

ZUR AXIOMATISIERUNG DER NICHT-IDENTITÄTEN  
DES AUSSAGENKALKÜLS

Von KLAUS HÄRTIG in Berlin

---

Einen Gedanken des Philosophen F. BRENTANO (1838—1917) aufgreifend, hat J. ŁUKASIEWICZ in einigen Untersuchungen als Gegenstück zur *Anerkennung* von Ausdrücken (formalisierter Theorien) auch die *Verwerfung eingeführt*. So findet man in der Syllogistik-Monographie [1] „*proofs*“, d. h. Ableitungen, die bei der Anerkennung („*assertion*“) einer Aussageform enden, und „*disproofs*“, d. h. Ableitungen, die zur Verwerfung („*rejection*“) einer Aussageform führen. Später ([2]) dient „ $\vdash$ “ als „*sign of assertion*“, „ $\dashv$ “ als „*sign of rejection*“. Als „*rules of rejection*“ verwendet ŁUKASIEWICZ die folgenden<sup>1)</sup>:

R1: Ist ein Spezialfall von  $H$  verworfen (nämlich ein Ausdruck, der aus  $H$  durch Substitution irgendeines Terms oder Ausdrucks für eine bestimmte Variable hervorgeht), so ist auch  $H$  selbst zu verwerfen.

R2: Ist  $H_1 \rightarrow H_2$  anerkannt und  $H_2$  verworfen, so ist auch  $H_1$  zu verwerfen.

J. ŚŁUPECKI<sup>2)</sup> definiert die „*Verwerfbarkeit*“ eines Ausdrucks  $H$  als die *Ableitbarkeit*<sup>3)</sup> mindestens eines der axiomatisch *verworfenen* Ausdrücke aus den axiomatisch *anerkannten* Ausdrücken zuzüglich  $H$ . Bei diesem Ansatz sind explizite „*rules of rejection*“ umgangen<sup>4)</sup>. In der vorliegenden Note sollen gerade sie untersucht werden, insbesondere die Entbehrlichkeit der Einsetzungsregel R1.

Unser Gegenstand ist der klassische zweiwertige Aussagenkalkül, dessen *Ausdrücke* (= sinnvollen Ausdrücke) etwa aus den Aussagenvariablen  $p_0, p_1, p_2, \dots$  mit Hilfe der aussagenlogischen Funktoren  $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ , unter Hinzuziehung von Klammern, aufgebaut seien. Ist  $H$  ein Ausdruck, so bedeute „*agH*“, daß  $H$  allgemeingültig (oder: eine Identität) ist, nämlich von jeder Belegung (der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten) erfüllt wird. Ausdrücke, die nicht jede Belegung erfüllt, nennen wir *Nicht-Identitäten*; Ausdrücke, die keine Belegung erfüllt, heißen *Kontradiktionen*.

Ein für allemal sei irgendeine Axiomatisierung der Identitäten vorgegeben: Die durch Wahl axiomatisch *anerkannter* Ausdrücke und durch bestimmte Schlußregeln (rules of *assertion*) — syntaktisch — festgelegte *Ableitbarkeitseigenschaft* ( $\vdash$ ) soll mit der — semantisch definierten — Eigenschaft *ag* identisch sein; nur dies wird über  $\vdash$  benutzt.

Als Regeln sollen im folgenden nur die Regeln *der Verwerfung* bezeichnet werden, als Axiome nur die axiomatisch *verworfenen* Ausdrücke; wir lassen *nur*

<sup>1)</sup> [1], S. 96; [2], S. 114. In der in [3] und [1] untersuchten formalisierten Theorie spielt als spezielle Verwerfungsregel noch die Regel von ŚŁUPECKI ([1], S. 103) eine Rolle; nach ihrer Hinzunahme konnte zu jedem nicht ableitbaren Ausdruck jenes Kalküls ein „*disproof*“ konstruiert werden.

<sup>2)</sup> [3], S. 277; dem Sinne nach zitiert.

