ゲーデルの不完全性定理 ：『論理と分析』補填

著者	金子 裕介
雑誌名	The Basis : 武蔵野大学教養教育リサーチセンター紀要
号	11
ページ	81-107
発行年	2021-03-01
URL	http://id.nii.ac.jp/1419/00001497/

ゲーデルの不完全性定理

―『論理と分析』補填―

金子　裕介

§1　はじめに

本論文は『論理と分析』の続編として、ゲーデルの不完全性定理を理解、解説しようとするものである[1)]。解説といっても、ひと筋縄ではゆかないことは、あつかう対象からあきらかだろう。国内の書物にかぎってみても、完全に成功しているものは、まだ存在しないかもしれない。

記号や推論規則は『論理と分析』のものを踏襲する。自由変項のあらわれている表現のみを論理式と呼ぶ[2)] など、若干クセがあることを念頭に置いてもらいたい。

第１章　不完全性定理とはなにか

最初につかえてしまう点、不完全性とはなにか、ということをあきらかにしておきたい。これにはゲーデル自身の文言をたどる必要がある。

§2[3)]　ゲーデルの定式

チェコ第二の都市ブルノ[4)] に生まれた論理学者ゲーデル（Kurt Gödel 1906-1978）は1931 年、進学先ウィーン大学の『数学物理学月報』[5)] に、不完全性定理（incompleteness theorem）についての論文を発表した。それは、こう題されている。

1.[6)] プリンキピアマテマティカ，あるいはそれに類似した体系が形式的には決定できない文について：その 1（Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I）

まぎらわしいことに「その 2」は書かれていない[7)]。プリンキピアマテマティカとは（ペアノとラッセルなど、面倒くさい話もあるが）、後にみる公理系 P のことだと割り切ってもらってかまわない（§8）。

さて、この論文（1）のなかでゲーデルは不完全性定理を、こう定式化している。

2. **第一不完全性定理**[8)]　論理式からなる，任意の ω- 無矛盾な再帰的集合 κ に対し，次のような[9)] 再帰的集合 r が存在する．すなわち，$v\ Gen\ r$ も Neg（$v\ Gen\ r$）も，Flg（κ）に属さない．ちなみに，v は r の唯一の自由変項である．

いわゆる第一不完全性定理である。不完全性（incompleteness）が言われるのが、ここだ。

もうひとつ、第二不完全性定理というのがある。

3. **第二不完全性定理** [10]　κ を，論理式からなる，任意の無矛盾な再帰的集合とせよ．そのとき「κ は無矛盾である」と主張する文は，κ- 証明可能でない．特に，ペアノの公理系 P の無矛盾性は，実際 P が無矛盾でないにしても（さもなければ何でも証明できてしまうだろう），P 内部では証明できない．

第二不完全性定理は、無矛盾性の公理系内証明不能をいっている。

ちなみに公理系「内」をいう、内部という言葉には、英語、ドイツ語ともに前置詞 in が使われている。

§3　わかりやすい定式

ゲーデルによる定式は、案の定、むずかしい。しかし三十六年後、ゲーデル自身チェックを入れた、英訳の決定版が出た。

追記があるのだが[11]、そこでゲーデルは、不完全性定理を、よりわかりやすい言葉で述べている。

4. **第一不完全性定理**[12]　有限の立場で考えられた，必要なだけの自然数論を含む，いかなる無矛盾な公理系にも，決定不能な算術命題が存在する．

5. **第二不完全性定理**[13]　公理系の無矛盾性は，公理系内部では，証明できない．

第一不完全性定理は、あいかわらず、わかりにくい。だが第二不完全性定理の方は、すっきりした定式が与えられている。

§4　決定不能

ここまで読んで気づいたかもしれないが、不完全（incomplete ／独 unvollständig）[14] という言葉は、どこにも使われていない[15]。

その代わり、決定不能（undecidable ／独 unentscheidbar）という言葉が使われている。

不完全でいわれる完全（complete ／独 vollständig）は、実をいうと、不完全性定理というより、完全性定理の先輩特許である。

これ（完全性定理）も、ゲーデルが世界に先駆けて証明した。タイトルをみておきたい[16]。

6. 論理関数計算 [17] 公理の完全性（Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls）

完全性（独 Vollständigkeit）という言葉がみつかる。完全性とは、普通この意味、すなわち完全性定理の意味で使われる。

第２章　完全性定理とのちがい

不完全性定理が何を言っているか、言葉遣いから見てもらった。ポイントは、不完全性とは決定不能性である、というところだ。この点をさらに、完全性定理との対比によって明らかにしてみたい。

§5　完全性定理

前節（§4）で登場した完全性定理に説明を加えておきたい。完全性定理は、こう定式化される。

7. **完全性定理**[18] 任意の論理式か文 φ について，$\vDash \varphi \Rightarrow\ \vdash \varphi$.

ここで言われるのは、ふたつの論理学、構文論と意味論で[19]、論理的真理が一致する、ということである[20]。

相方の意味論で妥当（$\vDash \varphi$）と言われるなら、構文論の方でも責任とって証明します（$\vdash \varphi$）。これが完全性定理である。ここには（構文論と意味論という）こぢんまりとした論理共同体しかない。

§6　決定不能

この論理共同体を突き破るのが、逆にいえば、不完全性定理である。

なにかしらの公理系（axiomatic system）を考えてみよう[21]。ゲーデルの論文（1）で、体系（独 System《ズュステーム》）と呼ばれたものだ。

その公理系では、肯定証明（proof）$\vdash \varphi$ も、否定証明（disproof）$\vdash \neg\varphi$ もできない、そういった文 φ が存在する。書き出してみよう。

8. **決定不能**　或る文 φ があって，$\nvdash \varphi$ かつ $\nvdash \neg\varphi$.

これが、ゲーデルの論文タイトル（1）で使われている決定不能（undecidable ／独 unentscheidbar）という言葉の意味である（§4）。

完全性（7）と決定不能性（8）を見比べてほしい。前者の否定が後者になるとは到底おもえない。そのくらい、ゲーデルの言う不完全性（決定不能性）は、完全性定理から、かけ離れている[22]。

§7　決定問題

不完全性定理で言う不完全性とは、決定不能性（8）のことである[23]。しかしなぜ、ゲーデルはそんなこと（8）を証明しようとおもったのか。

「人間知性の限界」を示そうとしたのではない[24]。そんな大それたことを証明しようとす

る数学者などいないだろう。「数学史上最も重要」なんて言われ方もされているが[25]、それは的外れである。

ゲーデルは、ただ、ヒルベルト（David Hilbert 1862–1943）の提起した、決定問題（独 Entscheidungsproblem）に答えようとしていただけなのだ[26]。

9. **決定問題**　どんな文 φ についても，$\vdash \varphi$ か $\vdash \neg\varphi$ をいえるか.

そんなの Fc で充分じゃないか、と思うかもしれない。

原子文 Fc は論理的に肯定証明も否定証明もできない。「太郎は背が高い」を論理的に証明できないのと同じである。だから Fc は決定不能[27]。

だが、そんな風に考えてしまうのは、数学に焦点を合わせていないからである。

ヒルベルトが決定問題を出したのは、数学の文 φ についてだった。例えば $1 + 2 = 3$。これは肯定証明可能。その意味で、決定可能。

決定問題とは、そういった数学の文[28] についてのみ問われている。だからゲーデルの議論も、数学の言語に限定して考えなければならない。

第 3 章　ペアノの公理系

ゲーデルの不完全性定理は、数学の言語で述べられた文に限定される。ここではゲーデルが、どんな数学の分野を扱ったかを見ておきたい。

§8　公理系 P

ゲーデルの不完全性定理（4，8）のルーツは、ヒルベルトの決定問題（9）にある。決定問題は、数学の言語にしか当てはまらないので、不完全性定理も数学の文のみ扱う。

では、どんな数学の分野をゲーデルは扱ったのか。彼が論理を組み立てる所から見てみよう。

論理学では、言語を整備するとともに公理や推論図を選ぶ。いわゆる構文論である[29]。それによってできあがるものを公理系という（§6）。だから数学の言語を考えるとき、それを公理系と呼んでもよい[30]。

不完全性定理の論文を読むと、当初 PM と呼ばれるラッセルらの公理系[31]、ZF と呼ばれるツェルメロ＝フレンケルの公理的集合論が[32]、考えられていたのがわかる。 だが定理の証明に入ると、実際使われるのは P という公理系である[33]。内包公理など[34]、異同はあるけれども P は、通常 N と呼ばれる[35] ペアノの公理系のことである[36]。

