§1　はじめに

量子力学を「文系(the humanities)」の観点から捉える、というのが本稿の狙いである[1]。特に高三レベルの物理・数学の知識が無いことが、哲学者等が量子力学について語る際、障害に成っている様に思われる。その溝を埋めることが本稿の狙いの一つである。

　他方で、理系専門家の解説をまとめ補うことも狙いの一つである。どうしてもそこに力点の違いを見出してしまうのは、結局、関心の違いだと思う。だから私達は、私達の関心をもって、量子力学に向かい合ってみたい。結果として、ドイツ史的背景(§§2-4)、そもそも「量子」とは何なのか(§5)、古典物理学の限界(§§8-9)、不確定性原理から波動関数に至るまで(§§11-14)、といった諸題目が「群像」として描き出されるであろう。

§2　ドイツ史的背景

マルクス(Karl Marx 1818-83)は『政治経済学批判に向けて』(邦題『経済学批判』)の中で、如何なる活動も、個々人の意志を超えて存在する「生産関係(Produktionsverhältnisse)」に支配されると説いている(Marx 1859, p.2)。量子力学の歴史は奇しくも、この考えに適う。科学者達の研究は、第一次世界大戦へと向かうドイツ帝国の「生産関係」の中で、営まれていたのである。

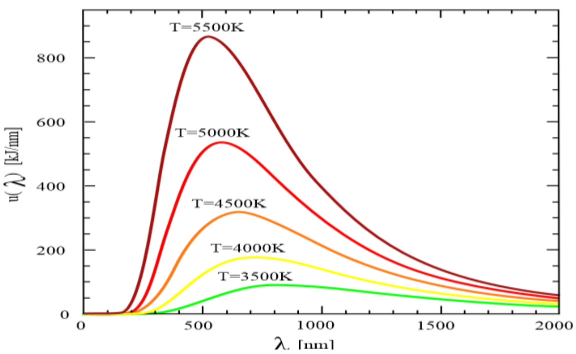
　それを主導したのが「社会主義者鎮圧法(1878 年)」で有名なビスマルク(Otto Bismark 1815-98)だったということは、しかし、マルクスには皮肉だったかも知れない。

　ビスマルクが首相を務めるプロイセンは、北ドイツ連邦の盟主として、1870 年プロイセン=フランス戦争に勝利し、豊富な鉄鉱石を擁するアルザス・ロレーヌ地方を手に入れた。マルクスにはこれも皮肉だったが、当時のドイツでは挙国一致体制とも言える仕方で、資本主義が台頭していた(Micklethwait&Wooldridge 2003, pp.96f.)。軍需企業クルップ(佐藤ほか 2007, p.245)、化学工業の BASF 社(竹内敬人 1993, pp.62-65)等が、英米とは異なる仕方で株式会社体制を築き上げていたのである。そしてそこに戦利品として、鉄生産が転がり込んで来た。

§3　鉄の色

「製鉄」と雖も、立派な科学的プロセスである(竹内敬人ほか 2012, p.164)。地中に存在する赤鉄鉱 Fe_2O_3 や磁鉄鉱 Fe_3O_4 を溶鉱炉で還元し、出来た「銑鉄(pig iron)」を、更に転炉に入れ、酸素を吹き込み、不純物を燃焼させて「鋼(こう)(steel)」が出来上がる。

(1)　温度による鉄の色と明るさ（熱放射）



　この工程で鍵を握るのが、鉄の温度であり、それを見分けるための色である。色には「赤、青、…」といった種類の他に、「明るさ(強度)」がある。もし種類を横軸に、明るさを縦軸に取れば、鉄の各温度について、左のグラフ(1)が描かれる(Heat-tech 2016)。

　高い温度を持つ鉄ほど、短い波長の色を、強い明るさで発する。色の「連続」性もそうだが、それが可視光線「以外」も含むことも考えれば、鉄が実際に何度(K=ケルビン)なのかを見

分けるのは、実際、人間業でできることではない(竹内淳 2005, p.18)。

ここにまず「分光器」を発明したブンゼンとキルヒホフの研究が合流した[2]。分光器とは、たくさん色の混じった光から、特定の色の光を選出し、その強さ(明るさ)を記録するための装置である(竹内敬人 1993, p.156)。それを使えば、グラフ(1)の関係を、目で見なくても把握できる。おかげで作業者達は、鉄の温度を精確に把握できる様に成った。

§4　国益としての量子力学

鉄生産の発展は、ドイツに新たな科学的探究の種を蒔いたと言える。その「生産関係」と一体に成った科学者達の探究心は、温度と色の観察的把握から、一般的法則の定式化へと向かって行った。鉄生産の大義名分がある限り、国も乗り気である。片山(1967, p.47)によれば、ドイツ国立物理工学研究所(PTR=Physikalisch-Technische Reichsanstalt)という所は、このために設立されたらしい(1887 年)[3]。

グラフ(1)に表される関係を「熱放射(thermal radiation)」と言う[4]。その関係を数式で捉えることはできないか。三人の科学者が、この問題に取り組んだ[5]。

まず､弱冠二十五歳で PTR の助手に採用されたウィーン(Wilhelm Wien 1864-1928)｡彼の式は、グラフ(1)の短い波長部分を説明できたがしかし、長い波長部分は説明できなかった[6]。

次に、これはドイツではなくイギリスの物理学者であるが､「レイリー卿(Lord Rayleigh)」こと、ジョン・ウィリアム・ストラット(John William Strutt 1842-1919)。彼の公式は、グラフ(1)の長い波長部分を説明できたが、しかし短い波長部分は説明できなかった[7]。

そして最後に、プランク(Max Plank 1858-1947)が登場し、問題を終結させた。彼の成果には、次の定式化が与えられている(Heat-tech 2016)。

(2)　$$E\,(\lambda,\,T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}$$

λ は波長(変数)、T は温度(変数)、c は光速度(定数)、k はボルツマン定数、e は自然対数の底(定数)、そして h が「プランク定数」である。

§5　量子の誕生

熱放射―目下の議論では「空洞輻射(ふくしゃ)」[8]と呼ばれる―を巡る考察で目に付くのは、色、というよりもそれを帯びる光に纏わる、粒子説と波動説の再燃である。

光は、粒子であるのか、波動であるのか[9]。この対立は、1803 年のヤング(Thomas Young 1773-1829)による干渉の実験で決着がついたと言われている[10]。エーテルという謎を残しはしたが(竹内均 1987, p.135)、「光は波である」という波動説が勝利を収めたのである。

けれども熱放射を定式化したプランクは、そこから、光のエネルギーは波の様に連続的なものではなく､粒子の様な極小の単位から成るものだ､という「エネルギー量子(energy quantum)」の考えに至った。それは、次の式(3)で表され、アインシュタインの「光量子仮説」(1925 年)としても知られるものである[11]。

(3)　$$E = h\nu$$

Eはエネルギー、hはプランク定数、νは振動数である[12]。波動と考える限り、光のエネルギーは、この式(3)には従わない。何故なら、波動の場合、光のエネルギーの大きさは「振幅」に成る[13]。だが振幅は「連続的」に変化する。このため、もし(3)同様に「$E = a\nu$」とそれを定式化するなら、0.1ν,…, 0.12ν,…と「連続的」にエネルギーが変化することに成る[14]。しかし、プランクの式は、その連続性を排除し、定数h($=6.63\times10^{-34}$)でがっちりと固定してしまう。「一つの」波動(振動数)の持つエネルギーは、唯一つに決定されてしまうのである。

では「強い」黄色などは、どう説明されるのであろうか。それは、「一つの」黄色が大きな振幅を持って照射している、とは最早考えられない。そうではなくて、その黄色い光の中に、同じ黄色の波長[15]を持つ原子的な光が「たくさん」存在している、と説明されるのである。

これは、粒子説の考え方ではないだろうか。いや、それは納得できなくても、光のエネルギーが「とびとび」の値を持つ、それこそ「エネルギー量子」から構成されている、というのは理解できよう。これが、「量子(quantum)」という考え方の起源である。プランクの式(3)と合せ、それは 1900 年の出来事だと言われている(片山 1967, pp.56-60)。

§6　電子の「量子」性－バルマー系列

しかし熱放射に限って言えば、プランクが「量子」と考えたものは、今で言う「光子(photon)」である。だが量子力学のメインは、1897 年にトムソン(Joseph John Thomson 1856-1940)が発見した「電子(electron)」に他ならない[16]。では、電子に「量子」という考え方が持ち込まれたのは、何時、どのようにしてか。

よくここで、ド・ブロイ波(注 63 参照)が持ち出され「光が粒子と波動の二重性を持つのと同じ様に、電子も粒子と波動の二重性を持つ」という論展開で、光子の話と電子の話に架け橋が為されるが、それと、電子が「量子」である、という話は別である[17]。