<sup>3)</sup> — im gewöhnlichen Sinne, etwa mit Einsetzungs- und Abtrennungsregel.

<sup>4)</sup> Vgl. jedoch unten den Anfang von Absatz 3.

*Nicht-Identitäten als Axiome* zu. Die Redeweise „ $\neg H$ “ („ $H$  läßt sich verwerfen“) bezieht sich immer auf die jeweils vorgegebenen Axiome und Regeln<sup>1)</sup>. Bezüglich fest gewählter Regeln nennen wir ein Axiomensystem (d. h. eine beliebige Menge axiomatisch verworfener Nicht-Identitäten) *vollständig*, wenn sich jede Nicht-Identität verwerfen läßt. Ein Axiom heißt *unabhängig*, wenn man es nicht mehr verwerfen kann, sobald man es aus dem Axiomensystem entfernt. Ein vollständiges Axiomensystem ist unabhängig, wenn bei Wegnahme irgendeines Axioms stets die Vollständigkeit verlorengeht.

1. Denjenigen Ausdruck, der aus dem Ausdruck  $H$  dadurch hervorgeht, daß an allen Stellen für die Variable  $p_i$  der Ausdruck  $H_0$  eingesetzt wird, bezeichnen wir als  $H^{p_i/H_0}$ .

Über die beiden Regeln von ŁUKASIEWICZ:

$$\mathbf{R1:} \frac{\neg H^{p_i/H_0}}{\neg H} \qquad \mathbf{R2:} \frac{\vdash H_1 \rightarrow H_2 \quad \neg H_2}{\neg H_1}$$

gilt der einfache (und vermutlich bekannte)

Satz 1. *Wählt man irgendeine Nicht-Identität  $N$  als einziges Axiom und als Regeln  $\mathbf{R1}$  und  $\mathbf{R2}$ , so lassen sich alle Nicht-Identitäten und nur sie verwerfen.*

Beweis. Induktiv über die Anzahl der Schlußschritte ergibt sich sofort: Wenn  $\neg H$ , so nicht  $agH$ . Um die Umkehrung hiervon zu beweisen, führt man eine gegebene Nicht-Identität  $H$  in eine konjunktive Normalform  $H'$  über; unter deren Konjunktionsgliedern

$$\bigvee_{\mu=1}^m p_{i_\mu} \vee \bigvee_{\nu=1}^n \sim p_{j_\nu} \qquad (m \geq 0, n \geq 0, m + n \geq 1) \quad (*)$$

befindet sich mindestens eines, bei dem

$$\text{jede Nummer } i_\mu \text{ von jeder Nummer } j_\nu \text{ verschieden} \quad (**)$$

ist, denn sonst wäre ja  $H'$ , also auch  $H$ , allgemeingültig.  $A$  sei eine dieser Alternativen (\*), für die (\*\*) gilt, und  $B$  sei die Kontradiktion

$$\bigvee_{\mu=1}^m \sim (p_{i_\mu} \rightarrow p_{i_\mu}) \vee \bigvee_{\nu=1}^n \sim (p_{j_\nu} \rightarrow p_{j_\nu}).$$

Offensichtlich geht  $B$  aus  $A$  durch  $m + n$  nacheinander auszuführende Substitutionen des in  $\mathbf{R1}$  genannten Typs hervor — was nicht der Fall wäre, wenn (\*\*) nicht gälte. Nun ist doch  $ag \sim B$ , folglich  $agB \rightarrow N$ , damit, wie eingangs vorausgesetzt,  $\vdash B \rightarrow N$ , also  $\neg B$  nach  $\mathbf{R2}$ . Durch  $(m + n)$ -malige Anwendung von  $\mathbf{R1}$  erhält man:  $\neg A$ , also auch:  $\neg H'$  (nach  $\mathbf{R2}$ , denn  $\vdash H' \rightarrow A$ , weil  $agH' \rightarrow A$ ), und schließlich:  $\neg H$  (denn  $\vdash H \rightarrow H'$ ).

