El Teorema de Kochen-Specker y las Semánticas no deterministas

Thesis · October 2024

DOI: 10.13140/RG.2.2.24556.17286

1 author:

Juan Pablo Jorge
University of Buenos Aires

Tesina de la Licenciatura en Ciencias Físicas

El Teorema de Kochen-Specker y las Semánticas no deterministas

Autor: Juan Pablo Jorge **Director:** Federico Holik **Codirector:** Lucas Rosenblatt

Universidad de Buenos Aires - FCEyN - DF

25 de noviembre de 2019

Información de la tesis

TEMA: Mecánica Cuántica - Lógicas Cuánticas

ALUMNO: Juan Pablo Jorge (LU: 812/96)

LUGAR DE TRABAJO: UNLP-DF

DIRECTOR DE TRABAJO: Dr. Federico Holik

CODIRECTOR DE TRABAJO: Dr. Lucas Rosenblatt

FECHA DE INICIACIÓN: Septiembre 2018

FECHA DE FINALIZACIÓN: Octubre 2019

FECHA DE EXAMEN: 25 – 11 – 2019

INFORME FINAL APROBADO POR:

Alumno: Juan Pablo Jorge	Jurado 1: Dr. E. Barrio
Director: Dr. F. Holik	Jurado 2: Dr. P. Tamborenea
Codirector: Dr. L. Rosenblatt	Jurado 3: Dr. D. Wisniacki
Profesor: Dr. Juan Pablo Paz	

Para José Luis

Agradecimientos

Este trabajo de tesis representa el final de mi licenciatura en física; la misma ha transcurrido a lo largo de tres décadas y he recibido muchísima ayuda en el largo camino. Si fuera justo, y mombrara a cada uno de los que me han ayudado, esta sería, por lejos, la parte más extensa de esta tesis. Como no tiene sentido que esta sección se transforme en una suerte de tomo de la Biblioteca de Babel, no voy a poder nombrarlos a todos (es una suerte que alguna de las semánticas tratadas en este trabajo me dé la libertad para no validar Modus Tollendo Tollens). Sé que no soy Ireneo Funes, pero créanme que no me olvido de ninguno ni tampoco de ninguna de las circunstancias en las cuales fui ayudado. Mi agradecimiento será sempiterno, este objetivo alcanzado se lo debo a ustedes.

En este último año de trabajo he aprendido mucho de mis dos directores, Federico Holik (por el área de física) y Lucas Rosenblatt (por el área de lógica). Trabajar bajo su dirección fue una experiencia realmente buena y recomendable, mi gratitud para con ellos. Gracias por tanta paciencia y atención.

Es un deber para mí nombrar a Daniel Romero (el Panadero), sin él no habría aprobado ninguno de los últimos 6 laboratorios de física. Muchas gracias, Panadero.

Prefacio

Desde los trabajos de von Neumann y Birkhoff hasta la actualidad, el estudio de distintas estructuras algebraicas asociadas al formalismo cuántico ha dado lugar a interesantes desarrollos. A modo de ejemplo, el teorema de Kochen-Specker ha tenido una fuerte repercusión en los fundamentos e interpretación de la teoría cuántica. En este trabajo, prestaremos especial atención al abordaje lógico-algebraico iniciado por von Neumann y Birkhoff (aunque también discutiremos otros formalismos, tales como la lógica de la superposición de Tzouvaras).
Es sabido que el teorema de Kochen-Specker (KS) no permite que el retículo de proyectores cuánticos, que representa el conjunto de todas las proposiciones empíricas asociadas a un sistema cuántico, tenga una valuación clásica a un conjunto de dos valores, como por ejemplo, 1 y 0 (o V y F). En este trabajo, discutiremos la relación entre este hecho y la noción - tomada de la lógica - de *funcionalidad de la verdad*. Nuestro objetivo es mostrar que existen semánticas no deterministas, como por ejemplo, la semántica de matrices no deterministas (N-M) de A. Avron, A. Zamansky y I. Lev, que pueden usarse para caracterizar a los estados cuánticos como valuaciones no deterministas. El sistema formal que adaptamos a la Mecánica Cuántica es la *Semántica de matrices no deterministas*, un sistema formal que puede brindar semánticas apropiadas para diversos sistemas sintácticos. Esta semántica tiene su origen en la primera década de este siglo y se ha aplicado con éxito en diferentes terrenos. Probamos que existen Nmatrices que dan semánticas adecuadas para un lenguaje basado en el álgebra de proyectores ortogonales del espacio de Hilbert.
En el primer capítulo comenzamos con una introducción a los conceptos básicos del formalismo de espacios de Hilbert, para luego enunciar los postulados de la mecánica cuántica no relativista. Finalizamos el capítulo con una breve exposición de los teoremas de Kochen-Specker y Gleason [84, 61], que serán relevantes en el resto del trabajo.
En el segundo capítulo introducimos las nociones de valuaciones funcionales, homomorfismos de álgebras, retículos no distributivos, álgebras de Boole y semánticas clásicas. Es importante saber qué es tener una *semántica clásica* para luego comprender las diferencias a la hora de dotar a nuestro sistema con una semántica de otro estilo.
En el tercer capítulo presentamos el formalismo de las Nmatrices [11, 13]. Se definen los conceptos de *adecuación* y *rexpansión*, que son de importancia para nuestros objetivos. Mostramos algunas de las tantas aplicaciones de este sistema y preparamos el terreno para su aplicación a la física cuántica.
En el cuarto capítulo aplicamos las Nmatrices a sistemas cuánticos generales y probamos que las restricciones impuestas sobre las valuaciones por nuestra Nmatriz cuántica, son equivalentes a las condiciones necesarias para que se cumpla el teorema de *Gleason*, con lo cual, damos una caracterización de los estados cuánticos como valuaciones de semánticas no deterministas. También se muestra cómo construir Nmatrices para casos en los cuales no existe certeza absoluta de un resultado dado. Esto es, sistemas en los cuales la im-

precisión experimental debe tenerse en cuenta a la hora de afirmar algo con seguridad. A continuación, estudiamos la noción de *consecuencia lógica* que se deduce de nuestras Nmatrices cuánticas. Por último, en este mismo capítulo, aplicamos las Nmatrices al sistema lógico de Tzouvaras, la Lógica de la Superposición (LPS) [111, 112]. Este sistema lógico ya cuenta con su semántica original, una semántica de funciones de elección, pero mostramos que las Nmatrices pueden ser una opción de importancia para muchos objetivos. En la parte final de este capítulo, mostramos de qué forma podrían incorporarse los Quasets [39, 69] en la base misma de nuestra semántica Nmatricial. Finalmente, el capítulo 5 es el que contiene las conclusiones y objetivos para futuros trabajos.

Índice

Capítulo 1

Introducción al formalismo cuántico de espacios de Hilbert

El objetivo de este capítulo es introducir las herramientas básicas que serán utilizadas en este trabajo. Repasaremos conceptos matemáticos fundamentales, tales como el de espacio de Hilbert y su retículo de proyectores asociado. También se presentarán los teoremas de Gleason y de Kochen-Specker, que son de importancia fundamental tanto en la motivación, como en el desarrollo de nuestro trabajo.
Para profundizar los temas matemáticos introducidos en este capítulo, o ver algunas demostraciones, recomendamos [104, 1, 90]. Para la última parte de este capítulo, destinada a los teoremas de Gleason y Kochen-Specker, ver [84, 29, 61].
Como un espacio de Hilbert es un caso particular de espacio vectorial (normado), vamos a dar primero la definición de espacio vectorial. Para tal fin, vamos a necesitar el concepto de Anillo, ya que suele definirse un espacio vectorial sobre un Cuerpo o Anillo, dependiendo las necesidades. Por lo tanto, comenzaremos introduciendo los conceptos de Grupo, Anillo y Cuerpo.

Salvo mención expresa, las operaciones consideradas de aquí en más serán operaciones binarias.

1.1 Grupos, Anillos y Cuerpos

Definición 1.1.1. Sea S un conjunto y sea $(x, y) \hookrightarrow x * y$ una operación asociativa en S admitiendo un elemento neutro e. Diremos entonces que S es un semigrupo respecto a dicha operación, o también que $(S, *)$ es un semigrupo. Si además la operación es conmutativa, $(S, *)$ se dirá un semigrupo conmutativo.

Ejemplos conocidos de semigrupos son el conjunto $\mathbb{N}_0$ de enteros no negativos, respecto a la suma usual, y el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros respecto al producto usual, siendo 0 y 1 los correspondientes elementos neutros. Menos familiar, la operación $a * b = max\{a, b\}$ también define en $\mathbb{N}_0$ una estructura de semigrupo, ya que claramente es asociativa y admite 0 como elemento neutro. Vemos así un caso de dos estructuras distintas de semigrupo definidas sobre el mismo conjunto.
Definamos ahora Grupo.

Definición 1.1.2. Si G es un semigrupo y todo elemento de G es inversible, diremos que G es un grupo.
Detallando las condiciones de la definición, resulta que $(G, *)$ es un grupo si y sólo si se satisfacen los siguientes axiomas:

$\mathcal{G}1$ $x * (y * z) = (x * y) * z$ cualesquiera sean $x, y, z \in G$.
$\mathcal{G}2$ Existe $e \in G$, tal que $x * e = e * x = x$ para todo $x \in G$.
$\mathcal{G}3$ Para todo $x \in G$ existe $y \in G$, tal que $x * y = y * x = e$.

Si la operación es conmutativa se dice que G es un grupo conmutativo o abeliano, en homenaje al noruego Niels Henrik Abel (1802-1827), que demostró la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación algebraica general de quinto grado, mediante el estudio del grupo de permutaciones de sus raíces. Un grupo G se dice finito o infinito según lo sea su dominio.
Todo espacio vectorial será un grupo abeliano con respecto a la suma de vectores. Serán entonces ejemplos de grupo los espacios de n-uplas, los espacios de matrices y los espacios de homomorfismos entre dos espacios vectoriales.
Podemos ahora definir Anillo.

Definición 1.1.3. Un anillo es un conjunto R dotado de dos operaciones, llamadas suma y producto y notadas con los símbolos usuales, que satisfacen los siguientes requerimientos (las letras indican elementos de R):
$\mathcal{A}1$ $(R, +)$ es un grupo abeliano.
$\mathcal{A}2$ $(R, .)$ es un semigrupo.
$\mathcal{A}3$ Si $a, b, c \in R$, se cumple que $a(b + c) = ab + ac$ y $(b + c)a = ba + ca$.

Como de costumbre, 0 y 1 designan los respectivos elementos neutros, que suponemos distintos. Si hay un $1 \in R$, tal que funciona de neutro para la multiplicación (.), entonces decimos que el anillo es con unidad. Las condiciones $\mathcal{A}3$ se llaman propiedades distributivas del producto respecto a la suma. Si el producto en R es conmutativo, diremos que R es un anillo conmutativo. Para los análisis que haremos en secciones siguientes, puede entenderse esta definición diciendo que un anillo es una estructura $\langle R, +, \ . \ , 1, 0\rangle$ que cumple las propiedades mostradas.

> Si para cualquier par de elementos $x, y \in R$ se verifica la siguiente propiedad: $x.y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$, diremos entonces que R es un anillo íntegro. Si además es conmutativo, se dirá un dominio de integridad. Los conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son dominios de integridad respecto a la suma y producto usuales.

Si X es un conjunto no vacío, el conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ es un anillo conmutativo respecto a las operaciones de diferencia simétrica (suma) e intersección (producto). Resulta en este caso que $\emptyset$ y X son los correspondientes elementos neutros y que $\mathcal{P}(X)$ no es un dominio de integridad si X tiene más d un elemento, ya que si U es cualquier subconjunto unitario de X tenemos: $U.U^c = U \cap U^c = \emptyset = 0$, a pesar de que los "factores" U y U^c son no nulos (no vacíos).
Pasemos ahora a la definición de Cuerpo.

Definición 1.1.4. Un anillo conmutativo K se dice un cuerpo si y sólo si todo elemento no nulo de K es inversible respecto al producto. Equivalentemente, el conjunto $K^* = K - \{0\}$ es un grupo respecto al producto.

Casos conocidos por el lector de esta estructura son naturalmente los cuerpos numéricos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Como ejemplo de otro tipo, puede nombrarse que si p es un primo, toda clase de congruencia no nula módulo p es inversible respecto al producto, lo que brinda una colección de ejemplos de cuerpos finitos, a saber los cuerpos $\mathbb{Z}_p$ de clases residuales.
Para definir espacio vectorial, la elegancia formal de los algebristas rusos será nuestra guía [90].

1.2 Módulos y Espacios Vectoriales

Definición 1.2.1. Un conjunto arbitrario no vacío $\mathcal{L}$ se llama módulo sobre un anillo $\mathcal{K}$ si se cumplen las siguientes condiciones:
a) Existe una regla u operación que a partir de cualquier par de elementos a, b de $\mathcal{L}$, permite hallar un elemento de $\mathcal{L}$ que se llama suma de los dos primeros y se designa mediante $a+b$.
b) Existe una regla que a partir de cualquier elemento α de $\mathcal{K}$ y de cualquier elemento a de $\mathcal{L}$, permite hallar en $\mathcal{L}$ un elemento nuevo que se llama producto de α por a y que se designa mediante αa.
c) las operaciones de adición y multiplicación por elemento del anillo satisfacen los axiomas siguientes:
$\mathcal{EV}1$ La adición es conmutativa:

$$a+b=b+a.$$

$\mathcal{EV}2$ La adición es asociativa :

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

$\mathcal{EV}3$ Es posible realizar la sustracción, es decir, para todo par de elementos a, b de $\mathcal{L}$ existe en $\mathcal{L}$ un elemento x, tal que:

$$a+x=b.$$

$\mathcal{EV}4$ La multiplicación es asociativa:

$$\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a.$$

$\mathcal{EV}5$ La multiplicación es distributiva respecto a la adición en $\mathcal{L}$:

$$\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b.$$

$\mathcal{EV}6$ La multiplicación es distributiva con respecto a la adición de elementos de $\mathcal{K}$:

$$(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a.$$

Si el anillo $\mathcal{K}$ tiene unidad y 1 designa el elemento unidad, suele exigirse que se cumpla además la condición
$\mathcal{EV}7$

$$1.a=a.$$

En este caso el módulo se llama unitario.

Un módulo unitario sobre un anillo $\mathcal{K}$ se llama espacio lineal o espacio vectorial sobre $\mathcal{K}$ (o $\mathcal{K} - espacio\ vectorial$).

Los elementos de un espacio vectorial se llaman vectores. En la definición anterior, todas las letras latinas denotan vectores, y las griegas, elementos del anillo.

En la definición precedente, los vectores se multiplicaban a la izquierda por los elementos del anillo $\mathcal{K}$. Por esta razón, los espacios vectoriales definidos se llaman espacios lineales a izquierda sobre $\mathcal{K}$. Si se exige que estén definidos los productos a la derecha de los elementos de $\mathcal{L}$ y se modifican los axiomas de $\mathcal{EV}4$ a $\mathcal{EV}7$, se obtendrá una estructura que se llama módulo a derecha y espacio lineal o vectorial a derecha. Está claro que las propiedades de los espacios a izquierda y a derecha son las mismas; tiene importancia distinguir la multiplicación a la derecha y a la izquierda sólo cuando estén definidas simultáneamente.

Un espacio vectorial sobre el cuerpo de los Complejos se llama espacio vectorial complejo. La condición a) y los axiomas $\mathcal{EV}2$ y $\mathcal{EV}3$ muestran que todo espacio vectorial es un grupo respecto a la operación de adición de vectores y, además, según el axioma $\mathcal{EV}1$, este grupo debe ser conmutativo como bien ya habíamos observado.
Por último, observemos que en $\mathcal{EV}5$ y $\mathcal{EV}6$ utilizamos el mismo símbolo $(+)$ tanto para denotar la suma de elementos del anillo como para denotar la suma de vectores. Lo mas riguroso sería distinguir estas operaciones según el caso, $+_K$ y $+_V$, pero es una sutileza que no debe llevar a confusión.
Al igual que en todo grupo conmutativo, la suma de finitos vectores no depende ni del orden de los sumandos ni de la forma de distribuir sus paréntesis.
Las expresiones de tipo

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$$

se llaman combinaciones lineales de los vectores $a_1, a_2, ..., a_n$.

1.3 Aplicaciones lineales y Operadores

Precisamos definir proyectores ortogonales sobre un espacio de Hilbert. Daremos ahora las definiciones básicas que nos permitan cumplir con tal tarea. Estos conceptos serán utilizados a lo largo del resto del trabajo.

Definición 1.3.1. Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ espacios vectoriales sobre un anillo $\mathcal{K}$. Una aplicación u operador T con dominio de definición $D(T)$, subespacio de $\mathcal{V}_1$, y recorrido $R(T) = T(D(T)) \subseteq \mathcal{V}_2$, se dirá lineal si $\forall v, w \in D(T)$

$$T(v + w) = T(v) + T(w),$$

$$T(\lambda v) = \lambda T(v).$$

Nos tomamos la libertad de denotar las sumas en ambos espacios vectoriales con el mismo símbolo, ya que no creemos que genere confusión.

Si el anillo $\mathcal{K}$ fuese el de los números complejos $\mathbb{C}$ y la última condición de la aplicación lineal se reemplazara por

$$T(\lambda v) = \overline{\lambda} T(v),$$

entonces la aplicación sería antilineal.

El conjunto, claramente no vacío, de aplicaciones lineales $T : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ con dominio $D(T) = \mathcal{V}_1$ y recorrido $R(T) \subseteq \mathcal{V}_2$, admite una estructura natural de espacio vectorial sobre $\mathcal{K}$ ai aw definen las siguientes operaciones:

$$(T_1 + T_2)v := T_1 v + T_2 v,$$
$$(\lambda.T)(v) = \lambda.T(v).$$

> Asumimos que el anillo $\mathcal{K}$ es el mismo, tanto para los espacios de entrada y salida de cada una de las aplicaciones lineales, así como para el espacio vectorial formado por todas las aplicaciones. La suma de aplicaciones y la de vectores ha sido denotada con el mismo símbolo (+).

Denotamos tal espacio lineal por $\mathcal{L}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$. En caso de que $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$, escribimos por $\mathcal{L}(\mathcal{V})$. Denotamos al elemento nulo por 0, por $0_{\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2}$, o $0_{\mathcal{V}}$, según el caso. Las mismas observaciones se aplican para el 1, identidad del espacio.

1.4 Producto interno y Norma

Definición 1.4.1. Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre el anillo $\mathcal{K}$ (para nosotros $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un producto escalar (o interno) sobre $\mathcal{V}$ es una aplicación $\langle , \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{K}$ que cumple :
$\mathcal{PE}1$ $0 \leq \langle v, v\rangle$ y $\langle v, v\rangle = 0$ si y sólo si $v = \overline{0}$.
$\mathcal{PE}2$ $\langle v, v_1 + v_2\rangle = \langle v, v_1\rangle + \langle v, v_2\rangle$.
$\mathcal{PE}3$ $\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.
$\mathcal{PE}4$ $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle^*$.

> Las letras latinas se usaron para representar elementos del espacio vectorial $\mathcal{V}$ y las griegas, para designar elementos del anillo $\mathcal{K}$. Para denotar la conjugación compleja, se utilizó el supraíndice *.

El producto interno induce sobre la estructura $\mathcal{V}$ una norma, entendiendo por norma a una función $\| \ \|: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ que tiene como preimagen del 0 únicamente al elemento neutro $\overline{0}$ de $\mathcal{V}$.

Definición 1.4.2. Una norma en un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es una aplicación $\| \, . \, \|: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, que a cada vector $x \in \mathcal{V}$ hace corresponder un número real, $\| x \|$, verificando las tres condiciones siguientes:
$\mathcal{N}1$ Desigualdad triangular: $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \quad \forall x, y \in \mathcal{V}$.
$\mathcal{N}2$ Homogeneidad por homotecias: $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \| \quad \forall x \in \mathcal{V}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{N}3$ No degeneración: $x \in \mathcal{V}, \| x \| = 0 \Longrightarrow x = 0$.

> La homogeneidad por homotecias, con $\lambda = 0$, nos dice que $\| \overline{0} \| = 0$, mientras que tomando $\lambda = -1$, obtenemos que $\| -x \| = \| x \|$ para todo $x \in \mathcal{V}$. Usando esto y la desigualdad triangular se muestra que la norma no puede ser negativa, ya que

$$0 = \| x + (-x) \| \leq \| x \| + \| -x \| = 2 \| x \| \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

Un espacio normado es un espacio vectorial $\mathcal{V}$ en el que hemos fijado la norma $\| \ . \ \|$. Para cada $x \in \mathcal{V}$, se dice también que el número real $||x||$ es la norma del vector x. No debemos confundir la norma del espacio $\mathcal{V}$, que es una aplicación de $\mathcal{V}$ en $\mathbb{R}$, con la norma de cada vector, que es un número real.

Definición 1.4.3. La norma inducida por el producto interno $\langle , \rangle$ en $\mathcal{V}$ es definida para todo $x \in \mathcal{V}$ como $\| x \| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

Por otro lado, el producto interno introducirá también una noción de ortogonalidad (y de esta forma de ángulo).
Al par $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$, que es un espacio vectorial con producto escalar o interno, también se lo puede llamar espacio pre-Hilbert. Es sabido que una norma determina automáticamente sobre el espacio vectorial $\mathcal{V}$ subyacente una estructura métrica asociada. Por lo tanto, la cadena

$$\text{Producto escalar} \rightarrow \text{Norma} \rightarrow \text{Métrica} \rightarrow \text{topología métrica}$$

, garantiza la existencia sobre cualquier espacio pre-Hilbert de una topología métrica definida mediante la distancia
$d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(v, w) := \| v - w \|.$$

> Sabemos que en un espacio pre-Hilbert la norma proviene de un producto interno mediante la identificación $\| v \| = \langle v, v \rangle^{1/2}$. Uno podría preguntarse si un espacio lineal normado admite varias estructuras de pre-Hilbert, esto es, si su norma puede provenir de distintos productos internos. La respuesta es negativa. Así cada estructura normada puede provenir a lo sumo de un producto interno. Y, naturalmente, la cuestión ahora sería dar las condiciones necesarias para que una norma derive de un producto escalar dado. La condición necesaria y suficiente para que $(\mathcal{V}, \| \ . \ \|)$ admita un producto interno o escalar $\langle , \rangle$, tal que $\| v \|^2 = \langle v, v \rangle$ para todo vector es que se satisfaga la ley del paralelogramo:
>
> $$\| \ v + w \ \|^2 + \| \ v - w \ \|^2 = 2 \ \| \ v \ \|^2 + 2 \ \| \ w \ \|^2 \ .$$

Definición 1.4.4. Dos vectores $x, y \in \mathcal{V}$ se dicen ortogonales $(x \perp y)$ siempre que $\langle x, y \rangle = 0$.
Estamos ahora en condiciones de definir el concepto de espacio de Hilbert

1.5 Espacios de Hilbert

Antes de llegar a la definición de espacio de Hilbert, definamos la noción de completitud por sucesiones de Cauchy, ya que será de importancia para nuestro propósito.

Definición 1.5.1. Se dice que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en norma a x si y sólo si $\lim_{n \to \infty} \| \ x_n - x \ \| = 0$.

Por otro lado, se dirá que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es de Cauchy* si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n, m > N_\epsilon$, $\| \ x_n - x_m \ \| < \epsilon$.

De esta forma, al tener una noción de convergencia, se puede introducir la idea de *completitud* de un espacio con producto interno.

Definición 1.5.2. Un espacio con producto interno $\mathcal{V}$ se dirá completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge en norma a un elemento en $\mathcal{V}$.

Lo cual nos permite dar finalmente una definición de espacio de Hilbert.

Definición 1.5.3. Un espacio de Hilbert es una espacio provisto de producto interno y completo.
Todo subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ hereda la estructura hilbertiana, y se dirá que es un subespacio de Hilbert.

> Los espacios de Hilbert tienen muchas e importantes aplicaciones en la física, no sólo en la Mecánica Cuántica. Deben su nombre al matemático alemán David Hilbert (1861-1943). No deja de ser paradójico que la gran figura de este formalista y eminencia de la ciencia, enemigo acérrimo de cuanto pudiese sonar a Matemáticas aplicadas, aparezca hoy ligada tan estrechamente a la Física. A tal extremo llegaba su concepción aislada de la Matemática que, estando como invitado por F.Klein en Göttingen, y debiendo sustituir a éste con ocasión de un discurso dirigido a un auditorio de técnicos e ingenieros, cuyo tema se había fijado previamente, sobre el acercamiento entre Matemática y Técnica, afirmó Hilbert ante la natural expectación de los presentes: "Se Habla mucho sobre la hostilidad entre científicos e ingenieros. Yo no creo tal cosa...Es más, estoy completamente convencido de que es falso...¡No puede haber nada entre ellos, porque ninguna de las dos partes tiene nada en absoluto que ver con la otra!".

Definición 1.5.4. Un espacio de Hilbert que admite una base numerable es un espacio de Hilbert separable
Generalmente, en el Análisis no se emplean espacios más generales que los separables. Es común pedir que el espacio sea Hausdorff, esto es, que para dos puntos cualesquiera del espacio existan siempre vecindades con intersección vacía. Todos los espacios de Hausdorff son separables y en este trabajo nos concentraremos en los espacios de Hilbert separables.

Definición 1.5.5. Un conjunto $S \subseteq \mathcal{H}$ se dice cerrado si toda sucesión de Cauchy en S converge en norma a un elemento en S.

Con lo cual, un subespacio $M \subseteq \mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert si es además cerrado. Al conjunto de todos los subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ se lo representa con $\mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Definición 1.5.6. El espacio generado por un conjunto $S \subseteq \mathcal{H}$ viene dado por:

$$\vee S \equiv \bigcap \{K \ / \ K \text{ es un subespacio cerrado de } \mathcal{H} \text{ con } S \subseteq K\}$$

Dadi que la intersección de dos subespacios cerrados es un subespacio cerrado, entonces $\vee S$ (con $S \subseteq \mathcal{H}$) es el subespacio de $\mathcal{H}$ cerrado más que chico que contiene a S.

1.5.1 Complementos ortogonales

Definición 1.5.7. Sea M un subconjunto no vacío de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Escribimos:

$$M^{\perp} := \{v \in \mathcal{H} / v \perp M\}.$$

En la ecuación de arriba, $v \perp M$ significa que v es perpendicular a todos los elementos del conjunto M. Por lo tanto, $M^\perp$ es el conjunto formado por todos los elementos de $\mathcal{H}$ ortogonales a los elementos de M. Diremos que $M^\perp$ es el *complemento ortogonal* de M en $\mathcal{H}$. A veces se escribe también $M^\perp := \mathcal{H} - M$, notación compatible con el teorema fundamental de la proyección ortogonal.

Proposición 1.5.1. *Teorema de la proyección ortogonal*
Si M es un subespacio vectorial cerrado (no vacío) del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces $\forall v \in \mathcal{H}$:

$$v = v_1 + v_2, \text{ con } v_1 \in M, v_2 \in M^\perp$$

y tal descomposición es única.

Definición 1.5.8. Se dice que v_1 es la proyección ortogonal de v sobre M

Definición 1.5.9. Si $M_1, M_2, ..., M_n$ es una colección de subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$, decimos que la suma $M = M_1 + M_2 + ... + M_n$ es directa, y la denotamos en tal caso por $M_1 \overline{\bigoplus} M_2 \overline{\bigoplus} ... \overline{\bigoplus} M_n$, cuando la descomposición $x = x_1 + x_2 + ... + x_n, \quad x_j \in M_j$ es única $\forall x \in M$

Definición 1.5.10. Dados dos subespacios vectoriales cerrados M, N, de un $\mathcal{H}$, diremos que $\mathcal{H}$ es suma directa ortogonal de ambos, simbólicamente $\mathcal{H} = M \bigoplus N$ si además de tener $\mathcal{H} = M \overline{\bigoplus} N$, se cumple que $M \perp N$.

Llegamos a la definición de proyector en un espacio vectorial.

Definición 1.5.11. Si $\mathcal{V} = M_1 \overline{\bigoplus} M_2$, la aplicación $\hat{P}_{M_1} : x \in \mathcal{V} \longrightarrow x_1 \in M_1$ se llama proyector de $\mathcal{V}$ sobre M_1 en la dirección de M_2.

Es fácil convencerse de que $\hat{P}_{M_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, y de que es idempotente, es decir, $\hat{P}^2_{M_1} = \hat{P}_{M_1}$. Los proyectores son ejemplos de aplicaciones lineales en $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ idempotentes. Pero es más: son los únicos ejemplos, de acuerdo con la siguiente proposición.

Proposición 1.5.2. Dado $\hat{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, lineal, idempotente, existe un subespacio vectorial $M_1 \subseteq \mathcal{V}$, tal que $\hat{P} = \hat{P}_{M_1}$ en la dirección de M_2, con $\mathcal{V} = M_1 \overline{\bigoplus} M_2$. M_1 y M_2 son únicos.

Con estas definiciones, pueden probarse algunas consecuencias importantes, tales como:

- $\mathcal{H} = M \bigoplus M^\perp$ para todo subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$, M.
- Si denotamos por $\hat{P}_M$ al proyector sobre M, tenemos que:

$$\hat{P}_M + \hat{P}_{M^\perp} = \hat{1}_{\mathcal{H}},$$

$$\hat{P}_M \hat{P}_{M^\perp} = \hat{0}_{\mathcal{H}} = \hat{P}_{M^\perp} \hat{P}_M.$$

Para pasar del concepto de 'proyección' al de 'proyección ortogonal' es preciso que exista un instrumento que nos diga si dos vectores son ortogonales. Este instrumento es un producto interior definido recientemente. Por lo tanto, pasamos a definir proyector ortogonal.

Definición 1.5.12. Dado $\hat{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, lineal e idempotente, decimos que $\hat{P}$ es un proyector ortogonal si además se cumple que sea autoadjunto, es decir:

$$\forall v, w \in \mathcal{H} \quad \langle \hat{P}v; w\rangle = \langle v; \hat{P}w\rangle$$

El término operador de proyección ortogonal significa operador de proyección autoadjunto.
En física, el término operador de proyección es sinónimo con proyección ortogonal

1.5.2 Operadores acotados en el espacio de Hilbert

Definición 1.5.13. Un operador lineal $\hat{A} \in \mathcal{L}(M_1, M_2)$ se dice acotado si existe algún $k \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in M_1$ se tiene que $\parallel \hat{A}(x) \parallel \leq k \parallel x \parallel$.

Al conjunto de todos los operadores lineales acotados de M_1 a M_2 se lo denomina $\mathbb{B}(M_1, M_2)$. Una forma fácil de reconocer si un operador lineal es acotado o no es chequear si su imagen aplicado a una bola lo es; el operador será acotado si y sólo si esta imagen es acotada.

Definimos ahora la norma de un operador lineal acotado.

Definición 1.5.14. La norma de $\hat{A} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ se define como:

$$\parallel \hat{A} \parallel \equiv \min\{k \in \mathbb{R} \ / \parallel \hat{A}(x) \parallel \leq k \parallel x \parallel \forall x \in \mathcal{H}\}.$$

Como se dijo antes, en los espacios de Hilbert habrá dos tipos de operadores lineales que serán de interés para el posterior estudio de la mecánica cuántica: los pertenecientes a $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ y a $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Comencemos a analizar el primero de estos tipos de operadores lineales, los pertenecientes a $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$. A los miembros continuos de este conjuntos se los conoce como *funcionales lineales continuos* de $\mathcal{H}$. Al conjunto de los funcionales lineales de una subespacio M se lo representará con $\tilde{M}$.

Los miembros de $\tilde{M}$ pueden ser caracterizados a partir del teorema de representación de Riesz[105]:

Proposición 1.5.3. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $f \in \tilde{\mathcal{H}}$, entonces existe un único vector $z \in \mathcal{H}$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$ se tiene que $f(x) = \langle x, z\rangle$. La norma de operador f será igual a la norma del vector z, esto es $\parallel f \parallel = \parallel z \parallel$.

Este teorema nos permite caracterizar a cada elemento $\tilde{z} \in \tilde{\mathcal{H}}$ a partir de su vector asociado z perteneciente a $\mathcal{H}$, de tal forma que $\tilde{z}(x) = \langle z, x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Es fácil ver que agregando la adición, multiplicación escalar y copiando el producto interno de $\mathcal{H}$, el conjunto de funcionales lineales $\tilde{\mathcal{H}}$ se organiza de esa manera en un nuevo espacio de Hilbert. A este espacio de Hilbert asociado a $\mathcal{H}$ se lo conoce como espacio dual de $\mathcal{H}$.
Como dijimos antes, el otro conjunto de operadores lineales de interés en la teoría cuántica será el de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, o más precisamente $\mathbb{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ (al cual se denominará $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ por brevedad). Para todo operador $\hat{A} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, existe un único operador $\hat{A}^\dagger \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, tal que para todo $x, y \in \mathcal{H}$: $\langle \hat{A}^\dagger x, y\rangle = \langle x, \hat{A}y\rangle$. Dentro del conjunto de operadores $\mathbb{B}(\mathcal{H})$,

los de mayor interés para la física son los denominados hermíticos o autoadjuntos. Los proyectores, que hemos definido anteriormente, pertenecen a $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. Es decir, un proyector es un operador lineal acotado idempotente. Al conjunto de los proyectores de $\mathcal{H}$, se lo denomina $\mathbb{P}(\mathcal{H})$.

Definición 1.5.15. Se dice que $\hat{A} \in \mathcal{H}$ es un operador hermítico cuando $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$.

Se puede probar que los operadores autoadjuntos tienen autovalores reales. Es por esta razón que en el marco de la MC, son utilizados para representar a los distintos observables de un sistema.

Proposición 1.5.4. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ es isomorfo a $\mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Para la demostración de este teorema se redirige a [33]. La idea es mostrar que la imagen de cada proyector es un subespacio cerrado, con lo que el isomorfismo buscado es el que asocia a cada proyector su imagen.

1.5.3 Medidas espectrales

Definición 1.5.16. Denotaremos por $\mathcal{B}$ la familia mínima de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contenga todos los intervalos abiertos (a, b) y que sea:

- Cerrada bajo uniones numerables, esto es, $\{\mathcal{B}_j\}_1^\infty \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{B}_j \in \mathcal{B}$.
- Cerrada bajo complementos, es decir, $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus B \in \mathcal{B}$.

Puede probarse que tal familia mínima existe, porque la intersección de cualquier colección de familias que satisfagan las condiciones impuestas es todavía una familia que las satisface (y es claro que la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ cumple esos requisitos.) Es un cambio de enfoque que nos permite desarrollar la probabilidad que precisamos. Los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman conjuntos de Borel o borelianos de $\mathbb{R}$.

Definición 1.5.17. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de borelianos de la recta real. Dado un operador autoadjunto $\hat{A}$, una *medida de proyección* M_A es una función :

$$M_A : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}) \tag{1.1}$$

, tal que

1. $M_A(\emptyset) = \mathbf{0}$
2. $M_A(\mathbb{R}) = \mathbf{1}$
3. $M_A(\cup_j(B_j)) = \sum_j M_A(B_j)$, para toda familia disjunta de a pares B_j
4. $M_A(B^c) = \mathbf{1} - M_A(B) = (M_A(B))^\perp$.

En mecánica cuántica, los estados pueden ser considerados como funciones que asignan probabilidades a los elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Un estado de un sistema cuántico es representado por una función:

$$\mu : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow [0, 1] \tag{1.2}$$

satisfaciendo:

1. $\mu(\mathbf{0}) = 0$.
2. $\mu(P^{\perp}) = 1 - \mu(P)$
3. Para toda familia numerable ortogonal de a pares $\{P_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\mu(\bigvee_j P_j) = \sum_j \mu(P_j)$.

Un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert infinito-dimensional puede carecer de valores propios, incluso si es autoadjunto. Por tanto, en general no cabe esperar que exista una base ortonormal de $\mathcal{H}$ formada sólo por vectores propios. En espacios de dimensión infinita necesitamos ampliar el concepto de espectro de un operador lineal, sin restringirnos solamente a los valores propios.

Definición 1.5.18. El conjunto resolvente de un operador lineal acotado $\hat{A}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se denota $\delta(\hat{A})$ y se define como el conjunto de los números complejos λ, tales que el operador $\hat{A} - \lambda\hat{I}$ es biyectivo de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$. El espectro de $\hat{A}$, denotado $\sigma(\hat{A})$, es el complemento en $\mathbb{C}$ del conjunto resolvente, esto es: $\sigma(\hat{A}) = \mathbb{C} \setminus \delta(\hat{A})$

Esta definición es una variante de la que comúnmente se utiliza en el caso de espacios de Hilbert de dimensión finita, en donde se identifica a los valores del espectro de $\hat{A}$ con los λ tales que para algún $x \in \mathcal{H}$

$$\hat{A}x = \lambda x$$

Si se cumple esta relación para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ y algún $x \in \mathcal{H}$, entonces $\hat{A} - \lambda\hat{I}$ no es inyectiva.

Definición 1.5.19. Sea $\hat{A}$ un operador lineal acotado en el espacio de Hilbert.

- El espectro puntual de $\hat{A}$, $\sigma_p(\hat{A})$, consiste en todos los $\lambda \in \sigma(\hat{A})$, tales que $\hat{A} - \lambda\hat{I}$ no es inyectivo.
- El espectro continuo de $\hat{A}$, $\sigma_c(\hat{A})$, consiste en todos aquellos $\lambda \in \sigma(\hat{A})$, tales que $\hat{A} - \lambda\hat{I}$ es inyectivo, pero no sobreyectivo.

Teorema 1.5.1. (*Teorema Espectral*)[33] Dado un operador hermítico $\hat{A} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, existe una única medida espectral M tal que

$$\hat{A} = \int_{\sigma(\hat{A})} \lambda dM_\lambda$$

Donde M_λ es el proyector $M\left((-\infty; \lambda]\right)$.

El teorema espectral permite asociar un proyector ortogonal a cada proposición empírica asociada a un operador hermítico dado.

