\quad(41)$$

4. Mit $f(\nu)=\nu$ für jeden Wert von ν und $F(\nu)=0$ für jeden Wert von ν liefert (29) wegen (26) die Formel

$$\sum_{\nu=N}^{n}C=(n-N+1)\cdot C. \qquad (42)$$

5. Wählt man in (29) $C=0$ sowie $F(\nu)=1$ für jeden Wert von ν, setzt $M=1$, wendet (42) an und ersetzt dann $f(\nu)$ durch eine wieder für ν auf $[N_1, N_2]_0$ erklärte Funktion $F(\nu)$, so ergibt sich

$$\left.\begin{gathered}\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = n\cdot F(n+1) - (N-1)F(N) - \sum_{\nu=N}^{n}\Big[\nu\{F(\nu+1)-F(\nu)\}\Big] \\ \left(N \text{ aus } [N_1, N_2]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2-1]_0\right)\end{gathered}\right\} \quad (43)$$

und daraus z.B.

$$\sum_{\nu=N}^{n} \nu = \tfrac{1}{2}\cdot\left\{n(n+1)-(N-1)N\right\}. \quad (44)$$

6a. Die Gültigkeitsbedingungen diesmal auch während der Beweisführung sorgfältig notierend, wählen wir (zum Abschluß) $C=1$, lassen $f(\nu)$ für ν auf $[N_1, N_2+1]_0$ erklärt sein und setzen $F(\nu)=0$ für jeden Wert von ν: dann verwandelt sich (29) in

$$\left.\begin{gathered}0 = f(n+1) - f(N) - \sum_{\nu=N}^{n} f(\nu+1) + \sum_{\nu=N}^{n} f(\nu) \\ \left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right).\end{gathered}\right\} \quad (\alpha)$$

Bei beliebigem (für ν auf $[N_1, N_2]_0$ erklärten) $F(\nu)$ und mit

$$f(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu = N_1, \\ F(\nu-1) & \text{für } \nu \text{ auf } [N_1+1, N_2+1]_0 \end{cases}$$

darf man (α) wegen

$$\sum_{\nu=N}^{n} f(\nu) = \sum_{\nu=N}^{n} F(\nu-1) \qquad \text{für } N \text{ aus } [N_1+1, N_2+2]_0,\ n \text{ auf } [N_1, N_2+1]_0 \quad (\beta)$$

und

$$\sum_{\nu=N}^{n} f(\nu+1) = \sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) \qquad \text{für } N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0 \quad (\gamma)$$

in

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) - \sum_{\nu=N}^{n} F(\nu-1) = F(n) - F(N-1)\\&\left(N \text{ aus } [N_1+1, N_2+1]_0,\ n \text{ aus } [N_1, N_2]_0\right)\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

umformen. Gemäß (34) gilt

$$\sum_{\nu=N}^{n} f(\nu) - f(N) = \sum_{\nu=N+1}^{n} f(\nu) \qquad \text{für } N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2+1]_0,$$

und gemäß (21) gilt

$$\sum_{\nu=N+1}^{n} f(\nu) + f(n+1) = \sum_{\nu=N+1}^{n} f(\nu) \qquad \text{für } N \text{ aus } [N_1-1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0;$$

daher kommen wir mit Hilfe von (γ), (α) und (β) über

$$\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum_{\nu=N}^{n} f(\nu+1) = \sum_{\nu=N}^{n} f(\nu) - f(N) + f(n+1) = \sum_{\nu=N+1}^{n+1} f(\nu) = \sum_{\nu=N+1}^{n+1} F(\nu-1)$$

zu der Formel

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum_{\nu=N+1}^{n+1} F(\nu-1)\\&\left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right),\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

die wir übrigens <u>direkt</u> aus (45) - statt aus (α) - <u>nicht</u> für ihren vollen Gültigkeitsbereich gewonnen hätten.

6b. Mit M_1 und $M_2 \geq M_1$ bezeichnen wir ganze Zahlen, mit m und μ ganzzahlige Veränderliche sowie mit $H(\mu)$ eine für μ auf $[M_1, M_2]_0$ erklärte Funktion von μ.

Gilt dann

$$H(m) = H(m-1) \qquad \text{für } m \text{ auf } [M_1+1, M_2]_0,$$

so ist

$$H(M) = H(m) \qquad \left(M \text{ aus } [M_1, M_2]_0,\ m \text{ auf } [M_1, M_2]_0\right), \quad (47)$$

denn aus (45) folgt

$$0 = \sum_{\mu=M+1}^{m} H(\mu) - \sum_{\mu=M+1}^{m} H(\mu-1) = H(m) - H(M).$$

6c. Bei frei variierendem m formen wir (46), indem wir zur Abkürzung

$$\sum_{\nu=N-m}^{n-m} F(\nu+m) = H(m)$$

setzen, zu

$$H(m) = H(m-1)$$

um und folgern aus (47) die für jede ~~Zahl~~ ganze Zahl N_0 gültige, (46) enthaltende Beziehung

$$H(0) = H(N_0),$$

d.h.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum_{\nu=N-N_0}^{n-N_0} F(\nu+N_0) \\ &\left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0 \text{ , } n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right). \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

<u>Satz 6.</u> <u>Erstens</u> sei $\varphi_{N,n}(\nu)$ bei N aus $[N_1, N_2+1]_0$ und jedem Wert der auf $[N_1-1, N-1]_0$ variierenden Veränderlichen n

eine für ν auf $[n+1, N-1]_0$ erklärte
und selber <u>auf</u> $[n+1, N-1]_0$ variierende Funktion von ν.

<u>Zweitens</u> sei $\varphi_{N,n}(\nu)$ bei N aus $[N_1, N_2+1]_0$ und jedem Wert der auf $[N-1, N_2]_0$ variierenden Veränderlichen n

eine für ν auf $[N, n]_0$ erklärte
und selber <u>auf</u> $[N, n]_0$ variierende Funktion von ν. [1]

[1] <u>oder</u> : Bei N aus $[N_1, N_2+1]_0$ und jedem Wert der auf $[N_1-1, N_2]_0$ variierenden Veränderlichen n sei $\varphi_{N,n}(\nu)$, wenn wir abkürzend $\min\{N, n+1\} = n'$ und $\max\{N-1, n\} = n''$ setzen,
eine für ν auf $[n', n'']_0$
mit $\varphi_{N,n}(\nu)$ <u>auf</u> $[n', n'']_0$ erklärte Funktion von ν.

Dann besteht die Beziehung

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{\nu=N}^{n}F(\nu)=\sum_{\nu=N}^{n}F\{\varphi_{N,n}(\nu)\}\\[2ex] \left(N \text{ aus } [N_1,N_2+1]_0 \quad , \; n \text{ auf } [N_1-1,N_2]_0\right).\end{array}\right\} \quad (49)$$

Beweis.[1] Mittels der Abkürzung

$$\varphi_{N,n}(\nu)=\varphi(\nu)$$

formulieren wir die Voraussetzung als

$$\varphi(\nu) \text{ auf } [n',n'']_0 \quad \text{für } \nu \text{ auf } [n',n'']_0 .$$

Bei m aus $[n'-1,n'']_0$ setzen wir

$$f_m(\nu)=\begin{cases}0 & , \text{ wenn } \nu=\varphi(\lambda) \text{ mit } \lambda \text{ auf } [n',m]_0 ,\\ F(\nu) & , \text{ wenn } \nu=\varphi(\lambda) \text{ mit } \lambda \text{ auf } [m+1,n'']_0\end{cases}$$

und

$$H(m)=\sum_{\nu=n'}^{m}F\{\varphi(\nu)\}+\sum_{\nu=n'}^{n''}f_m(\nu) \; ;$$

für m auf $[n',n'']_0$ finden wir dann – unter mehrmaliger Benutzung von (37) und Satz 2 –

$$\begin{aligned} H(m) &= \left(\sum_{\nu=n'}^{m-1}F\{\varphi(\nu)\}+F\{\varphi(m)\}\right)+\left(\sum_{\nu=n'}^{\varphi(m)-1}f_m(\nu)+f_m\{\varphi(m)\}+\sum_{\nu=\varphi(m)+1}^{n''}f_m(\nu)\right)\\ &= \sum_{\nu=n'}^{m-1}F\{\varphi(\nu)\}+f_{m-1}\{\varphi(m)\}+\sum_{\nu=n'}^{\varphi(m)-1}f_{m-1}(\nu)+\quad 0 \quad+\sum_{\nu=\varphi(m)+1}^{n''}f_{m-1}(\nu)\\ &= \sum_{\nu=n'}^{m-1}F\{\varphi(\nu)\}+\sum_{\nu=n'}^{n''}f_{m-1}(\nu) = H(m-1) , \end{aligned}$$

und wegen (47) folgt hieraus

$$H(n'-1) = H(n'') ,$$

---

[1] Landau geht anders vor (a.a.O., S. 117–120 und S. 122).

also

$$\sum_{\nu=n'}^{n'-1} F\{\varphi(\nu)\} + \sum_{\nu=n'}^{n''} F(\nu) = \sum_{\nu=n'}^{n''} F\{\varphi(\nu)\} + \sum_{\nu=n'} 0 .$$

Daß die somit bewiesene Relation

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{\nu=n'}^{n''} F(\nu) = \sum_{\nu=n'}^{n''} F\{\varphi(\nu)\} \\ \left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0 \; , n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right) \end{array}\right\} \quad (49a)$$

mit (49) äqivalent ist, geht für n auf $[N_1-1, N-1]_0$ aus (33) hervor

$$\left(\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = -\sum_{\nu=n'}^{n''} F(\nu) \; , \; \sum_{\nu=N}^{n} F\{\varphi(\nu)\} = -\sum_{\nu=n'}^{n''} F\{\varphi(\nu)\}\right)$$

und ist für n auf $[N-1, N_2]_0$ evident.

Folgerungen aus Satz 6.

1. Für n auf $[N_1-1, N-1]_0$ ist $N+n = (n''+1)+(n'-1) = n'+n''$, und für n auf $[N-1, N_2]_0$ ist ebenfalls $N+n = n'+n''$; weil nun für irgend zwei ganze Zahlen n_1 und $n_2 \geqq n_1-1$ die Aussage

$$n_1 + n_2 - \nu \quad \text{auf } [n_1, n_2]_0 \text{ für } \nu \text{ auf } [n_1, n_2]_0$$

zutrifft, variiert

$$N + n - \nu \quad \text{auf } [n', n'']_0 \text{ für } \nu \text{ auf } [n', n'']_0 ,$$

so daß man aus Satz 9 die Relation

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum_{\nu=N}^{n} F(N+n-\nu) \\ \left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0 \; , n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right) \end{array}\right\} \quad (50)$$

erhält. Mit Hilfe von (48) leitet man aus ihr die Transformation

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum_{\nu=N+M_0}^{n+M_0} F(M_0+N+n-\nu) \\ \left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0 \; , n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right) \end{array}\right\} \quad (51)$$

her, die für jede ganze Zahl M_0, also insbesondere jeweils[1] für $M_0 = N_0 - N - n$ (mit beliebiger ganzer Zahl N_0), gilt:

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum\limits_{\nu=N_0-n}^{N_0-N} F(N_0-\nu) \\ \\ \left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0 \;, n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right); \end{array}\right\} \quad (52)$$

Erwähnung verdient der Spezialfall

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum\limits_{\nu=-n}^{-N} F(-\nu) \\ \\ \left(N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0 \;, n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right); \end{array}\right\} \quad (52a)$$

1a. Aus (50) mit $F(\nu)=\nu$ für jeden Wert von ν gewinnt man bei Beachtung von (25) die Relation

$$\sum_{\nu=N}^{n} \nu = \sum_{\nu=N}^{n} (n+N-\nu) = \sum_{\nu=N}^{n} (n+N) - \sum_{\nu=N}^{n} \nu ,$$

also wegen (42) die mit (44) in Einklang stehende Formel

$$\sum_{\nu=N}^{n} \nu = \frac{1}{2} \cdot (n-N+1)(n+N) \qquad (53)$$

1b. Bei jeder natürlichen Zahl n_0 (und frei variablem n und ν) gilt gemäß (4) und (5), wenn man R statt $R_{n_0}(n)$ schreibt,

$$\lfloor (n-\nu)/n_0 \rfloor = \lfloor (\lfloor n/n_0 \rfloor \cdot n_0 + R - \nu)/n_0 \rfloor = \lfloor n/n_0 \rfloor + \lfloor (R-\nu)/n_0 \rfloor$$

Wegen (42) hat man erstens

$$\sum_{\nu=0}^{n_0-1} \lfloor n/n_0 \rfloor = \lfloor n/n_0 \rfloor \cdot n_0 ,$$

wegen (50), (4b), Satz 2 und (42) ist zweitens

$$\sum_{\nu=0}^{R} \lfloor (R-\nu)/n_0 \rfloor = \sum_{\nu=0}^{R} \lfloor \nu/n_0 \rfloor = \sum_{\nu=0}^{R} 0 = 0,$$

---

[1] d.h. bei jedem zulässigen Wert von N und von n

und wegen (50), (5), (4b), Satz 2 und (42) ist <u>drittens</u>

$$\sum_{v=R+1}^{n_0-1} \lfloor (R-[R+n_0-v])/n_0 \rfloor = \sum_{v=R+1}^{n_0-1} \left(\lfloor v/n_0 \rfloor - 1 \right) = \sum_{v=R+1}^{n_0-1} (-1) = -(n_0-R-1) ;$$

daher liefern uns (25) und (36) die Relation

$$\sum_{v=0}^{n_0-1} \lfloor (n-v)/n_0 \rfloor = \sum_{v=0}^{n_0-1} \lfloor n/n_0 \rfloor + \sum_{v=0}^{R} \lfloor (R-v)/n_0 \rfloor + \sum_{v=R+1}^{n_0-1} \lfloor (R-v)/n_0 \rfloor = \lfloor n/n_0 \rfloor \cdot n_0 + 0 - (n_0-R-1) ,$$

die wegen (4) auf

$$\sum_{v=0}^{n_0-1} \lfloor (n-v)/n_0 \rfloor = n - n_0 + 1 \qquad (n_0 \geqq 1) \tag{54}$$

hinausläuft.

1c. Ist n_0 eine natürliche Zahl, so führt Anwendung von (50), (25), (35) und Satz 2, abermals (25) und abermals (50) über

$$2 \cdot \sum_{v=N}^{n} F(n_0 \cdot v) = \sum_{v=N}^{n} \left\{ F(n_0 \cdot v) + F(n_0 [N+n-v]) \right\} = \sum_{v=N}^{n} \left\{ \sum_{\mu=n_0 \cdot v}^{n_0 \cdot (N+n-v)} F(\mu) + \sum_{\mu=n_0(N+n-v)}^{n_0 \cdot v} F(\mu) \right\} = 2 \cdot \sum_{v=N}^{n} \sum_{\mu=n_0 \cdot v}^{n_0 \cdot (N+n-v)} F(\mu)$$

wegen (48) zu

$$\left. \begin{gathered} \sum_{v=N}^{n} F(n_0 \cdot v) = \sum_{v=0}^{n-N} \sum_{\mu=n_0 \cdot (N+v)}^{n_0 \cdot (n-v)} F(\mu) \\ \left(n_0 \geqq 1;\ N \text{ aus } [N_1/n_0, N_2/n_0+1]_0, n \text{ auf } [N_1/n_0 - 1, N_2/n_0]_0 \right). \end{gathered} \right\} \tag{55}$$

2. Bei jeder natürlichen Zahl n_0 besteht die Beziehung

$$\left. \begin{gathered} \sum_{v=N}^{n} F(v) = \sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{v=(N-1-\mu)/n_0+1}^{(n-\mu)/n_0} F(n_0 \cdot v + \mu) \\ \left(n_0 \geqq 1 ;\ N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0, n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0 \right). \end{gathered} \right\} \tag{56}$$

Beweis.[1] Für m aus $[-1, n_0-1]_0$ setzen wir

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \lfloor (n'-1-\lambda)/n_0 \rfloor = K_m \quad \text{und} \quad \sum_{\lambda=0}^{m} \lfloor (n''-\lambda)/n_0 \rfloor = L_m$$

Von jetzt ab sei m ein Parameter aus $[0, n_0-1]_0$. Wir führen

$$\mathfrak{N}_m = [n' - K_{m-1} + L_{m-1},\ n'-1-K_m+L_m]_0$$

und

$$\psi_m(\nu) = n_0 \cdot (\nu - n' + 1 + K_m - L_{m-1}) + m \quad \text{für } \nu \text{ auf } \mathfrak{N}_m$$

ein. Für ν auf $\mathfrak{N}_m$ variiert $(\nu - n' + 1 + K_m - L_{m-1}]$ auf ~~$[K_m - K_{m-1}+1, L_m - L$~~ $[K_m - K_{m-1}+1,\ L_m - L_{m-1}]_0$, d.h. auf $[\lfloor (n'-1-m)/n_0 \rfloor + 1,\ \lfloor (n''-m)/n_0 \rfloor]_0$;
daher gelten die Abschätzungen

$+n_0+m$

$$\psi_m(\nu) \geqq n_0 \cdot \{\lfloor (n'-1-m)/n_0 \rfloor + 1\} + m = (n'-1-m) - R_{n_0}(n'-1-m) \geqq (n'-1-m)-(n_0-1)+n_0+m = n'$$

und

$$\psi_m(\nu) \leqq n_0 \cdot \lfloor (n''-m)/n_0 \rfloor + m = (n''-m) - R_{n_0}(n''-m) + m \leqq (n''-m) - 0 + m = n'',$$

denen wir den Sachverhalt

$$\psi_m(\nu) \ \underline{\text{in}}\ [n', n'']_0 \quad \text{für } \nu \text{ auf } \mathfrak{N}_m$$

entnehmen. Wegen $n'-1 \leqq n''$ ist

$$K_m - K_{m-1} = \lfloor (n'-1-m)/n_0 \rfloor \leqq (n''-m)/n_0 = L_m - L_{m-1}$$

gemäß (3), so daß wegen

$$-K_{m-1} + L_{m-1} \leqq -K_m + L_m$$

die $\mathfrak{N}_m$ alle elementefremd sind und die Vereinigungsmenge

$$[n' - K_{-1} + L_{-1},\ n'-1-K_{n_0-1} + L_{n_0-1}]_0$$

besitzen, die mit

$$[n', n'']_0$$

identisch ist, weil wegen (54)

$$K_{n_0-1} = n' - n_0 \quad \text{und} \quad L_{n_0-1} = n'' - n_0 + 1$$

gilt.

