

CONSIDERAÇÕES DE BROUWER SOBRE ESPAÇO E INFINITUDE: O IDEALISMO DE BROUWER DIANTE DO PROBLEMA APRESENTADO POR DUMMETT QUANTO À POSSIBILIDADE TEÓRICA DE UMA INFINITUDE ESPACIAL

CONSIDERATIONS OF BROUWER ABOUT SPACE AND INFINITY: THE IDEALISM OF BROUWER BEFORE THE PROBLEM OF A THEORETICAL POSSIBILITY OF A SPATIAL INFINITY PRESENTED BY DUMMETT

*Paulo Júnio de Oliveira*¹

Resumo: Neste artigo, será discutida a noção de “infinitude cardinal” – a qual seria predicada de um “conjunto” – e a noção de “infinitude ordinal” – a qual seria predicada de um “processo”. A partir dessa distinção conceitual, será abordado o principal problema desse artigo, i.e., o problema da possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas tratado por Dummett em sua obra *Elements of Intuitionism*. O filósofo inglês sugere que, mesmo diante dessa possibilidade teórica, deveria ser possível predicar apenas infinitude ordinal. A questão principal surge do fato de que parece ser problemático predicar ordinalmente infinitude de “estrelas”. Mesmo diante dessa possibilidade, Dummett sugere que o intuicionista poderia apenas reinterpretar infinitude cardinal como sendo infinitude ordinal. Ora, iremos mostrar que, se Dummett não fornece razões *extras* que sustentem essa posição, então será difícil interpretar um caso empírico infinitário como sendo também um caso ordinal ou potencial de infinitude. Para resolver esse problema de Dummett, em Brouwer se encontram alguns pressupostos idealistas necessários para argumentar em favor da ideia de que, mesmo em um contexto empírico, como o de uma infinitude de estrelas, poderíamos predicar infinitude ordinal. Então, depois de discutir as duas noções de “infinitude” e apresentar o problema de Dummett, será apresentada a abordagem idealista de Brouwer – a qual pelo menos explicaria de modo mais plausível as razões que poderiam motivar um intuicionista a predicar infinitude ordinal até mesmo de um caso empírico e espacial.

Palavras-chaves: Infinitude ordinal/cardinal. Brouwer. Dummett. Idealismo espacial. Intuicionismo,

Abstract: In this article, we will discuss the notion of “cardinal infinity” – that is predicated of a “set” – and the notion of “ordinal infinity” – that is predicated of a “process”. From this conceptual distinction, the main discussion of this article, that of the problem of theoretical possibility of an infinity of stars as treated by Dummett in his work *Elements of Intuitionism*, will be addressed. The English philosopher suggests that even before this theoretical possibility, it should be possible to predicate only ordinal infinity. The principal object of inquiry in this article arises from the fact that it seems problematic to ordinally predicate infinity of “stars”. Even, with this possibility, Dummett suggests that the intuitionist could only reinterpret cardinal infinity as ordinal infinity. Now we will show that if Dummett does not provide extra reasons for this position, then it becomes difficult to interpret an infinite empirical case as being also an ordinal or potential case of infinity. In order to solve this problem of Dummett, in Brouwer we find some necessary idealistic assumptions to argue in favor of the idea that even in an empirical context, like that of an infinity of stars, we could predicate ordinal infinity. Then, after discussing “infinity” and presenting Dummett's problem, we shall present Brouwer's idealistic approach which would at least explain in a more plausible way the reasons that might motivate an intuitionist to predicate ordinal infinity even in an empirical and spatial case.

Keywords: Ordinal/cardinal infinity. Brouwer. Dummett. Spatial idealism. Intuitionism.

¹ Paulo Júnio de Oliveira é Doutorando em Filosofia com especialidade em Lógica e Fundamentos da Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Contato: paulo.oliveira.junio@gmail.com

Considerações introdutórias

Brouwer não é um filósofo muito conhecido, mas uma investigação da sua filosofia intuicionista tem sido reconstruída por diversos autores em literatura recente (cf. STIGT, 1990; KUIPER, 2004; ATTEN, 2007). Apesar de não ser um personagem muito conhecido no horizonte da discussão filosófica contemporânea, essa reconstrução da filosofia de Brouwer está tornando o seu pensamento mais acessível ao escrutínio da análise filosófica (cf. STIGT, 1990). Isso certamente terá um impacto grande na filosofia da matemática. Além disso, o intuicionismo matemático de Brouwer causou uma revolução conceitual que implicou a rejeição do terceiro excluído como um princípio lógico válido para a matemática.