1.6 Postulados de la Mecánica Cuántica

Pasamos ahora a presentar los postulados de la mecánica cuántica estándar (no relativista). Vamos a usar la notación de Dirac:

- A los vectores de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se los escribirá usando "kets": $|x\rangle$, $|y\rangle$, $|z\rangle$, etc; a los elementos de su espacio dual, se los describirá usando "bras": $\hat{\mathcal{H}}$ como $\langle x|$, $\langle y|$, $\langle z|$, etc; el producto escalar entre dos vectores $|x\rangle$ y $|y\rangle$, será expresado como $\langle x|\, y\rangle$.

- Dejamos las letras mayúsculas A, B, C, ..., para denotar observables y las letras mayúsculas con "sombrero", es decir, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, etc. para denotar los operadores hermíticos asociados. Dada una base $\{|x_i\rangle\}$ de $\mathcal{H}$, los elementos matriciales A_{ij} en esta base de $\hat{A} \in \mathcal{H}$ vendrán dados por $\langle x_i| \hat{A} |x_j\rangle$.

- Con $|\psi\rangle \langle\psi|$ representaremos el proyector $\hat{P}_\psi \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$, que proyecta al subespacio de dimensión uno que contiene al vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Postulado 1. Todo sistema físico tiene asociado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Los elementos de este espacio son llamados *kets*.

Postulado 2. Si $\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert asociado al sistema, entonces existe un operador $\hat{\rho} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ que representa el estado del sistema cumpliendo las siguientes condiciones:

(i) $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ *(hermítico)*

(ii) $\forall\, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle\psi| \hat{\rho} |\psi\rangle \geq 0$ *(no negativo)*

(iii) $Tr(\hat{\rho}) = 1$ *(traza unitaria)*

$Tr(\hat{\rho})$ denota la traza de $\hat{\rho}$, esto es, $Tr(\hat{\rho}) = \sum_i^N \langle\psi_i| \hat{\rho} |\psi_i\rangle$ (donde $\{|\psi_i\rangle\}_{i\in[1,N]}$ es una base de $\mathcal{H}$).
Al operador $\hat{\rho}$ que representa el estado del sistema en un tiempo dado, se lo llama *operador densidad*.

Dada una base $\{|\psi_n\rangle\}$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, como $\hat{\rho}$ es un operador hermítico, entonces le corresponderá una descomposición espectral

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n|$$

con $\rho_n \in \mathbb{R}$. Se prueba fácilmente que $0 \leq \rho_n \leq 1$ y que $\sum_n \rho_n = 1$.

Observación: Dados un conjunto de operadores densidad $\{\hat{\rho}^{(i)}\} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ y un conjunto de coeficientes $\{a_i\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que $\sum_i a_i = 1$, entonces el operador $\hat{\rho}' = \sum_i a_i \hat{\rho}^{(i)}$ es un operador densidad. El operador $\hat{\rho}'$ es una *combinación convexa* de los operadores $\{\hat{\rho}^{(i)}\}$. Es inmediato ver que $\hat{\rho}'$ cumple las propiedades (i) y (ii) del postulado 2. Veamos que cumple también la propiedad (iii):

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}') &= Tr\left(\textstyle\sum_i a_i \hat{\rho}^{(i)}\right) \\ &= \textstyle\sum_i a_i Tr(\hat{\rho}^{(i)}) \\ &= \textstyle\sum_i a_i = 1 \end{aligned}$$

Dentro de los operadores densidad se encuentran los que representan *estados puros* del sistema. Estos se distinguen por ser los que estados de información máxima del sistema, y por ser los más simples a partir de los cuales se construye el resto.

Definición 1.6.1. Un *estado puro* es un estado representado por un operador densidad $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|$, con $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Es decir, el operador densidad de un estado puro vendrá dado por un proyector de un subespacio de dimensión 1 asociado a un vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. A un estado no puro se lo conoce como *estado mezcla*.

Teorema 1.6.1. [16] Un estado es puro si y sólo si no puede ser escrito como una combinación convexa de dos o más estados.

Este teorema implica que los estados mezcla son, necesariamente, combinaciones convexas de al menos dos estados. Es por ello que los estados puros son más fundamentales que los mezcla, ya que estos últimos pueden obtenerse como combinaciones convexas de los primeros. Esto sugiere que los estados mezcla son una suerte de combinación estadística de estados puros aunque, como en general los estados mezcla no pueden ser escritos de una única forma como suma de estados puros, esto no debe ser tomado literalmente [21].

Postulado 3. A cada observable A le corresponde un operador hermítico $\hat{A} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ tal que su espectro $\sigma(\hat{A})$ está formado por los posibles resultados de una medición de A.
En este trabajo, usaremos la notación $\hat{A}$ para representar al operador asociado a un observable A dado.
Se puede probar que los autovalores de los operadores hermíticos son reales. Esto hace que sean adecuados para describir magnitudes físicas.

Postulado 4. Si se realiza una medición del observable A sobre un sistema en un estado dado por $\hat{\rho}$, entonces la probabilidad μ de que el valor de A se encuentre en el intervalo Λ vendrá dada por

$$\mu(\hat{\rho}, a_i) = Tr\left(\hat{P}_\Lambda \hat{\rho}\right)$$

, donde $\hat{P}_\Lambda$ es el proyector que la medida espectral de A asigna al intervalo Λ. Este postulado es conocido como *Regla de Born.*

Definición 1.6.2. El *valor medio* de un observable A con respecto a un estado $\hat{\rho}$ viene dado por

$$\langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}} \equiv Tr\left(\hat{A}\hat{\rho}\right)$$

Si $\hat{A}$ tiene espectro discreto y $\{|\psi_i\rangle\}$ es una base formada por autovectores, tenemos:

$$\begin{aligned}
Tr\left(\hat{A}\hat{\rho}\right) &= \textstyle\sum_i \langle\psi_i|\,\hat{A}\hat{\rho}\,|\psi_i\rangle = \sum_i \langle\psi_i|\sum_j a_j \hat{P}_j\hat{\rho}\,|\psi_i\rangle \\
&= \textstyle\sum_i \sum_j a_j \langle\psi_i|\,\hat{P}_j\hat{\rho}\,|\psi_i\rangle = \sum_i\sum_j a_j\delta_{ij}\langle\psi_i|\,\hat{\rho}\,|\psi_i\rangle \\
&= \textstyle\sum_i a_i \langle\psi_i|\,\hat{\rho}\,|\psi_i\rangle = \sum_i a_i \mu(\hat{\rho}, a_i)
\end{aligned}$$

El cálculo fue realizada para el caso de $\mathcal{H}$ discreto, pero el caso continuo es completamente análogo.

Definición 1.6.3. La *varianza* del un observable A respecto de un estado $\hat{\rho}$ viene dada por

$$(\Delta A)^2_{\hat{\rho}} \equiv \langle\left(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\right)^2\rangle_{\hat{\rho}}$$

. La varianza da una medida de qué tan dispersa es la distribución de probabilidades correspondiente. Una varianza chica estará asociada entonces a una distribución concentrada, y una varianza grande a una distribución dispersa.

Una identidad útil que se suele utilizar a la hora de calcular la varianza de un observable dado es $\langle\left(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_{\hat{\rho}}\right)^2\rangle_{\hat{\rho}} = \langle\hat{A}^2\rangle_{\hat{\rho}} - \langle\hat{A}\rangle^2_{\hat{\rho}}$.

Postulado 5. Si se realiza una medición del observable A sobre un sistema en un estado dado por $\hat{\rho}$ y se obtiene como resultado un valor a, entonces inmediatamente luego de la medición el estado del sistema vendrá dado por:

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_{s_a} \ \hat{\rho} \ \hat{P}_{s_a}}{Tr\left(\hat{P}_{s_a}\hat{\rho}\right)}.$$

Este postulado nos dice que luego de realizar una medición de A que da como resultado un valor a, el nuevo estado del sistema vendrá dado por el estado $\hat{\rho}'$ correspondiente al subespacio de autovectores de $\hat{A}$ con autovalor a.

Corolario 1.6.1. Dado un sistema en el estado $\hat{\rho}$ al cual se le realiza una medición de A que dio como resultado un valor a, entonces una nueva mediciones de A dará como resultado a con probabilidad 1.

Definición 1.6.4. Dos observables $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ se dicen *compatibles* si y sólo si

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$$

Al operador $[\hat{A}, \hat{B}]$ se lo conoce como el *conmutador* de A y B.

Teorema 1.6.2. [32] Dados dos observables compatibles de espectro discreto $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, existe una base $\{|\psi_i\rangle\}$ de $\mathcal{H}$ de autovectores simultáneos de $\hat{A}$ y $\hat{B}$.

Este teorema implica que dados dos observables A y B compatibles, existen estados puros $\hat{\rho}$ donde los valores de ambos se encuentran definidos simultáneamente (esto es, tienen probabilidad 1 de dar un valor determinado en una medición). Esto quiere decir que si se mide el observable A y se obtiene un valor a, y luego se mide el observable B obteniéndose b, luego de ambas mediciones el sistema estará en un estado $\hat{\rho}$ en donde $\mu(\hat{\rho}, A = a) = \mu(\hat{\rho}, B = b) = 1$. La medición de B no destruye la información previa que se tendrá sobre el valor de A.

Por el contrario, cuando dos observables no conmutan ($[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$) esto deja de ser cierto y no habrá ya estados en donde se encuentren A y B definidos simultáneamente. Esto hace que si se mide el observable A y se obtiene un valor a, y luego se mide el observable B y se obtiene un valor b, el estado que resulta de realizar ambas mediciones $\hat{\rho}$ será uno en donde $\mu(\hat{\rho}, B = b) = 1$ y $\mu(\hat{\rho}, A = a) < 1$. Es decir, el realizar la medición de B hace que el observable A deje de estar definido. Esto tendrá para nosotros importantes consecuencias sobre el retículo de proyectores y la lógica que podemos definir para los mismos.

Teorema 1.6.3. [65] Sean $\hat{A}$, $\hat{B} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ operadores hermíticos, entonces para todo estado puro $\hat{\rho}$ se tendrá que

$$(\Delta A)^2_{\hat{\rho}} \ (\Delta B)^2_{\hat{\rho}} \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle_{\hat{\rho}}|^2$$

Este teorema, que es una versión generalizada del *principio de incertidumbre*, pone una cota a la precisión con la cual pueden estar definidos dos observables incompatibles. Para ver un interesante estudio sobre el principio de incertidumbre, se recomienda [24, 25].

El último de los axiomas nos dice cómo evoluciona el estado de un sistema bajo un hamiltoniano $\hat{H}$.

Postulado 6. La evolución temporal del estado $\hat{\rho}(t)$ viene dada por la *Ecuación de von Neumann*:

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}].$$

Con lo cual, los estados estacionarios serán los estados que conmuten con el hamiltoniano. Es decir, $\hat{\rho}$ sera un estado estacionario si es un estado de energía definida.
Si el hamiltoniano es independiente del tiempo, esta ecuación diferencial puede resolverse obteniéndose:

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\ \hat{\rho}\ e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}}.$$

1.7 Teoremas de Gleason y Kochen-Specker

En 1957 Andrew Gleason demostró un teorema [61] cuyas consecuencias fueron relevantes tanto para la caracterización de los estados cuánticos como para la interpretación del formalismo. El objetivo de Gleason era encontrar una base axiomática simplificada para la Mecánica Cuántica mostrando que las probabilidades de obtener distintos resultados al medir un observable físico siempre se pueden calcular a partir de la matriz densidad $\hat{\rho}$. En el trabajo de Gleason no había ninguna referencia directa al problema de las variables ocultas [29], pero su trabajo también fue relevante para su estudio.
El teorema de Kochen-Specker (KS), también conocido como teorema de Bell-Kochen-Specker (BKS), está vinculado a la imposibilidad de un tipo o familia de Teorías de Variables Ocultas (VO) en MC. Juega un rol central en el estudio del formalismo cuántico, y tiene repercusiones en las distintas interpretaciones de dicho formalismo. Este teorema será relevante cuando discutamos la funcionalidad de la verdad en el contexto cuántico.
En esta sección, damos un breve repaso de los teoremas de Gleason y KS.

1.7.1 Teorema y lema de Gleason

Teorema 1.7.1. *Gleason.* Para espacios de Hilbert separables $\mathcal{H}$ (reales o complejos) de dimensión mayor o igual que tres, todas las medidas de probabilidad μ sobre el conjunto de los proyectores $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, es decir, todas las aplicaciones de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ en el intervalo $[0, 1]$, que verifican $\mu(\hat{0}) = 0$, $\mu(\hat{\mathbb{I}}) = 1$, y que para toda familia numerable $\{\hat{P}_i\}$ de proyectores ortogonales de a pares $\mu(\sum_i \hat{P}_i) = \sum_i \mu(\hat{P}_i)$, son de la forma

$$\mu(\hat{P}_i) = Tr(\hat{\rho}\hat{P}_i).$$

donde $\hat{\rho}$ es un operador densidad.
Este teorema permite caracterizar a los estados cuánticos como medidas de probabilidad sobre un álgebra no Booleana. Es decir, un estado cuántico puede ser considerado una función μ con las siguientes características:

$$\mu : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow [0, 1] \tag{1.3}$$

tal que:

1. $\mu(\hat{\mathbf{0}}) = 0$.
2. $\mu(\hat{P}^{\perp}) = 1 - \mu(\hat{P})$
3. Para cualquier familia numerable de proyectores ortogonales de a pares $\{\hat{P}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, se cumple $\mu(\bigvee_j \hat{P}_j) = \sum_j \mu(\hat{P}_j)$.

El teorema de Gleason, nos dice entonces que, si $dim(\mathcal{H}) \geq 3$, el conjunto $\mathcal{C}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ de todas las medidas de la forma (1.3), se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ de todos los operadores positivos, hermíticos y de traza uno que actúan en $\mathcal{H}$. Dado un proyector ortogonal $\hat{P}$ (que representa una proposición experimental), tenemos entonces que para cada $\rho \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ y su medida de probabilidad asociada μ_ρ, la conexión viene dada por la regla de Born:

$$\mu_\rho(\hat{P}) = \mathrm{tr}(\rho\hat{P}) \tag{1.4}$$

Es importante comparar a las ecuaciones (1.3), con aquellas que definen a los estados de una teoría de probabilidades clásica. Dado un conjunto Ω, consideremos una σ-álgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ de subconjuntos. Luego, una *medida de probabilidad Kolmogoroviana* será una función:

$$\mu : \Sigma \to [0, 1] \tag{1.5}$$

que cumple que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$, donde $(\ldots)^c$ denota al complemento conjuntístico,
3. para cualquier familia numerable de conjuntos disjuntos de a pares $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$.

Las ecuaciones (1.5) son conocidas como los axiomas de Kolmogorov [85]. La diferencia principal entre las probabilidades cuánticas y las clásicas es que a pesar de la similitud de forma entre las ecuaciones 1.3 y [85], la σ-álgebra Σ que aparece en (1.5) es un álgebra de Boole (ver sección siguiente), mientras que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ no lo es. Este es el motivo por el cual las probabilidades cuánticas son llamadas medidas de probabilidad no-Kolmogorovianas (o no Booleanas)

Los retículos $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de subespacios cerrados (o, equivalentemente, de proyectores ortogonales) de un espacio de Hilbert separable son casos particulares de una estructura más general, a saber, la de los *retículos ortomodulares* [81]. Un retículo $\mathcal{L}$ se dice *ortomodular* (o *débilmente modular*), si es ortocomplementado y, siempre que $x \leq y$, entonces $y = x \vee (y \wedge x^{\perp})$. En el capítulo siguiente volveremos a este concepto. Todo esto permite considerar a los estados de un sistema físico dado como medidas sobre un retículo ortomodular completo $\mathcal{L}$ de la siguiente forma:

$$\mu : \mathcal{L} \to [0, 1] \tag{1.6}$$

que cumple:

1. $\mu(\mathbf{0}) = 0$

2. $\mu(a^{\perp}) = \mathbf{1} - \mu(a)$, donde $(\ldots)^{\perp}$ denota el ortocomplemento,

3. para cualquier familia numerable de elementos ortogonales de a pares $\{a_i\}_{i\in I}$, se tiene que $\mu(\bigvee_i a_i) = \sum_i \mu(a_i)$.

Cuando $\mathcal{L}$ es Booleano, obtenemos un modelo de probabilidad clásico. El retículo cuántico $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es también un caso particular de una vasta familia de modelos alternativos de sistemas físicos. Las ecuaciones (1.6) permiten concebir la noción de *modelos de probabilidad generalizados*.
Como consecuencia de la ley ortomodular, se sigue que para todo $p, q \in \mathcal{L}$ cualquier estado μ, tenemos:

$$\begin{aligned} p \wedge q \leq p \Rightarrow \mu(p \wedge q) \leq \mu(p) \\ p \leq p \vee q \Rightarrow \mu(p) \leq \mu(p \vee q) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Estas desigualdades nos serán útiles en lo que resta del trabajo para construir las Nmatrices correspondientes a sistemas cuánticos y modelos de probabilidad generalizados.
Es importante hacer una observación aquí sobre el rol de la condición 3 en las ecuaciones (1.2), (1.5) y (1.6). La demanda de que la medida de probabilidad μ cumpla que $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$, se conoce como *aditividad*. Sin embargo, la condición 3 permite que la aditividad se etienda a colecciones *numerables*, es decir, a colecciones de elementos potencialmente infinitas. Esta condición se llama *σ-aditividad*, y es clave imponerla. La condición de σ-aditividad está estrechamente vinculada a la continuidad de las medidas de probabilidad definidas. En efecto, si se relaja esa condición y se impone la aditividad simple, las medidas de probabilidad resultantes podrían no ser continuas. De la misma forma, el teorema de Gleason no sería válido para sistemas cuánticos cuyos espacios de Hilbert sean de dimensión infinita. Por el contrario, para modelos de dimensión finita (tales como el espín), la aditividad y la σ-aditividad son equivalentes.

Otro resultado importante de Gleason, es el siguiente Lema:

Lema de Gleason. Sea R_3 cualquier subespacio real de dimensión tres de un espacio de Hilbert, esto es, el espacio formado por los vectores

$$|\psi\rangle = \sum_{i\in\{1,2,3\}} c_i \, |\psi_i\rangle \,,$$

donde $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{3}$ es una base cualquiera de vectores ortogonales de R_3, y c_i son coeficientes reales. Cualquier medida de probabilidad $\mu(|\psi\rangle)$ en R_3 debe ser una función continua en los coeficientes c_i.

Es importante analizar las consecuencias que trae este resultado para el propósito de nuestro trabajo. Consideremos un espacio de Hilbert real de dimensión tres, y supongamos que tal espacio representa a un cierto sistema físico. Los proyectores sobre subespacios unidimensionales del espacio de Hilbert representan proposiciones físicas. Por ejemplo, "el observable A tiene el valor a". Estas proposiciones admiten dos posibles resultados: 1, si la proposición es verdadera, o 0, si es falsa. Supongamos, por el momento, que existiese una teoría determinista de variables ocultas en las cuales si se supiera el valor

de todas estas variables (al margen de realizar o no un experimento), quedarían asignados todos los valores de verdad a todas las proposiciones del sistema (incluso antes de realizar la medida). En toda teoría de variables ocultas, como también en la MC, de cada tres proposiciones mutuamente compatibles, como por ejemplo: P_1: "*A vale a*", P_2: "*A vale b*" y P_3: "*A vale c*" (suponiendo a, b, c distintos y los únicos valores posibles), sólo una puede ser cierta y las otras dos deben ser falsas. Los valores asociados a estas variables ocultas deberían poder asignar a todas las proposiciones del sistema un valor 1 o 0 satisfaciendo la única restricción de que en cada descomposición de la identidad, en términos de proyectores mutuamente ortogonales, a uno y sólo a uno de ellos se le asigne el valor 1 y a los otros dos el valor 0. Pero este requisito justamente verifica las condiciones que debe cumplir una "medida de probabilidad". Por lo tanto, entra bajo el alcance de *Gleason*.
Veamos ahora por qué esa medida de probabilidad es precisamente del tipo de las prohibidas por el lema de Gleason. Identifiquemos el espacio de Hilbert de dimensión tres con el espacio euclídeo ordinario, y los proyectores con las direcciones representadas por rectas que pasan por el origen de coordenadas. Consideremos una esfera de radio unidad centrada en el origen de manera que cada dirección intersecta con ella en dos puntos antípodas: si la medida de probabilidad antes definida asigna el valor 1 a una dirección, coloreamos de blanco los dos puntos antípodas correspondientes, y si asigna el 0, los coloreamos de negro. La restricción aludida entre los valores de los proyectores se traduce en que por cada par de puntos blancos antípodas (por ejemplo, los puntos polo norte y polo sur de la esfera) todos los puntos sobre el correspondiente ecuador han de ser negros. Es sencillo ver que, en el supuesto de que se pudiese colorear toda la esfera de esa manera, esta forma de colorear la esfera seria discontinua en el siguiente sentido: habría puntos blancos tan próximos como se quisiese a puntos negros. Según el lema de *Gleason*, esa medida de probabilidad no puede implementarse, y por lo tanto, la asignación de variables ocultas para colorear la esfera tampoco.
Esto se relaciona con el tema central de este trabajo y esta estrictamente vinculado con la forma funcional de asignar valores de verdad. En nuestra propuesta semántica para el formalismo cuántico, haremos uso de una nueva forma de asignar *valores de verdad* que es no determinista, y rompe con la restricción impuesta por los homomorfismos de álgebras (que veremos en el siguiente capítulo) sobre las valuaciones.

1.7.2 Teorema de Bell-Kochen-Specker

Pasamos ahora a discutir el teorema de Kochen-Specker (KS). Seguiremos el tratamiento dado en [29]. Consideremos una teoría de variables ocultas (VO) en la que cualquier sistema individual tiene un conjunto de variables que junto con otras variables asociadas al aparato de medición determinan (de alguna forma no especificada) el resultado de cualquier experimento sobre ese sistema individual. Llamemos "*valores de VO*" a los valores que las VO determinan para cada experimento posible. Supongamos que en nuestra teoría de variables ocultas, los *valores de VO* satisfacen las siguientes restricciones:

- **(KS1)** Definitud a priori. Un sistema individual puede tener simultáneamente valores de VO precisos para dos observables no compatibles, A y B, aunque estos no se puedan medir conjuntamente, es decir, no se pueda preparar un estado con valores bien definidos para ambos.

- **(KS2)** No contextualidad. El valor que las VO asocian a la medida de un observable A en un sistema individual, es independiente de que otros observables compatibles se midan conjuntamente con A.

  $$v(A) = v(A; B) = v(A; C).$$

  Hemos usado la notación $v(A; B)$ para denotar al valor que toma A en una medición conjunta con B. Notar que B y C pueden no ser compatibles, con lo cual, la condición $v(A) = v(A; B) = v(A; C)$, constituye una restricción física muy fuerte.

Restricciones *sugeridas* por la MC sobre los valores de VO.

- **(KS3)** Si la medida de un observable A sobre un conjunto de sistemas idénticamente preparados, da resultados en un conjunto discreto de valores (espectro del operador autoadjunto $\hat{A}$), el valor asociado a ese valor en VO, que denotaremos $v(A)$, debe ser uno de tales valores para cualquier sistema individual del conjunto.

- **(KS4)** Sea $\{A, B, C, ...\}$ un conjunto de observables mutuamente compatibles, y supongamos que los operadores que los representan satisfacen cierta relación funcional

  $$f_{(\hat{A},\hat{B},\hat{C},..)} = 0.$$

  Entonces, el resultado de cualquier medida conjunta de estos observables será un conjunto de valores propios $\{a, b, c, ...\}$, que satisfacen la relación funcional

  $$f_{(a,b,c,...)} = 0.$$

  La condición que se impone sobre las variables ocultas es que cualquier conjunto de VO para esos observables, debe satisfacer la misma relación

  $$f(v(A), v(B), v(C), ...)) = 0$$

Estamos en condiciones de enunciar el teorema de KS:

Teorema 1.7.2. (KS) Para sistemas físicos descriptos en MC por espacios de Hilbert de dimensión mayor o igual que tres, no existe ninguna teoría de variables ocultas (VO) que satisfaga a la vez (KS1), (KS2), (KS3) y (KS4).

Las hipótesis (KS3) y (KS4), que hemos llamado "restricciones sugeridas por MC", aunque razonables, no son inevitables. Existen teorías de variables ocultas como la Mecánica Bohmiana [106], totalmente compatibles con la MC en donde estos supuestos no se cumplen. La mecánica de David Bohm es una teoría de variables ocultas compatible con la MC, es decir, sus conjuntos de predicciones empíricas son coincidentes, pero no cumple (KS1), (KS3) ni (KS4).
Existen otras maneras de presentar el este resultado. El teorema de KS es equivalente a la siguiente proposición.

Teorema 1.7.3. No existe una función $v : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \{0, 1\}$ que tenga la propiedad de que $\sum_i v(\hat{P}_i) = 1$, para toda familia $\{\hat{P}_i\}$ de proyectores ortogonales que satisfaga $\sum_i \hat{P}_i = \hat{\mathbf{1}}$.
La condición 1.7.3 será relevante en la discusión que daremos en el capítulo 4, acerca de la posibilidad de construir valuaciones clásicas que cumplan el principio de funcionalidad de la verdad en el contexto cuántico.

Capítulo 2

Estructuras generales: álgebras, retículos y lógicas

En este capítulo se sentarán las bases lógicas y algebraicas que serán necesarias para el desarrollo de este trabajo, esto es, para relacionar las semánticas no deterministas con el formalismo cuántico. El lector que esté muy acostumbrado a tratar con estos conceptos puede saltear este capítulo y pasar al próximo en donde se definen las matrices no deterministas.

2.1 Lenguajes de primer orden

Vimos que el teorema KS se relaciona directamente con las valuaciones a dos valores, y que entre sus requisitos esta implícito un comportamiento funcional para la asignación de valores de verdad. En esta sección definiremos lo que se entiende clásicamente por los conceptos de semántica, valuaciones veritativo funcionales y su relación con los homomorfismos de álgebras, en especial los homomorfismos entre un álgebra dada y el álgebra cuyo universo es el conjunto $\{0, 1\}$. En el capítulo próximo, veremos como las semánticas no deterministas vienen a cambiar esta situación otorgando mayor libertad y, por lo tanto, abriendo nuevas perspectivas en relación al teorema KS.
En este capítulo seguiremos el tratamiento dado en las referencias [103] y [7].

2.1.1 Tipo o Signatura de un álgebra

Definición 2.1.1. Llamaremos tipo de álgebras a un conjunto $\mathcal{F}$ de símbolos de función, donde cada símbolo f de $\mathcal{F}$ tiene asociado un número natural n, la aridad de f.

Definición 2.1.2. Dado un tipo $\mathcal{F}$ de álgebras, un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ es un par $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$, donde A es un conjunto y $F = (f_i^A)_{i\in I}$ una familia de operaciones sobre A, de manera que a cada símbolo de $\mathcal{F}$ de aridad n le corresponde una operación n-aria f_i^A. El conjunto A es el universo del álgebra.

Haremos referencia al álgebra mencionando sólo su universo si las operaciones sobre el mismo estén sobreentendidas. También escribiremos f_i^A en vez de f_i, cuando no haya lugar a confusión.

2.1.2 Homomorfismos

Trataremos ahora aquellas funciones entre álgebras del mismo tipo que conservan sus operaciones, es decir, que "pasan bien" de un álgebra a otra.

Definición 2.1.3. Sean $\mathcal{A}$=$\langle A, F\rangle$ y $\mathcal{B} = \langle B, G\rangle$ álgebras del mismo tipo y sea $h : A \to B$ una función. Diremos que h es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, si para cada $f^A \in F$ de aridad n se tiene que, para toda tupla $(a_1, ..., a_n)$ de elementos de A,

$$h(f^A_{(a_1,...,a_n)}) = f^B_{(h(a_1),...,h(a_n))}$$

siendo f^B la operación en B correspondiente a f^A en A.
Si h es biyectiva, se llamara isomorfismo. En otro caso, puede ser un monomorfismo (h inyectiva) o epimorfismo (h sobreyectiva).
Cada lenguaje proposicional con sus fórmulas bien formadas queda definido por el conjunto de sus conectivos, si siempre suponemos una cantidad numerable de variables proposicionales y los mismos signos de puntuación. Por supuesto, bajo el presupuesto de que tengamos reglas recursivas para su formación. A cada lenguaje corresponde entonces un tipo, de la misma manera que sucede con las álgebras.
Como ejemplo, consideremos el cálculo proposicional llamado implicativo positivo. En este cálculo, el único conectivo binario es $\to$. Por lo tanto, toda fórmula que no sea una variable es de la forma $a \to b$. Este es un lenguaje de tipo $\langle 2\rangle$. El cálculo proposicional clásico con sus conectivos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, es de tipo $\langle 1, 2, 2, 2\rangle$. Esto permite vislumbrar un vínculo importante entre el los lenguajes formales y las álgebras.
Podemos "evaluar" las fórmulas de nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ en un álgebra del mismo tipo, así como hicimos al definir homomorfismos entre álgebras, por medio de funciones (valuaciones) de manera que cada conectivo n-ario se transforme en su correspondiente operación n-aria. En el calculo proposicional clásico, este el el papel que cumplen las "tablas de verdad".
Las valuaciones asignan a cada fórmula del lenguaje un elemento de un álgebra, que podemos pensar como su valor de verdad. En el caso clásico, esta álgebra tendrá sólo los elementos 0 y 1, identificados con falso y verdadero respectivamente.

Definición 2.1.4. Sea un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$ cuyo conjunto de conectivos es $(c_i)_{i\in I}$ y sea $\langle A, G\rangle$ un álgebra donde $G = (g_i)_{i\in I}$. Una valuación (determinista) es una función $v : \mathcal{L} \to A$, tal que para cada conectivo n-ario c y fórmulas $B_1, ...B_n$, verifica

$$v_{(c(B_1,...,B_n))} = g_{(v(B_1),...,v(B_n))},$$

siendo g la operación n-aria en A correspondiente a c, e I un conjunto numerable de índices.
Es notable la similitud que mantiene nuestra definición de valuación con la definición de homomorfismos de álgebras. En estos términos, podría interpretarse el teorema de Kochen-Specker diciendo que no es posible un homomorfismo a dos valores del álgebra de proyectores que cumpla las reglas de la mecánica cuántica. En el siguiente capítulo, la definición de matriz estará íntimamente relacionada con este último concepto, y se verá de qué forma las Nmatrices relajan este vínculo entre las valuaciones y los homomorfismos de álgebras. Como dijimos anteriormente, una valuación toma fórmulas bien formadas de nuestro lenguaje y le asigna (a modo de homomorfismo) valores dentro del dominio de un álgebra. Esto es equivalente a decir que interpretamos nuestro lenguaje de primer orden

en un álgebra dada. Para que esta asignación se realice correctamente debe definirse el tipo de un lenguaje dado y, además, éste debe coincidir con el tipo del álgebra en la cual se va a interpretar. Cuando hagamos esto en la sección siguiente, quedará en evidencia la raíz de la similitud existente entre un homomorfismo de álgebras (del mismo tipo) y un homomorfismo entre un álgebra de un tipo y un lenguaje del mismo tipo. En la sección siguiente discutiremos estas relaciones semánticas poniendo un mayor énfasis en los detalles técnicos. El lector que no lo considere necesario puede pasar directamente a la sección 2.3.

2.2 Tipo o signatura de un lenguaje de primer orden

Comencemos con las definición de tipo de un lenguaje:

Definición 2.2.1. Un tipo o signatura es un conjunto τ de símbolos de la siguiente forma:

$$\tau = (\bigcup_{1 \leq n} R_n) \cup (\bigcup_{1 \leq m} F_m) \cup C,$$

donde R_n es un conjunto de símbolos relacionales de aridad n, F_m es un conjunto de símbolos funcionales de aridad m y C es un conjunto de símbolos de constante (elementos destacados o también funcionales de aridad cero).

Los símbolos relacionales y funcionales adquieren significado sólo cuando se consideran en relación con una interpretación o semántica. Por lo tanto, se interpretan como relaciones, funciones y elementos distinguidos, respectivamente, en un universo de interpretación dado. Es necesario definir un lenguaje de un tipo dado para aplicar las definiciones de valuación y homomorfismo, y luego, relacionar la noción de lenguaje con la de álgebra (o estructura en el caso más general).
En este trabajo, nos limitaremos al cálculo proposicional. Sin embargo, incluiremos la definición de lenguajes de primer orden, porque puede ser útil para el desarrollo de futuros trabajos relacionados con las semánticas para la cuántica.

Definición 2.2.2. Los símbolos para construir expresiones de un lenguaje de tipo τ, y al que denotaremos con L_τ, son los siguientes:

i) $v_0, v_1, ..., v_n, ...$	(variables individuales)
ii) (,) , , .	(símbolos auxiliares)
iii) $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$,...	(conectivos proposicionales)
iv) $=$.	(símbolo de igualdad)
v) $\exists$.	(cuantificador universal)
vi) Los símbolos de τ.	

A los símbolos de *i*) a *iv*) se les suele dar una interpretación canónica y son llamados símbolos lógicos. Tienen la misma interpretación en todos los modelos (estándar). Los símbolos de *v*) y *vi*) tienen una interpretación variable y son llamados símbolos no lógicos. Es por esto que τ determine el tipo de lenguaje y hablemos de lenguaje de tipo τ.

> En las aplicaciones potenciales al formalismo cuántico, es natural considerar como variables individuales a los proyectores ortogonales del espacio de Hilbert. En la lógica clásica, es habitual trabajar sólo con dos conectivos, como por ejemplo, $\neg$ y $\vee$, y definir el resto de los conectivos en función de

ellos. Esto se hace en la teoría de la prueba para simplificar el lenguaje de objetos. Pero la posibilidad de hacer esta simplificación depende de las propiedades específicas del lenguaje dado (es decir, los conectivos no siempre son interdefinibles). En este trabajo restringiremos el uso a $\vee$, $\neg$ y $\wedge$, aunque para la última parte del capítulo cuatro, usaremos el conectivo de implicación material ($\rightarrow$) y el conectivo de superposición de Tzouvaras ($|$) . Con respecto a iv): los lenguajes que contienen este símbolo se denominan lenguajes con identidad. En nuestro caso, el símbolo de igualdad no será incluido. Con respecto a v): no usaremos cuantificadores en el caso cuántico.

Definición 2.2.3. Sea τ un tipo. Una expresión de tipo τ, o una τ-expresión, es una sucesión finita de símbolos de L_τ.

Definición 2.2.4. El conjunto de términos de tipo τ, o τ-términos, es el menor conjunto X de τ-expresiones, tal que:
i) $\{v_i : 0 \leq i\} \cup C \subseteq X$, donde $C \subseteq \tau$, es el conjunto de constantes de τ.
ii) Si $f \in F_m \subseteq \tau$, $1 \leq m$ y $t_1, ..., t_m \in X$, entonces $f(t_1, ..., t_m) \in X$.

Definición 2.2.5. Una τ-fórmula atómica es una expresión de la forma:
$(t_1 = t_2)$ o $P(t_1, ..., t_n)$, donde $t_1, ..., t_n$ son τ-términos y $P \in R_n \subseteq \tau$.

Definición 2.2.6. El conjunto de las fórmulas de tipo τ es el menor conjunto X de τ-expresiones, tal que:
i)$\{\alpha : \alpha \text{ es una } \tau - \text{fórmula atómica}\} \subseteq X$.
ii) Si $\alpha, \beta \in X$, entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$ y $(\alpha \rightarrow \beta) \in X$.
iii) Si $\alpha \in X$ y v_i es una variable, entonces $(\exists v_i \alpha) \in X$.

Definición 2.2.7. Una τ-interpretación (or τ-estructura), para un lenguaje L es un par $\mathcal{U} = \langle A, I \rangle$, donde:
i) $A \neq \emptyset$.
ii) $I : \tau \rightarrow A \cup \{f : A^m \rightarrow A, 1 \leq m\} \cup (\bigcup\{P(A^n) : 1 \leq n\})$.
Donde $P(A^n)$ denota el conjunto potencia de A^n, y tal que para cualquier $x \in \tau$:
Si $x \in R_n, I(x) = x^{\mathcal{U}} \subseteq A^n$.
If $x \in F_m, I(x) = x^{\mathcal{U}} : A^m \rightarrow A$.
Si $x \in C, I(x) = x^{\mathcal{U}} \in A$.
I es la función de interpretación de $\mathcal{U}$ sobre el universo A.

Usualmente si $\tau = \{x_1, ..., x_n\}$, denotamos a la estructura $\mathcal{U} = \langle A, I \rangle$ como sigue:

$$\mathcal{U} = \langle A, x_1^{\mathcal{U}}, ..., x_n^{\mathcal{U}} \rangle$$

.

Observación 1: en nuestro caso, donde el lenguaje cuenta con proyectores de un Hilbert y sus respectivos conectivos, la estructura $\mathcal{U}$ contará con un universo A e interpretaciones para los conectivos, que son símbolos de funciones. Esto es, en la estructura no habrá símbolos de relación interpretados. Por esto mismo, la estructura asociada a nuestro lenguaje es un álgebra (no una estructura más general), y podemos relacionarla con álgebras del mismo tipo como lo hicimos al definir homomorfismo y valuaciones para un lenguaje de

nuestro tipo.
Observación 2: haremos un comentario más para aquellos lectores interesados en la teoría de modelos. El ítem *ii*) de la definición anterior es crucial en la distinción entre modelos estándar y no estándar para la lógica de segundo orden (recordemos que en este trabajo sólo tratamos lógica proposicional, con posible extensión a primer orden, y que la definición dada fue para primer orden). Las situación es muy diferente si en lugar de tener $\bigcup\{P(A^n) : 1 \leq n\}$ absolutamente disponible para interpretar los relatores de nuestro lenguaje, tenemos solamente algunos conjuntos disponibles. Estos es, un modelo no estándar (en este sentido) está constituido, además de por un universo al que refieren sus variables individuales, por una familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de universos relacionales al que se referirán las variables predicativas del lenguaje: cada $A_n \subseteq P(A^n)$ y alguno de ellos no contiene a todos los posibles. Es decir, la diferencia entre estándar y no estándar de segundo orden es que en los primeros $A_n = P(A^n)$ para todo n, y en los segundos, $A_m \subseteq P(A_m)$ para algún m. Todo esto lo decimos porque es conocido el resultado siguiente: *La Aritmética de segundo orden es categórica.* Pero la Aritmética de segundo orden es categórica si aceptamos como sistemas adecuados para interpretar la lógica superior únicamente los estándar; $A_n = P(A^n)$ siempre. Cuando nuestra estructura semántica deja de ser estándar, la Aritmética de segundo orden deja de ser categórica, y por lo tanto ya no identificará hasta la isomorfía sus modelos. Se recomienda el libro de María Manzano, *Teoría de Modelos*, capítulo 6, sección 3 para una discusión detallada.