Als einfachstes  $N$  kann man etwa  $p_0$  axiomatisch verwerfen<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> „ $H$  ist widerlegbar“ bedeutet im üblichen Sprachgebrauch, daß  $\vdash \sim H$ .

<sup>2)</sup> Vgl. [1], S. 109. — Auch in [6], S. 246, wird eine Aussagenvariable als das einzige Axiom bezeichnet, und zwar bei der syntaktischen Charakterisierung der *Erfüllbarkeit* (also der Menge der *Nicht-Kontradiktionen*); von einer wirklichen Axiomatisierung kann aber dort keine Rede sein, denn eine der „Regeln“ (!) besagt, daß  $H$  zu der zu axiomatisierenden Menge gehört, wenn nicht  $\vdash \sim H$  (S. 247).

2. Wir wollen versuchen, ohne die Einsetzungsregel **R1** auszukommen<sup>1)</sup>. Trivial ist zunächst die Feststellung:

*Wählt man irgendeine Kontradiktion als einziges Axiom und **R2** als einzige Regel, so lassen sich alle Kontradiktionen, aber auch nur sie, verwerfen<sup>2)</sup>.*

Und aus dem Beweis zu Satz 1 ergibt sich unmittelbar:

*Wählt man als Axiome alle Alternativen (\*), die der Nebenbedingung (\*\*) genügen, und **R2** als einzige Regel, so lassen sich wiederum genau die Nicht-Identitäten verwerfen. Dieses vollständige Axiomensystem ist aber offensichtlich nicht unabhängig, denn jede der fraglichen Alternativen ist als Axiom entbehrlich, weil ja (sogar unendlich viele) sie umfassende<sup>3)</sup> Alternativen (des verlangten Typs) Axiome sind.*

Allgemeiner gilt (Satz 2\*): *In jeder — bezüglich **R2** allein — vollständigen Menge  $M^*$  von Alternativen (\*, \*\*) gibt es zu je zwei variablenfremden Alternativen  $A_1$  und  $A_2$  eine beide umfassende Alternative  $A_3$ .*

Die folgenden drei Sätze enthalten hinreichende Bedingungen für Unvollständigkeit.

Satz 2a. *Mit **R2** als einziger Regel lassen sich unendlich viele Nicht-Identitäten nicht verwerfen, falls auch nur ein Axiom unabhängig ist<sup>4)</sup>. In der Terminologie von [5]: Die Menge der Nicht-Identitäten besitzt (bezüglich **R2**) keine Basis.*

Beweis. Iterierte — sagen wir:  $(n-1)$ -malige — Anwendung von **R2** führt stets von einem Axiom  $H_1$  etwa über  $H_2, \dots, H_{n-1}$  zu  $H_n$  ( $n \geq 1$ ), und der  $\nu$ -te Schritt einer solchen Deduktion hat diese Gestalt:

$$\frac{\begin{array}{l} ag H_{\nu+1} \rightarrow H_{\nu} \\ \neg H_{\nu} \end{array}}{\neg H_{\nu+1}}.$$

Daher erfüllt jede Belegung, die  $H_n$  erfüllt, auch  $H_1$ .

Nun sei  $H^*$  ein unabhängiges Axiom und  $A^*$  eine nicht allgemeingültige Alternative aus einer konjunktiven Normalform von  $H^*$ . Wir zeigen: Ist auch  $B^*$  vom Typ (\*, \*\*), aber mit  $A^*$  variablenfremd, so läßt sich  $A^* \vee B^*$  nicht verwerfen. Man kann nämlich sofort eine Belegung angeben, die  $A^*$  nicht erfüllt, wohl aber  $B^*$ . Diese Belegung erfüllt erst recht  $A^* \vee B^*$ , und sie erfüllt erst recht nicht  $H^*$ . Im Hinblick auf die Vorbemerkung ist damit klar, daß von  $H^*$  keine Deduktion zu  $A^* \vee B^*$  führt. Würde von einem anderen Axiom eine Deduktion zu  $A^* \vee B^*$  führen, so könnte man sie um zwei Schritte verlängern: zu  $A^*$  (denn  $\vdash A^* \rightarrow A^* \vee B^*$ ) und weiter zu  $H^*$  (denn  $\vdash H^* \rightarrow A^*$ ) — im Widerspruch zur Unabhängigkeit von  $H^*$ .