Nesse artigo, vamos discutir especificamente um problema que diz respeito à noção intuicionista de “infinitude” em um contexto de aplicação empírica. Esse tópico aparece no contexto da discussão feita por Dummett em seu livro chamado *Elements of Intuitionism* (2000). O filósofo inglês lança mão de um exemplo empírico, “uma coleção infinita de estrelas”, para elucidar a discussão sobre que tipo de noção de “infinitude” o intuicionista aceitaria. Segundo Dummett, mesmo no contexto empírico de uma infinitude de estrelas, o intuicionista predicaria infinitude do *processo* de contar estrelas e não diretamente de uma *coleção/conjunto* de estrelas. Isso gera, como veremos, alguns problemas. A partir daí, mostraremos como Brouwer abordaria esse mesmo problema, explicitando os pressupostos idealistas de sua filosofia intuicionista da matemática.

Objetivos gerais

Para apresentar o problema da infinitude aplicada em um contexto empírico, teremos como primeiro objetivo nesse artigo discutir duas noções de “infinitude”, a saber, a noção de “infinitude cardinal” e a de “infinitude ordinal”². Como veremos, “infinitude cardinal” é um predicado de um “conjunto”, enquanto “infinitude ordinal” é um predicado de um “processo”.

A partir da discussão dessas duas noções de “infinitude”, poderemos realizar o nosso segundo e mais importante objetivo deste artigo, isto é, discutiremos um caso,

² Esse uso terminológico da expressão “cardinal” e “ordinal” seguirá PORTO (2015).

tratado por Dummett, da possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas. O filósofo inglês defende que o intuicionista, mesmo diante da possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas, poderia *reinterpretar* a noção de “infinitude” por detrás desse exemplo como infinitude ordinal –, mesmo parecendo se tratar do caso de uma infinitude cardinal. Ou seja: para Dummett, no lugar de predicarmos infinitude de uma coleção de estrelas, interessaria ao intuicionista inglês predicar infinitude apenas do processo de verificação, i.e., de contagem de estrelas. Demonstraremos, no final do artigo, que para Brouwer não se trataria apenas disso.

Assim, pretendemos mostrar que há razões também idealistas, no trabalho de Brouwer, que sustentam a recusa do intuicionista da predicação cardinal de infinitude no contexto espacial empírico. Desse modo, mostraremos que, para o filósofo e matemático holandês, o problema não se trata apenas de predicar infinitude do processo de contagem de estrelas como parece sugerir Dummett. Tentaremos argumentar que, se as razões idealistas não forem *explicitadas*, então soará estranho apenas reinterpretar em um contexto empírico (como o número de estrelas) o caso cardinal como sendo um caso ordinal, como quer Dummett. Ou seja, aparentemente não há como falar de uma infinitude de estrelas, sem poder falar de uma infinitude de lugares “ocupados” por estrelas. Como, para Brouwer, o espaço não é uma das formas da intuição mas tão somente uma *construção mental*³, razão pela qual não faria sentido falar da “possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas *já dadas*”, pois isso implicaria falar da “possibilidade teórica de uma infinitude de lugares”, i.e., “locais espaciais” dados.

Em síntese, por um lado, Dummett apenas estaria preocupado com predicar infinitude do processo de verificação empírica e não interessaria falar da realidade da coleção de estrelas; por outro lado, Brouwer diz que o próprio espaço e seus fenômenos são construções mentais e, enquanto tais, não poderiam ser uma coleção infinita de lugares entendidos em um sentido realista forte. Assim, se consideramos os pressupostos idealistas de Brouwer (como, por exemplo, a recusa do espaço como uma das formas da intuição), então será possível argumentar – com razões mais fortes – que, mesmo no contexto de uma infinitude de estrelas, só faria sentido falar de uma concepção ordinal de infinitude.

³ Estamos tratando aqui a filosofia de Brouwer como uma filosofia idealista, isto é, o sujeito que realiza essa construção mental – a qual iremos nos referir algumas vezes – é um sujeito idealizado. Na literatura ele é chamado também de matemático ideal, sujeito criativo etc. (STIGT, 1990; KUIPER, 2004; ATTEN, 2007).

Para realizar nosso intento, seguiremos a seguinte ordem: (i) discutiremos as duas noções de “infinitude já comentadas; (ii) apresentaremos brevemente o caso da possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas tal como Dummett o descreveu; e (iii) discutiremos como Brouwer lidaria com esse exemplo e mostraremos como a sua posição é mais ontologicamente idealista, enquanto que a posição de Dummett está relacionada com uma preocupação aparentemente verificacionista do processo de contar estrelas.

Infinitude cardinal e infinitude ordinal

Dummett faz uma longa discussão sobre infinitude no livro *Elements of Intuitionism* (2000, p. 40). Nessa discussão sobre os vários conceitos alternativos para “infinitude”, os quais apresentaremos a seguir, Dummett utiliza uma terminologia⁴ diferente, mais “tradicional”, a saber: “infinitude atual” para o que chamaremos de “infinitude cardinal” e “infinitude potencial” para o que chamaremos de “infinitude ordinal”.