§9　ペアノの公理系

ペアノの公理系は今日、こう定式化される。

10.　ペアノの公理系 *P*

Rule　ゲンツェンの *NK* を採用する。

Ax.1　$\forall x\forall y\forall z\ (x=y\land x=z\to y=z)$

Ax.2　$\forall x\forall y\ (x=y\to(x)'=(y)')$

Ax.3　$\forall x\ (0\neq(x)')$

Ax.4　$\forall x\forall y\ ((x)'=(y)'\to x=y)$

Ax.5　$\forall x\ (x+0=x)$

Ax.6　$\forall x\forall y\ (x+(y)'=(x+y)')$

Ax.7　$\forall x\ (x\times 0=0)$

Ax.8　$\forall x\forall y\ (x\times(y)'=(x\times y)+x)$

Ax.9[37]　$\Phi 0\land\forall x\ (\Phi x\to\Phi(x)')\to\forall x\Phi x$

細部の説明は省略する[38]。

§10　証明

ペアノの公理系 *P* を使った証明を見てみよう。

11.　公理系 *P* による証明[39]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y[x+(y)'=(x+y)']}{\forall y[(0)'+(y)'=((0)'+y)']}\,\forall\text{-Elim.}}{(0)'+(0)'=((0)'+0)'}\,\forall\text{-Elim.}\qquad\dfrac{\dfrac{\forall x[x+0=x]}{(0)'+0=(0)'}\,\forall\text{-Elim.}\quad\dfrac{\dfrac{\forall x\forall y[x=y\to(x)'=(y)']}{\forall y[((0)'+0)=y\to((0)'+0)'=(y)']}\,\forall\text{-Elim.}}{((0)'+0)=(0)'\to((0)'+0))'=((0)')'}\,\forall\text{-Elim.}}{((0)'+0)'=((0)')'}\,\to\text{-Elim.}}{(0)'+(0)'=((0)'+0)'\land((0)'+0))'=((0)')'}\,\land\text{-Intro.}\qquad\dfrac{\forall x\forall y\forall x[\{x=y\land(x=z)\}\to(y=z)]}{\{(0)'+(0)'=((0)'+0)'\land((0)'+0))'=((0)')'\}\to(0)'+(0)'=((0)')'}\,\forall\text{-Elim.}\times 2}{(0)'+(0)'=((0)')'}\,\to\text{-Elim.}$$

ここでは $(0)'+(0)'=((0)')'$, つまり $1+1=2$ が証明されている。

ゲーデルが決定問題（9）そして不完全性定理（4, 8）を考えたのは、このレベルの話である。自然数論（a theory of natural numbers）と呼ばれる[40]。

§11　自然数論

ペアノの公理系を考えたペアノ（Giuseppe Peano 1858–1932）は、イタリアの数学者である。彼は、公理系（10）を考えたとき、数学ほぼ全体の公理化を企てていた[41]。だが今日、それを真に受けるひとはいない。

ペアノの公理系は自然数論に限定される。それは算術（arithmetic）と呼ばれることが多い[42]。

この算術というわかりにくい呼び名だが、実際のところ、ほとんど算数（arithmetic）と変わりない。だが、ペアノの公理系（10）をみればわかるとおり、代数的な叙述がからんでいるし、なにより記号論理の表現が不可欠だ[43]。このため一概に、小学生が学ぶ算数な

んかと同一視することはできない。

むしろ数論（number theory）という数学の分野があり、そこで正の整数に話が限定されるのが自然数論だ、と厳格に捉えた方がよいだろう[44]。

自然数論でいう自然数（natural number）は、学校（小中高）では正の整数 +1，+2，…… と教えられる。しかし論理学やるときには 0 も含める。これはペアノの公理系で 0 のみ個体定項と認める、という言語的事情にもよるが（後述 17)、フォンノイマンによる順序数の定義（それは集合論につながっている）で $\Phi = 0$ と定義されることに由来する、と考えた方がよい[45]。

いずれにせよ、不完全性定理の扱った公理系 P とは、そのような自然数論を扱っている。

第 4 章　決定可能性の別の意味

ゲーデルが何を証明しようとしたのかがわかった。自然数論、そのペアノ公理系（10）で、決定不能性（8）を証明するのである。さて、少し通りすがりになってしまうが、ここで見ておきたいのは、戦略から外れたもの、すなわち計算可能性の理論である。

§12　1+1=2 を計算する

ゲーデルの論文を読んでいて一番目をひくのは、メタ述語（メタ言語でつかわれる述語）を延々と、再帰的に定義するところである[46]。あれは計算可能性の理論（computability theory）[47] の先駆けにみえる。

これは計算可能性の理論が、再帰的関数の理論として発展してきた事情にもよる[48]。だが、この点は置き、ここでは計算可能性の理論とは何かだけ、簡単に説明しておきたい。

12. URM による 1+2 の計算

R1	R2	R3	…	
1	2	0	…	1 + 2 を表している.
2	2	0	…	R1 で 1 に 1 を加える.
2	2	1	…	1 を加えたら，カウントするため，R3 にも 1 を加える.
3	2	1	…	再び R1 で 1 を加え，3 とする.
3	2	2	…	R3 にも 1 を加える．これで R2 と R3 の値が同じになり所定の数 2 を加えたことになる.

計算可能性の理論とは、こんなこと（12）をやる分野である。よくわからないだろうから、少し説明させてもらいたい。

命令（instruction）から成るプログラム（program）というものがある（後述 13)。それを実行する場として、レジスタ（register）が設けられる。上記 R1，R2，R3，…… と名前のつけられたマス目が、それである。

ここでは 1 + 2 が計算されているのだが、それは R1 に 1，そして R2 に 2 を書き込むことで反映される。

命令に従いレジスタの数値を変えてゆく。これによりレジスタの内容が次々と変更されてゆく。上記 ↓ はそれを表している。

レジスタ内の数値が或る配列になるとプログラムが停止する（後述 13)。最後の 3（R1)，2（R2)，2（R3)，……というのが、それだ。そこで R1 に現れた数値が 1 + 2 の計算結果になる [49)]。

§13　アルゴリズム

計算可能性の理論とは、このようなこと（§12）をする理論である。それはアルゴリズム（機械的手順）に従った計算、電卓にやらせるような計算を追究する数学の分野と言える。

今し方扱ったのは URM（an unlimited register machine）と名づけられた数学的（つまり紙の上で表現できる）機械でおこなわれた計算である [50)]。そのプログラムも見てもらおう。

13. 足し算のプログラム

命令１　$J(3, 2, 5)$：レジスタ 3 と 2 を比べ，同じだったら命令 5 に飛べ（＝そこで停止）．さもなければ，次の命令にゆけ．
命令２　$S(1)$：レジスタ 1 に 1 を加え，次の命令にゆけ．
命令３　$S(3)$：レジスタ 3 に 1 を加え，次の命令にゆけ．
命令４　$J(1, 1, 1)$：レジスタ 1 と 1 を比べ，同じだったら命令 1 に戻れ（＝絶対戻れ)．

§14　決定可能性

さて、不完全性定理の意味を考えた節で（§6 ～ §7)、決定可能（decidable）という言葉に触れたが、今日、それは計算可能性理論の用語と考えられている。

14. 決定可能性 [51)]　述語 $\Phi(a_1, \cdots, a_n)$ が決定可能である
$\Longleftrightarrow$ その表現関数 $c_\Phi(a_1, \cdots, a_n)$ を計算するプログラムがある．

述語 $\Phi(a_1, \cdots, a_n)$ という歯切れの悪い表現が使われているが、ここまでみた足し算の計算なら、こう考えればよい。

三項述語 $M(a_1, a_2, a_3)$ として $a_1 + a_2 = a_3$ をかんがえる。この表現関数は、次のようになる [53)]。

15. 足し算の表現関数

$$c_\Phi(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} \text{もし } a_1 + a_2 \text{ が } a_3 \text{ と一致したら，} 1. \\ \text{そうでないなら，} 0. \end{cases}$$

この関数を計算するプログラムは、先に見たもの（13）から派生的に作れる（省略)。そ

のプログラムに計算をさせ、結果が 1 なら、たとえば $1 + 2 = 3$ の証明ができたことになる。

§15　チューリングマシン

ゲーデルが取り組んだ決定問題（§7）は現在、以上の計算可能性理論で考えられる。だが注意すべきなのは、不完全性定理に取り組んだころのゲーデルに、この発想無かった、ということである。

計算可能性理論の源流は 1937 年にチューリング（Alan Turing 1912–1954）が、いわゆるチューリングマシンを（数学的に）開発したときに遡る[54)]。

たしかに今日、ゲーデルの不完全性定理は、チューリングマシンや URM による決定不能性から捉え直される[55)]。しかし、ゲーデルの思想を知るために、いま、それ（計算可能性の理論）を投入する必要はない。

第 5 章　ゲーデルの戦略

以上でゲーデルの完全性定理にまつわる外堀的知識を終える。ここから先は本丸に向けて進もう。ゲーデルの証明に入ってゆく。

§16　ゲーデル数化

計算可能性の理論でなかったとしたら、ゲーデルはどんな仕方で不完全性定理（4，8）を証明したのだろうか。

ペアノの公理系による証明（11）を延々と試していって、肯定証明も否定証明も不可能な文をみつけたわけでは、もちろん、ない。そうでなく、視点をひとつ上げたのだ。つまり対象言語から、メタ言語に、視点をひとつ上げた[56)]。

そもそも肯定証明 $\vdash \varphi$ とか否定証明 $\vdash \neg\varphi$ はメタ言語の文である。そこで、こう考える。

$\vdash \psi$ において ψ を自然数 n_ψ にしてしまう。これをゲーデル数化（Gödel numbering）と言う[57)]。こう表記される。

16.　ゲーデル数化　$g\ (\psi) = n_\psi$

関数 g によって（言及された）文 ψ に自然数 n_ψ をわりあてる。そして $\vdash \psi$ を $Bew\ (n_\psi)$ という[58)] 自然数論の文――つまりペアノの公理系 P でも証明できるような文――にしてしまう[59)]。

そんなことできるのか、とおもうだろう。これには、メタ数学という発想を理解する必要があるから、追って説明したい（第 6 章）。

さて、この $Bew\ (n_\psi)$ について $\nvdash Bew\ (n_\psi)$ かつ $\nvdash \neg Bew\ (n_\psi)$ が成立する。つまり $Bew\ (n_\psi)$ が、決定不能な文になるのだ[60)]。

§17　どこを読むか

以上がゲーデルの戦略である。これから証明に入るが、しかし、それを理解するのに、

ゲーデル自身の叙述を追うのは止めたほうがよいかもしれない。彼による定式（2，3）を見たとき、予想されただろう。

むしろ論文序盤で、不完全性定理がどういうものか、ゲーデルが概説しており、それを読んだ方がわかりやすい[61]。本論文では、その道を選ぶ。

§18　ペアノ公理系の言語

ゲーデルの戦略では、決定不能（8）な文、すなわち Bew（n_ψ）――厳密には $\neg Bew$（n_ψ）――をみつけるのに、ペアノ公理系（自然数論）⇢ メタ言語 ⇢ メタ数学、と話を進めてゆく。この出発点となるペアノ公理系の言語 P を、まず、見定めておこう。

ペアノ公理系は一階述語論理だから NK の形成規則に[62]、次の語彙を加えることで言語ができあがる。

17. **対象言語 P**　個体定項：0,　述語：=,　関数：$(\ )'$，＋，　×.

