統計推論とはなにか : 帰納論理をふり返りつつ

著者	金子 裕介
雑誌名	The Basis : 武蔵野大学教養教育リサーチセンター紀要
号	12
ページ	91-117
発行年	2022-03-01
URL	http://id.nii.ac.jp/1419/00001708/

統計推論とはなにか

―帰納論理をふり返りつつ―

金子　裕介

§1　本稿のねらい

カルナップ（Rudolf Carnap 1891-1970）が遺した体系に、帰納論理（inductive logic）がある[1)]。ほとんど絶滅危惧種なのだが、筆者[2)]には重要とおもわれ、ここ数年、復活を模索している[3)]。

ただ、それに似ていて、はるかに知られた統計推論（statistical inference）と[4)]、どう違うのか[5)]。

そう問うひとのなかには、きっと、そもそも統計推論を知らないひとも居るだろう。彼らに向け、手っ取り早く統計推論を説明し、帰納論理へといざなう――入門／導入（introduction）ではなく招待（invitation）する。これが、本稿のねらいである[6)]。

第１章　統計と分布

統計学の基本表現に，分布（distribution）がある．まずは，そこから話をはじめたい．

§2　分布とはなにか[7)]

確率論（probability theory）と統計学（statistics）の違いはなにか。

そう問われたとき、答えにつまるひとは少なくない。偏にこれは、統計学がわりと高度、高校後半にもならないと教えられないのに対し[8)]、確率論は初歩的、中学生でも樹形図を使い、簡単に教えられるからだ[9)]。

つまり、ふたつにはレベルの差がある。確率論なら知っているが、統計学は知らないひとは多い。

そんなひとが統計学に入り、面食らうのが、分布（distribution）という言い回しである。度数分布、確率分布、二項分布、正規分布 ……。

分布とは一体、なんなのか。

§3　分数が分布する

確率は、まだ起こっていない事象（未来）について述べられる。統計は、すでに起こった事象（過去）について述べられる。そう線引きするのは、あながち間違いでない[10)]。

ただ、未来を述べるにせよ、過去を述べるにせよ、分数（fraction）が使われる。そうできる、ということだ[11)]。

確率で、分数が使われるのは、天気予報など、パーセンテージが使われることを思いだせばわかる。分母を 100 にすればよい。

それに対し、統計を分数で表す慣行はない。だが、統計が過去に向かう限り、調査対象数は明白だから[12]、それを分母にすればいい。つまり、相対頻度（relative frequency）としての統計表現。それが分数になる。

§4　度数分布

確率も統計も、分数で表される[13]。こう考えたとき、分布（§2）とは、まず、或る階級（class）における、分数の散らばり（scatter）と捉えられる[14]。

1　度数分布[15]

	A	B
1	*x*：身長（階級）	*y*：相対頻度
2	154 (152~156)	1/40
3	158 (156-160)	3/40
4	162 (160-164)	9/40
5	166 (164-168)	11/40
6	170 (168-172)	9/40
7	174 (172-176)	3/40
8	178 (176-180)	4/40

これが分布の、原初的な表現になる。いわゆる、度数分布（frequency distribution）だ[16]。ここでは「40 名のクラスの生徒の身長の統計」が表されている。

x は階級（class）でなく[17]、階級値（class value)[18]。その相対頻度を y で示した[19]。

§5　ヒストグラム

分布（§2）といったとき、まず、表 1 の列 *y* における[20]、分数の散らばり（fractions' scattering）がイメージされる。

ただ、表（1）では、全体像が摑みにくい。そこで作成されるのが、ヒストグラム（histogram）である[21]。

2　ヒストグラム

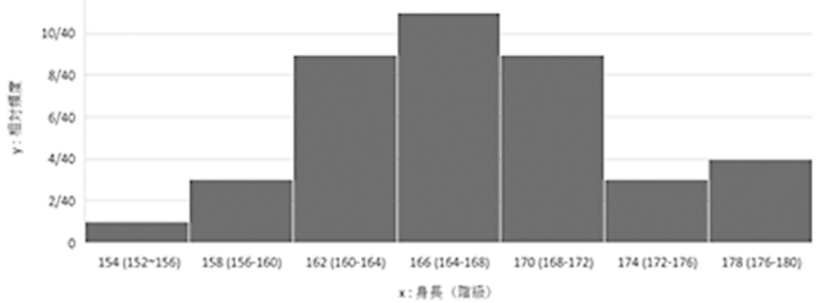


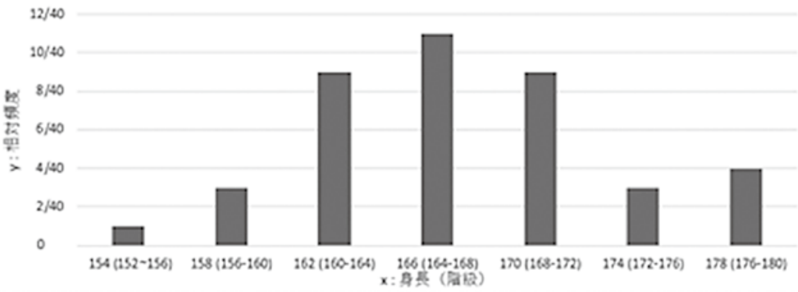
表１と内容は同じだけれども、データの散らばりが、ひと目でわかる。

§6　棒グラフ

ヒストグラムでは、横軸 x が、幅のある階級（例えば 152-156）になっている。だが、座標平面[22] なんかを思い浮かべればわかるとおり、x 座標は、ふつう、点で区切られる。

それに従うなら、幅のある階級は、階級値で置き換えるべきだろう。こうして作られるのが、棒グラフ（bar graph）である[23]。

３　棒グラフ

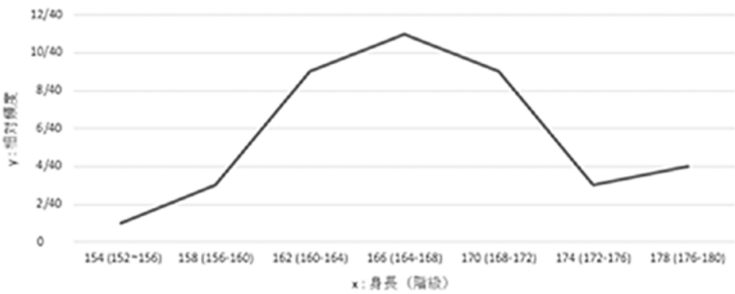


ヒストグラムが、中央（階級値）に向けシュッと縮む、そうイメージしてもらいたい。これ（3）が、分布の一番統計らしい表現ともいえる[24]。

§7　度数折れ線

ヒストグラムにせよ、棒グラフにせよ、長方形の頂点を結ぶと、度数折れ線（frequency line graph）になる[25]。

４　度数折れ線



ヒストグラム（2）や棒グラフ（3）が静態的な記録並列なのに対し、度数折れ線（4）は、そこになにか、運動が連想される。

これは、物理学の $x-t$ 図が重ねてイメージされるからだろう[26)]。実際、度数折れ線になり、物理学で物体の運動を捉える $x=f(t)$ といった関数も考えられるようになる（度数折れ線では t の代わりに x, x の代わりに y)。

第 2 章　帰納論理へのより道

度数折れ線より先にすすむ前に，ここまでの話を，カルナップの帰納論理に接続させてみたい[27)].

§8　事態

$x-y$ 平面（座標平面）で、分布を、もうすこし読み込んでみたい。棒グラフ（3）を使うのがよいだろう。

横軸、すなわち x 軸の目盛りひとつひとつは、「身長が x cm」といった階級値を表していた[28)]。これを、帰納論理で捉えられないか[29]。

採用したいのは、事態（a state of affairs）という見方である[30)]。これは、$F_1a \wedge \neg F_2a$ といった複合論理式を意味する[31)]。

§9　Q 述語

「身長 x cm である」という階級値が、$F_1x \wedge \neg F_2x$ といった複合論理式で表される。これはなにも、忠実にそうする、という意味ではない。

F_1 を「あそこに駐車した」とする。F_2 を「警察に捕まった」[32)] としよう[33)]。このとき、$F_1a \wedge \neg F_2a$ は「あそこに駐車したが警察に捕まらなかった」を意味する。これが帰納論理で、階級値に相当する、事態の表現になる。

カルナップは、事態のために、特有の表現を選んでいた。いわゆる Q 述語（Q-predicate）である[34)]。

5　Q 述語 [35)]

$Q_1x \longleftrightarrow_{\mathrm{def}} F_1x \wedge F_2x$	[あそこに駐車して警察に捕まった]
$Q_2x \longleftrightarrow_{\mathrm{def}} F_1x \wedge \neg F_2x$	[あそこに駐車して警察に捕まらなかった]
$Q_3x \longleftrightarrow_{\mathrm{def}} \neg F_1x \wedge F_2x$	[あそこに駐車しなかったのに警察に捕まった]
$Q_4x \longleftrightarrow_{\mathrm{def}} \neg F_1x \wedge \neg F_2x$	[あそこに駐車せず警察にも捕まらなかった]