<sup>1)</sup> SĚUPECKI, der in [4] Systeme von Identitäten untersucht, variiert dort die Abtrennungsregel, aber behält die (gewöhnliche) Einsetzungsregel bei.

<sup>2)</sup> G. STAHL axiomatisiert in [6] — übrigens mit Einsetzungsregel — die Menge der Kontradiktionen, ohne auf die Eigenschaft  $\vdash$  (also auf die Identitäten) Bezug zu nehmen.

<sup>3)</sup> Sind  $A_1$  und  $A_2$  vom Typ (\*, \*\*), so sagen wir,  $A_2$  umfasse  $A_1$ , wenn jedes Alternativglied von  $A_1$  auch Alternativglied von  $A_2$  ist.

<sup>4)</sup> Die Behauptung des Satzes ist offenbar gleichwertig mit bloßer Unvollständigkeit, denn läßt sich ein Ausdruck  $H^*$  nicht verwerfen, so auch kein Ausdruck  $H^* \vee H$ .

Beweis zu Satz 2\*. Wir nehmen an, es gäbe kein  $A_3$  mit der verlangten Eigenschaft, und zeigen, daß dann nicht  $\neg A_1 \vee A_2$ . Ist  $H_1$  ein beliebiges Axiom, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall I: Alle Variablen aus  $A_1$  und  $A_2$  kommen in  $H_1$  vor. Da  $H_1$  nach unserer Annahme nicht  $A_1$  und  $A_2$  umfaßt, muß mindestens eine Variable, etwa  $p_k$ , in  $H_1$  negiert, in  $A_1$  oder  $A_2$  unnegiert stehen — oder umgekehrt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß  $A_1$  das Alternativglied  $p_k$  enthält,  $H_1$  aber  $\sim p_k$ , und zwar nur einmal. Die restlichen Alternativglieder von  $H_1$  fassen wir zu einer Alternative  $H_1'$  zusammen. (Da  $A_1$  und  $A_2$  je mindestens ein Glied besitzen und variablenfremd vorausgesetzt sind, ist  $H_1'$  nicht leer.) Mit  $H_1$  ist auch  $H_1'$  eine Nicht-Identität. Es gibt eine Belegung, die  $H_1'$  nicht erfüllt, aber  $p_k$  wahr macht;  $A_1 \vee A_2$  ist erfüllt,  $H_1$  jedoch nicht — folglich (siehe Vorbemerkung des vorhergehenden Beweises) führt keine Deduktion von  $H_1$  zu  $A_1 \vee A_2$ .

Fall II: In  $A_1$  oder  $A_2$  tritt eine Variable  $p_k$  auf, die in  $H_1$  fehlt. Durch geeignete Belegung nur von  $p_k$  kann man  $A_1$  oder  $A_2$  wahr machen, und die Belegung aller anderen Variablen kann so gewählt werden, daß sie  $H_1$  nicht erfüllt. Also führt von  $H_1$  keine Deduktion zu  $A_1 \vee A_2$ .

Satz 2b. *Mit R2 als einziger Regel lassen sich unendlich viele Nicht-Identitäten nicht verwerfen, falls in den Axiomen nicht jede Variable vorkommt.*

Beweis. Fehlt etwa  $p_k$  in den Axiomen, so kann man keinen der Ausdrücke (\*, \*\*), der das Alternativglied  $p_k$  oder  $\sim p_k$  enthält, verwerfen. Ist nämlich  $A$  eine solche Alternative, in der  $p_k$ , nicht aber  $\sim p_k$  vorkommt (der andere Fall wird analog bestätigt), so kann man zu jedem Axiom  $H_1$  eine Belegung finden, die  $p_k$  wahr macht, doch  $H_1$  nicht erfüllt. Da diese Belegung  $A$  erfüllt, führt keine Deduktion von  $H_1$  nach  $A$ .