---

[1] vgl. §3, Abschnitt 3.

Wir erklären jetzt für ν auf $[n', n'']_0$ die Funktion $\varphi(\nu)$ durch die Festsetzung

$$\varphi(\nu) = \psi_m(\nu) \quad \text{für } \nu \text{ auf } \mathfrak{N}_m .$$

Bei n_1 aus $\mathfrak{N}_{m_1}$ und n_2 aus $\mathfrak{N}_{m_2}$ gilt

$$\psi_{m_1}(n_1) \neq \psi_{m_2}(n_2), \quad \text{falls } m_1 \neq m_2 \text{ ist},$$

denn

$$R_{n_0}\{\psi_{m_1}(n_1)\} = m_1 \neq m_2 = R_{n_0}\{\psi_{m_2}(n_2)\};$$

ferner gilt bei n_1 aus $\mathfrak{N}_m$ und n_2 aus $\mathfrak{N}_m$

$$\psi_m(n_1) \neq \psi_m(n_2), \quad \text{falls } n_1 \neq n_2 \text{ ist},$$

denn

$$\psi_m(n_1) - \psi_m(n_2) = n_0 \cdot (n_1 - n_2) \neq 0 .$$

Demnach ist $\varphi(\nu)$ für ν auf $[n', n'']_0$ ein-eindeutig, und aus

$$\varphi(\nu) \ \underline{\text{in}}\ [n', n'']_0$$

erhalten wir

$$\varphi(\nu) \ \underline{\text{auf}}\ [n', n'']_0 \quad \text{für } \nu \text{ auf } [n', n'']_0 .$$

Anwendung von Satz 9 [mit (49a) statt (49)], Formel (38) und Satz 2 ergibt

$$\sum_{\nu=n'}^{n''} F(\nu) = \sum_{\nu=n'}^{n''} F\{\varphi(\nu)\} = \sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{\nu=n'-K_{\mu-1}+L_{\mu-1}}^{(n'-K_\mu+L_\mu)-1} F\{\varphi(\nu)\} = \sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{\nu=n'-K_{\mu-1}+L_{\mu-1}}^{n'-K_\mu+L_\mu-1} F\{n_0\cdot(\nu-n'+1+K_\mu-L_{\mu-1})+\mu\},$$

und weiter führt (48) zu

$$\sum_{\nu=n'}^{n''} F(\nu) = \sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{\nu=(n'-K_{\mu-1}+L_{\mu-1})-n'+1+K_\mu-L_{\mu-1}}^{(n'-K_\mu+L_\mu-1)-n'+1+K_\mu-L_{\mu-1}} F\{n_0\cdot\nu+\mu\} = \sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{\nu=(K_\mu-K_{\mu-1})+1}^{L_\mu-L_{\mu-1}} F(n_0\cdot\nu+\mu) = \sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{\nu=\lfloor(n'-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor(n''-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+\mu)$$

Aus diesem Resultat, das für n auf $[N-1, N_2]_0$ mit (56) identisch ist, erhält man (56) auch für n auf $[N_1-1, N-1]_0$, wenn man (33) zweimal anwendet und (24) beachtet:

$$\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = -\sum_{\nu=n'}^{n''} F(\nu) = -\sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{\nu=\lfloor(n'-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor(n''-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+\mu) = -\sum_{\mu=0}^{n_0-1}\left[-\sum_{\nu=\lfloor(n''-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor(n'-1-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+\mu)\right] = \sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{\nu=\lfloor(N-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor(n-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+\mu).$$

2a. Als Spezialfall ist

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=n_0\cdot N}^{n_0\cdot n-1} F(\nu) = \sum_{\mu=0}^{n_0-1}\sum_{\nu=N}^{n-1} F(n_0\cdot\nu+\mu) \\ &\left(n_0 \geq 1;\ N \text{ aus } [N_1/n_0, (N_2+1)/n_0]_0,\ n \text{ auf } [N_1/n_0, (N_2+1)/n_0]_0\right) \end{aligned}\right\} (57)$$

in (56) enthalten.

2b. Für ν auf $[n_0\cdot N_1, n_0(N_2+1)-1]_0$ variiert $\lfloor\nu/n_0\rfloor$ auf $[N_1, N_2]_0$, und (57) liefert daher

$$\sum_{\nu=n_0\cdot N}^{n_0\cdot n-1} F(\lfloor\nu/n_0\rfloor) = \sum_{\mu=0}^{n_0-1}\sum_{\nu=N}^{n-1} F\left\{\lfloor(n_0\cdot\nu+\mu)/n_0\rfloor\right\} \qquad \begin{pmatrix} N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0, \\ n \text{ auf } [N_1, N_2+1]_0 \end{pmatrix}$$

Ersetzt man hierin n durch $n+1$, beachtet erst (5) und wendet dann (4b) und Satz 2 an, so gelangt man über

$$\sum_{\nu=n_0\cdot N}^{n_0(n+1)-1} F(\lfloor\nu/n_0\rfloor) = \sum_{\mu=0}^{n_0-1}\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu+\lfloor\mu/n_0\rfloor) = \sum_{\mu=0}^{n_0-1}\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu)$$

wegen (42) zu

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \frac{1}{n_0}\sum_{\nu=n_0\cdot N}^{n_0(n+1)-1} F(\lfloor\nu/n_0\rfloor) \\ &\left(n_0 \geqq 1;\ N \text{ aus } [N_1, N_2+1]_0,\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0\right). \end{aligned}\right\} (58)$$

§ 3. Zwischenbemerkungen.

1. Wir halten es nicht für überflüssig, in aller Kürze auf Konsequenzen aufmerksam zu machen, die sich ergeben, wenn man einem Summenkalkül als definierende Relationen nicht (6) und (7), sondern

$$s(N; n) = s(N; n-1) + F(n)$$
$$\left(N \text{ aus } [N_1, N_2]_0,\ n \text{ auf } [N_1, N_2]_0\right)$$

und

$$s(N; N) = F(N) \qquad N \text{ aus } [N_1, N_2]_0$$

zugrunde legt:

fehlt

$\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu)$ **wird dann nur bei** N **aus** $[N_1, N_2]_0$ **für** n **auf** $[N_1-1, N_2]_0$
definiert, und sehr gebräuchliche Formeln erleiden Einschränkungen in ihrem Gültigkeitsbereich – nicht nur im Vergleich zu ihren "Doppelgängern" (unseres §1 und §2), sondern oberdrein insofern, als in gewissen Fällen zwar ihre linke, nicht aber ihre rechte Seite existiert; beispielsweise würde

fehlt

$$\sum_{\nu=n}^{N} F(\nu) = -\sum_{\nu=N+1}^{n-1} F(\nu) \qquad \begin{pmatrix} N \text{ aus } [N_1-1, N_2-1]_0, \\ n \text{ auf } [N_1, N_2]_0 \end{pmatrix}, \text{(statt 33)}$$

$$\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum_{\nu=N}^{n} F(N+n-\nu) \qquad \begin{pmatrix} N \text{ aus } [N_1, N_2]_0, \\ n \text{ auf } [N_1, N_2]_0 \end{pmatrix} \text{(statt 50)}$$

fehlt

und

fehlt

$$\sum_{\nu=N}^{n} F(\nu) = \sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{\nu=\lfloor (N-1-\mu)/n_0 \rfloor+1}^{\lfloor (n-\mu)/n_0 \rfloor} F(n_0 \cdot \nu + \mu) \qquad \begin{pmatrix} n_0 \geq 1; N \text{ aus } [N_1, N_2-n_0+1]_0, \\ n \text{ auf } [N_1-1, N_2]_0 \end{pmatrix} \text{(statt 56)}$$

gelten, Während sich bei der in §1 und §2 dargestellten Theorie u.a. der praktische Vorteil herausstellt, daß aus der Existenz einer Seite von (33) bzw. (50) bzw. (56) die Existenz (und Gleichheit) der anderen Seite folgt.

Im Produktkalkül begegnet man analogen Verhältnissen. Man vergleiche z.B., wenn das Produkt $\prod_{\kappa=0}^{k} \kappa$ **gemäß der im §4 gegebenen Definition existiert[1], und wenn innerhalb desjenigen Produktkalküls, bei dem (60) durch**

$$p(K;K) = G(K) \qquad (K \text{ aus } [K_1, K_2]_0)$$

ersetzt und (59) sinngemäß abgeändert ist[2]!

2. Wir haben uns bei der Herleitung mehrerer Sätze auf den Satz 1* gestützt und dadurch Fallunterscheidungen, wie sie etwa in (18) auftreten, vermieden. Es lag uns aber daran, lieber Beziehungen innerhalb der Formeln des Kalküls auszunützen oder aufzudecken als zwischen ihnen und dem (ihnen logisch voraus-

---

[1] **nämlich für jeden Wert von** k

[2] **nämlich nur für** $k \geq 0$

gehenden, ihnen heterogenen) Satz 1: Daher sollte Satz 1* möglichst selten verwendet werden.

So zogen wir es vor, (42) in Satz 5 einzuordnen, obwohl sich (42) natürlich in ein paar Zeilen aus Satz 1* gewinnen ließe; ähnlich steht es mit (34) und (48), aus denen beiden man übrigens Satz 5 herleiten kann. Formel (56) wiederum, die eine spezielle Umordnung zum Ausdruck bringt, wollten wir als Korollar des allgemeinen Umordnungstheorems (Satz 6) sehen; in diesem Falle wenigstens möge (zum Vergleich) auch der auf Satz 1* basierende Beweis hier durchgeführt werden:

3. Ein zweiter Beweis zu (56). Die rechte Seite von (56) werde mit $S(N;n)$ bezeichnet; wir gebrauchen wieder die Abkürzung $R_{n_0}(n) = R$ und die schon im Beweis zu (54) herangezogene Relation

$$\lfloor (n-\mu)/n_0 \rfloor = \lfloor n/n_0 \rfloor + \lfloor (R-\mu)/n_0 \rfloor .$$

In der folgenden Rechnung wenden wir beim ersten Schritt (25), beim zweiten (32a), beim dritten (48) und beim vierten (37) an.

$$S(N;n) - S(N;n-1) = \sum_{\mu=0}^{n_0-1}\left[\sum_{\nu=\lfloor (N-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor (n-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+\mu) - \sum_{\nu=\lfloor (N-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor (n-1-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+\mu)\right]$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{\nu=\lfloor (n-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor (n-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+\mu) = \sum_{\mu=0}^{n_0-1} \sum_{\nu=\lfloor (R-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor (R-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot[\nu+\lfloor n/n_0\rfloor]+\mu)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{R-1} \sum_{\nu=\lfloor (R-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor (R-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+n_0\cdot\lfloor n/n_0\rfloor+\mu) + \sum_{\nu=\lfloor (-1)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor 0/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+n_0\cdot\lfloor n/n_0\rfloor+R) + \sum_{\mu=R+1}^{n_0-1} \sum_{\nu=\lfloor (R-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor (R-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+n_0\cdot\lfloor n/n_0\rfloor+\mu),$$

Erstens wird

$$\sum_{\mu=0}^{R-1} \sum_{\nu=\lfloor (R-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor (R-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+n_0\cdot\lfloor n/n_0\rfloor+\mu) = \sum_{\mu=0}^{R-1} \sum_{\nu=\lfloor \mu/n_0\rfloor+1}^{\lfloor (\mu+1)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+n_0\cdot\lfloor n/n_0\rfloor+R-1-\mu) = \sum_{\mu=0}^{R-1} \sum_{\nu=1}^{0} F(n_0\cdot\nu+n_0\cdot\underbrace{\lfloor n/n_0\rfloor+R-1-\mu)}_{=0}$$

wegen (50), (4b), (19c) und (26);
da aus (5) und (4b)

$$\lfloor(-1)/n_0\rfloor + 1 = \lfloor(n_0-1)/n_0\rfloor = 0 \qquad \text{sowie } \lfloor 0/n_0\rfloor = 0$$

hervorgeht, hat man <u>zweitens</u>

$$\sum_{\nu=\lfloor(-1)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor 0/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu + n_0\cdot\lfloor n/n_0\rfloor + R) = F(n_0\cdot 0 + n_0\cdot\lfloor n/n_0\rfloor + R) = F(n)$$

wegen (19d) und (4);
<u>drittens</u> ist die Umformung

$$\sum_{\mu=R+1}^{n_0-1}\ \sum_{\nu=\lfloor(R-1-\mu)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor(R-\mu)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu + n_0\cdot\lfloor n/n_0\rfloor+\mu) = \sum_{\mu=R+1}^{n_0-1}\ \sum_{\nu=\lfloor(\mu-1-n_0)/n_0\rfloor+1}^{\lfloor(\mu-n_0)/n_0\rfloor} F(n_0\cdot\nu+n_0\cdot\lfloor n/n_0\rfloor + R+n_0-\mu)$$

$$= \sum_{\mu=R+1}^{n_0-1}\ \sum_{\nu=\lfloor(\mu-1)/n_0\rfloor}^{\lfloor\mu/n_0\rfloor-1} F(n_0\cdot\nu+n+n_0-\mu) = \sum_{\mu=R+1}^{n_0-1}\ \sum_{\nu=0}^{-1}F(n_0\cdot\nu+n+n_0-\mu) = 0$$

auf Grund von (48), (5), (4), (4b), Satz 2, (19c) und (26) statthaft.
Wir erhalten also

$$S(N;n) - S(N;n-1) = 0 + F(n) + 0\,;$$

außerdem ist offensichtlich

$$S(N;N-1) = 0$$

– dies beides war zu zeigen.

§ 4. Definition des Produkts einer Funktion bei ganzzahligen Multiplikationsgrenzen.

Mit K_1 und $K_2 \geqq K_1 - 1$ bezeichnen wir ganze Zahlen, mit K einen ganzzahligen Parameter, mit k und κ ganzzahlige Veränderliche sowie mit $G(\kappa)$ eine für κ auf $[K_1, K_2]_0$ erklärte Funktion von κ. Ferner denken wir uns die ganzen Zahlen K_1^* und K_2^* dadurch festgelegt, daß $K_1^* - 1$ und $K_2^* + 1$ konsekutive Glieder derjenigen Zahlenkette sein sollen, die man erhält, wenn man

$K_1 - 1$, die in $[K_1, K_2]_0$ liegenden Nullstellen von $G(\kappa)$, $K_2 + 1$ der Größe nach ordnet; stets fällt also $K_2^* \geqq K_1^* - 1$ aus, und stets ist $G(\kappa) \neq 0$ für κ auf $[K_1^*, K_2^*]_0$. Jedem K aus $[K_1, K_2 + 1]_0$ entspricht alsdann genau ein Zahlenpaar $\{K_1^*, K_2^*\}$ derart, daß K zu $[K_1^*, K_2^* + 1]_0$ gehört, und umgekehrt kann man, indem man bei jedem zulässigen Zahlenpaar $\{K_1^*, K_2^*\}$ den Parameter K aus $[K_1^*, K_2^* + 1]_0$ wählt, genau jedes K aus $[K_1, K_2 + 1]_0$ erfassen.

Satz 7. Bei vorgegebenem K aus $[K_1^*, K_2^* + 1]_0$ gibt es genau eine für k auf $[K_1^* - 1, K_2]_0$ erklärte Funktion $p(K; k)$ von k derart, daß die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{c} p(K; k) = p(K; k-1) \cdot G(k) \\ \left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^* + 1]_0, \; k \text{ auf } [K_1^*, K_2]_0\right) \end{array}\right\} \quad (59)$$

und

$$\left.\begin{array}{c} p(K; K-1) = 1 \\ \left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^* + 1]_0\right) \end{array}\right\} \quad (60)$$

bestehen.

Beweis. 1.) Mit (59) und (60) sind die Beziehungen

$$p(K; k) = \begin{cases} p(K; k+1) / G(k+1) & \text{für } k \text{ auf } [K_1^* - 1, K-2]_0, & (61a) \\ 1 & \text{für } k = K - 1, & (61b) \\ p(K; k-1) \cdot G(k) & \text{für } k \text{ auf } [K, K_2]_0 & (61c) \end{cases}$$

äquivalent.

2.) Es gibt bei jedem K_0 aus $[K_1^* - 1, K-1]_0$ genau eine für k auf $[K_0, K-1]_0$ erklärte Funktion $P_{K_0}(k)$, die den Bedingungen

$$P_{K_0}(k) = \begin{cases} P_{K_0}(k+1) / G(k+1) & \text{für } k \text{ auf } [K_0, K-2]_0, \\ 1 & \text{für } k = K-1 \end{cases} \qquad (62a)$$

genügt; die Richtigkeit dieser Aussage ist nämlich für $K_0 = K-1$ trivial, und ist sie für $K_0 = K_0^{(0)}$ aus $[K_1^*, K-1]_0$ erwiesen, so auch für $K_0 = K_0^{(0)} - 1$, weil dann genau die durch

$$P_{K_0^{(0)}-1}(k) = \begin{cases} P_{K_0^{(0)}}(K_0^{(0)}) / G(K_0^{(0)}) & \text{für } k = K_0^{(0)} - 1, \\ P_{K_0^{(0)}}(k) & \text{für } k \text{ auf } [K_0^{(0)}, K-1]_0 \end{cases}$$

definierte Funktion das Verlangte leistet.