これが、事態（§8）の表現になる。

§10　調査事例

もうすこし、おなじ話を続けさせてほしい。

或る運送会社で 4 人の従業員（ドライバー）の行動調査をしたとする。その結果、次の統が得られた。

6　度数分布

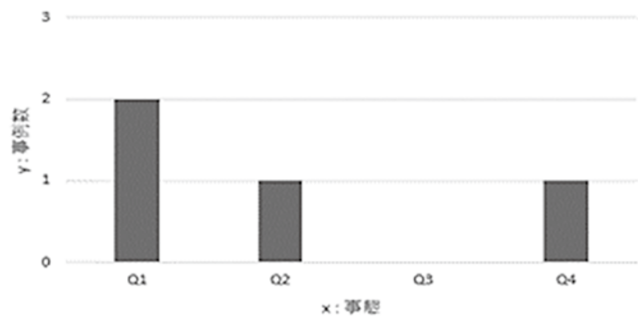
	A	B
1	x：事態	y：事例数
2	Q_1	2
3	Q_2	1
4	Q_3	0
5	Q_4	1

つまり、路上駐車をして捕まったドライバーが（Q_1）[36]、2 人居た。あとのふたりのうち、1 人は、おなじく路上駐車したが、警察に捕まらなかった（Q_2）。もう 1 人は、別の場所で警察に捕まった（Q_4）。

§11　統計

これ（6）を棒グラフ（§6）で表してみよう。

7　棒グラフ



x 軸を陣取っているのは、Q 述語である（§9〜§10）。y 軸を陣取るのは、事例の数である。

事例（instance）とは、ここでは論理学における個体定項 $c_1, c_2,$ …… に相当するものを考える。4 人のドライバーが、どういう行動を取ったか、たとえば「従業員 A がしかじかの時刻にあそこに駐車した」といった出来事を $c_1, c_2,$ …… は表している[37]。

第 3 章　事例統計分布

もうすこし帰納論理に，より道させてもらいたい．帰納論理に移植された統計表現（7）は（帰納論理の基本的な表現方法である）記号論理で，どう表されるのか．

§12　分布を帰納論理で表す

Q 述語（§9）や個体定項（§11）を使っても、統計を表せる。では、帰納論理特有の分布表現はあるだろうか。つまり、度数分布（6）やグラフ（7）でなく、記号論理で、分布（§2）を表せるのか[38]。

§13　事例個別分布

帰納論理における分布表現。それとしてカルナップが考案したのは、まず、事例個別分布（individual distribution）だった[39)]。

8　事例個別分布　s 個の標本 $c_1, \ldots, c_s$ について , 事態 $Q_1, Q_2, \cdots\cdots$[40)] の例示を記録した証拠（evidence）を , 事例個別分布（個体配分）と言う[41)].

$$e_i \longleftrightarrow_{\mathrm{def}} Q_{i1}(c_1) \wedge \ldots \wedge Q_{ik}(c_s)$$

帰納論理独特ともいえる、この長たらしい表現 e_i は、ただ煩瑣な表現の代表格として疎んじられてきたけれども、れっきとした分布（distribution）の表現なのである。

§14　事例個別分布では不充分

事例個別分布 e_i は、分布の表現だ。だが使ってみてわかるは、それは、統計として情報過多ということである。

度数分布（6）や棒グラフ（7）を、ふり返ってみよう。そこで欲しいのは数だけ、事例数だけである。事例それぞれが、どういう顔をしているかまで聞いてない。だれがいつ（それをしたのか)、ということまで尋ねていないのだ。(Q 述語でいえば)、Q_1 の事例数が 2 で、Q_2 の事例数が 1 で、Q_3 の事例数が 0 で、Q_4 の事例数が 1 ということだけ。それだけが統計の関心であり、たとえば c_1 に、Q_1 が述語づけられた、といった細部まで聞いていない。

ためしに表 6 やグラフ 7 の統計結果を、事例個別分布で表そうとすると、12 通りも可能になってしまう。

9　事例個別分布

$$e_1 \longleftrightarrow Q_1(c_1) \wedge Q_1(c_2) \wedge Q_2(c_3) \wedge Q_4(c_4)$$
$$e_2 \longleftrightarrow Q_2(c_1) \wedge Q_1(c_2) \wedge Q_1(\mathrm{c}_3) \wedge Q_4(c_4)$$
$$\vdots$$
$$e_{12} \longleftrightarrow Q_4(c_1) \wedge Q_2(c_2) \wedge Q_1(c_3) \wedge Q_1(c_4)$$

Q_1 が同じである「同じものを含む順列」を考えればよい。 $\dfrac{4!}{2!+1!+1!} = 12$ になる[42)]。

§15　事例統計分布

事例個別分布（8）は統計を表すのに適していない。おなじ分布を表すのに、たとえば 12 通りも考えなければならないからだ（9)。

この問題を解消したカルナップの方法は、かなり力業（ちからわざ）だった。

10　同型[43)]　上記（9）$e_1, \ldots e_{12}$ のように同じ統計結果を表す事例個別分布を , 相互に , 同型（isomorphic）と言う .

11　事例統計分布[44)]　相互に同型な事例個別分布 $e_{i1}, e_{i2}, \ldots\ldots$ をつなぎ合わせてできる選

言を，事例統計分布（統計配分）と言う[45].

$$d_i \longleftrightarrow_{\text{def.}} e_{i1} \vee e_{i2} \vee \ldots\ldots$$

帰納論理の最終的な着地点は、ここになる。

統計事例分布（statistical distribution）。これによって、分布（distribution）が代弁される。

第 4 章　確率分布

以上で，帰納論理へのより道を終える．ふたたび統計に戻り，度数折れ線（4）から，話を再開しよう．

§16　確率分布へ

ここまでみたことは、或る意味、過去（the past）に起こった出来事の統計にすぎない。今度は逆に、未来（the future）に目を向けてみよう[46]。

未来に目を向ける。そうすると視界に入ってくるのは、確率である。

確率も、統計とおなじように、分数で表される（§3）。分布として、それは、確率分布（probability distribution）と呼ばれる[47]。

§17　計算

確率分布とはなんだろうか。統計を得ることと、確率を得ること。その違いについて考えてみよう。

統計を得るとき、実は、なにも考えなくてよい。ただ集めて、数えればいいだけだ。

それに対し、確率を得るには、計算（calculation）をしなければならない。ここに、確率と統計の違いがある。では、確率計算とはなにか。

典型例として、次を考えてほしい。

12　問題　サイコロ投げを 6 回したとき，1 の目が 2 回出る確率を求めよ．

いわゆる重複（ちょうふく）試行（反復試行）である[48]。こう解答される。

13　解答　${}_6C_2\ (\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4\ \fallingdotseq 0.20093879$

≒ で、ほぼ等しい（approximately equal）を表す[49]。

§18　二項法則

確率計算の典型例をみてもらった。全然初歩的でない、とおもったかもしれない[50]。だが、あれ（13）でよい。確率分布を考えるには（§16）、あれが最適なのである。

あの計算（13）は、こう一般化される。

14　**二項法則**　或る独立事象の起こる確率を p とする (p は $0 \le p \le 1$ の実数). このとき, n 回の試行において, その事象が x 回起こる確率は, 次の式で算出される (q は, その事象が起こらない確率 $q = 1 - p$).

$$ {}_nC_x\ p^x\ q^{n-x} $$

高校数学では「重複試行の確率」と呼ばれる[51)]。それを、二項法則（binomial law）と呼んだのはカルナップだった[52)]。

似た名前の、二項定理（binomial theorem）と混同しないでもらいたい[53)]。

15　**二項定理**　$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x\, a^{n-x}\, b^x$

これは、二次式の展開 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の一般形になる。

二項定理の一般項 ${}_nC_x\, a^{n-x}\, b^x$ が、二項法則（14）だ、というのは許されよう[54)]。

第 5 章　二項分布

二項法則から得られる確率分布を，二項分布と言う．確率論と統計学を橋渡しする，重要な概念である．

§19　二項分布

サイコロ投げ 6 回で 1 の目が 2 回出る確率を考える（§17～§18）。これが、確率分布のロールモデル（模範）になる。

統計学の言葉で、二項分布（binomial distribution）と言う。みてみよう。

16　**二項分布（度数分布）**[55)]

①　**試行 6 回**

	A	B
1	x：1 の目の出る回数	y：確率（試行 6 回）
2	0 回	0.33489798
3	1 回	0.40187757
4	2 回	0.20093879
5	3 回	0.05358368
6	4 回	0.00803755
7	5 回	0.00064300
8	6 回	0.00002143

②　**試行 12 回**

	A	B
1	x：1 の目の出る回数	y：確率（試行 12 回）
2	0 回	0.112156654785
3	1 回	0.269175971483
4	2 回	0.296093568631
5	3 回	0.197395712421
6	4 回	0.088828070589
7	5 回	0.028424982589
8	6 回	0.006632495937
9	7 回	0.001136999304
10	8 回	0.000142124913
11	9 回	0.000012633326
12	10 回	0.000000758000
13	11 回	0.000000027564
14	12 回	0.000000000459