Beweis des Satzes 2b aus Satz 2\*. In  $M^*$  nehmen wir auf: (1) den Ausdruck  $p_k$ , (2) alle Alternativen  $A$  des Typs (\*, \*\*), die die Variable  $p_k$  nicht enthalten. Wäre das gegebene Axiomensystem vollständig, so erst recht  $M^*$ . Keine  $A \vee p_k$  umfassende Alternative ist aber Element von  $M^*$ .

Ein dritter Beweis findet sich unten in Absatz 4.: Satz 2b ist ein einfacher Spezialfall von Satz 4.

Satz 2c. *Mit R2 als einziger Regel lassen sich unendlich viele Nicht-Identitäten nicht verwerfen, falls die Länge der Axiome (oder auch nur: die Anzahl verschiedener Variabler in jedem Axiom) beschränkt ist.*

Beweis. Es sei  $A$  eine kein Glied mehrfach enthaltende Alternative (\*, \*\*) mit  $m + n > g$ , wenn in jedem Axiom höchstens  $g$  verschiedene Variablen vorkommen. Ein solches  $A$  läßt sich nicht verwerfen. Zu jedem Axiom  $H_1$  gibt es nämlich eine Variable, die zwar in  $A$ , nicht aber in  $H_1$  steht, und daher eine Belegung, die zwar  $A$ , nicht aber  $H_1$  erfüllt.

Beweis des Satzes 2c aus Satz 2\*. In  $M^*$  nehmen wir alle Ausdrücke (\*, \*\*) mit  $m + n \leq g$  auf. Darunter befinden sich variablenfremde Ausdrücke  $A_1, A_2$ , die je  $g$  Alternativglieder und keines mehrfach besitzen. Jede  $A_1$  und  $A_2$  umfassende Alternative enthält mindestens  $2g$  verschiedene Variablen, ist also nicht Element von  $M^*$ . Nach Satz 2 ist deshalb  $M^*$  unvollständig, erst recht das vorgegebene Axiomensystem.

Korollar zu jedem der Sätze 2a, b, c: *Mit R2 als einziger Regel ist die Menge der Nicht-Identitäten nicht endlich axiomatisierbar.*

3. Jeder der von SŁUPECKI behandelten Abtrennungsregeln (siehe [4], insbes. S. 21, 34, 36) entsprechen zwei (Verwerfungs-)Regeln; der gewöhnlichen Abtrennungsregel steht neben R2 auch die Regel

$$\frac{\begin{array}{l} \vdash H_1 \\ \neg H_2 \end{array}}{\neg H_1 \rightarrow H_2}$$

gegenüber, und z. B. der Abtrennungsregel

$$\frac{\begin{array}{l} \vdash \sim(H_1 \leftrightarrow H_2) \\ \vdash \sim H_1 \end{array}}{\vdash H_2}$$

(vgl. [4], S. 34) entsprechen die Regeln

$$\frac{\begin{array}{l} \vdash \sim(H_1 \leftrightarrow H_2) \\ \neg H_2 \end{array}}{\neg \sim H_1} \quad \text{und} \quad \frac{\begin{array}{l} \vdash \sim H_1 \\ \neg H_2 \end{array}}{\neg \sim(H_1 \leftrightarrow H_2)}.$$

Naheliegender ist auch der Gebrauch von Regeln, bei denen „ $\vdash$ “ in der Formulierung der Prämissen fehlt:

$$\frac{\neg H_1}{\neg H_1 \wedge H_2} \quad \frac{\neg H_1 \rightarrow H_2}{\neg H_2} \quad \frac{\neg H_1 \rightarrow H_2}{\neg \sim H_1} \quad \frac{\neg H_1 \rightarrow H_2}{\neg H_1 \leftrightarrow H_2}$$

usw. Von Interesse ist besonders die Regel

$$\text{R3: } \frac{\begin{array}{l} \neg H_1 \\ \neg H_2 \\ H_1 \text{ und } H_2 \text{ sind variabelnfremd} \end{array}}{\neg H_1 \vee H_2}.$$