A terminologia de Dummett é remanescente de Aristóteles e se baseia na distinção modal entre “potencialidade” e “atualidade”. Nossa terminologia, por contraste, irá se focar em uma *distinção semântica*, i.e., *a que tipos de entidades podemos corretamente aplicar o par infinito/finito*. Assim, no caso da noção cardinal, infinitude seria corretamente predicável *apenas de conjuntos*, enquanto que, no caso ordinal, infinitude seria corretamente predicável *apenas de processos*. Em Dummett, como veremos adiante, toda predicação de infinitude deveria sempre ser ordinal e não cardinal (cf. 2000, p. 40). Contudo, isso se torna um problema quando o filósofo inglês introduz o exemplo da coleção infinita de estrelas (cf. 2000, p. 42). Nesse exemplo, a predicação de infinitude teria de ser entendida como sendo cardinal, pois nele se indaga se a coleção de estrelas é infinita ou finita⁵.

⁴ Usaremos a nomenclatura “cardinal” para “infinitude atual” e “ordinal” para “infinitude potencial”. Essa nomenclatura já foi mencionada em literatura recente (cf. PORTO, 2015).

⁵ Algum interlocutor poderia argumentar que seria possível uma predicação tanto ordinal quanto cardinal de infinitude nesse caso. Pois, uma vez que a coleção de estrelas *tivesse* o predicado de infinitude, então o processo de contar estrelas também *deveria* ser infinito. Como veremos mais adiante, no primeiro caso teríamos um caso cardinal de infinitude e no segundo um caso ordinal. Ao longo do artigo, tentaremos demonstrar que essa questão é mais complicada. Pois, se toda essa questão fosse simplesmente resolvida pela *postulação teórica* de uma coleção infinita de estrelas, então seria muito estranho o filósofo inglês utilizar esse exemplo para falar/explicar a noção intuicionista ordinal de infinitude. Em outras palavras, qual seria a razão do uso desse exemplo, feito por Dummett (cf. 2000, p. 42), para explicar a noção intuicionista de infinitude, se tudo o que fosse preciso fazer era apenas postular uma coleção infinita de

Como já antecipamos, não é a terminologia ordinal/cardinal a escolhida por Dummett, que utiliza em seu lugar a dicotomia potencial/atual. O par potencial/atual é usado pelo filósofo inglês tanto em contextos matemáticos quanto em contextos empíricos. No caso empírico, a interpretação do par potencial/atual parece envolver a noção de “eventos”. Um evento pode ser potencial, pois não aconteceu ainda, mas *poderia* vir a acontecer e eventos podem ser atuais no sentido de que estão acontecendo agora. Todavia, no contexto matemático, em que sentido poderíamos aplicar o par potencial/atual? Não parece que a sua aplicação em contextos matemáticos seja a mesma que acontece em contextos empíricos. Afinal, é razoável afirmarmos que não parece haver “fatos” matemáticos potenciais esperando a ser atualizados, pelo menos não no mesmo sentido que fatos empíricos. Assim, podemos asserir razoavelmente que se o par potencial/atual for aplicado em contextos matemáticos *não deveria ser entendido no mesmo sentido de quando é aplicado em contextos empíricos*, isto é, parece ser necessário haver uma distinção entre o uso do par potencial/atual em contextos empíricos e em contextos matemáticos.

Dummett utiliza o par potencial/atual em ambos os contextos: na matemática e no contexto empírico da possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas. Desse modo, em que sentido poderíamos compreender o uso de Dummett do par potencial/atual em ambos os contextos? Aparentemente, ordinariamente, quando dizemos que algo é infinito, na matemática, normalmente estamos falando de coleções – o que chamamos aqui de “infinitude cardinal”, pois infinitude desempenharia um papel predicativo de uma coleção de entidades. Todavia, segundo Dummett, no contexto matemático, em certo sentido, podemos nos livrar dessa predicação cardinal de infinitude, adotando uma predicação ordinal, quando passamos a falar de um processo de geração numérica. Por exemplo, o processo de gerar os números naturais através da lei do sucessor. Com essa noção de “processo de gerar números” faria sentido falar que há um processo infinito tal como “somar 1” tendo por base 0 para a geração dos números naturais. Mas em que sentido o uso da terminologia “ordinal” aqui está relacionada com o uso da terminologia “potencial”? Aqui, potencial significaria *poder* ser gerado, como o número 4 pode ser gerado a partir do 0 por 4 aplicações da função

estrelas para explicar o conceito potencial de infinitude? Isto é, como veremos, se foi esse realmente o caso, então, de uma perspectiva intuicionista não-realista de mundo, a posição do filósofo inglês seria muito estranha quanto a essa questão.

sucessor. De todo modo, poder gerar não precisa ser pensado como algo temporal, mas sim como uma “potência lógica” no sentido de “ser logicamente possível”.