Definición 2.2.8. Sean $\mathcal{U} = \langle A, I\rangle$ y $\mathcal{B} = \langle B, J\rangle$, dos τ-estructuras, h es un homomorfismo de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{B}$ si y sólo si:
i) h es una función de A en B; $h : A \to B$,
ii) Para cada $P_n \in \tau$ y cada $a_1, ..., a_n \in A$,

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle \in P_n^{\mathcal{U}} \text{ sii } \langle h(a_1), ..., h(a_n)\rangle \in P_n^{\mathcal{B}},$$

iii) Para cada $f_n \in \tau$ y cada $a_1, ..., a_n \in A$,

$$h(f_n^{\mathcal{U}}(a_1, ..., a_n)) = f_n^{\mathcal{B}}(h(a_1), ..., h(a_n)),$$

iv) Para cada $c \in \tau, h(c^{\mathcal{U}}) = c^{\mathcal{B}}$.

Puede verse como esta definición para homomorfismos de estructuras generaliza la que dimos antes para homomorfismo de álgebras. Que nos alcance con las definiciones para álgebras es una consecuencia directa de que nuestro lenguaje es de un tipo τ que sólo tiene símbolos de funciones (que son los conectivos de nuestro lenguaje).

2.3 Retículos y Álgebras de Boole

El objetivo de este sección es introducirnos en las álgebras de Boole, que son, históricamente, las primeras álgebras que se vincularon con la lógica. Introduciremos previamente los retículos y también nos referiremos a los distributivos. El caso cuántico se caracteriza

por no admitir una descripción en términos de retículos distributivos. La gran mayoría de las álgebras asociadas a la lógica tienen como reducto un retículo. La estructura de álgebra de Boole está intrínsecamente ligada a aquellas álgebras cuyo universo es de la forma $\mathcal{P}(X)$ con X un cierto conjunto.
Vamos a considerar una clase particular de conjuntos ordenados, los retículos, que pueden ser considerados también como álgebras. Los retículos aparecen como base de las estructuras algebraicas que estudiaremos y que son asociadas naturalmente a la lógica.

Definición 2.3.1. Un conjunto ordenado es un par $(X, \leq)$, donde $\leq$ es una relación binaria (o diádica) sobre el conjunto X, llamada relación de orden, que cumple con reflexividad, antisimetría y transitividad, esto es:

- Para todo $x \in X$, $x \leq x$ (reflexividad).
- Si $x \leq y$, $y \leq x$, entonces $x = y$ (antisimetría)
- $x \leq y$, $y \leq z$, entonces $x \leq z$ (transitividad).

Si $\leq$ cumple además la condición:

- Para todo $x, y \in X$: $x \leq y$ o bien $y \leq x$,

entonces se dice que el orden es total o que el conjunto $(X, \leq)$ está totalmente ordenado (o que es una cadena).

Definición 2.3.2. Sean P y Q dos conjuntos tales que $Q \subseteq P$. Diremos que un elemento x de P es cota superior de Q se definen dera todo $y \in Q$ se cumple: $y \leq x$. Si una cota superior de Q pertenece a Q, entonces se prueba que es la única y se llama máximo de Q. En particular, el máximo de P, si existe, se llama último elemento y se denota con 1.

Los conceptos de cota inferior de Q, mínimo de Q y primer elemento de Q denotado por 0, se definen de forma dual.
Si en un conjunto ordenado $(X, \leq)$ todo subconjunto no vacío de Q tiene primer elemento, entonces se dice que el conjunto X está bien ordenado o que $\leq$ es un buen orden.

Definición 2.3.3. Dado un conjunto ordenado P y un subconjunto Q de P llamaremos supremo de Q a la menor cota superior (si existe), es decir, al mínimo del conjunto de las cotas superiores de Q. En forma dual se define el ínfimo como el máximo del conjunto de las cotas inferiores.
Como veremos en nuestras aplicaciones, es interesante el caso en el que el conjunto Q tiene dos elementos: $Q = \{x, y\}$. Si existen el supremo y el ínfimo de Q, respectivamente, serán denotados por $x \vee y$ y $x \wedge y$.

Definición 2.3.4. Un conjunto ordenado $(X, \leq)$ (no necesariamente totalmente ordenado), tal que para todo $x, y \in X$ existen $x \vee y$ y $x \wedge y$ se denomina retículo o reticulado. Puede ser definido alternativamente como un álgebra $\langle P, \vee, \wedge \rangle$ que verifica las siguientes condiciones para cada $x, y, z \in P$:
$\mathcal{R}_0$ $\quad x \vee x = x$, $x \wedge x = x$ (idempotencia).
$\mathcal{R}_1$ $\quad x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ (conmutatividad).
$\mathcal{R}_2$ $\quad x \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (asociatividad).
$\mathcal{R}_3$ $\quad (x \vee y) \wedge y = y$, $(x \wedge y) \vee y = y$ (absorción).

Las siguientes definiciones de retículo son equivalentes, y se las utilizará indistintamente según convenga al caso:

- Un retículo es un conjunto ordenado $(X, \leq)$ en el cual, para cada par de elementos $x, y \in L$, existen el supremo $\sup\{x, y\}$ y el ínfimo $\inf\{x, y\}$, denotados por $x \vee y$ y $x \wedge y$, respectivamente.
- Un retículo es un álgebra $\langle L, \underline{\vee}, \overline{\wedge}\rangle$ de tipo $\langle 2, 2\rangle$, donde $\underline{\vee}$ y $\overline{\wedge}$ son símbolos de operaciones binarias que verifican las condiciones $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$.

Las álgebras serán unas estructuras suficientemente generales como para poder abarcar casi todos los propósitos de nuestro trabajo. Muchas otras estructuras pueden pensarse en el marco de las álgebras.
Pasemos ahora a definir la conmutatividad. Dijimos anteriormente que los retículos cuánticos no son conmutativos, y esta será una de las razones por las cuales tales estructuras no admitan una semántica clásica, esto es, un homomorfismo a dos valores (un homomorfismo entre el álgebras cuyo universo es el universo del retículo y otra álgebra cuyo dominio es un conjunto de dos elementos).

Definición 2.3.5. Se dice que un retículo $\langle X, \vee, \wedge\rangle$ es distributivo si se cumplen las siguientes condiciones para cada $x, y, z \in X$:

- $\mathcal{D}1$ $\quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
- $\mathcal{D}2$ $\quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Se puede verificar que las condiciones $\mathcal{D}1$ y $\mathcal{D}2$ son equivalentes. Por lo tanto, basta que se cumpla sólo una de ellas, por ejemplo, $\mathcal{D}1$, que en adelante llamaremos $\mathcal{D}$.
Es posible probar también que, en todo retículo:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z).$$

Una propiedad útil en retículos distributivos es la que viene dada por el siguiente Lema: Si existe z, tal que:

$$x \wedge z = y \wedge z,$$

$$x \vee z = y \vee z,$$

entonces $x = y$.
Si un retículo tiene primer y último elemento, se llama acotado. Indicaremos al primer elemento con 0 y al último elemento con 1. Los proyectores Identidad y Nulo serán las cotas en el caso cuántico.
Si un retículo es acotado, podemos agregar a las operaciones binarias, $\vee$ y $\wedge$, las dos operaciones 0-arias 0, 1, que verifican:

$\mathcal{A}c \qquad x \wedge 0 = 0,\ x \vee 1 = 1.$

Puede entonces considerarse el álgebra $\langle X, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$, que es de tipo $\langle 2, 2, 0, 0\rangle$.
Diremos que M es un subretículo de L si $M \subseteq L$ y M es cerrado con respecto a $\vee$ y $\wedge$.
Sean L y M retículos, $f : L \to M$ una función.

- f es un homomorfismo de retículos si $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ y $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$. Si f es biyectiva, entonces f será un isomorfismo de retículos.
- Si L y M son retículos acotados y f es tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, entonces f es un homomorfismo de retículos acotados, que será un isomorfismo si f es biyectiva.

Queda en evidencia nuevamente como los homomorfismos conservan las estructuras. Daremos el siguiente resultado importante sin probarlo. Para ver una prueba del mismo ver [103]

Proposición 2.3.1. Un retículo L es distributivo si y sólo si para todo par de elementos x, y, si existe z, tal que

$$x \wedge z = y \wedge z$$

y

$$x \vee z = y \vee z,$$

entonces $x = y$.

2.4 Complementos, pseudocomplementos y álgebras de Boole

Entre los ejemplos de retículos, tenemos el de las partes de un conjunto X, $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, \emptyset, X \rangle$, que es distributivo y acotado. En esta álgebra, es posible agregar una operación más, que es el complemento de conjuntos. En ese caso, Obtenemos entonces un álgebra de Boole. En general, en un retículo, el complemento x^c de un elemento x se caracteriza por dos condiciones: el supremo de ambos es 1 y su ínfimo es 0. Si sólo se cumple la segunda condición, entonces hablaremos de pseudocomplemento. Definiremos en esta sección las álgebras de Boole y daremos algunos ejemplos.

Definición 2.4.1. Sea $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ un retículo con 0, y sea $x \in L$. Se denomina pseudocomplemento de x, si existe, al máximo del conjunto $\{z \in L : x \wedge z = 0\}$. Se denomina complemento de x, si existe, a un elemento $u \in L$, tal que

$$x \vee u = 1 \text{ y } x \wedge u = 0.$$

> Observación: Si $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ es un retículo con 0 en donde existe el pseudocomplemento de 0, entonces L tiene necesariamente un último elemento, 1, porque $\max\{z \in L : 0 \wedge z = 0\} = \max L$.

Que un elemento tenga más de un complemento no puede darse en retículos distributivos.

Proposición 2.4.1. Sea $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ un retículo distributivo acotado. Si un elemento $x \in L$ tiene complemento, el mismo es único y es también el pseudocomplemento de x.

Llegamos ahora al álgebra de Boole.

Definición 2.4.2. Un álgebra de Boole es un retículo distributivo acotado en el cual todo elemento tiene complemento.

Podemos dar una definición alternativa para álgebras de Boole.

Definición 2.4.3. Un álgebra de Boole es un álgebra $\langle B, \vee, \wedge, ()^c, 0, 1\rangle$, donde $\vee$ y $\wedge$ son operaciones binarias, $()^c$ es una operación unaria, y 0, 1 son constantes (es decir, operaciones 0-arias), tales que se verifican las condiciones:
$\mathcal{R}_1$ $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ (conmutatividad).
$\mathcal{R}_2$ $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (asociatividad).
$\mathcal{R}_3$ $(x \vee y) \wedge y = y$, $(x \wedge y) \vee y = y$ (absorción).
$\mathcal{D}$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (distributividad).
$\mathcal{A}c$ $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$.
$\mathcal{C}$ $x \wedge x^c = 0$ y $x \vee x^c = 1$.

Las propiedades $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{A}c$ son las que ya fueron presentadas anteriormente. La última propiedad es la que determina que el retículo sea complementado.
No sólo se prueba que las definiciones dadas de álgebra de Boole son equivalentes, sino que también se pueden probar las siguientes propiedades en todas las álgebras de Boole:
01 $1^c = 0, 0^c = 1$,
$\mathcal{DC}$ $(x^c)^c = x$,
$\mathcal{M}1$ $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$,
$\mathcal{M}2$ $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$

Observación: las dos últimas condiciones de denominan leyes de De Morgan. Un retículo distributivo acotado con un operador que las verifica junto con la propiedad (DC) se llama álgebra de De Morgan.

Mostremos algunos ejemplos de álgebras de Boole:

1. Exceptuando el álgebra de Boole trivial, que es la que posee un único elemento, el álgebra de Boole mínima (con respecto a la inclusión) es la que sólo tiene al 0 y al 1 como elementos, es decir, $\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, ()^c, 0, 1\rangle$. Llamaremos $\overline{2}$ a esta álgebra de Boole. Veremos más adelante que $\overline{2}$ juega un rol fundamental en la clase de las álgebras de Boole. Sean p, q elementos de $\overline{2}$. En las siguientes tablas, mostramos las operaciones de complemento, ínfimo y supremo.

p	$(p)^c$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2. Como mencionamos arriba, si X es un conjunto entonces $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, \emptyset, X\rangle$ es un retículo distributivo acotado con las operaciones de unión, intersección y las constantes dadas por el conjunto vacío $\emptyset$ y el total X. Si agregamos la operación unaria $()^{cX}$ de tomar complemento con respecto a X, tenemos que $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ()^{cX}, \emptyset, X\rangle$ es un álgebra de Boole. Existe un teorema debido a Stone que prueba que cada álgebra de Boole finita es isomorfa a un álgebra de Boole de esta forma. Sin embargo, hay álgebras de Boole infinitas que no son isomorfas a un álgebra de Boole de esta forma. El teorema de representación de Stone caracteriza a las álgebras de Boole como subálgebras de álgebras de partes. Toda álgebra de Boole admite una valuación al $\{0, 1\}$, en el sentido de que entre el álgebra $\overline{2}$ y cualquier álgebra de Boole finita, puede establecerse un homomorfismo de álgebras.

3. Sabemos que los conjuntos abiertos de un espacio topológico forman un retículo distributivo acotado. Sin embargo, este retículo no es necesariamente un álgebra de Boole porque en general el complemento de un conjunto abierto no es un conjunto abierto. Si consideramos sólo los conjuntos "clopen" o "cerriabiertos", es decir, los conjuntos abiertos cuyos complementos son conjuntos abiertos, entonces el retıculo sí resulta ser un álgebra de Boole, que se llama el álgebra característica del espacio topológico. Esta álgebra tiene múltiples aplicaciones, puede verse una de ellas en la prueba topológica de Compacidad para el lenguaje de primer orden que realiza J.A.Amor en [7].

Definición 2.4.4. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado con elementos máximo 1 y mínimo 0. Una ortocomplementación en A es una función $\perp$: $A \longrightarrow A$, tal que para cada $a, b \in A$:

- $a \leq b$ si y sólo si $b^\perp \leq a^\perp$
- $(a^\perp)^\perp = a$
- $a^\perp \vee a = 1$
- $a^\perp \wedge a = 0.$

Un retículo que admite una ortocomplementación se dice ortocomplementado. Con esta definición puede verse que las álgebras de Boole son ortocomplementadas, ya que al definir álgebra de Boole como un álgebra con operaciones $\vee, \wedge$ y $()^c$, impusimos las restricciones anteriores sobre el complemento. Acá lo definimos independientemente porque esta operación también existe para álgebras que no son booleanas.

Definición 2.4.5. Un retículo ortocomplementado A se denomina ortomodular si cumple para cada $a, b \in A$:

$$\text{si } a \leq b, \text{ entonces } b = a \vee (a^\perp \wedge b).$$

Proposición 2.4.2. Sea A un retículo ortocomplementado. Son equivalentes:

- A es ortomodular.
- Si $x \leq y$ y $x^\perp \wedge y = 0$, entonces $x = y$.

Cuando para $a, b \in A$ se cumple:

$$a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^\perp)$$

, se dice que *a conmuta con b*. En una retícula ortomodular esta relación es simétrica.

Definición 2.4.6. Si A es un conjunto no vacío y L es un retículo, se define el álgebra determinada por A, denotada por $\Gamma(A)$ como

$$\Gamma(A) = \{B : B \text{ es subálgebra Booleana de L }, A \subseteq B\}.$$

Definición 2.4.7. Sea $\langle A, \vee, \wedge, \perp\rangle$ un retículo ortocomplementado , decimos que $a, b \in A$ son compatibles si y sólo si $\Gamma(\{a, b\})$ es una subálgebra Booleana de A.

2.5 Retículos no distributivos, álgebras de Boole parciales y retículos cuánticos

Vamos a ver ahora algunas caracterizaciones posibles para los retículos cuánticos y su relación con las álgebras de Boole. Su característica fundamental, la no distributividad, hace que estos retículos no admitan valuaciones clásicas. Como en el siguiente capítulo se verá una nueva forma de dar una semántica para los sistemas, las semántica de Nmatrices, es necesario que veamos dónde reside la dificultad técnica que impide una valuación clásica, pero que permite una valuación no determinista.
Vamos a mostrar la representación algebraica de un retículo de proyectores del espacio Hilbert dada por el Álgebra Parcialmente Booleana.

Definición 2.5.1. Sea $V_B = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable, posiblemente infinita, de álgebras de Boole: $B_i = \{S_i, \vee_i, \wedge_i, \neg_i\}$. V_B es una variedad booleana si:

1. $i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},$ tal que $S_i \cap S_j = S_k$;
2. $\forall i, j \in \mathbb{N}, 0_i = 0_j, 1_i = 1_j$;
3. si $A, B \in S_i \cap S_j \Rightarrow A \vee_i B = A \vee_j B, A \wedge_i B = A \wedge_j B,$ y $\neg_i A = \neg_j A$

V_B es un álgebra parcialmente booleana si es una variedad booleana y

$$\forall A, B, C \in \bigcup_i S_i,$$

si $\exists i, j, k \in \mathbb{N}$, tal que $A, B \in S_i; B, C \in S_j$ y $C, A \in S_k \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$, tal que $A, B, C \in S_m$
.
En resumen, un álgebra parcialmente booleana es un conjunto de álgebras booleanas pegadas juntas de una forma consistente, de manera que cuando se superponen dos o mas de ellas, sus operaciones están en concordancia entre sí. El conjunto de proyectores de un espacio de Hilbert es un álgebra parcialmente booleana.

2.5.1 Lógica cuántica

El desarrollo siguiente viene motivado por la pregunta: ¿Qué estructura algebraica poseen los conjuntos de enunciados de una teoría física, en especial los de la física cuántica?
En la lógica de una teoría física, el "lenguaje" esta formado por todos los posibles enunciados permitidos por esa teoría acerca de los experimentos sobre un sistema físico [30]. Suele llamarse lógica clásica a la estructura algebraica característica de las proposiciones clásicas asociadas a un sistema físico clásico.
Bajo el nombre de Lógica cuántica o, mejor dicho, *aproximación lógico-algebraica a la Mecánica Cuántica*, se reúnen diversos esfuerzos conceptuales con el objetivo de lograr una caracterización algebraica de la MC. Haciendo uso de estructuras algebraicas, se abordan distintos problemas de la MC, tales como su interpretación, su relación con la Mecánica Clásica y la posibilidad de tener teorías post-cuánticas. La idea subyacente es que cualquier teoría física se caracteriza no sólo por su formulación matemática, sus relaciones epistemológicas y su interpretación, sino también por la estructura algebraica de sus proposiciones. Por esto mismo es de interés estudiar las estructuras lógicas subyacentes a los sistemas físicos. La Lógica Cuántica (LC) nace de los trabajos de Birkhoff

y von Neumann en los años 30'. En los años 60, este trabajo produjo una cantidad importante de discusiones y publicaciones que concluyeron en trabajos de gran importancia como los de Kochen y Specker, Mackey y Maczynski (escuela de Harvard), Piron, Jauch y Finkelstein (escuela de Ginebra) y Putnam.
Mas allá de sus éxitos o fracasos, la LC constituye una formulación (incompleta) de la MC, alternativa a la usual interpretación mediante espacios de Hilbert. El teorema de Kochen-Specker es un ejemplo de como la LC impone severas limitaciones a las posibles interpretaciones de la MC.
En este enfoque los objetos básicos de la MC son el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, los estados y sus operadores autoadjuntos asociados. El objeto básico del enfoque lógico-algebraico es la estructura algebraica del conjunto de todas las proposiciones del sistema. Esta estructura no es única, pues depende de cómo se definan las operaciones entre proposiciones y de cuáles sean las proposiciones. Birkhoff y von Neumann consideran que las proposiciones cuánticas, también llamadas preguntas sí-no, son los elementos del conjunto formado por todos los subespacios cerrados del espacio de Hilbert, conjunto que denotaremos por $\mathcal{C}(\mathcal{H})$. Conjunto que es equivalente al de todos los proyectores sobre $\mathcal{H}$. Sobre este conjunto se proponen las siguientes definiciones, en analogía con las operaciones de la lógica clásica.

1. Una proposición A implica a otra B, $A \leq B$, si para todo estado $|\psi\rangle$, tal que $Prob_{|\psi\rangle}(A) = 1$, ocurre que $Prob_{|\psi\rangle}(B) = 1$, esto es, B es cierta en todos los estados en los que A es cierta. Esto es equivalente a que $\mathcal{H}_A$ sea un subespacio cerrado de $\mathcal{H}_B$. Si $\mathcal{P}_A$ y $\mathcal{P}_B$ son los proyectores asociados, $A \leq B$ es equivalente a
$$\mathcal{P}_A\mathcal{P}_B = \mathcal{P}_B\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_A,$$
que se denota por $\mathcal{P}_A \leq \mathcal{P}_B$. Se dice que A y B son equivalentes si $A \leq B$ y $B \leq A$.

2. La proposición idénticamente falsa corresponde al operador nulo $\hat{0}$, que transforma cualquier vector de $\mathcal{H}$ en el vector nulo $\overline{0}$. Como mencionamos antes, el retículo de proyectores será acotado y este vector será su mínimo. La proposición idénticamente verdadera se corresponde con el operador identidad $\hat{\mathrm{I}}$, que deja invariante cualquier vector de $\mathcal{H}$. Cualquier proyector $\mathcal{P}_A$ satisface $\hat{0} \leq \mathcal{P}_A \leq \hat{I}$.

3. Si A es cualquier proposición, entonces la proposición $\neg A$ (la negación de A) se define exigiendo que para todo estado $|\psi\rangle$, $Prob_{|\psi\rangle}(\neg A) = 1 \Leftrightarrow Prob_{|\psi\rangle}(A) = 0$. Esto es equivalente a $\mathcal{H}_{\neg A} = (\mathcal{H}_A)^{\perp}$, lo cual determina un único proyector, $\mathcal{P}_{\neg A}$ que representa a $\neg A$:
$$\hat{P}_{\neg A} = \hat{I} - \hat{P}_A,$$
lo cual implica que para todo estado $|\psi\rangle$,
$$Prob_{|\psi\rangle}(A) + Prob_{|\psi\rangle}(\neg A) = 1.$$
Al contrario de lo que pasa en el caso clásico, la definición cuántica tiene la peculiaridad de que una proposición A puede ser falsa en un estado $|\psi\rangle$ sin que ello implique que $\neg A$ sea cierta. Que A sea falsa significa $Prob_{|\psi\rangle}(A) < 1$; $\neg A$ cierta quiere decir $Prob_{|\psi\rangle}(A) = 0$. Puede tratar de entenderse esta particularidad debido a que existen superposiciones lineales de vectores propios de cualquier operador y a la insistencia, en muchos casos, de trabajar con una semántica de dos valores, esto

es, una lógica bivaluada, en lugar de una trivaluada o multivaluada. Para el caso cuántico, veremos mas adelante que esta última restricción se puede relajar.

4. La proposición $A \wedge B$ se define exigiendo que para todo estado $|\psi\rangle$,

$$Prob_{|\psi\rangle}(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow Prob_{|\psi\rangle}(A) = 1 \text{ y } Prob_{|\psi\rangle}(B) = 1$$

Esto quiere decir,

$$\mathcal{H}_{A\wedge B} = \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B.$$

En el caso particular de que $\hat{P}_A$ y $\hat{P}_B$ conmuten, el proyector que representa la proposición $A \wedge B$ es

$$\hat{P}_{A\wedge B} = \hat{P}_A \hat{P}_B.$$

5. La proposición $A \vee B$ se define como el proyector sobre el menor subespacio lineal cerrado que contiene tanto a $\mathcal{H}_A$ como a $\mathcal{H}_B$,

$$\mathcal{H}_{A\vee B} := \overline{\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B}.$$

A primera vista, una definición más razonable de $A \vee B$ sería el proyector sobre el subespacio $\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B$; sin embargo, éste no es un subespacio lineal de $\mathcal{H}$. Otra posibilidad podría haber sido el proyector sobre el subespacio $\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$, pero, en el caso de $\mathcal{H}$ infinito, $\mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_B$ puede no ser un subespacio cerrado. Y no podemos admitir un lenguaje que no sea cerrado por las operaciones o conectivos, ya que nos traería un problema con la definición recursiva de fórmulas bien formadas. Así como pasaba en el caso de la conjunción, en este caso tampoco existe una manera simple de escribir el proyector sobre $\mathcal{H}_{A\vee B}$. En el caso particular en que $\hat{P}_A$ y $\hat{P}_B$ conmuten entre ellos, el proyector que representa la proposición $A \vee B$ es

$$\hat{P}_{A\vee B} = \hat{P}_A + \hat{P}_B - \hat{P}_A \hat{P}_B.$$

> El hecho de que dos observables cuánticos no sean siempre compatibles, esto es, sus operadores autoadjuntos asociados no conmuten entre sí, se refleja en que la estructura algebraica del conjunto de las proposiciones asociadas con las definiciones anteriores de $\vee$ y $\wedge$ no es distributiva. Esta condición es esencial en la definición de álgebra de Boole. Por lo tanto, nuestro retículo de proyectores cuánticos no sera un álgebra de Boole, pero sí será un álgebra parcialmente booleana.

2.5.2 Estructura algebraica de la lógica cuántica

Ya hemos mencionado que la estructura algebraica del conjunto de los subespacios cerrados de $\mathcal{H}$, $C(\mathcal{H})$, no es distributiva, pero veamos ahora cuál es exactamente su estructura característica.
Repasaremos ahora algunas definiciones y nociones dadas al comienzo de la sección, para que el lector no pierda el hilo de la lectura y pueda relacionar estos conceptos con el formalismo cuántico.
Recordemos que definimos $\mathcal{A} = (S, \leq)$ un conjunto ordenado (poset) si S es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación diádica o binaria que cumple con reflexividad, antisimetría

y transitividad. Si tal relación es total, dijimos que el conjunto era totalmente ordenado. Si A y B son elementos de S, puede existir otro elemento C, tal que:

$$A \leq C \text{ y } B \leq C;$$

$$\text{si } A \leq D, B \leq D \Rightarrow C \leq D.$$

El elemento C es el supremo de $\{A, B\}$ y ya lo denotamos como $A \vee B$. De la misma forma, habíamos dicho que podía existir un elemento E, tal que:

$$E \leq A \text{ y } E \leq B,$$

$$\text{si } F \leq A, F \leq B \Rightarrow F \leq E.$$

El elemento E es el ínfimo de $\{A, B\}$, que equivale a $A \wedge B$. Un conjunto ordenado puede tener un elemento máximo, 1, o un elemento mínimo, 0, o ambos, tales que para todo elemento A de S:

$$0 \leq A,$$

$$A \leq 1.$$

Un conjunto ordenado se dice complementado (recordar que al comienzo de la sección definimos complemento y pseudocomplemento) si tiene un máximo, un mínimo, y para todo A perteneciente a S, existe un $A^{\perp}$ también en S (anteriormente denotado por $(A)^c$), tal que:

$$A \vee A^{\perp} = 1,$$

$$A \wedge A^{\perp} = 0.$$

Decimos que un conjunto ordenado es ortocomplementado si es complementado y para todo elemento A de S,

$$(A^{\perp})^{\perp} = A,$$

$$A \leq B \Rightarrow B^{\perp} \leq A^{\perp}.$$

Entre los elementos de un conjunto ordenado ortocomplementado se puede definir una relación de ortogonalidad mediante la siguiente condición:

$$A \perp B \Leftrightarrow A \leq B^{\perp}.$$

La siguiente expresión es de gran importancia y es llamada identidad ortomodular:

$$A \leq B \Rightarrow B = A \vee (B \wedge A^{\perp}).$$

> Las dos últimas proposiciones son muy importantes y tendrán consecuencias directas a la hora de definir las valuaciones en nuestro sistema lógico con semántica no determinista, que es la finalidad de nuestro trabajo.

Un poset $\mathcal{A}$ es ortocompleto, si es ortocomplementado y cada pareja de elementos de S mutuamente ortogonales tiene un supremo.
Un poset $\mathcal{A}$ es ortomodular, si es ortocompleto y cumple la identidad ortomodular.
Como mencionamos antes, un poset $\mathcal{A}$ es un retículo, si cada pareja de elementos de S

tiene un supremo y un ínfimo. Todos los retículos satisfacen las propiedades definidas al comienzo del capítulo, conmutativa, asociativa y de absorción de un álgebra booleana, pero no necesariamente la propiedad distributiva. Si satisface la propiedad distributiva diremos que el retículo es distributivo.

> Un retículo distributivo ortocomplementado es un retículo booleano o álgebra de Boole.

Por lo tanto, $C(\mathcal{H})$ es un retículo, parcialmente ordenado por inclusión, tal que para cualquier par de subespacios existe un subespacio mayor que es común a ambos, y un subespacio menor que los contiene a ambos. $\mathcal{H}$ es el máximo y el subespacio nulo el mínimo. El cierre o clausura de vectores ortogonales a un subespacio forma el correspondiente subespacio ortogonal, que es el ortocomplemento del subespacio original. $C(\mathcal{H})$ forma un retículo ortocomplementado no distributivo. Su caracterización alternativa es la de álgebra parcialmente booleana ya definida.
Habiendo caracterizado ya de un par de maneras equivalentes la estructura algebraica del retículo de proposiciones cuánticas, estamos en condiciones de pasar a estudiar el formalismo que le dará significado a tal estructura, esto es, las Nmatrices.

Capítulo 3

Las N-Matrices y las Semánticas no deterministas

En este capítulo, vamos a introducir las nociones de Matriz no Determinista (N-M, NM o Nmatriz, indistintamente), de semántica basada a en estas matrices y desarrollaremos mínimamente el sistema deductivo y formalismo general que en ellas se fundamenta. Como la bibliografía en lengua española acerca de este sistema formal, iniciado por Arnon Avron e I. Lev [11] y continuado conjuntamente por Zamansky[13], es prácticamente nula, brindaremos una exposición relativamente completa del tema. Tenemos la esperanza de que pueda servirle como guía a quienes deseen profundizar en esta dirección.
En este trabajo, estudiamos la posibilidad de incorporar este tipo de semánticas a la MC. Por lo tanto, entender la forma en que estas semánticas se incorporan a diferentes sistemas es crucial para entender el próximo capítulo, en el cual se desarrolla un posible candidato de N-matriz tanto para los sistemas cuánticos como para teorías probabilísticas más generales.
Vimos que el teorema de KS (BKS) imponía limitaciones a las posibles valuaciones del retículo cuántico. Uno de los supuestos de tal teorema, que lleva a tal limitación, es la *veritativo funcionalidad*, esto es, la restricción a las valuaciones de que sean homomorfismos de álgebras. El siguiente paso será relajar tal restricción y ver qué consecuencia puede traer para la Mecánica Cuántica.

3.1 Algunas motivaciones

El principio de funcionalidad de verdad es un principio básico de la lógica de muchos valores en general, y en la lógica clásica en particular. De acuerdo con este principio, el valor de verdad de una fórmula compleja está determinado exclusivamente por los valores de verdad de sus subfórmulas. Sin embargo, la información del mundo real se presenta muchas veces como incompleta, incierta, vaga, imprecisa o inconsistente, y estos fenómenos están en conflicto obvio con el principio de la funcionalidad de la verdad. Una posible solución a este problema es relajar este principio tomando prestado de la teoría de autómatas y computabilidad la idea de cálculos no deterministas y aplicarlo a las valuaciones. Esto conduce a la introducción de matrices no deterministas (Nmatrices), una generalización natural de matrices ordinarias de múltiples valores, en las que el valor de verdad de una fórmula compleja puede elegirse de forma no determinista a partir de un conjunto no vacío de opciones. Hay muchas motivaciones naturales para introducir el no determinismo en las tablas de verdad de los conectivos lógicos. Discutimos algunas de ellas a continuación.

3.1.1 Lógica Intuicionista

Comenzamos presentando algunos casos en los que surge la necesidad de una semántica no determinista. El primer ejemplo viene de la mano del intuicionismo matemático. La lógica intuicionista cobra relevancia en las discusiones acerca de los fundamentos de la matemática, y se caracteriza por el rechazo del Principio de Tercero Excluido de la Lógica Clásica. En términos de la Teoría de la Prueba es importante mencionar que sólo acepta las pruebas constructivas. Por lo tanto, es una lógica más débil que la clásica (su conjunto de teoremas es un subconjunto propio de los teoremas clásicos). Además, el fragmento intuicionista de la matemática es un subconjunto propio de la matemática basada en ZFC, ya que el intuicionismo tampoco acepta el *Axioma de elección.*

"Subespecificación" sintáctica:

Considere el sistema estándar de tipo Gentzen LK para la lógica clásica proposicional (véase, por ejemplo [110]). Sus reglas de introducción para $\neg$ y $\vee$ se suelen formular de la siguiente manera:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \quad (\neg, \Rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi} \quad (\Rightarrow, \neg)$$

$$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \phi \Rightarrow \Delta} \quad (\vee, \Rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \phi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \phi} \quad (\Rightarrow, \vee)$$

> Un sistema de tipo Gentzen consiste en una presentación de un sistema lógico (principalmente de su inferencia lógica) mediante *secuentes*. La presentación en secuentes de un sistema es una alternativa a la clásica presentación axiomática o de tablas de verdad. La Lógica Clásica es presentadas alguna veces mediante axiomas estilo Hilbert [78], otras veces mostrando las tablas para sus conectivos, y otras mediante el sistema de Deducción Natural [58]. Otra alternativa es presentarla como un cálculo de secuentes. La ventaja de esta última presentación radica en la forma en la cual deja en evidencia las características estructurales de la consecuencia lógica, además de presentar ventajas en el tratamiento conjuntista del sistema. El Cálculo de Secuentes es más abstracto que el Cálculo de Deducción Natural en el sentido de que puede considerarse como un sistema "metadescriptivo" respecto de cómo se organizan las deducciones naturales. En el Cálculo de Deducción Natural las reglas definen relaciones entre fórmulas, mientras que en el Cálculo de Secuentes [60] las reglas representan afirmaciones acerca del concepto de consecuencia lógica.

La semántica correspondiente está dada por las siguientes tablas de verdad clásicas:

p	$\neg p$
v	f
f	v

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Debemos tener en cuenta que cada regla sintáctica de LK dicta alguna condición semántica en el conector que introduce: $(\neg, \Rightarrow)$ corresponde a la condición $\tilde{\neg}(t) = f$, esto es, la interpretación de la negación de lo falso como lo verdadero, mientras que $(\Rightarrow, \neg)$ corresponde a la condición $\tilde{\neg}(f) = v$, determinando completamente la tabla de verdad para la negación. De forma similar, $(\vee, \Rightarrow)$ dicta la última línea de la tabla de verdad para $\vee$, es decir, $(\widetilde{\vee}(f, f)) = f$, mientras que $(\Rightarrow, \vee)$ dicta las otras tres líneas. Supongamos ahora que queremos rechazar la ley de tercero excluido (siguiendo el espíritu de la lógica intuicionista). Esto se puede hacer descartando la regla $(\Rightarrow, \neg)$ y manteniendo las otras reglas. Estrictamente hablando, para obtener la lógica intuicionista, habría que hacer algunas consideraciones extras que no vienen al caso para nuestra tarea.
¿Cuál es la semántica del sistema resultante? Desde un punto de vista intuitivo, al descartar $(\Rightarrow, \neg)$, perdemos la información sobre la segunda línea de la tabla de verdad para $\neg$. En consecuencia, tenemos un problema de falta de especificación. Esto se puede modelar utilizando Nmatrices: en caso de subespecificación, todos los posibles valores de verdad están permitidos. La semántica correspondiente en el caso que consideramos sería de la siguiente manera (utilizamos conjuntos de posibles valores de verdad en lugar de valores de verdad):

p	$\neg p$
v	$\{f\}$
f	$\{v, f\}$

p	q	$p \vee q$
v	v	$\{v\}$
v	f	$\{v\}$
f	v	$\{v\}$
f	f	$\{f\}$

> Es importante aclarar que no se obtiene la lógica intuicionista con el simple hecho de tener estas tablas. Por otro lado, es sabido que la lógica intuicionista no admite una semántica de tablas de verdad clásica. Es por esto que a veces se presenta su semántica de forma topológica (mediante álgebras de Heyting) o a través de semánticas de mundos posibles (estilo modales).

3.1.2 Comportamiento inherente no determinista de los circuitos

Las Nmatrices se puede aplicar al modelo de comportamiento no determinista de varios elementos de circuitos eléctricos. Una puerta lógica ideal que realiza operaciones en variables booleanas es una abstracción de una puerta física que opera con un rango continuo de cantidad eléctrica. Esta cantidad eléctrica se convierte en una variable discreta al asociar un rango completo de voltajes eléctricos con los valores lógicos 1 y 0 (ver [96] para más detalles). Hay una serie de razones por las cuales el comportamiento medido de un circuito puede desviarse del comportamiento esperado. Una razón puede ser las variaciones en el proceso de fabricación: la dimensión y los parámetros del dispositivo pueden variar, afectando el comportamiento eléctrico del circuito. La presencia de fuentes de ruido, temperatura y otras condiciones perturbadoras es otra fuente de desviaciones en la respuesta del circuito. La forma matemática exacta de la relación entre entrada y salida en una puerta lógica dada no siempre se conoce, por lo que puede aproximarse mediante una tabla de verdad no determinista. Por ejemplo, supongamos que tenemos un circuito con una puerta AND defectuosa, que responde correctamente si las entradas son similares, e impredeciblemente en caso contrario. El comportamiento de la puerta puede describirse mediante la siguiente tabla de verdad, equipada con la dinámica semántica:

p	q	AND
v	v	$\{v\}$
v	f	$\{v, f\}$
f	v	$\{v, f\}$
f	f	$\{f\}$

3.1.3 Incompletitud e inconsistencia

Este ejemplo está tomado de [9]. Supongamos que tenemos un marco para la recopilación y el procesamiento de información, que consiste en un conjunto S de fuentes de información y un procesador P. Las fuentes proporcionan información sobre fórmulas basadas en $\{\neg, \vee\}$, y suponemos que para cada fórmula ψ una fuente $s \in S$ puede decir que ψ es verdadero (es decir, asignado el valor de verdad 1), ψ es falso (es decir, tiene asignado el valor de verdad 0), o que no tiene conocimiento sobre ψ. A su vez, el procesador recopila información de las fuentes, la combina de acuerdo con alguna estrategia y define la valoración combinada resultante de las fórmulas. Por lo tanto, para cada fórmula ψ el procesador se encuentra con una de las cuatro situaciones posibles:

- tiene información de que ψ es verdadera, pero no hay información de que ψ es falsa,
- tiene información de que ψ es falsa, pero no hay información de que ψ es verdadera,
- tiene información de que ψ es verdadera e información de que es falsa,
- no tiene información sobre ψ en absoluto.