③　試行 30 回

	A	B
1	x：1 の目の出る回数	y：確率（試行 30 回）
2	0 回	0.00421272023308744000000
3	1 回	0.02527632139852460000000
4	2 回	0.07330133205572130000000
5	3 回	0.13682915317068000000000
6	4 回	0.18471935678041800000000
7	5 回	0.19210813105163400000000
8	6 回	0.16009010920969500000000
9	7 回	0.10977607488664800000000
10	8 回	0.06312124305982270000000
11	9 回	0.03085927438480220000000
12	10 回	0.01296089524161690000000
13	11 回	0.00471305281513343000000
14	12 回	0.00149246672479225000000
15	13 回	0.00041329847763477800000
16	14 回	0.00010037248742558900000
17	15 回	0.00002141279731745890000
18	16 回	0.00000401489949702355000
19	17 回	0.00000066127756421564400
20	18 回	0.00000009551787038670410
21	19 回	0.00000001206541520674160
22	20 回	0.00000000132719567274157
23	21 回	0.00000000012641423911761
24	22 回	0.00000000001034178446292
25	23 回	0.00000000000071942848437
26	24 回	0.00000000000004196661588
27	25 回	0.00000000000000201439975
28	26 回	0.00000000000000007747691
29	27 回	0.00000000000000000229561
30	28 回	0.00000000000000000004919
31	29 回	0.00000000000000000000067
32	30 回	0.00000000000000000000000

§20　解説

これらは度数分布（§4）として、二項分布を提示している[56)]。

16 ① では、サイコロ投げ 6 回で 1 の目が出る回数を x としたとき、その確率が y の列で算出されている。これは二項法則（14）を使い、$y = {}_6C_x\ p^x q^{6\text{-}x}$ と表される（x についての）一項関数になる[57)]。

同様に、16 ② では、サイコロ投げ 12 回で 1 の目が出る回数 x が、y の列で算出されている。 16 ③ では、サイコロ投げ 30 回で 1 の目が出る回数 x が、y の列で算出されている。

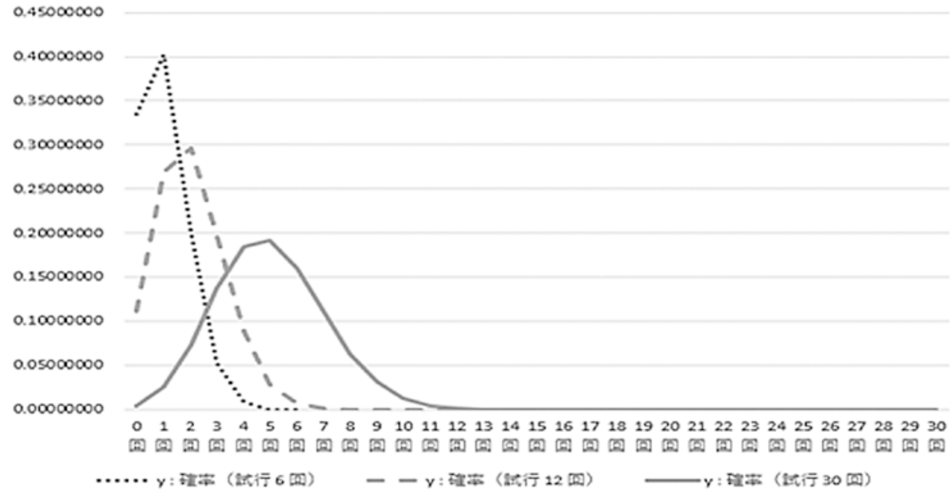
いまだ理想論の確率論で、経験観察を相手にした統計推論にはなっていない[58)]。理想論だから「1 の目が出る」ことに意味はない。均等な面のサイコロが考えられているからである。「2 の目が出る」でも、「3 の目が出る」でも、なんでもよい。

問題は、どの面が出るかでなく、何回出るかだ。それが、x で表され、試行回数 n と組み合わさり、二項分布（という確率分布）を形成してゆく。

§21　釣鐘状

数のデータ（16）だとピンと来ないかもしれないが、度数折れ線（§7）にすると、二項分布の本性がみえてくる。

17　二項分布（度数折れ線）[59]



まずは、このグラフ 17 を、データ 16 と照合させてほしい。

点線グラフが、試行回数 6 回（で 1 の目が x 回出る確率）の確率分布 $y = {}_6C_x \ p^x \ q^{6-x}$ を表している。

破線グラフが、試行回数 12 回（で 1 の目が x 回出る確率）の確率分布 $y = {}_{12}C_x \ p^x \ q^{12-x}$ を表している。

実線グラフが、試行回数 30 回（で 1 の目が x 回出る確率）の確率分布 $y = {}_{30}C_x \ p^x \ q^{30-x}$ を表している。

試行回数、すなわち $y = {}_nC_x \ p^x \ q^{n-x}$ の n が延びれば延びるほど、度数折れ線（としての確率分布）は、右に倒れ込んでゆくのがわかる。

こうしてできるのが、釣鐘状（bell-shaped form）である[60]。

第 6 章　正規分布

試行回数 n が増えるほど, グラフ（度数折れ線）は釣鐘状に近づく. では $n \to \infty$ になったらどうなるのか. この問いの先に生まれたのが, 正規分布である.

§22 「サイコロ投げで 1 の目が出る回数」に固定

以後、話を 12 の設定に固定したい。すなわち、サイコロ投げ n 回で 1 の目が何回出るか。その回数 x の確率だけを考える。

二項法則（14）に従い、それは、$P(x) = {}_nC_x\ p^x\ q^{n\text{-}x}$ と算出される[61]。

ちなみに §20 で釘を刺したとおり、「1 の目が出る」ことに意味はない。

§23　アルファベット

なぜ、設定をサイコロ投げに固定するのか。それは、これから先の話が抽象的になるからだ。数式に現れる n, x, p, q の意味なんか、すぐにおぼつかなくなってしまう。こういったことを回避するためには、意味を固定させてしまうのが得策なのである。

n は、サイコロ投げの試行回数。x は 1 の目が出た回数。p は $\frac{1}{6}$ という確率。q は $\frac{5}{6}$ という確率。

こう固定しておけば、抽象的な話にふり回されることがなくなる。

§24　正規分布

では（第 5 章でみた）二項分布から、話を再開しよう。

二項分布は、確率分布のロールモデル（模範）である（§19）。しかも、試行回数 n が増えるに従い、釣鐘状を示すようになる（17）。

あの度数折れ線（17）をみて、$n \to \infty$ となったらどうなるか、と問いたくなるだろう。この問いは実際立てられ、答えられた。その答えが、正規分布（normal distribution）である。

18　正規分布　①　二項分布の極限[62]　$\lim_{n\to\infty} {}_nC_x\ p^x q^{n-x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$

②　確率密度関数　$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$

等式右辺をみてもらえばわかるとおり、上（①）と下（②）は、おなじことを言っている。

§25　解説

先に上（①）を、みてもらいたい。二項分布 ${}_nC_x\ p^x\ q^{n\text{-}x}$ の極限 $n \to \infty$ が、正規分布 $\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$ になる、と言っている。これが正規分布の、いわば出自である。純粋に、数学的に証明される[63]。

一方、正規分布とはなにかと問われたら、下（②）の関数を答えればよい。

確率密度関数（probability density function）と呼ばれる[64]。引数として稠密（ちゅうみつ）な値[65]、つまり実数が取られる[66]。

これは、二項分布 $P(x) = {}_nC_x\ p^x\ q^{n\text{-}x}$ が[67]、サイコロ投げで 1 の目が出た回数 x という（0 を含んだ）自然数しか引数にしなかったことと（つまり稠密な引数を取らなかったことと）[68]、対照的である。

e は自然対数の底 2.71828 …… で定数。π は円周率 3.141592 …… で定数。　n, x, p, q は §23 のとおり。

§26　近似

正規分布は二項分布の極限である（18 ①）。

だが、極限 $n \to \infty$ まで行かなくても、二項分布と正規分布の近似は、実をいうと、かなり早い（n の値が小さい）段階で認識される。

19　正規分布と二項分布の比較

	A	B	C
1	x：1の目の出る回数	y：正規分布（n=30）	y：二項分布（試行 30 回）
2	0 回	0.00973043466592829000000000000	0.00421272023308744000000000
3	1 回	0.02865301198373810000000000000	0.02527632139852460000000000
4	2 回	0.06637089074444390000000000000	0.07330133205572130000000000
5	3 回	0.12093564782411600000000000000	0.13682915317068000000000000
6	4 回	0.17334062129521500000000000000	0.18471935678041800000000000
7	5 回	0.19544100476116800000000000000	0.19210813105163400000000000
8	6 回	0.17334062129521500000000000000	0.16009010920969500000000000
9	7 回	0.12093564782411600000000000000	0.10977607488664800000000000
10	8 回	0.06637089074444390000000000000	0.06312124305982270000000000
11	9 回	0.02865301198373810000000000000	0.03085927438480220000000000
12	10 回	0.00973043466592829000000000000	0.01296089524161690000000000
13	…	…	…
14	25 回	0.00000000000000000000278535500	0.00000000000000020143997563
15	26 回	0.00000000000000000000002033067	0.00000000000000000774769137
16	27 回	0.00000000000000000000000011673	0.00000000000000000022956123
17	28 回	0.00000000000000000000000000053	0.00000000000000000000491917
18	29 回	0.00000000000000000000000000000	0.00000000000000000000006785
19	30 回	0.00000000000000000000000000000	0.00000000000000000000000045