Assim, nós utilizamos o par ordinal/cardinal para explicitar quem está desempenhando *o papel predicativo* quando estamos a explicitar o sentido do uso do par potencial/actual em contextos matemáticos. Dummett, como veremos, não *parece* ser claro sobre *a distinção de usos do par potencial/actual em contextos empíricos e contextos matemáticos*. Isso fica mais claro, como já antecipamos, no contexto da questão sobre a infinitude/finitude de estrelas. Quando Dummett enfrenta esse problema, o filósofo inglês apenas diz que, assim como poderíamos entender infinitude potencial no contexto matemático como um processo de geração, também poderíamos aplicar a mesma noção de potencial em um contexto empírico como é o caso quando nos perguntamos da coleção de estrelas se ela é infinita ou não (cf. 2000, p. 40-42). Ora, no contexto de uma predicação cardinal, nós estaríamos falando de uma coleção *já* dada. Entretanto, uma coleção empírica de estrelas não parece ser algo que possa ser gerado como números poderiam ser gerados a partir da noção de lei do sucessor e do processo de aplicação.

Quando entendemos potencial nesse sentido, no contexto da matemática, vemos que é diferente do potencial no contexto empírico. Assim, elucidamos uma distinção com que até então, como veremos, Dummett não se preocupou. De todo modo, tal como entendemos, o filósofo inglês, em certo sentido, ao subscrever uma noção de “infinitude potencial” para contextos matemáticos, subscreveria a concepção ordinal de infinitude quando afirma que o intuicionista só aceita “infinitude potencial”. O filósofo inglês é claro sobre isso e nos diz o seguinte sobre o seu entendimento de infinitude no intuicionismo matemático: “Em matemática intuicionista, todo o infinito é infinito potencial: não há infinito completo” (2000, p. 40). Compreender “infinitude” como um predicado de uma “coleção” significaria aceitar uma noção de “infinitude completa” a qual, segundo Dummett, não seria aceitável da perspectiva intuicionista. O ponto do filósofo inglês é que o matemático intuicionista aceita uma noção de infinitude diferente do clássico nos seguintes termos:

[...] a tese que não há infinitude completa significa, simplesmente, que compreender uma estrutura infinita é compreender o processo que gera isso e que reconhecer a estrutura como sendo infinita é reconhecer que o processo não irá terminar. (2000, p. 40)

Como é posta por Dummett, a noção de “infinitude intuicionista” estaria essencialmente relacionada com a ideia de “processo”. Portanto, o filósofo inglês *pareceria no fundo somente aceitar a noção ordinal de infinitude*. Como já vimos, o intuicionista não entenderia a infinitude dos números naturais como um predicado de uma “coleção já dada”, mas como um processo de gerar os números naturais.

Contudo, como já dizemos, livrar-se da concepção cardinal de infinitude no contexto matemático realmente parece pelo menos plausível. Todavia, Dummett *parece* não se restringir a aplicar o par finitude/infinitude em contextos matemáticos, mas também em contextos empíricos. Assim, na próxima seção, enfretaremos com mais detalhes o caso da possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas, a qual Dummett menciona. Doravante, apresentaremos como pensamos que Brouwer lidaria com esse problema. Reconhecemos que o caso de uma infinitude de estrelas parece ser mais problemático, pois o intuicionista pode responder, no contexto matemático, que infinitude é um predicado ordinal, por causa das bases construtivas geradoras das entidades matemáticas – como a que mencionamos, a “lei do sucessor”. Contudo, no contexto das estrelas, as coisas parecem ser mais complicadas, pois estrelas, para Dummett, não parecem ser o tipo de objeto que seja “cognitivamente construído”. Veremos que se explicitarmos o *background* idealista da filosofia de Brouwer, então entenderíamos por quais razões, mesmo diante do caso da possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas, poderíamos predicar infinitude ordinal e não infinitude cardinal.

Um caso de infinitude em um contexto empírico

Agora lidaremos com um caso não-matemático de infinitude e veremos como aquelas duas noções de infinitude se aplicarão nesse caso. Como vimos, no caso da matemática, aparentemente poderíamos eliminar a predicação cardinal sobre uma coleção infinita de números, pois, no lugar de falarmos de uma coleção infinita passaríamos a falar de uma operação matemática de geração de números. Contudo, em um contexto empírico, como temos visto, não é tão simples. Afinal, qual seria a noção de infinitude empregada ao discutirmos a possibilidade teórica de uma infinitude de objetos empíricos, e não matemáticos? Como vimos, Dummett discutiu essa questão em uma seção de seu livro *Elements of Intuitionism*, no qual menciona o exemplo de uma infinitude de estrelas: “Mesmo se houvesse infinitamente muitas estrelas, isso poderia

ser pensado como uma possibilidade teórica [...] (Na verdade, é bem provável que isso não seja nem mesmo uma possibilidade teórica)” (2000, p. 42).