(Falls man den Funktor  $\rightarrow$  als einzigen in den Regeln nennen möchte, könnte man in der Konklusionszeile „ $H_1 \vee H_2$ “ durch „ $(H_1 \rightarrow H_2) \rightarrow H_2$ “ ersetzen.)

Die bisher behandelten oder als Beispiele herausgegriffenen Regeln — insbesondere R1, R2, R3 — sind alle semantisch korrekt in dem Sinne, daß der in der Konklusionszeile genannte Ausdruck eine *Nicht-Identität* ist, sobald die in den mit „ $\vdash$ “ beginnenden Prämissenzeilen genannten Ausdrücke Nicht-Identitäten sind und die sonstigen Prämissen zutreffen. Semantisch korrekt ist natürlich auch eine so schwache Regel wie

$$\frac{\vdash H}{\neg \sim H};$$

selbst sie kann übrigens in manchen Axiomen-Regeln-Systemen von Nutzen sein.

**Satz 3.** *Wählt man als Axiome die Ausdrücke  $p_0, p_1, p_2, \dots, \sim p_0, \sim p_1, \sim p_2, \dots$  und als Regeln R2 und R3, so lassen sich alle Nicht-Identitäten und nur sie verwerfen. Dieses vollständige Axiomensystem ist auch unabhängig.*

**Beweis.** Da R2 und R3 semantisch korrekte Regeln sind, kann man sicherlich nur Nicht-Identitäten verwerfen. Und die Vollständigkeit ist evident.

Wir zeigen jetzt: Läßt man  $p_i$  bei den Axiomen weg, so kann man  $p_i$  nicht mehr verwerfen. (Der Unabhängigkeitsnachweis für  $\sim p_i$  verläuft analog.) Es genügt offenbar, für jedes  $H$  zu bestätigen:

Wenn  $\neg H$ , so nicht  $ag p_i \rightarrow H$ .

Diese Behauptung trifft zunächst auf die (jetzt von  $p_i$  verschiedenen) Axiome zu, denn es ist nicht  $ag p_i \rightarrow p_j$  bei jedem  $j \neq i$  und auch nicht  $ag p_i \rightarrow \sim p_k$  bei jedem  $k$ . — Schließt man nach **R2**, daß  $\neg H_2$ , weil  $\vdash H_2 \rightarrow H_1$  und  $\neg H_1$ , und trifft die Behauptung für  $H = H_1$  zu, so auch für  $H = H_2$ : Wäre nämlich  $ag p_i \rightarrow H_2$ , so wäre, weil  $ag H_2 \rightarrow H_1$ , auch  $ag p_i \rightarrow H_1$ . — Schließt man nach **R3**, daß  $\neg H_1 \vee H_2$ , weil  $\neg H_1$  und  $\neg H_2$ , und trifft die Behauptung für  $H = H_1$  und  $H = H_2$  zu, so auch für  $H = H_1 \vee H_2$ : Wir geben Belegungen  $\mathfrak{B}$  an, die den Ausdruck  $p_i \rightarrow (H_1 \vee H_2)$  nicht erfüllen. Man findet nämlich eine Belegung  $\mathfrak{B}_1$ , die  $p_i \rightarrow H_1$  nicht erfüllt, und eine Belegung  $\mathfrak{B}_2$ , die  $p_i \rightarrow H_2$  nicht erfüllt. Sicherlich erteilt sowohl  $\mathfrak{B}_1$  als auch  $\mathfrak{B}_2$  der Variablen  $p_i$  den Wert „wahr“<sup>1)</sup>. Belegt  $\mathfrak{B}$  die in  $H_1$  auftretenden Variablen wie  $\mathfrak{B}_1$ , die in  $H_2$  auftretenden Variablen wie  $\mathfrak{B}_2$ , dabei  $p_i$  wie  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$ , und die übrigen Variablen beliebig, so leistet  $\mathfrak{B}$  das Verlangte.