20　正規分布と二項分布の比較（19 を投影）

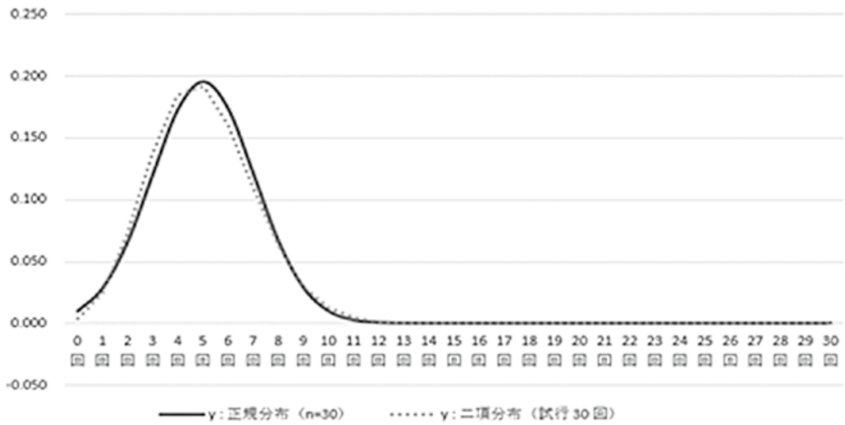


表 19 の左が正規分布、右が二項分布である（二項分布は 16 ③ を流用）。数字だとピンと来ないが、グラフに投影すると、ほとんど区別がつかなくなる（20）。

第７章　*np* と *npq*

確率分布の代表的なかたち，二項分布と正規分布をみてもらった．前者から後者に移る意義について，考えてみよう．

§27　統計推論に向けて

確率分布（第４章）の代表的なかたち、二項分布（第５章）と正規分布（第６章）をみてもらった。

表計算ソフト（Excel）に計算させるレベルでは、二項分布を使おうが[69]、正規分布を使おうが[70]、ドラッグして引数を代入するだけから、実をいうと、大して変わりはない。

では、どうして二項分布を正規分布に置き換えるのか。その意義について考えてみよう。

§28　二項分布 *B* (*n, p*)

二項分布 ${}_nC_x\ p^x q^{n\text{-}x}$ は、試行回数 n を決めていれば、正規分布と同じように、たかだか一項関数 $P(x)$ で表される[71]。だが、関数 P も変数化するなら、$B\,(n, p)\,(x)$ と書き換えられよう。つまり、試行回数 n と問題事象の確率 p が、二項分布の関数 P を決定するワケだ。

統計学の本では、この関数部分を取りだし、$B\,(n, p)$ と表記されることが多い[72]。

§29　正規分布 *N* (*np, npq*)

では、正規分布 $\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$ の関数 も、$N\,(n, p)\,(x)$ と書き換えるべきか。

べつにそれでもよいのだが、正規分布に限っていえば、$N\,(np, npq)\,(x)$ が好まれる。関数部分を取り出され、$N\,(np, npq)$ と表記される[73]。

§30　*np* = *m*

二項分布は $B\,(n, p)$ と表記し、正規分布は $N\,(np, npq)$ と表記する。なぜ、そんな区別をするのか。そこに、二項分布を正規分布に置き換える意義（§27）が隠されている。

焦点は $N\,(np, npq)$ である。この np と npq という変数に注目しよう。

まず、np から説明しよう。

もともと n は試行回数、p はサイコロが１の目を出す確率だった（§23）。しかし、統計学では常識として、np で、平均（mean）が意味される[74]。直接的には（平均は）、m で表される。

平均 m は、ここでは、期待値（expectation）のことである[75]。値踏み（estimate）のイメージからかけ離れているが[76]、しかしこれも、統計学では常識である[77]。

期待値 m は、ふつう $\sum_{i=0}^{n} x_i p_i$ で算出される[78]。二項分布の場合、二項法則（14）により、$\sum_{x=0}^{n} x \times {}_nC_x\ p^x q^{n-x}$ となる。

純粋に数学的な操作により、$\sum_{x=0}^{n} x \times {}_nC_x\ p^x q^{n-x}$ は、np に還元される（証明略）[79]。

§31　分散 σ^2

以上で $np = m$ が示された。今度は、npq を解説しよう。これは、分散（variance）を表す。

第 1 章で、分布とは「分数の散らばり」だと言ったが、分散はまさに、その散らばりの指標[80] になる。

21　分散[81)]　$\sigma^2 = \frac{(x_1-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2}{n}$

これが一番わかりやすい定義である（二項分布など一旦、脇に置いて理解するのがよい）。

n 個のデータ $x_1, \ldots, x_n$ が得られたとき、それらの散らばりを捉えたいなら、まず軸として平均値 m を据え、そこからの距離 $x_i - m$ を出し（いわゆる偏差 deviation）[82)]、データの数 n で割ってやればよい。

n で割る、というのは、ふつうに平均をだすときの発想 $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ と同じである。

なぜ二乗（$x_i - m)^2$ するのか、と問われれば、$x_1 < m$ の場合、つまり差（偏差）がマイナスになる場合、二乗してプラス化したいからである（さもなければ分散が指標として、うまく機能しない）。

二乗しているので、分散は σ^2 で表す。二乗を元に戻すために $\sqrt{\sigma^2}$ とルートを施せば、標準偏差（standard deviation）になる。これは、σ で表される。

§32　*npq* = σ^2

正規分布 $N\,(np, npq)$ にある npq は、この分散 σ^2 を表す。理解するには、まず、分散（21）を再定式化しなければならない。

22　分散[83]　$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{n}(x_i - m)^2 p_i$

21 ⇢ 22 は、丁度、平均 $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ ⇢ 期待値 $\sum_{i=0}^{n} x_i p_i$ という再定式化に対応している（§30）。出だしの x_1 が x_0 になっているのを嫌がるひとも居るだろうが、p_i で並行して数えているから問題ない。

二項分布を考える限り、二項法則（14）より、分散 22 は、$\sum_{x=0}^{n}(x-m)^2 \times {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$で算出される。

純粋に数学的な操作により、$\sum_{x=0}^{n}(x-m)^2 \times {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$ は、npq に還元される（証明略）[84)]。

第 8 章　統計学へ

$np = m$ と表される平均，$npq = \sigma^2$ と表される分散．これを使い，正規分布 $N\,(np, npq)$ は，$N\,(m,\sigma^2)$ と書き換えられる．

§33　*N* (*m*, σ^2)

$np = m$（平均）、$npq = \sigma^2$（分散）。これが、正規分布 $N\,(np, npq)$ の意味になる。$N\,(m,$

σ²) と書き換えてもよい。

これにより、確率論に留まる二項分布 $B\,(n, p)$ から、統計推論に思考がシフトする。このシフトこそ、二項分布から正規分布への移行に意義をあたえる当のものである（§27）。

§34　統計学の考え方

二項分布では、未来を予測していた（§16）。或る意味、その未来は確定していた。サイコロ投げを 6 回やったら、1 の目が 2 回出る確率は約 20 パーセント。それは、事象発生を 100％ 確約しないけれども、「そうだからそうだ」という確定的な真理である（数学的な、という意味で）。しかし、「本当に（1 の目が出る確率は）$\frac{1}{6}$ なのか」と、その真理に切り込むのが、統計学なのである。

§35　グラフの変化

統計学をイメージするために、こんな実験をやってみよう。

二項分布 $P(x) = {}_nC_x\ p^x\ q^{n-x}$ で変化するのは n だけである。それに対し、p すなわち「1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である」は決まっている。

そこで n を変化させると、二項分布のグラフは倒れ込んでゆく（17)。

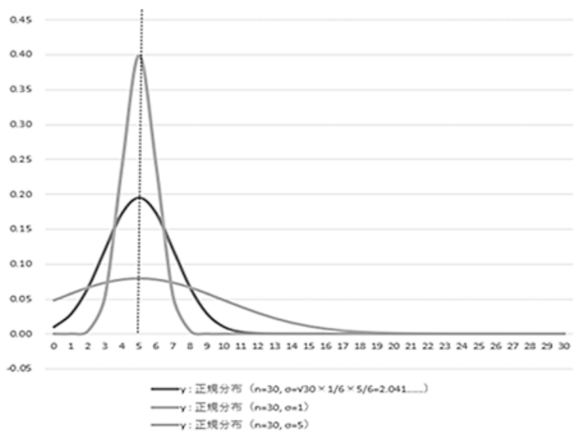
だが､その「倒れ込み」は統計学では起こらない。なぜなら､グラフが倒れ込んだところで､つまり $n \to \infty$ から､統計学は始まるからだ（18 ①)。n は実質的に変数と考えられていない。