3.) Es gibt bei jedem K_0 aus $[K-1, K_2]_0$ genau eine für k auf $[K-1, K_0]_0$ erklärte Funktion $P_{K_0}(k)$, die den Bedingungen

$$P_{K_0}(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = K-1, \\ P_{K_0}(k-1) \cdot G(k) & \text{für } k \text{ auf } [K, K_0]_0 \end{cases} \qquad (62b)$$

genügt; die Richtigkeit dieser Aussage ist nämlich für $K_0 = K-1$ trivial, und ist sie für $K_0 = K_0^{(0)}$ aus $[K-1, K_2 - 1]_0$ erwiesen, so auch für $K_0 = K_0^{(0)} + 1$, weil dann genau die durch

$$P_{K_0^{(0)}+1}(k) = \begin{cases} P_{K_0^{(0)}}(k) & \text{für } k \text{ auf } [K-1, K_0^{(0)}]_0, \\ P_{K_0^{(0)}}(K_0^{(0)}) \cdot G(K_0^{(0)}+1) & \text{für } k = K_0^{(0)} + 1 \end{cases}$$

definierte Funktion das Verlangte leistet.

4.) Von den für k auf $[K_1^* - 1, K_2]_0$ erklärten Funktionen von k genügt genau die Funktion

$$p(K; k) = \begin{cases} P_{K_1^*-1}(k) & \text{für } k \text{ auf } [K_1^* - 1, K-1]_0, \\ P_{K_2}(k) & \text{für } k \text{ auf } [K-1, K_2]_0 \end{cases}$$

den Bedingungen (62a) mit $K_0 = K_1^* - 1$ und (62b) mit $K_0 = K_2$, also (61a) und (61b) und (61c), also (59) und (60).

Unter Einführung des Produktzeichens $\prod\limits_{\kappa=K}^{k}$ mit der unteren Multiplikationsgrenze K, der variablen oberen Multiplikationsgrenze k sowie dem Multiplikationsindex κ setzen wir nunmehr

$$\left.\begin{array}{c} p(K;k) = \prod\limits_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) \\ \left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2]_0\right) \end{array}\right\} \quad (63)$$

und bezeichnen die rechte Seite als das von K bis zu variablem k erstreckte Produkt des Multiplikanden $G(\kappa)$. Gemäß (61a), (61b), (61c) besteht dann bei K aus $[K_1^*, K_2^*+1]_0$ die Beziehung

$$\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) = \begin{cases} \prod\limits_{\kappa=K}^{k+1} G(\kappa)/G(k+1) & \text{für } k \text{ auf } [K_1^*-1, K-2]_0, & (64a) \\ 1 & \text{für } k = K-1, & (64b) \\ \prod\limits_{\kappa=K}^{k-1} G(\kappa)\cdot G(k) & \text{für } k \text{ auf } [K, K_2]_0, & (64c) \end{cases}$$

die das Produkt von $G(\kappa)$ in jedem Spezialfall durch die Werte von $G(\kappa)$ darzustellen gestattet. Es gilt z.B.

$$\prod_{\kappa=K}^{K-3} G(\kappa) = \frac{1}{G(K-1)\cdot G(K-2)} \quad \text{für } K \text{ aus } [K_1^*+2, K_2^*+1]_0, \quad (65a)$$

$$\prod_{\kappa=K}^{K-2} G(\kappa) = \frac{1}{G(K-1)} \quad \text{für } K \text{ aus } [K_1^*+1, K_2^*+1]_0, \quad (65b)$$

$$\prod_{\kappa=K}^{K-1} G(\kappa) = 1 \quad \text{für } K \text{ aus } [K_1, K_2+1]_0, \quad (65c)$$

$$\prod_{\kappa=K}^{K} G(\kappa) = G(K) \quad \text{für } K \text{ aus } [K_1, K_2]_0, \quad (65d)$$

$$\prod_{\kappa=K}^{K+1} G(\kappa) = G(K)\cdot G(K+1) \quad \text{für } K \text{ aus } [K_1, K_2-1]_0. \quad (65e)$$

Lemma. Bei K aus $[K_1, K_2+1]_0$ ist $\prod\limits_{\kappa=K}^{k} G(\kappa)$ genau für diejenigen Werte der auf $[K_1-1, K_2]_0$ variierenden Veränderlichen k erklärt, für die $[k+1, K-1]_0$ keine Nullstelle des Multiplikanden enthält.

Beweis. Wir bestimmen das Intervall $[K_1^*, K_2^*+1]_0$, in dem K liegt. Es genügt zu zeigen, daß die Aussage

$$G(\kappa) \neq 0 \quad \text{für } \kappa \text{ auf } [k+1, K-1]_0$$

genau dann, wenn $\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa)$ definiert ist, also genau für k auf $[K_1^*-1, K_2]_0$, zutrifft.

1) Ist $[K_1-1, K_1^*-2]_0$ nicht leer, so findet man $K_1 \leqq K_1^*-1 \leqq K-1 \leqq K_2$, also $G(K_1^*-1)=0$; daher enthält $[k+1, K-1]_0$ für k auf $[K_1-1, K_1^*-2]_0$ wegen $k+1 \leqq K_1^*-1 \leqq K-1$ die Nullstelle K_1^*-1.

2) Für Werte von k auf $[K_1^*-1, K-2]_0$ gilt $K_1^* \leqq k+1 \leqq K-1 \leqq K_2^*$, und da $[K_1^*, K_2^*]_0$ keine Nullstellen enthält, ist auch $[k+1, K-1]_0$ nullstellenfrei.

3) Für k auf $[K-1, K_2]_0$ ist $[k+1, K-1]_0$ leer.

Verstehen wir unter $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ nicht-leere Mengen ganzer Zahlen, unter k_1 bzw. k_2 einen aus $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ wählbaren Parameter sowie unter $\Gamma(k_1; k_2; \kappa)$ eine

für κ auf $[\min\{k_1, k_2+1\}, \max\{k_1-1, k_2\}]_0$ erklärte und für κ auf $[k_2+1, k_1-1]_0$ von Null verschiedene

Funktion von κ, so existiert (dem Lemma zufolge)

$$\left.\begin{array}{c} Q(k_1; k_2) = \prod_{\kappa=k_1}^{k_2} \Gamma(k_1, k_2; \kappa) \\ (k_1 \text{ aus } \mathfrak{K}_1,\ k_2 \text{ aus } \mathfrak{K}_2), \end{array}\right\} \quad (66a)$$

und wir <u>definieren</u>:

$$\left.\begin{array}{c} \prod_{\kappa=K}^{k} \Gamma(K, k; \kappa) = Q(K; k) \\ (K \text{ aus } \mathfrak{K}_1,\ k \text{ auf } \mathfrak{K}_2); \end{array}\right\} \quad (66b)$$

die linke Seite von (66b) bezeichnen wir als das von K bis zu variablem k erstreckte Produkt des Multiplikanden $\Gamma(K, k; \kappa)$.

§ 5. Unmittelbare Folgerungen.

1. Satz 7 zerlegen wir in die Formel

$$\left.\begin{array}{c}\prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa) = \left\{\prod_{\varkappa=K}^{k-1} G(\varkappa)\right\} \cdot G(k) \\ \left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0, \quad k \text{ auf } [K_1^*, K_2]_0\right),\end{array}\right\} \quad (67)$$

in die Formel (65c) und in den

Satz 7*. Bedeutet $P(K;k)$ bei K aus $[K_1^*, K_2^*+1]_0$ eine für k auf $[K_1^*-1, K_2]_0$ erklärte Funktion von k, die den Forderungen

$$P(K;k-1) \cdot G(k) = P(K;k)$$
$$\left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0, \quad k \text{ auf } [K_1^*, K_2]_0\right)$$

und

$$P(K;K-1) = 1 \qquad \left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0\right)$$

genügt, so besteht die Identität

$$\prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa) = P(K;k)$$
$$\left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0, \quad k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2]_0\right).$$

2. Satz 8. Sind $G_1(\varkappa)$ und $G_2(\varkappa)$ für $\varkappa$ auf $[K_1, K_2]_0$ erklärte Funktionen von $\varkappa$, so besteht bei K aus $[K_1, K_2+1]_0$ die Beziehung

$$\prod_{\varkappa=K}^{k} G_1(\varkappa) = \prod_{\varkappa=K}^{k} G_2(\varkappa) \qquad (68)$$

erstens für jeden Wert der auf $[K_1-1, K-2]_0$ variierenden Veränderlichen k, auf den die Aussagen

$$G_1(\varkappa) = G_2(\varkappa) \neq 0 \qquad \text{für } \varkappa \text{ auf } [k+1, K-1]_0 \qquad (68a)$$

zutreffen,
zweitens für $k = K-1$ und
drittens für jeden Wert der auf $[K, K_2]_0$ variierenden Veränderlichen k, auf den die Aussage

$$G_1(\varkappa) = G_2(\varkappa) \qquad \text{für } \varkappa \text{ auf } [K, k]_0 \qquad (68b)$$

zutrifft. [1]

---

[1] oder: für jeden Wert der auf $[K_1-1, K_2]_0$ variierenden Veränderlichen k, auf den die Aussagen

$$G_1(\varkappa) = G_2(\varkappa) \qquad \text{für } \varkappa \text{ auf } [\min\{K, k+1\}, \max\{K-1, k\}]_0$$

und

$$G_2(\varkappa) \neq 0 \qquad \text{für } \varkappa \text{ auf } [k+1, K-1]_0$$

zutreffen.

__Beweis.__ Die kleinste der Zahlen k_0 aus $[K_1-1, K-1]_0$ mit

$$G_1(\kappa) = G_2(\kappa) \neq 0 \qquad \text{für } \kappa \text{ auf } [k_0+1, K-1]_0$$

nennen wir k_1 ; dann ist (68a) für k auf $[K_1-1, k_1-1]_0$ falsch und für k auf $[k_1, K-2]_0$ richtig.

Die größte der Zahlen k_0 aus $[K-1, K_2]_0$ mit

$$G_1(\kappa) = G_2(\kappa) \qquad \text{für } \kappa \text{ auf } [K, k_0]_0$$

nennen wir k_2 ; dann ist (68b) für k auf $[K, k_2]_0$ richtig und für k auf $[k_2+1, K_2]_0$ falsch.

Wir haben (68) demnach für k auf $[k_1, k_2]_0$ zu beweisen. Außer

$$G_1(\kappa) = G_2(\kappa) \qquad \text{für } \kappa \text{ auf } [k_1+1, k_2]_0$$

wissen wir, daß

$$G_2(\kappa) \neq 0 \qquad \text{für } \kappa \text{ auf } [k+1, K-1]_0$$

bei jedem Wert von k auf $[k_1, k_2]_0$ zutrifft. Ersetzt man daher in dem Lemma aus §4 K_1 durch k_1+1 , K_2 durch k_2 und die für κ auf $[K_1, K_2]_0$ erklärte Funktion $G(\kappa)$ durch die für κ auf $[k_1+1, k_2]_0$ erklärte Funktion $G_1(\kappa) \equiv G_2(\kappa)$, so ergibt sich die Existenz von

$$\prod_{\kappa=K}^{k} G_1(\kappa) \equiv \prod_{\kappa=K}^{k} G_2(\kappa) \qquad \text{für } k \text{ auf } [k_1, k_2]_0 .$$

__Lemma.__ Bei K aus $[K_1^*, K_2^*+1]_0$ gilt

$$\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) \neq 0 \qquad \text{genau für } k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0 .$$

__Beweis.__ Für k auf $[K_1^*-1, K_2^*]_0$ ist $\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) \neq 0$; trifft nämlich diese - für $k = K-1$ wegen (64b) richtige - Aussage bei $k^{(0)}$ aus $[K_1^*, K-1]_0$ für $k = k^{(0)}$ zu, dann wegen (64a) auch für $k = k^{(0)}-1$; trifft sie andererseits bei $k^{(0)}$ aus $[K-1, K_2^*-1]_0$ für $k = k^{(0)}$ zu, dann wegen (64c) auch für $k = k^{(0)}+1$.

Ferner gilt $\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) = 0$ für k auf $[K_2^*+1, K_2]_0$; bei nicht-leerem $[K_2^*+1, K_2]_0$ ist nämlich $K_2^*+1 \leqq K_2$, also $G(K_2^*+1) = 0$, so daß wegen (64c) die Behauptung für $k = K_2^*+1$ erwiesen ist; stimmt sie aber bei $k^{(0)}$ aus $[K_2^*+1, K_2-1]_0$ für $k = k^{(0)}$, dann - wieder wegen (64c) - auch für $k = k^{(0)}+1$.

Zusammen mit dem Lemma des §4 bilde das eben bewiesene Lemma, für den Kalkül handlicher formuliert, den

Satz 9. Bei K aus $[K_1, K_2+1]_0$ und jedem Wert der auf $[K_1-1, K_2]_0$ variierenden Veränderlichen k treffen folgende Aussagen zu:

1.) $\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa)$ ist nicht definiert, wenn $[k+1, K-1]_0$ eine Nullstelle von $G(\kappa)$ enthält.

2.) $\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa)$ ist definiert, wenn $[k+1, K-1]_0$ keine Nullstelle von $G(\kappa)$ enthält,

und zwar gilt a) $\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) = 0$, wenn $[K, k]_0$ eine Nullstelle von $G(\kappa)$ enthält,

und b) $\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) \neq 0$, wenn $[K, k]_0$ keine Nullstelle von $G(\kappa)$ enthält.

Beweis. α) Wenn das Produkt für einen bestimmten Wert von k verschwindet, gehört k (wie das Lemma lehrt) zu $[K_2^*+1, K_2]_0$ und K_2^*+1 ist einerseits Nullstelle, andererseits, wegen $K \leq K_2^*+1 \leq k$, Element von $[K, k]$.

β) Ist das Produkt ungleich Null für einen bestimmten Wert von k, so gehört k (laut Lemma) zu $[K_1^*-1, K_2^*]_0$. Entweder liegt k in $[K, K_2^*]_0$ – dann ist $[K, k]_0$ wegen $K_1^* \leq K \leq k \leq K_2^*$ in dem Nullstellenfreiem Intervall $[K_1^*, K_2^*]_0$ enthalten; oder k liegt in $[K_1^*-1, K-1]_0$ – dann ist $[K, k]_0$ leer.

γ) a) bzw. b) ist die Umkehrung der in α) bzw. β) bewiesenen Implikation.

Satz 10a. Unter der Voraussetzung

$$G(\kappa) > 0 \qquad \text{für } \kappa \text{ auf } [K_1, K_2]_0$$

gilt

$$\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) > 0$$

$$\left(K \text{ aus } [K_1, K_2+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1-1, K_2]_0\right).$$

Beweis. Von (64b) ausgehend, bestätigt man die Behauptung mit Hilfe von (64a) für k auf $[K_1-1, K-1]_0$ und mit Hilfe von (64c) für k auf $[K-1, K_2]_0$.

Satz 10b. Unter der Voraussetzung

$$G(\kappa) > 1 \qquad \text{für } \kappa \text{ auf } [K_1, K_2]_0$$

gilt

$$\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) \begin{cases} \text{in } (0,1) & \text{für } k \text{ auf } [K_1-1, K-2]_0, \\ = 1 & \text{für } k = K-1 \\ > 1 & \text{für } k \text{ auf } [K, K_2]_0. \end{cases}$$

Beim Beweis von

$$\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) < 1 \qquad \text{für } k \text{ auf } [K_1-1, K-2]_0,$$

knüpft man an (65b) an und benutzt (64a); Satz 10a führt dann weiter zum ersten Teil der Behauptung.
Um deren dritten Teil zu bestätigen, stützt man sich auf (65d) und (64c).

3. Die Potenz einer komplexen Zahl C mit ganzzahligem Exponenten k führen wir durch

$$C^k = \prod_{\kappa=1}^{k} C \qquad (k \geqq 0, \text{ falls } C = 0) \tag{69}$$

ein; demnach ist

$$0^k = 0 \qquad \text{für } k \geqq 1, \tag{69a}$$

$$C^0 = 1 \tag{69b}$$

und

$$C^1 = C \tag{69c}$$

wegen (65e) verträgt sich (1) mit (69).

3a. Für

$$P(1;k) = 1/C^{-k} = 1/\prod_{\kappa=1}^{-k} C \qquad (C \neq 0)$$

wird sowohl – wegen (67) –

$$P(1;k-1)\cdot C = \frac{1}{\prod_{\kappa=1}^{-(k-1)} C}\cdot C = \frac{C}{\left\{\prod_{\kappa=1}^{-(k-1)-1} C\right\}\cdot C} = \frac{1}{\prod_{\kappa=1}^{-k} C} = P(1;k)$$

als auch – wegen (65c)

$$P(1;0) = 1/\prod_{\kappa=1}^{0} C = 1,$$

so daß, Satz 7* zufolge,

$$\prod_{\kappa=1}^{k} C = P(1;k)$$

und damit

$$C^{k} = 1/C^{-k} \qquad (C \neq 0) \tag{70}$$

bewiesen ist.

Ferner gilt bei ganzzahligem l die für $C=0$ triviale Relation

$$\left.\begin{array}{c} C^{k} = C^{k-l} \cdot C^{l} \\ (k \geqq 0,\ \text{falls } C=0;\ k \geqq l,\ \text{falls } C=0) \end{array}\right\} \tag{71}$$

da man unter der Voraussetzung $C \neq 0$ für

$$P(1;k) = C^{k-l} \cdot C^{l} = \prod_{\kappa=1}^{k-l} C \cdot \prod_{\kappa=1}^{l} C$$

einerseits - im Hinblick auf (67) -

$$P(1;k-1) \cdot C = \left(\prod_{\kappa=1}^{(k-1)-l} C \cdot \prod_{\kappa=1}^{l} C\right) \cdot C = \left[\left\{\prod_{\kappa=1}^{(k-l)-1} C\right\} \cdot C\right] \cdot \prod_{\kappa=1}^{l} C = \prod_{\kappa=1}^{k-l} C \cdot \prod_{\kappa=1}^{l} C = P(1;k),$$

andererseits - im Hinblick auf (70) -

$$P(1;0) = \prod_{\kappa=1}^{-l} C \cdot \prod_{\kappa=1}^{l} C = \left\{1/C^{l}\right\} \cdot C^{l} = 1$$

erhält.