En vista de esto, con el objetivo de dar cuenta de la incompletitud e información contradictoria, Belnap sugirió el uso de los siguientes cuatro valores de verdad lógica:

$$t = \{1\}, \quad f = \{0\}, \quad T = \{0, 1\}, \quad \perp = \emptyset$$

Aquí, 1 y 0 representan "verdadero" y "falso", respectivamente. El símbolo T representa información inconsistente, mientras que $\perp$ representa ausencia de información. El escenario anterior tiene muchas ramificaciones, que corresponden a varias suposiciones con respecto al tipo de información proporcionada por las fuentes y la estrategia utilizada por el procesador para combinarla. Suponemos que el procesador respeta al menos las consecuencias deterministas (en ambos sentidos) de cada una de las tablas de verdad clásicas. Esta suposición significa que los valores asignados por el procesador a fórmulas complejas y aquellos que asigna a sus subfórmulas inmediatas están interrelacionados de acuerdo con los siguientes principios derivados de las tablas de verdad clásicas de $\neg$ y $\vee$:

1. El procesador le atribuye 1 a $\neg\phi$ si le asigna 0 a ϕ.
2. El procesador atribuye 0 a $\neg\phi$ si le atribuye 1 a ϕ.
3. Si el procesador atribuye 1 a ϕ o a ψ, entonces atribuye 1 a $\phi \vee \psi$.
4. El procesador atribuye 0 a $\phi \vee \psi$ si le asigna 0 a ambos ϕ y ψ.

La afirmación "el procesador atribuye 0 a ψ" significa que 0 se incluye en el subconjunto de $\{0, 1\}$ que el procesador asigna a ψ (recuerde que los valores de verdad utilizados por el procesador corresponden a subconjuntos de $\{0, 1\}$). Es importante notar que el inverso de (3) no es válido, ya que alguna fuente podría informar al procesador que $\phi \vee \psi$ es verdadera, sin proporcionar información acerca de la verdad- falsedad de ϕ o ψ. Bajo los supuestos anteriores, puede haber una serie de posibles escenarios relacionados con el tipo de fórmulas evaluado por las fuentes. El caso en que las fuentes proporcionan información sólo sobre fórmulas atómicas ha sido considerado en [20]. Este caso es determinista y conduce a la famosa lógica de cuatro valores de Dunn-Belnap.
Ahora considere el caso cuando las fuentes proporcionan información sobre fórmulas arbitrarias (también complejas), pero no necesariamente todas.las siguientes tablas de verdad no deterministas:

$\widetilde{\vee}$	f	$\perp$	T	t
f	$\{f, T\}$	$\{t, \perp\}$	$\{T\}$	$\{t\}$
$\perp$	$\{t, \perp\}$	$\{t, \perp\}$	$\{t\}$	$\{t\}$
T	$\{T\}$	$\{t\}$	$\{T\}$	$\{t\}$
t	$\{t\}$	$\{t\}$	$\{t\}$	$\{t\}$

	$\widetilde{\neg}$
f	$\{t\}$
$\perp$	$\{\perp\}$
T	$\{T\}$
t	$\{f\}$

Tenga en cuenta que la tabla para la negación refleja los principios 1 y 2, mientras que la tabla para la disyunción refleja los principios 3 y 4. Para ver esto, examinemos uno de los casos más peculiares: la entrada $f \widetilde{\vee} f = \{f, T\}$. Supongamos que a ψ y ϕ se les asigna el valor de verdad $f = \{0\}$. Luego, según el principio 4 anterior, el valor de verdad de $\psi \vee \phi$ (que es un subconjunto de $\{0, 1\}$) debe incluir al 0. Si además una de las fuentes asigna 1 a $\psi \vee \phi$, entonces el procesador atribuye 1 a $\psi \vee \psi$ también, y entonces el valor de verdad asignado a $\psi \vee \psi$ es en este caso T. De lo contrario, es f. Esto justifica las dos opciones en la tabla de verdad. El resto de las entradas se pueden explicar de manera similar.

3.2 Lógicas y relación de consecuencia lógica

En lo que sigue, $\mathcal{L}$ es un lenguaje proposicional y $Frm_{\mathcal{L}}$ es su conjunto de fórmulas bien formadas (fbf) del lenguaje. Las metavariables ψ, ϕ recorren $\mathcal{L}$-fórmulas, y Γ, Δ representan conjuntos de $\mathcal{L}$-fórmulas. Para una $\mathcal{L}$-fórmula ψ, denotamos por Átom(ψ) el conjunto de fórmulas atómicas de ψ. Denotamos por $SF(\Gamma)$ el conjunto de todas las subfórmulas de Γ.

Las siguientes definiciones son de carácter más técnico, y no son estrictamente necesarias para entender los resultados de las siguientes secciones. Se introducen por una cuestión de completitud formal, para que el lector interesado pueda adentrarse en el mundo de las N-matrices, ya que no hay material sobre el tema en lengua española. Quien no las considere necesarias puede pasar a la sección siguiente, en la cual definiremos matrices deterministas y matrices no deterministas.

Definición 3.2.1. Una relación de consecuencia de Scott (scr para abreviar) para un lenguaje $\mathcal{L}$ es una relación binaria $\vdash$ entre conjuntos de fórmulas de $\mathcal{L}$ que satisface el siguiente tres condiciones:

- Reflexividad fuerte: Si $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, entonces $\Gamma \vdash \Delta$.
- Monotonía : Si $\Gamma \vdash \Delta$ y $\Gamma \subseteq \Gamma'$, $\Delta \subseteq \Delta'$, entonces $\Gamma' \vdash \Delta'$
- Transitividad (corte): Si $\Gamma \vdash \psi, \Delta$ y $\Gamma', \psi \vdash \Delta'$, entonces $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$

Definición 3.2.2. Una relación de consecuencia Tarskiana (tcr) $\vdash_1$ para un lenguaje $\mathcal{L}$ es una relación binaria entre conjuntos de $\mathcal{L}$-fórmulas y fórmulas de $\mathcal{L}$, que cumple las siguientes condiciones:

- Reflexividad fuerte: Si $\psi \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash_1 \psi$.
- Monotonía: Si $\Gamma \vdash_1 \psi$ y $\Gamma \subseteq \Gamma'$, entonces $\Gamma' \vdash_1 \psi$.
- Transitividad (corte): Si $\Gamma \vdash_1 \psi$ y $\Gamma', \psi \vdash_1 \phi$, entonces $\Gamma, \Gamma' \vdash_1 \phi$.

Definición 3.2.3. Una tcr $\vdash$ para $\mathcal{L}$ es *estructural* si para cada $\mathcal{L}$-substitución uniforme σ y cada Γ y ψ , si $\Gamma \vdash \psi$, entonces $\sigma(\Delta) \vdash \sigma(\psi)$.
Decimos que $\vdash$ es finitario si cada vez que $\Gamma \vdash \psi$, existe un conjunto finito $\Gamma' \subseteq \Gamma$, tal que $\Gamma' \vdash \psi$.
Decimos que $\vdash$ es consistente (o no trivial), si existen algunos Γ no vacíos y algunos ψ, tal que $\Gamma \nvdash \psi$.
Se pueden definir propiedades similares para una scr.

Definición 3.2.4. Una lógica proposicional tarskiana (lógica proposicional) es un par $(\mathcal{L}, \vdash)$, donde $\mathcal{L}$ es un lenguaje proposicional, y $\vdash$ es una tcr (scr) estructural y consistente para el lenguaje. La lógica $(\mathcal{L}, \vdash)$ es finitaria si $\vdash$ es finitario.

Hay varias formas de definir las relaciones de consecuencia para un lenguaje $\mathcal{L}$. Las dos más comunes son los enfoques teóricos basados en la Teoría de la Prueba y la Teoría de Modelos. En el primero, la definición de una relación de consecuencia se basa en especificar noción de prueba en un cálculo formal dado. En el último enfoque, la definición se basa en especificar una semántica para $\mathcal{L}$. La noción general de una semántica abstracta es bastante opaca. Uno generalmente comienza definiendo una noción de valuación como un cierto tipo de funciones parciales de $Frm_{\mathcal{L}}$ hasta algún conjunto (como vimos en el capítulo 2 en la sección de homomorfismos). Entonces, uno define lo que significa para una valuación satisfacer una fórmula (o ser un modelo de una fórmula). Una semántica es entonces un conjunto S de valuaciones, y la relación de consecuencia inducida por S se define de la siguiente manera: $\Gamma \vdash_S \Delta$ si cada valuación total en S que satisface todas las fórmulas de Γ, también satisface alguna fórmula de Δ (tenga en cuenta que esto siempre define una *scr*).

La siguiente definición puede ser de importancia en el estudio de posibles semánticas para el retículo de proyectores.

Definición 3.2.5. Decimos que una semántica S es analítica si cada valuación parcial en S, cuyo dominio está cerrado bajo subfórmulas, se puede extender a una valuación total de S.

Esto implica que la identidad exacta del lenguaje $\mathcal{L}$ no es importante, ya que la analiticidad nos permite enfocarnos en algún subconjunto de sus conectivos. Tanto la semántica ordinaria de muchos valores, como la semántica no determinista basada en Nmatrices, son analíticas. Sin embargo, esto no va a ser necesariamente cierto en el caso general.

3.3 Matrices deterministas y Nmatrices

Un método general estándar para definir lógicas proposicionales es mediante el uso de matrices de muchos valores (deterministas). Por supuesto, el caso bivaluado es un caso particular de la multivaluación.

3.3.1 Matrices deterministas

Definiremos ahora las matrices deterministas o clásicas para luego poder compararlas con las Nmatrices. En esta definición quedará en evidencia el homomorfismo que entra en juego y del que tanto hablamos en el capítulo 2.
Seguiremos el tratamiento dado por Avron y Zamansky en [13]

Definición 3.3.1. Una matriz para $\mathcal{L}$ es una tupla

$$P = \langle V; D; O\rangle$$

donde

- V es un conjunto no vacío de valores de verdad.
- D (conjunto de valores designados) es un subconjunto propio no vacío de V.
- Para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de $\mathcal{L}$, O incluye una función correspondiente $\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to V$

Una valuación parcial en P es una función $v : \mathcal{W} \to V$ definida sobre un subconjunto $\mathcal{W} \subseteq Frm_L$ cerrado bajo subfórmulas, tal que para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ y para todo $\psi_1, ..., \psi_n \in \mathcal{W}$ de $\mathcal{L}$, se cumple que:

$$v(\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)) = \widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), ..., v(\psi_n)) \tag{3.1}$$

Al conjunto W se le pide la clausura bajo subfórmulas para que la expresión anterior esté bien formada.

Decimos que una matriz es finita cuando lo es su conjunto de valores de verdad. En el caso cuántico vamos a necesitar una matriz no finita para poder relacionarla con los estados cuánticos. De todas formas, probaremos que esta matriz no finita es, para fines de teoría de la prueba, equivalente a una matriz finita. Este resultado se logrará usando la idea de *rexpansión* definida en la sección de Nmatrices.
Decimos que una valuación parcial en P es una valuación (completa o total), si su dominio es $Frm_{\mathcal{L}}$. Una valuación parcial en P satisface una fórmula ψ ($v \models \psi$), si $v(\psi) \in D$. Sea P sea una matriz. Decimos que $\Gamma \vdash_P \Delta$ si siempre que una valuación en P satisface todas las fórmulas de Γ, también satisface al menos una de las fórmulas de Δ. Para una familia de matrices F, decimos que $\Gamma \vdash_F \Delta$, en caso de que $\Gamma \vdash_P \Delta$ para cada P en F.
Decimos que una lógica L es *correcta* para una matriz P, si $\vdash_L \subseteq \vdash_P$. Decimos que L *completa* para una matriz P, si $\vdash_P \subseteq \vdash_L$. P es una *matriz característica* para una lógica L, si $\vdash_L = \vdash_P$. El siguiente teorema es bien conocido dentro de la Teoría de la Prueba:

Teorema 3.3.1. Para cada matriz P para L, $\vdash_P$ es una lógica proposicional estructural uniforme. Lo opuesto a este teorema también se cumple:

Teorema 3.3.2. Cada lógica estructural uniforme (de Tarski) tiene una matriz característica.
Aunque cada lógica estructural uniforme de Tarski tenga una matriz característica, a menudo ocurre que esta matriz es infinita y es difícil de encontrar y usar. Más adelante veremos que las Nmatrices características finitas existen para muchas lógicas que tienen sólo matrices características infinitas.

Teorema 3.3.3. (Compacidad) Si P es una matriz finita, entonces $\vdash_P$ es finita.

Proposición 3.3.1. (Analiticidad) Cualquier valuación parcial en una matriz P para $\mathcal{L}$, que se define en un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas cerradas bajo subfórmulas, puede extenderse a una valuación completa en P.

> En este punto, se debe enfatizar nuevamente la importancia de la analiticidad. Debido a esta propiedad, $\vdash_S$ es decidible siempre que S sea una matriz finita. Por otra parte, garantiza la semidecidibilidad del conjunto de *no-teoremas* incluso si una matriz P es infinita, siempre que P sea efectiva (es decir, en caso de que el conjunto de valores de verdad sea numerable, las funciones de interpretación de las conectivas sean computables y el conjunto de valores de verdad designados, decidible).

Una de las principales deficiencias de la semántica basada en matrices es su falta de modularidad con respecto a los sistemas de prueba. Para usar este tipo de semántica, las reglas y axiomas de un sistema que están relacionados con un determinado conectivo debe considerarse como un todo, y no hay un método para determinar por separado los efectos semánticos de cada regla por sí solo. Tomemos, por ejemplo, las reglas estándar de negación de Gentzen:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta}\ (\neg, \Rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Rightarrow \Delta, \neg\psi}\ (\Rightarrow, \neg)$$

La tabla de verdad correspondiente es la clásica, que ya hemos escrito anteriormente:

	$\neg$
t	f
f	t

Sin embargo, si se descarta una de las reglas de la negación, el sistema resultante no tiene ninguna matriz característica finita. Se sigue que en el marco de las matrices (ordinarias) los efectos semánticos de cada una de las dos reglas de negación anteriores no puede analizarse por separado. En breve veremos que, en contraste, la semántica de matrices no deterministas permite un alto grado de modularidad: en muchos casos, el efecto de cada una de las reglas sintácticas o axiomas por separado pueden determinarse fácilmente, y la semántica de un sistema de prueba se puede construir combinando directamente la semántica de sus diversas reglas y axiomas.

3.3.2 Introduciendo las Nmatrices

Definición 3.3.2. Una matriz no determinista (Nmatriz) para $\mathcal{L}$ es una tupla $M = \langle V, D, O \rangle$, donde:

- V es un conjunto no vacío de valores de verdad.
- $D \in \mathcal{P}(V)$ (conjunto de valores designados) es un subconjunto propio no vacío de V.
- Para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de $\mathcal{L}$, O contiene una función correspondiente

$$\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$$

Definición 3.3.3. 1. Una valuación dinámica parcial en M (o una valuación dinámica M-legal) es una función v sobre algún subconjunto $\mathcal{W} \subseteq Frm_L$ en V, que es cerrado bajo subfórmulas, tal que para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de $\mathcal{L}$, se cumple lo siguiente para toda $\psi_1, ..., \psi_n \in \mathcal{W}$:

$$v(\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)) \in \widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), ..., v(\psi_n))$$

Una valuación parcial en M es llamada valuación (o valuación total) si el dominio es Frm_L.

2. Una valuación parcial estática en M (o una valuación parcial estática M-legal), es una valuación dinámica definida en algún subconjunto $\mathcal{W} \subseteq Frm_{\mathcal{L}}$, que satisface además el siguiente principio de composicionalidad (o funcionalidad): para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de $\mathcal{L}$ y para todo $\psi_1, ..., \psi_n, \varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathcal{W}$, si $v(\psi_i) = v(\varphi_i)$ $(i = 1, ..., n)$, entonces

$$v(\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)) = v(\diamondsuit(\varphi_1, ..., \varphi_n))$$

Las matrices ordinarias (deterministas) corresponden al caso en el que cada $\widetilde{\diamondsuit}$ es una función que sólo toma valores en conjuntos de un sólo elemento (singuletes). Entonces, dicho conectivo puede tratarse como una función $\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to V$. En este caso, no hay diferencia entre las valoraciones estáticas y dinámicas, y tenemos un determinismo total.
Como en la semántica multivaluada usual, el principio aquí es que cada fórmula tiene un valor lógico definido. Es por eso que excluimos $\emptyset$ de ser un valor de $\widetilde{\diamondsuit}$. Sin embargo, la ausencia de cualquier valor lógico para una fórmula todavía se puede simular en este formalismo al introducir un valor

lógico especial $\perp$ que representa exactamente este caso (que es un procedimiento bien conocido en el marco de lógicas parciales [23]). Para entender la diferencia entre matrices ordinarias y Nmatrices, recordemos que en el caso determinista, el valor de verdad asignado por una valuación v a una fórmula compleja se define de la siguiente manera: $v(\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)) = \widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), ..., v(\psi_n))$. Por lo tanto, el valor de verdad asignado a $\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)$ está determinado únicamente por los valores de verdad de sus subfórmulas: $v(\psi_1), ..., v(\psi_n)$. Esto, sin embargo, no es el caso para valuaciones dinámicas en Nmatrices: en general, los valores de verdad asignados a $\psi_1, ..., \psi_n$, no determinan de manera única el valor de verdad asignado a $\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)$, porque v hace una elección no determinista del conjunto de opciones $\widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), ..., v(\psi_n))$. Por lo tanto, la semántica no determinista es no veritativo funcional, en oposición a la determinista.

Definición 3.3.4. 1. Una valuación (parcial) v en M satisface una fórmula ψ ($v \models \psi$) si ($v(\psi)$ está definida y) $v(\psi) \in D$. v es un modelo de Γ ($v \models \Gamma$) si satisface cada fórmula de Γ.

2. Decimos que ψ es dinámicamente (estáticamente) válida en M, en símbolos $\models_{M^d} \psi$ ($\models_{M^e} \psi$), si $v \models \psi$ para cada valuación dinámica (estática) v en M.

3. Una Lógica L satisface dinámicamente (estáticamente) corrección débil para una Nmatriz M, si $\vdash_L \psi$ implica $\models^d_M \psi$ ($\models^e_M \psi$). Una lógica L satisface dinámicamente (estáticamente) completitud débil para una Nmatriz M si $\models^d_M \psi$ ($\models^e_M \psi$) implica $\vdash_L \psi$.

4. $\vdash^d_M$ ($\vdash^e_M$), la relación de consecuencia dinámica (estática) inducida por M se define de la siguiente manera: $\Gamma \vdash^d_M \Delta$ ($\Gamma \vdash^e_M \Delta$) si cada valuación dinámica (estática) que satisface todas las fórmulas de Γ, satisface alguna fórmula de Δ.

Es importante remarcar que la relación de consecuencia estática incluye la dinámica, es decir: $\vdash_{M^d} \subseteq \vdash_{M^e}$. Además, para las matrices ordinarias, se tiene que $\vdash_{M^d} = \vdash_{M^e}$.
En lo que sigue, usamos la notación $\mathcal{F} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{D}$

Ejemplo. Supongamos que $\mathcal{L}$ tiene conectivas binarias $\vee$, $\wedge$ y $\supset$ interpretadas clásicamente, y una conectiva unaria $\neg$ para la cual se obtiene la ley de no contradicción, pero no necesariamente la ley del tercero excluido. Esto nos da la Nmatriz $M = \langle V, D, O \rangle$ para $\mathcal{L}$, donde $V = \{f, t\}$, $D = \{t\}$, y O viene dado por:

		$\widetilde{\vee}$	$\widetilde{\wedge}$	$\widetilde{\supset}$
t	t	$\{t\}$	$\{t\}$	$\{t\}$
t	f	$\{t\}$	$\{f\}$	$\{f\}$
f	t	$\{t\}$	$\{f\}$	$\{t\}$
f	f	$\{f\}$	$\{f\}$	$\{t\}$

	$\widetilde{\neg}$
t	$\{f\}$
f	$\{t, f\}$

La negación clásica ($\neg_c$) se puede definir en esta sistema dado por M por: $\neg_c\psi = \psi \supset \neg\psi$

Teorema 3.3.4. Sea M una Nmatriz de dos valores que tiene al menos una operación propia no determinista. Entonces no hay una familia finita de matrices ordinarias finitas F, tal que $\vdash_{M^d}=\vdash_F$. Si además M incluye la implicación clásica, entonces no hay una familia finita de matrices ordinarias F, tal que $\vdash_{M^d} \psi$ si y sólo si $\vdash_F \psi$.

Teorema 3.3.5. Para cada Nmatriz M (finita) hay una familia (finita) de matrices ordinarias F, tales que $\vdash_{M^e}=\vdash_F$.

Por lo tanto, sólo el poder expresivo de la semántica dinámica basada en Nmatrices es más fuerte que el de las matrices ordinarias. En consecuencia, en la mayoría de los casos escribiremos simplemente $\vdash_M$, en vez de $\vdash_{M^d}$. Para el caso cuántico, trabajaremos con las matrices dinámicas.
El siguiente teorema (Avron y Lev [11]), aunque no sea indispensable para el tratamiento que presentaremos en la cuántica, es de importancia en sí mismo. Lo presentamos también porque es una generalización del Teorema de Compacidad al caso de Nmatrices:

Teorema 3.3.6. $\vdash_M$ es finitaria para cualquier Nmatriz M finita.

Proposición 3.3.2. (Analiticidad) Sea $M = \langle V, D, O\rangle$ una Nmatriz para $\mathcal{L}$, y sea v' una valuación parcial en M. Entonces v' puede extenderse a una valuación (completa o total) en M.

3.3.3 Expansiones, refinamientos y rexpansiones

Las definiciones siguientes son tomadas de [14].

Definición 3.3.5. Sean $M_1 = \langle V_1, D_1, O_1\rangle$ y $M_2 = \langle V_2, D_2, O_2\rangle$ Nmatrices para $\mathcal{L}$.

1. M_1 es un refinamiento de M_2 si $V_1 \subseteq V_2$, $D_1 = D_2 \cap V_1$, y $\widetilde{\Diamond}_{M_1}(\overline{x}) \subseteq \widetilde{\Diamond}_{M_2}(\overline{x})$ para cada conectivo n-ario $\Diamond$ de $\mathcal{L}$ y para toda tupla $\overline{x} \in V_1^n$.

2. Sea F una función que asigna a cada $x \in V$ un conjunto no vacío $F(x)$, tal que $F(x_1) \cap F(x_2) = \emptyset$ si $x_1 \neq x_2$. La F-expansión de M_1 es una Nmatriz $M_1^F = \langle V_F, D_F, O_F\rangle$, donde $V_F = \bigcup_{x\in V} F(x)$, $D_F = \bigcup_{x\in D} F(x)$, y si $\Diamond$ es un conectivo n-ario de $\mathcal{L}$, entonces $\widetilde{\Diamond}_{M_1^F}(y_1, ..., y_n) = \bigcup_{z\in\widetilde{\Diamond}_{M_1}(x_1,...,x_n)} F(z)$, con $x_i \in V$ e $y_i \in F(x_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Decimos que M_2 es una expansión de M_1, si M_2 es una F-expansión de M_1 para alguna F.

Expandir una Nmatriz M no cambia la lógica original (inducida por M), en el sentido de que el conjunto de teoremas se conserva. Por otro lado, es posible que un refinamiento de M sí la cambie.

Proposición 3.3.3. 1. Si M_1 es una expansión de M_2, entonces $\vdash_{M_1}=\vdash_{M_2}$.

2. Si M_1 es un refinamiento de M_2, entonces $\vdash_{M_2}\subseteq\vdash_{M_1}$

Definición 3.3.6. Sea $M = \langle V, D, O\rangle$ una Nmatriz para un lenguaje que incluya el fragmento positivo de la lógica clásica be (LK^+). Decimos que M es *adecuada* para este lenguaje si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\widetilde{\wedge}$:

$$\text{Si} \quad a \in D \text{ y } \quad b \in D, \text{ entonces } \quad a \widetilde{\wedge} b \subseteq D$$
$$\text{Si} \quad a \notin D, \quad \text{entonces} \quad a \widetilde{\wedge} b \subseteq V \setminus D$$
$$\text{Si} \quad b \notin D, \quad \text{entonces} \quad a \widetilde{\wedge} b \subseteq V \setminus D$$

2. $\widetilde{\vee}$:

$$\text{Si} \quad a \in D, \quad \text{entonces} \quad a \widetilde{\vee} b \subseteq D$$
$$\text{Si} \quad b \in D, \quad \text{entonces} \quad a \widetilde{\vee} b \subseteq D$$
$$\text{Si} \quad a \notin D \quad \text{y} \quad b \notin D, \quad \text{entonces} \quad a \widetilde{\vee} b \subseteq V \setminus D$$

3. $\widetilde{\supset}$:

$$\text{Si} \quad a \notin D, \quad \text{entonces} \quad a \widetilde{\supset} b \subseteq D$$
$$\text{Si} \quad b \in D, \quad \text{entonces} \quad a \widetilde{\supset} b \subseteq D$$
$$\text{Si} \quad a \in D \quad \text{y} \quad b \notin D, \quad \text{entonces} \quad a \widetilde{\supset} b \subseteq V \setminus D$$

Las definiciones anteriores sarán necesarias para entender cómo la Nmatriz para la cuántica puede compararse con las matrices correspondientes a otros sistemas conocidos. Ya mencionamos que la Nmatriz cuántica no nserá finita. Los conceptos de refinamiento y expansión serán necesarios para encontrar matrices que sean equivalentes lógicamente a la matriz cuántica, es decir, que compartan el conjunto de inferencias válidas.

> Es necesario observar lo siguiente: el concepto de adecuación presentado aplica a lenguajes que contengan todos los teoremas del fragmento positivo de la Lógica Clásica. Como el retículo de proyectores no cumple la propiedad clásica de distributividad, entonces no tendrá todo el fragmento positivo nombrado. Nuestra Nmatriz para tal retículo no será adecuada en este sentido. Puede probarse (aunque acá no lo hagamos) que el retículo cuántico de proyectores, no sólo no admite homomorfismos a dos valores, sino que tampoco admite Nmatrices que sean adecuadas para más de un conectivo. Existen pruebas estrictamente formales de que la falta de distributividad implica que no pueda haber en el sistema más de un conectivo veritativo funcional [89]. La prueba dada en [89] es sólo para dos valores de verdad, pero los razonamientos mostrados pueden generalizarse a más valores, mientras se mantenga la adecuación de los conectivos.[1]

Presentaremos, por último, la noción de *rexpansión* de una Nmatriz. Esta será utilizada en el próximo capítulo para presentar una posible Nmatriz finita equivalente a la cuántica. Veremos que tal *rexpansión* se puede hacer de infinitas maneras, nosotros presentaremos una bivaluada y otra trivaluada. El objetivo será poder comparar estas Nmatrices con otras correspondientes a sistemas lógicos ya conocidos para poder extraer algunas conclusiones.
Para ver las pruebas correspondientes a las proposiciones expuestas arriba, ver [15].
Decimos $\mathcal{M}_2$ es un *refinamiento simple* de $\mathcal{M}_1$ si es un refinamiento y satisface que $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$. Para cada función de expansión F y $y \in \bigcup Im(F)$, denotamos por $\widetilde{F}[y]$ al único elemento $x \in dom(F)$, tal que $y \in F(x)$.

[1]Nota agregada luego de la presentación de la tesis: puede verse una prueba de esto en [45, 47]

Definición 3.3.7. Sean $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{V}_1, \mathcal{D}_1, \mathcal{O}_1 \rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{V}_2, \mathcal{D}_2, \mathcal{O}_2 \rangle$ Nmatrices, y F una función de expansión para $\mathcal{M}_1$. Decimos que $\mathcal{M}_2$ es una *F-rexpansión* de $\mathcal{M}_1$, si es el refinamiento de una F-expansión de $\mathcal{M}_1$. Esta será llamada:

1. *simple* si es un refinamiento simple de una F-expansión de $\mathcal{M}_1$.
2. *conservadora* en caso de que $F(x) \cap \mathcal{V}_2 \neq \emptyset$ para todo $x \in \mathcal{V}_1$.
3. *fuertemente conservadora* si es conservadora, y para todo $x_1, ..., x_n \in \mathcal{V}_2, \diamond \in \Diamond^n_{\mathcal{L}}$, y $y \in \widetilde{\diamond}_1(\widetilde{F}[x_1], ..., \widetilde{F}[x_n])$, se tiene que el conjunto $F(y) \cap \widetilde{\diamond}_2(x_1, ..., x_n)$ es no vacío.

En términos generales, ser una rexpansión conservadora equivale a mantener al menos una "copia" de cada valor de verdad original. Ser fuertemente conservadora significa que esta propiedad no es sólo para el conjunto de valores de verdad, sino también para la interpretación de los conectivos.

Proposición 3.3.4. Toda rexpansión simple es conservadora, toda expansión es una rexpansión fuertemente conservadora, y toda rexpansión conservadora de una matriz (clásica) es fuertemente conservadora.

Proposición 3.3.5. $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{V}_2, \mathcal{D}_2, \mathcal{O}_2 \rangle$ es una rexpansión de $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{V}_1, \mathcal{D}_1, \mathcal{O}_1 \rangle$ si y sólo si existe una función $f : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_1$, tal que:

1. Para todo $x \in \mathcal{V}_2$, $x \in \mathcal{D}_2$ si y sólo si $f(x) \in \mathcal{D}_1$.
2. Para todo $x_1, ..., x_n \in \mathcal{V}_2$ e $y \in \widetilde{\diamond}_2(x_1, ..., x_n)$, se tiene que $f(y) \in \widetilde{\diamond}_1(f(x_1), ..., f(x_n))$.

Proposición 3.3.6. Si $\mathcal{M}_2$ es una rexpansión de $\mathcal{M}_1$, entonces $\vdash_{\mathcal{M}_1} \subseteq \vdash_{\mathcal{M}_2}$. Además, Si $\mathcal{M}_2$ es fuertemente conservadora, entonces $\vdash_{\mathcal{M}_1} = \vdash_{\mathcal{M}_2}$.

Capítulo 4

El Teorema de Bell-Kochen-Specker, los estados cuánticos y las N-Matrices

En este capítulo mostramos que las Nmatrices pueden ser un sistema adecuado para la semántica del retículo de proyectores de la mecánica cuántica. Discutimos la validez del principio de funcionalidad de la verdad en el caso cuántico, y mostramos que las Nmatrices propuestas deben ser estrictamente dinámicas (en el caso general). Este tratamiento nos permite caracterizar a los estados cuánticos de un sistema como valuaciones de una Nmatriz. Proponemos algunas matrices no deterministas para dar la semántica del retículo cuántico, y mostramos otras construcciones alternativas. En la última sección mostramos la aplicación de las Nmatrices al sistema lógico propuesto por Tzouvaras (LPS) [111, 112] para la mecánica cuántica. Terminamos el capítulo estableciendo una pequeña relación entre las Nmatrices y la teoría de Quasets [39].

4.1 El teorema de Kochen-Specker y la falla de la funcionalidad de la verdad en la mecánica cuántica

El teorema de Kochen-Specker es una de las piedras angulares de los fundamentos de la mecánica-cuántica [84]. Kochen y Specker estudiaron la posibilidad de dar una descripción de la mecánica de cuántica en términos de variables ocultas, tomando como modelo la relación entre la mecánica estadística y la termodinámica clásicas. Pero resulta que esta teoría de variables ocultas no puede existir (al menos bajo unos supuestos), y esto es equivalente, como discutimos en 1.7.3, a la siguiente afirmación: no existe una función $v : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \{0, 1\}$, con la propiedad de que $\sum_i v(\hat{P}_i) = 1$ para toda familia ortogonal $\{\hat{P}_i\}$ de elementos unidimensionales de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ que cumpla $\sum_i \hat{P}_i = \mathbf{1}$.

Vimos también en el capítulo 2 las definiciones de valuaciones clásicas utilizando los conceptos de homomorfismos de álgebras. En función de los intereses de este capítulo y utilizando la actual terminología podríamos reescribir la definición de función clásica de verdad:

Definición 4.1.1. Una función $v : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \{0, 1\}$ con la propiedad de que $\sum_i v(\hat{P}_i) = 1$ para toda familia ortogonal $\{\hat{P}_i\}$ de elementos unidimensionales de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ que satisfaga

$\sum_i \hat{P}_i = \mathbf{1}$, esto es, que descompongan la identidad, es llamada función de verdad clásica o función veritativo funcional clásica.

Nos enfocamos ahora en entender cómo la noción de funcionalidad de la verdad (veritativo funcionalidad), puede estudiarse en el formalismo cuántico. Identificaremos el lenguaje cuántico con la estructura reticular $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \langle \mathbb{P}(\mathcal{H}), \vee, \wedge, \neg \rangle$. Es claro que podemos formar, recursivamente, nuevas proposiciones a partir de cualquier conjunto dado de proposiciones de la manera habitual (es decir, considerar todas las expresiones finitas posibles, tales como $(P \vee Q) \wedge R$, $(\neg P \wedge Q)$, y así sucesivamente). Si queremos recrear la noción de valuación clásica en la teoría cuántica, debería existir una función $v : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \{0, 1\}$, que le asigne valores de verdad a todas las proposiciones elementales posibles. De esta manera, todas las propiedades del sistema cuántico deberían ser verdaderas o falsas, y no debería haber otra posibilidad. Pero desde el punto de vista físico, es necesario imponer otras condiciones. Un requisito elemental para cualquier valuación, debería ser que si una proposición $\hat{P}$ es verdadera ($v(\hat{P}) = 1$), entonces cualquier otra proposición $\hat{Q}$ que satisfaga que $\hat{Q} \leq \hat{P}^{\perp}$ sea necesariamente falsa ($v(\hat{Q}) = 0$). Esto se deriva directamente de la definición de estado cuántico: si $\hat{P}$ es verdadero, su probabilidad de ocurrencia es igual a uno, y la probabilidad de ocurrencia de cualquier propiedad ortogonal será automáticamente cero (esto se deriva directamente de las ecuaciones (1.7)); una conclusión similar se mantiene en modelos generalizados mediante el uso de ecs.(1.6). Pero si no imponemos otras restricciones, se puede tener la valuación $v(\hat{P}) = 0$ para todo $\hat{P}$, lo que no tiene sentido, ya que implicaría que todos los resultados tendrán cero probabilidad de ocurrencia en cualquier experimento. ¿Qué restricciones debemos imponer? Necesitamos definir un conjunto de condiciones para descartar las valuaciones no físicas, valuaciones que no tengan sentido desde el punto de vista de la física cuántica.
Si además queremos que se cumpla la funcionalidad de la verdad, nuestras valuaciones clásicas deberían cumplir con el requisito de se homomorfismos entre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y el álgebra booleana de dos valores $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ (definida en 2.4.2). Entonces, para cada $\hat{P}$ y para cada familia $\{\hat{P}_i\}_{i=1}^{n}$, *en analogía con el principio de funcionalidad de verdad dado por definición. 2.1.4*, deberíamos tener :

$$v(\vee_i \hat{P}_i) = \tilde{\vee}_i v(\hat{P}_i) \tag{4.1}$$

$$v(\wedge_i \hat{P}_i) = \tilde{\wedge}_i v(\hat{P}_i) \tag{4.2}$$

$$v(\neg \hat{P}) = \tilde{\neg} v(\hat{P}) = 1 - v(\hat{P}) \tag{4.3}$$

Llamaremos valuaciones admisibles clásicas (y lo denotamos por VAC) al conjunto de funciones bivaluadas que satisfagan las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3. Tenga en cuenta que, si se supone que el conjunto de valuaciones admisibles es VAC, la funcionalidad de verdad se satisface automáticamente.
Pero la última condición, en particular, implica que para un conjunto ortonormal y completo de proyectores $\{\hat{P}_i\}$ ($\sum_i \hat{P}_i = \mathbf{1}$, $\hat{P}_i \hat{P}_j = \mathbf{0}$ y $\dim(\hat{P}_i) = 1$), si $v(\hat{P}_{i_0}) = 1$ para algún i_0, entonces $v(\hat{P}_j) = 0$, para todo $j \neq i_0$ (esto se sigue del hecho que para $j \neq i_0$, $\hat{P}_j \leq \mathbf{1} - \hat{P}_{i_0}$). Por otro lado, dado que $\sum_i \hat{P}_i = \mathbf{1}$, debemos tener $v(\hat{P}_{i_0}) = 1$ para algún i_0 (esto se sigue de $v(\mathbf{1}) = 1$ y la ecuación (4.1)). De esta forma, cualquier valuación clásica, debe satisfacer la condición 4.1.1. Esto representa una propiedad física muy razonable. Implica que, si se realiza un experimento en el sistema (recuerde que

cualquier conjunto de proyectos unidimensionales ortonormales y completos definen un experimento), obtenemos que a uno, y sólo a un operador de proyección, se le asigna el valor 1, mientras que a todos los demás proyectores, que representan otros resultados (definen eventos excluyentes), se les asigna el valor 0. Observe que esta es la condición de KS. Es importante remarcar que, un experimento en el que todas las proposiciones tienen asignado el valor falso, o un experimento en el que se le asigna el valor verdadero a más de una alternativa exclusiva, carecen de sentido. En el último caso, obtendríamos que dos alternativas mutuamente excluyentes ocurrirían con total certeza. En el primero, llegaríamos a una situación en la que todos los resultados de un experimento son falsos. Desde la perspectiva de una ontología clásica, estas alternativas deben descartarse. Hemos visto anteriormente que cualquier valuación admisible en VAC debería satisfacer la definición 4.1.1. Pero la existencia de tales funciones está *estrictamente prohibida por el teorema de KS*. Se deduce que las funciones de dos valores que satisfacen tanto los requisitos físicamente razonables como la funcionalidad de verdad no pueden existir en el dominio cuántico. Se sigue que la definición canónica de la funcionalidad clásica de la verdad no es válida en el dominio cuántico. Esto será naturalmente cierto para modelos probabilísticos arbitrarios, siempre que sus estructuras proposicionales satisfagan el teorema de KS (y esto es cierto para una gran familia de modelos [40, 107, 109]). La discusión anterior está relacionada con un hecho bien conocido: se pueden definir valuaciones *clásicas* locales para subálgebras booleanas máximas de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, pero el teorema de Kochen-Specker prohíbe la existencia de una global (ver secciones II y III de [84]; para más discusión en el tema, ver [48, 50, 79]).
¿Qué pasa si imponemos las condiciones más débiles? Quizás, si renunciáramos a algunas consideraciones físicas y nos centráramos sólo en las matemáticas puras, podríamos encontrar un conjunto de funciones admisibles con respecto a las cuales los conectivos se comporten veritativo funcionalmente. En [56], Friedman y Glymour estudian cuáles son las condiciones más razonables para imponerse al conjunto de valuaciones admisibles. Después de descartar las posibilidades no físicas, terminan con las condiciones:

$v : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \{0, 1\}$ es una valuación admisible si y sólo si:

- para todo $\hat{P}$, $v(\hat{P}) = 1$ sii $v(\neg\hat{P}) = 0$,
- para todo par $\hat{P}, \hat{Q} \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$, si $v(\hat{P}) = 1$ y $\hat{P} \leq \hat{Q}$, entonces $v(\hat{Q}) = 1$.