4. Die Menge der Identitäten ist z. B. mit der (gewöhnlichen) Abtrennungs- und Einsetzungsregel endlich axiomatisierbar. Da man bei jeder Ableitung die vorgenommenen Einsetzungen an den Anfang zurückverlegen kann<sup>2)</sup>, kommt man mit endlich vielen Axiomenschemata und der (gewöhnlichen) Abtrennungsregel als einziger Regel aus. Bei den Nicht-Identitäten liegen die Verhältnisse anders: Mit Schlußregeln eines bestimmten Typs (unter den aber nicht die Einsetzungsregel **R1** fällt) und endlich vielen Axiomen und Axiomenschemata kann man nicht erreichen, daß sich genau die Nicht-Identitäten verwerfen lassen.

Wir grenzen die zuzulassenden *Schlußregeln* nach ihrer (meta-)sprachlichen Formulierung ab, und zwar durch die nachstehenden (meta-metatheoretischen) Festsetzungen.

Jede der (je endlich vielen) *Prämissenzeilen* unserer Schlußregeln soll von einem der folgenden drei Typen sein:

(a) Die Zeile beginnt mit „ $\vdash$ “, und hierauf folgt die — ohne Abkürzungen ausgedruckte — Bezeichnung eines bestimmten Ausdrucks, in der Zeichen „ $p_0$ “, „ $p_1$ “, „ $p_2$ “, . . . durch Ausdrucksvariablen „ $H_1$ “, „ $H_2$ “, . . . nach Belieben ersetzt sein können.

(b) Die Zeile beginnt mit „ $\neg$ “ statt mit „ $\vdash$ “, ist aber sonst wie im Falle (a) gebildet.

(c) Die Zeile besteht aus einer der Aussagen „ $H_1$  und  $H_2$  sind variablenfremd“, „ $H_1$  und  $H_3$  sind variablenfremd“, „ $H_2$  und  $H_3$  sind variablenfremd“, . . .

Die unter dem Schlußstrich der Regel stehende *Konklusionszeile* soll vom Typ (b) sein. —

<sup>1)</sup>  $H_1$  und  $H_2$  sind variablenfremd, aber  $p_i$  kann in einem der beiden Ausdrücke vorkommen.

<sup>2)</sup> Vgl. [5], S. 296.

Wichtig ist, daß Prämissen jedes der drei Typen — und auch zweier oder aller — fehlen können. Eine Schlußregel ohne Prämissen gibt die axiomatische Verwerfung eines Ausdrucks oder Ausdrucksschemas wieder.

Wir lassen auch den Fall unendlich vieler Schlußregeln zu: daß nämlich unendlich viele Schlußrelationen gegeben sind, deren jede man mit den hier abgegrenzten Ausdrucksmitteln beschreiben kann.

Satz 4. *Mit beliebig vielen semantisch korrekten Schlußregeln der genannten Art lassen sich nicht alle Nicht-Identitäten verwerfen, falls in den Regeln mindestens eine Variable nicht explizit genannt wird.*

Beweis. Nehmen wir an, daß etwa „ $p_0$ “ in den Schlußregeln fehlt. Bei beliebigem  $H$  setzen wir  $H^{p_0}/(p_0 \rightarrow p_0) = H^*$  und werden zeigen:

$$\text{Wenn } \neg H, \text{ so } \neg H^*. \quad (1)$$

Eine der gegebenen Schlußregeln möge nach Wahl konkreter Ausdrücke  $H_1, H_2, \dots$  besagen:

Wenn

$$\left. \begin{array}{l} \vdash A_1, \dots, \vdash A_m, \\ \neg B_1, \dots, \neg B_n, \\ H_{i_1} \text{ und } H_{j_1} \text{ variablenfremd, } \dots, H_{i_k} \text{ und } H_{j_k} \text{ variablenfremd, } \dots \end{array} \right\} (2)$$

so  $\neg C$ .