これが自然数論（§11）の言語である[63]。

§19　論理式を一次元にならべる

こうして対象言語 P（公理系 P と同じである）を見定めた。例えば、そこで偶数を述べる論理式を考えてみよう。

18. **a は偶数である**[64]　$\exists x\ (\ x < a \wedge a = x + x\ )$

いま、このような論理式 Φa すべてに番号をふってゆく[65]。

19. **論理式の系列**[66]　$\Phi_0 a,\ \Phi_1 a\cdots\cdots$[67]

これができるのはゲーデル数化（§16）のおかげである[68]。

§20　論理式を二次元にならべる

論理式を横一列に、いわば一次元にならべた（19）。今度は、それを二次元に展開する。どうするかというと、自由変項 a のところに具体的な数（自然数）を入れる。

20. **文の 2 次元配列**[69]

$$\begin{array}{l} \Phi_0 0,\ \Phi_0 1,\ \Phi_0 2\cdots\cdots \\ \Phi_1 0,\ \Phi_1 1,\ \Phi_1 2\cdots\cdots \\ \Phi_2 0,\ \Phi_1 1,\ \Phi_2 2\cdots\cdots \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}$$

これらは対象言語 P でならべられると考える（後述 23）。メタ変項 Φ を使っていたり、

1，2, …… も厳密には $(0)'$, $((0)')'$,…… と表さねばならないなど、いろいろ不充分なところもあるが、議論上の方便として目をつぶってもらいたい。

§21　ここから先の話

ここから先の話は、こうなる[70)]。

まず第 6 章で、ゲーデル理解に不可欠となるメタ数学の論理を見る。論理といっても対象言語、メタ言語のあいだでメタ数学がどのような振舞いをするか見てもらうだけである（しかしこの理解が証明進行上カギになるのを後に知るであろう）。

つぎに第 7 章で、$g(\neg Bew(n_\psi)) = n_\psi$ を言う[71)]。これは左から右に読めばわかるとおり、証明不能 $\neg Bew$ な文 n_ψ のゲーデル数は、私自身 $\neg Bew(n_\psi)$ と同じです、という自己言及を表している。不完全性定理の論理的機軸となるのが、ここである。

最後に第 8 章で、$g(\neg Bew(n_\psi)) = n_\psi$ をテコにし、$Bew(n_\psi)$ という文が決定不能であることを、$\neg Bew(n_\psi)$ と $Bew(n_\psi)$、それぞれについて背理法のかたちで証明する。

第 6 章　メタ数学

では具体的にゲーデルの証明に入ってゆこう。まず $\neg Bew(n_\psi)$、すなわち文 ψ の証明不能を考える。

§22　メタ数学

或る文 ψ が証明不能と言われるのは、素朴に考えて、メタ言語においてであろう。実際それは $\nvdash \psi$ と表される。これ自体、記号というより省略表現で、日常言語の論理以上のものが課されることはない。

ゲーデルは、しかし、そこから先に進んだ。これは彼のモチベーションとして、ヒルベルトのメタ数学（meta-mathematics）があったからである[72)]。

メタ数学は今日、メタ論理として行われていることを[73)]、過度に形式化したものだと言える。つまり、そこに日常言語の入り込むスキはなく、すべてが P と同じように論理記号で表される。それを実現させるのが、ゲーデルの論文にある、あの四十六個の定義なのだ[74)]。

§23　考え方

メタ数学がどんなものかになるか、見てみよう。

例えば、「a_1」は自由変項である、と言ったとする。それは対象言語 P の語彙についてのメタ言明で、P のメタ言語 M でのべられる[75)]。ここで日常言語の表現「　は自由変項である」は避けられないようにおもわれる。そこでさらに形式化を進めようというのがメタ数学である。

まず「a_1」に自然数を割り当てる。いわゆるゲーデル数化だ（§16）。詳細は省くけれども、この場合 $g(a_1) = 29$ になる[76)]。

そして日常言語表現「　は自由変項である」を、こう論理式化する。

21. *a* は自由変項である[77)]　$\exists x\ (\ x< a \wedge a=21+8\times x\ )$

まぎらわしいけれども、∃, x, a …… は最早 P には属していない。メタ数学 M' 特有の語彙と考えられている[78)]。

これ（21）に従い、「a_1」は自由変項である、というメタ言明は、次のとおり数学化―自然数論化―される。

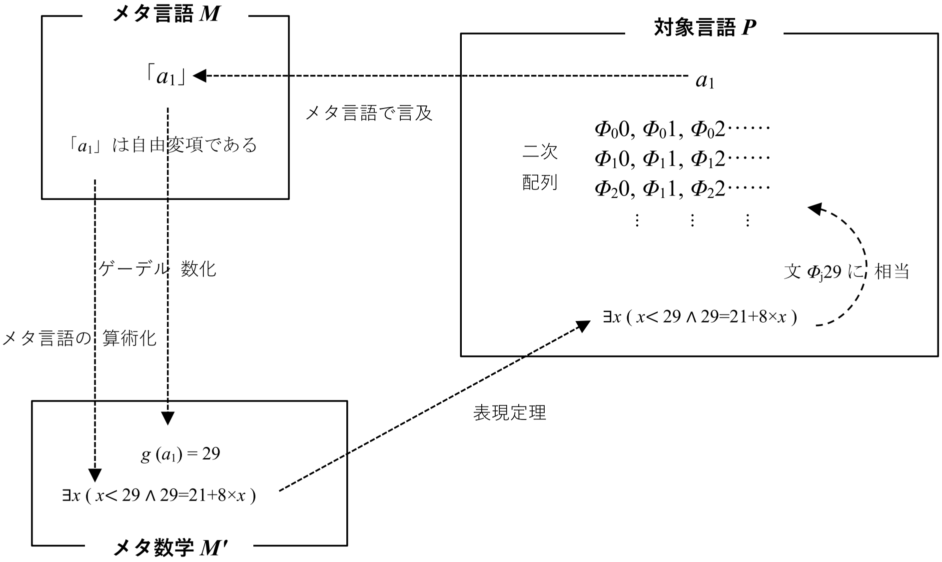
22.「$\boldsymbol{a}_1$」は自由変項である　$\exists x\ (\ x< 29 \wedge 29 = 21+8\times x\ )$

29 未満で 8 を掛けて 21 を足せば 29 になる数が存在する。たしかに存在する。1 である。1+1 = 2 のようにして（11）、それは証明される[79)]。これが、メタ数学の発想なのである。

§24　重要な図

以上がメタ数学の発想である。対象言語、通常のメタ言語との関係も含め、図で概観してみよう[80)]。

23. 見取図



対象言語は公理系 P である（10, 17)。メタ言語は M で表す[81)]。メタ数学は M' で表す[82)]。

§25　表現定理

表現定理についても触れておきたい。図 23 の右下に小さく書かれているのが、それだ。

先ほど、「a_1」は自由変項である、というメタ言明を数式化したとき（22）、*P* で証明できると言った。

実際、正当な仕方で——より具体的には、再帰的な仕方で——定義されたメタ数学の論理式は、*P* で証明可能になる。これを、表現定理（representability theorem）という。

24. 表現定理[83]　メタ述語 $\boldsymbol{\Phi}$ が（メタ数学のやり方で）再帰的に定義されていたとする（これを再帰的述語と呼ぶ）[84]．このとき，次が成立する．

$$\boldsymbol{\Phi}\,(\boldsymbol{n_1}, \ldots, \boldsymbol{n_k})\text{ が成立する } \Rightarrow\ \vdash \Phi\,(n_1, \ldots, n_k).$$

ここでは太字 $\boldsymbol{\Phi}$ でメタ数学 *M′* の述語、そうでない Φ で対象言語 *P* の述語を表している。述語という呼び方は、本当のところ正しくない。メタ数学で定義される（先にみた 21 や 18 のような）論理式を念頭に置くからだ。

だが実践では論理式でなく、それによって定義されたメタ述語を扱う、そういった機会の方が多いだろう。典型的には、すぐ後にみる *B* や *Bew* が、それだ（§27）。なのでここでは、あえて述語と呼ぶことにする。

例えば「　は自由変項である」というメタ述語が、$\exists x\ (\ x< a \wedge a=23+8\times x\ )$ という論理式で、メタ数学において定義される。表現定理（24）によれば、そのとき焦点となるのは、それが再帰的であるか否か、ということである。

再帰的定義（recursive definition）は論理学でしょっちゅう出てくる考え方だけれども[85]、ここでは計算可能性理論（第 4 章）を念頭において理解するのがよい。

計算可能性理論では、その特性関数（表現関数）が再帰的に定義される述語を、再帰的述語と呼ぶ[86]。ゲーデルの論文で定義されている 1 から 45 のメタ述語は全部、そういった意味で再帰的述語である。だから表現定理（24）が成立する。