Aqui Dummett fala claramente de um exemplo de uma entidade empírica, não matemática. Afinal, estrelas são objetos empíricos espaço-temporais. Isto é, estaríamos falando da possibilidade teórica de uma infinitude de indivíduos, ou elementos de um conjunto, que, nesse caso, seria uma totalidade de coisas empíricas. Nesse sentido, aparentemente poderíamos tratar “totalidade empírica de estrelas” como sinônimo de “conjunto de estrelas”. Portanto, parece fazer muito sentido aqui predicar infinitude de um conjunto de objetos empíricos, i.e., de um conjunto de estrelas (predicação cardinal, no caso).

De certo modo, o problema aqui seria o da predicação sobre uma coleção de estrelas tratando-se, portanto, de uma coleção entendida, a princípio, em um sentido *atualista*. Dessa maneira, não parece ser possível, como no caso da matemática, introduzir um processo que fosse potencialmente infinito e eliminar a predicação cardinal de infinitude, pois não haveria “potência”, uma vez que não haveria “processo” de “geração de estrelas” – afinal, muito razoavelmente, alguém poderia reclamar: “as estrelas *já* estão *todas lá*”. Isso seria um problema, pois não parece que Dummett diria que as estrelas não são reais em pelo menos algum sentido do termo.

Caso realmente exista algo como uma *totalidade infinita de estrelas*, então, aparentemente teremos um caso no qual infinitude seja predicado de uma totalidade de indivíduos empíricos. Todavia, Dummett insiste e nos diz que o intuicionista, mesmo no caso de uma infinitude de estrelas, poderia entender a noção de infinitude no sentido não-atualista, i.e., o que temos chamado aqui de sentido “ordinal”. Assim, o filósofo inglês força a mesma noção que aplicou no contexto matemático em um contexto empírico e sugere que no lugar de compreender infinitude como um predicado de uma “coleção” ou “totalidade” no sentido cardinal, o intuicionista deveria compreender infinitude como predicado de um processo – especificamente *o de contar estrelas*. Nas palavras do Dummett: “O significado de afirmar que alguma totalidade, de estrelas [...], seja infinita está relacionada com a incompletabilidade do processo de contá-las [...] (2000, p. 42)”.

Todavia, no contexto empírico das estrelas, *tratar* infinitude como um predicado de um processo não seria suficiente para *justificar ou explicar* o uso do conceito ordinal de infinitude nesse contexto, pois só faria sentido falar que o processo de contar estrelas

seja necessariamente incompletável se, e somente se, a totalidade de estrelas for infinita em um sentido *necessariamente* cardinal.

Em outras palavras, Dummett afirma que predicar infinitude de uma totalidade de estrelas está relacionado com a incompletabilidade do processo de contá-las. Contudo, isso, na nossa opinião, não quer dizer que a incompletabilidade do processo elimine ou substitua uma predicação cardinal de infinitude sobre a totalidade de estrelas. Em outras palavras, se os únicos elementos intuicionistas, os quais Dummett oferece para justificar o uso ordinal de “infinitude” no caso das estrelas, forem estes, então só faria sentido falar da incompletabilidade do processo de contar estrelas se, de fato, o número de estrelas for cardinalmente infinito.

A saída que proporemos para explicar esse dilema dummettiano também é uma solução intuicionista, que é a seguinte: nós podemos argumentar que, da perspectiva intuicionista de Brouwer, não precisamos lidar com o exemplo das estrelas *desse modo* como Dummett propõe. Isto é, não se trataria apenas de um caso de “mera eliminação” ou de “mera reinterpretação” da predicação cardinal. O problema, segundo Brouwer, seria mais profundo e estaria relacionado com a raiz ontológica de todas as coisas. Para Brouwer, fundado em sua filosofia não-realista e idealista, o âmbito modal ao qual se refere a “possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas” diria respeito à possibilidade de fenômenos *sustentados* pela consciência. Essa noção de “consciência” desempenharia um papel importante na filosofia idealista da matemática brouweriana. Para ele, não faria sentido falar de uma “realidade empírica” de estrelas *independentemente* da *idealidade* em que elas *são construídas*. Não se trata aqui, no entanto, de um idealismo “gnosiológico”, mas, sim, de um idealismo ontológico⁶, no qual se considera que o próprio “material” do qual a *realidade* é feita seja a própria consciência –, como Brouwer atesta: “[...] este mundo de fenômenos [...] *existe* somente *através* e na *forma* da consciência [...]” (1975, p. 4; ênfase nossa). Dessa maneira, não faria sentido, para Brouwer, falar de uma “realidade empírica” do espaço constituído de infinitos “lugares” (ocupados ou não por estrelas) independente da *idealidade* espacial *construída* pela consciência.

Exploraremos em mais detalhes essa posição nesse artigo nas próximas subseções.

⁶ Na literatura recente há bastante discussão sobre as influências idealistas de Brouwer (cf. STIGT, 1990; ATTEN, 2007).