Llamemos *S3* al conjunto de valuaciones que satisfacen las condiciones definidas anteriormente. Observe primero que las condiciones que definen VAC (es decir, las ecuaciones 4.1, 4.2 y 4.3), implican a aquellas que definen *S3*, y por lo tanto, son más fuertes. Para estudiar si *S3* es un conjunto no vacío o no, Friedman y Glymour hacen más distinciones. Primero, consideran las valuaciones admisibles normales, que son aquellas que satisfacen *S3*, más la condición de que asignen el valor de verdad 1 a al menos un subespacio unidimensional. Una vez más, una valuación que no satisfaga este requisito mínimo, no puede pertenecer al ámbito de una ontología clásica. Denotemos por *NS3* el conjunto de valuaciones normales. Claramente, *NS3* $\subseteq$ *S3*. Friedman y Glymour muestran, por construcción, que *NS3* no está vacío. Pero luego, discuten si es posible que las valuaciones en *S3* satisfagan el requisito físico mínimo del realismo de que cada observable tenga un valor preciso. Para que esto suceda, debe darse el caso de que para cada base ortogonal, exactamente un vector reciba el valor Verdadero y el resto reciba el valor Falso. Llamemos a *RS3* al conjunto de funciones normales admisibles que satisfacen este requisito físico.

Puede verse que *RS3* $\subseteq$ *NS3* $\subseteq$ *S3*.

Nuevamente, Friedman y Glymour comentan que *RS3* es un conjunto vacío, debido al teorema de KS. ¿Que queda? Sólo nos quedan las funciones en *NS3*, que satisfacen la condición indeseable de que algunos observables no tienen un operador de proyección verdadero (y solamente uno). Todo el programa de tener una valuación clásica razonable que satisfaga condiciones físicas razonables se pierde (debido al teorema de KS). Pero aún así, si nos restringimos a las entidades puramente matemáticas en *NS3*, G. Hellman demostró en [68] que los conectivos lógicos cuánticos no se comportan de forma veritativo funcional. Más precisamente, Hellman demostró que, bajo supuestos muy generales acerca la relación de consecuencia lógica, el retículo cuántico puede admitir a lo sumo un conectivo veritativo funcional con respecto a este conjunto admisible de valuaciones. Una de las conclusiones admitidas del trabajo de Hellman es que su teorema pertenece a la matemática pura, sin conexión con la mecánica cuántica. Todos los caminos llevan a la misma conclusión: no es posible definir valuaciones funcionales de verdad clásicas que satisfagan requisitos físicos razonables (en el sentido de VAC y *RS3*), dado que el teorema de KS bloquea su existencia. Y si uno renuncia a los requisitos físicos mínimos de una ontología clásica (usando, por ejemplo, *NS3*), estas valuaciones tampoco serán funcionales. Hay que hacer algunas observaciones importantes. La discusión anterior está relacionada con un hecho bien conocido: es posible definir valuaciones clásicas locales para subálgebras booleanas máximas de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, pero el teorema de Kochen-Specker prohíbe la existencia de las globales (para más discusión sobre el tema, ver [48, 50, 79]). Otro hecho relacionado es el de la inexistencia de estados cuyo rango es igual al conjunto $\{0, 1\}$ (también conocido como estados libres de dispersión). Hay varias pruebas de la inexistencia de estados libres de dispersión, y los teoremas de KS y Gleason pueden considerarse entre ellos. Pero, hasta donde sabemos, el más antiguo se debe a J. von Neumann [113], y es muy importante mencionar aquí los trabajos de J. Bell sobre el tema [18, 19]. Todos estos trabajos implican diferentes supuestos y técnicas matemáticas. En este trabajo nos hemos centrado en los trabajos de Kochen y Specker porque su enfoque es el que mejor se ajusta a las estructuras algebraicas que utilizamos para construir las Nmatrices para modelos probabilísticos cuánticos y generalizados.
Si uno mira con atención la Proposición 1.7.3, se puede reconocer que una forma muy particular del principio de la funcionalidad de la verdad falla en el formalismo cuántico. A saber, que no hay una asignación de valor de verdad clásica v que satisfaga la condición de funcionalidad dada en la definición 4.1.1 (o, equivalentemente, las condiciones 4.1, 4.2, 4.3). En efecto, en el artículo de Kochen-Specker [84] (ver también [79]), se prueba que esta condición es debida al fracaso de una propiedad más general. Para ilustrar la idea, supongamos que el observable representado por el operador autoadjunto A tiene asociado el valor real a. Entonces, el observable representado por A^2, debe tener asignado el valor a^2. En este sentido, los observables no son todos independientes, y tampoco los valores asignados a ellos. Esto nos da una pista para entender por qué la funcionalidad de verdad no es válida en el dominio cuántico. Siguiendo el espíritu del artículo de KS, definamos:

Definición 4.1.2. Sea $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$. La función $f : \mathcal{A}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface *funcionalidad de la verdad* si, para cualquier función de Borel g, si $g(A)$ es el resultado de aplicar la función g a A en el sentido usual, y f_X es el resultado de aplicar f a un operador autoadjunto arbitrario X, entonces, se cumple la condición $f_{g(A)} = g(f_A)$.

Pero la condición anterior falla en la mecánica cuántica debido al teorema de Kochen-Specker (ver sección I en [84] y [40, 79]). Por lo tanto, vemos que el fracaso de la versión *sui generis* de la funcionalidad de la verdad descrita anteriormente es una de las características clave de la mecánica cuántica. Y esto es cierto para modelos probabilísticos más generales, siempre que no admitan valuaciones globales en $\mathbf{B}_2$. En las siguientes secciones, estudiamos la no validez de la funcionalidad de la verdad en mecánica cuántica, e introducimos en el formalismo cuántico una de las soluciones encontrada por los lógicos para afrontar este mismo problema en sistemas formales: conectaremos la semántica del enfoque de Nmatrices en lógica con los estados cuánticos.

4.2 N-matrices para el formalismo cuántico

Como vimos en el capítulo 1 (1.7.3), el teorema de Kochen-Specker puede enunciarse diciendo que no existe un homomorfismo entre el retículo de proyectores cuánticos y el álgebra de Boole de dos elementos ($\mathbf{B}_2$). Teniendo en cuenta que las valuaciones de una semántica basada en matrices no deterministas no son, en general, veritativo funcionales, tal formalismo podría proporcionar una forma interesante de describir o interpretar el conjunto de estados cuánticos, como también estudiar otros aspectos del formalismo cuántico, tales como el teorema de Kochen-Specker y su relación con la contextualidad. Así, dado que los estados cuánticos no pueden ser interpretados en términos de valuaciones clásicas (deterministas), en esta sección nos proponemos describirlas como valuaciones de una semántica no determinista. Damos ejemplos de distintas formas de asociar matrices no deterministas a un sistema cuántico. Además, mostramos que los estados cuánticos puede ser caracterizados como valuaciones asociadas a una forma muy particular de *tablas de verdad no deterministas*.

> En 1951 se propusieron dos lógicas “no estandar” para la mecánica cuántica. La primera, llamada *Lógica de la complementariedad* es un sistema de tres valores cuyo tercer valor “falsedad absoluta” se toma para proposiciones que afirman que han sido descubiertos valores simultáneos para posición y momento (o cualquier par de observables complementarios). Este sistema es veritativo funcional. La segunda, se llama *Lógica de la subjetividad* y es un sistema no veritativo funcional que difiere del de Birkhoff y von Neumann. Puede recurrirse a este sistema si uno rechaza un punto de vista “objetivista” de la cuántica, es decir, si uno rehusa suponer que en un caso en el que es teóricamente imposible medir un cierto valor excepto dentro de ciertos limites de precisión, la entidad en cuestión tiene tiene realmente un valor particular dentro de esos limites aunque uno esté incapacitado para encontrar qué valor es. Comentamos esto porque en la sección (4.2.3) buscaremos una Nmatriz que se adapte al caso en el cual no puede determinarse con certeza absoluta si una proposición cuántica es verdadera.

4.2.1 Construcción de una N-matriz para el formalismo cuántico

En esta sección construiremos una posible Nmatriz para el formalismo cuántico. Usaremos el retículo de proposiciones cuánticas $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y las restricciones físicas impuestas por las propiedades de los estados cuánticos. Mostraremos que las restricciones que nuestra Nmatriz impone sobre las valuaciones son exactamente las mismas que el teorema de

Gleason impone sobre las medidas de probabilidad. Con esto quedará en evidencia que las valuaciones definidas por nuestra Nmatriz son exactamente los estados cuánticos.

Sea $V = [0,1]$ y $D = \{1\}$. Una proposición será verdadera si y sólo si su valuación da el valor 1, y será falsa para cualquier otro valor (esto está conectado a la noción de verdad en la lógica cuántica estándar; ver [94]). Para construir las matrices, tenemos en cuenta que para cada estado μ, cuando $\hat{P} \perp \hat{Q}$, tenemos $\mu(\hat{P} \vee \hat{Q}) = \mu(\hat{P}) + \mu(\hat{Q})$. Comencemos estudiando el conjunto de interpretación para la disyunción $\tilde{\vee} : V \times V \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$.
Por el resto del capítulo prescindiremos del acento circunflejo ($\hat{}$) sobre los proyectores. Esto no generará confusión, ya que las valuaciones están definidas solamente sobre el lenguaje de tales operadores y los estaremos considerando como representantes de las proposiciones lógicas del sistema . Usando las ecuaciones (1.7), es fácil ver que:

$$max(\mu(P), \mu(Q)) \leq \mu(P \vee Q) \leq 1$$

En función de las valuaciones (denotadas por v), esto puede escribirse como

$$max(v(P), v(Q)) \leq v(P \vee Q) \leq 1$$

De esta manera, el candidato natural para la tabla de verdad no determinista de la disyunción viene dado por:

	P	Q	$\tilde{\vee}$
si $P \perp Q$	a	b	$\{a+b\}$
si $P \not\perp Q$	a	b	$[max(a,b); 1]$

(4.4)

Hagamos ahora lo mismo con la conjunción $\tilde{\wedge} : V \times V \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$. Utilizando nuevamente 1.7, se sigue que

$$\mu(P \wedge Q) \leq \min(\mu(P), \mu(Q))$$

Así, si la valuación $v(\cdots)$ asigna $v(P) = a$ y $v(Q) = b$ ($a, b \in V$), proponemos la siguiente matriz no determinista:

	P	Q	$\tilde{\wedge}$
si $P \perp Q$	a	b	$\{0\}$
si $P \not\perp Q$	a	b	$[0, min(a,b)]$

(4.5)

Para la negación $\tilde{\neg} : V \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$, el candidato más natural compatible con el propiedades de los estados cuánticos viene dado por:

$$\tilde{\neg}_{(a)} = \{1 - a\}.$$

Entonces, proponemos:

P	$\tilde{\neg}$
a	$\{1-a\}$

(4.6)

Ésta es una negación determinista, en el sentido de que su conjunto de interpretación es un conjunto con un sólo elemento (un singulete), lo cual la hace equivalente a una función de a. Más adelante veremos otras posibilidades para la negación.
Las tres tablas anteriores imponen las restricciones para todas las posibles valuaciones: toda valuación definida tiene que cumplir las tres tablas a la vez. Una mirada más detenida nos revela que *para modelos de dimensión finita*, estas tablas, contienen las mismas condiciones del teorema de *Gleason*. Así, las únicas valuaciones posibles compatibles con el las tablas anteriores son exactamente las que representan estados cuánticos (es decir, definidas por matrices de densidad). Para ver por qué esto es así, notemos primero que, por construcción, todo estado cuántico cumple con las tablas definidas arriba. Por otro lado, supongamos que una valuación v cumple con las tres tablas. Si $P \perp Q$, entonces, usando la Tabla (4.4), obtenemos $v(P \vee Q) = v(P) + v(Q)$. Esta es la primera condición de la definición de estados como medida (para modelos de dimensión finita). Por otro lado, si tomamos dos proyectores ortogonales P, Q, tenemos que $P \wedge Q = \mathbf{0}$. Usando la Tabla (4.5), obtenemos que $v(\mathbf{0}) = v(P \wedge Q) = 0$. Por lo tanto, escribiendo el 0 como conjunción de dos proyectores ortogonales, probamos que una valuación dada v asigna el valor 0 al proyector nulo. Y dado que toda valuación es una función, no puede asignar ningún otro valor. Por último, usando la tabla (4.6), obtenemos que $v(\mathbf{1}) = v(\neg\mathbf{0}) = 1 - v(\mathbf{0}) = 1 - 0 = 1$. De esta forma, obtenemos que nuestra valuación v cumple con todas las condiciones de la definición de estado como medida. Por el teorema de Gleason, se sigue que existe una matriz densidad $\hat{\rho}_v$ tal que $v(P) = \mathrm{tr}(\hat{\rho}P)$, para todo proyector P. Esto completa la prueba de que los estados cuánticos son las únicas valuaciones que cumplen con las Tablas (4.4), (4.5) y (4.6). De esta forma, obtenemos una caracterización alternativa del *conjunto de estados cuánticos en términos de las valuaciones de una semántica no determinista.*
Para modelar sistemas cuánticos de dimensión infinita, deberíamos imponer una restricción más, la condición de σ-aditividad (tal como aparece en el tercer ítem de 1.6), y aplicar nuevamente el teorema de Gleason para obtener los estados cuánticos. Pero esto implica el uso de una condición en un conjunto numerable de proposiciones. Vamos a estudiar esta posibilidad en trabajos futuros. También es importante señalar que hay versiones generalizadas del teorema de Gleason [67], que pueden ser usadas para el estudio de la aditividad tanto en sistemas cuánticos como en sistemas generales. Dejamos esto para futuros trabajos.

> De acuerdo con las tablas definidas anteriormente, uno podría preguntarse: ¿definen estas tablas conectivos veritativo funcionales? Para empezar, note que la negación es clásica. Más concretamente: ¿es cierto que dada dos proposiciones P y Q, y un conectivo $\diamondsuit$, si las probabilidades asignadas a P y Q son a y b, respectivamente, el valor de la probabilidad de $P\diamondsuit Q$ está determinado por a y b? Esta es una pregunta complicada, porque, si las valuaciones se valúan en conjuntos con más de un elemento, el teorema de Gleason podría imponer, en principio, restricciones de tal forma que todos los estados que asignen las probabilidades a y b a P y Q, respectivamente, asignen el mismo valor para la proposición compuesta $P\diamondsuit Q$. Este es explícitamente el caso cuando $P \perp Q$: para todo $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, si $\mathrm{tr}(\rho P) = a$ y $\mathrm{tr}(\rho P) = b$, tenemos que $\mathrm{tr}(\rho(P \vee Q)) = a + b$ y $\mathrm{tr}(\rho(P \wedge Q)) = 0$. Pero resulta que este no es el caso cuando $P \not\perp Q$, como mostramos en los siguientes ejemplos.

Consideremos primero un modelo cuántico de cuatro dimensiones y la base $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, |d\rangle\}$.

Considere las proposiciones definidas por los proyectores $P = |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|$ y $Q = |b\rangle\langle b| + |c\rangle\langle c|$. Claramente, $R := P \wedge Q = |b\rangle\langle b|$ y $P \not\perp Q$. Elegimos por simplicidad $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ y consideremos el estado $|\psi\rangle = \sqrt{\alpha}|a\rangle + \sqrt{\beta}|b\rangle + \sqrt{\gamma}|c\rangle + \sqrt{\delta}|d\rangle$. Así, la probabilidad de cada elemento de la base viene dada por α, β, δ y γ, respectivamente, y la condición de normalización $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$. Un simple cálculo muestra que la probabilidad de P es $p_\psi(P) = \mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|P) = \alpha + \beta$, la probabilidad de Q es $p_\psi(Q) = \mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|Q) = \beta + \gamma$ y la probabilidad de R, $p_\psi(P \wedge Q) = \mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|(P \wedge Q)) = \beta$. Ahora, elija $0 < \varepsilon < \alpha, \beta, \gamma, \delta$, y considere el nuevo estado cuántico definido por $|\psi_\varepsilon\rangle = (\sqrt{\alpha + \varepsilon}|a\rangle + \sqrt{\beta - \varepsilon}|b\rangle + \sqrt{\gamma + \varepsilon}|c\rangle + \sqrt{\delta - \varepsilon}|d\rangle$ (el lector puede corroborar que la normalización es correcta).
Tenemos que la probabilidad de P es $p_{\psi_\varepsilon}(P) = \mathrm{tr}(|\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|P) = \alpha + \varepsilon + \beta - \varepsilon = \alpha + \beta$, la probabilidad de Q es $p_{\psi_\varepsilon}(Q) = \mathrm{tr}(|\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|Q) = \beta - \varepsilon + \gamma + \varepsilon = \beta + \gamma$ y la probabilidad de R, $p_{\psi_\varepsilon}(P \wedge Q)) = \mathrm{tr}(|\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|(P \wedge Q) = \beta - \varepsilon \neq \beta$. Por lo tanto, tenemos dos estados *diferentes* que asignan la misma probabilidad a P y Q, pero *diferente* valor a $P \wedge Q$.
Con la misma notación que en el ejemplo anterior, tenemos que $S := P \vee Q = |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| + |c\rangle\langle c|$. Nuevamente, tenemos $P \not\perp Q$, $p_\psi(P) = \alpha + \beta$ y $p_\psi(Q) = \beta + \gamma$. Para la disyunción, tomemos ahora $p_\psi(P \vee Q) = \mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|(P \vee Q)) = \alpha + \beta + \gamma$. Calculando las probabilidades para el estado $|\psi_\varepsilon\rangle$, obtenemos nuevamente $p_{\psi_\varepsilon}(P) = \alpha + \beta$ y $p_{\psi_\varepsilon}(Q) = \beta + \gamma$. Pero la probabilidad para la disyunción viene dada por $p_{\psi_\varepsilon}(P \vee Q) = \mathrm{tr}(|\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon|(P \vee Q) = \alpha + \varepsilon + \beta - \varepsilon + \gamma + \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + \varepsilon \neq \alpha + \beta + \gamma$. Entonces, tenemos dos estados *distintos* que asignan la misma probabilidad a P y Q, pero *diferente* valor a $P \vee Q$.
Estos ejemplos muestran que las tablas de verdad definidas anteriormente (Tablas (4.4), (4.5) y (4.6)) *definen una semántica estrictamente no determinista.* Pero, las valuaciones que son compatibles con estas tablas, ¿son *dinámicas* o estáticas? El siguiente ejemplo muestra que las mismas son *dinámicas.*

> Recordemos que según lo visto en 3.3.4, las Nmatrices dinámicas son las que tienen mayor poder expresivo, ya que no pueden simularse con un conjunto determinista de matrices clásicas. Esta propiedad puede ser de gran importancia cuando necesitemos expandir nuestra semántica para incorporar propiedades de la contextualidad.

Considere el espacio de Hilbert de tres dimensiones con la base $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$. Defina $P = |a\rangle\langle a|$ y $Q = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ (donde $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle)$)). La conjunción viene dada por conjunción $P \vee Q = |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|$ (debido al hecho de que son dos vectores lineales independientes, definen un subespacio cerrado de dimensión 2). Considere el estado $|\phi\rangle = |b\rangle$. Entonces, tenemos $p_\phi(P) = \mathrm{tr}(|b\rangle\langle b|a\rangle\langle a|) = 0$, $p_\phi(Q) = \frac{1}{2}$ y $p_\phi(P \vee Q) = \mathrm{tr}(|b\rangle\langle b|(P \vee Q)) = \mathrm{tr}(|b\rangle\langle b|(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)) = 1$. Considere ahora $P' = |c\rangle\langle c|$ y $Q' = Q$. Tenemos nuevamente $p_\phi(P') = \mathrm{tr}(|b\rangle\langle b|c\rangle\langle c|) = 0$ y $p_\phi(Q') = \frac{1}{2}$. La disyunción viene dada por $P' \vee Q' = |\varphi\rangle\langle\varphi| + |c\rangle\langle c|$ (usamos que $|c\rangle$ y $|\varphi\rangle$ son ortogonales). Pero ahora, $p_\phi(P' \vee Q') = \mathrm{tr}(|b\rangle\langle b|(|\varphi\rangle\langle\varphi| + |c\rangle\langle c|)) = \mathrm{tr}(|b\rangle\langle b|\varphi\rangle\langle\varphi|) + \mathrm{tr}(|b\rangle\langle b|c\rangle\langle c| = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \neq 1$.
Por lo tanto, hemos obtenido que, dados dos pares de proposiciones ; P , Q, y P' , Q', hay una valuación $v_\phi(...) = \mathrm{tr}(|\phi\rangle\langle\phi|(...))$ (inducida por el estado cuántico $|\phi\rangle$), que satisface $v_\phi(P) = v_\phi(P')$, $v_\phi(Q) = v_\phi(Q')$, pero $v_\phi(P \vee Q) \neq v_\phi(P' \vee Q')$. Entonces, en general, las valuaciones definidas por un estado cuántico *no serán estáticas.*

4.2.2 N-Matrices para estados generalizados

En esta sección construimos matrices no deterministas para modelos probabilísticos generalizados, cuyas estructuras proposicionales son definidas por retículos y estados ortomodulares completos arbitrarios definido por 1.6. Vamos a proceder de forma similar a como hicimos con el caso cuántico. Pero es importante tomar en cuenta que: (a) el teorema de Gleason no estará disponible en muchos modelos, y (b) la diferencia entre aditividad y σ-aditividad, impone una gran restricción si uno ahora quiere vincular las valuaciones con los estados (ver [67] para generalizaciones del teorema de Gleason y diferencia entre aditividad y σ-aditividad). En el caso general, será posible afirmar que cada estado define una valuación, pero existirán valuaciones que no son estados. Además, si el retículo no admite estados [62], entonces, el conjunto de valuaciones va a ser vacío.
También es muy importante remarcar que las Nmatrices introducidas a continuación, funcionan bien cuando los retículos son álgebras booleanas. Esto significa que los modelos probabilísticos clásicos (kolmogorovianos) *también* caen en nuestro esquema. Pero, a diferencia de las Nmatrices del caso cuántico, definidas en la sección anterior, los modelos probabilísticos clásicos *siempre* admiten valuaciones globales cuyo rango es *igual* al conjunto $\{0, 1\}$. Debido a los teoremas de KS y Gleason, el rango de las valuaciones globales de las Nmatrices asociadas a sistemas cuánticos, *no puede ser igual* a $\{0, 1\}$. Una observación similar es válida para modelos probabilísticos más generales, siempre que sean suficientemente contextuales (y admitan estados).

Para representar las proposiciones (Proyectores) correspondiente a los estados generalizados de esta sección, utilizaremos letras minúsculas. Primero construyamos el conjunto de interpretación para la conjunción.

$$\widetilde{\wedge} : V \times V \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$$

Usando 1.7, se sigue fácilmente que:

$$\mu(p \wedge q) \leq min(\mu(p), \mu(q))$$

Así, cuando la valuación $v(\cdots)$ asigne $v(p) = a$ y $v(q) = b$ $(a, b \in V)$, el candidato natural para ser el conjunto que interpreta la conjunción vendrá dado por:

$$\widetilde{\wedge}_{(a,b)} = [0, min(a, b)] \tag{4.7}$$

Mirando la ecuación anterior para los diferentes valores de sus argumentos, y considerando que el único valor designado es 1, obtenemos la siguiente tabla para la conjunción:

	p	q	$\widetilde{\wedge}$
Si $p \perp q$	a	b	$\{0\}$
Si $p \not\perp q$	a	b	$[0, min(a, b)]$

(4.8)

Estudiemos ahora la disyunción.

$$\widetilde{\vee} : V \times V \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$$

Aplicando los mismos razonamientos se obtiene:

$$max(\mu(p), \mu(q)) \leq \mu(p \vee q) \leq 1$$

y

$$\Rightarrow max(v(p), v(q)) \leq v(p \vee q) \leq 1$$

Entonces, su correspondiente conjunto interpretación viene dada por:

$$\widetilde{\vee}_{(a,b)} = [max(a, b), 1,] \tag{4.9}$$

y su correspondiente tabla será:

	p	q	$\widetilde{\vee}$
Si $p \perp q$	a	b	$\{a + b\}$
Si $p \not\perp q$	a	b	$[max(a, b); 1]$

(4.10)

Para la negación,

$$\widetilde{\neg} : V \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$$

, teniendo en cuenta 1.6 (en la próxima sección veremos otras alternativas).

$$\widetilde{\neg}_{(a)} = \{1 - a\},$$

obteniendo

p	$\widetilde{\neg}$
a	$\{1 - a\}$

(4.11)

La diferencia principal con el caso anterior radica en que, ahora, pedir que las valuaciones respeten estas tres tablas no es equivalente a que se cumpla *Gleason* (ya nombramos que este teorema puede no estar disponible en el caso general). Puede haber muchas más valuaciones que antes. Esto significa, en un sentido lógico, que el conjunto de teoremas de esta Nmatriz será un subconjunto del conjunto de teoremas del caso anterior.

4.2.3 Las Nmatrices cuánticas y la adecuación

En esta sección generalizamos las tablas anteriores incluyendo la posibilidad de considerar mediciones de precisión finitas. Por esto, nos referimos a una situación en la que no es posible determinar si una proposición es verdadera, pero es posible asegurar que es diferente de 1 dentro de un cierto rango. Hay que aclarar que al hacer este cambio, esto es, al tener un conjunto de valores designados más amplio, ya no tenemos garantía de que las valuaciones definidas por nuestra Nmatriz sean estrictamente los estados cuánticos. Que con este cambio exista mayor cantidad de valuaciones permitidas que estados cuánticos, no es algo evidente a priori y será considerado en futuros trabajos. Decimos que puede haber un cambio en las valuaciones porque la nueva Nmatriz sufrirá algunos cambios con respecto a la anterior. De todas formas, este desarrollo tiene interés lógico y puede arrojar ideas para futuras conexiones con los estados. Esto nos aleja de la física de los estados debido a que en el retículo cuántico vimos que la verdad se asociaba con la probabilidad igual a 1 (100%) y que la negación de algo verdadero siempre estaba asociada con el 0. Ahora tendremos mayor versatilidad, pero alejándonos un poco de la relación establecida anteriormente entre valuaciones y estados.
Tomaremos los conjuntos $V = [0, 1]$ y $D = [\alpha, 1]$, con $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. Para el caso $\alpha = 1$, se obtienen los resultados de la sección anterior. En esta sección, α será considerado un parámetro libre.

Comenzaremos analizando la conjunción.

$$\widetilde{\wedge} : V \times V \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$$

En lo que sigue (nuevamente), a y b representan los respectivos valores para las valuaciones de p y q, esto es, $v(p) = a$ y $v(q) = b$.

- Si $a, b \in D$, entonces:

$p \wedge q \leq p \Rightarrow \mu(p \wedge q) \leq \mu(p)$, y
$p \wedge q \leq q \Rightarrow \mu(p \wedge q) \leq \mu(q)$
Si tomamos $v(p) = \mu(p) = a$ y $v(q) = \mu(q) = b$, entonces $v(p \wedge q) \leq a$ y $v(p \wedge q) \leq b$. Por lo tanto, $v(p \wedge q) \leq min(a, b)$.
Dado que μ es definida positiva, entonces $0 \leq \mu(p \wedge q) \leq min(a, b)$. Esto sugiere que tomemos el conjunto de interpretación para la conjunción para el caso de dos valores designados como:

$$a \widetilde{\wedge} b \subseteq [0, min(a, b)]$$

Es importante señalar que con este conjunto de interpretación, podría darse el caso de que la valuación seleccione un valor no designado, incluso cuando ambos elementos de entrada son designados. Esto hace que nuestra matriz no sea adecuada (desde el punto de vista del criterio de Avron 3.3.6). Avron utiliza este criterio para proporcionar pruebas de unicidad para matrices en un determinado lenguaje y bajo ciertas condiciones. Si llegara a ser necesario, podríamos aplicar un criterio similar. Incluso para el retículo cuántico de proyectores presentado anteriormente, fue el teorema de Gleason (en ese caso, equivalente a pedir la satisfacción simultánea de nuestras tres tablas) el que funcionó como criterio limitador de valuaciones indeseadas , esto es, funcionó como una especie de criterio de adecuación para nuestra Nmatriz. Si estuviésemos interesados en una matriz adecuada, entonces deberíamos restringir el conjunto de interpretación de la conjunción. La opción más natural sería:

$$a \widetilde{\wedge} b \subseteq [0, min(a, b)] \cap D; \; D = [\alpha, 1] \tag{4.12}$$

No hay que olvidar que el criterio que Avron utiliza para adecuar su semántica es un criterio válido para sistemas que contengan el fragmento positivo de la Lógica Clásica. Este no es nuestro caso, por lo tanto tener matrices no adecuadas en este sentido es algo razonable.

- Si $a \in D, b \notin D$,

procediendo similarmente al caso anterior:

$$p \wedge q \leq p \Rightarrow \mu(p \wedge q) \leq \mu(p),$$

$$p \wedge q \leq q \Rightarrow \mu(p \wedge q) \leq \mu(q)$$

Entonces, $\mu(p \wedge q) \leq min(a, b)$, pero ahora sabemos cuál es el valor más pequeño, ya que b es no designado. Por lo tanto,

$$0 \leq v(p \wedge q) \leq b.$$

Esto sugiere el siguiente conjunto de interpretación:

$$a\widetilde{\wedge}b \subseteq [0,b] \subseteq V \setminus D. \tag{4.13}$$

Es fácil comprobar que este caso satisface el criterio de adecuación sin necesidad de restringir el conjunto.

- Si $a \notin D, b \in D$

Este caso es totalmente análogo al anterior, la única diferencia es que ahora el valor mínimo es a.

$$0 \leq v(p \wedge q) \leq a$$

Entonces:

$$a\widetilde{\wedge}b \subseteq [0,a] \subseteq V \setminus D \tag{4.14}$$

Finalmente, consideraremos el caso en el cual ambos elementos de la conjunción son no designados.

- $a, b \notin D$

Obteniendo

$$0 \leq v(p \wedge q) \leq min(a,b),$$

y por lo tanto

$$a\widetilde{\wedge}b \subseteq [0, min(a,b)] \subseteq V \setminus D \tag{4.15}$$

Procediendo de la misma forma, ahora obtendremos los conjuntos respectivos para la disyunción.

$$\widetilde{\vee} : V \times V \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$$

- Si $a, b \in D$

Dado que $p \leq p \vee q$ y $q \leq p \vee q$, entonces $\mu(p) \leq \mu(p \vee q)$ y $\mu(q) \leq \mu(p \vee q)$.

$$\Rightarrow a \leq v(p \vee q) \ \text{ y } \ b \leq v(p \vee q)$$

$$\Rightarrow max(a,b) \leq v(p \vee q) \leq 1$$

Por lo tanto,

$$a\widetilde{\vee}b \subseteq [max(a,b), 1] \subseteq D \tag{4.16}$$

- Si $a \in D, b \notin D$ o $a \notin D, b \in D$

$$a\widetilde{\vee}b \subseteq [max(a,b), 1] \subseteq D \tag{4.17}$$

- Si $a, b \notin D$

Si ninguno de los dos términos tiene un valor designado, una posibilidad es proceder como en el primer de la conjunción (restringiendo nuestro conjunto de tal manera que satisfaga la adecuación).

$$a\tilde{\vee}b \subseteq [max(a,b),1]$$

Una valuación para la disyunción de dos proposiciones no designadas podría darnos un valor designado. Si queremos evitar esto, y utilizamos el criterio de adecuación dado por Avron, un conjunto de interpretación posible vendría dado por:

$$a\tilde{\vee}b \subseteq [max(a,b),1] \cap (V \setminus D) \tag{4.18}$$

No seguiremos este camino, ya que si queremos que nuestro sistema no valide distributividad, las matrices no pueden cumplir todas con adecuación (podemos tener como máximo un conectivo adecuado, ver [89]). Pasemos ahora a la negación:

$$\tilde{\neg} : V \to 2^V \setminus \{\emptyset\}$$

> Llegado este momento, consideraremos tres posibilidades diferentes para la negación. Hacemos esto pensando en futuros trabajos donde se precisen diferentes negaciones que la del retículo de proyectores. Por ejemplo, se sabe que en las compuertas cuánticas la negación es distinta. En estos casos existe una raíz cuadrada de la negación, esto es, una función que aplicada dos veces consecutivas sobre un cierto estado produce una transformación que equivale a la negación clásica. Nombramos este caso aislado, pero lo cierto es que, tal vez, en futuros trabajos precisemos tener una negación que no sea determinista. Es por eso que ahora presentaremos dos opciones de negación no determinista.

Dado que estamos trabajando en un retículo ortomodular, tenemos que $\mu(p^{\perp}) = 1-\mu(p)$. En términos de valuaciones, esta condición queda: $v(p^{\perp}) = 1 - v(p)$. Por lo tanto, parece razonable elegir un negación de la siguiente manera (con el fin de obtener una negación no determinisa):

<u>Caso 1</u>

p	$\tilde{\neg}_1(a)$
$a \in D$	$[0, 1-a]$
$a \notin D$	$[1-a, 1]$

Este caso generaliza el caso estándar cuántico dejando $1-a$ (negación determinista) como un caso límite.

<u>Caso 2</u>

En este caso queda a la vista que se pueden utilizar algunos parámetros con el fin de regular el comportamiento de los conjuntos de interpretación. Aunque la elección de la valuación dentro de tal conjunto sea no determinista, uno puede controlar el comportamiento de estos conjuntos utilizando algunos parámetros con el objetivo de que la negación tenga las propiedades deseadas para cada caso. Para el siguiente caso, supondremos que $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, esto es, se deja fuera el caso en donde el único valor designado es el 1.

p	$\tilde{\neg}_2(a)$
$a \in D$	$[\alpha - \frac{a}{2}(\frac{1-\alpha}{\alpha}), \alpha)$
$a \notin D$	$[\alpha, \alpha + \frac{a}{2}(\frac{1-\alpha}{\alpha})]$

Puede verse que los conjuntos ahora dependen del valor de α y que esta dependencia se eligió de forma arbitraria. El 2 que aparece en el denominador puede ser reemplazado por un parámetro multiplicativo que sirva para los objetivos del momento. También podrían incorporarse más parámetros tanto multiplicativos como aditivos.
Para valores de α cercanos a 1, esta negación va acumulando fuertemente sus posibles resultados en torno al mismo α. Si esto no es deseado, puede cambiarse la ordenada al origen de la recta en cuestión, ya que para cada α fijo determina una recta con ordenada en α.
Finalmente, siempre podemos definir una negación determinista, que es la más natural para el caso cuántico estándar:

Caso 3

p	$\tilde{\neg}(a)$
$a \in V$	$\{1 - a\}$

En este caso, independientemente de si el valor de a es designado o no, la negación produce $1-a$. Si tomamos $D = \{1\}$ como en el caso lógico cuántico estándar, entonces la negación de un valor designado dado daría un resultado no designado. Pero lo contrario no es necesariamente cierto.

El concepto de *adecuación* es de gran importancia, su relación con la veritativo funcionalidad es muy estrecha. La funcionalidad de la verdad junto con supuestos muy generales acerca de la relación de consecuencia lógica como, por ejemplo, la conservación de valores designados; más la necesidad de que ciertas proposiciones especificas sean verdaderas en nuestro sistema implican la *adecuación* en el sentido visto. A efectos de la consecuencia lógica, la *adecuación* rescata los rasgos estructurales de la veritativo funcionalidad. Es conocido que Reichembach propuso una lógica trivaluada para la cuántica [99]. Para el autor, en concordancia con Bohr y Heisenberg, ciertas oraciones de la cuántica deben ser tratadas como sin significado. Su semántica es veritativo funcional y adecuada. Puede probarse que su sistema valida distributividad, algo que para nosotros es indeseable. Ya sabemos que el retículo de proyectores no admite valuaciones funcionales, pero la verdadera razón de que Reichembach satisfaga distributividad debe buscarse no sólo en la funcionalidad , sino también en la adecuación. Las Nmatrices presentadas por nosotros para la cuántica son no veritativo funcionales, pero eso solo no nos alcanza para garantizar no distributividad. Necesitamos que al menos dos conectivos sean no adecuados (esto se deduce de las consecuencias que saca Malament en [89]). Aunque se pruebe usando las matrices propias del sistema de Reichembach que éste satisface distributividad, en realidad, esta consecuencia se deduce directamente del hecho de que tal sistema sea *adecuado.*

4.3 Consecuencia lógica en estructuras no kolmogorovianas

Como es bien sabido, la relación de inclusión entre subespacios cerrados de un $\mathcal{H}$ o, lo que es equivalente, la relación de orden entre operadores de proyección de nuestro retículo no es, desde un punto de vista estrictamente lógico, una verdadera relación de implicación. Esto produce que se presenten diferentes candidatos para representar este papel en la lógica cuántica (ver [52, 100, 101, 102]). Otra objeción que está relacionada con la anterior y que ha aparecido a menudo es que las estructuras no estándar propuestas para la cuántica no son realmente lógicas. Algunos autores, Jauch entre ellos [80], piensan que al ser la motivación para su adopción de carácter empírico le resta seriedad a la hora de calificarla como lógica. Parece pensarse a veces que la manera en la que se establecen sistemas como el de Birkhoff y von Neumann, obteniendo los principios lógicos de la matemática de la mecánica cuántica, impide que sean "lógicos" propiamente hablando. Por supuesto, existen autores con la opinión opuesta. Puede verse una discusión del tema en [64].
Desde una perspectiva puramenten lógica, uno de nuestros objetivos a futuro es adaptar el formalismo cuántico al sistema de matrices no deterministas para estudiar la relación de esta inclusión con la noción de consecuencia lógica definida por las Nmatrices. Construyendo una semántica Nmatricial adecuada para el formalismo cuántico, obtendríamos los beneficios de la noción de consecuencia lógica desarrollada por Avron y Zamansky [13].