しかし四十六個目 *Bew* だけは、再帰的でない[87]。

ここから読みとるべきなのは、次のことである。すなわち *B* というメタ述語（後述 25）には表現定理が成立するが、*Bew* というメタ述語には表現定理が成立しない。

§26　なぜ表現定理は成立するのか

なぜ表現定理は成立するのかという、その証明も論じなければならないかもしれないが[88]、ここでは立ち入らないでおく。

ふたつ、表現定理（24）を直感的に理解する仕方がある。

ひとつは、再帰的に定義される述語は（計算可能性理論の見方で）それを計算するアルゴリズムがある、とみなすことだ[89]。再帰的に定義された述語（を使い形成された文）は、このアルゴリズムにより、真偽がオートマチックに（機械的に）判定される。1+2 = 3 が機械的に証明されたのと同じである（15）。そこから証明図 11 のような証明を連想すればよい。こうして再帰的述語（をつかって形成された文）は証明可能だと考えられる。

直感的に理解するもうひとつ方法は、メタ数学 *M′* は、ペアノ公理系 *P* と同じ厳密な形式

性を目指したものとして、その生き写しになる（具体的には一階述語論理の言語で表される)、という事実に訴えることだ。そこから表現定理は成立して「当然だ」と考える。簡単すぎるかもしれないが、実際、この仕方で表現定理を説明する者は、少なくない[90)]。

§27　証明 *B* と証明可能 *Bew*

さてもう一度、表現定理を見直してみよう。そのポイントはふたつある。

25. 表現定理　① メタ言語の表現が，数式化（論理式化）される．
② もしそれが再帰的なら，P で証明される．

図 23 で $M' \dashrightarrow P$ と進むルートは、実をいうと、表現定理だけではない。① さえ満たされれば、(P において）証明可能でないという条件つきで、M' から P への移行だけなら可能になる。

このルートを取るのが「　は証明可能である」あるいは、その省略表現 ⊢ にあたる *Bew* だ。① だけ示されるものとして、それは（メタ数学 M' で）こう定義される[91)]。

26. *Bew* の定義　$\forall x\ [\ Bew\ (x) \longleftrightarrow \exists y\ B\ (x, y)\ ]$

$B\ (x, y)$ は初対面だろう。だが以後の説明で、それは重要な役割をはたす。「ゲーデル数 x の文はゲーデル数 y の証明図[92)] で証明される」と読む。

$B\ (x, y)$ は $Bew\ (x)$ と違い、「a は自由変項である」という論理式（21）のように再帰的に定義される。だから $B\ (x, y)$ の方は表現定理ルートで、M' から P に入れる[93)]。

B と Bew の違いについては、こんな風にイメージしてほしい。

お誂え向きの証明図 y を問題の文 x に用意するなら、その文 x が証明可能かを判定してくれるコンピュータは存在する。しかし証明図もなにも用意せずに、ただ文 x を出して、これが証明できるのか、と問うても解決してくれるコンピュータは（すべての x について）存在しない。上掲定義（26）の $\exists y$ が、そういう他力本願さを表している。そしてこの意味で $Bew\ (x)$ は決定可能でない。

第 7 章　$g\ (\neg Bew\ (n_\psi)\ ) = n_\psi$

以上で不完全性定理証明の枠組みを終える。とくに図 23 は重要で、それを逆時計回りにぐるぐる回転する思考が、今後、証明を理解するカギとなる。

§28　リシャールのパラドクス

ゲーデルの証明は、証明不能な文 ψ があると言い、それが $\neg Bew\ (n_\psi)$ つまり証明不能と言っている自分自身だった、という推理小説のような趣をもっている。

ここにあるのは自己言及（self-reference）の論理である[94)]。ゲーデル自身は、タルスキ

の嘘つきのパラドクスにも触れているが[95]、まんざら外れていない。そこにカントールの対角線論法が加味された論理が証明の機軸になる[96]。

ゲーデル自身はリシャールのパラドクス（Richard’s paradox）と言っている[97]。通りすがりになるけれども、予備知識として、それにも触れておこう。

27. リシャールのパラドクス[98]

整数部分がゼロの実数のうち，言葉で述べられる（定義できる）ものを，右に対にしてならべる．

	言葉		実数
1 番目	ゼロ	←→	0. 0 0 0 0 ……
2 番目	四分の一	←→	0. 2 5 0 0 ……
3 番目	三分の一	←→	0. 3 3 3 3 ……
⋮	⋮		⋮
n 番目	n 番目の小数点以下…		

このなかには決して数詞である必要のない「ルート二引く二」なんてのもあってよい．さてそこで図のとおり対角線部分に注目する．言葉でそれを「n 番目の，小数点以下第 n 位が 8 か 9 だったら 0，それ以外は +1 にする」と定義する．言葉で述べたのだから，この実数も右側に対で存在しなければならない．だがカントールの対角線論法同様に考えると，それは右の対に存在しない．これはおかしい．

§29　対角化定理

リシャールのパラドクスは通りすがりの知識でよい。もっと重要なのは、そこにみられる対角線の発想である。それを利用し、次が証明される。

28. 対角化定理[99]

Ψa を P の論理式とせよ．自由変項は a のみとする．このとき $g(\Psi n) = n$ となるゲーデル数 n が存在する．

文章のかたちが崩れてしまうが、番号をふり、一歩一歩証明してゆく。

① 二次元配列（20）で，対角線上の文 $\Phi_0 0$，$\Phi_1 1$，$\Phi_2 2$，…… を取りだす．これを一般に $\Phi_k k$ と書く[100]．

② それらにゲーデル数を割り当てる．すなわち $g(\Phi_0 0)$，$g(\Phi_1 1)$，g（Φ $_1$1），……．これらは，たかだか自然数でしかないことに注意．一般に $g(\Phi_k k)$ で表される．

③ ② のたかだか自然数 $g(\Phi_k k)$ に定理（28）で取りあげられる任意の論理式 Ψa を当てはめる．すなわち $\Psi g(\Phi_k k)$．[101]

この $\Psi g\ (\Phi_k\, k)$ という文は，$\Psi 0$，$\Psi 1$，…… と Ψa に自然数を順に当てはめていったとき，かなり後方にあることに注意[102]．なぜならゲーデル数 $g\ (\Phi_k\, k)$ は，たとえ $\Phi_0 0$ であったとしても，かなり大きな自然数になるからだ[103]．

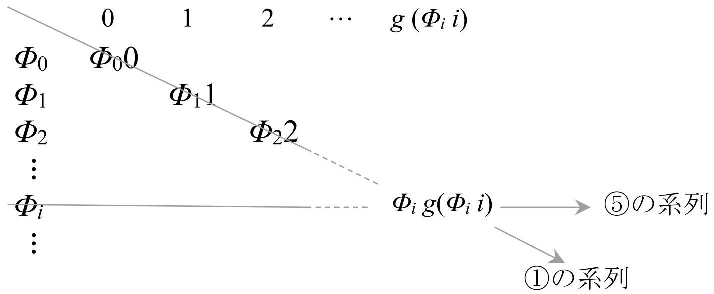
④　さて，③ で出てきた Ψa は自由変項ひとつだけなので，当然，論理式の系列（19）のどこかに現れる．これを改めて $\Phi_i\, a$ と表す．つまり $\Psi a = \Phi_i\, a$ である．このイコールは同値どころか，形態的な一致である．

⑤　④ より，以下の言い換えが成立する（上と下で対応している）．

$$\Psi 0,\quad \Psi 1,\quad \cdots\cdots\quad \Psi g\ (\Phi_0 0),\quad \cdots\cdots\quad \Psi g\ (\Phi_0 0),\quad \cdots\cdots\quad \Psi g\ (\Phi_1 1),\quad \cdots\cdots$$
$$\Phi_i\, 0,\quad \Phi_i\, 1,\quad \cdots\cdots\quad \Phi_i\, g\ (\Phi_0 0),\quad \cdots\cdots\quad \Phi_i\, g\ (\Phi_0 0),\quad \cdots\cdots\quad \Phi_i\, g\ (\Phi_1 1),\quad \cdots\cdots$$

⑥　これ（⑤）は，元々，① の系列にあった対角線上の系列 $\Phi_0 0$，$\Phi_1 1$，$\Phi_2 2$，…… を，わざわざゲーデル数化 $g\ (\Phi_0 0)$，$g\ (\Phi_1 1)$，$g\ (\Phi_1 1)$，…… し，適当な論理式 Ψa のなかに入れて（Ψa を言い換えた⑤の）系列 … $\Phi_i\, g\ (\Phi_0 0)$，…… $\Phi_i\, g\ (\Phi_1 1)$，…… の横一列に並び変える，という手続きを表している[104]．

⑦　対角線にあったものを，横一列に並び変えたとき，当然，交点が生まれる．



⑧　図 ⑦ で Φ_i は，果てしなく下にあるとイメージしてもらいたい．ゲーデル数化した時点で引数はとてつもなく大きな自然数になっており，交点が探し始められる $\Phi_i\, g\ (\Phi_0 0)$，…… は，果てしなく右に位置すると考えられるからだ．

⑨　図 ⑦ の交点において $\Phi_i\, g\ (\Phi_i\, i) = \Phi_i\, i$ となるのは，あきらか[105]．このイコールは同値どころか，形態的一致であることに注意[106]．

⑩　⑨ を踏まえ，$\Phi_i\, i$ にゲーデル数をあたえる．$g\ (\Phi_i\, i) = n$.