Nach derselben Regel ist dann auch gesichert:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Wenn } \vdash A_1^*, \dots, \vdash A_m^*, \\ \neg B_1^*, \dots, \neg B_n^*, \\ H_{i_1}^* \text{ und } H_{j_1}^* \text{ variablenfremd, } \dots, \\ \text{so } \neg C^*. \end{array} \right\} (3)$$

Setzt man (2) und dazu — als Induktionsannahmen — (1) für  $H = B_v$  ( $1 \leq v \leq n$ ) voraus, so ergibt sich aus (3) sofort die Induktionsbehauptung (daß  $\neg C^*$ ): Mit  $A_1, \dots, A_m$  sind nämlich  $A_1^*, \dots, A_m^*$  ebenfalls allgemeingültig, und auch die Variablenfremdheit der  $H_{i_x}, H_{j_x}$  wird durch unsere Substitution nicht gestört.

Damit ist (1) allgemein bestätigt.

Da nun *ag*  $p_0^*$ , gilt gewiß nicht:  $\neg p_0^*$ , denn mit semantisch korrekten Schlußregeln kann man nur Nicht-Identitäten verwerfen. Wegen (1) läßt sich daher die Nicht-Identität  $p_0$  nicht verwerfen.

In Satz 4 ist die Unvollständigkeitsaussage 2b verallgemeinert. Die entsprechenden Ausdehnungen der Sätze 2a und 2c gelten jedoch nicht, wie Satz 3 zeigt.

5. Zum Schluß sei auf ein allgemeineres Problem hingewiesen: die Axiomatisierung der Komplementärmenge einer beliebigen (bezüglich bestimmter Schlußregeln) deduktiv abgeschlossenen Menge von Ausdrücken des Aussagenkalküls. Lassen sich nach einem einheitlichen Verfahren Regeln der Verwerfung und (möglichst: unabhängige) Axiome der Verwerfung konstruieren? Was entspricht Satz 1 speziell im intuitionistischen Aussagenkalkül?



Die hier mitgeteilten einfachen Beweise wurden im Hinblick auf die allgemeine Frage so ausführlich gefaßt. Die semantischen Überlegungen darin lassen sich vielleicht ungefähr übertragen, wenn man den LINDENBAUMSchen Satz heranzieht.

Man kann mit der Einsetzungsregel **R1** arbeiten oder sie ausschließen, und man kann auch versuchen, bei den Regeln den Prämissentyp (a) — also die *Bezugnahme auf die Eigenschaft  $\vdash$ , d. h. auf die gegebene deduktiv abgeschlossene Menge* — zu vermeiden. Schon für die Spezialfälle der klassischen Nicht-Identitäten und der intuitionistisch-ungültigen Ausdrücke wären möglichst einfache Axiomatisierungen, in deren Regeln nicht (wie in **R2**) auf die Identitäten zurückgegriffen wird, von Interesse.

### Literatur

- [1] J. ŁUKASIEWICZ, Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic. Oxford 1951.
- [2] ———, A system of modal logic. The Journal of Computing Systems **1** (1953), 111—149.
- [3] J. ŚŁUPECKI, On Aristotelian syllogistic. Studia Philosophica **4** (1949/50), 275—300.
- [4] ———, Über die Regeln des Aussagenkalküls. Studia Logica **1** (1953), 19—43 (mit polnischer und russischer Zusammenfassung).
- [5] K. SCHRÖTER, Deduktiv abgeschlossene Mengen ohne Basis. Math. Nachr. **7** (1952), 293 bis 304.
- [6] G. STAHL, An opposite and an expanded system. Diese Zeitschr. **4** (1958), 244—247.

(Eingegangen am 9. August 1960)