倒れ込んだかたちを、釣鐘状と呼んでいた（§21)。釣鐘状のグラフを変化させるのは、p と、その従属変数 q しかない[85)]。

若干イカサマになってしまうけれども[86)]、この独立変数 p を変化させることにより、$npq = \sigma^2$ が変化するとしよう（§32)。p の変化が「本当に（1 の目が出る確率は）$\frac{1}{6}$ なのか」という統計学の問いに対応する（§34)。

p は $\frac{1}{6}$ 以外の値を取る。その結果、分散 σ^2 が変化する。そう考えると、正規分布 $N\,(m, \sigma^2)$ のグラフに面白い変化が起こる。

23　分散 σ²（標準偏差 σ）の変化[87)]



どうだろう。σ が低くなれば、データの散らばりが抑制され、σ が高くなれば、データの散らばりが緩和される。

§36　平均が頂点であること

確率論から統計学に移行したとき、思い描かれるのは、こういったグラフの変化である（23）。それは、二項分布では確定していたはずの未来（§34）を変化させる。

ところで、このグラフ（23）には面白い特徴が、ひとつみつけられる。

平均 m が、頂点になっているのだ。

平均 m 自体、ついさっき $np = m$ として導入したばかりだから（§30）、それが頂点になるなんて考える機会もなかった。だが、二項分布（17）の時点で、頂点であることが確かめられてしまう。

表 16 で確認してもらいたい。$6 \times \frac{1}{6} = 1$（16 ①）。$12 \times \frac{1}{6} = 2$（16 ②）。$30 \times \frac{1}{6} = 5$（16 ②, ならびに上掲 23）。確かに、頂点になっている（17）。

どうしてそうなるのか。それは、（二項分布の極限である）正規分布の関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$ から読み取れる（18 ②）[88]。

余分なところを削ぎ落すと、正規分布は $y = e^x$ という指数関数になっている。しかも x の引数はマイナスなのが、$-\frac{(x-np)^2}{2npq}$ により運命づけられている[89]。

この定義域（引数が必ずマイナス）において、指数関数 $y = e^x$ が最大値を取るには、$x = 0$ とするしかない[90]。これは指数を $-\frac{(x-np)^2}{2npq}$ としたとき、$x = np = m$ を意味する。だから、平均（期待値）m で正規分布の関数は、最大値（頂点）になるのだ。

第 9 章　標準正規分布

結構ながながと正規分布について論じてきてしまったが（第 6 章～），総仕上げとして，最後，その標準化を述べておきたい．

§37　左右対称

正規分布 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ のグラフ[91] をみてもらった（23）。頂点が平均 m に来る（§36）。釣鐘状のかたちをしている（§21, §35）。

左右対称（symmetry）に関していえば、たとえ y 軸（$x = 0$）で区切られていても、x 軸は左右無限に伸びているから、実際のところ、それ（左右対称）は、すでに実現している。

だが、中心を 0 のところに持って来たい。最後、それに取りかかろう。

§38　標準化

釣鐘状グラフの左右対称の軸を、y 軸（$x = 0$）のところに持って来たい。それは「グラフの移動」[92] とは少し違った話で、標準化（standardization）と呼ばれる[93]。

標準化は、正規分布 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ で、x を $z = \frac{x-m}{\sigma}$ という新たな変数（変量）で置き換えることによって遂行される[94]。この「置き換え」は、代入というよ

り、x を、変量[95] として m 減らし、さらに σ で割る、という操作だと考えるのがよい。

その結果、$N(m, \sigma^2)$ で代理されていた正規分布の関数 $f(x)$ が、今度は $N(1, 0)$ で代理される関数 $h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ になる[96]。

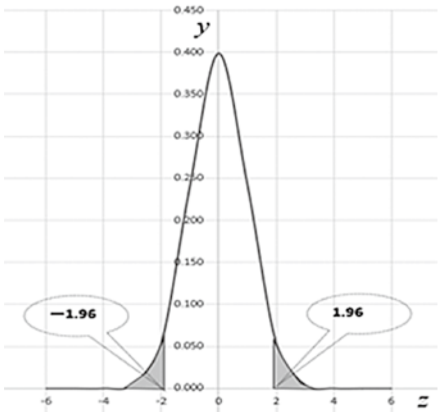
§39　視覚化

こうして得られるのが、標準正規分布（standard normal distribution）である。

24　標準正規分布 $N(1, 0)$

① 関数　$h(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

② グラフ



③ 表

	A	B
1	z	y
2	-6	0.000000
3	-5	0.000001
4	-4	0.000134
5	-3	0.004432
6	-2	0.053991
7	-1	0.241971
8	0	0.398942
9	1	0.241971
10	2	0.053991
11	3	0.004432
12	4	0.000134
13	5	0.000001
14	6	0.000000

この標準正規分布こそ、統計推論にいたる最後のステップになる。

第 10 章　統計推論

標準正規分布を手に入れた．では，本稿における元々の課題，統計推論とはなにかを説明しよう．

§40　検定

統計推論とはなにか。これが、本稿の問いだった（§1）。

次のように考えるのがよい。二項分布は、統計学というより、確率論の一部である（第 4 章）。未来は、決定している（§34）。だがそれは、スベスベした数学の話にすぎない。

実際にサイコロ投げをしたとき、「この」サイコロが $\frac{1}{6}$ の確率で 1 の目を出す保証はどこにもない。

「この」サイコロだからだ[97]。

だから統計学は、「本当に 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ か」と問うた（§34）。

デコボコした予測のつかない現実を相手にする。それが統計学であり、統計推論である。その際、持ちだされるのが、検定（statistical test）という考え方である。

§41　仮説

二項分布の大前提になっている確率（サイコロの 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である）。これが、統計推論では疑われる。

その際、持ちだされるのが、検定という考え方である（§40）。

検定において、「サイコロの 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である」という自明の前提（確率）は、たかが仮説（statistical hypothesis）に貶められる。

25　**仮説**　このサイコロが 1 の目を出す確率は $\frac{1}{6}$ である.

くり返すが「この」サイコロだから、仮説になる。そして検定される。

§42　母集団

仮説とみなされた確率。それは一体、なんだろう。ひとつの見方として、それは、母集団（population）についての言明といえる。

サイコロ投げにおいて母集団なんかあるのか、と問い返されそうだが、試行（trial）を考えればよい。

26　**母集団**　$\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$

c_i は個体定項で、帰納論理とおなじく、出来事を表す（§11）。「このサイコロを投げた i 回目」といった出来事である。それは紛れもなく、試行だ。但し、統計推論を考える限り、この点の技術的な（つまり記号論理的な）側面を理解する必要はない。

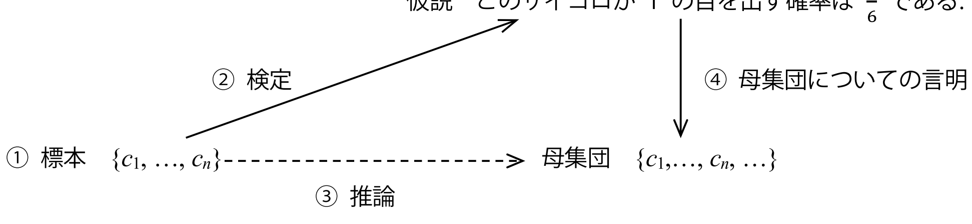
§43　統計推論とはなにか

実際にサイコロ投げをして得られた観察結果は、母集団（28）に対して、標本（sample）になる[98]。

帰納論理で、事例個別分布 e_i と事例統計分布 d_i を取りあげたが、それらはまさに、この標本を示していた（8, 11）。

まとめよう。

27　**統計推論**



実際に試行をして、標本を得る（①)。それに基づいて、仮説を検定する（②)。それを介し、間接的に、母集団（この場合は、無限のサイコロ投げのありさま）を推論する（③)。(④ は §48 で扱う。)

第 11 章　検定

統計推論の全体像を摑んだところで（27), 実際に検定をやってみよう.