Die für $C=0$ gleichfalls triviale Beziehung

$$\left.\begin{array}{c} \left(C^{l}\right)^{k} = C^{l \cdot k} \\ (l \geqq 0,\ \text{falls } C=0;\ k \geqq 0,\ \text{falls } C=0 \text{ und } l \geqq 1) \end{array}\right\} \tag{72}$$

besteht für $C \neq 0$, weil dann der Ansatz

$$P(1;k) = C^{l \cdot k}$$

gemäß (71) bzw. (69b) zu

$$P(1;k-1) \cdot C^{l} = C^{l \cdot (k-1)} C^{l} = C^{l \cdot k - l} \cdot C^{l} = C^{l \cdot k} = P(1;k)$$

bzw.

$$P(1;0) = 1,$$

führt.

Indem man schließlich

$$P(1;k) = C_1^k \cdot C_2^k \qquad (C_1 \neq 0 \text{ und } C_2 \neq 0)$$

wählt, gelangt man wegen (69c) und (71) zu

$$P(1;k-1)\cdot\left\{C_1\cdot C_2\right\} = C_1^{k-1}\cdot C_2^{k-1}\cdot C_1^1\cdot C_2^1 = C_1^k\cdot C_2^k = P(1;k)$$

und wegen (69b) zu

$$P(1;0) = C_1^0 \cdot C_2^0 = 1,$$

also zu der (für $C_1 = 0$ oder $C_2 = 0$ gewiß richtigen) Identität

$$\left.\begin{array}{c} \left(C_1\cdot C_2\right)^k = C_1^k\cdot C_2^k \\ \left(k \geqq 0, \text{ falls } C_1 = 0 \text{ oder } C_2 = 0\right). \end{array}\right\} \quad (73)$$

3 l. Wenn man (bei $C \neq 0$) der Reihe nach (73), (65b), (72), (70) und (69b) anwendet, findet man

$$1^k = C^k\cdot\left(\frac{1}{C}\right)^k = C^k\cdot\left(C^{-1}\right)^k = C^k\cdot C^{-k} = C^0 = 1,$$

und das Ergebnis

$$1^k = 1 \qquad (74)$$

beweist im Verein mit (42) die Relation

$$\left.\sum_{\nu=N}^{n} C^\nu = \begin{cases} \dfrac{C^{n+1}-C^n}{C-1} & \text{für } C \neq 1 \ \left(\begin{array}{l} N \geqq 0 \\ n \geqq -1 \end{array}\right\}, \text{ falls } C = 0\Big), \\ n - N + 1 & \text{für } C = 1 \end{cases}\right\} \quad (75)$$

für den Fall $C = 1$, während für $C \neq 1$ die auf (24), (71) und (45) beruhende Umformung

$$(C-1)\cdot\sum_{\nu=N}^{n} C^\nu = C\cdot\sum_{\nu=N}^{n} C^\nu - \sum_{\nu=N}^{n} C^\nu = \sum_{\nu=N}^{n} C\cdot C^\nu - \sum_{\nu=N}^{n} C^\nu = \sum_{\nu=N}^{n} C^{\nu+1} - \sum_{\nu=N}^{n} C^\nu = C^{n+1} - C^n$$

zum Ziele führt.

4. Jetzt, nachdem die Grundregeln der Potenzrechnung – unter Voraussetzung ganzzahliger Exponenten – bestätigt sind, könnte z.B. von der Potenzreihe für die Funktion e^z die Rede sein. Das vermeiden wir aber; um den elementaren Charakter unserer Überlegungen auch weiterhin beizubehalten, setzen wir lediglich als gesichert voraus, daß

bei einer gewissen positiven Zahl π,

bei einer gewissen für jedes komplexe z erklärten Funktion von z,

die wir mit $\exp z$ bezeichnen,

und bei einer gewissen für jedes positive x erklärten Funktion von x,

die wir mit $\log x$ bezeichnen,

die folgenden Aussagen richtig sind:

Bei irgend zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 gilt erstens stets

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2 \qquad [1]$$

und zweitens genau dann, wenn $z_1 - z_2$ ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist,

$$\exp z_1 = \exp z_2 . \qquad [2]$$

Zu jeder komplexen Zahl $C \neq 0$ gibt es genau eine positive Zahl r und genau eine dem Intervall $[-\pi, \pi)$ angehörende Zahl w derart, daß

$$C = r \cdot \exp(i \cdot w)$$

ist. [3]

Schließlich gilt

$$\exp(\log x) = x \quad \text{für } x > 0 . \qquad [4]$$

Ziehen wir einige Folgerungen! Aus [1] ersieht man, daß $\exp z$ für jeden oder für keinen Wert von z verschwindet; [2] oder auch [3] entscheidet, daß durchweg

$$\exp z \neq 0 \qquad (76)$$

zutrifft. Gemäß [2] und [1] wird (für frei variierendes z und k)

$$\exp z = \exp z \cdot \exp(2\pi i \cdot k),$$

woraus man wegen (76) auf

$$\exp(2\pi i \cdot k) = 1 \qquad (77)$$

schließen darf. Aus

~~Aus~~

$$\exp \log (x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot x_2 = \exp \log x_1 \cdot \exp \log x_2 = \exp(\log x_1 + \log x_2)$$

folgt

$$\log(x_1 \cdot x_2) = \log x_1 + \log x_2 \qquad (x_1 > 0\,,\ x_2 > 0) \qquad (78)$$

(also insbesondere

$$\log 1 = 0 \qquad)\,, \qquad (79)$$

weil log x eine reelle Funktion ist.

5. Auf [1] und (77) beruht die Relation

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\kappa=K}^{k} \exp G(\kappa) = \exp\left\{\sum_{\kappa=K}^{k} G(\kappa)\right\} \\ &\left(K \text{ aus } [K_1, K_2+1]_0\,,\quad k \text{ auf } [K_1-1, K_2]_0\right), \end{aligned}\right\} (80)$$

zu deren Beweis man lediglich

$$P(K;k) = \exp\sum_{\kappa=K}^{k} G(\kappa)$$

zu setzen sowie

$$P(K;k-1)\cdot \exp G(k) = \exp\sum_{\kappa=K}^{k-1} G(\kappa)\cdot \exp G(k) = \exp\left\{\sum_{\kappa=K}^{k-1} G(\kappa) + G(k)\right\} = \exp\sum_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) = P(K;k)$$

und

$$P(K;K-1) = \exp\sum_{\kappa=K}^{K-1} G(\kappa) = \exp 0 = 1$$

zu bestätigen braucht.

6. Setzt man – bei jedem zulässigen Zahlenpaar $\{K_1^*, K_2^*\}$ –

$$G(\kappa) = \varrho(\kappa)\cdot \exp\{i\cdot\omega(\kappa)\} \qquad \left(\kappa \text{ auf } [K_1^*, K_2^*]_0\,;\ \varrho(\kappa) > 0,\ \omega(\kappa) \text{ in } [-\pi, \pi)\right), \quad (81)$$

so gilt

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) = \varrho_0(K;k)\cdot \exp\{i\cdot\omega_0(K;k)\} \\ &\left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0\,,\quad k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0\right) \end{aligned}\right\} (82)$$

mit

$$\varrho_0(K;k) = \prod_{\kappa=K}^{k} \varrho(\kappa) \quad \text{und} \quad \omega_0(K;k) = 2\pi \cdot \underbrace{\left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k} \omega(\kappa)\right) \Big/ 2\pi} - \pi, \qquad (82a)$$

wobei die Forderungen

$$\varrho_0(K;k) > 0 \quad \text{und} \quad \omega_0(K;k) \text{ in } [-\pi, \pi) \qquad (82b)$$

erfüllt sind.[1] Zum Beweis führt man

$$\mathcal{P}(K;k) = \prod_{\kappa=K}^{k} \varrho(\kappa) \cdot \exp\left\{ i \cdot \sum_{\kappa=K}^{k} \omega(\kappa) \right\}$$

ein und konstatiert sowohl

$$\mathcal{P}(K;k-1) \cdot G(k) = \prod_{\kappa=K}^{k-1} \varrho(\kappa) \cdot \exp\left\{ i \cdot \sum_{\kappa=K}^{k-1} \omega(\kappa) \right\} \cdot \varrho(k) \cdot \exp\{ i\omega(k) \} = \underbrace{\prod_{\kappa=K}^{k} \varrho(\kappa) \cdot \exp\left\{ i \cdot \sum_{\kappa=K}^{k-1} \omega(\kappa) + i\omega(k) \right\}}_{= \mathcal{P}(K;k)}$$

als auch

$$\mathcal{P}(K;K-1) = \prod_{\kappa=K}^{K-1} \varrho(\kappa) \cdot \exp\left\{ i \cdot \sum_{\kappa=K}^{K-1} \omega(\kappa) \right\} = \exp 0 = 1;$$

damit ist

$$\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) = \prod_{\kappa=K}^{k} \varrho(\kappa) \cdot \exp\left\{ i \cdot \sum_{\kappa=K}^{k} \omega(\kappa) \right\}$$

bewiesen, und auf Grund von [2] und (2) wird

$$\exp\left[i \cdot \sum_{\kappa=K}^{k} \omega(\kappa) \right] = \exp\left\{ -\pi i + 2\pi i \left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k} \omega(\kappa)\right) \Big/ 2\pi - 2\pi i \cdot \left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k} \omega(\kappa)\right) \Big/ 2\pi \right\}$$

$$= \exp\left\{ -\pi i + 2\pi i \cdot \underbrace{\left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k} \omega(\kappa)\right) \Big/ 2\pi} \right\} = \exp\{ i \cdot \omega_0(K;k) \}.$$

---

[1] die erstere auf Grund von Satz 10a.

7. Ist γ eine ganze Zahl, so definieren wir den Logarithmus einer von Null verschiedenen komplexen Zahl C zum Index γ unter Benutzung von [3] durch

$$\log_\gamma C = \log r + i\cdot w + 2\pi i\cdot\gamma \qquad (C \neq 0). \tag{83}$$

Weil aus

$$C = r\cdot\exp(iw) \quad \text{mit } C>0,\ r>0 \ \text{ und } w \text{ aus } [-\pi,\pi)$$

gemäß [3]

$$r = C \quad \text{und} \quad w = 0$$

folgt, gilt für positives C

$$\log_0 C = \log r + iw = \log C;$$

deshalb dürfen wir allgemein die Abkürzung

$$\log_0 C = \log C \qquad (C \neq 0) \tag{84}$$

einführen.

7a. Wegen [3], [1], [2], und [4] hat man

$$\exp\left(\log_\gamma C\right) = \exp(\log r)\cdot\exp(iw + 2\pi i\cdot\gamma) = r\cdot\exp(iw) = C,$$

also

$$\exp\left(\log_\gamma C\right) = C \qquad (C \neq 0) \tag{85}$$

und daher

$$\exp\left\{\log_\gamma\left(\exp C\right)\right\} = \exp C,$$

woraus gemäß [2] die Existenz einer (von C und γ abhängigen) ganzen Zahl k_0 mit

$$\log_\gamma(\exp C) = C + 2\pi i\cdot k_0 \tag{86}$$

folgt.

---

1) Als eigentliches Gegenstück zu (85) sei ohne Beweis die (86) verschärfende Relation

$$\log_\gamma(\exp C) = C + 2\pi i\cdot\left(\gamma - \underline{\left\{\pi + \mathfrak{J}(C)\right\}/2\pi}\right) \tag{86*}$$

erwähnt, in der $\mathfrak{J}(C)$ den Imaginärteil der Zahl C bedeutet.

7b. Ferner ergibt sich (in unmittelbar verständlicher B
zeichnungsweise)

$$\log_{\gamma_1} C_1 + \log_{\gamma_2} C_2 = \log_{\gamma_0}(C_1 \cdot C_2) \qquad (C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0) \tag{87}$$

mit

$$\gamma_0 = \gamma_1 + \gamma_2 + \underline{(\pi + \vartheta_1 + \vartheta_2)/2\pi}\ , \tag{87a}$$

und diesen Sachverhalt können wir, indem wir von (81) ausgehen und mit $\gamma(\kappa)$ eine für κ auf $[K_1, K_2]_0$ erklärte ganzzahlige Funktion von κ bezeichnen, zu

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{\kappa=K}^{k} \log_{\gamma(\kappa)} G(\kappa) = \log_{\gamma_0(K;k)} \prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) \\ \left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\quad k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0\right) \end{array}\right\} \tag{88}$$

mit

$$\gamma_0(K;k) = \sum_{\kappa=K}^{k} \gamma(\kappa) + \underline{\left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k} \omega(\kappa)\right)/2\pi} \tag{88a}$$

verallgemeinern. Bezeichnet man nämlich mit $S(K;k)$ die rechte Seite von (88), so erhält man erstens wegen

$$\log_{\gamma_0(K;k-1)} \prod_{\kappa=K}^{k-1} G(\kappa) + \log_{\gamma(k)} G(k) = \log_{\gamma_0^*(K;k)} \left\{ \prod_{\kappa=K}^{k-1} G(\kappa) \cdot G(k) \right\}$$

(worin gemäß (87) und (82)

$$\gamma_0^*(K;k) = \sum_{\kappa=K}^{k-1} \gamma(\kappa) + \left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k-1} \omega(\kappa)\right)\Big/2\pi + \gamma(k) + \underline{\left\{\pi + 2\pi \underbrace{\left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k-1} \omega(\kappa)\right)/2\pi} - \pi + \omega(k)\right\}\Big/2\pi}$$

$$= \sum_{\kappa=K}^{k} \gamma(\kappa) + \underline{\underline{\left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k-1} \omega(\kappa)\right)/2\pi} + \underbrace{\left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k-1} \omega(\kappa)\right)/2\pi} + \omega(k)/2\pi}$$

$$= \sum_{\kappa=K}^{k} \gamma(\kappa) + \underline{\left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k-1} \omega(\kappa) + \omega(k)\right)/2\pi} = \gamma_0(K;k)$$

wird) die Relation

$$S(K;k+1) + \log_{\gamma(k)} G(k) = S(K;k),$$

und zweitens gilt

$$S(K,K-1) = \log_{\underline{1/2}} 1 = \log_0 1 = \log 1 = 0,$$

so daß auf Grund von Satz 1* die Behauptung bewiesen ist.

7c. Wendet man (85) auf die rechte Seite von (88) an, so gewinnt man ~~insbesondere~~ die auch aus (80) herleitbare Identität

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa) = \exp\left\{\sum_{\varkappa=K}^{k} \log_{\gamma(\varkappa)} G(\varkappa)\right\} \\ &\left(K \text{ aus } [K_1^*-1, K_2^*]_0, \quad k \text{ auf } [K_1^*, K_2^*+1]_0\right), \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

die es uns ermöglicht, jeder Relation zwischen Summen von Funktionen eine Relation zwischen nicht-verschwindenden Produkten von Funktionen gegenüberzustellen.

8. Nunmehr definieren wir die <u>Potenz</u> einer komplexen Zahl C mit dem komplexen Exponenten c zum ganzzahligen Index γ durch

$$\left.(C^c)_\gamma = \begin{cases} \exp[c \cdot \log_\gamma C] & \text{für } C \neq 0 \\ 0 & \text{für } C = 0, \text{ falls } c > 0. \end{cases}\right\} \quad (90).$$

Bei ganzem k führt Anwendung von (42) und (89) zu

$$(C^k)_\gamma = \exp[k \cdot \log_\gamma C] = \exp\sum_{\varkappa=1}^{k} \log_\gamma C = \prod_{\varkappa=1}^{k} C = C^k \quad \text{für } C \neq 0$$

weil außerdem

$$(0^k)_\gamma = 0 = 0^k \qquad (k \geqq 1)$$

gilt, wird

$$(C^k)_\gamma = C^k \qquad (k \geqq 1, \text{ falls } C = 0), \qquad (91)$$

so daß es statthaft ist,

$$(C^c)_0 = C^c \qquad (c > 0, \text{ falls } C = 0) \qquad (92)$$

zu setzen.

8a. Wir leiten jetzt nicht die Formel

$$\left.\begin{array}{l}\left(\left[\left(C^{c_1}\right)_{\gamma_1}\right]^{c_2}\right)_{\gamma_2} = \left(C^{c_1 \cdot c_2}\right)_{\gamma_1} \cdot \exp\left(2\pi i \cdot c_2 \cdot \left\{\gamma_2 - \underline{\left(\pi + \alpha_1 \cdot [\omega + 2\pi\gamma_1] + \beta_1 \cdot \log r\right)/2\pi}\right\}\right) \\ (\alpha_1 + i\beta_1 = c_1 \;\text{ mit } \alpha_1^2 \geqq 0 \text{ und } \beta_1^2 \geqq 0;\; c_1 > 0, \text{ falls } C = 0;\; c_2 > 0, \text{ falls } C = 0)\end{array}\right\} \quad (93^*)$$

aus (86*) her, sondern beweisen nur ihren Spezialfall

$$\left[\left(C^{c}\right)_{\gamma}\right]^{k} = \left(C^{c \cdot k}\right)_{\gamma} \qquad (93)$$

ohne Benutzung von (86*): Nach (86) und [2] gilt

$$\left[\left(C^{c}\right)_{\gamma}\right]^{k} = \exp\left[k \cdot \log \exp\left(c \cdot \log_{\gamma} C\right)\right] = \exp\left[k \cdot \left\{\left(c \cdot \log_{\gamma} C\right) + 2\pi i \cdot k_0\right\}\right]$$

$$= \exp\left[(k \cdot c) \cdot \log_{\gamma} C + 2\pi i \cdot (k \cdot k_0)\right] = \exp\left[(c \cdot k) \cdot \log_{\gamma} C\right] = \left(C^{c \cdot k}\right)_{\gamma}.$$

für eine gewisse ganze Zahl k_0.