⑪　⑩ で，⑨ の左辺引数を置き換えると，$\Phi_i\, n = \Phi_i\, i$．ゆえに $n = i$．もともと $g\ (\Phi_i\, i)$ は，ただの自然数であることにも注意．

⑫　$\Phi_i\, n = \Phi_i\, i$ は形態的一致であるから，$g\ (\Phi_i\, n) = g\ (\Phi_i\, i)$．

⑬　⑫ を ⑩ に代入すると，$g\ (\Phi_i\, n) = n$．Φ_i は ④ 以来 Ψ のことだから，こうして対角化定理は証明された．■

§30 $g\,(\neg Bew\,(n_\psi))=n_\psi$

対角化定理（28）が証明されたなら、あとは Ψ に $\neg Bew$ を当てはめればよい。引数 n_ψ は、ただの自然数と考えればよい。こうして $g\,(\neg Bew\,(n_\psi))=n_\psi$ が証明された。■[107)]

これを、対角化定理の系と呼ぼう。

第 8 章　第一不完全性定理の証明

対角化定理が証明され $g\,(\neg Bew\,(n_\psi))=n_\psi$ を言えるようになったので、一気に第一不完全性定理の証明に入る。

§31　第一不完全性定理証明序盤

続けて一気に第一不完全性定理（2，4）の証明に入ってしまおう。まず、ここまでの議論を踏まえ、それを、こう言い換える。

29. 第一不完全性定理[108)]　$Bew\,(n_\psi)$ はペアノの公理系 P で表現される一階述語論理の文である[109)]．これは P で決定不能である[110)]．すなわち $\nvdash Bew\,(n_\psi)$ かつ $\nvdash \neg Bew\,(n_\psi)$．

番号を振りつつ証明してゆく[111)]。まず、序盤戦である[112)]。

① $\vdash \neg Bew\,(n_\psi)$ だったとする．これはメタ言語での ¬-Intro すなわち背理法の仮定である．

② ① の仮定には $\vdash$ を司る P の構文論的無矛盾性も含まれる．すなわち，どんな φ についても $\vdash \varphi$ かつ $\vdash \neg\varphi$ ということはない[113)]．

③ ここで，次の補題を導入する．

30. 補題[114)]　$\vdash \varphi \Rightarrow \vdash Bew\,(g\,(\varphi))$

証明　表現定理（25）を念頭に置く[115)]．$\vdash \varphi$ を仮定する．このとき，それを証明する証明図があるはずだから，そのゲーデル数を n とすると，$B\,(g\,(\varphi), n)$ が言える[116)]．Bew はそうでないが，B は再帰的に定義されるメタ述語であるため，表現定理より $\vdash B\,(g\,(\varphi), \mathrm{n})$ が言える[117)]．∃-Intro を追加適用して $\vdash \exists y\, B\,(g\,(\varphi), y)$．定義 26 より $\vdash Bew\,(g\,(\varphi))$．■

④ ① に補題 30 より，$\vdash Bew\,(g\,(\neg Bew\,(n_\psi)))$．

⑤ ④ に対角化定理の系より（§30），$\vdash Bew\,(n_\psi)$．

⑥ ①⑤ は P の構文論的無矛盾性（②）に反する．つまり矛盾発生.

⑦ ①⑥ より背理法成立．こうして ① の仮定は解除され $\nvdash \neg Bew\,(n_\psi)$ が言われる．これが第一不完全性定理（29）の連言肢のひとつになる.

§32　第一不完全性定理証明中盤

証明を続けよう[118)]。

⑧　$\vdash Bew\ (n_\psi)$ だったとする．これはメタ言語での ¬-Intro すなわち背理法の仮定である．

⑨　⑧ に定義 26 より，$\vdash \exists y\, B\ (n_\psi, y)$．

⑩　ここで，前半で証明したこと，すなわち $\nvdash \neg Bew\ (n_\psi)$ を投入する（⑦）．

$\nvdash \neg Bew\ (n_\psi)$ は図 23 での $M \dashrightarrow M'$ への移行において考えると，どんな証明図のゲーデル数 g_1，g_2，…… を持って来ても，以下が成立する，と理解される．

$$
\begin{aligned}
& \nvdash \neg Bew\ (n_\psi) && [⑦より] \\
\dashrightarrow\quad & \neg Bew\ (g\ (\neg Bew\ (n_\psi))) && [M \dashrightarrow M'] \\
\Longleftrightarrow\ & \neg B\ (g\ (\neg Bew\ (n_\psi)), g_1)\ \text{かつ}\ \neg B\ (g\ (\neg Bew\ (n_\psi)), g_2)\ \text{かつ}\cdots\cdots && [定義\ 26] \\
\Longleftrightarrow\ & \neg B\ (n_\psi, \mathrm{g}_1)\ \text{かつ}\ \neg B\ (n_\psi, g_2)\ \text{かつ}\cdots\cdots && [対角化定理の系]
\end{aligned}
$$

⑪　B は再帰的に定義できるから表現定理（25）が適用できる．ゆえに ⑩ より，次が成立する．

$$\vdash \neg B\ (n_\psi, \mathrm{g}_1)\ \text{かつ} \vdash \neg B\ (n_\psi, g_2)\ \text{かつ}\cdots\cdots$$ [119)]

§33　ω - 無矛盾性

さてここで（⑪）、ω - 無矛盾性（ω-inconsistency ／独 ω-widerspruchfrei）を定義[120)]、導入したい。

31．ω - 無矛盾性[121)]　公理系 P における証明図のゲーデル数を g_1，g_2，…… とする．或る文 ψ のゲーデル数 n_ψ について，どんな g_i をとっても，$\vdash \neg B\ (n_\psi, g_i)$ だったとする．つまり ⑪ のとおりだったとする．このとき $\vdash \forall y \neg B\ (n_\psi, y)$ が言える．

ようするに全称文でよく言われる $Fc_1 \land Fc_2 \land \cdots$ から $\forall xFx$ を言ってよいのか、という話である[122)]。これに、そう言ってよい、と答えるのが ω - 無矛盾性なのである。

§34　第一不完全性定理終盤

ω - 無矛盾性は、不完全性定理の証明において公理系 P に認められた新たな前提である[123)]。厳密には、ω - 構文論的無矛盾性と言うべきだろう。これにより証明が締めくくられる。

⑫　⑪ に ω - 無矛盾性より，$\vdash \forall y \neg B\ (n_\psi, y)$．

⑬　しかし ⑨ に ドモルガンの法則[124)] より，$\vdash \neg\forall y \neg B\ (n_\psi, y)$．

⑭　⑫⑬ は P の構文論的無矛盾性（②）に反する．つまり矛盾発生.

⑮　⑧⑭ より背理法成立．こうして ⑧ の仮定は解除され，$\nvdash \neg Bew\ (n_\psi)$ が言える．これが第一不完全性定理（29）の連言肢のひとつになる.

⑯　⑦⑮ に，かつ -Intro で $\nvdash Bew\ (n_\psi)$ かつ $\nvdash \neg Bew\ (n_\psi)$．こうして第一不完全性定理が証明された．■

第 9 章　第二不完全性定理

最後に第二不完全性定理を証明しよう。この（メタ）定理にいたるには、すこし準備する必要がある。そこから始めたい。

§35　準備

第二不完全性定理に入る前に、まず、以下の (一連の) メタ定理を知っておく必要がある[125]。

32. 公理系 P が構文論的に矛盾している $\Rightarrow$ 任意の φ について，$\vdash \varphi$.

証明　P が構文論的に矛盾である，とする（⇒ -Intro の仮定）．このとき，構文論的矛盾の定義より[126]，或る χ があって，$\vdash \chi$ かつ $\vdash \neg\chi$. それぞれの証明図をつなげ，∧-Intro に CONTRAD より[127]，任意の φ について $\vdash \varphi$．最後に（メタ言語での）⇒ -Intro より，定理 32 は証明された. ■

このメタ定理 32 の対偶をとる。

33. 或る φ があって，$\nvdash \varphi \Rightarrow$ 公理系 P が構文論的に無矛盾である.

逆 ⇐ も成立する。

34. 公理系 P が構文論的に無矛盾である $\Rightarrow$ 或る φ があって，$\nvdash \varphi$.

証明　公理系 P が構文論的に無矛盾であったとする（⇒ -Intro の仮定）．そこで証明不能な文 φ の候補として $\chi \wedge \neg\chi$ を考えよう．$\vdash \chi \wedge \neg\chi$ だったとする（背理法の仮定）．証明図を続け ∧-Elim より $\vdash \chi$ かつ $\vdash \neg\chi$．これは P の構文論的無矛盾性に反する．こうして背理法成立．$\nvdash \chi \wedge \neg\chi$．メタ言語での ∃-Intro より，或る ϕ があって，$\nvdash \varphi$．⇒ -Intro より，定理 34 は証明された．■

33 と 34 より、次の双条件法が成立する。

35. 或る φ があって，$\nvdash \varphi \Longleftrightarrow$ 公理系 P が構文論的に無矛盾である[128].