§44　あり得ないところ

x 軸（横軸）にマイナスが現れたからといって、標準正規分布（24）のルーツは、依然として、サイコロ投げにある。つまり、30 回の試行で 0 回 1 の目が出た、1 回 1 の目が出た …… 。これを刻んでいるにすぎない。

そう考えると、「この」サイコロで 1 の目が出る確率が だと考えるとき（25)、正規分布で、山の裾野にあたるところは「あり得ない」ところになる（一旦正規分布に戻り 19, 20 で確かめてほしい)。そこに、検定のラインが引かれる。

§45　棄却域

検定のラインが引かれるところを、棄却域（rejection region）と言う。「域」と言われるのは、0 回だと（それ以下がないから）ピンと来ないが、10 回が「あり得ない」なら、11 回、12 回、…… 30 回もあり得ない（正規分布に戻って 19, 20 で確かめてほしい)。そんな幅のことを「域」と言っている。

§46　有意水準

この棄却域だが、比較的優しく「総和が 5 %」と決められている。これを、有意水準（significance level）と呼ぶ。

総和のイメージは、すでにグラフ 24 ② に描き込んでおいた。表 24 ③ でもグレーで塗りつぶされている。

塗りつぶした部分の総和は、積分で求められる。その結果が 0.05（5%）になればよい[99]。

表 24 ③ ではグレーの部分が 0.053991 から始まってしまっているけれども（つまり、すでに 0.05 を超えている)、これは 2（セル A10）だからで、1.96 からだと上手く納まる[100]。

そういうワケで $z = \pm 1.96$ が検定ラインになる。

§47　実践

実際に問題を解いてみよう。統計推論の問題である（ここが、本稿のクライマックスになる)[101]。

28　問題　30 回試行をして 1 の目が 10 回出た. 仮説 25 は正しいか.

$\frac{1}{6}$ と言っているのに（25)、10 回も出たら $\frac{1}{3}$ になってしまう。あからさまにおかしい。では統計学は、どんな判定をするのか。

29　解答 ①　有意水準 5% において, 標準正規分布における棄却域は（グラフ 24 ②で塗りつぶしたとおり), $z \leq -1.96$ あるいは $+1.96 \leq z$. 言い換えると, $|z| \geq 1.96$.

②　①より, $|z| \geq 1.96$ を求める.

③　標準化（§38）を元に戻し, $\left|\frac{x-m}{\sigma}\right| \geq 1.96$.

④　$n = 30$（試行回数). $p = \frac{1}{6}$ で $q = \frac{5}{6}$ とすれば（25), $m = np = 30 \times \frac{1}{6} = 5$（§30). $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} \fallingdotseq 2.041$（§31).

⑤　④ を ③ に代入し, $\left|\frac{x-5}{2.041}\right| \geq 1.96$

$\Longleftrightarrow \frac{x-5}{2.041} \leq -1.96 \vee 1.96 \leq \frac{x-5}{2.041}$　［絶対値を含む不等式の解法］[102)]

$\Longleftrightarrow x-5 \leq -4 \vee 4 \leq x-5$　［4 は概数］

$\Longleftrightarrow x \leq 1 \vee 9 \leq x$　［正規分布でみた棄却域］

⑥　⑤より, 試行 30 回だと, 1 の目が出る回数が 1 以下, あるいは 9 以上だと, 仮説 25 は棄却されることになる.

⑦　⑥ より, 10 回も 1 の目が出てしまった場合, 仮説 25 は棄却される. ■

これで統計推論完了になる。

第 12 章　カルナップの反応と帰納論理への招待

以上が統計推論の考え方である. それに対するカルナップの反応をみて, 本稿を閉じることにしたい.

§48　直接推論

以上で本稿のねらい、統計推論を説明し終えた。最後に（第 2 章で触れた）帰納論理が、それを、どう受け取ったかをみてみよう。

カルナップは、統計推論に対し「それは、直接推論でないか」と反論した[103)]。

直接推論（direct inference）とは、母集団から標本を推論するもので、一見、統計推論の「推論」とは逆方向にみえる（27 ③)。

しかしながら、統計推論の実態は、仮説から母集団に、下降する推論（downward inference）なのである（27 ④)[104)]。

§49　仮説のその先

つまり、統計推論では、母集団がなにかということが、すでにわかってしまっている。

帰納推論（inductive inference）では、少数の標本から、無数の母集団へと推論がなされ

る[105]。統計推論も、そういうものでなければならない。

「いや、母集団については、仮説（25）を立てただけで、それがなにかは、わかっていないのだ」と統計学者は反論するだろう。

しかし「なぜ（サイコロ投げで 1 の目が出る確率は）$\frac{1}{6}$ とわかったのか」とカルナップは再反論するはずだ。

統計学者は、二項分布が前提している確率論を問うた。「本当に 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ なのか」と（§34）。

帰納論理は、しかし、そのうえをゆく。「なぜ $\frac{1}{6}$ とわかったのか」と問うのだ。

§50　むすび

帰納論理の問いは、サイコロ投げのような場面を考える限り、くだらないものにおもえるかも知れない。だがそれは、きっとサイコロ投げだからである。

もっとゴツゴツした現実を考えてほしい。たとえば「あそこに駐車して警察に捕まる確率は、どのくらいか」[106]。路上駐車なんて場面には、サイコロ投げの $\frac{1}{6}$ のような、お誂え向きの答えが存在しない。

統計学は、デコボコした「この」サイコロを扱うことで、現実に向かった（§40）。

帰納論理は、それよりもさらに摑みどころのない、デコボコした現実に向かうのである[107]。

注

1） カルナップの帰納論理として，本稿では，初期体系（the earlier system）を述べた『確率の論理的基礎』のみが念頭に置かれる（Carnap 1962; see also Kaneko 2012c, intro.）．帰納論理は，その後それなりの発展があったけれども（金子 2022, app.14），筆者は『確率の論理的基礎』こそ，原点にして頂点だとみている．

2） 以下，筆者（author というより contributor）で，本稿著者の金子裕介のみを指す．

3） 金子 2022．筆者と，カルナップの帰納論理との付き合いは，かなり長い（Kaneko 2012a; Kaneko 2012b; Kaneko 2012c）．

4） 統計的推測（小平ほか 1993, pp.111f.）など，さまざまな呼び方がされる．

5） 統計推論に対するカルナップの考えは，直接推論にみいだされる（§48）．ちなみに，統計推論は，帰納論理内で処理できる（Carnap 1962, pp.150-154, pp.498f.; Kaneko 2012c, sec.11）．このことは，あまり知られていない．

6） ようするに「文系のための」という意味である．このため，参考文献なども，高校の範囲を中心に復習できるように配慮しておいた．この点で，拙稿（金子 2017; 金子 2018），拙著（金子 2019; 金子 2021）と意図はおなじである．

7） 節番号（§）は，章が変わっても継続して数えられる．また参考文献の節は sec.，本稿内の節参照は § を使う．こういった点は，本稿末尾の参考文献のところに箇条書きでまとめておいた．

8） 小平ほか 1993.

9） 松坂 1990b.

10） 確率や統計にまつわる時制（過去，現在，未来）については，§16 以降で，ふり返って論じられる．

11） 後に確率密度関数を考えるようになったとき，実数全体に話を及ぼさねばならないけれども（§25）.

12） 全数調査（complete survey）のみを念頭に置き，標本調査（sampling survey）は考えていない（小平ほか 1993, pp.112-113）.

13） 分数化されない，生（なま）の数データは，変量（variable）と呼ばれる（小平ほか 1993, p.58; チャート研究所 2012a, p.248）．変量は，表 1 にみられるとおり，y のみならず，x についても言われることに注意（op.cit）．ちなみに，一般に数学で使われる変数（variable）と，この「変量」なるものを区別する必要はないだろう．後に，標準化の操作を目の当たりにすれば，このことはよくわかる（§38）.

14） チャート研究所 2012a, p.249, p.255.

15） 小平ほか 1993, p.59．量子力学における波動関数の値も（金子 2017, p.181 fig.25），発想において，表 1 と変わりない.

16） 小平ほか 1993, p.59．度数／頻度（frequency）として，相対頻度（§3）を用いているから，相対度数分布（表）．小平ほか 1993, p.61 参照.

17） 階級（class）とは, 152-156（152cm から 156cm という意味）と表記される幅のある変量（注 10）．小平ほか 1993, pp.58-59 参照.

18） 階級値（class value）とは，たとえば表 1 のセル A2 で言えば，$\frac{152+156}{2} = 150 + \frac{2+6}{2} = 154$cm. 階級の真ん中の値，と理解すればよい．小平ほか 1993, p.59 参照.

19） 注 10 で述べたとおり，全数調査なので 1+3+9+11+9+3+4=40．つまり，分子の総和が分母になる.

20） 列（column）で縦方向を意味する.

21） 小平ほか 1993, p.60.

22） 座標平面（coordinate place）とは，中学高校で習う x 軸 y 軸を使った慣例的表記法のことであり，誰でも知っている．$x-y$ 平面（x-y plane）とも呼ばれる．松坂 1989b, p.213 参照.

23） 小平ほか 1993, p.61.

24） 第 2 章で，特に，そのように（棒グラフが一番統計らしい表現であると）考える.

25） 小平ほか 1993, p.61.

26） 横に t として時間軸をとり，縦に基準点からの位置 x を記した，物理学の基本的な記録形式（金子 2018, p.160 n.53）.

27） 本章は帰納論理の知識を，或る程度，前提している．金子 2022 の内容を先取りしている箇所もある.

28） §4, §6, 注 16 参照.

29） カルナップも統計への関心をもっていたから，この問い（階級値を帰納論理で捉える etc.）は、おかしな話でない．注 5 も参照.

30） 事態（a state of affair）は, ここでは筆者独自の用語と理解してほしい．カルナップの用語だと, 性質（quality ／ property）．Q 性質（Q-property）なるジャーゴンに見受けられる（Carnap 1962, p.124）.