8b. Bedeutet $g(\kappa)$, wenn k_1 und $k_2 \geq k_1 - 1$ ganze Zahlen sind, ~~Ist g(κ)~~ eine für κ auf $[k_1, k_2]_0$ definierte Funktion von κ, so erlauben uns für $C \neq 0$ einerseits (80) und (24) die Umformung

$$\prod_{\kappa=K}^{k}\left(C^{g(\kappa)}\right)_{\gamma} = \prod_{\kappa=K}^{k} \exp\left[g(\kappa) \cdot \log_{\gamma} C\right] = \exp \sum_{\kappa=K}^{k}\left[g(\kappa) \cdot \log_{\gamma} C\right] = \exp\left[\left(\sum_{\kappa=K}^{k} g(\kappa)\right) \cdot \log_{\gamma} C\right]$$

sowie andererseits (80), (83) und (84), (23) und [2] die Umformung

$$\prod_{\kappa=K}^{k}\left(C^{g(\kappa)}\right)_{\gamma(\kappa)} = \prod_{\kappa=K}^{k} \exp\left[g(\kappa) \cdot \log_{\gamma(\kappa)} C\right] = \exp \sum_{\kappa=K}^{k}\left[g(\kappa) \cdot \left\{\log C + 2\pi i \cdot \gamma(\kappa)\right\}\right]$$

$$= \exp\left\{\log C \cdot \sum_{\kappa=K}^{k} g(\kappa) + 2\pi i \cdot \sum_{\kappa=K}^{k} g(\kappa) \cdot \gamma(\kappa)\right\} = \exp\left[\left(\sum_{\kappa=K}^{k} g(\kappa)\right) \cdot \log C\right] \cdot \exp\left\{2\pi i \cdot \sum_{\kappa=K}^{k} g(\kappa) \cdot \gamma(\kappa)\right\}.$$

Ordnet man daher diejenigen Werte von κ_0 von κ auf $[k_1, k_2]_0$, für die $g(\kappa_0)$ nicht positiv ist, zusammen mit $k_1 - 1$ sowie $k_2 + 1$ der Größe nach, und bezeichnet man mit $\overline{k}_1 - 1$ und $\overline{k}_2 + 1$ konsekutive Gleider der so entstandenen Zahlenkette, so findet man, wenn man bei $C=0$ noch Satz 3 heranzieht, einerseits

$$\left.\begin{array}{c}\prod_{\kappa=K}^{k}\left(C^{g(\kappa)}\right)_{\gamma}=\left(C^{\sum_{\kappa=K}^{k}g(\kappa)}\right)_{\gamma}\\ \left(\begin{array}{l}K \text{ aus } [k_1, k_2+1]_0 \text{ und } k \text{ auf } [k_1-1, k_2]_0 \text{, falls } C\neq 0;\\ K \text{ aus } [\bar{k}_1, \bar{k}_2+1]_0 \text{ und } k \text{ auf } [K, \bar{k}_2]_0 \text{, falls } C=0\end{array}\right),\end{array}\right\} \quad (94)$$

andererseits

$$\left.\begin{array}{c}\prod_{\kappa=K}^{k}\left(C^{g(\kappa)}\right)_{\gamma(\kappa)}=C^{\sum_{\kappa=K}^{k}g(\kappa)}\cdot\exp\left\{2\pi i\cdot\sum_{\kappa=K}^{k}\left[g(\kappa)\cdot\gamma(\kappa)\right]\right\}\\ \left(\begin{array}{l}K \text{ aus } [k_1, k_2+1]_0 \text{ und } k \text{ auf } [k_1-1, k_2]_0 \text{, falls } C\neq 0;\\ K \text{ aus } [\bar{k}_1, \bar{k}_2+1]_0 \text{ und } k \text{ auf } [K-1, \bar{k}_2]_0 \text{, falls } C=0\end{array}\right).\text{[1]}\end{array}\right\} \quad (95)$$

Als Spezialfälle erhält man

$$\prod_{\kappa=K}^{k}C=C^{k-K+1} \qquad (k\geqq K-1,\ \text{falls } C=0), \qquad (96)$$

bzw.

$$\left.\begin{array}{c}\prod_{\kappa=K}^{k}C^{\kappa}=C^{\frac{1}{2}\cdot(k-K+1)\cdot(k+K)}\\ \left(K\geqq 0 \quad \text{und}\left\{\begin{array}{l}k\geqq K-1 \quad \text{für } K\neq 1\\ k\geqq -1 \quad \text{für } K=1\end{array}\right\},\ \text{falls } C=0\right)\end{array}\right\} \quad (97)$$

nach Anwendung von (42) bzw.(53).

Neben (95) gehört - der Struktur nach - Formel (101), die uns als Korollar zu Satz 11 begegnen wird.

---

[1] ~~Hierbei~~ beachte man, daß zwar $(0^0)_\gamma$ <u>nicht</u> definiert ist, wohl aber 0^0.

Hier und auch weiterhin

§ 6. Grundformeln des Produktkalküls.

Auch in diesem Paragraphen sind - wie schon bisher - bei allen Formeln die Variabilitätsbereiche auftretender Veränderlicher so angegeben, daß sie nicht durch umfassendere Mengen ersetzt werden können.

Seien L_1 und $L_2 \geq L_1 - 1$ ganze Zahlen, λ eine ganzzahlige Variable, $G_\lambda(\kappa)$ bzw. $\gamma_\lambda(\kappa)$ eine für λ auf $[L_1, L_2]_0$ und κ auf $[K_1, K_2]_0$ erklärte Funktion bzw. ganzzahlige Funktion von λ und κ sowie c_λ eine für λ auf $[L_1, L_2]_0$ erklärte Funktion von λ.

Satz 11. Bezeichnen L und ℓ ganzzahlige Parameter, so sollen $\overline{K}_1 - 1$ und $\overline{K}_2 + 1$ konsekutive Glieder derjenigen Zahlenkette sein, die entsteht,

> wenn man alle die Werte κ_0 des auf $[K_1, K_2]_0$ variierenden κ, bei denen $[\ell+1, L-1]_0$ oder $[L, \ell]_0$ eine Zahl λ_0 mit $G_{\lambda_0}(\kappa_0) = 0$ und nicht-positivem c_{λ_0} enthält, zusammen mit $K_1 - 1$ und $K_2 + 1$ der Größe nach ordnet;

ferner sollen $\overline{K}_1^* - 1$ und $\overline{K}_2^* + 1$ konsekutive Glieder derjenigen Zahlenkette sein, die entsteht,

> wenn man alle die Werte κ_0 des auf $[\overline{K}_1, \overline{K}_2]_0$ variierenden κ, bei denen $[\ell+1, L-1]_0$ oder $[L, \ell]_0$ eine Nullstelle von $G_\lambda(\kappa_0)$ enthält, zusammen mit $\overline{K}_1 - 1$ und $\overline{K}_2 + 1$ der Größe nach ordnet.

Mit

$$G_\lambda(\kappa) = \varrho_\lambda(\kappa) \cdot \exp\left\{ i \cdot \omega_\lambda(\kappa) \right\}$$

$$\left(\lambda \text{ auf } \left[\max\{L, \ell+1\}, \min\{L-1, \ell\}\right]_0, \ \kappa \text{ auf } \left[\overline{K}_1^*, \overline{K}_2^*\right]_0 ; \ \varrho_\lambda(\kappa) > 0, \ \omega_\lambda(\kappa) \text{ in } [-\pi, \pi) \right)$$

gilt dann

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle \prod_{\kappa=K}^{k} \left\{ \prod_{\lambda=L}^{\ell} \left(G_\lambda(\kappa)^{c_\lambda} \right)_{\gamma_\lambda(\kappa)} \right\} = \prod_{\lambda=L}^{\ell} \left(\left\{ \prod_{\kappa=K}^{k} G_\lambda(\kappa) \right\}^{c_\lambda} \right)_{\gamma_0^{(\lambda)}(K; k)} \\ \left(\begin{array}{l} L \ \underline{\text{aus}} \ [L_1, L_2+1]_0, \quad \ell \ \underline{\text{aus}} \ [L_1-1, L_2]_0 ; \\ K \text{ aus } \left[\overline{K}_1^*, \overline{K}_2^*+1\right]_0, \quad k \text{ auf } \left\{ \begin{array}{ll} \left[\overline{K}_1^*-1, \overline{K}_2^*\right]_0 & \text{für } \ell \text{ aus } [L_1-1, L-1]_0, \\ \left[\overline{K}_1^*-1, \overline{K}_2\right]_0 & \text{für } \ell \text{ aus } [L-1, L_2]_0 \end{array} \right. \end{array} \right) \end{array} \right\} (98)$$

wenn für λ auf $\left[\max\{L, \ell+1\}, \min\{L-1, \ell\}\right]_0$ die ganzzahligen Funktionen $\gamma_0^{(\lambda)}(K; k)$ von k der Bedingung

$$\gamma_0^{(\lambda)}(K;k) = \sum_{\kappa=K}^{k} \gamma_\lambda(\kappa) + \underline{\left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k} \omega_\lambda(\kappa)\right) \Big/ 2\pi} \qquad \text{für } k \text{ auf } \left[\overline{K}_1^* - 1, \overline{K}_2^*\right]_0 . \tag{98a}$$

genügen.

<u>Beweis.</u> 1) Für k auf $\left[\overline{K}_1^* - 1, \overline{K}_2^*\right]_0$ ergibt sich

$$\prod_{\kappa=K}^{k} \left\{ \prod_{\lambda=L}^{\ell} \left(G_\lambda(\kappa)^{c_\lambda} \right)_{\gamma_\lambda(\kappa)} \right\} = \prod_{\kappa=K}^{k} \prod_{\lambda=L}^{\ell} \exp\left[c_\lambda \cdot \log_{\gamma_\lambda(\kappa)} G_\lambda(\kappa) \right]$$

$$= \prod_{\kappa=K}^{k} \exp \sum_{\lambda=L}^{\ell} \left\{ c_\lambda \cdot \log_{\gamma_\lambda(\kappa)} G_\lambda(\kappa) \right\} = \exp \sum_{\kappa=K}^{k} \sum_{\lambda=L}^{\ell} \left\{ c_\lambda \cdot \log_{\gamma_\lambda(\kappa)} G_\lambda(\kappa) \right\}$$

$$= \exp \sum_{\lambda=L}^{\ell} \left\{ c_\lambda \cdot \sum_{\kappa=K}^{k} \log_{\gamma_\lambda(\kappa)} G_\lambda(\kappa) \right\} = \exp \sum_{\lambda=L}^{\ell} \left\{ c_\lambda \cdot \log_{\gamma_0^{(\lambda)}(K;k)} \prod_{\kappa=K}^{k} G_\lambda(\kappa) \right\}$$

$$= \prod_{\lambda=L}^{\ell} \exp\left[c_\lambda \cdot \log_{\gamma_0^{(\lambda)}(K;k)} \prod_{\kappa=K}^{k} G_\lambda(\kappa) \right] = \prod_{\lambda=L}^{\ell} \left(\left\{ \prod_{\kappa=K}^{k} G_\lambda(\kappa) \right\}^{c_\lambda} \right)_{\gamma_0^{(\lambda)}(K;k)} ,$$

wenn man der Reihe nach (80), (80), (28), (88) und (80) anwendet.

2) Bei ℓ aus $[L, L_2]_0$ und $\overline{K}_2^* + 1 \leq \overline{K}_2$ liegt in $[L, \ell]_0$ eine Zahl ℓ_0 mit $G_{\ell_0}(\overline{K}_2^* + 1) = 0$ und $c_{\ell_0} > 0$; nach viermaliger Anwendung von Satz 9 erfährt man, daß für k auf $\left[\overline{K}_2^* + 1, \overline{K}_2\right]_0$ sowohl

$$\prod_{\lambda=L}^{\ell} \left(\left\{ G_\lambda\left(\overline{K}_2^* + 1\right) \right\}^{c_\lambda} \right)_{\gamma_\lambda(\overline{K}_2^* + 1)} \qquad \text{und damit die linke Seite von (98)}$$

als auch

$$\left(\left\{ \prod_{\kappa=K}^{k} G_{\ell_0}(\kappa) \right\}^{c_{\ell_0}} \right)_{\gamma_0^{(\ell_0)}(K;k)} \qquad \text{und damit die rechte Seite von (98)}$$

verschwindet.

Folgerung 1a.	Folgerung 1b.
Sei L ein ganzzahliger Parameter, aber ℓ eine ganzzahlige Variable;	Mit L und ℓ bezeichnen wir ganzzahlige Variable;

$\overline{K}_1-1$ und $\overline{K}_2+1$ sollen konsekutive Glieder derjenigen Zahlenkette sei, die entsteht,

> wenn man alle die Werte κ_0 von κ auf $[K_1, K_2]_0$, bei denen $[L_1, L_2]_0$ eine Zahl λ_0 mit $G_{\lambda_0}(\kappa_0) = 0$ und nicht-positivem c_{λ_0} enthält, zusammen mit K_1-1 und K_2+1 der Größe nach ordnet;

ferner sollen $\overline{K}_1^*-1$ und $\overline{K}_1^*+1$ konsekutive Glieder derjenigen Zahlenkette sein, die entsteht,

> wenn man alle die Werte κ_0 von κ auf $[\overline{K}_1, \overline{K}_2]_0$, bei denen $[L_1, L_2]_0$ eine Nullstelle von $G_\lambda(\kappa_0)$ enthält, zusammen
m mit $\overline{K}_1-1$ und $\overline{K}_2+1$ der Größe nach ordnet.

Mit

$$G_\lambda(\kappa) = \rho_\lambda(\kappa) \cdot \exp\{i \cdot \omega_\lambda(\kappa)\}$$

$$\left(\lambda \text{ auf } [L_1, L_2]_0,\ \kappa \text{ auf } [\overline{K}_1^*, \overline{K}_2^*]_0;\ \rho_\lambda(\kappa) > 0,\ \omega_\lambda(\kappa) \text{ in } [-\pi, \pi)\right)$$

gilt dann

$$\prod_{\kappa=K}^{k}\left\{\prod_{\lambda=L}^{\ell}\left(G_\lambda(\kappa)^{c_\lambda}\right)_{\gamma_\lambda(\kappa)}\right\} = \prod_{\lambda=L}^{\ell}\left(\left\{\prod_{\kappa=K}^{k} G_\lambda(\kappa)\right\}^{c_\lambda}\right)_{\gamma_0^{(\lambda)}(K;k)}$$

(99)	(100)
$\left(\begin{array}{l} L \text{ auf } [L_1, L_2+1]_0,\ \ell \text{ auf } [L_1-1, L_2]_0; \\ K \text{ auf } [\overline{K}_1^*, \overline{K}_2^*+1]_0, \\ k \text{ auf } \begin{cases} [\overline{K}_1^*-1, \overline{K}_2]_0 & \text{für } L = L_1, \\ [\overline{K}_1^*-1, \overline{K}_2^*]_0 & \text{für } L \text{ auf } [L_1+1, L_2+1]_0 \end{cases} \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{l} L \text{ auf } [L_1, L_2+1]_0,\ \ell \text{ auf } [L_1-1, L_2]_0; \\ K \text{ auf } [\overline{K}_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [\overline{K}_1^*-1, \overline{K}_2^*]_0 \end{array}\right),$

wenn für λ auf $[L_1, L_2]_0$ die ganzzahlige Funktion $\gamma_0^{(\lambda)}(K, k)$ der Bedingung

$$\gamma_0^{(\lambda)}(K;k) = \sum_{\kappa=K}^{k}\gamma_\lambda(\kappa) + \underline{\left(\pi + \sum_{\kappa=K}^{k}\omega_\lambda(\kappa)\right)\Big/2\pi} \qquad \text{für } k \text{ auf } [\overline{K}_1^*-1, K_2^*]_0 \qquad \begin{cases}(99a)\\(100a)\end{cases}$$

genügt.

Weitere Folgerungen aus Satz 11.

2a. Aus (98) mit $L_1 = L_2 = L = \ell = 1$ gewinnt man

$$\left.\begin{aligned}&\prod_{\kappa=K}^{k}\left(G(\kappa)^c\right)_{\gamma(\kappa)} = \left(\left\{\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa)\right\}^c\right)_{\gamma_0(K;k)}\\ &\left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\quad k \text{ auf } \begin{cases}[K_1^*-1, K_2^*]_0, & \text{falls } c \text{ nicht positiv;}\\ [K_1^*-1, K_2]_0, & \text{falls } c>0\end{cases}\right)\end{aligned}\right\}\tag{101}$$

unter der Bedingung

$$\gamma_0(K;k) = \sum_{\kappa=K}^{k}\gamma(\kappa) + \left\lfloor\left(\pi+\sum_{\kappa=K}^{k}\omega(\kappa)\right)\Big/ 2\pi\right\rfloor \quad \text{für } k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0; \tag{101a}$$

bei nicht-positivem c wird in Satz 11 nämlich $\overline{K}_1 = K_1^*$ und $\overline{K}_2 = K_2^*$,
bei positivem c dagegen $\overline{K}_1 = K_1$ und $\overline{K}_2 = K_2$,
während in beiden Fällen $\overline{K}_1^* = K_1^*$ und $\overline{K}_2^* = K_2^*$ gilt.