Brouwer sobre as noções de “espaço” e “infinitude”

Agora vamos apresentar, com um pouco mais de detalhes, as razões filosóficas idealistas que sustentam a posição de Brouwer. O seu idealismo tem certo matiz neokantiano (cf. STIGT, 1990; ATTEN, 2007; BROUWER, 1975, p. 68). A partir dessa posição idealista, ele sustenta que o espaço empírico não existe independentemente da consciência⁷. Segundo o filósofo holandês, tudo que existe ocorre na consciência e na forma de consciência. Então, há dois tipos de coisas: a própria consciência e os fenômenos que ocorrem na consciência. Os fenômenos que ocorrem na consciência são tratados como construções mentais. Além disso, são construções mentais com uma natureza temporal. Essa posição idealista de Brouwer não seria muito diferente da explicada por Poincaré, que afirma o seguinte, no livro *O Valor da Ciência*: “[...] sem dúvida é impossível uma realidade completamente independente do espírito que a concebe, vê ou sente. Um mundo assim tão exterior, se acaso existisse, ser-nos-ia para sempre inacessível” (2011, p. 9).

Tanto para Brouwer quanto para Poincaré, não faria sentido falar de uma realidade absolutamente independente da consciência. Assim, como a existência dos fenômenos seria equacionada com algum tipo de “idealidade geral”, então, em certo sentido, para Brouwer os fenômenos seriam, todos, o que temos chamado aqui de “construções mentais”. Essa construção mental, para o filósofo e matemático holandês, não acontece sem algum princípio que seja sua base. Na verdade, tudo ocorre de acordo com o princípio que é chamado de “intuição fundamental” ou “intuição primordial”, e essa intuição possui apenas uma forma. Assim, diferente de Kant, que atribui um aspecto duplo para a intuição, Brouwer rejeita o espaço como uma das formas fundamentais da intuição e atribui apenas ao tempo *subjetivo* o papel de forma da intuição. Desse modo, para Brouwer, o único elemento que seria tomado como *a priori* na ciência como um todo é o tempo (1975, p. 61). Isso faria com que todos os fenômenos fossem entidades ideais construídos mentalmente e *temporalmente*. Brouwer nos explica da seguinte forma como a mente intuiria o tempo:

[...] intuicionismo considera a separação de momentos da vida em partes qualitativamente diferentes –, a ser reunidas apenas enquanto

⁷ Brouwer utiliza os termos “mente” e “consciência” de modo relativamente intercambiável. Essa noção de “mente” (ou consciência) não é uma noção “ordinária”; trata-se aqui de uma noção transcendental de “mente” (cf. ATTEN, 2007; STIGT, 1990; DALLEN, 2013).

permanecem separadas pelo tempo como fenômeno fundamental do intelecto humano, [assim] passando pela abstração de seu conteúdo emocional para o fenômeno fundamental do pensamento matemático: a intuição da una-duosidade. (1975, p. 127)

Essa intuição pode ser entendida como sendo uma noção de “sequencialidade contínua *primordial*” de intervalos temporais. Pode ser chamada também de “intuição da uno-duosidade” entre dois momentos temporais aparentemente distintos e infinitesimalmente próximos um do outro (cf. STIGT, 1990; KUIPER, 2004; ATEN, 2007; DALLEN, 2013). Há várias formas de compreender essa noção de “intuição”, mas o ponto mais importante aqui é que se trata do “tempo subjetivo” e não de um “tempo objetivo” independente da consciência.

Portanto, como temos visto, todas as entidades a que é atribuído o predicado de “existência” seriam constructos feitos a partir dessa intuição do tempo na consciência. Assim também, *para Brouwer, tanto o espaço, quanto os fenômenos espaciais e as operações matemáticas, que usamos para descrever essas entidades, seriam um tipo de constructo mental temporal.* A partir do tratamento dos fenômenos como construções mentais, Brouwer passa a acreditar que não poderia existir, desse modo, algo como “o único espaço empírico real”. O que haveria, segundo ele, são maneiras cognitivas diferentes de catalogar os fenômenos espaciais, o que também não quer dizer que haja algo como o espaço em si, pronto, anterior à experiência da consciência por detrás desses fenômenos espaciais. O movimento filosófico tomado por Brouwer nessa questão também é parecido com aquele tomado por Poincaré, como o seguinte trecho do filósofo francês demonstra bem:

Então, o que devemos pensar da questão: a geometria euclidiana é verdadeira? Isso não tem sentido. Poderíamos também perguntar se o sistema métrico é verdadeiro e se os pesos e medidas antigos são falsos; se as coordenadas cartesianas forem verdadeiras e as coordenadas polares forem falsas. *Uma geometria não pode ser mais verdadeira que outra; só pode ser mais conveniente.* (1905, p. 50; ênfase nossa)

A afirmação de Brouwer deixa mais clara ainda a natureza convencionalista e idealista do espaço e seus elementos: “[...] não existe um espaço empírico definido: nós podemos *catalogar todo fenômeno em cada espaço*, com qualquer número de dimensões, e tão curvado quanto grotescamente desejarmos [...]” (1975, p. 69; ênfase nossa). Além de cada espaço ser tomado como uma construção mental, cada construção

mental é feita sob o pano de fundo de uma certa matemática. Brouwer continua e afirma o que temos dito: “Espaço empírico está ligado com matemáticas, mas experiência não pode nunca nos compelir à escolha de um sistema matemático definido.” (1975, p. 69).