§36　言い換え

メタ定理 35 が証明されたことで、第二不完全性定理（5）は、次のように言い換えられる。

36. 第二不完全性定理　公理系 P において証明できない文 φ があるということは（メタ定理 35 を介して），P の構文論的無矛盾性を意味する．しかしながら，そのこと（公理系 P において証明できない文 φ がある）は，P 内部で証明できない．

内部で、というのがポイントである（§2）。

§37　証明する *P* の文

言い換えたところで第二不完全性定理（36）を証明しよう。

P 内部で証明できるか、というところに焦点が合わされているから、メタ定理 35 で言われる「或る φ があって，$\nvdash \varphi$」というところを P の表現にしなければならない。

ここで再び図 23 を使う。注目されるのはメタ定理 35 の左辺「或る φ があって，$\nvdash \varphi$」であって、いまやこれが第二不完全性定理（36）に同一視される。

その左辺「或る φ があって，$\nvdash \varphi$」を $M \dashrightarrow M' \dashrightarrow P$ へと移行させる。すると、次が得られる[129]。

37. メタ定理 35 左辺（*M′* そして）*P* での表現[130]　$\exists x \neg Bew(x)$

これ（37）は P の文である。変項 x は証明不能な文 φ のゲーデル数である。

§38　第二不完全性定理の最終形態

メタ定理 35 より、構文論的無矛盾性は P の言明 37 に託される。それが P 内部で証明できない、というのが第二不完全性定理である。だからそれは最終的に、こう言い表される。

38. 第二不完全性定理　$\nvdash \exists x \neg Bew(x)$

これで「P 内部で P の構文論的無矛盾性は証明できない」と読む。

§39　第二不完全性定理証明

では、第二不完全性定理（38）の証明に移ろう[131]。番号を振って証明してゆく。

① まず，もう一度，第一不完全性定理（29）を読み直す．そこでは P が構文論的に無矛盾である，ということが仮定されていた（§31 ②）．仮定とされていたとは，第一不完全性定理を全体として述べると，次のようになる，ということだ．

公理系 P は構文論的に無矛盾である ⇒ $\nvdash Bew\ (n_\psi)$ かつ $\nvdash \neg Bew\ (n_\psi)$.

② $\{p \to q \wedge r\} \vdash p \to r$ という推論を使い（証明略），①から，次を導きだす[132].

公理系 P は構文論的に無矛盾である ⇒ $\nvdash \neg Bew\ (n_\psi)$.

③ ② の前件は，メタ定理 35 と §37 の議論同様にして，メタ数学 M' で $\exists x \neg Bew\ (x)$ へと言い換えられる（今回は P の一歩手前 M' で止めていることに注意してほしい）[133].

④ ② の後件 $\nvdash \neg Bew\ (n_\psi)$ は M の表現だから，M' に移すと $\neg Bew\ (g\ (\neg Bew\ (n_\psi)))$ となる．これに対角化定理の系（§30）より $\neg Bew\ (n_\psi)$.

⑤ ② の ⇒ は P に向け → とすればよい．そうすると ② 全体は M' で，こう表される[134].

$\exists x \neg Bew\ (x) \to \neg Bew\ (n_\psi)$

⑥ いま，これ（⑤）が P で証明可能か，と問うてみよ．表現定理（24）は使えない．*Bew* が非再帰的だから（§27）ではなく，それ（⑤）は命題論理の文だからである．

⑦ 表現定理経由でなく，n_ψ についてのメタ規定で ⑤ は成立する．

⑧ ここ（⑦）で言うメタ規定とは，対角化定理の系（§30），すなわち $g(\neg Bew\ (n_\psi)) = n_\psi$ のことであり，ここでは n_ψ こそ，証明不能な文（のゲーデル数）だと言われている．つまり，証明不能な文がある $\exists x \neg Bew\ (x)$，と言われたら，それは間違いなく n_ψ（というゲーデル数で表された文）なのだ．

⑨ こうして ⑤ は成立する．

$\vdash \exists x \neg Bew\ (x) \to \neg Bew\ (n_\psi)$

⑩ ⑨ のメタ定理は $\vdash \varphi \to \psi \Rightarrow (\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \psi)$ より[135]，$\vdash \exists x \neg Bew\ (x) \Rightarrow \vdash \neg Bew\ (n_\psi)$ と言い換えられる[136].

⑪ ⑩ で仮に $\vdash \exists x \neg Bew\ (x)$ だったとする（背理法の仮定）.

⑫ §37〜§38 より ⑪ は，P 内部で P の構文論的無矛盾性が証明されたことを意味する．

⑬ ⑫ のとおり P の構文論的無矛盾性が証明されてしまったなら，第一不完全性定理（29）の第二連言肢より，$\nvdash \neg Bew\ (n_\psi)$.

⑭ しかし ⑪⑩ に ⇒ -Elim（*MP*）より，$\vdash \neg Bew\ (n_\psi)$.

⑮ ⑬⑭ に，かつ -Intro より，$\nvdash \neg Bew\ (n_\psi)$ かつ $\vdash \neg Bew\ (n_\psi)$．これは矛盾である．

⑯ ⑪⑮ より，こうして背理法が成立し，第二不完全性定理（38）が証明された．■

§40 むすび

以上の証明において、⑦〜⑨ の論理は、ヘンキン証拠公理（金子 2019, p.146）に似た考

えから理解されるものである。詳しくは近刊拙著『文系のための記号論理学』で説明しているので、あわせて参照してもらいたい（金子 2021, sec.287）。

註

1）　近刊拙著（金子 2021）も，ぜひ参照してもらいたい．同じく，ゲーデルの不完全性定理を詳説している．先に本稿，それから，金子 2021，第 X 部（不完全性定理）を書いたため，はっきり言ってしまうと，本稿には不備がある（後述，註 60，註 109，註 113 で訂正された点）．なので，確実に理解したいひとは，あわせて，金子 2021，第 X 部を読んでもらいたい．

2）　金子 2019, p.191 n.8.

3）　節（§）は，章が変わっても，継続して数えてゆく．

4）　廣瀬ほか 1985，p.1; 田中 2012, p.4.

5）　ウィーン大学の紀要だったらしい（廣瀬ほか 1985, p.9）．現在は学術出版社シュプリンガー（Springer）で，数学月報（Monatshefte für Mathematik）と名を変え，継続されている（https://www.springer.com/journal/605）.

　ちなみに論文に先立って 1930 年に発表された要約（オブストラクト）は，ウィーン科学アカデミー紀要に発表されている（田中 2012, p.11）．また，雑誌掲載に先立ち 1930 年ケーニヒスベルク数学者会議で発表された（Zach 2019, sec.1.4 ; 廣瀬ほか 1985, p.7）.

6）　重要な事項，引用などに通し番号 1，2，…… をつけてゆく．

7）　Gödel 1967, p.616.

8）　Gödel 1931, S.187 Satz VI ; 田中 2012, p.97 ; 廣瀬ほか 1985, p.182 ; Gödel 1967, p.607 Theorem VI.

9）　ゲーデルの原文だと「…, so dass」．しかしこれは結果の構文だから好ましくない（在間ほか 2010, pp.1397-1398）．英訳の方では「名詞 [,] such that…」の構文がつかわれている（Gödel 1967, p.607）．こっちのほうが的確である．

10）　Gödel 1931, S.196 Satz XI ; 田中 2012, p.138 ; 廣瀬ほか 1985, p.193 ; Gödel 1967, p.614 Theorem XI.

11）　Note added [on] 28[th] August[,] 1963（Gödel 1967，p.616）.

12）　Gödel 1967, p.616 ; 田中 2012, pp.6-7.

13）　Gödel 1967, p.616 ; 田中 2012, pp.6-7.

14）　英語 incomplete の独訳は，次節 §5 ; 田中 2012, p.11 ; PONS 2008，p.482 参照.

15）　田中 2012, p.3.

16）　二十四歳でウィーン大学に提出した博士論文のようである．その縮約版が不完全性定理とおなじく『数学物理学雑誌』に掲載された（田中 2012，p.4 ; Henkin 1949, p.159, p.166 ; Enderton 1972, p.139 ; 廣瀬ほか 1985, pp.147-163）.

17）　関数計算とは述語論理のことである（廣瀬ほか 1985, p.163 n.1）.

18）　厳密には，こう定式化される（金子 2019, p138）.

$$\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

19）　構文論と意味論については，『論理と分析』参照（金子 2019，第 I 部）.

20）　双方向的に一致するには，厳密にいうと，健全性定理 $\vdash\varphi \Rightarrow \vDash \varphi$ も必要である（金子 2019,

sec. 173).

21) 公理系という考え方については『論理と分析』参照(金子 2019, sec.58).

22) 完全性定理を発表した当時,ゲーデルは完全性を決定可能性として捉えていたのではないか,という見方もできる(cf. 廣瀬ほか 1985, pp.5-6).べつの機会に立ち入って考察してみたい.

23) 倉田 1995, p.2; 廣瀬ほか 1985, p.80, p.110.

24) 野矢(1994, p.186, p.207)が戒めている.

25) 大澤(2018)の解説である.

26) 廣瀬ほか 1985, p.80 ; Turing 1937, p.259. チューリングによれば,1931 年ヒルベルトとアッカーマンが『理論論理学の根本性質』第三版で提起しているらしい(op.cit).しかし 1931 年はゲーデルが不完全性定理を出版した年であるし,オブストラクトはそれ以前であるから(§1),もう少し前から数学者コミュニティで決定問題は共有されていたとかんがえるべきだろう(廣瀬ほか 1985, pp.7-8, p.45).

27) ヘンキン証明(完全性定理)は,逆に,このレベルの話を許す(金子 2019, sec.208).

28) 理論的に $a=a$ といった論理式も定理になり得るため,文に限定する必要はない,と思われるかもしれない.だが実際に決定不能命題をみればわかるとおり(§16 〜),それは Bew (n_ψ) という文である.なので以後,不完全性定理でとりあげるのは,論理式でなく文に限定したい.

29) 金子 2019, par.I, par.II, par.IV.

30) 結構,専門家はシステム(system)という名で,公理系と言語を同時に名指してしまう(e. g. Henkin 1949, p.159, p.161).

31) Gödel 1931, S. 173 ; 金子 2019, p.43.