> Debido a que en un retículo ortomodular la implicación definida de manera clásica no cumplía con ciertos criterios exigidos para una deducción por falta de distributividad, se utilizó una nueva implicación cuántica análoga a la clásica, la implicación de Sasaki. Así, con la conjunción cuántica & sugerida por Finch [52], se puede formular un sistema deductivo en la retícula ortomodular, de tal forma que se prueben teoremas de corrección y completitud en el sistema lógico cuántico resultante.

Una de las ventajas más importantes del sistema Nmatrices es que, dado un sistema que pueda representarse por Nmatrices finitas, es posible probar su decidibilidad. En nuestra construcción, con el fin de obtener una conexión más cercana con el formalismo cuántico, hemos asumido que V no es numerable, y por ende, nuestra Nmatriz cuántica no es finita. Pero generalmente es posible reducir la cardinalidad de V a un conjunto numerable, sin afectar el conjunto de teoremas. Esto está directamente relacionado con las definiciones de F-expansión y refinamiento (3.3.5) y el contenido de la proposición 3.3.3, que relaciona los conjuntos correspondientes de teoremas.

4.3.1 ¿Es posible interpretar nuestra Nmatriz cuántica como un refinamiento de una F-expansión de una Nmatriz finita?

En esta sección mostramos que la Nmatriz construida para el retículo ortomodular de proyectores, en el caso de un único valor designado, es un refinamiento particular de una F-expansión de una Nmatriz finita. Para alcanzar este objetivo, nos basaremos en 3.3.5. Para un tratamiento más detallado de las técnicas utilizadas en esta sección (y pruebas de proposiciones), remitimos al lector a [15].

Ahora procedemos a encontrar una Nmatriz finita de la cual nuestra Nmatriz cuántica sea una expansión. Esta Nmatriz, por supuesto, no será única, dado que existen infinitas rexpansiones para una determinada Nmatriz, y cada matriz puede ser la rexpansión de diferentes Nmatrices. Cada una de estas rexpansiones está comprometida con diferentes funciones de expansión y diferentes grados de refinamiento. Una vez que se encuentra una de estas Nmatrices, es posible usar la proposición 3.3.6 para relacionar sus conjuntos de teoremas. Como mencionamos antes, conseguir matrices finitas cobra importancia cuando nos interesa la decibilidad de los sistemas lógicos. Como la Nmatriz construida en esta sección a través de la técnica de rexpansión dará nuevos conjuntos de interpretación para los conectivos, utilizaremos el subíndice r (rexpansión) para identificarlos.

Sean $V_2 = [0, 1]$, $V_1 = \{t, T, F\}$, $D_2 = \{1\}$ y $f : V_2 \to V_1$, tales que

$$f(1) = t; \quad f(0) = F; \quad f(\alpha) = T, \ \alpha \in (0, 1)$$

En este caso, nuestro objetivo es encontrar una Nmatriz finita de tres valores, tal que la matriz cuántica sea una f-expansión de la misma. Luego propondremos, a modo de ejemplo, una posible Nmatriz de dos valores relacionada con una expansión diferente. Aplicando el ítem 1 de la proposición 3.3.5:

$$x \in \{1\} \text{ si y sólo si } f(x) \in D_1 \Rightarrow D_1 = \{t\}.$$

Apliquemos ahora el ítem 2 de la proposición 3.3.5 para encontrar el conjunto de interpretación para cada conectivo.

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1], \ y \in \widetilde{\vee}_Q(x_1, x_2) = [\max(x_1, x_2), 1] \ \Rightarrow \ f(y) \in \widetilde{\vee}_r(f(x_1), f(x_2))$$

Si $x_1 = x_2 = 0$, entonces $y \in [0, 1] \Rightarrow f(y) \in \widetilde{\vee}_r(f(0), f(0))$. Por lo tanto,

$$\widetilde{\vee}_r(F, F) = \{t, T, F\} \tag{4.19}$$

Si $x_1 = x_2 = 1$,

$$y \in \widetilde{\vee}_Q(1, 0) = [max(1, 0), 1] = \{1\} \Rightarrow f(1) \in \widetilde{\vee}_r(t, F)$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{\vee}_r(t, F) = \{t\} \tag{4.20}$$

Si $x_1 = 0, x_2 = \alpha; \alpha \in (0, 1)$, $y \in [\alpha, 1] \Rightarrow f(y) \in \widetilde{\vee}_r(F, T)$.

$$\widetilde{\vee}_r(F, T) = \{t, T\} \tag{4.21}$$

Al seguir este procedimiento, es posible encontrar todos los elementos del conjunto de interpretación de la conjunción. La siguiente tabla resume todos los resultados de un posible candidato:

$\widetilde{\vee}_r$	t	T	F
t	$\{t\}$	$\{t\}$	$\{t\}$
T	$\{t\}$	$\{t, T\}$	$\{t, T\}$
F	$\{t\}$	$\{t, T\}$	$\{t, T, F\}$

(4.22)

Es importante remarcar que esta interpretación establecida para la disyunción es solamente una entre varias posibilidades. De la misma manera, es posible encontrar el conjunto correspondiente a la conjunción. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \widetilde{\wedge}_r & t & T & F \\ \hline\hline t & \{t,T,F\} & \{F,T\} & \{F\} \\ T & \{T,F\} & \{T,F\} & \{F\} \\ F & \{F\} & \{F\} & \{F\} \end{array} \tag{4.23}$$

Para la negación, obtendremos:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & t & T & F \\ \hline\hline \widetilde{\neg}_r & \{F\} & \{T\} & \{t\} \end{array} \tag{4.24}$$

Para la tabla anterior, hemos tomado la negación estándar asociada al retículo.
Si $\mathcal{V}_1 = \{t, F\}$ es elegido como el conjunto inicial (en lugar de $\mathcal{V}_1 = \{t, T, F\}$), es posible proceder de la siguiente manera (por supuesto, manteniendo un único valor designado):

$$f : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_1, \text{ tal que } f(1) = t \ , \ f(\alpha) = F \ , \ \alpha \in [0, 1)$$

Si procedemos de igual forma al caso anterior, encontramos la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|c|c} \widetilde{\vee}_r & t & F \\ \hline\hline t & \{t\} & \{t\} \\ F & \{t\} & \{t,F\} \end{array} \tag{4.25}$$

y se puede aplicar un procedimiento similar al resto de los conectivos.

4.3.2 Un breve análisis de algunas propiedades de nuestras negaciones

Ahora estudiaremos las propiedades de la negación en relación a los conjuntos de interpretación que presentamos como candidatos posibles.
Teniendo en cuenta la relación que mantiene la negación, con el complemento ortogonal de subespacios de Hilbert, nos gustaría que nuestra negación cumpliese el principio de doble negación. Estos es, que negar dos veces una proposición dada sea igual a afirmarla. Mostraremos que, a pesar de no respetar estrictamente tal principio, la negación $\widetilde{\neg}_1$ (definida en el caso uno de la sección 4.2.3) tiene un comportamiento muy particular que podría vincularse con el límite clásico de este tipo de lógicas. Podemos ver de qué manera la estructura no determinista de una negación de este estilo podría transformarse, en el límite, en una negación clásica. Es directo probar que la negación propuesta en la Tabla (4.6), respeta el principio de doble negación. Aunque las dos primeras candidatas no tengan el mejor comportamiento en este sentido, vale haberlas presentado, ya que, dentro de otro dominio, podríamos necesitar otra clase de negación. Por ejemplo, la negación dentro de los circuitos cuánticos (compuertas lógicas cuánticas) no es la misma a la negación del retículo. Por ejemplo, en los circuitos cuánticos es posible definir, como

ya nombramos, una operación que es la raíz cuadrada de la negación. Tal operación, al aplicarla dos veces consecutivas sobre un estado cuántico dado es equivalente a haberle aplicado la compuesta negación al estado inicial.
Analicemos el caso de la doble negación para la primera propuesta.
Recordemos esta negación:

p	$\widetilde{\neg}_1(a)$
$a \in D$	$[0, 1-a]$
$a \notin D$	$[1-a, 1]$

Para la doble negación tendremos:

$$v_{(\neg_1(\neg_1 p))} \in \widetilde{\neg}_{1(v(\neg_1 p))}$$

$$v_{(\neg_1 p)} \in \widetilde{\neg}_{1(v(p))}$$

Un caso muy particular se da si $v(p)$ toma un valor designado (teniendo un conjunto designado con más de un elemento). Hasta el final de esta sección, prescindiremos del subíndice 1 en la negación para no recargar la notación. Pero debe tenerse en mente que siempre estamos tratando solamente con esta negación. En la tabla al final de la sección, volveremos a recordar este subíndice.

- Si $v(p) = a \in D = [\alpha, 1]$

$$\Rightarrow \widetilde{\neg}_{(a)} = [0, 1-a] \text{ , por lo tanto } v_{(\neg p)} \in [0, 1-a]$$

Sea $b = v_{(\neg p)} \in [0, 1-a] \subseteq (V \setminus D)$, ya que $\frac{1}{2} < \alpha$,

$$\Rightarrow v_{(\neg(\neg p))} \in \widetilde{\neg}_{(b)} = [1-b, 1],$$

ya que b es un valor no designado. Por lo tanto, la doble negación nos lleva de valores designados a designados. Algo muy interesante puede notarse al ordenar los valores que fueron surgiendo a lo largo de toda esta valuación:

$$0 \leq b \leq 1-a \leq \alpha \leq a \leq 1-b \leq 1$$

Esto muestra que luego de tomar dos veces negación a un valor designado, el valor para la doble negación debe elegirse de un conjunto que está incluido en el conjunto de donde se tomó el valor designado original. Tomar consecutivamente doble negación para el caso designado, puede ir concentrando el conjunto interpretación final cada vez mas cerca de $\{1\}$. Por el contrario, este comportamiento no ocurre si comenzamos negando un valor no designado.

- Si $v_{(p)} = a \notin D$

$$\Rightarrow \widetilde{\neg}(a) = [1-a, 1]$$

Sea b el valor que toma la valuación dentro de este conjunto:

$$b = v_{(\neg p)} \in [1-a, 1]$$

$$\Rightarrow v_{(\neg(\neg p))} \in \widetilde{\neg}_{(b)}$$

La diferencia con el caso anterior está en que ahora b puede ser tanto un valor designado como uno no designado, ya que dentro del intervalo $[1-a, 1]$, en principio, podría haber valores de los dos tipos. Por ejemplo, si $\alpha = 0,9$ y $a = 0,8$, el intervalo en cuestión sería $[0,2; 1]$, que barre tanto valores designados como no designados. Entonces, para la doble negación en este caso debemos separar el conjunto interpretación dependiendo de que tipo de valor tome b.
Este comportamiento ya se tenía en el tratamiento ortodoxo de la lógica cuántica, donde la negación de lo verdadero era falso (verdadero en el caso ortodoxo es 1, esto es, $\alpha = 1$), mientras que la negación de algo falso no es necesariamente verdadero.
Por lo tanto, el conjunto interpretación para la segunda negación nos queda:

$$v_{(\neg(\neg p))} \in \tilde{\neg}_{(b)} \Rightarrow$$

$$\tilde{\neg}_1(b) = \begin{cases} [0, 1-b], & b \in D \\ [1-b, 1], & b \notin D \end{cases}$$

Tomar sucesivas veces doble negación no tendrá necesariamente un efecto de concentración de los valores cada vez más en torno al 0.
El mismo análisis puede hacerse con la segunda negación presentada por nosotros y la conclusión, aunque no sea idéntica, ira en la misma dirección. Tampoco se cumple el principio de la doble negación.

4.4 Las Nmatrices y la Lógica de la Superposición

En esta sección analizaremos de qué forma puede aplicarse nuestra semántica no determinista a una nueva lógica presentada recientemente por Athanassios Tzouvaras para la Mecánica Cuántica [111]. El sistema formal presentado por Tzouvaras (Lógica Proposicional de la Superposición) pretende capturar varias de las propiedades cuánticas de la superposición - aunque no puede capturarlas a todas - mediante una presentación axiomática en un lenguaje lógico ampliado y una semántica basada en funciones de elección. Es interesante mostrar que las Nmatrices pueden proponerse para capturar la semántica de este sistema axiomático, ya que este sistema fue propuesto especialmente para la cuántica, y nosotros también deseamos proponer las Nmatrices como una semántica adecuada para el retículo de proyectores. Si mostramos la plausibilidad de incorporar la semántica no determinista al sistema de Tzouvaras, estaremos incorporando a nuestro sistema todas las bonanzas que logra capturar la Lógica Proposicional de la Superposición (LPS). Comencemos dando una breve presentación de la LPS.

4.4.1 La Lógica Proposicional de la Superposición de Tzouvaras

El sistema LPS consiste en ampliar el lenguaje lógico proposicional clásico mediante la incorporación de un nuevo conectivo $(|)$, llamado conectivo de superposición cuántica, destinado a representar la superposición de oraciones ϕ y ψ. Según su autor, esta nueva operación es una operación motivada por la noción correspondiente de la mecánica cuántica, pero no destinada a capturar todas los aspectos de este último fenómeno tal como aparece en física. Para interpretar la nueva conectiva, Tzouvaras amplía la semántica booleana clásica empleando modelos de la forma (M, f), donde M es una asignación ordinaria de dos valores para las oraciones del lenguaje proposicional clásico (PL) y f es una función de elección para todos los pares de oraciones clásicas. En la nueva semántica, $\phi \mid \psi$ está estrictamente interpolado entre $\phi \wedge \psi$ y $\phi \vee \psi$. Al ir imponiendo varias restricciones a las funciones de elección, el autor va obteniendo las nociones correspondientes de consecuencia lógica y los correspondientes sistemas de tautologías, con respecto a los cuales $\mid$ satisface algunas propiedades algebraicas naturales tales como asociatividad, clausura bajo equivalencia lógica y distributividad sobre su conectivo dual. Para un exposición más rigurosa de este tema, o ver la extensión a primer orden ver [111, 112], respectivamente. Nuestra propuesta es usar las Nmatrices como una forma alternativa de brindarle una semántica a este sistema.

Sean ϕ_0, ϕ_1 las declaraciones "el sistema A está en un estado u_0" y "el sistema A está en un estado u_1", respectivamente, y sea $\phi_0 \mid \phi_1$ la afirmación "el sistema A está en la superposición de estados u_0 y u_1". En este formalismo, ϕ_0, ϕ_1 son declaraciones ordinarias de carácter clásico, por lo que se les pueden asignar valores de verdad ordinarios. ¿Pero qué pasa con los valores de verdad de $\phi_0 \mid \phi_1$? Claramente, la operación $\phi_0 \mid \phi_1$ no puede expresarse en lógica clásica, es decir, $\phi_0 \mid \phi_1$ no puede ser lógicamente equivalente a una combinación booleana $S(\phi_0, \phi_1)$ de ϕ_0 y ϕ_1. Sin embargo, una característica interesante de $\phi_0 \mid \phi_1$ es que tiene puntos en común tanto con la conjunción clásica como con la disyunción clásica. En cierto sentido, es una *mezcla* de $\phi_0 \vee \phi_1$ y $\phi_0 \wedge \phi_1$, ya que tiene un componente conjuntivo y disyuntivo. De hecho, $\phi_0 \mid \phi_1$ significa, por un lado, que las propiedades ϕ_0 y ϕ_1 se mantienen simultáneamente (al menos parcialmente) durante la fase de no medición, que es claramente la componente conjuntiva de $\phi_0 \mid \phi_1$, y por otro, en cualquier colapso particular de los estados superpuestos durante una medición, $\phi_0 \mid \phi_1$ se reduce a ϕ_0 o ϕ_1, que es una componente disyuntiva de la operación.

Consideremos un lenguaje proposicional $L = \{p_0, p_1, ...\} \cup \{\wedge, \vee, \neg\}$, donde p_i son símbolos de proposiciones atómicas, cuyas interpretaciones sean asignaciones de verdad (homomorfismos a dos valores) $M : Sen(L) \rightarrow \{0, 1\}$, que respeten las tablas de verdad clásicas. Extendamos L a $L_s = L \cup \{|\}$, donde $(|)$ es una nueva conectiva binaria primitiva. Para cualquier oración ϕ, ψ de L_s, $\phi \mid \psi$ denota la superposición de ϕ y ψ. Entonces se puede dar una interpretación de las oraciones de L con la ayuda de una asignación de verdad M para las oraciones de L, junto con un *mapeo colapso* c de las oraciones de L_s a las de L. El mapeo c pretende representar el colapso de la superposición $\phi \mid \psi$ a uno de sus componentes.

La idea básica es que el colapso del estado compuesto $c_0u_0 + c_1u_1$ en uno de los estados u_0, u_1 se puede ver, desde el punto de vista de la lógica pura, sólo como una elección (más o menos aleatoria) del conjunto de posibles resultados $\{u_0, u_1\}$. Los requisitos elementales para un mapeo de colapso son los siguientes:

- Debe ser la identidad para oraciones clásicas, es decir, $c(\phi) = \phi$ para cada oración ϕ de L.
- Debe conmutar con las conectivas estándar $\wedge, \vee$ y $\neg$, es decir, $c(\phi \wedge \psi) = c(\phi) \wedge c(\psi)$, $c(\phi \vee \psi) = c(\phi) \vee c(\psi)$ y $c(\neg\phi) = \neg c(\phi)$.
- $c(\phi \mid \psi)$ debe ser alguna de las oraciones $c(\phi), c(\psi)$, que se elige con la ayuda de una función de elección f para pares de oraciones clásicas, es decir, $c(\phi \mid \psi) = f(c(\phi), c(\psi))$. Dado que cada oración de L_s se construye a partir de oraciones atómicas, todas las cuales pertenecen al lenguaje clásico inicial L, se deduce que c está completamente determinado por la función de elección f, y a continuación escribiremos $c = f'$. Por lo tanto, las funciones de elección f para pares de oraciones de L son la piedra angular de la nueva semántica utilizada por Tzouvaras.

Cabe observar que para nosotros esas funciones de elección están haciendo el papel que hacen las valuaciones de la semántica no determinista de Nmatrices cuando seleccionan un valor posible dentro del conjunto de interpretación de la conectiva.

Dada una asignación de verdad M para L y una función de elección f para L, una oración ϕ de L_s es verdadera en M bajo la función de elección f, denotada $(M, f) \models_s \phi$, si y sólo si $f'(\phi)$ es (clásicamente) verdadera en M. Es importante notar que f está actuando antes que la valuación: en la semántica no determinista de Avron, la elección del valor de verdad se hace luego de interpretar la conectiva. En este sentido, existe una especie de cambio en el orden respecto de cuándo se elige.

$(M, f) \models_s \phi$ si y sólo si $M \models f'(\phi)$. Como f' es generado por f, condiciones especiales en f inducen propiedades especiales para f' que a su vez afectan las propiedades de $\models_s$. Tal condición es necesaria, por ejemplo, para que $|$ sea asociativo. El concepto de verdad anterior $\models_s$ amplía el clásico e induce las nociones de consecuencia lógica, $\phi \models_s \psi$, y s-equivalencia lógica $\sim_s$, que en general son las correspondientes relaciones estándar $\models$ y $\sim$. Una buena característica de la nueva semántica es que para todas las oraciones ϕ, ψ,

$$\phi \wedge \psi \models_s \phi \mid \psi, \ \ \phi \mid \psi \models_s \phi \vee \psi. \tag{4.26}$$

donde las relaciones $\models_s$ en ambos lugares son estrictas, es decir, no pueden, en general, invertirse. Significa que $\phi \mid \psi$ está estrictamente interpolado entre $\phi \wedge \psi$ y $\phi \vee \psi$, un hecho que en cierto sentido hace precisa la intuición expresada anteriormente de que $\phi \mid \psi$ es una 'mezcla' de $\phi \wedge \psi$ y $\phi \vee \psi$. En particular, $\phi \wedge \neg\phi \models_s \phi \mid \neg\phi$, $\phi|\neg\phi \models_s \phi \vee \neg\phi$, lo que significa que la superposición de dos situaciones incompatibles - tales como las que se dan en el experimento del gato de Schrödinger - no es ni una contradicción, ni una paradoja. Para continuar con esta sección haremos una convención de notación básica. Para realizar un seguimiento de si nos referimos, en cada momento particular, a oraciones de L o L_s, usaremos las letras ϕ, ψ, σ para oraciones generales de L_s, mientras que las letras α, β, γ indicarán oraciones de L solamente. También a menudo nos referimos a oraciones de L como 'clásicas'.
Sea A un conjunto dado, entonces

$$[A]^2 = \{\{a, b\} : a, b \in A\}.$$

Nos referimos a los elementos de $[A]^2$ como pares de elementos de A. Una función de elección para $[A]^2$ es, como de costumbre, un mapeo $f : [A]^2 \to A$, tal que $f(\{a, b\}) \in \{a, b\}$ para cada $\{a, b\} \in [A]^2$. Para ahorrar las llaves, escribimos $f(a, b)$ en lugar de $f(\{a, b\})$ cuando lo consideremos necesario y no pueda generar confusión. Entonces, en particular $f(a, b) = f(b, a)$ y $f(a, a) = a$.

Definición 4.4.1. Dado un lenguaje L, una función de elección para $[Sen(L)]^2$, el conjunto de pares de oraciones de L, se denominará función de elección para L.
Sea $F(L) = \{f : f \text{ es una función de elección para } L\}$. Escribiremos más simplemente F en lugar de $F(L)$. Con las letras f, g se denotan los elementos de F. En particular para todos los $\alpha, \beta \in Sen(L)$, escribimos $f(\alpha, \beta)$ en lugar de $f(\{\alpha, \beta\})$.

Definición 4.4.2. Sea f una función de elección para L. Entonces f genera una función de colapso $f' : Sen(L_s) \to Sen(L)$ definida inductivamente de la siguiente manera:

- $f'(\alpha) = \alpha$ para cada $\alpha \in Sen(L)$.

- $f'(\phi \wedge \psi) = f'(\phi) \wedge f'(\psi)$.
- $f'(\neg\phi) = \neg f'(\phi)$.
- $f'(\phi \mid \psi) = f(f'(\phi), f'(\psi))$.

Dado que las conectivas $\vee$ y $\rightarrow$ se definen en términos de $\neg$ y $\wedge$, f también conmuta con respecto a ellas.

Definición 4.4.3. Sea M una asignación de verdad para L, f una función de elección para L y $f' : Sen(L_s) \rightarrow Sen(L)$ sea la función de colapso correspondiente. La relación de verdad $\models_s$ entre el par (M, f) y una oración ϕ de L_s se define de la siguiente manera: $(M, f) \models_s \phi$ si y sólo si $M \models f(\phi)$. De manera más general, para un conjunto $\Sigma \subset Sen(L_s)$ escribimos $(M, f) \models_s \Sigma$, si $(M, f) \models_s \phi$ para cada $\phi \in \Sigma$. Los siguientes hechos son consecuencias fáciles de las definiciones anteriores.

- La relación de verdad $\models_s$ es una extensión de la booleana $\models$, para cada $\alpha \in Sen(L)$, y cada (M, f),
$$(M, f) \models_s \alpha \Leftrightarrow M \models \alpha.$$
- $\models_s$ es una noción bivalente de verdad, es decir para cada (M, f) y cada oración ϕ, o bien $(M, f) \models_s \phi$ o bien $(M, f) \models_s \neg\phi$.
- Para cada oración ϕ de L_s, cada estructura M y cada función de colapso f', $(M, f) \models_s \phi \mid \phi$ si y sólo si $(M, f) \models_s \phi$.
- Para todo $\phi, \psi \in Sen(L_s)$, M y f, $(M, f) \models_s \phi \mid \psi$ si y sólo si $(M, f) \models_s \psi \mid \phi$.

Definición 4.4.4. Sean $\Sigma \subset Sen(L), \phi, \psi \in Sen(L_s)$. Decimos que ϕ es una consecuencia *s-lógica* de Σ , denotada $\Sigma \models_s \phi$, si para cada estructura (M, f), $(M, f) \models_s \Sigma$ implica $(M, f) \models_s \phi$. Decimos que ϕ y ψ son s-lógicamente equivalentes, denotados $\phi \sim_s \psi$, si para cada (M, f), $(M, f) \models_s \phi$ si y sólo si $(M, f) \models_s \psi$. Finalmente, ϕ es una s-tautología, denotada $\models_s \phi$, si $(M, f) \models_s \phi$ para cada (M, f).
El siguiente teorema es de central importancia para lo físico y la prueba puede verse en [111], más adelante realizaremos esta prueba utilizando Nmatrices.

Teorema 4.4.1. Para todo $\phi, \psi \in Sen(L_s)$,
$$\phi \wedge \psi \models_s \phi \mid \psi \models_s \phi \vee \psi,$$
mientras que en general, es falsa la vuelta.

Proposición 4.4.1. Si α no es una tautología ni una contradicción, entonces $\alpha \mid \neg\alpha$ no es una s-tautología ni una contradicción.

En la semántica $\models_s$ utilizada hasta ahora, participan funciones de elección arbitraria para L . Esto prácticamente significa que para cualquier par $\{\alpha, \beta\}$, f puede elegir un elemento de $\{\alpha, \beta\}$ al azar, por ejemplo, arrojando una moneda. Sin embargo, si queremos que $\models_s$ admita propiedades adicionales de $|$, debemos refinar $\models_s$ imponiendo condiciones adicionales a las funciones de elección. Esto también podremos hacerlo nosotros en las Nmatrices si restringimos con algún criterio las valuaciones dentro del conjunto de interpretación de los conectivos. En el presente trabajo sólo nos concentraremos en propiedades que no tengan que limitar tales valuaciones.

4.4.2 Axiomas de LPS

A continuación, ofrecemos una lista de esquemas axiomáticos específicos (también denominados simplemente axiomas) acerca de $|$, cuyos grupos anidados van a axiomatizar las diferentes relaciones de verdad (cuatro) que Tzouvaras presenta en su trabajo [111]. Como cada conjunto mas restringido de funciones de elección para L generan nuevas propiedades para la relación de consecuencia lógica, Tzouvaras obtiene cuatro relaciones de consecuencia lógica, las cuales tienen diferentes propiedades. Limitar el conjunto de funciones de elección trae aparejado un incremento en los teoremas del sistema, ya que existen menos contraejemplos posibles. Presentamos todos los axiomas, pero, en un principio, nosotros trabajaremos con los tres primeros, que generan la base de la LPS y no necesitan ninguna limitación en las valuaciones dentro de las Nmatrices. El estudio de todos los axiomas lo realizamos más adelante, luego de introducir las tablas para la negación y la implicación.

1. $\phi \wedge \psi \to \phi \mid \psi$
2. $\phi \mid \psi \to \phi \vee \psi$
3. $\phi \mid \psi \to \psi \mid \phi$
4. $(\phi \mid \psi) \mid \sigma \to \phi \mid (\psi \mid \sigma)$
5. $\phi \wedge \neg\psi \to (\phi \mid \psi \leftrightarrow \neg\phi \mid \neg\psi)$

4.4.3 Posibles Nmatrices para LPS

Mostraremos algunas formas de implementar la semántica de las Nmatrices para los axiomas de LPS. Quedará de manifiesto que tal tarea puede realizarse de muchas maneras. En un primer momento, mostraremos Nmatrices que interpretan los conectivos $\neg$, $\vee$ y $\wedge$ y que respetan los axiomas básicos de LPS. Luego, daremos una interpretación para el conectivo $\to$ y veremos qué otras conclusiones podemos sacar. Un mayor desarrollo de esta sección quedará para trabajos futuros.
Luego de implementar alguna de las posibles Nmatrices a este sistema axiomático, podremos comparar estas matrices con la obtenida para el retículo de proyectores cuánticos en (4.3.1). En realidad, la comparación debe realizarse con la Nmatriz de finitos valores obtenida mediante la técnica de rexpansión aplicada a la Nmatriz cuántica no finita. Por supuesto, que LPS ya tiene su propia semántica y lo que nosotros estamos proponiendo, como ya nombramos, es una semántica alternativa basada en matrices no deterministas. Esta interacción entre sistemas semánticos puede ser de beneficio mutuo para ambos sistemas. Viendo de qué forma interactúan o interfieres se pueden extraer conclusiones para perfeccionar los sistemas tratados.
Presentamos una Nmatriz finita de tres valores dada de la siguiente manera:

$$M^3_{LPS} = \langle V, D, O \rangle \ \ ; V = \{t, T, F\} \ \ ; D = \{t\}$$

Los conjuntos de interpretación para los conectivos, esto es, O viene dado por:

$\widetilde{\wedge}$	t	T	F
t	$\{t\}$	{F,T}	{F}
T	$\{F,T\}$	$\{F,T\}$	$\{F,T\}$
F	$\{F\}$	$\{F,T\}$	$\{F\}$

$\widetilde{\vee}$	t	T	F
t	$\{t\}$	{t}	{t}
T	$\{t\}$	$\{F,T\}$	$\{F,T\}$
F	$\{t\}$	$\{F,T\}$	$\{F\}$

$\widetilde{\rceil}$	t	T	F
t	$\{t\}$	{t}	{F,T}
T	$\{t\}$	$\{F,T\}$	$\{F,T\}$
F	$\{F,T\}$	$\{F,T\}$	$\{F\}$

Los posibles conjuntos de interpretación para la negación no se presentarán por el momento, ya que los axiomas que queremos respetar en principio no involucran este conectivo. También hay que resaltar que todas las tablas presentadas para la conjunción y disyunción se comportan clásicamente para los valores de verdad clásicos, esto es, si nos restringimos a mirar solamente t y F, los valores asociados son los respectivos clásicos. Lo mismo debería pasar con cualquier posible tabla para la negación que se presente. En LPS, el único conectivo no clásico es el de superposición, el resto son los 'mismos' que en la Lógica Clásica.

Se habrá notado que no hemos presentado tampoco (por el momento) el conjunto que interpreta la implicación de LPS ($\rightarrow$), que es la misma que la clásica. La razón es la siguiente: para el retículo de proyectores cuánticos, no presentamos la interpretación de este conectivo porque no era estrictamente necesario para los primeros objetivos. Sabíamos que estaba relacionado con el orden dentro del retículo, pero no era una de las operaciones de definimos dentro de nuestra álgebra. Como uno de los objetivos es relacionar la semántica que proponemos para el retículo cuántico con la que proponemos para LPS, entonces puede resultar natural, en primera instancia, no comprometerse con una interpretación más para otro conectivo (luego mostraremos una posible manera de realizar esta tarea). Otra de las razones por la que en una primera instancia prescindiremos del conjunto que interpreta la implicación se relaciona directamente con un resultado metateórico de la Lógica Clásica y que también se da en el sistemas que estamos estudiando. Este resultado es el Metateorema de la Deducción (MTD), Tzouvaras prueba que en su sistema se cumplen algunos resultados que para nuestros fines son equivalentes a MTD. Lo presentaremos brevemente para luego poder usarlo. En el artículo original sobre LPS de Tzouvaras [111], se encuentran los resultados que justificaran el siguiente procedimiento. El lector interesado en el Metateorema de la Deducción puede consultar [7].

Definición 4.4.5. Metateorema de la Deducción (MTD).
Un sistema S satisface el *Metateorema de la Deducción* (MTD) cuando para cualquier conjunto de fórmulas Σ de S y cualesquiera fórmulas α y β de S, se cumple que:
Si $\Sigma, \alpha \vdash_S \beta$, entonces $\Sigma \vdash_S (\alpha \rightarrow \beta)$.

Presentaremos también otros dos resultados relacionados con MTD que son muy conocidos y que serán de utilidad en este momento. Estos resultados se relacionan con los conceptos de *corrección* y *completitud*, ya dados para Nmatrices en 3.3.4.

Definición 4.4.6. Corrección Fuerte. Un sistema S satisface *corrección fuerte* si y sólo si toda fórmula obtenida con el proceso de derivación en S a partir de Σ es una consecuencia lógica de Σ. En símbolos:
Si $\Sigma \vdash_S \alpha$, entonces $\Sigma \models_S \alpha$.

Definición 4.4.7. Completitud Fuerte. Un sistema S satisface *completitud Fuerte* si y solamente si todas las consecuencias lógicas de Σ pueden obtenerse con el proceso de derivación en S a partir de Σ. En símbolos:
Si $\Sigma \models_S \alpha$, entonces $\Sigma \vdash_S \alpha$.

Con lo dicho anteriormente se justifica lo siguiente: Queremos satisfacer con la Nmatriz anteriormente presentada los primeros axiomas de LPS, esto es, queremos que pase, por ejemplo, que

$$\models_M \phi \wedge \psi \to \phi \mid \psi.$$

Pero probaremos que

$$\phi \wedge \psi \models_M \phi \mid \psi.$$

Luego, propondremos un conjunto que interprete el conectivo ($\to$) y probaremos el otro enunciado. Para comenzar a probar lo anterior utilizaremos la definición 3.3.4.
Queremos ver que, utilizando la Nmatriz M^3_{LPS}, toda valuación que le asigne valor designado a $\phi \wedge \psi$, le asignará también valor designado a $\phi \mid \psi$. En nuestro caso, el valor designado es solamente t.
Mirando la tabla para la conjunción, vemos que la conjunción puede tener un valor designado sólo en el caso en que a los dos elementos de la conjunción también se le asigna el valor t. Toda valuación que cumpla este requisito también le asignará t a la fórmula $\phi \mid \psi$, como se puede ver en la tabla para el conectivo $|$. Por lo tanto, el primer axioma de LPS es válido según la semántica de M^3_{LPS}.
Ahora veamos que

$$\phi \mid \psi \models_M \phi \vee \psi.$$

Donde utilizamos el subíndice M en la consecuencia semántica para abreviar M^3_{LPS}. Veamos que toda valuación que asigna elemento designado a $\phi \mid \psi$, también le otorga elemento designado a $\phi \vee \psi$.
Mirando la tabla $\widetilde{|}$ se ve que los valores designados se obtienen en los caso (t,t), (t,T) y (T,t) y en todos esos casos la disyunción también tiene el valor t. El segundo axioma de LPS también es lógicamente válido para nuestra Nmatriz.
Aunque la siguiente afirmación no es un axioma del sistema LPS, es una consecuencia de los axiomas y significa que el conectivo $|$ es idempotente. Por lo tanto, analizaremos ahora la idempotencia de la superposición en nuestra semántica.
Idempotencia de $|$ en LPS. Veamos que

$$\phi \mid \phi \models_M \phi.$$

Como acá el conectivo tiene exactamente la misma fórmula de ambos lados, debemos concentrarnos en la diagonal de la tabla para $|$. Vemos que el único designado sobre la diagonal es el caso (t,t). Y por lo tanto, en ese caso ϕ tiene valor designado. Para el tercer axioma de LPS, $\phi \mid \psi \Leftrightarrow \psi \mid \phi$, debemos concentrarnos en los elementos transpuestos de la matriz $\widetilde{|}$, esto es, los que son simétricos con respecto a la diagonal (y están fuera de la diagonal, ya que el caso de la diagonal se considero en el axioma anterior). Vemos que fuera de la diagonal se obtiene t sólo para los casos (t,T) y (T,t) que son justamente transpuestos uno del otro, por lo tanto M^3_{LPS} valida el tercer axioma de LPS.

A esta altura, uno podría cuestionarse bajo qué criterio fue elegida la Nmatriz M^3_{LPS}. Lo cierto es que esta Nmatriz es sólo una posible entre muchísimas que podrían proponerse. Mostraremos una más como para que quede claro este punto. Es el lógico el que debe ponderar los criterios de elección para que su matriz se adapte lo mejor posible a su sistema. Luego deben extraerse las conclusiones y ver si se corresponden con las propiedades deseadas del sistema. El lector se preguntará también cuál es el motivo por el cual no comenzamos con una Nmatriz con $V = \{t, F\}$ y un único valor designado, $D = (t)$. Tal matriz tiene problemas para validar algunos axiomas como el de asociatividad del nuevo conectivo.

Presentaremos ahora otra Nmatriz de tres valores cuyo conjunto de elementos designados tiene dos elementos.

$$M^3_{LPS^2} = \langle V, D, O\rangle \quad ; \quad V = \{t, T, F\} \quad ; \quad D = \{t, T\}$$

$\widetilde{\wedge}$	t	T	F
t	$\{t\}$	{t,T}	{F}
T	$\{t, T\}$	$\{F\}$	$\{F\}$
F	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$

$\widetilde{\vee}$	t	T	F
t	$\{t\}$	{t}	{t}
T	$\{t\}$	$\{t, T\}$	$\{T\}$
F	$\{t\}$	$\{T\}$	$\{F\}$

$\widetilde{\mid}$	t	T	F
t	$\{t\}$	{t,T}	{F}
T	$\{t, T\}$	$\{t, T\}$	$\{F\}$
F	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$

Como ahora los valores designados son t, T, entonces debemos corroborar con esta Nmatriz, por ejemplo para el primer axioma de LPS, que cada vez que una valuación en M otorga un valor designado a $\phi \wedge \psi$, hace lo correspondiente con $\phi \mid \psi$.
Puede verse que la tabla para la conjunción tiene valores designados en los lugares $(t, t), (t, T), (T, t)$, y la superposición también tiene valores designados para estos casos. Puede corroborarse lo mismo para los otros tres axiomas que estamos analizando. Las pruebas presentadas en esta sección son sólo para mostrar la plausibilidad de utilizar una semántica basada en matrices no deterministas para los casos cuánticos. Si se desea cumplir con más axiomas , lo que hay que hacer es cambiar las matrices de la forma necesaria o, de ser necesario, restringir las valuaciones para simular la forma en la que LPS restringe las funciones de elección (pidiendo que sean, entre otras propiedades, asociativas, etc.).
Nos proponemos ahora presentar tablas que interpreten a la negación y a la implicación material y con ellas mostrar la validez de los axiomas de LPS sin tener que utilizar metateoremas ni propiedades como la completitud.