Assim, cada espaço seria uma construção mental baseada em duas coisas: (i) na nossa experiência intuitiva e subjetiva do tempo; e (ii) em alguma matemática selecionada prévia e arbitrariamente. Isto é, embora o tipo de matemática que possa ser usado para a construção do espaço possa variar – a matemática poderia ser clássica, ou intuicionista, ou construtiva –, a experiência do tempo seria sempre a experiência subjetiva do tempo. Assim, qualquer escolha, segundo o filósofo holandês, de uma certa “concepção” de espaço estaria necessariamente relacionada com uma escolha de um determinado sistema matemático. Uma das conclusões possíveis a se tirar dessas afirmações é que, tanto em Brouwer quanto em Poincaré, não poderia haver *primazia* de uma teoria espacial sobre outra.

Uma vez considerada a posição de Brouwer a respeito de seu idealismo e de sua concepção convencionalista do espaço, agora, na próxima seção, tentaremos mostrar como essa visão de Brouwer do espaço explicaria por quais razões seria possível falar de uma concepção ordinal de “infinitude espacial”. Veremos também que essa concepção seria mais satisfatória para Brouwer – de uma perspectiva filosófica intuicionista – do que aquela fornecida pelo Dummett.

A relação entre ciência e matemática do ponto de vista do problema da infinitude espacial

Levando em consideração a abordagem filosófica idealista de Brouwer, como seria o tratamento do exemplo de Dummett sobre a infinitude *aparentemente atual* do número de estrelas? Para Brouwer, isso significaria afirmar que o fato de o número de estrelas ser ou não potencialmente infinito necessariamente depende da teoria matemática subjacente. Isto é, quantas estrelas existem, de acordo com o idealismo brouweriano, não é algo que está lá dado na realidade independentemente da consciência, pois, como vimos, tanto para Brouwer quanto para Poincaré, não haveria tal coisa.

A resposta de Brouwer para essa questão seria algo ~~tipo~~ assim: o espaço teria sua existência construída através da experiência intuitiva do tempo e de acordo com a matemática selecionada previamente. Não só o espaço mas também os elementos

presentes nele seriam construídos, a princípio, pela experiência do tempo e pela matemática escolhida. Assim, o número de elementos espaciais poderia ser um número n qualquer de elementos dependendo tão somente dos dois fatores mencionados acima e não de uma realidade absolutamente independente da consciência. Por exemplo, se uma física decide calcular com base em determinados instrumentos teóricos o número de estrelas e daí deduzir um número finito de estrelas, então, de acordo com essa teoria (que também seria uma construção mental), o número de estrelas seria consistentemente finito.

O ponto, no entanto, para Brouwer, como para Poincaré, é que isso não excluiria, a princípio, a possibilidade legítima de uma teoria diferente que afirme que o número de estrelas possa ser infinito, isto é, que uma teoria afirme ser possível sempre encontrar mais uma estrela e, a partir daí, afirmar que o número de estrelas seja ordinalmente infinito. Em outras palavras, isso não excluiria como falsa ou absurda a possibilidade de um espaço potencialmente infinito. Desse modo, ficaria garantida a *legitimidade teórica* de uma *possibilidade* infinita de estrelas.

O problema crucial de Dummett é que, como estrelas diriam respeito a uma realidade física, então aparentemente teria de se tratar de uma predicação cardinal de infinitude, a despeito da tentativa de reinterpretação de Dummett; no entanto, para Brouwer, como vimos, como todas as predicções são sempre sobre construções mentais temporais, então, dentro de quadro geral, *sequer faria sentido* a predicação cardinal atualista de infinitude. Essa abordagem de Brouwer se dá no nível do pressuposto idealista ontológico de todas coisas (entendido no sentido explicado anteriormente), isto é, tudo seria sempre construção mental e, portanto, sempre poderíamos ter tão somente uma predicação ordinal. Na nossa opinião, isso explicaria, com razões filosoficamente mais fortes, a motivação intuicionista de aceitar tão somente uma concepção ordinal de infinitude – uma vez que, do ponto de vista ontológico brouweriano, tanto as entidades matemáticas quanto as empíricas seriam construções mentais que teriam tão somente uma existência *ideal*. Desse modo, para Brouwer, não é verdade que apenas as entidades matemáticas sejam construções mentais, pois, para ele, as entidades empíricas também o são.