事態にせよ，性質にせよ（カルナップ自身，誤認したことであったが），文法（構文論）概念にすぎない（金子 2022, sec.123）.

事態という言葉が有名になったのは，ウィトゲンシュタイン（Ludwig Wittgenstein 1889-1951）の『論理哲学論考』（以下『論考』）に負うところが大きい．彼によれば，事態（独 Sachverhalt）とは，要素文に対応する実在世界の要素だった（Wittegenstein 1918, 2, 4.25; 金子 2019, p.188 n.10）．それが英訳され，a state of affairs（事態）になった（黒崎ほか 1995, p.222）.

今日，事態が語られるとき，多かれ少なかれ，このウィトゲンシュタインの事態を，ひとは念頭に置いている．

ウィトゲンシュタインの言う「事態」と，筆者の言う「事態」は，しかし，以下の二点で異なる．

一点目．ウィトゲンシュタインは事態を，要素文，現代論理学の用語でいえば，原始文（primitive sentence）Fc に対応するものと考えていた（Wittegenstein 1918, 2, 4.25; 金子 2019, p.188 n.10）．それに対し，筆者は事態を，複合論理式 $F_1a\wedge\neg F_2a$ の別名と考える．つまり，要素文（ウィトゲンシュタイン）と，複合論理式（筆者）の違いがある．

二点目．ウィトゲンシュタインによれば，事態は，実在世界の要素である．だが筆者は，複合論理式 $F_1a\wedge\neg F_2a$ の別名以上のものと考えていない．つまり，実在性（ウィトゲンシュタイン）と，非実在性，すなわち，ただの文法ないし構文論の概念（筆者）の違いがある．

後者（二点目）に関していえば，論理学に対する筆者のスタンスが反映されている．すなわち，論理学に実在を語る資格はない．ウィトゲンシュタインの写像理論は間違いである（金子 2019, p.321）．意味論は，シミュレーションにすぎない（金子 2019, p.11，p.62，p.108）．

31）　複合論理式（compound formula）については，金子 2021, sec.99（79 ⑱）で学んでもらいたい．

32）　路上駐車なので，逮捕されることはなく，反則切符を切られるだけである．なので「捕まった」という表現は，本当は不適切．だが，こういったディテールは，金子 2022 で消化されている．

33）　一項述語という述語論理の表現（金子 2021，sec.91）．出来事が主語だったり，「あそこ」など文脈依存表現があるけれども，金子 2022 で消化されている．

34）　Carnap 1962, p.125; Kaneko 2012c, p.778.

35）　本当は，以下①②いずれかが形式的に正しい．だが，ここでは，わかりやすい表現方法を選んだ．

①　「Q_1a」で「$F_1a\wedge F_2a$」という複合論理式を表す．［構文論上のメタ言明］

②　$\forall x\,(Q_ix \longleftrightarrow F_ix \wedge F_2x)$　［公理としての定義］

36）　Q 述語の意味については 5 に従う。

37）　ふつう個体定項では，太郎，ポチ，このリンゴといったモノが表されるが，筆者の帰納論理では，コト（出来事）が意味される．この点については，金子 2022（lect.37）で詳述している．

38）　分布は分数で表される，という見方を前半（§3）に採用したけれども，帰納論理の事例数も，母集団で割れば，即座に分数化（つまり，相対頻度に）できる．こういったディテールは，金子 2022 に譲る．

39）　Carnap 1962, p.111; Kaneko 2012c, p.783．カルナップは事例個別分布 e_i を定義する際，連言肢を Q 述語に留めず，一般的な論理式 Φ（彼の言葉では分子述語）にまで拡張していた（op. cit）．だが，帰納論理の用途を考えるにつけ，そこまで拡張する必要はない，というのが筆者の意見である．

40）　Q 述語の数についてであるが，一般に，言語に n 個の述語 F_1，...，F_n がある場合，2^n 個の Q 述語が作られる（Carnap 1962, p.126; Kaneko2012c, p.779）．証明は 5 から予想できるが，くわしくは，金子 2022 に譲る．

41）　内井惣七（1943-）が帰納論理を輸入したとき，individual distribution は「個体配分」と訳された（内井 1972, p.66; 内井 1974, p.60）．だが，いま考えると，あまり適切な訳ではない．

まず「個体」としては c_1，c_2，... で表される事例が考えられるが，本文で述べたとおり（§11），それは出来事であってもよい．出来事は「個体」と呼ばない．

また「配分」なんていうと，確率配分（probability assignment）と言われるように，関数が連想される（内井 1972, p.59; 内井 1974, p.43; Uchii 1974, p.268; Uchii 1972, p.165）．しかし，

distribution で欲しいのは関数でなく，（第 1 章にまとめた）分布のイメージである．

42） 松坂 1990b, p.706; Carnap 1962, p.158; Kaneko 2012c, p.784.

43） Carnap 1962, pp.108f., pp.158-160; Kaneko 2012c, p.782, p.784.

44） Carnap 1962, pp.159-160; Kaneko 2012c, p.784.

45） 事例統計分布という訳についても，注 39 と同じ考え方をする．

46） 確率論思考に時制（過去，現在，未来）がどうかかわるかについては，カルナップ的視点で，金子 2022, lect.42 でも論じている．

47） 小平ほか 1993, p.77．後の注 54 も参照．

48） 高校数学の範囲である（チャート研究所 2012a, p.340）．重複試行は，独立事象（independent occurrence）であることも含む（小平ほか 1993, pp.48-49; 松坂 1990b, pp.779-781）．ちなみに，ここら辺の英語表現は，定まっていない（independent occurrence も筆者独自の表現）．さしずめ，重複試行が duplicate trial，反復試行が repeated trial といったところか．無論，両者は同義．

49） 「ほぼ等しい」を表す記号に，国際的な取り決めはないようにみえる．日本では ≒ だが（笹部ほか 1970, p.610），海外では ≅ をよくみかける（Carnap 1962, p.150; 金子 2018, n.36）．

50） §2 で触れたとおり，確率の初歩的な問題は，中学生でも解ける．たとえば，コイン投げ 2 回で 2 回とも表が出る確率は，$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$．こういった計算にも，しかし，ラプラス的な先入見がある．金子 2022, app.1 で扱った．

51） チャート研究所 2012a, p.340; 松坂 1990b, p.781; 小平ほか 1993, p.49.

52） Carnap 1962, p.499; Kaneko 2012c, p.783．カルナップが名づけ親とまでは言わない．笹部ほか（1970, p.594）は，二項確率と呼んでいる．

53） チャート研究所 2012b, p.11; 松坂 1990b, p.725; 笹部ほか 1970, p.594.

54） 前注 51 におなじ．

55） 小平ほか 1993, p.95.

56） 確率分布（二項分布）は、ふつう、この度数分布（16）のかたちで表される（小平ほか 1993, p.77）．しかし本稿では，第 1 章で紹介した分布の形式全部を，確率分布と呼ぶ．また表 16 では小数を使っているけれども，計算式（14）から，分数で表されることはあきらか．

57） 「確率」分布だから，$P(x) = {}_6C_x\ p^x\ q^{6-x}$ と表してしまうのも手である（6 は任意の定数）．笹部ほか（1970, p.606）がやっている表記なのだが，正規分布に関数 $f(x)$ が与えられ（18 ②），標準正規分布に関数 $h(x)$ が与えられることを考えると（24 ①），実際，理に適っている．

58） §40 参照．

59） 小平ほか 1993, p.95.

60） 小平ほか 1993, p.100; see also Carnap 1962, p.255．後に触れられることだが（§36），釣鐘状の正体は $y = e^{x^2}$ という二次の指数関数である．

61） P は広く確率関数を表すべきだろうが，本稿に限り，注 55 に倣い，二項分布固有の関数表現として，$P(x)$ を使う．

62） 笹部ほか 1970, p.610.

63） 笹部ほか 1970, pp.609-610 参照．至極丁寧な証明で，それ以上付け加えることはない．

64） 小平ほか 1993, p.99.

65） 松坂 1989a, p.5; 英語で dense（ぎっしり，高密度）という意味である．

66） 連続型確率変数と呼ばれる（小平ほか 1993, p.98; チャート研究所 2012b, p.578）．

67） 二項分布を $P(x)$ で表すのは，§22 以来の取り決めによる．

68） 離散型確率変数と呼ばれる（小平ほか 1993, p.98; チャート研究所 2012b, p.578）．

69） Excel 関数では，表 16 ③の形で（A の列で「回」を取り除くこと），セル B2 に =COMBIN（n, A2）*POWER（1/6, A2）*POWER（5/6, n-A2）と打ち込み（n は予め決めた試行回数の定数を入れる），出てきた値の存在する B2 から下にドラッグすればよい．

70）　Excel 関数では，表 19（A の列と B の列のみ使用，但し A の列で「回」を取り除くこと）で，セル B2 に =NORM. DIST（A2, n*（1/6），SQRT（n*（1/6）*（5/6）），FALSE）と打ち込み（n は予め決めた試行回数の定数を入れる．FALSE は確率密度関数の指示），出てきた値の存在するセル B2 から下にドラッグすればよい．

71）　注 55，§22 参照．

72）　小平ほか 1993, p,94.