$\widetilde{\to}$	t	T	F
t	$\{t\}$	$\{t, T\}$	$\{F\}$
T	$\{t\}$	$\{t, T\}$	$\{F\}$
F	$\{t\}$	$\{t\}$	$\{t\}$

$\widetilde{\neg}$	t	T	F
	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{t\}$

Recordemos que todas las tablas deben coincidir con las tablas clásicas en los valores de verdad clásicos. Se eligió una negación que pase de valores designados a no designados y viceversa, pero este es un punto que puede ser cambiado. Recordemos que la Nmatriz no finita presentada para el retículo cuántico, cuyas valuaciones relacionamos con los estados cuánticos, no tenía esta propiedad. Se podría probar qué resultados se obtendrían con una negación con un punto fijo, esto es, tomar $v(T) = T$. La tabla para la implicación material trata de reproducir en el lenguaje objeto las propiedades metateóricas de la relación de consecuencia lógica.

> Observe que la negación quedó determinista aunque sea de tres valores. Tenemos dos valores designados e impusimos que la negación transforme valores designados en valores no designados y viceversa. Si a esto le sumamos que debe coincidir para los valores clásicos con la negación clásica, nos da como resultado la tabla presentada.

Comencemos mostrando que el primer axioma de LPS es una validez en nuestro sistema.

$$\models_M \phi \wedge \psi \to \phi \mid \psi$$

Usamos el subíndice M para abreviar la Nmatriz de tres valores M^3_{PLS2} presentada últimamente.
Queremos que para toda valuación se cumpla que:

$$v(\phi \wedge \psi \to \phi \mid \psi) \in D = \{t, T\}.$$

Por definición de valuación en una Nmatriz, $v(\phi \wedge \psi \to \phi \mid \psi) \in \widetilde{\to}_{(v(\phi\wedge\psi), v(\phi|\psi))}$.
Esto significa que esta valuación puede ser falsa si el conjunto $\widetilde{\to}$ contiene a F para las valuaciones de entrada dadas. Mirando la tabla para la implicación vemos que solamente puede ser F cuando el antecedente es designado y el consecuente, no designado. En nuestro caso, cuando $v(\phi \wedge \psi) \in \{t, T\}$ y $v(\phi \mid \psi) = F$. En la tabla para $\widetilde{\wedge}$ los valores designados ocupan los lugares $(t, t), (t, T), (T, t)$ y (T, T), mientras que los valores no designados (F) en la tabla para $\widetilde{|}$ ocupan los lugares $(t, F), (T, F), (F, F), (F, T), (F, t)$. Por lo tanto, ninguna valuación cumple simultáneamente ambas condiciones. El primer axioma de LPS es una verdad lógica de nuestra semántica.
Ahora veamos que

$$\models_M \phi \mid \psi \to \phi \vee \psi.$$

Queremos que toda valuación cumpla que $v(\phi \mid \psi \to \phi \vee \psi) \in D$.
Como $v(\phi \mid \psi \to \phi \vee \psi) \in \widetilde{\to}_{(v(\phi|\psi), v(\phi\vee\psi))}$, entonces este enunciado podrá ser falso solamente si el conjunto anterior contiene a F. Esto último se da sólo si $v(\phi \mid \psi) \in \{t, T\}$ y $v(\phi \vee \psi) = F$, como se puede apreciar en la tabla para $\widetilde{\to}$.
La superposición es designada en los casos $(t, t), (t, T), (T, t), (T, T)$. Mientras que la disyunción puede ser F solamente en el caso (F, F). Claramente, estos conjuntos son disjuntos, por lo tanto no existe una valuación que asigne un valor no designado al enunciado en cuestión. Queda probado lo que queríamos.
Tercer axioma.

$$\models_M \phi \mid \psi \to \psi \mid \phi.$$

Procediendo de igual forma que hasta ahora, este enunciado será falso solamente si : $v(\phi \mid \psi) \in D = \{t, T\}$ y $v(\psi \mid \phi) = F$.

Puede verse que la tabla para la superposición tiene los valores designados sobre la diagonal u ocupando lugares transpuestos, esto es, simétricos con respecto a la diagonal. Por lo tanto, cada vez que el antecedente sea designado, pasará lo mismo con el consecuente.

> Para ver la idempotencia del conectivo $|$, se debe restringir el caso anterior a las posiciones designadas sobre la diagonal.

Cuarto axioma de LPS.

$$\models_M (\phi \mid \psi) \mid \sigma \to \phi \mid (\psi \mid \sigma).$$

$v((\phi \mid \psi) \mid \sigma \to \phi \mid (\psi \mid \sigma)) \in \widetilde{\to}_{(v((\phi|\psi)|\sigma), v(\phi|(\psi|\sigma)))}$.

La valuación podrá tomar el valor F si $v((\phi \mid \psi) \mid \sigma) \in D$ y $v(\phi \mid (\psi \mid \sigma)) = F$. Puede verse la complejidad mayor de este caso debido al anidamiento del conectivo. Vamos a separar en casos para analizar cada uno de forma independiente y lograr mayor claridad. Cuando utilicemos la denotación de lugares como en los ejemplos anteriores, esto es, $(t, T), (t, t), etc.$, el primer lugar representa el valor de verdad de la fórmula que se encuentra a la izquierda del conectivo principal del enunciado, y el segundo lugar corresponde al valor de valuación de la fórmula a su derecha. Por ejemplo, si tenemos $v((\phi \mid \psi) \mid \sigma)$, el par (t, T) se utilizará para denotar: $v(\phi \mid \psi) = t$ y $v(\sigma) = T$.
El antecedente será designado, esto es, $v((\phi \mid \psi) \mid \sigma) \in D$ en los casos $(t, t), (t, T), (T, t), (T, T)$. Por otro lado, $v(\phi \mid (\psi \mid \sigma)) = F$ en los casos $(t, F), (T, F), (F, t), (F, T), (F, F)$. Si no existen valuaciones que estén en ambos conjuntos, el enunciado será válido.

Caso (t, t)

$$v(\phi \mid \psi) = t \ \ , \ \ v(\sigma) = t$$

Este caso lo separaremos en cuatro ítemes, ya que existen cuatro formas distintas de que $\phi \mid \psi$ tenga el valor t (se ve mirando la tabla).

- a) $v(\phi) = t, v(\psi) = t$
- b) $v(\phi) = t, v(\psi) = T$
- c) $v(\phi) = T, v(\psi) = t$
- d) $v(\phi) = T, v(\psi) = T$

En todos estos cuatro casos vale que $v(\sigma) = t$. Si ahora miramos los casos para los cuales el consecuente podía valer F, vemos que uno solo comienza con t, (t, F), y uno solo con T, (T, F). Para el primer caso, esto significaría que $v(\phi) = t$ y $v(\psi \mid \sigma) = F$. Lo primero se cumple en los casos *a*) y *b*), pero en ambos casos se tiene que las otras dos variables, ψ, σ tiene valores designados y, por lo tanto no pueden dar un F para la superposición $\psi \mid \sigma$. Los casos *c*) y *d*) cumplen con el requisito de comenzar con T, que era la segunda posibilidad a analizar. También puede verse que estos dos caso no pueden dar una combinación (T, F). Todos los casos que dan valor designado al antecedente, también dan designado al consecuente.

Caso (T,T)

$$v(\phi \mid \psi) = T, v(\sigma) = T$$

La superposición puede dar valor T en tres casos.

- a) $v(\phi) = t, v(\psi) = T$
- b) $v(\phi) = T, v(\psi) = t$
- c) $v(\phi) = T, v(\psi) = T$

En todos estos tres casos pasa que $v(\sigma) = T$.
Si nos fijamos los casos para que $v(\phi \mid (\psi \mid \sigma)) = F$ (consecuente no designado), vemos que uno solo comienza con T, el par (T, F). Los caso $b), c)$ cumplirían este requisito, pero en ninguno de los casos se puede llegar a una superposición entre ψ y σ de valor F para satisfacer la segunda parte del par (T, F). Para que el consecuente sea F debe haber al menos uno de los superpuestos que sean F, o ϕ o $\psi \mid \sigma$. Y vemos que esto no se puede cumplir en ninguno de los casos $a), b), c)$ presentados. Esta es la razón por la cual no encontraremos ningún contraejemplo. Todos los casos que dan un consecuente F tienen al menos uno de los elementos de la superposición valuado a F. Pero con los valores dados para los casos de antecedente designado nunca podemos obtener por superposición un valor F. Por lo tanto, el resto de los casos se resuelven de forma análoga.
Pasamos al quinto y último axioma de LPS.

$$\models_M \phi \wedge \neg\psi \to (\phi \mid \psi \leftrightarrow \neg\phi \mid \neg\psi).$$

$v(\phi \wedge \neg\psi \to (\phi \mid \psi \leftrightarrow \neg\phi \mid \neg\psi)) \in V \setminus D = \{F\}$ si, y sólo si, $v(\phi \wedge \neg\psi) \in D$ y $v(\phi \mid \psi \leftrightarrow \neg\phi \mid \neg\psi) \in V \setminus D$.
Analicemos los casos para los cuales el antecedente puede ser designado. Como el conectivo principal de la fórmula es una conjunción,

$$v(\phi \wedge \neg\psi) \in \widetilde{\wedge}_{(v(\phi), v(\neg\psi))}.$$

Mirando la tabla de la conjunción, vemos que un valor designado solamente es posible en los casos $(t, t), (t, T), (T, t)$.

> Antes de seguir, queremos llamar la atención acerca de dos cosas. Definimos en el capítulo 3 el criterio de adecuación de Nmatrices para el fragmento positivo de la Lógica Clásica (3.3.6). Nuestra conjunción adecuada en ese sentido, vea el caso (T, T). Nuestra Nmatriz asigna F cuando los dos valores de entrada son designados. Esto puede cambiarse si uno lo desea, habría que poner $\{T\}$ donde ahora está $\{F\}$. De todas formas, esto no altera los razonamientos expuesto. Sin contar que nuestras Nmatrices deben ser no adecuadas si pretenden representar propiedades de la lógica cuántica como, por ejemplo, no distributividad.
> Por otro lado, el axioma que ahora estamos considerando tiene una doble implicación. Y no hemos presentado el conjunto de interpretación para este conectivo (y tampoco es obvio a esta altura que sea interdefinible en función de la conjunción y la implicación). Consideraremos para lo relativo a este axioma que la doble implicación sólo puede dar un valor designado cuando ambas fórmulas conectadas son valuadas al mismo conjunto, esto es, ambas son designadas o ambas son no designadas.

Dijimos que $v(\phi \wedge \neg\psi) \in D$ en los casos $(t, t), (t, T), (T, t)$. Analicemos cada uno de los casos:

- (t,t): $v(\phi) = t, v(\neg\psi) = t$. Como nuestra negación es determinista, entonces se sigue que $v(\psi) = F$. Entonces este caso se traduce como $v(\phi) = t, v(\psi) = F$. Con estos valores analicemos ahora las superposiciones $\phi \mid \psi, \neg\phi \mid \neg\psi$ para ver si pueden tener valores de verdad pertenecientes a distintos conjuntos, en el sentido de que uno sea designado y el otro no lo sea. Viendo la tabla para la superposición, $\phi \mid \psi$ es F cuando uno de los superpuestos es falso, por lo tanto $v(\phi \mid \psi) = F$ en este caso. Lo mismo ocurre con $\neg\phi \mid \neg\psi$, ya que en este caso, debido a que la negación es determinista, $v(\neg\phi) = F$ y $v(\neg\psi) = t$. Esto significa que ambos son no designados y la doble implicación sera designada.

- (t,T): $v(\phi) = t, v(\neg\psi) = T$. Como ningún valor de la negación en nuestra tabla para $\tilde{\neg}$ arroja el resultado T, entonces no es posible esta combinación.

- (T,t): $v(\phi) = T, v(\neg\psi) = t$. Por lo tanto, $v(\phi) = T$ y $v(\psi) = F$. De nuevo tenemos uno de los superpuestos de $\phi \mid \psi$ y $\neg\phi \mid \neg\psi$ que será no designado, y por lo tanto ambas superposiciones serán no designadas provocando una doble implicación designada. Por lo tanto, todos los casos que producen valuaciones designadas en el antecedente, hacen lo mismo con el consecuente.

Hemos probado que todos los axiomas de LPS son verdades lógicas para M^3_{LPS2}.
Llegado este punto, uno podría tratar de analizar qué beneficios obtendría por utilizar cada una de las semánticas para LPS, la semántica original basada en funciones de elección, o la basada en matrices no deterministas. Posiblemente, cada una tenga sus beneficios e inconvenientes que deberán analizarse en cada caso. No está de más mencionar que nosotros hemos probado los axiomas de LPS como válidos para nuestra Nmatriz, y además obtenido la idempotencia del conectivo de superposición, sin tener que restringir las valuaciones dentro de los conjuntos de interpretación. La semántica original de LPS debe restringir las funciones de elección, pidiendo que sean asociativas, para probar la asociatividad. Si algún lector interesado intenta hacer las pruebas de los axiomas de LPS utilizando la primera Nmatriz presentada con un solo valor designado, se encontrará con algunos inconvenientes que lo obligarán a cambiar un poco las tablas. Es esta la razón por la cual nosotros probamos solamente los primeros y, además, utilizamos resultados metateóricos que nos permitieron no utilizar tabla para la implicación. Recordando que hemos obtenido para el retículo de proyectores cuánticos también una matriz de tres valores mediante rexpansión, podrían compararse estas Nmatrices para ver el grado de parecido o coincidencia. La dificultad estará en que para el caso del retículo no teníamos ninguna conectiva de superposición. Tendríamos que comparar el conjunto de interpretación para la conectiva de superposición de LPS con los respectivos conjuntos para la disyunción y conjunción del retículo. Recordando que la esencia de la superposición es encontrarse a mitad de camino entre ambos conectivos.

4.4.4 Análisis de la desigualdad distributiva en LPS

Vamos a estudiar brevemente la relación entre la distributividad y las semánticas de LPS (la original y la Nmatricial). Como el retículo de proyectores cuánticos es no distributivo, entonces sería de esperar que las semánticas propuestas den cuenta de este hecho. Recordemos que para que un retículo sea distributivo debe cumplirse la propiedad 2.3.5. También nombramos que una de las desigualdades de 2.3.5 se cumple siempre. Veamos ahora si tal es el caso para nuestra Nmatriz para LPS y si, además, invalidamos la otra

desigualdad.
Comencemos viendo si se cumple la desigualdad que debería cumplirse siempre, esto es, queremos ver que

$$\models_M (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \to p \wedge (q \vee r)$$

Queremos que toda valuación v satisfaga lo siguiente:

$$v((p \wedge q) \vee (p \wedge r) \to p \wedge (q \vee r)) \in D = \{t, T\}.$$

Esto es, que cada vez que $v((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \in D$, pase también que $v(p \wedge (q \vee r)) \in D$. O dicho de otra forma, que no puede existir ninguna valuación que otorgue valor designado al antecedente y no designado al consecuente. Analicemos los casos para los cuales el consecuente puede ser falso. Como $v(p \wedge (q \vee r)) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p),v(q \vee r))}$, según la tabla para la conjunción, la misma puede ser falsa en los siguientes seis casos: (T,T); (F,t); (t,F); (F,T); (T,F); (F,F). Hay que probar que en ninguno de estos casos se da que el antecedente tenga valor designado.

- <u>(T;T)</u> $v(p) = T$ y $v(q \vee r) = T$.
  Como $v(q \vee r) = T \in \widetilde{\vee}_{(v(q),v(r))}$, tiene que darse alguno de los siguientes tres casos, en los cuales el valor de la disyunción puede tomar el valor T: i) $v(q) = T$ y $v(r) = T$, ii) $v(q) = T$ y $v(r) = F$, o iii) $v(q) = F$ y $v(r) = T$.

  i) $v(p) = T, v(q) = T, v(r) = T$. Entonces, $v(p \wedge q) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p),v(q))} = \widetilde{\wedge}_{(T,T)} = \{F\}$. Entonces, $v(p \wedge q) = F$. De la misma forma, $v(p \wedge r) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p),v(r))} = \widetilde{\wedge}_{(T,T)} = \{F\}$. Con lo cual tenemos que $v(p \wedge r) = F$. Por lo tanto, para este caso tenemos que $v((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \in \widetilde{\vee}_{(F,F)} = \{F\}$. Consecuentemente, el antecedente no es designado como quería mostrarse.

  ii) $v(p) = T, v(q) = T, v(r) = F$. $v(p \wedge q) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p),v(q))} = \widetilde{\wedge}_{(T,T)} = \{F\}$. Entonces, $v(p \wedge q) = F$. De la misma forma, $v(p \wedge r) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p),v(r))} = \widetilde{\wedge}_{(T,F)} = \{F\}$. Con lo cual tenemos que $v(p \wedge r) = F$. Por lo tanto, para este caso también tenemos que $v((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \in \widetilde{\vee}_{(F,F)} = \{F\}$. Al igual que en el caso *i*), el antecedente no es designado como quería mostrarse.

  iii) $v(p) = T, v(q) = F, v(r) = T$. $v(p \wedge q) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p),v(q))} = \widetilde{\wedge}_{(T,F)} = \{F\}$. Entonces, $v(p \wedge q) = F$. Razonando de igual forma, $v(p \wedge r) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p);v(r))} = \widetilde{\wedge}_{(T,T)} = \{F\}$. Con lo cual tenemos que $v(p \wedge r) = F$. Por lo tanto, para este caso también tenemos que $v((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \in \widetilde{\vee}_{(F,F)} = \{F\}$. Al igual que en los casos *i*) y *ii*) pasa que el antecedente tampoco puede tener valor designado cuando el consecuente es no designado. Queda completo este caso.

- <u>(F,t)</u> $v(p) = F$ y $v(q \vee r) = t$.
  En todos los caso en los cuales $v(p) = F$, vale el siguiente razonamiento. Como p está en los dos disyuntos del antecedente, entonces, al ser este falso, va a producir que cada una de las conjunciones $p \wedge q$ y $p \wedge r$ tomen el valor F. En consecuencia la disyunción $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ necesariamente deberá ser falsa. Esto es independiente del valor que tomen las otras proposiciones. En este caso el antecedente no puede tener valor designado.

- <u>(t,F)</u> $v(p) = t$ y $v(q \vee r) = F$.
  Como $v(q \vee r) = F \in \widetilde{\vee}_{(v(q);v(r))}$, entonces solamente puede darse un caso; $v(q) =$

$F, v(r) = F$. Esto se debe a que en la tabla para este conectivo se da el valor F solamente para la entrada (F, F). Entonces, tenemos que $v(p) = t$, $v(q) = F$ y $v(r) = F$. Como la conjunción es no designada cuando alguno de sus conyuntos lo es, $v((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \in \widetilde{\vee}_{(v(p\wedge q), v(p \wedge r))} = \widetilde{\vee}_{(F,F)} = \{F\}$. Por lo tanto, el antecedente es no designado.

- <u>(F,T)</u> $v(p) = F$ y $v(q \vee r) = T$.
  Como $v(p) = F$, entonces vale el razonamiento presentado en el caso (F, t).

- <u>(T;F)</u> $v(p) = T$ y $v(q \vee r) = F$.
  Dado que $v(q \vee r) = F$, sólo puede darse que $v(q) = F$ y $v(r) = F$. Esto es, $v(p) = T$, $v(q) = F$ y $v(r) = F$. Entonces $v((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \in \widetilde{\vee}_{(v(p\wedge q), v(p \wedge r))} = \widetilde{\vee}_{(F,F)} = \{F\}$.

- <u>(F;F)</u> $v(p) = F$ y $v(q \vee r) = F$.
  Es fácil ver que en este caso tampoco puede darse que el antecedente tome un valor designado.

Por lo tanto, hemos probado que no puede darse el caso en el cual el antecedente, $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$, tome un valor designado y el consecuente, $(p \wedge (q \vee r))$, sea no designado. Probamos que se cumple en nuestra semántica la parte de la desigualdad distributiva que debería cumplirse en el retículo cuántico.
Ahora deberíamos mostrar que no se cumple la implicación inversa, esto es, que nuestra semántica de Nmatrices para el retículo mantiene la no distributividad deseada.
Queremos ver que pasa lo siguiente:

$$\not\models_M p \wedge (q \vee r) \to (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Tomemos el caso $v(p) = T$, $v(q) = T$, $v(r) = T$. Entonces, tendremos que:

- $v(p \wedge q) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p), v(q))} = \widetilde{\wedge}_{(T,T)} = \{F\}$
- $v(p \wedge r) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p), v(r))} = \widetilde{\wedge}_{(T,T)} = \{F\}$

Por lo tanto,

$$v((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \in \widetilde{\vee}_{(v(p\wedge q), v(p \wedge r))} = \widetilde{\vee}_{(F,F)} = \{F\}.$$

Por otro lado,

- $v(p \wedge (q \vee r)) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p), v(q \vee r))} = \widetilde{\wedge}_{(T, v(q \vee r))}$

Debido a que existe una valuación que hace que $v(q \vee r) = t$, cuando $v(q) = T$ y $v(r) = T$ (lo que se puede corroborar viendo la tabla para $\widetilde{\vee}$), entonces puede darse el caso siguiente:

$$v(p \wedge (q \vee r)) \in \widetilde{\wedge}_{(v(p), v(q \vee r))} = \widetilde{\wedge}_{(T,t)} = \{t, T\}.$$

Esto muestra que no se cumple la última implicación, ya que existe una valuación que otorga valor designado al antecedente y falso al consecuente.

En todo este razonamiento estuvimos asociando la desigualdad correspondiente al orden del retículo $(\leq)$ con la implicación material de nuestro sistema lógico. Podría argumentarse que ninguna buena implicación se refleja totalmente en las propiedades correspondientes al orden del retículo. Por supuesto, podría ser este el caso. Pero es un tema que nos sacaría por el momento de foco, y lo dejamos para un desarrollo más profundo en futuros trabajos.

> Para los resultados obtenidos es necesario que nuestra Nmatriz no sea estrictamente adecuada en términos de la definición de Avron 3.3.6, ya que esta adecuación está pensada para el fragmento positivo de la Lógica Clásica, y este fragmento incluye la propiedad de distribución, que no queremos validar en nuestra semántica. Nuestra Nmatriz fue, de algún modo, construida siguiendo esas ideas, pero debimos alejarnos en alguna medida para poder cumplir los axiomas y requisitos de índole cuántica.

El mismo análisis podría ser aplicado a la semántica de funciones de elección, original de LPS. Para tal fin, debe tenerse la siguiente precaución: Como LPS reproduce la lógica proposicional clásica, entonces validará distribución para fórmulas que no incorporen el nuevo conectivo de superposición. Por lo tanto, si quiere verse alguna falla de distribución, debe ser analizado el caso en el cual alguna de las fórmulas en cuestión es de la forma $p \mid q$. Para el análisis que queremos hacer acerca de la distributividad en LPS en el marco de su semántica original, es suficiente que tomemos un caso particular de la desigualdad distributiva:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \leq p.$$

Que es un caso particular en el cual $r = \neg q$. Esta desigualdad debe cumplirse siempre. Si esta semántica mantiene la no distributividad del retículo, entonces no tiene que darse la desigualdad recíproca, esto es:

$$p \not\leq (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

Tomemos $p = r \mid s$, con p y s fórmulas atómicas. En este caso, la proposición que deberíamos probar que no es un teorema de LPS (con la semántica de funciones de elección) es:

$$r \mid s \rightarrow (r \mid s \wedge q) \vee (r \mid s \wedge \neg q).$$

Lo que significa que queremos probar:

$$\not\models_{LPS} r \mid s \rightarrow (r \mid s \wedge q) \vee (r \mid s \wedge \neg q)$$

Utilizando las definiciones 4.4.2 y 4.4.3, de lo anterior se pueden seguir sencillamente los siguientes razonamientos:

$$\not\models f'(r \mid s \rightarrow (r \mid s \wedge q) \vee (r \mid s \wedge \neg q))$$

Donde ahora la consecuencia lógica es la de la Lógica Clásica y f' representa el mapeo de colapso de las definiciones citadas. De lo anterior se desprende la siguiente cadena de consecuencias:

$$\Longleftrightarrow \not\models f'(r \mid s) \rightarrow f'((r \mid s \wedge q) \vee (r \mid s \wedge \neg q))$$

$$\Longleftrightarrow \not\models f'(r \mid s) \rightarrow f'(r \mid s \wedge q) \vee f'(r \mid s \wedge \neg q)$$

$$\Longleftrightarrow \not\models f'(r \mid s) \rightarrow (f'(r \mid s) \wedge f'(q)) \vee (f'(r \mid s) \wedge f'(\neg q))$$

$$\Longleftrightarrow \not\models f'(r \mid s) \rightarrow (f'(r \mid s) \wedge f'(q)) \vee (f'(r \mid s) \wedge \neg f'(q))$$

Recordando que q es una formula atómica, y por lo tanto del lenguaje proposicional clásico, se tiene que $f'(q) = q$. Con lo cual lo anterior puede escribirse como:

$$\not\models f'(r \mid s) \to (f'(r \mid s) \wedge q) \vee (f'(r \mid s) \wedge \neg q)$$

Recordemos que el mapeo dado por f' cumple que $f'(r \mid s) = f(f'(r), f'(s))$, y como en nuestro ejemplo tanto r como s son atómicas, entonces $f'(r) = r$ y $f'(s) = s$, y en consecuencia $f'(r \mid s) = f(r, s) = f(\{r, s\})$. Esto es, el mapeo debe hacer una elección entre las proposiciones s y r. Si se admiten elecciones totalmente generales, incluso funciones random, es decir, funciones de elección azarosas, entonces el mapeo f' podría decidirse por la proposición r (por ejemplo) en la primera aparición y por s en las otras dos apariciones. Esto significa que dado el mismo conjunto de entrada, $\{r, s\}$, la salida podría ser diferente en cada aparición o situación. Recordemos también que el conectivo de superposición | está inspirado en la superposición cuántica, y que su mapeo está vinculado al colapso de la función de onda. Si este colapso pudiese depender de la situación especifica o contexto (como nos gustaría para la contextualidad), entonces tiene mucho sentido que la función f se comporte de esa manera. Lo que queremos decir es que esta función de elección debe comportarse de forma no determinista si queremos realmente que no se cumpla la otra parte de la desigualdad distributiva. Si la función f eligiese exactamente la misma proposición en cada una de las apariciones en la última fórmula, entonces se validaría la implicación no deseada. Esto forma indeterminista de f nos permite encontrar una similitud con la semántica de matrices no deterministas. Que esta función pueda tener este comportamiento *random* viene justificado por lo siguiente, que esta expresado directamente en el artículo original de Tzouvaras ([111]):

> "La idea básica es que el colapso del estado compuesto $c_0 \left|\phi\right\rangle + c_1 \left|\psi\right\rangle$ en uno de los estados $\left|\phi\right\rangle, \left|\psi\right\rangle$ se puede ver, desde el punto de vista de la lógica pura, como una elección (más o menos aleatoria) del conjunto de posibles resultados $\{\left|\psi\right\rangle, \left|\phi\right\rangle\}$. Esto se debe a que, desde el punto de vista de la lógica pura, las probabilidades son irrelevantes o, lo que es lo mismo, los estados $\left|\psi\right\rangle$ y $\left|\phi\right\rangle$ se consideran equiprobables. En tal caso, la superposición de estos estados es única y el resultado del colapso puede decidirse por el *lanzamiento de una moneda* o, más estrictamente, por una función de elección que actúa sobre pares de estados observables, que en nuestro caso coinciden con pares de oraciones de L. Esto por supuesto constituye una desviación importante del tratamiento estándar de superposición, según el cual no hay una sola superposición de $\left|\psi\right\rangle$ y $\left|\phi\right\rangle$ sino infinitas, en realidad, tantas como el número de combinaciones lineales $c_0 \left|\phi\right\rangle + c_1 \left|\psi\right\rangle$, para $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$. Entonces, la lógica presentada aquí no es la lógica de la superposición, como este concepto es usado actualmente y se entiende en la física actual. Es más bien la lógica de la superposición, cuando esta última se entiende como el 'extracto lógico' del concepto de física correspondiente".

Por lo tanto, teniendo derecho a la elección *al azar*, existirá una f que elija r para el antecedente y s en las dos del consecuente. En este caso, la expresión quedará como:

$$\not\models r \to (s \wedge q) \vee (s \wedge \neg q).$$

Claramente, asignando un valor de verdad designado a r y no designado a s, es decir, $v(r) = 1$ y $v(s) = 0$ (y recordando que esta semántica es bivaluada), se logra lo deseado.

Acabamos de mostrar que si se admiten funciones de elección azarosas, tenemos la no distributividad, esto es, no se valida la implicación anterior. El problema surge al ver que aceptando tales funciones de elección, tampoco se valida la desigualdad que debe cumplirse siempre en nuestro retículo de proyectores. Es decir, tampoco pasa que $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \rightarrow p$. No se estaría cumpliendo en este sistema, $\models (s \mid r \wedge q) \vee (s \mid r \wedge \neg q) \rightarrow s \mid r$. Para ver esto, alcanza con que la función de elección seleccione s en las dos primeras superposiciones y, r en la última. Lo tendríamos asegurado para proposiciones clásicas, pero no cuando entra el nuevo conectivo.
En las Nmatrices vimos que se cumplían las propiedades deseadas. Aunque la prueba que hicimos en ese caso no involucró el conectivo de superposición, las Nmatrices cumplen con *estructuralidad uniforme*, es decir, respetan sustitución uniforme, lo que hace que la prueba dada sea general. Llegado este punto, el defensor de la semántica de elección podría buscar un subconjunto particular de todas estas funciones que cumplan las restricciones deseadas. Esta es la forma en la que Tzouvaras va procediendo en general. Seguramente, existen maneras de ir reduciendo el conjunto de funciones de elección de la forma conveniente. Lo que queremos destacar es que con la semántica Nmatricial salieron estas propiedades de forma natural (y no solamente estas). Esta puede ser una de las ventajas o puntos a favor para inclinarse por las Nmatrices al interpretar LPS.

A modo de ejemplo , para ver el funcionamiento en un caso especial, veamos que con las Nmatrices se cumple que $\models_M (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \rightarrow p$, cuando $p = r \mid s$.

$$\models_M (r \mid s \wedge q) \vee (r \mid s \wedge \neg q) \rightarrow r \mid s$$

Procediendo como en las pruebas anteriores para Nmatrices: $v((r \mid s \wedge q) \vee (r \mid s \wedge \neg q) \rightarrow p) \in D$ si no puede pasar que $v((r \mid s \wedge q) \vee (r \mid s \wedge \neg q)) \in D$ y $v(r \mid s) \in V \setminus D = \{F\}$.

$$\text{como } v((r \mid s \wedge q) \vee (r \mid s \wedge \neg q)) \in \widetilde{\vee}_{(v(r|s\wedge q),v(r|s\wedge\neg q))}$$

, entonces esta valuación puede dar valor designado en los casos:

$$(t,t),(t,T),(T,t),(T,T),(t,F),(F,t),(F,T),(T,F).$$

Hay que ver que en todos estos casos el consecuente es designado.

- <u>(t,t)</u> $v(r \mid s \wedge q) = t$ y $v(r \mid s \wedge \neg q) = t$. Debido a que nunca q y $\neg q$ pueden tomar simultáneamente valores designados (según nuestra tabla para la negación) y que la tabla para la conjunción solamente da el valor t en los casos donde al menos hay un conyunto valuado a t, se prueba que no existe ninguna valuación que satisfaga ambas condiciones.

- <u>(t,T)</u> $v(r \mid s \wedge q) = t$ y $v(r \mid s \wedge \neg q) = T$. Se aplica el mismo razonamiento del caso anterior. En este caso, tampoco es posible esta valuación.

- <u>(T,t)</u> $v(r \mid s \wedge q) = T$ y $v(r \mid s \wedge \neg q) = t$. Este caso es simétrico y se aplica la misma conclusión.

- <u>(T,T)</u> $v(r \mid s \wedge q) = T$ y $v(r \mid s \wedge \neg q) = T$. De la misma forma, si alguno entre q y $\neg q$ es F, la conjunción no puede dar el valor T.

- (t,F) $v(r \mid s \wedge q) = t$ y $v(r \mid s \wedge \neg q) = F$. Este caso y el siguiente pueden darse. Como en la conjunción se obtiene el valor t si al menos uno de los dos conyuntos tiene el valor t, tenemos tres casos posibles:

  1. $v(r \mid s) = t$ *y* $v(q) = t$.
  2. $v(r \mid s) = t$ *y* $v(q) = T$.
  3. $v(r \mid s) = T$ *y* $v(q) = t$.

  Y como puede verse, en ninguno de los casos pasa que $v(r \mid s) \in V \setminus D = \{F\}$.

- (F,t) $v(r \mid s \wedge q) = F$ y $v(r \mid s \wedge \neg q) = t$. Este caso es posible, pero a diferencia del caso anterior, mirando la segunda valuación existen solamente dos posibilidades (ya que una negación nunca arroja un valor T). Los dos casos son:

  1. $v(r \mid s) = t$ *y* $v(q) = F$
  2. $v(r \mid s) = T$ *y* $v(q) = F$

  Nuevamente, puede verse que ninguno de los casos cumple que $v(r \mid s) = F$.

- (F,T) $v(r \mid s \wedge q) = F$ y $v(r \mid s \wedge \neg q) = T$
  La segunda conjunción puede ser T solamente en los casos (t, T) o (T, t). Como una negación no puede tener el valor T, entonces solamente queda la segunda opción. Por lo tanto, $v(r \mid s) = T$ y $v(\neg q) = t$. O sea, $v(r \mid s) = T$ y $v(q) = F$. Donde puede verse que $r \mid s$ toma valor designado.

- (T,F) $v(r \mid s \wedge q) = T$ y $v(r \mid s \wedge \neg q) = F$
  En este caso, puede verse que la primera conjunción puede tomar el valor T solamente en los casos (T, t) y (t, T), y en ambos casos tenemos un valor designado para la superposición.

Hemos probado que, en el caso en el cual $p = r \mid s$, nuestra Nmatriz también cumple la implicación deseada. Razonamientos análogos valen para el caso donde $q = r \mid s$. También se cumple lo mismo cuando p y q son ambos superposiciones de otras proposiciones.
Llegado este momento, el lector se preguntará por qué no se procedió en la última prueba de forma inversa. Es decir, viendo que cada vez que el consecuente es falso, $v(r \mid s) = F$, nunca se da el caso en que el antecedente sea designado. Esta forma es más simple y corta. Pero nuestra intención era mostrar y desarrollar el ejemplo lo máximo posible para mostrar el funcionamiento en este caso especial. El lector interesado puede realizar la prueba de esa manera (o de otras más ingeniosas).

4.4.5 Observaciones finales

Aunque la Nmatriz presentada para la lógica de la superposición de Tzouvaras respeta los axiomas de este sistema y, además, la desigualdad distributiva de la forma deseada, no es la Nmatriz definitiva para este sistema. El motivo es el siguiente. Puede probarse que una semántica para el retículo cuántico no puede ser veritativo funcional para más de un conectivo [89]. Esta condición, junto con una relación de consecuencia lógica que conserve valores designados (y algunas proposiciones básicas de la cuántica que debemos respetar), implican que una Nmatriz para el retículo de proyectores no puede ser adecuada en el sentido Avron (3.3.6) para más de un conectivo. Como la tabla para la negación escogida para LPS cumple con el criterio de adecuación para este conectivo, entonces las correspondientes tablas para la conjunción y disyunción no pueden cumplirlo. Puede verse que la tabla escogida para la conjunción de LPS no es adecuada, pero sí lo es la de nuestra disyunción. Esto produce que nuestra Nmatriz valide la siguiente inferencia, que no es válida en el retículo cuántico:

$$\neg(\neg\phi \vee \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)) \models_M \neg\psi.$$

Para solucionar esto, se debe cambiar la tabla de la disyunción o la de la negación de forma tal que queden sin cumplir el criterio de adecuación impuesto por Avron para el fragmento positivo de la lógica clásica. Una opción, tal vez la más sencilla, podría ser que la negación tenga un punto fijo, es decir, que $\tilde{\neg}_{(T)} = \{T\}$, en lugar de $\tilde{\neg}_{(T)} = \{F\}$. Alguien podría también estar dispuesto a cambiar la noción de consecuencia lógica (como se propone para el caso de quasets en nuestro apéndice). Esto último es más riesgoso, ya que involucra muchos cambios en todos lados. Finalmente, podría cambiarse la tabla para la disyunción haciendo que en los lugares necesarios no sea adecuada. No vamos a analizar en este momento estas opciones, quedarán como trabajo pendiente para un futuro cercano. Sólo para finalizar esta sección nombraremos que (según [89]) la Nmatriz definitiva tampoco debe validar la siguiente inferencia:

$$\phi \wedge \neg(\phi \wedge \psi) \models_M \neg\psi.$$

Por suerte, gracias a que nuestra conjunción no es adecuada, no valida esta inferencia. Puede verse esto asignando el valor T a cada una de las proposiciones. Resumiendo, la Nmatriz definitiva para dar la semántica de un retículo cuántico puede ser adecuada a lo sumo para un conectivo. Además, debe cumplir la desigualdad distributiva discutida y no validar estas últimas inferencias presentadas. Es un desafío encontrar esta Nmatriz y ver si tales requisitos pueden cumplirse con solamente tres valores de verdad o si, por lo contrario, debe ser agregado alguno más (o cambiar la cantidad de valores designados).