「量子」の概念を確認しておきたい。それは、プランクが示した通り、エネルギーの中に切れ目を作る様な仕方で存在する単位(素量)のことである。これが、電子について見て取られたのは、何時からだったか。

結論から言うと、それは、1885 年にバルマー(Johann Balmer 1825-1898)が「バルマー系列(Balmer series)」を発見した時からだったと言える[18]。

ドルトン(John Dalton 1766-1844)が 1803 年に原子論を発表したことに重なり、1800 年にはボルタ(Alessandro Volta 1745-1825)が化学電池を発明し、1833 年にはファラデー(Michael Faraday 1791-1867)が電気分解の法則を発表した。ファラデーが「イオン」なる用語を使って[19]いたことを考えれば、トムソンの発見(1897 年)以前から、人々が物質は、原子のみならず、何かしらの電気的構成を持っている、と考えていたことには疑いが無い。その中でバルマーは、水素原子の放出する光が、とびとびの「線スペクトル」[20]を示していることに気が付いた。現代ではそれは、次の通り記述される。

(4)　放電管[21]の中に気体の水素を入れて放電し、分光器で観察すると、水素原子に特有なスペクトルが見られる。これは、水素原子の中に束縛されている電子が放電でいったん励起[22]され、低いエネルギー準位[23]へ移動する[24]ときに、そのエネルギー差を光として放出するためである(大槻ほか 2007, p.216)。

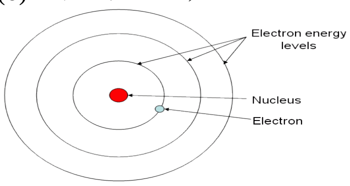
これが、電子の「量子」性を示す現象だということは、次の解説を読めば分かると思う。

(5)　これはあくまでも電子のエネルギー状態の変化を表しているのであって、電子の空間的な動きを表しているのではないことに注意すべきである。また、ある状態とある状態の途中の状態などは存在しないことを理解すべきである。状態が変化するときには、瞬間的に光を放射して別の状態になる（中田 2001, p.28）。

§7　世界観へ—ボーア・モデル

原子の中に、何かしらの電気的要素がある。そのエネルギーは、バルマー系列が示す通り、とびとびの素量[25]から構成されている。トムソンの発見を経て、その要素は「電子」と名付けられた。こうして量子的概念(エネルギー素量)が、熱放射だけでなく、原子を解明する所にまで入り込んで来た。それをはっきりと示したのが、ボーア(Niels Bohr 1885-1962)に他ならない。

(6)　ボーア・モデル



左の図[26]は、高校化学の教科書で、必ずお目にかかるものである。これを考え出したのが、ボーアである。このモデルと、二つの「条件」[27]によって、ボーアは、トムソンからラザフォードに至る原子構造の論争[28]を終結させ、それと共に、プランクの量子概念を世界観にまで拡げた。

先程の文章(4)と(5)は、このモデルから説明される。電子は、放電からエネルギーを一旦吸収し、準位(energy level)を一旦上げ、即座に下げてしまう。この時、電子は、プランクが $h\nu$ で表した分のエネルギーを解放する。そのエネルギーが、光として、バルマー系列を描くのである。結局、熱放射も同様にして説明される[29]。

§8　古典物理学の限界

こうして原子の構造に入り込むことにより、量子の概念は、世界観にまで発展させられた。それに重ね、よく話題にされるのが「古典物理学の限界」である。量子力学は、古典的な物理学の考え方までをも覆してしまったのである。どういうことであろうか。

古典物理学とは、ニュートン力学とマクスウェル電磁気学のことである。ニュートン(Isaac Newton 1642-1727)はコペルニクス[30]やケプラー[31]そしてガリレイ[32]らの仕事を受け継ぎ、「物体間に作用する力と運動との関係を論ずる科学」[33]としての力学(mechanics)を集成した[34]。

マクスウェル(James Clerk Maxwell 1831-1879)は、クーロン[35]やファラデー[36]、そしてアンペール[37]らの仕事を受け継ぎ、「電気と磁気を統合する理論」としての電磁気学(electromagnetics)を完成させた[38]。

二人の登場で、19 世紀の終わりには、物理学の世界観は完成したかの様に思われた(竹内均 1987, p.210)。しかし、そこに「量子」が現れたのである。もう一度、中田の文章(5)を読んでみよう。「或る状態から別の状態にパッと変わる」。そんなことが許されるのだろうか。

古典物理学では、こんな現象の占める余地は無かった[39]。古典物理学をボーア・モデルに当てはめるなら、電子は「連続的」な振る舞いを見せることに成る。ニュートン力学が、太

陽系の惑星を説明するのと同じ仕方である。しかし正しくこのために、古典的物理学は、自分の首を絞めることに成った。次の節で、その顛末を見てみることにしたい。

§9　電子の落下

「古典物理学の限界」は、どの本でも大概、二部構成で論じられる[40]。一つは、既に見た「線スペクトル」の話である。バルマー系列を見る限り、電子は、或る状態から別の状態へパッと変わる。だが、古典物理学において、そんな現象の占める余地は無い。

もう一つは、「電子の落下」である。大概の解説書は、しかし、この話を回りくどいものとしてスキップしてしまう。だが私達は、じっくり辿ることにしたい。

「電子の落下」は、ボーア・モデルで論じられる。けれどもボーア自身、正にその問題から「条件」(注 27 参照)を考え出したのだから、ここでは、彼が発案したのではないものとして、図(6)を眺めることが要求される。差詰めそれは「太陽系モデル」とでも呼べるだろう。ボーアの師、ラザフォードによって、1911 年に発表された(注 28 参照)。話はこの「太陽系モデル」を、電子がしっかり軌道を描きながら回っている、とイメージする所から始まる。以後、論展開をはっきりさせるため、番号を振って論じて行こう。

①．アンペール - マクスウェルの法則による磁界の発生。電子が太陽系モデルに従い、原子核の周りを「軌道を描きながら回っている」のだとしたら、電子は、電磁誘導[41]の磁石の様に(しかし動いているのは磁石ではなく電子だから)、そこに電界の変化 $\varepsilon\frac{d}{dt}\int EdS$ をもたらす。ここから、アンペール - マクスウェルの法則 $\oint Hdr=\varepsilon\frac{d}{dt}\int EdS$ に従い、電磁誘導の様に(しかし変化するのは磁界ではなく電界だから)、円形の磁界 $\oint Hdr$ が生じる[42]。

②．電磁誘導の法則による電界の発生。この円形の磁界の「発生」は、「磁界(の強さ)の変化」に他ならない。そこで今度は本当に、電磁誘導が起こる。コイルも無いのに電磁誘導が起こるのかと問われれば、確かに起こる。よく見知った電磁誘導の場面でさえ、閉曲面を作るコイルの存在は二次的なものでしかなく、その閉曲面内の、コイルに囲まれていない微小部分に「磁界」が既に存在している、と考えるからである(竹内淳 2002, p.144)[43]。こうして、恰もコイルに電流が流れる様に、円形の電界 $\oint Edr$ が発生する[44]。

③．電磁波の発生。この円形の電界 $\oint Edr$ の「発生」は、①の「変化 $\varepsilon\frac{d}{dt}\int EdS$」 を意味する(時間微分が変化を表す)。故に、アンペールーマクスウェルの法則における$\oint Hdr$の「発生」、延いては、②の「磁界の変化」[45]が再び起こる。こうして、①→②→①→②→…と「バトンリレー」が繰り返される(竹内淳 2002, pp.172-173)。これこそが、磁場の発生→電界の発生→…という「電磁波(electromagnetic wave)」に他ならない。

④．電子の失速。以上の様にして電子の周回運動は、電磁波を発生させる。その発生の際、電磁波は、自分が発生させられた分だけのエネルギーを、電子から奪って行く。(このこと自体立ち入った考察が必要だが[46]、ここでは寧ろ)電子がその際、代償として払うエネルギーは何かを考えてみよう。結論から言えばそれは、運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ である[47]。それを失うことにより、電子は失速する(速度 v を失う)。失速することにより、電子は、周回軌道を縮める[48]。これは、他ならない、電子が原子核に向かって落下して行く、ということを意味している[49]。その墜落終了までの時間は、1 秒より遥かに短い、と言われる[50]。

§10　量子の確率性

これが、古典物理学にその限界を認識させた「電子の落下」の話である。太陽系モデルでは、電子は原子核に向かって即座に墜落してしまう。ボーアは、正にそれを救うために「条件」(注 27 参照)を導入したのであった。だが実を言うと、それは、量子力学の「夜明け前」の話に過ぎない。ボーアの理論は結局「露払い」でしかなかった[51]。今日それは、専門家によって著しく低く評価されるものである。