32) Gödel 1931, S. 173 ; 金子 2019, pp.15-16.

33) Gödel 1931, S. 176 ; 田中 2012, p.42.

34) 内包公理については,金子 2021, 付録 4 参照.

35) 廣瀬ほか 1985, p.116 ; 野矢 1994, p.191 ; 田中 2012, p.42.

36) 田中 2012, p.42, 野矢 1994, p.191, 廣瀬ほか 1985, p.115.

37) いわゆる数学的帰納法である(金子 2019, sec. 205).Φ はメタ言語でのみ使用される表現で,対象言語に現れるときには必ず,具体的な論理式になっている.

38)『論理と分析』参照(金子 2019, p.161).

39) 論理としては 10 の Rule に記したとおり NK を使っている.横長になり過ぎて一部省略している.省略したのは,等号=の推移性を表す Ax.1 の追加場所(上の糸とは関係ない)と,それに対する ∀-Elim. × 2(2 回適用していることを表す)である.

40) 廣瀬ほか 1985, pp.5-6. ゲーデルは,整数論(独 die Theorie der ganzen Zahlen)といっているが(Gödel 1931, S. 173 ; 田中 2012, p.25),実際にあつかうのは整数(integer /独 ganze Zahl)ではなく,自然数(natural number /独 natürliche Zahl)である.

41) ハイエノールト編集の『フレーゲからゲーデルへ』に,彼の小冊子「新しい方法で提示された数学の原理」の翻訳がある(Peano 1889).

42) 野矢(1994, p.156, p.185)が比較的はっきりいっている.しかし四則演算(+, −, ×, ÷)は負の整数も含むから,必ずしも正の整数論である,自然数論に限定されない.にも拘らず,ペアノがやっている算術は,自然数のみをあつかう.これ彼の言語で 0 と ( )′ しか認めないところからわかろうだろう(後述 17).

43) 算術の証明というより,定理を明確に言い表したい場合,記号論理は不可欠だろう.これはっむしろ数学の実践から気づくことかもしれない(松坂 1990, pp.1358-1374).

44) 松坂 1990, pp.1229-1259. 松坂(1990, p.1233)が言っているとおり,数論はユークリッド

が『原論』第 7，8，9 巻で展開した議論である（Euclid 300 B.C.）．それを読めばわかるとおり，自然数論に限ってみても，小学生の算数をはるかに越えた代数的考察を伴っている．

45）金子 2021，pt.VII，ch.3.

46）1 から 46 まで番号がふられている（Gödel 1931, s.182-183）.

47）語呂のため「の」を省き，以下，計算可能性理論とも呼ぶ.

48）倉田 1995, pp.1-2, pp.75f.　再帰的に定義された関数は計算可能である（Cultland 1980, p.34）.

49）ここまでの話だけでも理論的にしっかり身につけたいなら，Cutland 1980, pp.7-18 を読めばよい.

50）1963 年に J. C. Shepherdson と H. E. Sturgis が発表した（Cutland 1980, p.9. p.49）.

51）Cutland 1980, p.23.

52）特性関数（characteristic function）ともいう（Cutland 1980, p.22 ; 廣瀬ほか 1985, p.94）.

53）Cutland 1980, p.22.

54）Turing 1937.

55）それは $\vdash\varphi$　がまるごと決定可能を意味するというより（§6～§7），$\vdash\varphi$　を $M\,(a_1, \cdots, a_n)$ で表される述語「 φ は証明可能である」と取ったうえで，その決定可能性を問う，という考え方をする（Cutland 1980, pp.109f.; see also Turing 1937, p.259）.

　チャーチ（Alonzo Church 1903-1995）が 1936 年に証明し, ヒルベルトも認めたらしい（Cutland 1980, p.110）．チューリングも当然気づいていたのだが（Turing 1937, p.231），チャーチにはチューリングマシンなど計算機械の発想はなかったから，この辺は，もうすこし立ち入って調査しなければならない.

56）対象言語とメタ言語の区別については『論理と分析』参照（金子 2019, par.II, ch.1）．ゲーデルがはたしてこの区別をタルスキレベルで認識していたか，という点には疑問がのこる．しかし本論文では，必要にして十分の認識があったと考える. 田中 2012, p.26 も参照（本論文は，そこで田中が整理している表から，ゲーデルには対象言語とメタ言語を明確に区別していたと考える）.

57）本稿ではゲーデル数化は自明のものとする．詳しくは『論理と分析』付録 2 で説明してある（金子 2019, pp.252-253）.

58）関数は $f\,(x)$ と丸括弧つきで書くのに対し , 述語は Fx と丸括弧なしで書くのが筋なのであるが, *Bew* といった風に単一文字で述語を表せない場合，個体定項との区別がむずかしくなるので，ここではあえて丸括弧を挿入した .

59）*Bew* は Beweisbar でゲーデルの述語（Gödel 1931, S.186 ; 田中 2012, p.70 ; 廣瀬ほか 1985, p.180）. *Pr* すなわち Provable で表されることもある（廣瀬ほか 1985, p.126; 野矢 1994, p.196）.

60）野矢 1994, p.199 ; 田中 2012, p.70. 厳密には $\neg Bew\,(n_\psi)$ である（金子 2021, sec.261 ; 田中 2012, p.32 ; 廣瀬ほか 1985, p.133）.

61）Gödel 1931, pp.174f.; 野矢 1994, pp.196f.; 廣瀬ほか 1985, pp.110f., pp.166f.; 田中 2012, pp.28f.

62）『論理と分析』参照（金子 2019, p.84 (130) (131)）.

63）*NK* の形成規則については, 金子 2019, par. IV, ch.1, ペアノ公理系特有の表現については , 金子 2019, par. IV, ch.4 を参照. 野矢 1994, p.194 ; 廣瀬ほか 1985, p.115 も参照. ちなみに 17 はゲーデルが実際に使った言語――ラッセルらの体系を基盤にしている――とは若干異なっている（Gödel 1931, S.176f.; 田中 2012, pp.43f.）.

64）田中 2012, p.30. 大小関係 $x < a$ をいう部分は, $\exists z\ (\ a = x+(z)'\ )$ で定義できる（田中 2012, p.151; 廣瀬ほか 1985, p.129）. 大小関係は, 原始再帰性 (廣瀬ほか 1985, p.96), 決定可能性（Cutland 1980, pp.38-40）をいうため必要である.

65) Φa は論理式についてのメタ変項である. 形式的には, あまり厳密でないが『論理と分析』以来, 重宝している（金子 2019, sec.119）.

66) 系列とは英語でいえば, ただの sequence で, ただ順序をつけて並べている, とだけ理解すればよい.

67) 廣瀬ほか 1985, p.111 : $P_0(x), P_1(x)$……. 野矢 1994, p.210 : $A_0(x), A_1(x)$…….

68) 金子 2019, sec.183 ; 野矢 1994, p.210.

69) 廣瀬ほか 1985, p.111 ; 野矢 1994, p.210.

70) 野矢（1994, p.200）, 廣瀬ほか（1985, pp.133-134）の説明に沿って証明を進めてゆく.

71) 野矢 1994, p.198 : g ($\neg Pr$ (n)) = n.

72) 廣瀬ほか 1985, p.48 ; 野矢 1994, p.140 ; 田中 2012, p.57.

73)『論理と分析』参照（金子 2019, sec.96）.

74) Gödel 1931, S.182-186.

75) 構文論において形成規則として述べられる（金子 2019, p.84 (130) ②）.

76) 詳しくは『論理と分析』付録 8 参照（金子 2019, p.252 ⑦ ⑧）.

77) ゲーデルの定式というより（Gödel 1931, S.182 ; 廣瀬ほか 1985, p.176）, 廣瀬ほか（1985, p.122）のものを採用している. 大小関係 $x< a_1$ は原始再帰性 (廣瀬ほか 1985, p.96), 決定可能性（Cutland 1980, pp.38-40）を言うために必要となる. 註 64 参照.

78) 廣瀬ほか（1985, p.127）が繊細な扱い方をしている. たとえば *Bew* という述語であるが（§16 ～）, これがメタ数学 M' —こういった名称はすぐ後に §24 で説明する—に属する場合, 斜体 *Bew* で表される. これに対し対象言語 P に属する場合, 立体（りったい）Bew で表される. 本論文では, しかし, こういった書き分けはしないことにする.

79) 厳密な証明のためには, 自然数をそれぞれ P の表記 $(\cdots(0)'\cdots)'$ に直す（17）. 他方, 大小関係 $x < a$ は $\exists z$ ($a = x+(z)'$) で定義される. 註 64 参照.

80) 廣瀬ほか 1985, p.114, p.130 ; 野矢 1994, p.196 ; 田中 2012, p.7. p.14.

81)『論理と分析』で構文論（証明ではなく形成規則や, 公理や推論図を明言するところ）や意味論（真理関数, 充足条件を規定するところ）を述べた言語である. ふつうメタ言語, メタ論理といった場合, M の領域を指す.

82) 清水（1984, p.166）に倣った.

83) Gödel 1931, S. 186 Satz V; 田中 2012, p.87 ; 廣瀬ほか 1985, pp.128-129, p.131 ; 清水 1984, p.167 ; Raatikainen 2020, sec. 2. 2.

84) ゲーデルは再帰的関係（独 rekurisive Relation）と言っている（Gödel 1931, S. 180; 田中 2012, p.60）.

85)『論理と分析』参照（金子 2019, sec. 37）.

86) Cutland 1980, p.51 ; Gödel 1931, S. 180.

87) Gödel 1931, S. 182-186.