2b. Wir schreiben statt $G(\kappa)$ jetzt $G_2(\kappa)$ und statt $\{K_1^*, K_2^*\}$ jetzt $\{K_1^{I}, K_2^{II}\}$. Ist auch $G_1(\kappa)$ eine für κ auf $[K_1, K_2]_0$ erklärte Funktion von κ, so ordnen wir die in $[K_1^{II}, K_2^{II}]_0$ enthaltenen Nullstellen von $G_1(\kappa)$ zusammen mit $K_1^{II}-1$ sowie $K_2^{II}+1$ der Größe nach und bezeichnen mit $K_1^{I}-1$ und $K_2^{I}-1$ konsekutive Glieder der so entstandenen Zahlenkette. Die Relation

$$\left.\begin{aligned}&\prod_{\kappa=K}^{k}\left\{\frac{G_1(\kappa)}{G_2(\kappa)}\right\} = \prod_{\kappa=K}^{k} G_1(\kappa) \Big/ \prod_{\kappa=K}^{k} G_2(\kappa)\\ &\left(K \text{ aus } [K_1^{I}, K_2^{I}+1]_0,\quad k \text{ auf } [K_1^{I}-1, K_2^{I}]_0\right)\end{aligned}\right\}\tag{102}$$

geht aus (98) mit $L_1 = L = 1$, $L_2 = \ell = 2$, $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$ hervor, weil dann ja $\overline{K}_1 = K_1^{II}$ und $\overline{K}_2 = K_2^{II}$ sowie $\overline{K}_1^* = K_1^{I}$ und $\overline{K}_2^* = K_2^{I}$ wird.

3. Wählt man in (98) bzw. (99) bzw. (100) $c_\lambda = 1$ für λ auf $[L_1, L_2]_0$, so resultiert, weil $\overline{K}_1 = K_1$ und $\overline{K}_2 = K_2$ wird, folgendes weitere Tripel von Sätzen:

$G_0(\varkappa, \lambda)$ sei eine für $\varkappa$ auf $[K_1, K_2]_0$ und λ auf $[L_1, L_2]_0$ erklärte Funktion von $\varkappa$ und λ

Bedeuten L und ℓ ganzzahlige <u>Parameter</u>,	Bedeutet L einen ganzzahligen <u>Parameter</u>, aber ℓ eine ganzzahlige <u>Variable</u>,	Bedeuten L und ℓ ganzzahlige <u>Variable</u>

so sollen $\overline{K}_1^* - 1$ und $\overline{K}_2^* + 1$ konsekutive Glieder derjenigen Zahlenkette sein, die entsteht,

wenn man alle die Werte $\varkappa_0$ von $\varkappa$ auf $[K_1, K_2]_0$, bei denen

$[\ell+1, L-1]_0$ oder $[L, \ell]_0$	$[L_1, L_2]_0$	$[L_1, L_2]$

eine Nullstelle von $G_0(\varkappa_0, \lambda)$ enthält, zusammen mit $K_1 - 1$ und $K_2 + 1$ der Größe nach ordnet. Dann besteht die Beziehung

$$\prod_{\varkappa=K}^{k}\left\{\prod_{\lambda=L}^{\ell} G_0(\varkappa,\lambda)\right\} = \prod_{\lambda=L}^{\ell}\left\{\prod_{\varkappa=K}^{k} G_0(\varkappa,\lambda)\right\}$$

(103)	(104)	(105)
L <u>aus</u> $[L_1, L_2+1]_0$, ℓ <u>aus</u> $[L_1-1, L_2]_0$;	L <u>aus</u> $[L_1, L_2+1]_0$, ℓ <u>auf</u> $[L_1-1, L_2]_0$;	L <u>auf</u> $[L_1, L_2+1]_0$, ℓ <u>auf</u> $[L_1-1, L_2]_0$;
K aus $[\overline{K}_1^*, \overline{K}_2^*+1]_0$,	K aus $[\overline{K}_1^*, K_2^*+1]_0$,	K aus $[\overline{K}_1^*, \overline{K}_2^*+1]_0$,
k auf $\begin{cases} [\overline{K}_1^*-1, \overline{K}_2^*]_0 \text{ für } \ell \text{ aus } [L_1-1, L-1]_0; \\ [\overline{K}_1^*-1, K_2]_0 \text{ für } \ell \text{ aus } [L-1, L_2]_0. \end{cases}$	k auf $\begin{cases} [\overline{K}_1^*-1, K_2]_0 \text{ für } L = L_1, \\ [\overline{K}_1^*-1, \overline{K}_2^*]_0 \text{ für } L \text{ aus } [L_1+1, L_2+1]_0 \end{cases}$	k auf $[\overline{K}_1^*-1, \overline{K}_2^*]_0$

4. Seien ℓ_1 und $\ell_2 \geqq \ell_1 - 1$ sowie k_1 und $k_2 \geqq k_1 - 1$ ganze Zahlen; $g_\lambda(\varkappa)$ bzw. $\gamma_\lambda(\varkappa)$ bezeichnen eine für λ auf $[\ell_1, \ell_2]_0$ und $\varkappa$ auf $[k_1, k_2]_0$ erklärte Funktion bzw. ganzzahlige Funktion von λ und $\varkappa$, während C_λ eine für λ auf $[\ell_1, \ell_2]_0$ erklärte Funktion von λ bedeuten möge. Analog zu den auf $[K_1, K_2]_0$ und $G(\varkappa)$ bezüglichen Zahlenpaaren $\{K_1^*, K_2^*\}$ denken wir uns für $[\ell_1, \ell_2]_0$ und C_λ die Zahlenpaare $\{\ell_1^*, \ell_2^*\}$ definiert.

Diesmal beschränken wir uns auf den Fall ganzzahliger Parameter L und ℓ – lassen sich doch jene beiden anderen Fälle mühelos aus diesem folgern. Wir ordnen diejenigen Werte $\varkappa_0$ von $\varkappa$ auf $[k_1, k_2]_0$, für die $[\ell+1, L-1]_0$ oder $[L, \ell]_0$ eine Zahl λ_0 mit $C_{\lambda_0} = 0$ und nicht-positivem $g_{\lambda_0}(\varkappa_0)$ enthält, zusammen mit $k_1 - 1$ und $k_2 + 1$ der Größe nach, entnehmen der so entstandenen Zahlenkette zwei konsekutive Glieder, die wir $\overline{k}_1$ und $\overline{k}_2$ nennen, und benutzen nun (103) mit

$$L_1 = \min\{L, \ell+1\},\ L_2 = \max\{L-1, \ell\};\ K_1 = \overline{k}_1,\ K_2 = \overline{k}_2 \text{ und } G_0(\varkappa, \lambda) = \left(C_\lambda^{\ g_\lambda(\varkappa)}\right)_{\gamma_\lambda(\varkappa)}.$$

L liege in $[\ell_1^*, \ell_2^* + 1]_0$.
Bei ℓ aus $[\ell_1^* - 1, \ell_1^*]_0$ wird $K_1 = \overline{K}_1^* = k_1$ und $K_2 = \overline{K}_2^* = k_2$, so daß die Bedingungen zu (103) in

$$K \text{ aus } [k_1, k_2 + 1]_0, \quad k \text{ auf } [k_1 - 1, k_2]_0$$

übergehen.
Bei ℓ aus $[\ell_1 - 1, \ell_1^* - 2]_0$ oder $[\ell_2^* + 1, \ell_2]_0$ dürfen als Zahlenpaare $\{\overline{K}_1^* - 1, K_2^* + 1\}$ genau die Paare $\{N-1, N\}$ mit N aus $[\overline{k}_1, \overline{k}_2 + 1]_0$ gewählt werden; man hat demnach

$$K_1^* = N \quad \text{und} \quad K_2^* = N - 1 \qquad \text{mit } N \text{ aus } [\overline{k}_1, \overline{k}_2 + 1]_0$$

in die Gültigkeitsbedingungen (103) einzutragen, die sich in

$$K \text{ aus } [\overline{k}_1, \overline{k}_2 + 1]_0,\ k \text{ auf } \begin{cases} [K-1, K-1] & \text{für } \ell \text{ aus } [\ell_1 - 1, \ell_1^* - 2]_0, \\ [K-1, \overline{k}_2]_0 & \text{für } \ell \text{ aus } [\ell_2^* + 1, \ell_2]_0 \end{cases}$$

verwandeln. Somit erhält man

$$\prod_{\varkappa=K}^{k} \prod_{\lambda=L}^{\ell} \left(C_\lambda^{\ g_\lambda(\varkappa)}\right)_{\gamma_\lambda(\varkappa)} = \prod_{\lambda=L}^{\ell} \prod_{\varkappa=K}^{k} \left(C_\lambda^{\ g_\lambda(\varkappa)}\right)_{\gamma_\lambda(\varkappa)}$$

$$\left(\begin{array}{c} L \text{ aus } [\ell_1^*, \ell_2^* + 1]_0, \quad \ell \text{ aus } [\ell_1 - 1, \ell_2]_0; \\ K \text{ aus } [\overline{k}_1, \overline{k}_2 + 1]_0 \quad \text{und } k = K - 1, \quad \text{falls } \ell \text{ aus } [\ell_1 - 1, \ell_1^* - 2]_0; \\ K \text{ aus } [k_1, k_2 + 1]_0 \quad \text{und } k \text{ auf } [k_1 - 1, k_2]_0, \text{ falls } \ell \text{ aus } [\ell_1^* - 1, \ell_2^*]_0; \\ K \text{ aus } [\overline{k}_1, \overline{k}_2 + 1]_0 \quad \text{und } k \text{ auf } [K-1, \overline{k}_2]_0, \text{ falls } \ell \text{ aus } [\ell_2^* + 1, \ell_2]_0 \end{array} \right)$$

und gelangt bei Beachtung von (95), (103), (80) und (24) bzw. von (94) zu dem (95) bzw. (94) verallgemeinernden Ergebnis

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\prod_{\varkappa=K}^{k}\left\{\prod_{\lambda=L}^{l}\left(C_\lambda^{g_\lambda(\varkappa)}\right)_{\gamma_\lambda(\varkappa)}\right\} = \prod_{\lambda=L}^{l}\left\{C_\lambda^{\sum\limits_{\varkappa=K}^{k} g_\lambda(\varkappa)}\right\}\cdot \exp\left\{2\pi i\cdot\sum_{\lambda=L}^{l}\sum_{\varkappa=K}^{k}\left[g_\lambda(\varkappa)\cdot\gamma_\lambda(\varkappa)\right]\right\}\\[2ex] \left(\begin{array}{l} \qquad\qquad L \text{ aus } [l_1^*, l_2^*+1]_0,\ l \text{ aus } [l_1-1, l_2]_0;\\ K \text{ aus } [\bar{k}_1, \bar{k}_2+1]_0 \text{ und } k = K-1, \text{ falls } l \text{ aus } [l_1-1, l_1^*-2]_0;\\ K \text{ aus } [k_1, k_2+1]_0 \text{ und } k \text{ auf } [k_1-1, k_2]_0, \text{ falls } l \text{ aus } [l_1^*-1, l_2^*]_0;\\ K \text{ aus } [\bar{k}_1, \bar{k}_2+1]_0 \text{ und } k \text{ auf } [K-1, \bar{k}_2]_0, \text{ falls } l \text{ aus } [l_2^*+1, l_2]_0 \end{array}\right)\end{array}\right\}\ (106)$$

bzw.

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\prod_{\varkappa=K}^{k}\left\{\prod_{\lambda=L}^{l}\left(C_\lambda^{g_\lambda(\varkappa)}\right)_{\gamma_\lambda}\right\} = \prod_{\lambda=L}^{l}\left(C_\lambda^{\sum\limits_{\varkappa=K}^{k} g_\lambda(\varkappa)}\right)_{\gamma_\lambda}\\[2ex] \left(\begin{array}{l} \qquad\qquad L \text{ aus } [l_1^*, l_2^*+1]_0,\ l \text{ aus } [l_1^*-1, l_2]_0;\\ K \text{ aus } [k_1, k_2+1]_0 \text{ und } k \text{ auf } [k_1-1, k_2]_0, \text{ falls } l \text{ aus } [l_1^*-1, l_2^*]_0;\\ K \text{ aus } [\bar{k}_1, \bar{k}_2+1]_0 \text{ und } k \text{ auf } [K, \bar{k}_2]_0, \text{ falls } l \text{ aus } [l_2^*+1, l_2]_0 \end{array}\right)\end{array}\right\}\ (107)$$

worin mit γ_λ eine für λ auf $[l_1, l_2]_0$ erklärte ganzzahlige Funktion von λ gemeint ist.

Satz 12a. Bedeutet L einen ganzzahligen Parameter, $h(\varkappa)$ eine für $\varkappa$ auf $[K_1, K_2+1]_0$ erklärte Funktion von $\varkappa$, ~~und~~ $\gamma(\varkappa)$ (wie schon in §5) eine für $\varkappa$ auf $[K_1, K_2]_0$ erklärte ganzzahlige Funktion von $\varkappa$, so gilt

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\prod_{\varkappa=K}^{k}\left(G(\varkappa)^{h(\varkappa)}\right)_{\gamma(\varkappa)} = \frac{\left(\left\{\prod\limits_{\varkappa=L}^{k} G(\varkappa)\right\}^{h(k+1)}\right)_{\gamma_0(L;l)}}{\left(\left\{\prod\limits_{\varkappa=L}^{K-1} G(\varkappa)\right\}^{h(K)}\right)_{\gamma_0(L;K-1)}\cdot\prod\limits_{\varkappa=K}^{k}\left(\left\{\prod\limits_{\lambda=L}^{\varkappa} G(\lambda)\right\}^{h(\varkappa+1)-h(\varkappa)}\right)_{\gamma_0(L;\varkappa)}}\\[2ex] \left(L \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0;\ \ K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ \ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0\right)\end{array}\right\}\ (108)$$

mit

$$\gamma_0(L;k) = \sum_{\kappa=L}^{k} \gamma(\kappa) + \left\lfloor \left(\pi + \sum_{\kappa=L}^{k} \omega(\kappa)\right) \Big/ 2\pi \right\rfloor , \tag{108a}$$

wobei $\omega(\kappa)$ die durch (81) festgelegte Bedeutung besitzt.

<u>Beweis.</u> Man bestätigt zunächst, daß bei L aus $[K_1^*, K_2^*+1]_0$ für K <u>nur</u> Werte aus $[K_1^*, K_2^*+1]_0$ in Frage kommen, und daß die rechte Seite der Formel <u>genau</u> für k auf $[K_1^*-1, K_2^*]_0$ existiert.

In Satz 5 wählt man $N_1 = n_1 = K_1^*$ und $N_2 = n_2 = K_2^*$, $M = L$, $F(\nu) = \log_{\gamma(\nu)} G(\nu)$ und $f(\nu) = h(\nu)$, schreibt alsdann K, k, κ statt N, n, ν und formt mit Hilfe dieser Gleichung die linke Seite von (108) um, indem man sich außer auf (80) vor allem auf (88) stützt.

<u>Folgerungen aus Satz 12a.</u>

1. Mit $h(\kappa) = 1$ für κ auf $[K_1, K_2+1]_0$ reduziert sich (108) auf die Identität

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) = \prod_{\kappa=L}^{k} G(\kappa) \Big/ \prod_{\kappa=L}^{K-1} G(\kappa) \\ &\left(L \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0;\ K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2]_0\right) \end{aligned}\right\} \tag{109a}$$

deren gegenüber (108) erweiterter Gültigkeitsbereich – wie von jetzt ab Gültigkeitsbereiche öfters – durch nachträgliche Einbeziehung des Falls verschwindender Produkte zustande kommt. Als Gegenstück zu (109a) ist

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) = \prod_{\kappa=K}^{L} G(\kappa) \Big/ \prod_{\kappa=k+1}^{L} G(\kappa) \\ &\left(L \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0;\ K \text{ aus } [K_1, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0\right) \end{aligned}\right\} \tag{109b}$$

anzusehen, worin wie in

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\kappa=k}^{K} G(\kappa) = 1 \Big/ \prod_{\kappa=K+1}^{k-1} G(\kappa) \\ &\left(K \text{ aus } [K_1^*-1, K_2^*]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*, K_2^*+1]_0\right) \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

ein Produkt mit variabler <u>unterer</u> Multiplikationsgrenze auftritt; $\prod_{\kappa=k}^{K} G(\kappa)$ ist bei K aus $[K_1^*-1, K_2^*]_0$ für k auf $[K_1, K_2^*+1]_0$ definiert, genau für k auf $[K_1^*, K_2^*+1]_0$ von Null verschieden und genügt der (59) gegenüberstehenden Funktionalgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\varkappa=k}^{K} G(\varkappa) = G(k)\cdot\prod_{\varkappa=k+1}^{K} G(\varkappa) \\ &\left(K \text{ aus } [K_1^*-1, K_2^*]_0\,,\; k \text{ auf } [K_1, K_2^*]_0\right), \end{aligned}\right\} \quad (111)$$

der man übrigens

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa) = G(K)\cdot\prod_{\varkappa=K+1}^{k} G(\varkappa) \\ &\left(K \text{ aus } [\max\{K_1, K_1^*-1\}, K_2^*]_0\,,\; k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2]_0\right) \end{aligned}\right\} \quad (111a)$$

entnimmt. Bezeichnen wir mit $K_{I}-1, K_{II}, K_{III}+1$ drei konsekutive Glieder der aus den Nullstellen von $G(\varkappa)$ in uns geläufiger Weise gebildeten Zahlenkette, so können wir die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa)\cdot\prod_{\varkappa=k}^{K} G(\varkappa) = G(k)\cdot G(K) \\ &\left(K \text{ aus } [K_1, K_2]_0,\; k \text{ auf } \begin{cases} [\max\{K_1, K_1^*-1\}, \min\{K_2, K_2^*+1\}]_0 & \text{für } K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*]_0, \\ [\max\{K_1, K_{I}-1\}, \min\{K_2, K_{III}+1\}]_0 & \text{für } K = K_{II} \end{cases}\right) \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

aufstellen. Wie die fünf eben formulierten Relationen sind auch

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa) = \prod_{\varkappa=K}^{L-1} G(\varkappa)\cdot\prod_{\varkappa=L}^{k} G(\varkappa) \\ &\left(L \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0\,;\; K \text{ aus } [K_1, K_2^*+1]_0\,,\; k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2]_0\right) \end{aligned}\right\} \quad (113)$$

und

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa) = \prod_{\varkappa=K}^{L-1} G(\varkappa)\cdot G(L)\cdot\prod_{\varkappa=L+1}^{k} G(\varkappa) \\ &\left(L \text{ aus } [\max\{K_1, K_1^*-1\}, K_2^*]_0\,;\; K \text{ aus } [K_1, K_2^*+1]_0\,,\; k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2]_0\right) \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

mit (109a) verwandt.