(7)　［ボーア理論は］古典物理学と量子性の折衷論であって、その間の矛盾を集約する過渡期の理論の役をはたし、やがて量子力学にとって代わられた(久保ほか 1987, p.1202)。

(8)　［ボーア理論は］真っ赤な嘘である。このようなイメージをもつと、量子論がわからなくなってしまう。量子論を理解したい人は［ボーア・モデルを］みてはならない(中田 2001, p.25)。

なぜだろうか。一つの答えとしては、やはりそれが、量子力学の根本にある「確率」性を見逃していたからであろう。それをボーアに気づかせたのは、他ならない、彼が所長を務めたコペンハーゲン理論物理学研究所に所属したハイゼンベルク(Werner Heisenberg 1901-1976)であり、彼が 1927 年に発表した「不確定性原理」である。

§11　ハイゼンベルクの不確定性原理

不確定性原理は、演算子$\hat{A}$と$\hat{B}$ の交換関係 $[\hat{A},\hat{B}] \overset{\text{def}}{\equiv} \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$　について、一般に、次の式(9)が成り立つことから導き出される(竹内淳 2005, p.68)。

(9)　$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geqq \frac{1}{4}\,|\langle\psi\,|\,[\hat{A},\hat{B}]\,|\,\psi\rangle|^2$$

「演算子」という言葉が分かり難いかも知れない。だがそれは「関数に対する操作」に過ぎない(中田 2001, p.44)。「関数」として以下には、少し複雑だが、波動関数にその複素共役を掛け合わせた $\psi(x)\psi^*(x)$ を考える(後の定義(12)から、既に式(9)で現れていることが分かる)[52]。

演算子$\hat{A}$と$\hat{B}$には順に、「電子の x 軸上の位置座標を $\psi(x)\psi^*(x)$に掛ける」という演算を表す $\hat{x}$ と、所謂「運動量演算子」$\hat{p} \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ が考えられる[53]。後者は、「$\psi(x)\psi^*(x)$を x で偏微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ した後、$\hbar$ を[54]虚数 i で割ったもの $\frac{\hbar}{i}$ を掛ける」という操作を表す。ここまでを、式(9)に反映してみよう。すると、次の式(10)が得られる。

(10)　$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geqq \frac{1}{4}\,|\langle\psi\,|\,[\hat{x},\hat{p}]\,|\,\psi\rangle|^2$$

Δx は電子の x 軸上の位置座標の変化量を表す[55]。一般に、次の式(11)も成立することから、$(\Delta x)^2$ は、電子の x 軸上の位置座標の「分散」を表すと考えられる[56]。

(11)　$$(\Delta A)^2 = \langle\psi\,|\,A^2\,|\,\psi\rangle - \langle\psi\,|\,A\,|\,\psi\rangle^2$$

だからまとめて、式(10)の左辺$(\Delta x)^2(\Delta p)^2$は、「電子の位置座標の分散と運動量[57]の分散の積」を表していることが分かる[58]。周知の通り、この積が一定の値 $\frac{\hbar^2}{4}$ に縛られる、というのが

「不確定性原理」である。ではそれは、どう導き出されるのだろうか。

続けて式(10)の右辺、絶対値の二乗の中を見て欲しい。これは有名なディラックの「ブラケット表示」で、次の式(12)の積分を意味している(「…」は反復ではなく空白)(竹内淳 2005, p.64)。

(12) $\langle \psi | \cdots | \psi \rangle \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \ldots \psi^{*}(x)\, dx$

この説明を受けてもまだ、式(10)の右辺の難解な印象は消えないだろう。しかし実を言うと、それを理解することは左程重要でない。私達が必要とするのは、寧ろ次の、変換関係の値[59]を示す式(13)と、所謂「規格化条件」を表す式(14)である(竹内淳 2005, p.67, p.62)。

(13) $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

(14) $\langle \psi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{*}(x)\psi(x)\, dx = 1$

これら(13)と(14)が表す値($i\hbar$ と 1)を、式(10)の右辺に代入すれば、簡単な計算により、式(10)全体が、次の式(15)に書き換えられる(竹内淳 2005, p.68)。

(15) $(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geqq \frac{\hbar^2}{4}$

この式(15)が、ハイゼンベルクの不確定性原理に他ならない。意味をまとめよう。直接にはそれは「電子の位置座標の分散$(\Delta x)^2$と運動量の分散$(\Delta p)^2$の積は、一定の値 $\frac{\hbar^2}{4}$ を下回ることはできない」と言っている。更に立ち入れば、「電子の位置座標の認識と運動量の認識は、数値的に反比例の関係にあって、一方を絞り込んで行くと、他方は果てしなく緩慢になってしまう」ことを意味している(片山 1967, p.108)。もっと抉り出せば「電子は(精確に)観測できない」と言っているのである。

§12 波動関数

こうして不確定性原理を、ほぼ数学的に確認できた。波動関数 $\psi(x)$なるものが出て来たことからも分かる通りそれは、量子力学固有の特性である[60]。波動関数とは、では、何だろうか。これを理解することが、量子力学の核心にある。最後に私達はそれを追究することにしたい。

波動関数は、1926 年にシュレディンガー(Erwin Schrödinger 1887-1961)が「実在」する波から考え出したものである(竹内淳 2005, p.85; 中田 2001, p.37)。具体的にそれは、ド・ブロイ波[61]のイメージを受け継いでいる。だがそれを正直に「ボーア・モデルの円周上を進むド・ブロイ波」と理解してしまうと少し混乱してしまう[62]。そうではなくて 90 度回転させ、原子核から離れる方向へと、半径上を進むものだとイメージするべきである[63]。そしてこのイメージの下、波動関数が私達に教えるのは、不確定性原理によって最早正確には知りえなくなったもの、即ち電子の位置である[64]。その「確率」を波動関数は教えてくれる。

だが波動関数は、そんな「確率」ではなく、本当に「実在」する波を描くのではなかったか。にも拘らず、以下にギター弦との比喩で波動関数を導出する際、この矛盾した考えを飲み込まざるを得なく成る。差詰め私達は議論の里程標として、それを記すに留めておきたい。

(16) 電子の存在確率を与える波動関数は、原子核から同心円状に伝わる実在の波を描く。

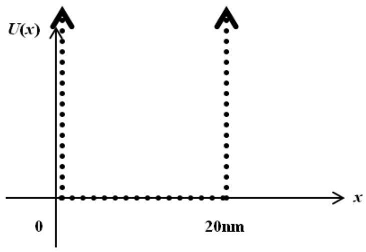
§13　無限の井戸形ポテンシャル

量子力学では、波動関数は通常「シュレディンガー方程式」という微分方程式[65]を解くことによって得られる。波動関数そのものも、現実には、位置座標を、三次元空間で、しかも直行座標 (x, y, z)ではなく球座標 (r, θ, ϕ) によって特定し[66]、そこに時刻 t が加わるものだから、$\psi(r,\theta,\phi,t)$ という四変数関数に成る。だが、本稿では、あくまでイメージのために、「無限の井戸形ポテンシャル」という人為的な状況で、「時間に依存しない一次元のシュレディンガー方程式」を考えることにしたい。「時間に依存しない一次元のシュレディンガー方程式」とは、次の形をした微分方程式である(竹内淳 2005, p.59)。

(17)　$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)+U(x)\psi(x)=E\,(x)\,\psi(x)$$

$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの。m は電子の質量。$\frac{\partial^2}{\delta x^2}$ は二階偏微分の操作。$U(x)$は、位置座標 x での電子の「クーロン力による位置エネルギー」(注 47)。$E(x)$は位置座標 x での電子の「力学的エネルギー」つまり「運動エネルギーと位置エネルギーの和」をそれぞれ表す[67]。

(18) 無限の井戸形ポテンシャル



「無限の井戸形ポテンシャル」は左図の様に描かれる。この図と、後に述べる波動関数のグラフ(24)とは、横軸の位置座標だけを共有し、縦軸は決して共有しないことに注意してもらいたい。図(18)では、縦軸は、それぞれの位置座標において、電子が原子核のクーロン力から受ける負の位置エネルギーを表している。破線がその「グラフ」である。矢印はそれが無限に大きいことを表している。それに対し区間 0 nm ≦ x ≦ 20 nm では、負のエネルギーはゼロである。このことは、その区間にだけ電子が存在する余地がある、ということを意味している。なぜ 20nm で負のエネルギーが無限大に成るのか、という疑問は残るだろうが、これには、バルマー系列(§6)で見られた非連続性が反映されていると考えて欲しい(目下の状況が人為的であることも理解して欲しい)。