73）　小平ほか 1993, p,104.

74）　いわゆるデータ代表値の話である．平均（average でも mean でもよい）のほかに，中央値（median），最頻値（mode）がある（チャート研究所 2012a, p.248; 小平ほか 1993, p.72）．

75）　笹部ほか 1970, p.606; 小平ほか 1993, p.81; チャート研究所 2012b, p.555.

76）　金子 2022, sec.30.

77）　小平ほか 1993, p.81.

78）　注 73 におなじ．

79）　還元は「計算でそうなる」程度で，深い意味はない．証明は，笹部ほか（1970, p.607）が完璧である．他は結構ゴマかしている（小平ほか 1993, p.96; チャート研究所 2012b, p.575）．全部書いても読者に伝わらない，という判断なのだろう．

80）　指標（index）とは，特に数学的な概念ではなく，「基準のないものを数値化して捉えられるようにしたもの」と理解すればよい．GDP など経済指標が有名．

81）　チャート研究所 2012a, p.255.

82）　チャート研究所 2012a, p.255.

83）　チャート研究所 2012, p.557.

84）　還元は「計算でそうなる」程度で，深い意味はない．証明は，笹部ほか（1970, p.607）が完璧である．他は結構ゴマかしている（小平ほか 1993, p.96; チャート研究所 2012b, p.575）．全部書いても読者にはわからない，という判断なのだろう．

85）　従属変数（dependent variable）とは，$y = f(x)$ における y のこと（松坂 1989b, p.210; 松坂 1990b, p.795）．この場合は，$q = 1 - p$ で，q は p の従属変数．p は独立変数（independent variable）．すぐにわかるとおり，独立と従属の区別は，話の脈絡によるもので，数学的には決まらない．$y = 2x$ だったら，$x = \frac{1}{2}y$ とすればよいからだ．

86）　先取りして言うと，$m = np$ が一定であるため（§36），p と同時に n も変化させねばならない．しかしながら，ついさっき（§35 四段落目），n は一定 $n \to \infty$ と言ったばかりである．だから，この話（§35）は若干イカサマめいている．だが，統計学の説明で，そういった細部は大抵，無視される（小平ほか 1993, p.100）．m や σ^2 を，すでに独立した変数とみなしているからだろう．

87）　小平ほか 1993, p.100．前注 84 で指摘した点に，ここ（小平ほか 1993, p.100）では，とくに説明は加えられていない．

88）　二項分布（17）は，本質的に数列（sequence）であり，数列について，頂点やら最大値ということは言わない（チャート研究所 2012b, pp.470f.; チャート研究所 2013, pp.142f.; 松坂 1990a, pp.573f.; 松坂 1990b, pp.637f. ）．

89）　正規分布の関数の x と，指数関数の x を区別して述べているところに注意．

90）　指数関数のグラフ（右上がり曲線）を作り，自分の目で確かめるのがよい（チャート研究所 2012b, p.242）．

91） §30〜§31 で説明したとおり，$N(np,\ npq) = N(m, \sigma^2)$ となるから，関数も $\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ と言い換えられる．

92） 二次関数 $y = ax^2$ で，x 軸に p，y 軸に q 移動させると，$y = a(x-p)^2+q$ になる，という話が有名（松坂 1989b, p.220; see also 松坂 1990a, p.555）．

93） 小平ほか 1993, p.87.

94） このため標準正規分布の関数は $h(z)$ と，変数を z に徹底すべき．チャート研究所（2012b, p.581）は，それをやっている．小平ほか（1993, p.101）は，やっていない．

95） 注 11 参照．

96） 数学的証明は，笹部ほか（1970, p.613）が丁寧に述べている．

97） それに対し，二項分布や確率論は「ラプラス的サイコロ」を扱っているといえる．この点については，金子 2022, app.1 で論じている．

98） 小平ほか 1993, p.112; Carnap 1962, p.207.

99） 正規分布表（standard normal table）を使う．どこにでも載っている（チャート研究所 2012b, p.643; 小平ほか 1993, p.143; 笹部ほか 1970, p.877）．

100） 正規分布表（前注 97）を使って目で確かめてもらうことになるが，$0 \leq z \leq 1.96$ の区間の確率の総和は 0.475．これは積分結果なので ≤ のままでよい．（笹部ほか 1970, p.877; 松坂 1990c, p.984; 松坂 1990b, p.796）．

$0.475 \times 2 = 0.95$．標準正規分布の釣鐘状のなかは，確率の総和を示すから $1.1 - 0.95 = 0.05$ で有意水準．小平ほか 1993, p.131, p.143 参照．

101） 以下の設問は，小平ほか 1993, p.131 例題 1 に倣っている．

102） チャート研究所 2012a, p.55，p.64 参照．$\vee$ は選言（あるいは）．

103）『確率の論理的基礎』の見解だが，カルナップ自身の議論は，よく読むと安定していない．彼は当初，統計推論を，標本から母集団への逆推論（inverse inference）であると熱弁したのだが（Carnap 1962, pp.207-208），その後，逆推論に（カルナップが）あたえた定式化は乏しいものだった（Carnap 1962, p.570 E）．

二項法則（Carnap 1962, p.499），標準正規分布（Carnap 1962, p.504）といった統計推論の道具立ては，結局，直接推論として定式化された（Carnap 1962, p.567 B）．つまり，熱弁に反し，カルナップは，統計推論を直接推論とみなしていたのである（Kaneko 2012c, sec.14）．

104） 内部推論（internal inference）とも呼ばれる（Carnap 1962, p.207）．

105） 若干異なるが，金子 2022, ch.9, app.17 も参照．

106） 実際，帰納論理で取りあげた場面である（§9）．

107） くわしくは，金子 2022 を読んでもらいたい．

参考文献

参照上の注意

① 参考文献内の節は sec. で参照し，本稿内の節は § で参照する．

② 参考文献内の注は n. で参照し，本稿内の注は 注 で参照する．

③ app. は，appendix（付録）の省略．

④ lect. は，lecture（第 講）の省略．

⑤ intro. は，introduction（イントロダクション）の省略．

邦語文献

内井惣七（1972）．「帰納論理学と確率」，『哲学研究』第 523 号，京都大学．［漢数字で記されたページづけをアラビア数字に変えて参照する］
――――（1974）．「賭・確率・帰納法―主観主義確率論の基礎」，『人文学報』第 37 号，京都大学．
金子裕介（2017）．「文系視点で見た量子力学」，『TheBasis』第 7 号，武蔵野大学教養教育リサーチセンター．
――――（2018）．「文系視点で見た相対性理論」，『TheBasis』第 8 号，武蔵野大学教養教育リサーチセンター．
――――（2019）．『論理と分析―文系のための記号論理入門』，晃洋書房．
――――（2021）．『文系のための記号論理入門―命題論理から不完全性定理まで』，朝倉書店．
――――（2022）．『確率の哲学―因果論思考から帰納論理へ』，森北出版．
黒崎宏ほか（1995）．『ウィトゲンシュタイン小事典』第四版，大修館書店．
小平邦彦ほか（1993）．『確率・統計』改訂版，東京書籍．
笹部貞一郎ほか（1970）．『定理公式証明辞典』，聖文社．
チャート研究所（2012a）．『新課程　チャート式　基礎からの数学 IA』，数研出版株式会社．
――――――（2012b）．『新課程　チャート式　基礎からの数学 IIB』，数研出版株式会社．
――――――（2013）．『新課程　チャート式　基礎からの数学 III』，数研出版株式会社．
松坂和夫（1989a）．『数学読本 1』，岩波書店．
――――（1989b）．『数学読本 2』，岩波書店．
――――（1990a）．『数学読本 3』，岩波書店．
――――（1990b）．『数学読本 4』，岩波書店．
――――（1990c）．『数学読本 5』，岩波書店．

欧語文献

Carnap, R. (1962). *The Logical Foundation of Probability, 2nd ed.* Chicago U.P.
Kaneko, Y. (2012a). The Confirmation of Singular Causal Statements by Carnap's Inductive Logic. *Logica Year Book 2011*. College Publication。
------------ (2012b). Belief in Causation: One Application of Carnap's Inductive Logic. *Academic Research International, Vol.3, No.1.* SAVAP International.
------------ (2012c). Carnap's Thought on Inductive Logic. *Philosophy Study, Vol.2, No.11.* David Publishing Company.［編者の意向で, 例えば §3 と表される所は 3 とセクション記号が外されている. 本稿では sec.3 などと記して参照する］
Uchii, S. (1972). "Inductive Logic with Causal Modalities: A Probabilistic Approach." *Philosophy of Science Vol. 39, No.2.*
---------- (1974. "Inductive Logic with Causal Modalities: A Deterministic Approach." S*ynthese Vol. 26, No.2.*
Wittgenstein, L. (1918). *Tractatus-Logico Philosophicus.* Suhrkampf.