Ora, a partir dessa reflexão poderíamos concluir que um idealista, em certo sentido, não seria tão infinitista quanto um não-idealista em contextos infinitários empíricos. Todavia, ainda assim, o intuicionista idealista não recusaria toda noção de infinitude em contextos empíricos, isto é, não seria estrita e radicalmente finitista em

contextos empíricos.

Conclusão

O nosso primeiro propósito era distinguir claramente duas concepções de infinitude presentes na discussão em torno da possibilidade teórica de uma infinitude de objetos espaciais. Levando em consideração essa distinção conceitual, tentamos levar a cabo uma análise brouweriana intuicionista e idealista do problema que aparece em Dummett a respeito da possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas. Demonstramos que, se nos restringirmos à abordagem dummettiana de infinitude, então parecerá forçada a ideia de reinterpretar um caso intuitivamente cardinal de infinitude (o caso das estrelas) como sendo ordinal. Além disso, se nos restringirmos apenas à perspectiva dummettiana, então a visão do problema de uma infinitude de estrelas ficará aquém do modo como um intuicionista da escola de Brouwer poderia abordar a questão.

Todavia, finalizamos mostrando que, se explicitarmos os pressupostos idealistas do intuicionismo de Brouwer, tornam-se mais significativas as razões pelas quais o intuicionista estaria legitimado a sustentar uma noção ordinal de infinitude mesmo em um caso empírico. Desse modo, um dos corolários mais importantes da tese apresentada nesse artigo é que não há uma separação radical entre a ontologia dos fenômenos e a ontologia das entidades matemáticas. Na verdade, a ontologia seria a mesma tanto para a física dos fenômenos quanto para a matemática, a saber, uma ontologia idealista, a qual distinguiria as entidades matemáticas e as entidades não-matemáticas a partir de perspectivas diferentes do tratamento do tempo subjetivo. Isto é, os fenômenos seriam construídos dentro do “espaço” da consciência *com base* na intuição temporal e *com base* na matemática selecionada previamente; já as entidades matemáticas seriam atos cognitivos que seriam feitos a partir da explicitação de propriedades do *continuum* presente na experiência do tempo subjetivo. Portanto, a matemática não seria algo separado da realidade fenomênica; na verdade, ela falaria justamente do princípio que constrói todos os fenômenos, a saber, a intuição primordial do tempo subjetivo.

Em síntese, nosso objetivo central, nesse artigo, foi tentar abordar, de uma perspectiva brouweriana, o problema da possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas. Assim, a nossa intenção era explicitar por quais razões, mesmo dentro de um contexto aparentemente tão diferente do contexto matemático, o intuicionista pertencente à escola de Brouwer defenderia uma noção ordinal de infinitude espacial e,

portanto, empírica. O fundamento para a posição de Brouwer, como vimos, se encontra no seu tratamento idealista dos fenômenos espaciais como sendo meramente construções mentais temporais. Uma vez que tudo o que temos são tão somente construções mentais temporais, a predicação ordinal de infinitude seria uma alternativa filosoficamente válida. Consequentemente, a possibilidade teórica de uma infinitude de estrelas seria legítima.

Referências

- ATTEN, M; TRAGESSE, R. *Mysticism and Mathematics: Brouwer, Gödel and the Common Core Thesis*. In: VAN ATTEN, M. (Org.) *Essays on Gödel's Reception of Leibniz, Husserl, and Brouwer*. Switzerland/France: Paris, Springer International Publishing, pp. 173-188.
- BROUWER, L. E. J. *Collected Works I. Philosophy and Foundations of Mathematics*. Ed. Arend Heyting. Amsterdam: North-Holland, 1975.
- DUMMETT, M. *Elements of Intuitionism*. Oxford: Oxford University Press. 2nd revised edition, 2000.
- KUIPER, J, J, C. *Ideas and Explorations: Brouwer's Road to Intuitionism*. Tese (Doutorado em Filosofia) – Utrecht University Repository, 2004. Disponível em: <https://www.cs.ru.nl/~freek/brouwer/phdthesis.pdf>.
- POINCARÉ, H. *Science and Hypothesis*. Ed. London W. Scott, 1905. Disponível em: <https://archive.org/details/scienceandhypoth00poinuoft/page/n5>.
- _____. H. *O Valor da Ciência*. Trad. Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 2011.
- PORTO, A. Semantical mutation, algorithms and programas. *Dissertatio*, V. Suplementar 1, Dossiê Wittgenstein, pp. 44-76. 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/dissertatio/issue/view/513>.
- VAN DALEN, D. *L. E. J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher: How Mathematics is Rooted in Life*. London: Springer, 2013.
- VAN STIGT, W. *Brouwer's Intuitionism*. Amsterdam: North-Holland, 1990.

Recebido em: 12/05/2019

Aprovado em: 01/09/2019