この物理的かつ人為的な状況(18)の下では、実の所、わざわざシュレディンガー方程式(17)を解いて波動関数を手に入れる必要は無い。先の仮定(16)の下、この状況で実在し得る「定在波」を考えれば良いのである。

定在波とは、高校物理でギター弦について説明される現象である[68]。弦を伝わる波は、固定端からの反射波と重なり合って一つの波(合成波)を作り出す。だが、その内の或るものは、恰もどこにも進行せず、同じ場所に「定在」する様に見える。これが定在波である。

定在波に成る波については、弦の長さを L とすると、その波長 λ が、$2L, L, \frac{2}{3}L, \ldots$でなければならないことが分かる。一般に、その条件は、次の式(19)で定式化できる(竹内淳 2005, p.79)。

(19)　$$\lambda=\frac{2}{n}L \qquad (n \text{ は正の整数})$$

この条件(19)を、状況(18)に当てはめると、そこで可能な波動関数が求められてしまう。 ま

ず、波の基本式を確認しておこう。それは、「サイン波」と呼ばれるもので、普通、$Asin(\theta)$ で表される。ラジアン θ を、位置座標 x に置き換えるなら、それは、次の式(20)でも表される(和田 1995, p.26)[69]。

(20) $$Asin(\frac{2\pi x}{\lambda})$$

この式(20)の λ に、条件式(19)を代入してみよう。すると、次の式が得られる(竹内淳 2005, p.79)。

(21) $$Asin(\frac{n\pi x}{L})$$

この式(21)を、そのまま波動関数と認めても良いのだが、最後に「振幅」を表す A に、先に触れた規格化条件(14)を課してみたい。計算は省略するが、結果として、$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ でなければならないことが分かる[70]。ここから、「無限の井戸形ポテンシャル」で成立する波動関数は、次の式(22)の形をしていなければならないことが分かる(竹内淳 2005, p.82)。

(22) $$\sqrt{\frac{2}{L}}sin(\frac{n\pi x}{L})$$

§14　存在確率の波

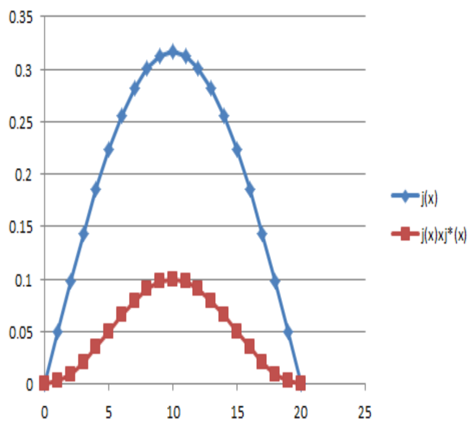
こうして、仮定(16)の下、無限の井戸形ポテンシャルで成立する波動関数が分かった。式(22)を得るのに、シュレディンガー方程式(17)を全く必要としなかったことにも注意したい。

　ここで、もっと具体的に波動関数をイメージすることにしよう。先の状況(18)に従えば、L=20(nm)である。また、定在波の最も初歩的な(波長の長い)ものとして、n=1 を考える。そうすると、式(22)から、具体的な波動関数が姿を現すことに成る。それが、次の式(23)である。

(23) $$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{10}}sin(\frac{\pi}{20}x)$$

　百聞は一見に如かず。早速、この波動関数(23)を、状況(18)に当てはめてみたい。下のグラフと表は、原子核(x=0nm)から遠く(x=20nm)へ向かう、電子の存在確率の波を描き出している。

(24)　波動関数(23)のグラフ



(25)　波動関数(23)の計算結果

E2

	A	B	C
1	x (nm)	ψ(x)	ψ(x)×ψ*(x)
2	0	0	0
3	1	0.049468921	0.00244717 4
4	2	0.097719754	0.00954915
5	3	0.143564402	0.020610737
6	4	0.185874017	0.03454915
7	5	0.223606798	0.05
8	6	0.255833637	0.06545085
9	7	0.281761003	0.079389263
10	8	0.300750478	0.09045085
11	9	0.312334477	0.097552826
12	10	0.316227766	0.1
13	11	0.312334477	0.097552826
14	12	0.300750478	0.09045085
15	13	0.281761003	0.079389263
16	14	0.255833637	0.06545085
17	15	0.223606798	0.05
18	16	0.185874017	0.03454915
19	17	0.143564402	0.020610737
20	18	0.097719754	0.00954915
21	19	0.049468921	0.00244717 4
22	20	0	0
23		4.018054738	1

存在確率を表すのは、$\psi(x)$ではなく、$\psi(x)\times\psi^*(x)$であることに注意してもらいたい。正にここで、私達は、規格化条件(14)の意義を理解するのである。

$\psi^*(x)$は $\psi(x)$の複素共役である[71]。だが目下の議論では、単純に $\psi(x)\times\psi^*(x)$を、波動関数の絶対値の二乗 $|\psi(x)|^2$ で置き換えて[72]考えることにしたい。解説書ではよく、「波動関数の二乗は電子の存在確率を表す」と言われる(大槻ほか 2007, p.215 etc.)。ここで考えられているのは正しくそれであり、ボルン(Max Born 1882-1970)が 1926 年に発表した「波動関数の確率解釈」に他ならない。その解釈はハイゼンベルクの不確定性原理の一年前に発表され、直接的な引き金に成った、とも言われる(湯川・井上 1978, p.48)。

「二乗」という操作に違和感を抱いている人が居るかも知れない。だが計算結果が必要事項を語る筈である。表(25)のセル B-23 を見て欲しい。波動関数だけでは確率がオーバーしてしまうのだ(4.018054738>1)。しかし二乗すれば(式(23)の波動関数に限り)、$0\leqq\psi(x)\leqq1$ だから、自ずと値は減る。二乗する前後についてグラフ(24)を見て欲しい。上の波 j(x)が $\psi(x)$、下の波 j(x)×j*(x)が $\psi(x)\times\psi^*(x)$である。下の波は合計で 1 にぴったり収まる。表(25)のセル C-23 が示す通りである。

これは、規格化条件(14)のおかげでもある。目下の場合に当てはめて書き換えれば、それは、次の式(26)の様に成る。

(26) $$\int_0^{20}\psi(x)\psi^*(x)\,dx = 1$$

§15　捨てられた梯子

こうして、波動関数により電子が確率的に記述される様を見た。そこではシュレディンガー方程式の出番は無かった。だがもし電子のエネルギーまでをも知りたかったら、今度こそ、それを解かなければならない(竹内淳 2005, pp.82-84)[73]。だが私達は、それを求めるのではなく、非公式な仕方で手に入れた波動関数が一体何だったのかを、最後に探ることにしたい。

「非公式」と言った通り、上の手続きは、波動関数を求め易いように作為的に設定されていた。無限の井戸形ポテンシャルもそうだが、もっと重要な働きをしたのは、仮定(16)である。そこでは波動関数が「実在波」だと言われた。だから、ギター弦の議論ができたのである(§13)。しかし、どうだろう。最終的に得られた波動関数は、グラフ(24)なり表(25)を見れば分かる通り「確率波」なのである。

実在波と確率波。これは、量子力学の研究者たちの間でも常に、論争の火種であった(和田 1995, pp.10-11)。古くは、ボルン、ハイゼンベルクそしてボーアの確率波の陣営と、ド・ブロイ、シュレディンガーの実在波の陣営の対立にまで遡ることができる[74]。そしてこの対立は、他ならない、電子の存在様式そのものへの問いに、繋がっているのである。

この件に関する和田のコメントから、まず、見てみることにしたい。

(27)　波動関数の絶対値の 2 乗が［…］確率波と呼ばれることもある。しかし、この言葉は、かなり誤解を招きやすい言葉ではある。まず、確率に等しいのは［$\psi(x)$］ではなく［$\psi(x)\times\psi^*(x)$］であるし、［$\psi(x)$］は粒子を観測しようがしまいが無関係に、共存する複数の状態の共存度の分布を表す量である。これらの複

数の状態は、確率的にそのうちのどれかが存在しているというのではなく、本当に共存している。そうでなければ、干渉のような現象を決して説明することができない(和田 1995, p.11)。

ヤングの「干渉」の実験(§5)が電子にも認められたことを手掛かりに[75]、和田は、波動関数が表すのは「共存する複数の状態」だと考え、実在波の立場に立つ。和田(1995, p.157)自身、告白している通り、これは、エヴェレット(Hugh Everett III, 1930-82)の「多世界解釈」の考え方である。実際、仮定(16)から天下り的に来た私達の議論も、この解釈の下でしか成立しない様に思われる。しかし、和田は次の様に言う点で、少し苦しい。