L_1 und $L_2 \geq L_1$ seien ganze Zahlen, L und ℓ ganzzahlige Parameter; die Funktion M_λ von λ variiere in $[K_1, K_2+1]_0$ für λ auf $[L_1, L_2]_0$, und bei ℓ aus $[L_1, L_2]_0$ soll $\{K_1^{(\ell)}, K_2^{(\ell)}\}$ dasjenige

Zahlenpaar $\{K_1^*, K_2^*\}$ bedeuten, auf das die Aussage M_ℓ in $[K_1^*, K_2^*+1]_0$ zutrifft. Mit Hilfe dieser Beziehungen läßt sich (113) zu

$$\left.\begin{aligned}
&\prod_{\varkappa = M_L}^{M_\ell - 1} G(\varkappa) = \prod_{\lambda = L}^{\ell - 1} \prod_{\varkappa = M_\lambda}^{M_{\lambda+1} - 1} G(\varkappa) \\
&\left(\begin{gathered} L \text{ aus } [L_1, L_2]_0,\ \ell \text{ aus } [L_1, L_2]_0; \\ M_\lambda \text{ in } \begin{cases} [K_1^*, K_2^*+1]_0 & \text{für } \lambda \text{ auf } [\ell, L]_0, \text{ falls } \ell \text{ aus } [L_1, L-1]_0 \\ [K_1^{(\lambda-1)}, K_2+1]_0 & \text{für } \lambda \text{ auf } [L+1, \ell]_0, \text{ falls } \ell \text{ aus } [L, L_2]_0 \end{cases} \end{gathered} \right)
\end{aligned}\right\} \quad (115)$$

verallgemeinern.

2. Mit $h(\varkappa) = \varkappa$ für $\varkappa$ auf $[K_1, K_2+1]_0$ wird (108) zu

$$\left.\begin{aligned}
&\prod_{\varkappa = K}^{k} \left\{ G(\varkappa)^{\varkappa} \right\} = \frac{\left\{ \prod_{\varkappa = L}^{k} G(\varkappa) \right\}^{k+1}}{\left\{ \prod_{\varkappa = L}^{K-1} G(\varkappa) \right\}^{K} \cdot \prod_{\varkappa = K}^{k} \prod_{\lambda = L}^{\varkappa} G(\lambda)} \\
&\left(L \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0;\ K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0 \right),
\end{aligned}\right\} \quad (116)$$

woraus sich

$$\left.\begin{aligned}
&\prod_{\varkappa = K}^{k} \left\{ G(\varkappa)^{\varkappa - K} \right\} = \left\{ \prod_{\varkappa = L}^{k} G(\varkappa) \right\}^{k+1-K} \Big/ \prod_{\varkappa = K}^{k} \prod_{\lambda = L}^{\varkappa} G(\lambda) \\
&\left(L \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0;\ K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0 \right.
\end{aligned}\right\} \quad (117)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&\prod_{\varkappa = K}^{k} \left\{ G(\varkappa)^{k+1-\varkappa} \right\} = \prod_{\varkappa = K}^{k} \prod_{\lambda = K}^{\varkappa} G(\lambda) \\
&\left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2]_0 \right.
\end{aligned}\right\} \quad (118)$$

herleiten lassen.

Satz 12b. Sind die ganzen Zahlen k_1 und k_2 den Einschränkungen $k_1 \leqq K_1$ und $k_2 \geqq K_2$ unterworfen, bezeichnen ferner M und L ganzzahlige Parameter, und bedeutet schließlich $g(\kappa)$ eine für κ auf $[k_1, k_2]_0$ erklärte Funktion von κ, so besteht die Relation

$$\left.\begin{aligned}&\prod_{\kappa=K}^{k}\prod_{\lambda=M}^{\kappa-1}\left(G(\kappa)^{g(\lambda)}\right)_{\gamma(\kappa)} = \frac{\prod\limits_{\kappa=L}^{k}\prod\limits_{\lambda=M}^{k}\left(G(\kappa)^{g(\lambda)}\right)_{\gamma(\kappa)}}{\prod\limits_{\kappa=L}^{K-1}\prod\limits_{\lambda=M}^{K-1}\left(G(\kappa)^{g(\lambda)}\right)_{\gamma(\kappa)}\cdot\prod\limits_{\kappa=K}^{k}\prod\limits_{\lambda=L}^{\kappa}\left(G(\lambda)^{g(\kappa)}\right)_{\gamma(\lambda)}}\\&\left(M \text{ aus } [k_1, k_2+1]_0,\ L \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0;\ K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0\right)\end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Der Beweis, der Satz 5 mit $F(\nu) = \log_{\gamma(\nu)} G(\nu)$ und $f(\nu) = \sum_{\lambda=M}^{\nu-1} g(\lambda)$ benutzt, ist einfacher als die Herleitung aus Satz 12a mit $h(\kappa) = \sum_{\lambda=M}^{\kappa-1} g(\kappa)$.

Als Folgerung notieren wir die Formel

$$\left.\begin{aligned}&\prod_{\kappa=K}^{k}\left\{\prod_{\lambda=L}^{\kappa}\left(G(\lambda)^{g(\kappa)}\right)_{\gamma(\lambda)}\cdot\prod_{\lambda=M}^{\kappa-1}\left(G(\kappa)^{g(\lambda)}\right)_{\gamma(\kappa)}\right\} = \prod_{\kappa=L}^{k}\prod_{\lambda=M}^{k}\left(G(\kappa)^{g(\lambda)}\right)_{\gamma(\kappa)}\Big/\prod_{\kappa=L}^{K-1}\prod_{\lambda=M}^{K-1}\left(G(\kappa)^{g(\lambda)}\right)_{\gamma(\kappa)}\\&\left(L \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ M \text{ aus } [k_1, k_2+1]_0;\ K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2]_0\right).\end{aligned}\right\} \quad (120)$$

Satz 12c. Auch weiterhin bedeute L einen ganzzahligen Parameter sowie $g(\kappa)$ eine für κ auf $[k_1, k_2]_0$ erklärte Funktion von κ $(k_1 \leqq K_1,\ k_2 \geqq K_2)$; mit $H(\kappa)$ bzw. $\delta(\kappa)$ bezeichnen wir eine für κ auf $[K_1, K_2+1]_0$ erklärte Funktion bzw. ganzzahlige Funktion von κ, während die Zahlenpaare $\{J_1^*, J_2^*\}$ diejenige Bedeutung für $[K_1, K_2+1]_0$ und $H(\kappa)$ haben sollen, die die Paare $\{K_1^*, K_2^*\}$ bezüglich $[K_1, K_2]_0$ und $G(\kappa)$ besitzen. Dann gilt

$$\prod_{\varkappa=K}^{k}\left(H(\varkappa)^{g(\varkappa)}\right)_{\delta(\varkappa)} = \frac{\left(H(k+1)^{\sum_{\varkappa=L}^{k} g(\varkappa)}\right)_{\delta(k+1)}}{\left(H(K)^{\sum_{\varkappa=L}^{K-1} g(\varkappa)}\right)_{\delta(K)} \cdot \prod_{\varkappa=K}^{k}\left\{\left(H(\varkappa+1)^{\sum_{\lambda=L}^{\varkappa} g(\varkappa)}\right)_{\delta(\varkappa+1)} \Big/ \left(H(\varkappa)^{\sum_{\lambda=L}^{\varkappa} g(\varkappa)}\right)_{\delta(\varkappa)}\right\}}$$

$$\left(L \text{ aus } [k_1, k_2+1]_0 \text{ ; } K \text{ aus } [J_1^*, J_2^*]_0 \text{ , } k \text{ auf } [J_1^*-1, J_2^*-1]_0\right). \qquad (123)$$

Beweis. Diesmal verwendet man ~~xxxxx~~ Satz 5 mit $N_1 = k_1$ und $N_2 = k_2$, $n_1 = J_1^*$ und $n_2 = J_2^*-1$ (also $n_1 \geqq N_1$ und $n_2 \leqq N_2$), $M=L$, $F(\nu) = g(\nu)$ und $f(\nu) = \log_{\delta(\nu)} H(\nu)$.

Folgerungen aus Satz 12c.

1. Von (121) mit $g(\varkappa) = 1$ für jeden Wert von $\varkappa$ gelangt man, wenn man $L=1$ wählt, zu der Beziehung

$$\prod_{\varkappa=K}^{k} H(\varkappa) = \frac{H(k+1)^{k}}{H(K)^{K-1} \cdot \prod_{\varkappa=K}^{k}\left(\left\{\frac{H(\varkappa+1)}{H(\varkappa)}\right\}^{\varkappa}\right)}$$

$$\left(\begin{array}{l} K \text{ aus } [J_1^*, J_2^*]_0 \text{ und } k \text{ auf } [J_1^*-1, J_2^*-1]_0 \text{ , falls } J_2^* \neq 0, \\ K \text{ aus } [J_1^*, J_2^*+1]_0 \text{ und } k \text{ auf } [J_1^*-1, J_2^*]_0 \text{ , falls } J_2^* = 0 \end{array}\right), \qquad (122)$$

während sich für $L=K$ die Formel

$$\prod_{\varkappa=K}^{k} H(\varkappa) = H(k+1)^{k-K+1} \Big/ \prod_{\varkappa=K}^{k}\left(\left\{\frac{H(\varkappa+1)}{H(\varkappa)}\right\}^{\varkappa-K+1}\right)$$

$$\left(K \text{ aus } [K_1, K_2+1]_0 \text{ , } k \text{ auf } \begin{cases} [J_1^*-1, J_2^*-1]_0 & \text{für } K \text{ aus } [J_1^*, J_2^*]_0 \\ [J_1^*-1, J_2^*]_0 & \text{für } K = J_2^*+1 \end{cases}\right) \qquad (123)$$

ergibt.

~~Bei der mit~~

2. Bei der mit

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle \prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa) \Big/ \prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa-1) = G(k)/G(k-1) \\[2ex] \left(K \text{ aus } [K_1^*+1, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*, \min\{K_2, K_2^*+1\}]_0\right)\end{array}\right\} \quad (124)$$

zusammenhängenden, für jede ganze Zahl K_0 gültigen Relation

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle \prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa) = \prod_{\varkappa=K-K_0}^{k-K_0} G(\varkappa+K_0) \\[2ex] \left(K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0\right)\end{array}\right\} \quad (125)$$

weisen wir einmal auf die verschiedenartigen Beweismöglichkeiten hin:

Erstens läßt sich diese Formel aus (121) mit

$$k_1 = K_1-1,\ k_2 = K_2;\ g(\varkappa) = \begin{cases} 1 & \text{für } \varkappa = K_1-1, \\ 0 & \text{für } \varkappa = [K_1, K_2]_0; \end{cases} \quad H(\varkappa) = \begin{cases} 1 \text{ für } \varkappa = K_1, \\ G(\varkappa-1) \text{ für } \varkappa \text{ auf } [K_1+1, K_2+1]_0 \end{cases}$$

gewinnen, zweitens aus der ihr entsprechenden Summen-Relation (48), und drittens führt natürlich Anwendung von Satz 7 zum Ziel.

Satz 12d. Behalten k_1 und k_2 $(k_1 \leq K_1, k_2 \geq K_2)$, M und L sowie $g(\varkappa)$ ihre bisherige Bedeutung bei, so können wir neben (119) die Beziehung

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle \prod_{\varkappa=K}^{k} \prod_{\lambda=M}^{\varkappa-1} \left(G(\lambda)^{g(\varkappa)}\right)_{\gamma(\lambda)} = \frac{\displaystyle \prod_{\varkappa=L}^{k} \prod_{\lambda=M}^{k} \left(G(\lambda)^{g(\varkappa)}\right)_{\gamma(\lambda)}}{\displaystyle \prod_{\varkappa=L}^{K-1} \prod_{\lambda=M}^{K-1} \left(G(\lambda)^{g(\varkappa)}\right)_{\gamma(\lambda)} \cdot \prod_{\varkappa=K}^{k} \prod_{\lambda=L}^{\varkappa} \left(G(\varkappa)^{g(\lambda)}\right)_{\gamma(\varkappa)}} \\[2ex] \left(M \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ L \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0;\ K \text{ aus } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0\right)\end{array}\right\} (126)$$

stellen.

Der Beweis, der sich auf Satz 5 mit $F(\nu) = \sum_{\lambda=M}^{\nu-1} \log_{\gamma(\lambda)} G(\lambda)$ und $f(\nu) = g(\nu)$ stützt, ist bequemer als die Herleitung aus Satz 12c mit $H(\varkappa) = \prod_{\lambda=M}^{\varkappa-1} G(\lambda)$.

~~Die Folgerung~~

Die Folgerung

$$\left.\begin{gathered}\prod_{\kappa=K}^{k}\left\{\prod_{\lambda=L}^{\kappa}\left(G(\kappa)^{g(\lambda)}\right)_{\gamma(\kappa)}\cdot\prod_{\lambda=M}^{\kappa-1}\left(G(\lambda)^{g(\kappa)}\right)_{\gamma(\lambda)}\right\}=\prod_{\kappa=L}^{k}\prod_{\lambda=M}^{k}\left(G(\lambda)^{g(\kappa)}\right)_{\gamma(\lambda)}\Bigg/\prod_{\kappa=L}^{K-1}\prod_{\lambda=M}^{K-1}\left(G(\lambda)^{g(\kappa)}\right)_{\gamma(\lambda)}\\ \left(L\text{ auf }[K_1^*,K_2^*+1]_0,\ M\text{ auf }[K_1^*,K_2^*+1]_0;\ K\text{ auf }[K_1^*,K_2^*+1]_0,\ k\text{ auf }[K_1^*-1,K_2]_0\right)\end{gathered}\right\}\quad(127)$$

steht gemeinsam mit (120) der Summen-Relation (30) gegenüber.

Satz 13. Bei K aus $[K_1,K_2+1]_0$ und jedem Wert von k auf $[K_1-1,K_2]_0$ sei $\varphi_{K,k}(\kappa)$, wenn wir abkürzend $\min\{K,k+1\}=k'$ und $\max\{K-1,k\}=k''$ setzen,

eine für κ auf $[k',k'']_0$ erklärte
und selbst auf $[k',k'']_0$ variierende Funktion von κ.

Dann besteht die Beziehung

$$\left.\begin{gathered}\prod_{\kappa=K}^{k}G(\kappa)=\prod_{\kappa=K}^{k}G\left\{\varphi_{K,k}(\kappa)\right\}\\ \left(K\text{ auf }[K_1^*,K_2^*+1]_0,\ k\text{ auf }[K_1^*-1,K_2]_0\right),\end{gathered}\right\}\quad(128)$$

zu deren Beweis für k auf $[K_1^*-1,K_2^*]_0$ Satz 6 [1] herangezogen wird.

Als Folgerungen aus Satz 13 nennen wir zunächst die Formeln

$$\prod_{\kappa=K}^{k}G(\kappa)=\left\{\begin{aligned}&\prod_{\kappa=K}^{k}G(K+k-\kappa), &&(129)\\ &\prod_{\kappa=K+K_0}^{k+K_0}G(K_0+K+k-\kappa), &&(130)\\ &\prod_{\kappa=K_0-k}^{K_0-K}G(K_0-\kappa), &&(131)\\ &\prod_{\kappa=-k}^{-K}G(-\kappa), &&(131a)\end{aligned}\right\}\begin{pmatrix}K\text{ auf }[K_1^*,K_2^*+1]_0,\\ k\text{ auf }[K_1^*-1,K_2]_0\end{pmatrix}$$

in denen K_0 eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

---

[1]) und für k auf $[K_2^*+1,K_2]_0$ natürlich Satz 9.

Mit k_0 eine natürliche Zahl bezeichnend, wählen wir, weil von $\prod_{\kappa=K}^{k} G(k_0\cdot\kappa)$ die Rede sein soll, K aus $[K_1/k_0, K_2/k_0+1]_0$, setzen erstens

$$K_1^{(K)} = \begin{cases} K_1, \text{ falls } K = \lfloor (K_1-1)k_0 \rfloor + 1, \\ K_1^*, \text{ falls } k_0\cdot(K-1) \text{ in } [K_1^*, K_2^*]_0, \\ K_2^*+2, \text{ falls } k_0\cdot(K-1) = K_2^*+1, \end{cases}$$

sowie zweitens

$$K_2^{(K)} = \begin{cases} K_2^*, \text{ falls } k_0\cdot K+1 \text{ in } [K_1^*, K_2^*+1]_0 \\ K_2, \text{ falls } K = \lfloor K_2/k_0 \rfloor + 1, \end{cases}$$

und haben damit $K_1^{(K)}$ sowie $K_2^{(K)}$ für K aus $[K_1/k_0, K_2/k_0+1]_0$ erklärt. Für κ auf $[K_1^{(K)}, k_0\cdot(K-1)]_0$ und für κ auf $[k_0\cdot K+1, K_2^{(K)}]_0$ bleibt $G(\kappa)\neq 0$. Nachdem die Existenz von $\prod_{\kappa=K}^{k} \prod_{\lambda=k_0\cdot\kappa}^{k_0\cdot(K+k-\kappa)} G(\lambda)$ für k auf $[K_1^{(K)}/k_0-1, \min\{K_2, K_2^{(K)}+1\}/k_0]_0$ mit Hilfe von Satz 9 gesichert ist, bereitet der Rest des Beweises von

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\prod_{\kappa=K}^{k} G(k_0\cdot\kappa) = \prod_{\kappa=0}^{k-K} \prod_{\lambda=k_0\cdot(K+\kappa)}^{k_0\cdot(k-\kappa)} G(\lambda) \\ \left(k_0 \geqq 1;\ K \text{ auf } [K_1/k_0, K_2/k_0+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^{(K)}/k_0-1, \min\{K_2, K_2^{(K)}+1\}/k_0]_0\right) \end{array}\right\} \quad (132)$$

keine Schwierigkeiten, und wir lassen ihn (seiner Weitläufigkeit wegen) fort.