4.5 Los Quasets y las Nmatrices

En esta última sección queremos presentar brevemente uno de los temas que, por cuestiones de tiempo, quedaron fuera del núcleo central de este trabajo, pero que será desarrollado en próximos trabajos: La dependencia de la semántica utilizada para dar significado a nuestro retículo con la teoría de conjuntos subyacente a la misma. Es sabido que la Teoría de Modelos tiene una fuerte dependencia con la teoría de conjuntos, por lo general, con ZFC (Zermelo-Fraenkel con axioma de elección). En linea general, cada semántica presupone una teoría de conjuntos subyacente. En nuestro caso, cuando utilizamos las Nmatrices, estábamos suponiendo que todos los conjuntos utilizados para interpretar conectivos eran conjuntos clásicos, es decir, conjuntos que respetan los axiomas de ZFC. Vamos ahora a proponer un cambio en este nivel, comenzaremos por analizar (dejando su análisis total para futuros trabajos) las consecuencias de cambiar, en la metateoría, ZFC por QST, esto es, conjuntos clásicos por quaconjuntos o quasets (ver [39] y [69]).
De acuerdo a la opinión de Dalla Chiara y Toraldo di Francia, los sistemas cuánticos compuestos se pueden describir como "entidades de tipo intensional". En su enfoque, las colecciones de objetos microscópicos se llaman quasets. La teoría QST [38, 39] se basa en la observación de que los sistemas compuestos de la mecánica cuántica parecen compartir

ciertos aspectos que son característicos de entidades intensionales. Además, la relación entre comprensión y extensión resulta comportarse bastante diferente de lo que ocurre en las situaciones semánticas clásicas. En general, no se puede afirmar que una noción cuántica definida por comprensión determine unívocamente una única extensión. Por ejemplo, si se considera la noción de electrón, esta se puede definir por comprensión con el siguiente conjunto de propiedades: $m = 9,1.10^{-28}g, q = 4,8.10^{-10}e.s.u., s = 1/2$. La cuestión sería la siguiente: ¿Determinan estas propiedades un correspondiente conjunto cuyos únicos elementos sean las entidades físicas que satisfacen esas propiedades en un intervalo de tiempo y una región del espacio dados? La respuesta a este interrogante, parece estar dada por la negativa. Presentaremos brevemente las definiciones y axiomas que vienen al caso para nuestra tarea. No respetaremos la numeración original de los axiomas debido a que solamente presentaremos lo mínimo para nuestro desarrollo.

QST 1 Si se sabe con certeza que algún elemento no pertenece a un quasets, entonces no se da que pertenezca con certeza al quasets dado:

$$\forall x \forall y (x \notin y \to \neg(x \in y)).$$

Para comprender el significado de este axioma, hay que nombrar que en QST existen tres predicados primitivos primitivos: $\in$, $\notin$ y $\subseteq$. "$x \in y$" significa que x pertenece con certeza a y. "$x \notin y$" significa que x con certeza no pertenece a y. El símbolo $\subseteq$ tiene un significado intensional, pero no necesariamente extensional. $x \subseteq y$ significa que el concepto x implica al concepto y . Como veremos ahora, las instancias no se agotaran en pertenecer con certeza a un conjunto o con certeza no pertenecer al mismo. Existirá un grado de pertenencia indeterminado. Ya no será el caso de ZF en donde el único predicado primitivo es el de pertenencia.
El axioma anterior hace que un principio del tipo $x \in y \vee x \notin y$ sea falso en general, y por ello existe la posibilidad de relaciones de pertenencia indeterminadas.

QST 2 La inclusión intensional la inclusión extensional, pero no vale en general la vuelta.

$$\forall x \forall y (x \subseteq y \to \forall z ((z \in x \to z \in y) \wedge (z \notin y \to z \notin x)))$$

QST 3 Todo quaset tiene una única cuasiextensión, donde la cuasiextensión de un quaset dado, x, es el único quaset que contiene con certeza a todos los elementos de x y con certeza no contiene a todos los otros entes. Si entendemos que el cuantificador $\forall_Q x$ expresa la cuantificación solamente sobre cuasiconjuntos, ya que en QST también existen entes que no son conjuntos, como los urelementos de ZF, entonces lo anterior puede expresarse como:

$$\forall_Q x \exists!_Q y \forall z ((z \in y \leftrightarrow z \in x) \wedge (z \notin y \leftrightarrow \neg(z \in x)).$$

El axioma anterior justifica la siguiente definición, que será de importancia para nuestro objetivo.

Definición 4.5.1. *(Cuasiextensión de un quaset)*

$$\forall x \forall y (y = \text{ext}(x) \leftrightarrow \forall z ((z \in y \leftrightarrow z \in x) \wedge (z \notin y \leftrightarrow \neg(z \in x))$$

Definición 4.5.2. *Los conjuntos son los cuasiconjuntos (quasets) que son idénticos a su cuasiextensión.*

Para que QST contenga una copia de ZF es necesario el postulado que damos a continuación. Se entenderá que si A es una fórmula cualquiera de ZF, luego A^z es la correspondiente fórmula de QST relativizada a conjuntos.

QST 4 Si A es un axioma de ZFC, entonces A^z es un axioma de QST.

Con lo presentado hasta acá, ya podemos mostrar algunas consecuencias y líneas de investigación que serán de interés para el futuro de nuestro trabajo. Estos razonamientos también queremos utilizarlos (en un futuro cercano) para el caso en donde la teoría de cuasiconjuntos de French y Krause, Q, es utilizada en lugar de QST

> A esta altura uno podría preguntarse cuál es el sentido de este cambio de teoría de conjuntos al nivel de la metateoría. La motivación nuestra es la siguiente: Hace algunos años que se ha comenzado a sospechar que la matemática clásica, basada en ZF (o ZFC) no era adecuada para modelizar teorías de carácter cuántico. Por esta razón se propusieron las teorías Q y QST. Se pretende que las mismas tengan un acuerdo más fuerte con la ontología cuántica, por ejemplo, con la teoría de la identidad para entes cuánticos. Si tal es el caso, sería bastante lógico intentar que esta base matemática especialmente diseñada fuese la subyacente a la lógica que va a emplearse para comprender los sistema cuánticos. Por supuesto, todo esto puede ser debatido, pero nos parece una idea que vale ser explorada. Por otro lado, también se puede iniciar esta tarea teniendo como motivación simplemente la relativa a lo estrictamente lógico, esto es, explorar esta posibilidad con el único objetivo de estudiar propiedades de sistemas lógicos nuevos o diferentes. Ambas alternativas nos parecen válidas.

Volviendo al sistema presentado por Avron, en las Nmatrices los conjuntos entran en juego en varios lugares. Comencemos analizando los más importantes para nuestro objetivo.
De la definición de consecuencia lógica presentada en 3.3.4, se deduce que:
$\psi \vdash_M \phi$ si y sólo si toda valuación (sólo tomaremos las dinámicas) que da un valor designado a ψ, también otorga un valor designado para ϕ. O sea, la conservación del valor designado es lo que caracteriza a la consecuencia lógica.
$\psi \vdash_M \phi$ si y sólo si $\forall v(v(\psi) \in D \rightarrow v(\phi) \in D)$.
Por el momento, no prestaremos atención a la naturaleza conjuntista de la valuación vista como función, nos concentraremos en la pertenencia al *conjunto* de los designados. Según la definición de cuasiextensión de un quaset (4.5.1), un elemento pertenece al cuasiconjunto dado si y solamente si pertenece a su cuasiextensión. Además, la cuasiextensión es un conjunto clásico (ZFC), es decir, un elemento solamente puede pertenecer o no pertenecer al mismo. No existe para la cuasiextensión un grado de pertenencia intermedia. Por lo tanto, a efectos de la pertenencia (pertenencia con certeza o pertenencia estricta) es lo mismo reemplazar un cuasiconjunto por su cuasiextensión. No puede haber ningún cambio en lo que respecta al predicado primitivo $\in$. Si permitiésemos que el conjunto de valores designados fuese ahora un quaset D_q, esto es, que el conjunto clásico de

valores designados D fuese la cuasiextensión de D_q, entonces:

$$D = \text{ext}(D_q) \ \text{ y } \ \psi \vdash_M \phi \ \text{ sii } \ \psi \vdash_{M_q} \phi.$$

Donde $\psi \vdash_{M_q} \phi$ si y solamente si $\forall v(v(\psi) \in D_q \to v(\phi) \in D_q)$. Y la Nmatriz M_q ahora está comprometida con quasets.

> Por simplicidad estamos trabajando con conjuntos unitarios de premisas, esto es, con $\psi \vdash \phi$ en lugar de $\Sigma \vdash \phi$ siendo Σ un conjunto de proposiciones o enunciados. Los mismos razonamientos se aplican a este caso. Por otro lado, podría darse que v fuese un quaset (no sólo D_q). Los razonamientos se seguirían manteniendo siempre que $v(\psi) \in D \leftrightarrow v_q(\psi) \in D_q$. Esto es, siempre que reemplacemos de forma correcta cada cuasiconjunto por su cuasiextensión. Todos los conjuntos comprometidos con la teoría clásica de Nmatrices serán la cuasiextensión de los quasets comprometidos con las Nmatrices cuasiconjuntistas.

El otro lugar importante en el cual entran directamente en juego los conjuntos clásicos es en la definición de conjunto de interpretación de un conectivo, $(\widetilde{\diamond})$. Según la definición de Nmatriz (3.3.2),

$$v(p \diamond q) \in \widetilde{\diamond}_{(v(p);v(q))}.$$

Si tomamos ahora quasets de forma tal que estos conjuntos clásicos sean su cuasiextensión, entonces:

$$v(p \diamond r) \in \widetilde{\diamond}_{(v(p);v(r))} \leftrightarrow v_q(p \diamond r) \in \widetilde{\diamond}_{q(v_q(p);v_q(r))}.$$

Siendo $\widetilde{\diamond} =$ ext$(\widetilde{\diamond}_q)$ y de igual forma para la valuación v.
Recordemos que en el sistema de Nmatrices, las valuaciones son funciones, y que las mismas las podemos pensar como un conjunto de pares ordenados que cumplen determinadas condiciones (para que sea una función). Si todos estos pares ordenados los tomamos como las cuasiextensiones de sus respectivos cuasi-pares ordenados, se puede generalizar la función de ZF a la de QST. También es importante recordar que todos los axiomas de ZFC son axiomas de QST relativizados a conjuntos (*QST 4*), lo que garantiza que al relativizar todos los quasets a sus cuasiextensiones se cumplan todas las proposiciones. También puede darse el caso de que una cierta función o conjunto, por ejemplo, alguna valuación, pueda mantenerse idéntica a su cuasiextensión, es decir, se mantenga como un conjunto clásico (ya que QST tiene en su interior una copia de ZF). Con esto queremos decir que no necesariamente todos los conjuntos deben sufrir un cambio o expandirse, algunos pueden mantenerse si es necesario. Lo que pedimos es que si cambian, lo hagan al único quaset del cual son su cuasiextensión.
Por lo tanto
, si $(v(\psi) \in D \leftrightarrow v_q(\psi) \in D_q)$ y $(v(p \diamond r) \in \widetilde{\diamond}_{(v(p);v(r))} \leftrightarrow v_q(p \diamond r) \in \widetilde{\diamond}_{q(v_q(p);v_q(r))})$, se conservará el conjunto de consecuencias o verdades lógicas del sistema al generalizar a QST. Por ahora no hemos ganado nada, sólo conservamos las consecuencias. Pero es sabido que, en la lógica clásica, $v(\psi) \in D \to v(\phi) \in D$ es equivalente a $\neg(v(\phi) \in D) \to \neg(v(\psi) \in D)$. Por lo tanto, podríamos definir la consecuencia lógica como:

$$\psi \vdash_M \phi \text{ si y solamente si } \forall v(\neg(v(\phi) \in D) \to \neg(v(\psi) \in D)) \tag{4.27}$$

En ZF esto es equivalente a

$$\psi \vdash_M \phi \text{ si y solamente si } \forall v(v(\phi) \notin D \to v(\psi) \notin D).$$

Si en la ecuación 5.1 reemplazamos los equivalentes anteriormente vistos, es decir, $(v_q(\psi) \in D_q \leftrightarrow v(\psi) \in D)$ y $(v_q(\phi) \in D_q \leftrightarrow v(\phi) \in D)$, tenemos:

$$\psi \vdash_M \phi \text{ si y solamente si } \forall v(\neg(v_q(\phi) \in D_q) \to \neg(v_q(\psi) \in D_q))$$

Y tampoco debería cambiar el conjunto de las consecuencias lógicas del sistema si mantenemos los mismos cambios correspondientes para los conjuntos de interpretación de los conectivos.
Recordemos que en QST

$$\forall x \forall y (x \notin y \to \neg x \in y)$$

, pero no vale la inversa. En consecuencia, si deseamos ver un cambio en el conjunto de consecuencias lógicas, podríamos proponer la siguiente definición:

Definición 4.5.3. *(Consecuencia lógica en QST)* $\psi \vdash_{M_q} \phi$ si y solamente si $\forall v\ (v_q(\phi) \notin D_q \to v_q(\psi) \notin D_q)$. Esta definición va a producir un cambio en las consecuencias lógicas del sistema, ya que de la condición de no pertenencia con certeza solamente se puede deducir que es falso que la pertenencia sea con certeza, pero aún podría ser el caso de pertenencia indeterminada. Por otro lado, para los conectivos seguimos manteniendo los quasets necesarios para que pase:

$$v(p \diamond r) \in \widetilde{\diamond}_{(v(p);v(r))} \longleftrightarrow v_q(p \diamond r) \in \widetilde{\diamond}_{q(v_p(p);v_p(r))}.$$

Lo bueno de este cambio en la definición de la consecuencia lógica en QST es que al converger los quasets a conjuntos clásicos (cuando todos los quasets involucrados son idénticos a su cuasiextensión), recuperamos la definición clásica y los teoremas clásicos de las Nmatrices en ZF.
Como los conjuntos de interpretación para los conectivos siguen utilizándose en relación al predicado $\in$, las tablas de verdad seguirán expresadas de la misma manera, pero ahora los conjuntos mostrados en cada lugar de la tabla serán las cuasiextensiones de los correspondientes quasets. La diferencia más importante es que ahora, al ser el conjunto de valores designados un quasets y la consecuencia venir expresada en términos del predicado primitivo $\notin$, no nos alcanza tener dada la cuasiextensión de D_q (D). Teniendo solamente la cuasiextensión de D_q no podemos corroborar si se cumple o no la condición $x \notin D_q$ para todos los elementos. Esto tiene que ver con que en ZF dado un conjunto de valores designados y el conjunto de valores de verdad, queda totalmente determinado el conjunto de valores no designados. En el caso actual, dada una cuasiextensión para el cuasiconjunto de valores designados, los valores que no pertenezcan a esta extensión solamente garantizan $\neg x \in D_q$, pero no garantizan $x \notin D_q$, que es lo que necesitamos para corroborar consecuencia lógica. Esto se debe a lo siguiente.
Sean V y D las cuasi extensiones de los quasets de valores de verdad y de valores designados respectivamente, entonces:

$$\{x \in V_q : x \in D_q \vee \neg x \in D_q\} = V_q,$$

$$V = \text{ ext } (V_q)\ ;\ D = \text{ ext } (D_q).$$

Si definimos $V_q \setminus D_q = \{x \in V_q : \neg x \in D_q\}$ y $D_q^c = \{x \in V_q : x \notin D_q\}$, vemos que estos dos conjuntos no coinciden. Lo que se cumple es que

$$D_q^c \subseteq V_q \setminus D_q,$$

ya que por definición de inclusión intensional en QST (QST 2) tenemos que

$$D_q^c \subseteq V_q \setminus D_q \to \forall z((z \in D_q^c \to z \in V_q \setminus D_q) \wedge (z \notin V_q \setminus D_q \to z \notin D_q^c)).$$

Esto se debe a que la propiedad "$x \notin y$" implica la propiedad "$\neg x \in y$". Y se ve que la inclusión es estricta.
Si solamente damos el quaset D_q, podemos obtener directamente $V_q \setminus D_q$ mediante la definición y el quaset V_q, pero para establecer el conjunto de verdades precisamos un subconjunto suyo, esto es, D_q^c. Este cuasiconjunto debemos darlo aparte si queremos llevara cabo la tarea. Debemos elegirlo consecuentemente a su definición y cumpliendo que para conjuntos clásicos converja a lo esperado clásicamente. De esta forma, lo que tenemos que dar, además del los valores de verdad, es el conjunto D_q^c, en contraste con la forma ortodoxa en el cual se necesita el conjunto de valores designados.[1]

[1]Tres años después de presentada esta tesis, hemos concretado la propuesta de las Nmatrices en QST en un trabajo conjunto con F. Holik y D. Krause [46].

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos encontrado que:

- Debido al teorema de Kochen-Specker [84] (entre otros resultados estrictamente lógicos [89]), el formalismo cuántico no obedece la funcionalidad de la verdad, esto es, no existen valuaciones clásicas que cumplan (4.1), (4.2) y (4.3).

- El conjunto de operadores de proyección admite una semántica de Nmatrices, y por lo tanto, el formalismo de Nmatrices se puede adaptar a la mecánica cuántica con esperanzas de aportar buenos resultados relativos a la consecuencia lógica del retículo.

- En particular, cada estado cuántico puede ser interpretado como un valuación asociada a una semántica no determinista. Hemos dado la forma explícita de las Nmatrices que caracterizan al conjunto de los estados cuánticos. Hemos demostrado que las valuaciones son, en general, dinámicas y no estáticas, lo que favorece nuestra propuesta de Nmatrices como sistema semántico con un mayor poder expresivo sobre el retículo.

- Existen diferentes candidatos para las semánticas no deterministas compatibles con el formalismo cuántico. Se han estudiado diferentes ejemplos.

- Vimos esquemáticamente cómo la noción consecuencia lógica asociada a las matrices no deterministas puede asignarse al formalismo cuántico (un estudio más exhaustivo queda para futuros trabajos).

- Hemos adaptado nuestra propuesta Nmatricial a un sistema lógico creado para modelar superposiciones cuánticas, como lo es la lógica LPS de Tzouvaras [111, 112]. De la interacción entre la semántica de funciones de elección y la de Nmatrices puede sugerir nuevas propuestas. Mostramos el buen comportamiento de la semántica Nmatricial con relación a la no distributividad del retículo.

- Presentamos un adelanto de cómo podría, en principio, implementarse una teoría de conjuntos especialmente creada para la cuántica, QST [38, 39], en la base del formalismo encargado de dar una semántica para el sistema.

Pensamos que las construcciones presentadas en este trabajo pueden abrir la puerta a preguntas interesantes, tanto desde el punto de vista del estudio del formalismo cuántico como en el terreno de la lógica pura. Por el lado de la física, abre la puerta al estudio de

axiomas para sistemas probabilísticos generalizados utilizando axiomas lógicos (es decir, desde una perspectiva lógico-algebraica). Desde el punto de vista de la lógica, da lugar al estudio de nuevos modelos físicos para las Nmatrices relacionados con los sistemas cuánticos y retículos no distributivos.
A lo largo de este trabajo hemos desarrollado varios temas que nos comprometieron con conceptos y técnicas de alcance muy general en lo formal. No siempre hemos podido mostrar todas sus aplicaciones, ni desarrollar con absoluta generalidad los mismos, ya que una tarea tal quedaba por fuera del objetivo del objetivo de este trabajo. Damos una lista abajo de los temas que planeamos desarrollar en futuros trabajos.

- *Profundizar en el estudio de la relación existente entre la contextualidad cuántica y las Nmatrices.* Estudiar hasta qué punto las Nmatrices pueden usarse para caracterizar la contextualidad, y explorar las características de la semántica adecuada para cada problema particular.

- *Obtener una Nmatriz finita para la Nmatriz cuántica, a través de la técnica de rexpansión, pero que cumpla con los requisitos de los estados cuánticos.* Las valuaciones de la Nmatriz finita obtenida en nuestro trabajo, no son necesariamente estados cuánticos. Nuestra intensión en un futuro inmediato es continuar esta línea para otros casos.

- *Las Nmatrices y la implicación en el retículo proyectores.* Hemos visto que la implicación dada sobre el retículo (asociada con el orden del mismo), no es una buena implicación material desde un punto de vista lógico. Si la semántica no determinista mostrada se adecua lo suficiente, podríamos obtener, como beneficio del formalismo de Avron, una buena implicación, y una teoría de la prueba para el formalismo de la Mecánica Cuántica. *Continuar con el estudio de las similitudes existentes entre la semántica no determinista y la de funciones de elección para LPS.* Este es un camino con mucho terreno para explorar. En este trabajo sólo hemos sugerido algunas similitudes, pero un estudio mas detallado podría revelar relaciones en varios sentidos. Incluso podría proponerse algún sistema híbrido para algunos fines, o encontrar nuevas restricciones para las funciones de elección sugeridas por el formalismo de Nmatrices o por la cuántica misma.

- *Introducir cuasiconjuntos en la base conjuntista de las Nmatrices.* Las teoría de Cuasisets de D.Krause y S.French [55], [86], y Cuasets de Dalla Chiara y Toraldo di Francia [39], constituyen un marco formal interesante para generalizar los desarrollos de este trabajo. Esto nos permitiría explorar posibles formas de veritativo funcionalidad, incorporando en la base semántica de nuestro retículo el concepto de indistinguibilidad. Hemos discutido brevemente esta posibilidad al final del capítulo 4, pero está previsto continuar este estudio en futuros trabajos.

Bibliografía

[1] Abellanas, L. y Galindo, A. "Espacios de Hilbert". EUDEMA Universidad: Manuales.

[2] Abramsky, S. and Brandenburger, A. "The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality", *New Journal of Physics*, **13**, 113036, (2011).

[3] Aerts, D. Gabora, L. and Sozzo, S. Concepts and their dynamics: A quantum-theoretic modeling of human thought, *Topics in Cognitive Science* 5 (4), 737-772.

[4] Aerts, D. and Daubechies, I. A characterization of subsystems in physics. *Lett. Math. Phys.* **1979**, 3, 11-17.

[5] Aerts, D. and Daubechies, I. A mathematical condition for a sublattice of a propositional system to represent a physical subsystem, with a physical interpretation. *Lett. Math. Phys.* **1979**, 3, 19-27.

[6] Amaral, B., Terra Cunha, M. y Cabello, A. Quantum theory allows for absolute maximal contextuality, Phys. Rev. A vol. 92, no. 6, 062125 (2015).

[7] Amor Montaño , J. A. Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el teorema de completitud. 3ra edición. Facultad de Ciencias. UNAM. Temas de Matemáticas. Las prensas de ciencias.

[8] Appleby, D.M. Nullification of the Nullification. October 2001.

[9] Avron, A., Ben-Naim, J. and Konikowska, B. Processing Information from a Set of Sources, Forthcoming in Towards Mathematical Philosophy, Trends in Logic series, 2008.

[10] Avron, A. and Konikowska, B. Proof Systems for Logics Based on Non-deterministic Multiple-valued Structures, *Logic Journal of the IGPL*, **13**:365-387, (2005).

[11] Avron, A. and Lev, I. Non-deterministic Multi-valued Structures, Journal of Logic and Computation, 15:241-261, 2005.

[12] Avron, A. and Lev, I. Canonical Propositional Gentzen-type Systems, *Proceedings of the 1st International Joint Conference on Automated Reasoning* (IJCAR 2001), R. Gore, A. Leitsch, T. Nipkow (eds.), Springer Verlag, LNAI 2083, 529-544, Springer Verlag, (2001).

[13] Avron, A. and Zamansky, A. Non-deterministic Semantics for Logical Systems, *Handbook of Philosophical Logic*, (D. M. Gabbay, and F. Guenthner, Eds.), volume 16, 227-304, Springer, (2011).

[14] Avron, A. and Zamansky, A. Non-deterministic Multi-valued Logics - A Tutorial. School of Computer Science Tel-Aviv University, Ramat-Aviv, Israel.

[15] Avron, A. and Zohar, Y. Rexpansions of Non-deterministic Matrices and Their Applications in Non-classical Logics.

[16] Ballentine, L. E. Quantum mechanics: a modern development. (1998) World Scientific Publishing, Singapur.

[17] Batens, D. Inconsistency-Adaptive Logics, In *Logic at Work, Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*, E. Orlowska, ed., Springer. pp. 445-472, (1999).

[18] Bell, J. S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, Physics, 1, 195-200, (1964).

[19] Bell, J. S. On the problem of hidden variables in quantum theory, Reviews of Modern Physics, 38, 447-452, 918 (1966).

[20] Belnap N.D, A useful four-valued logic, Modern uses of multiple-valued logic, G. Epstein and J. M. Dunn, (eds.) Reidel, Dordrecht, NL, 5–37, 1977.

[21] Beltrametti, E. G. and Cassinelli, G. *The Logic of Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 1981).

[22] Birkhoff, G. and von Neumann, J. Annals Math.**37** (1936) 823-843.

[23] Blamey S., Partial Logic, Handbook of Philosophical Logic, D. Gabbay, F. Guenthner (eds.), vol. 3, Reidel , Dordrecht, 1–70, 1986.

[24] Bosyk, G. M., Osán, T. M., Lamberti, P. W., Portesi, M. Geometric formulation of the uncertainy principle. PHYSICAL REVIEW A 89, 034101 (2014); arXiv:1308.4029 [quant-ph]

[25] Bosyk, G. M., Zozor, S., Portesi, M., Osán, T. M., Lamberti, P. W. Geometric approach to extend Landau-Pollak uncertainty relations for Positive Operator Valued Measures PRA 90 (2014).

[26] Buhagiar, D., Chetcuti, E. and Dvure čenskij, A. Found. Phys. **39**, 550-558 (2009).

[27] Cabello, A. Proposal for revealing quantum nonlocality via local contextuality, *Phys. Rev. Lett.*, 104, (2010).

[28] Cabello, A. (2001). Finite-precision measurement does not nullify the Kochen-Specker theorem. *Physical Review A.*, **65**. 10.1103/PhysRevA.65.052101.

[29] Cabello, A. Pruebas Algebraicas de imposibilidad de variables ocultas en Mecánica Cuántica. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. 2001.

[30] Cabello, A. Introducción a la Lógica cuántica. Arbor CLXVII, 659-660. Diciembre 2000. Páginas 489-507.

[31] Clifton, R. and Kent, A. Simulating Quantum Mechanics by Non-Contextual Hidden Variables, *The Royal Society* (September 2000).

[32] Cohen-Tannoudji. Quantum mechanics, volume 1. (1991) John Wiley & Sons, Washington, EEUU.

[33] Cohen, D. W. An introduction to Hilbert space and quantum logic. (1989) Springer-Verlag, Nueva York, EEUU.

[34] Crawford, J. M. and Etherington, V. W. A non-deterministic semantics for tractable inference, In *Proc. of the 15th International Conference on Artificial Intelligence and the 10th Conference on Innovative Applications of Artificial Intelligence*, pp. 286-291, MIT press, Cambridge, (1998).

[35] da Costa, N., Lombardi, O. and Lastiri, M. A modal ontology of properties for quantum mechanics, *Synthese*, Volume **190**, Issue **17**, pp 3671-3693, (2013).

[36] Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., Leporini, R. and Sergioli, G. Quantum Computation and Logic - How Quantum Computers Have Inspired Logical Investigations, Springer, (2018).

[37] Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R. Leporini, Negri, E. Sergioli, G. Quantum information, cognition and music. Frontiers In Psychology, Vol.6, 1583, (2015).

[38] Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R. and R. Greechie, *Reasoning in Quantum Theory* (Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 2004).

[39] Dalla Chiara, M. L. and Toraldo di Francia, G. Logic, "Notre Dame Journal of Formal Logic 38: 179-94. (1993) "Individuals, kinds and names in physics".

[40] Döring, A. *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. **44**, No. **2**, (2005).

[41] De Barros, J. A., Oas, G. *Some Examples of Contextuality in Physics: Implications to Quantum Cognition - Contextuality from Quantum Physics to Psychology*, World Scientific, Singapore, 2015.

[42] De Barros, J. A. Decision Making for Inconsistent Expert Judgments Using Negative Probabilities. In *Quantum Interaction*; H. Atmanspacher, E. Haven, K. Kitto, D. Raine, Eds.; Lecture Notes in Computer Science; Springer: Berlin, Germany; Heidelberg, Germany, 2014; Volume 8369, pp. 257–269.

[43] De Barros, J. A., Dzhafarov, E. N., Kujala, J. Oas. V. J. Measuring Observable Quantum Contextuality. In: Atmanspacher H., Filk T., Pothos E. (eds) Quantum Interaction. QI 2015. Lecture Notes in Computer Science, vol 9535. Springer, Cham.

[44] De Barros, J. A. Holik, F. Krause, D. Contextuality and Indistinguishability, *Entropy*, **19(9)**, 435, (2017). https://doi.org/10.3390/e19090435

[45] Jorge, Juan Pablo and Holik, Federico. Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación I. Teorema: Revista Internacional de Filosofía, 41, 3, 65–88, 2022, JSTOR.

[46] Jorge, J. P., Holik, F. y Krause, D. (2023). Un Acercamiento a las semánticas Nmatriciales basadas en QST. Principia: an international journal of epistemology, 27(3), 8.

[47] Jorge, Juan Pablo and Holik, Federico. Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación II. Teorema: Revista Internacional de Filosofía, 42, 1, 149–169, 2023, JSTOR.

[48] Domenech, G. and Freytes, H. Contextual logic for quantum systems, *Journal of Mathematical Physics*, **46**, 012102 (2005). doi: 10.1063/1.1819525

[49] Domenech, G., Holik, F. and Massri, C. J. Math. Phys. **51**, 052108 (2010).

[50] Domenech, G., Freytes, H. and re Donde, C. A Topological Study of Contextuality and Modality in Quantum Mechanics, *International Journal of Theoretical Physics*, **47**: 168-174 (2008). DOI 10.1007/s10773-007-9595-8.

[51] *Handbook Of Quantum Logic And Quantum Structures* (Quantum Logic), Edited by Engesser, K., Gabbay, D. M. and Lehmann, D. North-Holland (2009).

[52] Finch, P. D. Quantum logic as an implication algebra, Bull. Austral. Math. Soc. 2, 101-106, (1970).

[53] Fortin, S., Holik, F. and Vanni, L. Springer Proceedings in Physics **184**, (2016) 219-234.

[54] S. Fortin and L. Vanni, Foundations of Physics **44**, (2014) 1258-1268.

[55] French, S, and Krause, D. "Remarks on the theory of quasi-sets", Studia Logica 95 (1-2), 2010, pp. 101–124.

[56] Friedman, M. and Glymour, C. If quanta had logic, Journal of Philosophical Logic 1 (1972) 16-28.

[57] Frustaglia, D., Baltanás, J. P., Velázquez-Ahumada, M. C., Fernández-Prieto, A., Lujambio, A., Losada, V., Freire and Cabello, A. "Classical physics and the bounds of quantum correlations", *Phys. Rev. Lett.*, vol. **116**, no. **25**, 250404 (2016).

[58] Gamut, L. T. F. Lógica, Lenguaje y Significado. Eudeba.

[59] García Pintos Barcía, L. P. Una interpretación de la Mecánica Cuántica basada en considerar un tiempo físico. Tesis de Maestría en Física. Septiembre 2012. Universidad de la República. Instituto de Física. Montevideo, Uruguay.

[60] Gentzen, Gerhard (1934), 1955, Recherches sur la déduction logique, Paris, Presses Universitaires de France.

[61] Gleason, A. J. Math. Mech. **6**, 885-893 (1957).

[62] Greechie, R. J. Orthomodular lattices admitting no states, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, Volume **10**, Issue **2**, Pages 119-132, (1971).

[63] Gudder, S. P. *Stochastic Methods in Quantum Mechanics* North Holland, New York - Oxford (1979).

[64] Haack, S. Lógica Divergente. Paraninfo. 1980.

[65] Hall, B. C. Quantum theory for mathematicians. Springer, Nueva York, EEUU.(2013)

[66] Halmos, P. and Givant, S. *Logic as Algebra*, Mathematical Association of America, (1998).

[67] Hamhalter, J. *Quantum measure theory*, volume 134 of *Fundamental Theories of Physics*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (2003).

[68] Hellman, G. Quantum Logic and Meaning, Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of 907 Science Association, Vol. 1980, Volume Two: Symposia and Invited Papers (1980), pp. 493-511.

[69] Holik, F. Teoría de cuasiconjuntos y mecánica cuántica. Editorial académica española, (2014).

[70] Holik, F., Bosyk, G. M., and Bellomo, Quantum Information as a Non-Kolmogorovian Generalization of Shannon's Theory, *Entropy*, (2015), **17**, 7349-7373; doi:10.3390/e17117349.

[71] Holik, F. Massri, C., Plastino, A. and Zuberman, L. *International Journal of Theoretical Physics* **52**, 1836 (2013).

[72] Holik, F., Massri, C. and Ciancaglini, N. International Journal of Theoretical Physics, **51**, (2012) 1600-1620

[73] Holik, F., Plastino, A and Saenz, M. Natural information measures in Cox approach for contextual probabilistic theories, *Quantum Information* & *Computation*, Vol. 16, No. **1** & **2**, 0115-0133 (2016).

[74] Holik, F. and Plastino, A. Quantum Mechanics: A New Turn in Probability Theory. In *Contemporary Research in Quantum Systems*; Zoheir, E., Ed.; Nova Publishers: New York, NY, USA, (2014).

[75] Holik, F, Sáenz, M. and Plastino, A. *Annals of Physics*, Vol. **340**, Issue **1**, 293-310 (2014).

[76] Holik, F., Sergioli, G., Freytes, H. and Plastino, A. Logical Structures Underlying Quantum Computing, *Entropy*, (2019), **21**(1), 77; https://doi.org/10.3390/e21010077.

[77] Holik, F., Sergioli, G., Freytes, H., Giuntini, R. and Plastino, A. Toffoli gate and quantum correlations: a geometrical approach, *Quantum Information Processing*, **16**: **55**, (2017); https://doi.org/10.1007/s11128-016-1509-3.

[78] Hunter, G. Metalógica. Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden. Paraninfo. 1981.

[79] Isham, C. J. and Butterfield, J. Topos Perspective on the Kochen-Specker Theorem: I. Quantum States as Generalized Valuations, *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. **37**, No. **11**, (1998).

[80] Jauch, J. M. Foundations of Quantum Mechanics, Addison Wesley, 1968.

[81] Kalmbach, G. *Orthomodular Lattices* (Academic Press, San Diego, 1983).

[82] Khrennikov, A. Y. *Ubiquitous Quantum Structure From Psychology to Finance*, Springer, (2010).

[83] Kleinmann, M., V'ertesi, T. and Cabello, A. Proposed experiment to test fundamentally binary theories, *Phys. Rev. A*, vol. **96**, no. **3**, 032104, (2017).

[84] Kochen, S. and Specker, E.P. The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. Journal of Mathematics and Mechanics 1967, 17, 59-87.

[85] Kolmogorov, A.N. Foundations of Probability Theory; Julius Springer: Berlin, Germany, (1933).

[86] Krause, Decio (1992), "On a quasi-set theory," Notre Dame Journal of Formal Logic 33: 402-11.

[87] Losada, M., Fortin, S., Gadella, M. and Holik, F. *International Journal of Modern Physics A* Vol. **33**, No. **18**n**19**, 1850109 (2018).

[88] Losada, M., Fortin, S. and Holik, F. Classical limit and quantum logic, under review.

[89] Malament, David B. Notes on "Quantum Logic".

[90] Maltsev, A.I., Elementos de Álgebra Lineal. Editorial MIR MOSCU.

[91] Marcos, J. What is a Non-truth-functional Logic?, *Studia Logica*, **92**:215, (2009).

[92] Muniz, J. A. Modelos de relojes reales en Mecánica Cuántica. Tesis de Maestría en Física. Septiembre 2012. Universidad de la República. Instituto de Física. Montevideo, Uruguay.

[93] Peres, Asher. Foundations of Physics (2003) 33: 1543. https://doi.org/10.1023/A:1026000614638.

[94] Piron, C. *Foundations of Quantum Physics* (Addison-Wesley, Cambridge, 1976).

[95] Popescu, S. Nonlocality beyond quantum mechanics, *Nature Physics*, volume **10**, pages 264-270 (2014).

[96] Rabaey J.M., A. Chandrakasan and B. Nikolic , Digital Integrated Cicruits: A Design Perspective, Prentice-Hall, 2003.

[97] Rédei, M. and Summers, S. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* Volume **38**, Issue **2**, (2007) 390-417.

[98] Rédei, M. *Quantum Logic in Algebraic Approach* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998).

[99] Reichembach, H. Philosophics Foundations of Quantum Mechanics. California U. P. , 1944.

[100] Román L., RUMBOS B. "Remarks on material implication in orthomodular lattices", Math. Rep. Acad. Sci. X, 279-284, (1988).

[101] Román L., RUMBOS B. "Quantic Lattices", International Journal of Theoretical Physics, 30,1555-1563, (1991)

[102] Román L., ZUAZUA R. "Quantum Implication", International Journal of Theoretical Physics, 38,793-797, (1999)

[103] Sagastume, M y San Martin, H. Álgebra del cálculo proposicional, Curso de posgrado. Universidad de La Plata.

[104] Sánchez, C. M. Lecciones de Álgebra. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Curso de grado. Fascículo 6.

[105] Saxe, K. "Beggining funcional analisis". (2002) Springer-Verlag, Nueva York, EEUU.

[106] Solé Bellet, A. Realismo e interpretación en Mecánica Bohmiana. Memoria para optar al grado de Doctor. Universidad Complutense de Madrid. Madrid, 2010. ISBN: 978-84-693-3350-1.

[107] Smith, D. *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. **43**, No. **10**, (2004).

[108] Svozil, K. *Quantum Logic* (Springer-Verlag, Singapore, 1998).

[109] Svozil, K. and Tkadlec, J. *J. Math. Phys.* **37** (1996), 5380-5401.

[110] Troelstra, A.S. and H. Schwichtenberg, Basic Proof Theory, Cambridge University Press, 126–130, 2000.

[111] Tzouvaras, Athanassios Propositional superposition logic, Logic Journal of the IGPL, Volume 26, Issue 1, February 2018, Pages 149–190, https://doi.org/10.1093/jigpal/jzx054

[112] Tzouvaras, Athanassios. Semantics for first-order superposition logic. Logic Journal of IGLP. Oxford University Press.23-05-2019.

[113] von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, 12th. edition, Princeton, 1996).