(28)　共存する複数の状態は絶えず干渉し合っている。[…] しかし何かしらの方法で粒子の位置を測定すれば、粒子の数が 1 つであるかぎり、観測される位置も 1 カ所である。[…] その後は、その時刻にそこに粒子はそこに存在したということを前提にして計算しなければならない。つまり、測定されなかった残りのすべての状態は、その時点で忘れることになる。[…] では、これら残りの状態はどこに行ってしまうのだろうか。量子力学における物質観を理解するうえできわめて重要な問題であるが、[しかしそれは] 具体的な計算にはあまり関係がな [い…] (和田 1995, p.13)。

所謂「波束の収縮」と呼ばれる事態である。「忘れる」というのも凄いが、しかし「具体的な計算にはあまり関係がない」というのは、現場の科学者の本音でもあろう。

こう考えると、波の実在云々に拘るのは、お門違いの様にも思えて来る。中田のドライな意見も見てみたい。

(29)　[…] 波動関数は粒子の存在確率を表 [す。しかし] 1 個の粒子を観測してい [ると考える限り] 波動関数に物理的意味はない。波動関数は無数の粒子を観測したときに初めて現れる「規則」のようなものである(中田 2001, p.45)。

ボルンの確率解釈を巧妙に代弁している、と言えるだろう。要するに、波動関数が示す確率の起伏は、或る種、統計[76]の産物である。しかしそれは、過去の統計結果であり、現在、その起伏の中で電子がどう振る舞っているかは、誰にも分らない。ハイゼンベルクの不確定性原理が教える所である。

「分からない」のだったら、想像しようもないのではないか。不確定性原理によって、電子は、完全に「雲隠れ」[77]してしまった。それでもなお、その背後に電子の「軌道」だとか、そういったものを考えてしまうのは、偏に、観測可能な対象(ボール等)の観念を、観測不可能な対象(電子)に、押し付けてしまっているからではないのか。

結局、私達は「確率波」の解釈を取りたくなる。和田が根拠とする「干渉」も、観測可能な対象(水面の波等)の観念を、電子に押し付けてしまっているからの様に思われる。

では、仮定(16)から天下りに辿られて来た波動関数の議論は一体、何だったのか。ギター弦を踏み台にしている限り、あれは「実在波」の解釈に頼っている。

竜頭蛇尾に聞こえてしまうかも知れないが、正にそれ故に、私達は、ここまでの議論(§§12-14)

を、一旦、投げ出さなければならない。「無限の井戸形ポテンシャル」だけに頼った量子力学の理解は、やはり、限界がある様に思われる。本当に、量子力学を知りたいなら「水素原子のシュレディンガー方程式」から入らなければならない[7][8]。ウィトゲンシュタインみたいに成るが、私達は、ここまで登った梯子を、今や捨て去らねばならないのである。

§16　おわりに

以上、ドイツ史に始まり、そのどぎつい経済的野心に突き動かされて登場した量子力学が、物理学の世界観を席巻するまでを見た。波動関数の初歩的なイメージは掴めたものの、私達は、まだ、その入り口に立ったに過ぎない。

「私達」というのは、「文系の私達」である。ここまでの議論から、量子力学が、十二分に哲学的な問題を内包しているのは見て取られた。私達は、そこから更に多くのことを引き出すために、しかし一方で数式的な理解を怠ることなく、謙虚に学び続けなければならない。

参考文献（「竹内」姓については名前全体を言及する）

有本建男 (1997). 「ビッグサイエンスの始まりとなったドイツ帝国物理工学研究所」,『情報管理』, vol. 40, No. 9.
卜部吉庸 (2013). 『化学の新研究』, 三省堂.
大槻義彦ほか (2006). 『物理 I』, 実教出版.
大槻義彦ほか (2007). 『物理 II』, 実教出版.
片山泰久 (1967). 『量子力学の世界』, 講談社ブルーバックス.
國友正和ほか (2012). 『物理基礎』, 数研出版.
國友正和ほか (2013). 『物理』, 数研出版.
久保亮五 (1987). 『理化学辞典』第 4 版, 岩波書店.
佐藤次高 (2007). 『詳説世界史』改訂版, 山川出版社.
竹内淳 (2002). 『高校数学でわかるマクスウェル方程式』, 講談社ブルーバックス.
--------- (2005). 『高校数学でわかるシュレディンガー方程式』, 講談社ブルーバックス.
竹内敬人 (1993). 『化学史』, 放送大学.
竹内敬人ほか (2012). 『化学』, 東京書籍.
竹内均 (1987). 『物理学の歴史』, 講談社.
朝永振一郎 (1969). 『量子力学 I』, みすず書房.
中田宗隆 (2001). 『なっとくする量子化学』, 講談社.
Heat-Tech (2016). 「放射に関する四つの基本法則」（http://www.heat-tech.biz/products-epl/eph-gj/eph-gj-ek/1180.html）, 2016 年 8 月 3 日閲覧.
松坂和夫 (1990). 『数学読本 5』, 岩波書店.
湯川秀樹・井上健 (1978). 「二十世紀の科学思想」, 『現代の科学 II』, 中央公論社.
和田純夫 (1994). 『力学のききどころ』, 岩波書店.
------------ (1995). 『量子力学のききどころ』, 岩波書店.
Heisenberg, W. (1927). Über den anschulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik, Bd.27*.
Marx, K. (1859). *Zur Kritik der politischen Ökonomie*. Marx-Engels Werke, Bd.13, Dietz Verlag.
Micklethwait, J. & Wooldridge, A. (2003). *The Company: A Short History of a Revolutionary Idea*, Modern Library.
Syndler, L. (2012). William Whewell. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

---

[1] 筆者自身は、それが今後の「科学哲学から応用倫理へ」向かう研究の重要なステップだと考えている。
[2] ブンゼン(Wilhelm Bunsen 1811-1899)は、「ブンゼン・バーナー」の開発で有名なドイツの化学者である(竹内敬人 1993, p.156)。キルヒホフ(Gustav Kirchhoff 1824-1887)は、回路の電流に関する「キルヒホフの法則」でも有名なドイツの物理学者。熱放射、炎色反応の研究でも有名である(片山 1967, pp.50f.)。
[3] ただ、少し言い過ぎではある。厳密な論述は、有本(1997)のものを参照。
[4] 誤解してはならないのは、熱放射とは、「熱を放射する」現象ではなくて、「熱された物体が電磁波(光)を放射する」現象だということである(大槻ほか 2007, p.171)。

[5] 熱放射の研究に関しては他に、ウィーンの変異則(1893 年)、シュテファン・ボルツマンの法則(1879-1884 年)が有名である。これらは、恒星観測の文脈でも言及される。

[6] 1869 年のことである。片山(1967, p.53)は「青(波長短)の公式」と名付けている。

[7] 1900 年のことである。片山(1967, p.55)は「赤(波長長)の公式」と名付けている。

[8] 製鉄作業が周囲を遮られた空洞の中で行われることをイメージしても良いし(竹内淳 2005, pp.13f.)、熱放射の実験観察において空洞こそが当時の科学者にとって理想的な「黒体」であったことを思い浮かべても良い(片山 1967, pp.51f.)。ちなみに「輻射」は「放射」と同じで、「空洞輻射」は朝永(1969, p.2)の表現。

[9] 粒子説はニュートンが波動説はホイヘンス(Christiaan Huygens 1629-95)が唱えた(竹内均 1987, pp.130f.)。

[10] 反射、プリズムにおける屈折、つまり分散、回折など、他にも光の波動性を示す性質は幾つもあったが、歴史的には、この「干渉」実験が決定的だったと考えられている(大槻ほか 2006, pp.256-257)。

[11] 解説書参照(國友ほか 2013, p.342; 中田 2001, pp.11f.; 竹内淳 2005, pp.20f.)。「光量子(light quantum)」という粒子説を彷彿とさせる発想はしかし、プランクには受け入れられなかった(片山 1967, pp.65-67)。

[12] 要するに、式(2)の前提として、この式(3)がある、ということなのだが、両者の関係を数学的に辿るのは、かなり難しい(朝永 1969, pp.30-35; 中田 2001, p.14)。

[13] 波の基本式である三角関数 $y=sin\theta$ を思い浮かべて欲しい。このグラフは、$y=Asin\theta$ とすれば、A の分だけ y の値が倍増する。この A が「振幅」に該当する。波動の場合、この「振幅」がその「エネルギーの大きさ」だと見做される(大槻ほか 2007, p.237)。

[14] 目下の議論は、竹内淳(2005, pp.22-23)と中田(2001, p.13)に負う所が大きい。0.1 や 0.12 はプランク定数に比べると大き過ぎるが、これは議論の便宜だと思って欲しい。

[15] 「波長」は「振動数」に反比例する(波の速度＝振動数×波長)。この関係から「いつでも振動数に言い換えられる同義なもの」として「波長」という語を使うのは、波動の議論でよく行われることである。