88) ゲーデル自身の証明は, Gödel 1931, S. 186-187 ; 田中 2012, pp.87-90.

89) 第 4 章参照.

90) 廣瀬ほか 1985, p.131 ; 野矢 1994, p.199;

91) Gödel 1931, S. 186 ; 廣瀬ほか 1985, p.126, p.180 ; 野矢 1984, pp.208-209.

92) 証明図のゲーデル数化には, *NK* の証明図というより, フィッチ式の縦書き証明（金子 2019, sec. 71）で考えた方が, ゲーデル数化をイメージしやすいだろう（廣瀬ほか 1985, p.122 ; 野矢 1994, pp.194-195, pp.208-209）.

93) 廣瀬ほか 1985, p.131 : $Prf\,(x, y) \Rightarrow N \vdash \mathrm{Prf}\,(\bar{x}, \bar{y})$.

94) Raatikainen 2020, sec. 2. 4.

95) Gödel 1931, S. 175 ; 金子 2019, p.257.

96）『論理と分析』参照（金子 2019, sec. 22）.

97） Gödel 1931, S. 175.

98） 廣瀬ほか 1985, p.38 ; 田中 2012, p.35.

99） 野矢 1994, p.197 ; 廣瀬ほか 1985，p.111.

100） 野矢 1994, p.210 : A_k (k).

101） 野矢 1995, p.210 : F $(g$ $(A_x$ $(x)))$.

102） だから野矢（1994, p.211）の $A_i(0)$, $A_i(1)$, …… という表記は止めた方がよい．これだと g $(\Phi_0 0)$ と 0 が同じようにみえてしまうからである．註 85 参照.

103）『論理と分析』付録 8 参照（金子 2019, pp.252-253）.

104） 野矢（1994, p.210）はトランプのカードを配りなおすことに見立て $F \circ g$ 変換と呼んでいる.

105） これを野矢（1994, p.211）は $F \circ g$ 不変式 と呼んでいる.

106） 形態的な一致という言い方をこれから多用するが，*Bew* (0) と *Bew* (0) のような真の同形性を意味している．*Bew* (0) と $\exists x\, B$ $(0, y)$ ではダメである．それはただ同値なだけである.

107） 野矢 1995, p.198.

108） 野矢 1994, p.199.

109） 前註 60 でも述べた通り，厳密には $\neg Bew$ (n_ψ) である．なので第一不完全性定理も厳密には，$\nvdash \neg Bew$ (n_ψ) かつ $\nvdash \neg\neg Bew$ (n_ψ) となり，この第二連言肢に二重否定律が掛けられる（金子 2021, 272 ⑬）.

110） 決定不能という概念は §6 参照.

111） ようするに擬似フィッチ式である（金子 2019, p.77）．対角化定理の証明でも，この方式が採られていたが（§29），これからみる証明の方が，よりはっきりと *NK* 論理がボトムアップ（つまり対象言語 *P* と同じ論理）で使われているのがわかる.

112） 野矢 1994, p.200 (1)；廣瀬ほか 1985, p.133 :「$N \vdash \neg \mathrm{Pr}$ $(\bar{q})$ と仮定すれば……」.

113） 厳密には，第一不完全性定理の前提として，ω-無矛盾性（§33）が言われており，そこから構文論的無矛盾性も導かれる（金子 2021, sec.279）.

114） 野矢 1994, p.199 補助定理 3 (1).

115） 廣瀬ほか 1985, p.133.

116） §27 参照.

117） 廣瀬ほか（1985, p.127）の言い方によれば「B $(g$ $(\varphi), n)$ が言えるから, $\vdash \mathrm{B}$ $(g$ $(\varphi), n)$ が言える」と斜体と立体を使いわけられる．斜体が *M'*，立体が *P* に，それぞれ属する表現．註 78 参照.

118） 以下の証明は，野矢 1994，p.200 (2) に当たるが，廣瀬ほか 1985，p.133「$N \vdash Pr$ $(\bar{q})$ とすれば……」の方が厳密.

119） 廣瀬ほか 1985, p.134 : $N \vdash \neg Prf$ $(\bar{q}, 0)$, $N \vdash \neg Prf$ $(\bar{q}, 0')$ ……．ただし，ゲーデル数（とてつもなく大きな自然数）なので 0 から始める必要はない.

120） Gödel 1931, S. 187 ; 田中 2012, p.96.

121） 廣瀬ほか 1985, p.133 ; 田中 2012, p.96; 野矢 1994, p.189.

122）『論理と分析』参照（金子 2019, sec. 156）.

123） ロッサー（John Barkley Rosser 1907-1989）が ω-無矛盾性の前提がなくても不完全性定理を証明できることを 1935 年に証明している（田中 2012, p.106 ; 廣瀬ほか 1985, p.135）.

124） 慣れ親しんだ $\exists xFx \longleftrightarrow \neg\forall x \neg Fx$ のことである（金子 2019, p.141）.

125） 廣瀬ほか 1985, pp.126-127 ; 野矢 1994，p.201.

126）『論理と分析』参照（金子 2019, p.141 (241)）.

127） CONTRAD とは $\{p \wedge \neg p\} \vdash q$ という推論である（金子 2019, p.232）.

128） 廣瀬ほか 1985，p.127，p.135 : Con $\Longleftrightarrow \exists x \neg Pr\,(x)$．右辺が $\vdash \exists x\, Pr\,(x)$ となっていないことに注意．廣瀬らの言明は M' でのべられているが，本文 35 では（左辺右辺逆で）M の言語で述べられている．

129） 廣瀬ほか 1985，p.133，p.135 ; 野矢 1994，p.201: $\exists x \neg Pr\,(x)$．

130） おなじ表現 $\exists x \neg Bew(x)$ を後にメタ数学 M' でも使う（§39 ③）．本当は P と M' で若干字体を変えるなどの工夫が必要なのだろうが，本論文では，そうやった区別をつけない．註 78 参照．

131） 野矢 1994，p.202 ; 廣瀬ほか 1985，p.135.

132） 野矢 1994，p.202 ① ; 廣瀬ほか 1985，p.135 : Con$\rightarrow\neg$Pr$(\bar{q})$．但し，この廣瀬らの言明は，本文 ⑨ の議論を先取りしている．

133） 見取り図 23 を逆時計回りに回転するようなイメージを持ってほしい．

134） 野矢 1994，p.202 : $\exists x \neg Pr\,(x) \supset \neg Pr\,(n)$．

135） メタ言語での ⇒ についての（対象言語の → と同じ）特性より，（$\vdash\varphi\rightarrow\psi$ かつ $\vdash\varphi$ ）⇒ $\vdash\psi$ と読み換える．これは →-Elim（MP）そのものといってよい．■

136） 野矢 1994，p.202: $\exists x \neg Pr\,(x)$ が N で証明可能ならば，$\neg Pr\,(n)$ も N で証明可能.

参考文献

邦語文献［参照の便宜上，邦語文献では共著の場合，筆頭著者のみ記す］

大澤真幸 (2018).「理性の可能性と限界　クルト・ゲーデル「不完全性定理」」，好書好日 ; https://book.asahi.com/article/11594971

金子裕介 (2019).『論理と分析　文系のための記号論理入門』，晃洋書房.

――― (2021).『文系のための記号論理学』朝倉書店.［2021 年 4 月末刊行予定 .］

倉田令二朗 (1995).『数学基礎論へのいざない』，河合文化教育研究所.

在間進ほか (2010).『アクセス独和辞典』第三版，三修社.

清水義夫 (1984).『記号論理学』，東京大学出版会.

田中一之 (2012).『ゲーデルに挑む　証明不可能なことの証明』，東京大学出版会.

野矢茂樹 (1994).『論理学』，東京大学出版会.

廣瀬健ほか (1985).『ゲーデルの世界　完全性定理と不完全性定理』，海鳴社.

松坂和夫 (1990).『数学読本 6』，岩波書店.

欧語文献

Cutland, N. (1980). *Computability.* Cambridge U.P.

Enderton, H.B. (1972). *A Mathematical Introduction to Logic.* Academic Press.

Euclid. (300 BC). *Στοιχεία* (*Elements*)［邦題『原論』. 田村松平ほか（1980）.『ギリシアの科学』所収の翻訳（pp.251-381）を参照した .］

Gödel, K. (1930). Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 37.*［原文が入手できなかったため Van Heijenoort（1967, pp.582-591），廣瀬ほか（1985, pp.147-163）の翻訳を参照した］

------------ (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia *Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 38.*［ページづけを S. で示す .］

------------ (1967). On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I.［Van Heijenoort (1967) 所収 . Gödel (1931) をハイエノールト自身が訳した決定版 .

ゲーデル自身によるチェックもあった（Van Heijenoort 1967, p.595; 田中 2012, p.17）. Note added 28 August 1963 ならびに n.68a, n.69, n.70 は，この英訳にしかない（田中 2012, pp.142-143）]

Henkin, L. (1949). The Completeness of the First-Order Functional Calculus. *The Journal of Symbolic Logic, Vol.14, No.3.*

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia, nova methodo exposita.*［Van Heijenoort (1967, pp.83-97) 所収の英訳を参照した．1889 年という時代背景もあり，原文はラテン語（Van Heijenoort1967）．この頃の国際言語は非常に興味深い（金子 2019, p.177 n.7)]

PONS (2008). *PONS Großwöterbuch: English-Deutsch/Deutsch-English*. PONS GmbH.

Raatikainen, P. (2020). Gödel's Incompleteness Theorems. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.*

Turing, A. (1937). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 42.*

Van Heijenoort, J. (1967). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931.* Harvard U.P.

Zach, R. (2019). Hilbert's Program. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.*