Eine andere Folgerung aus Satz 13 ist die ebenfalls für jede natürliche Zahl k_0 bestehende Identität

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\prod_{\kappa=K}^{k} G(\kappa) = \prod_{\lambda=0}^{k_0-1} \prod_{\kappa=\lfloor (K-1-\lambda)/k_0 \rfloor+1}^{\lfloor (k-\lambda)/k_0 \rfloor} G(k_0\cdot\kappa+\lambda) \\ \left(k_0 \geqq 1;\ K \text{ auf } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2]_0\right) \end{array}\right\} \quad (133)$$

mit dem Spezialfall

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\prod_{\kappa=k_0\cdot K}^{k_0\cdot k-1} G(\kappa) = \prod_{\lambda=0}^{k_0-1} \prod_{\kappa=K}^{k-1} G(k_0\cdot\kappa+\lambda) \\ \left(k_0 \geqq 1;\ K \text{ auf } [K_1^*/k_0, (K_2^*+1)/k_0]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*/k_0, (K_2+1)/k_0]_0\right). \end{array}\right\} \quad (134)$$

Schließlich gehört hierher die unter der Voraussetzung

$$\gamma_0(K;k) = \left\lfloor \left(\pi + k_0 \cdot \sum_{\varkappa=K}^{k} \omega(\varkappa)\right)\Big/ 2\pi \right\rfloor \quad \text{für } k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2^*]_0 \qquad (135a)$$

gültige Relation

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa) = \left(\left\{\prod_{\varkappa=k_0 \cdot K}^{k_0\cdot(k+1)-1} G\left(\lfloor \varkappa/k_0 \rfloor\right)\right\}^{\frac{1}{k_0}}\right)_{\gamma_0(K;k)} \\ &\left(k_0 \geqq 1;\ K \text{ auf } [K_1^*, K_2^*+1]_0,\ k \text{ auf } [K_1^*-1, K_2]_0\right), \end{aligned}\right\} \qquad (135)$$

die man am leichtesten aus (58) und (101) ableitet: Für k auf $[K_1^*-1, K_2^*]_0$ gilt

$$\prod_{\varkappa=K}^{k} G(\varkappa) = \exp \sum_{\varkappa=K}^{k} \log G(\varkappa) = \exp \sum_{\varkappa=k_0\cdot K}^{k_0\cdot(k+1)-1} \left\{\frac{1}{k_0} \cdot \log G\left(\lfloor \varkappa/k_0 \rfloor\right)\right\} = \prod_{\varkappa=k_0\cdot K}^{k_0\cdot(k+1)-1} G\left(\lfloor \varkappa/k_0 \rfloor\right)^{\frac{1}{k_0}} \Big\} = \left(\left\{\prod_{\varkappa=k_0\cdot K}^{k_0\cdot(k+1)-1} G\left(\lfloor \varkappa/k_0 \rfloor\right)\right\}^{\frac{1}{k_0}}\right)_{\gamma_0(K;k)}$$

während (135a) aus (101a), also aus

$$\gamma_0(K;k) = \left\lfloor \left(\pi + \sum_{\varkappa=k_0\cdot K}^{k_0\cdot(k+1)-1} \omega\left(\lfloor \varkappa/k_0 \rfloor\right)\right)\Big/ 2\pi \right\rfloor,$$

erst dann hervorgeht, wenn man (58) nochmals heranzieht.

§ 7. Anhang.

Mit a, b und c bezeichnen wir reelle Zahlen, die den Bedingungen $a \neq 0$ und $4ac \neq b^2$ genügen; ferner sei x eine reelle Variable sowie $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \equiv \left(x^{\frac{1}{2}}\right)_0$; schließlich werde $ax^2 + bx + c = X$ gesetzt.

1. Als Anwendungsbeispiel für einige Formeln des Kalküls wollen wir – besonders behutsam vorgehend – die bei frei variablem (ganzzahligem) n geltende Rekursionsformel

$$\int \frac{dx}{X^n \sqrt{X}} = \frac{2}{(2n-1)\cdot(4ac-b^2)} \cdot \frac{2ax+b}{X^{n-1}\sqrt{X}} + \frac{8(n-1)a}{(2n-1)(4ac-b^2)} \cdot \int \frac{dx}{X^{n-1}\sqrt{X}} \quad (X \neq 0) \qquad (1)$$

auswerten.

Bei jedem Wert des (ganzzahligen) Parameters N gebe es ein die Zahl $N+1$ enthaltendes Intervall $[M_1^{(N)}, M_2^{(N)}]_0$ mit einer für ν auf $[M_1^{(N)}, M_2^{(N)}]_0$ erklärten Funktion $C_\nu^{(N)}$ von ν. Falls

$$C_\nu^{(N)} = \frac{8(\nu-1)a}{(2\nu-1)(4ac-b^2)}\cdot C_{\nu+1}^{(N)} \qquad \text{für } \nu \text{ auf } [M_1^{(N)}, M_2^{(N)}-1]_0 \qquad (2)$$

klein

gilt, kann man von (1) aus, wenn man noch $\int\frac{dx}{X^n\sqrt{X}} = J_n$ setzt, über

klein

$$C_{\nu+1}^{(N)}\cdot J_\nu = C_{\nu+1}^{(N)}\frac{2}{(2\nu-1)(4ac-b^2)}\cdot\frac{2ax+b}{X^{\nu-1}\sqrt{X}} + C_\nu^{(N)}\cdot J_{\nu-1} \qquad \left(\nu \text{ auf } [M_1^{(N)}, M_2^{(N)}-1]_0\right)$$

wegen (25) und (45) zu

$$C_{N+1}^{(N)}\cdot J_N = \sum_{\nu=n}^{N} C_{\nu+1}^{(N)}\cdot\frac{2}{(2\nu-1)(4ac-b^2)}\cdot\frac{2ax+b}{X^{\nu-1}\sqrt{X}} + C_n^{(N)} J_{n-1} \qquad \left(n \text{ auf } [M_1^{(N)}, M_2^{(N)}]_0\right) \quad (3)$$

klein

gelangen. Die Forderung, außer (2) solle noch

klein

$$C_{N+1}^{(N)} = 1 \qquad (4)$$

klein

gelten, ist gemäß (111) bei der Funktion

$$C_\nu^{(N)} = \prod_{\kappa=\nu}^{N} \frac{8(\kappa-1)a}{(2\kappa-1)(4ac-b^2)} \qquad (5)$$

klein

erfüllt, die erstens bei $N \leqq 0$ wegen $K_1^* \leqq K_2^* = 0$ für $\nu \leqq 1$ und zweitens bei $N \geqq 1$ wegen $2 = K_1^* \leqq K_2^*$ für jeden Wert von ν definiert ist; so wählen wir denn $M_1^{(N)} \leqq M_2^{(N)} = 1$ für $N \leqq 0$. Aus (3) klein mit (4) klein und (5) klein wird

$$J_N = \sum_{\nu=n}^{N}\left\{\left(\prod_{\kappa=\nu+1}^{N} \frac{8(\kappa-1)a}{(2\kappa-1)(4ac-b^2)}\right)\cdot\frac{2}{(2\nu-1)(4ac-b^2)}\cdot\frac{2ax+b}{X^{\nu-1}\sqrt{X}} + \left(\prod_{\kappa=n}^{N}\frac{8(\kappa-1)a}{(2\kappa-1)(4ac-b^2)}\right)\cdot J_{n-1},\right.$$

$$(n \leqq 1, \text{ falls } N \leqq 0)$$

woraus man für $n=1$ die bei jedem Wert von N gültige Formel

$$\int\frac{dx}{X^N\sqrt{X}} = (2ax+b)\sqrt{X}\cdot\sum_{\nu=1}^{N} \frac{2^{3N-3\nu+1}\,a^{N-\nu}}{(4ac-b^2)^{N-\nu+1}}\cdot\frac{\prod_{\kappa=\nu}^{N-1}\kappa}{\prod_{\kappa=\nu}^{N}(2\kappa-1)}\cdot\frac{1}{X^\nu} + \left(\frac{8a}{4ac-b^2}\right)^N\frac{\prod_{\kappa=0}^{N-1}\kappa}{\prod_{\kappa=1}^{N}(2\kappa-1)}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{X}} \qquad (X \neq 0) \quad (136)$$

erhält, nachdem man die Umformung

$$\left\{\prod_{\kappa=\nu+1}^{N}\frac{8(\kappa-1)a}{(2\kappa-1)\cdot(4ac-b^2)}\right\}\cdot\frac{1}{2\nu-1}=\prod_{\kappa=\nu+1}^{N}\frac{8a}{4ac-b^2}\cdot\frac{\prod\limits_{\kappa=\nu+1}^{N}(\kappa-1)}{\left\{\prod\limits_{\kappa=\nu+1}^{N}(2\kappa-1)\right\}(2\nu-1)}=\left(\frac{8a}{4ac-b^2}\right)^{N-\nu}\cdot\frac{\prod\limits_{\kappa=\nu}^{N-1}\kappa}{\prod\limits_{\kappa=\nu}^{N}(2\nu-1)}$$

vorgenommen hat.

1a. Während sich (136) für $N\geq1$ auf

$$\int\frac{dx}{X^N\sqrt{X}}=(2ax+b)\cdot\sqrt{X}\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\frac{2^{3N-3\nu+1}\cdot a^{N-\nu}}{(4ac-b^2)^{N-\nu+1}}\left\{\prod_{\kappa=\nu}^{N-1}\kappa\Big/\prod_{\kappa=\nu}^{N}(2\kappa-1)\right\}\cdot\frac{1}{X^\nu}\qquad(N\geq1;\,X\neq0)\qquad(136a)$$

reduziert, besteht für $N=-M$ mit $M\geq0$ kraft der Transformationen (33) und (110) die Beziehung

$$\int\frac{dx}{X^{-M}\sqrt{X}}=-(2ax+b)\sqrt{X}\cdot\sum_{\nu=-M+1}^{0}\frac{2^{-3M-3\nu+1}\cdot a^{-M-\nu}}{(4ac-b^2)^{-M-\nu+1}}\cdot\frac{\prod\limits_{\kappa=-M}^{\nu-1}(2\kappa-1)}{\prod\limits_{\kappa=-M+1}^{\nu-1}\kappa}\cdot\frac{1}{X^\nu}+\left(\frac{8a}{4ac-b^2}\right)^{-M}\cdot\frac{\prod\limits_{\kappa=-M+1}^{0}(2\kappa-1)}{\prod\limits_{\kappa=-M}^{-1}\kappa}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{X}}\;;$$

aus ihr folgt wegen (52a) und (131a) die Relation

$$\int\frac{X^M}{\sqrt{X}}dx=-(2ax+b)\sqrt{X}\cdot\sum_{\nu=0}^{M-1}\frac{2^{-3M+3\nu+1}\cdot a^{-M+\nu}}{(4ac-b^2)^{-M+\nu+1}}\cdot\frac{\prod\limits_{\kappa=\nu+1}^{M}(-2\kappa-1)}{\prod\limits_{\kappa=\nu+1}^{M-1}(-\kappa)}\cdot\frac{1}{X^{-\nu}}+\left(\frac{4ac-b^2}{8a}\right)^{M}\cdot\frac{\prod\limits_{\kappa=0}^{M-1}(-2\kappa-1)}{\prod\limits_{\kappa=1}^{M}(-\kappa)}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{X}}\,,$$

der man

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{X^M}{\sqrt{X}}dx=&\;(2ax+b)\sqrt{X}\cdot\sum_{\nu=0}^{M-1}\frac{(4ac-b^2)^{M-\nu-1}}{2^{3M-3\nu-1}\cdot a^{M-\nu}}\cdot\left\{\prod_{\kappa=\nu+1}^{M}(2\kappa+1)\Big/\prod_{\kappa=\nu+1}^{M-1}\kappa\right\}\cdot X^\nu\\&+\left(\frac{4ac-b^2}{8a}\right)^{M}\cdot\left\{\prod_{\kappa=0}^{M-1}(2\kappa+1)\Big/\prod_{\kappa=1}^{M}\kappa\right\}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{X}}\qquad(M\geq0;\,X\neq0)\end{aligned}\right\}\;(136b)$$

entnimmt.

2. Als zweites einfaches Beispiel diene der

Satz: M_1 und $M_2\geq M_1-1$ seien ganze Zahlen; unter $f^{(m)}(x)$ verstehen wir eine für m auf $[M_1, M_2+1]_0$ und x auf $[x_1, x_2]$ (mit $x_2>x_1$) erklärte Funktion von m und x, die bei m aus $[M_1, M_2]_0$ auf $[x_1, x_2]$ differenzierbar sein soll; mit $g^{(m)}(x)$ bezeichnen wir eine für m auf $[-M_2, -M_1+1]_0$ und x auf $[x_1, x_2]$ erklärte Funktion von m und x, die bei m aus $[-M_2, -M_1]_0$ auf $[x_1, x_2]$ differenzierbar sei.

Gilt dann

$$\frac{d}{dx} f^{(m)}(x) = f^{(m+1)}(x) \qquad (m \text{ auf } [M_1, M_2]_0 ;\, x \text{ auf } [x_1, x_2]) \qquad (137a)$$

und

$$\frac{d}{dx} g^{(m)}(x) = g^{(m+1)}(x) \qquad (m \text{ auf } [-M_2, -M_1]_0 ;\, x \text{ auf } [x_1, x_2]), \qquad (137b)$$

so trifft die KRONECKERsche Formel [1] Fußnote folgt auf Seite 70.

$$\left.\begin{aligned} &\int f^{(m+1)}(x) \cdot g^{(-m)}(x)\,dx = \sum_{\mu=M}^{m} (-1)^{\mu-m} \cdot f^{(\mu)}(x) \cdot g^{(-\mu)}(x) + (-1)^{M-m+1} \cdot \int f^{(M)}(x) \cdot g^{(-M+1)}(x)\,dx \\ &\quad (M \text{ auf } [M_1, M_2+1]_0 ,\; m \text{ auf } [M_1-1, M_2]_0 ;\; x \text{ auf } [x_1, x_2]) \end{aligned}\right\} (138)$$

zu.

<u>Beweis.</u> Weil für μ auf $[M_1, M_2]_0$

$$\frac{d}{dx}\left\{ f^{(\mu)}(x) \cdot g^{(-\mu)}(x) \right\} = f^{(\mu+1)}(x) \cdot g^{(-\mu)}(x) + f^{(\mu)}(x) \cdot g^{(-\mu+1)}(x)$$

gilt, besteht wegen (25), (71), (24) und (45) die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{ \sum_{\mu=M}^{m} (-1)^{\mu} \cdot f^{(\mu)}(x) \cdot g^{(-\mu)}(x) \right\} &= \sum_{\mu=M}^{m} (-1)^{\mu} \cdot f^{(\mu+1)}(x) \cdot g^{(-\mu)}(x) - \sum_{\mu=M}^{m} (-1)^{\mu-1} \cdot f^{(\mu)}(x) \cdot g^{(-\mu+1)}(x) \\ &= (-1)^{m} \cdot f^{(m+1)}(x) \cdot g^{(-m)}(x) - (-1)^{M-1} \cdot f^{(M)}(x) \cdot g^{(-M+1)}(x) \end{aligned}$$

2a. Um ein Muster einer Funktion $f^{(m)}(x)$ anzugeben, die der Forderung (137a) gehorcht, nennen wir, mit α eine nicht-ganze reelle Zahl bezeichnend, die für <u>frei</u> variables m und für $x \neq 0$ erklärte Funktion

$$f^{(m)}(x) = x^{\alpha-m} \cdot \prod_{\varkappa=0}^{m-1} (\alpha-\varkappa) \cdot \left\{ \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\alpha-\nu} + \log|x| \right\}.$$

Als mit Hilfe von (138) mühelos auswertbares unbestimmtes Integral greifen wir

$$\int (ax+b)^{n} \cdot \left\{ \alpha^{\beta x} \cdot \sin(\gamma x+\delta) \right\} dx$$

heraus (worin a und α von Null verschiedene reelle Zahlen sowie b, β, γ und δ reelle Zahlen bedeuten, während die ganzzahlige Veränderliche n <u>frei</u> variiert) und weisen darauf hin, daß hier die (vielleicht gewünschte) nachträgliche Unterscheidung des Falls positiver bzw. negativer Werte von n in Analogie zu dem Übergang von (136) nach (136a) bzw. (136b) vor sich geht.

3. Wir wählten gerade diese Stichproben für die Anwendungsweise einiger Formeln, weil die Erfordernisse der Technik unbestimmter Integration mit den Anstoß zu systematischem Ausbau des Kalküls gegeben hatten - machte uns doch die Unsicherheit "naiver" Handhabung der einschlägigen Kunstgriffe hier besonders zu schaffen.

Das eigentliche Betätigungsfeld für die Formeln des Kalküls sind natürlich die elementaren Beweise elementarer (d.h. arithmetischer) Identitäten.

Fussnote zu S. 69

---

1) vgl. L. Kronecker, Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel (Sitzungsber. Akad. d. Wiss. Berlin, 38, S. 841; 1885).