[16] 素粒子論の観点から、電子と光子の違いを確認しておくのも重要である(大槻 2007, p.275)。例えば、電子は質量(静止エネルギー)があるが、光子には無い。

[17] 無論、この話から学ぶことも多い(國友ほか 2013, pp.354-355; 大槻ほか 2007, pp.245-246)。

[18] 以下の話は、リュードベリ(Johannes Rydberg 1854-1919)が 1890 年に発表した次の式(*)で説明される。

(*) $$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2})$$

R=1.097×10^7 である。この公式では、m を先に 1 か 2 か…に設定して、その設定の下、n を+1、+2、…と変えて行く(m=1,2,…, n=m+1, m+2,…)。それに従うと、線スペクトル中の可視光線部分が、m=2 と設定した時の n=3,4,5,6 の λ の値として算出される(一旦、式(i)を λ について解くことをお勧めする)。つまり順に、赤(6.56…)、青緑(4.86…)、青(4.34…)、紫(4.10…)と成る(n=7 だと紫外部に成るので無効)。これが「バルマー系列」である。他に、m=1 とすれば紫外領域の「ライマン系列」(1906 年)、m=3 とすれば赤外領域の「パッシェン系列」(1908 年)が算出されるが、そういったものも含め、本稿では一括し「バルマー系列」で代表させて論じたい。

[19] 但し「イオン」という名前を作り出したのは、科学哲学者ヒューウェル(William Whewell 1794-1866)である(Syndler 2012)。他方で電気分解によらない独立したイオンの存在は、1886 年に電離説を発表したアレニウス(Svante Arrhenius 1859-1927)によると考えられている(久保ほか 1987, p.876; 卜部 2013, p.185)。

[20] 「波長の短い色(光)ほど屈折率が大きい」ことを利用して、様々な色の混じり合った光の中から単色を取り出すことができる。そのための装置が「プリズム」で、選り分けられてスクリーンに映し出された単色光のまとまりを「スペクトル」と言う。(同様のことが「回折方向の違い」を利用し、「回折格子」を使ってもできる。)スペクトルには、単色光の間に連続性が見られる「連続スペクトル」(白熱電球や太陽光)と、それが見られず、とびとびの有り様を示す「線スペクトル」とがある(大槻ほか 2006, pp.252-253)。

[21] 「放電管」については、ブラウン管についての竹内淳(2002, pp.159-162)の説明参照。

[22] 「励起状態」のことであるが、この場合、エネルギー準位(注 23 参照)の間の移動、即ち遷移(注 24 参照)も含意している。それはどのようにして起こるのか。フランク・ヘルツの実験を参照しつつ言えば(大槻ほか 2007, p.253)、放電によりやって来た電子は、水素原子内の電子と「非弾性衝突」をすることによって、それに運動エネルギーを与える。これによりその遷移を可能にするのである。他方、非弾性衝突では、2 粒子の速度は衝突後等しくなる、つまり合体してしまう(大槻ほか 2007, p.39)。即ち、放電中の電子は、水素原子内の電子に「合体」してしまうのだ。

[23] 「エネルギー準位」は、次節のボーア・モデル(6)を使い、目で確認するのが良い。それは化学で言う K 殻、L 殻、…に対応している(大槻ほか 2007, p.217)。

[24] 要するに「遷移」のことである。現在では、ボーア・モデルではなく、オービタル・モデル(注 77 参照)での電子の存在確率領域の変化と捉えられるだろう。本文の「下降的遷移」についてだが、例えばナトリウムでは、励起状態に留まっていられる時間は、たった 10^{-10} 秒であると言われている(卜部 2013, p.416)

[25] 電気素量(elementary electric charge) 1.60×10^{-19}C のことを言っているのではない(大槻ほか 2007, p.86)。
[26] http://mdkchemistry.blogspot.jp/2013/01/114-bohrs-model.html
[27] 教科書的には次の二つに分けて論じられることが多い(大槻ほか 2007, p.249; 中田 2001, pp.24-25)。

(量子条件) ボーア・モデルの円軌道を周回する電子の角運動量(運動量 mv×半径 r)は、その最小値が $\frac{h}{2\pi}$ であり、そこから整数倍(n=1, 2, …)で増えて行く。即ち、$mvr = n\frac{h}{2\pi}$ 。

(振動数条件) 量子条件により定められる電子の角運動量が、より大きなものから小さなものへと変化する時、前者のエネルギーを $E_{大}$、後者を $E_{小}$と表すなら、そのエネルギー差がプランクの公式を満たす光子 $h\nu$ として放出される。即ち、$E_{大}-E_{小} = h\nu$ 。

[28] 量子力学の誕生は、原子構造解明の歴史を抜きにして語れない。トムソン(§6)に始まり、長岡半太郎(1865-1950)、ゾンマーフェルト(Arnold Sommerfeld 1868-1951)、ラザフォード(Ernest Rutherford 1871-1937)など高名な学者の名が並ぶが、残念ながら本稿では扱えない。
[29] 注 27 の「振動数条件」より明らか。電子は熱運動により励起状態に入るのである(國友ほか 2013, p.324)。
[30] コペルニクス(Nicholaus Copernicus 1473-1543)は、プトレマイオス(100 頃-170 頃)の天動説を覆し、地動説を主張したことで有名。
[31] ケプラー(Johannes Kepler 1571-1630)は、ティコ・ブラーエ(Tycho Brahe 1546-1630)の観測結果から、1609年「ケプラーの三法則」を導き出した。
[32] ガリレイ(Galileo Galilei 1564-1642)は、1604 年に落体の法則$y = \frac{1}{2}gt^2$ (落体の移動距離は時間の二乗に比例する)を発表したことで有名。慣性の法則などにも手を付けていた。
[33] 久保ほか(1987, p.345)の定義に従う。静力学(statics)、動力学(dynamics)、運動学(kinematics)は、その下位区分である。いずれにせよ、mechanics を「機械学」と訳すのは、おかしなことであろう。
[34] 『プリンキピア・マテマティカ』の出版された、1687 年の出来事だと言ってよい。
[35] クーロン(Charles-Augustin de Coulomb 1736-1806)は、電気力(電力ではない)と磁気力に関するクーロンの法則を「ねじれ秤」を使って 1785 年に発見したことで有名。
[36] ファラデーには§6 でも言及している。物理学者として、彼は 1831 年に「電磁誘導の法則」を発見した。
[37] アンペール(André-Marie Ampère 1775-1836)は、1820 年に「右ねじの法則」を発見したことで有名。
[38] マクスウェルの四方程式として知られるものであり、その発表は 1864 年だと言われている(竹内淳 2002, p.110; 竹内均 1987, pp.206f.)。但し、竹内淳(2002, p.112)が指摘する通り、そこには更に「フレミングの左手の法則」として知られるアンペール力を記述する法則が加えられなければならない。
[39] 唯一、考えられるは統計力学であるが、その世界観では、飛び回る原子や分子の「軌道」は確かに実在し、連続的に「観測可能」と考えられている。しかし(原子分子ではなく電子であるが)、それを「観測不可能」としたのが、量子力学である(竹内淳 2005, pp.69-70)。
[40] 解説書参照(和田 1995, pp.2-3; 大槻ほか 2007, p.249; 竹内淳 2005, pp.95-96; 片山 1967, p.82)。
[41] 「コイルに磁石を出し入れすると電流が発生する」現象のことである(注 44 も参照)。但し、目下の説明で正式に適用されているのは、電磁誘導の法則ではなく、右ねじの法則、つまりアンペール－マクスウェルの法則であることに注意してもらいたい。
[42] アンペール - マクスウェルの法則については、ここで説明しておきたい。それは、次の式(i)で表されるものである(竹内淳 2002, p.157)。(以下、注の公式は、ローマ数字での通し番号を付けて行くことにしたい。)

(i) $$\oint H dr = \int j dS + \varepsilon \frac{d}{dt} \int E dS$$

実はこれは、中学で習う「右ねじの法則」に該当する。一つ一つ見て行こう。まず、右ねじの法則自体は「アンペールの法則」とも呼ばれ、高校物理では下の式(ii)で教えられるものである(大槻ほか 2007, p.125)。

(ii) $$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Hは「磁界(磁場)の強さ」を表す。これは、磁力線をイメージすれば良い(國友ほか 2013, p.268, p.277)。Iは「電流」、rは「電流からの距離(半径)」、π は円周率である。個々の単語の意味より、中学で習う右ねじの法則の直感を式(ii)に投影した方が良いだろう。ここで気づく問題として、式(ii)には右ねじの「方向」が反映されていない、ということがある。だがもっと問題なのは、式(ii)には「電場(電界)の強さの変化」が全く反映に入れられていないことである。

式(i)にある項 $\varepsilon\frac{d}{dt}\int EdS$ は、正にその「変化」を表す役割を担っている。竹内淳(2002, pp.122f.)に従い、その変化の項を含め、式(i)の微積分表現を、数学的にではなく、物理学的に理解してみよう。
まず、元のアンペールの法則(ii)を移項して、次の様にする。

(iii) $$H \times 2\pi r = I$$

この $2\pi r$ を、微小な弧 dr に分けるなら、その各々の弧の持つ磁界の強さの総計は、$H\times dr_1 + H\times dr_2 + \cdots = \int Hdr$ と表される。ポイントは、積分記号を数学的に「$\int - dr$」と一組の演算子の様に読むのではなく(松坂 1990, p.1014)、積の総和「$\int - \times dr$」として読むことである。つまり、「$\int Hdr$」は「$\sum(H\times \Delta r)$」の拡張として物理学的に理解できる($\sum$ が $\int$ に、Δ が d になる)。しかし微小な弧 dr は「弧」であって「線分」ではないので、積分もただの $\int$ ではなく、周回積分 $\oint$ によって表現される。こうして式(iii)の左辺「$H \times 2\pi r$」は、「$\oint Hdr$」に成る。(まで、左辺の書き換え。)
次に、式(iii)の右辺の電流 I だが、これを、電線の断面積の微小部分(面積)dS 辺りを流れる平均電流値 j の総和と考えれば、$j\times dS_1 + j\times dS_2 + \cdots = \int jdS$。(まで、右辺の書き換え。)
以上、左辺と右辺の書き換えより、式(iii)には、新たに次の定式化(iv)が与えられる(竹内淳 2002, p.149)。

(iv) $$\oint Hdr = \int jdS$$

この右辺に、既に述べた「電場(電界)の強さの変化」を表す、次の項(v)を加える。

(v) $$\varepsilon\frac{d}{dt}\int EdS$$

この項を加えたのは、マクスウェルである。だから、式(i)は、アンペールによる部分(iv)とマクスウェルによる部分(v)を合せて「アンペール－マクスウェルの法則」と呼ばれる。
マクスウェルは、右ねじの状況にコンデンサーがある場合を考え、項(v)を加えた様だが(竹内淳 2002, pp.150f.)、ここでは記号の説明だけにしておく。ε は「誘電率」を表す。ここでは「電界の発生を左右する数値」程度で理解しておけば良い。真空で、8.85×10^{-12} である(大槻ほか 2007, p.105, p.109)。E は「電界(電場)の強さ」を表す。電気力線をイメージすれば良い(大槻ほか 2007, p.91, p.94)。
ε の条件の下、微小面積 dS あたりの電界の強さ E の総和を、単位時間(微小時間)における変化として表したのが項(v)である。故に、確かに、それは「電場(電界)の強さの変化」を表している。しかも、目下の議論(電子の周回運動)で必要と成るのは、正に式(v)なのである。実際、電線 $\int jdS$ が原子核の周りに置いてある筈がない。だから、式(i)で $\int jdS = 0$ としたものが、本文①では、「アンペール - マクスウェルの法則」として言及されているのである。
43 ここから、独立に存在する「空間」あるいは「場」としての電界(電場)、磁界(磁場)という発想が生まれる(竹内淳 2002, pp.61-62, p.172; 大槻ほか 2007, p.91)。
44 「電磁誘導の法則」についてもここで説明しておきたい。それは 1831 年にファラデーが発見した法則で高校物理では、次の式(vi)で表される(大槻ほか 2007, p.144; 國友ほか 2013, p.287)。

(vi) $$V = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

V は電圧、ϕ は磁束(磁力線の束だが一本二本と数えるため「磁束線」というものの束だと考える)を表す。右ねじの法則(注 42(ii))と違い、ここでは変化 $\Delta\phi$ が表現されているのは好ましいことであるが、更に式(vi)を、微小時間 $\Delta t \to dt$ における微小変化 $\Delta\phi \to d\phi$ の視点で見ると、次の式(vii)に成る(竹内淳 2002, p.145)。

(vii) $$V = -\frac{d}{dt}\int BdS$$

dS は微小単位面積、B は磁束密度で、$\phi = \int BdS$ (竹内淳 2002, p.144)と考えられている。
最後に、注 42 で $\oint Hdr$ を考えた時と同様に、電圧 V を、微小な弧 dr における電界 E の総和と考えれば、$V = \oint Edr$ として、V を置き換えられるようになるから(竹内淳 2002, p.146)、式(vi)は、全体として、次の式(viii)に書き換えられる(竹内淳 2002, p.146)。

(viii) $$\oint Edr = -\frac{d}{dt}\int BdS$$

この式(viii)が、マクスウェルによる電磁誘導の法則の定式化である。

[45] 「円形の磁界 $\oint Hdr$ の発生」は、微分を使い「変化」を表すものとして「$\frac{d}{dt}\int BdS$」とも表される。これが、前注 44 の(viii)の右辺に接続し、電磁誘導が起こる。その右辺のマイナスは、発生する円形の電界が、その磁界を「妨げる」様に発生していることを表している。しかしなぜ磁界「$\oint Hdr$」は「$\frac{d}{dt}\int BdS$」とも表されるのか。つまり、なぜ H は B で置き換えられるのか。これは、磁界の強さ H と磁束密度 B との間に、「透磁率」と呼ばれる電界の発生条件を表す定数 μ を仲立ちにして、「$B = \mu H$」という関係があるからである(大槻ほか 2007, p.131)。このため、式(viii)は次の様にも書ける(竹内淳 2002, p.173)。

(ix) $\oint Edr = -\mu\frac{d}{dt}\int HdS$

右辺の「$-\mu\frac{d}{dt}\int HdS$」が、本文①における円形の磁界 $\oint Hdr$ の「発生」並びに、電磁誘導の法則の右辺「$-\frac{d}{dt}\int BdS$」を共に表しているのは、明らかだろう。

[46] 朝永(1969, p.85)によれば、単位時間 dt 毎に、$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|\dot{v}^2|$ のエネルギーが奪い去られる。e は電気量(電荷)、c は光速度、$\dot{v}$ は $\frac{d}{dt}v$ である。

[47] 原子核の周りを回る電子が持つ全エネルギーは、次の通りである(大槻ほか 2007, p.251)。

(x) $\frac{1}{2}mv^2 + (-k_0\frac{e^2}{r})$

m は「電子の質量(9.109×10^{-31}kg)」、v は「電子の速度(変数)」、$\frac{1}{2}mv^2$ は 「(電子の)運動エネルギー」、k_0 は「クーロンの法則における比例定数」、e は「電子の電荷(－1.6×10^{-19}C)」、r は「電子の軌道半径(変数)」、$-k_0\frac{e^2}{r}$ は「(電子の)クーロン力による位置エネルギー」である。クーロン力による位置エネルギーがマイナスなのは、電子が、原子核の引力圏を脱しようとしている（つまりクーロン力はその邪魔をしている）と見るからで、「万有引力（重力ではない）による位置エネルギー」と全く同じ発想である(國友ほか 2013, p.85; 和田 1994, p.17)。ちなみに、運動エネルギーにおける速度 v は、クーロン力のベクトルと垂直方向だと考えられている。つまり、電子の運動方向を分解して見ているのが、式(x)である。

さて、この全エネルギーの中で、電子が初めに失い得るものはと言えば、外から電子の位置を変える仕事は為されていないから、運動エネルギーの方だと言える。そこで運動エネルギー$\frac{1}{2}mv^2$の方に目を向けると、質量はここでは定数だから、速度の方を失わざるを得ない。こうして電子は「失速」するのである。

[48] 「電子の軌道半径が小さくなる」からである(國友 2013, p.361)。軌道半径とは前注式(x)で現れた r のことであるが、それが小さくなるのは、こう説明される。原子核の周りを電子が「等速円運動」をしていると考えるのならば、そこには「向心力 $m\frac{v^2}{r}$ 」が存在しなければならない。それは単純に、電子に働くクーロン力 $k_0\frac{q_1q_2}{r^2}$ と同じと考えられる。従って、次の式(xi)－運動方程式－が成立する(大槻ほか 2007, p.250)。

(xi) $m\frac{v^2}{r} = k_0\frac{e^2}{r^2}$

クーロン力について q_1=＋e(陽子)、q_2=－e(電子)なので、全体はマイナスであるべきなのだが、向心力もマイナスなので、ここでその符号は必要ない。さて、注 47 の式(x)の運動エネルギーの所に、この式(xi)を代入すると、式(x)全体が、次の式(xiii)に成ることが分かる(大槻ほか 2007, p.251)。

(xiii) $-k_0\frac{e^2}{2r}$

いま、電子の速度 v が減少すると考えるなら、式(x)の値は当然小さくなる。それに連動して式(xiii)の値も小さく成らなければならない。しかし式(xiii)において、k_0、e は定数だから、変化し得るのは r だけである。普通、分母が小さくなると、分数全体は大きく成るが、式(xiii)自体、マイナスの符号が付いているので、r が「小さく」なることは、負としての数が大きくなること、つまり、全体が「小さく」成ることを意味する。よって、速度 v の減少によって式(x)の値が小さくなることは、式(xiii)では軌道半径 r が「小さく」成ることによって説明される。これが、「電子の軌道半径が小さくなる」つまりは「電子が落下する」ということの意味である。

[49] 前注で硬く説明したが、「メリーゴーランドで回転盤が遅く成れば、馬は中心に向かって落ちて行く」という風に理解しても良いかも知れない(大槻ほか 2007, p.53)。但し、目下の状況では、重力などは考慮に入れないから(電子の質量が小さすぎるため重力の影響は考えられない)、あくまでそれは類推に留まらざる

を得ない。参考までに言っておくと、電子の質量は 9.109×10^{-31}kg だから、重力 mg は、約 8.9×10^{-30}N に成る。それに対し電子の電荷は－1.60×10^{-19}C、陽子は+1.60×10－19C、両者の距離をボーア半径 5.3×10^{-11}m とすると、クーロン力$k_0\frac{q_1q_2}{r^2}$は、約 8.2×10^{-7}N に成る。後者は、前者の約 10^{23} 倍である。

50 竹内淳(2002, p.96)によれば、1.0×10^{-7} 秒、朝永(1969, p.86)によれば、1.6×10^{-11} 秒。

51 他方でボーア理論がそれなりの成果を収めたことも見逃してはならない。リュードベリ定数(注 18 の R)との一致、フランクとヘルツの実験(1913-14 年)による検証等がそれである(大槻ほか 2007, pp.252-253)。

52 後に確認する通り(§13)、本稿では最初歩のレベルの波動関数しか扱わない。

53 竹内淳(2005, p.66, pp.55-64)の説明参照。$\hat{p}$ がなぜ運動量を表すのか、ということについては少し長めの説明を必要とするので、ここでは割愛する。

54 プランク定数を 2π で割ったもの。$\hbar \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{2\pi}$

55 同様に、Δp は、電子の x 軸上での運動量の変化を表す。「x 軸上」であることを明示するために普通、p_x という下付き文字を伴う表記を用いなければならないのだが、ここでは省略する。

56 竹内淳(2005,p.190)の説明も参照。ここでは直感を優先させ、式(11)の右辺が次の分散の計算式(ix)に対応している、ということ確認できれば充分としたい（「￣」は平均）。

(ix) $\overline{x^2} - (\bar{x})^2$

「分散(variance)」とは、統計上のテクニックで、基準値である平均 $\bar{x}$ からのデータ $x_1, x_2, \ldots$ のばらつきを示す手立ての一つである。定義も兼ね、通常それは、次の計算式(x)によって得られる。

(x) $\frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$

式(ix)は、この(x)の「計算」のショートカットである。

57 なぜ「運動量 mv」なのか、という疑問もここで生じるだろう。何故なら普通、対象(ここでは電子)の変化を予測するには、位置と「速度 v」が必要と考えるからだ(片山 1967, pp.105f.)。不確定性原理を巡るこの問いで思い浮かぶのは、やはり、γ 線顕微鏡を使った思考実験であろう(Heisenberg 1927, p.174-175)。そこでは、コンプトン散乱(1923 年)の要領で、非常に波長の短い流れの光子が、電子を弾き出す場面が考えられる。その際、計算に用いられるのが「運動量」であり「運動量保存の法則」なのである。運動量が求められれば、(電子の質量は一定なのだから)速度も即座に求められる。しかし、これが「求められない」と言うのが不確定性原理である。これは結局、対象の変化(軌道)の予測を断念させるのに充分だと言える。

58 x と $\hat{x}$、p と $\hat{p}$ は当然、区別しなければならない(竹内淳 2005, pp.63-64)。

59 ゼロでない($\neq 0$)時、「非可換」と呼ばれる(cf. 竹内淳 2005, pp.65f.)。$i\hbar$は定数であることに注意。

60 無論、波動関数はシュレディンガーの波動力学(1925 年)の道具立てて、不確定性原理を発見したハイゼンベルクの手法は行列力学(1926 年)である。しかし両者が数学的に同一であることは 1926 年、シュレディンガー、ディラック、ヨルダン(Pascual Jordan 1902-1980)らによって個々に証明されたことであるから、この違いには、拘る必要は無い(久保ほか 1987, p.315, p.1323; 竹内淳 2005, p.104)。

61 ボーアの「量子条件」(注 27)を移項すれば、$2\pi r = n\,\frac{h}{mv}$ が得られる。これが円軌道$2\pi r$内に「定在波」(§13 参照)が生まれるための条件 $2\pi r = n\lambda$ に酷似していることは明らかだろう。このことから「$\frac{h}{mv} = \lambda$」つまり「電子の運動が何かしらの波を表現している」と考えたくなるのは当然である。それを表明したのがド・ブロイ(Louis-Victor de Brogile 1892-1987)であり(1923 年)、彼の考えは「ド・ブロイ波」と名付けられた。

62 中田(2001, pp.34-35)は、ボーア・モデル同様、ド・ブロイ波のイメージは「嘘っぱち」だと言っている。また、たとえ円周軌道を回るのだとしても「波は軌道の内側へも外側へも連続的に広がっているはずだから」(湯川･井上 1978, pp.44-45)、本文の「90 度回転させる」という解釈は成立し得ると言えよう。

63 動径分布曲線をイメージしている(中田 2001, pp.59-60)。§13 で述べる「無限の井戸形ポテンシャル」の中での波動関数も、そう理解する。

64 「運動量」の方はどうかと言えば、以下に述べる「井戸形ポテンシャル」では、結局、電子の存在する区間において「位置エネルギー」はゼロだから、波動関数を得た上でシュレディンガー方程式を解けば「運動エネルギー$\frac{1}{2}mv^2$」として、それは得られると考える(cf. 竹内淳 2005, pp.82f.)。

65 微分方程式とは、何回か微分され等式に現れた未知の関数 f を求めるものである。一番簡単なのは例えば、$\frac{d}{dx}f(x)=2x$ という(常)微分方程式であろう。両辺積分すれば、解は $f(x)=x^2+C$ と分かる(松坂 1990, pp.1080f.)。

66 周知の通り、直行座標から球座標への書き換えには、機械的な公式があるが(cf. 中田 2001, p.49)。

67 実を言うと、シュレディンガー方程式自体、この「力学的エネルギー(=全エネルギー)」の定義(運動エ

ネルギーと位置エネルギーの和)をベースにしている(cf. 竹内淳 2005, p.58)。
[68] 「定常波」とも呼ばれるが(大槻ほか 2006, p.230)、目下の文脈では「定在波」と区別されない(竹内淳 2005, p.77; 久保ほか 1987, p.82; 國友ほか 2012, p.99)。
[69] $2\pi : \theta = \lambda : x$ より。
[70] 竹内淳(2005, pp.80-82)が至極丁寧に説明している。
[71] 実は、この話はそんなに簡単ではない。$\psi(x)$は「関数」であるが、複素共役は普通、複素「数」について言われるからだ。これを理解するには(一次元で時刻を含んだ)波動関数が一般に、$Ae^{i(kx-\omega t)}$で表され、それが複素数平面の一点、つまり複素数に対応していることを理解しなければならない(竹内淳 2005, p.49)。
[72] 複素数 z について、$z \times z^* = |z|^2$ 。
[73] 高校物理の教科書では、ボーア理論から更にエネルギーを求めてしまうが(大槻ほか 2007, pp.250-251)、その理論自体、過渡的なものに過ぎなかったことを考えれば(§10)、この手続きは不十分である。
[74] 解説書参照(湯川・井上 1978, pp.42f.; 片山 1967, p.105)。
[75] それはつい最近のこと－竹内淳(2005, p.38)によれば 1989 年、和田(1995, p.14)によれば 1987 年－である。
[76] 解説書参照(湯川・井上 1978, p.48, 片山 1967, pp.116-117, p.138)。最も簡単な電子の「確率＝統計」的な存在様式は、一重スリットの実験でもイメージできるのかも知れない(和田 1995, pp.4-5)。
[77] だから現在では、ボーア・モデルの代わりに、「オービタル(軌道というより電子雲)」のモデルが採用されている(中田 2001, p.58)。
[78] 本稿では扱えなかった。中田(2001, pp.47f.)の説明等を参照。