Wiskunde & filosofie

Nico Krijn & Manuel Nepveu

Drie filosofische gesprekken over wiskunde

Gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den haag.

Krijn, Nico en Nepveu, Manuel
..
Jaar: 2007
ISBN ..
NUR ..

Eerdere versies van de hoofdstukken zijn als een serie artikelen in de jaren 2004-2006 gepubliceerd in Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskunde onderwijs, een uitgave van het Freudenthal Instituut.

Inhoud:

Voorwoord

Voorwoord

Wanneer bezit je kennis? Als je iets gelooft dat waar is, en je bovendien van dat inzicht terecht zeker bent (je hebt namelijk geen kennis als je zo maar een gokje waagt, dat toevallig waar is). Dat is in ieder geval de definitie van kennis die centraal staat in de geschiedenis van de westerse filosofie. Echte kennis, iets echt weten, onderscheidt zich van het hebben van een mening, het opstellen van een hypothese, of ergens naar raden. Kennis is vast en zeker waar.

Het is dan ook niet verwonderlijk dat filosofen van de tijd van de oude Grieken tot nu de wiskunde hebben bestudeerd om zich te laten inspireren in hun wijsgerige bespiegelingen over de menselijke mogelijkheden tot kennis te komen. Als er immers iets vast en zeker is, is het wel de wiskunde. Wiskundige resultaten zijn niet zo maar gissingen of opvattingen, maar bewijsbare waarheden. Door het volgen van een bewijs kun je de juistheid en onbetwijfelbaarheid van een wiskundige stelling volledig inzien. Sinds de tijd van Plato en Aristoteles is het mathematisch redeneren daarom een lichtend voorbeeld geweest voor de filosofie.

Maar uit de tijd van Plato en Aristoteles dateren ook al de meningsverschillen over wat de wiskunde ons precies leert, en in hoeverre kennisverwerving in de wiskunde te generaliseren valt tot een leer over kennis in het algemeen. Kunnen we eigenlijk wel zeggen dat de wiskunde 'waar' is; en wat betekent dat eigenlijk? De gebruikelijkste manier om in de filosofie over 'waarheid' te spreken is als 'correspondentie met de werkelijkheid'. Maar over welke werkelijkheid hebben we het dan in het geval van de wiskunde?

Plato zegt hierover dat we in de wiskunde een mathematisch universum proberen te beschrijven, dat onafhankelijk van onze fysische wereld bestaat. We trachten in de wiskunde de wetmatigheden te ontdekken die in die andere wereld objectief aanwezig zijn. Aristoteles daarentegen vindt zo'n puur mathematische wereld onzin: er is volgens hem maar één wereld, de gewone wereld van de dingen om ons heen, en daarin zijn mathematische structuren gerealiseerd. Ondanks dit grote verschil zijn de klassieke filosofen het erover eens dat wiskundigen onafhankelijk van de mens bestaande absoluut zekere waarheden ontdekken. Die zekerheid is volgens hen mogelijk doordat de mens over een bijzondere intuïtie beschikt die het mogelijk maakt de waarheid van wiskundige basisprincipes onmiddellijk in te zien. We hebben als het ware een inwendig oog dat direct tot essentiële zaken kan doordingen. Het is dan verder een kwestie van logisch redeneren: uit een beperkt aantal van zulke als waar herkende principes, axioma's, kunnen stellingen worden afgeleid die even zeker zijn als de axioma's zelf.

De intuïtie als bonafide kennisbron, een innerlijk oog... Die manier van denken is in de nieuwere tijd heel wat minder populair dan bij de oude Grieken, al ontbreekt het ook onder nu praktiserende wiskundigen niet aan Platonisten. Een modern alternatief, dat het zonder zo'n onfeilbare intuïtie doet, is te zeggen dat de wiskunde helemaal niet 'waar' is; dat de wiskundige axioma's helemaal niet over een onafhankelijke werkelijkheid gaan. Volgens deze opvatting zijn wiskundige principes eerder zo iets als de regels van een door ons zelf bedacht spel. Dat is dan tegelijk de reden dat we zo zeker kunnen zijn van de axioma's: we bepalen ze namelijk zelf. Het is zoals bij het schaakspel. We kunnen er absoluut zeker van zijn dat de loper zich diagonaal beweegt, maar dat is niet omdat hij op ware wijze het werkelijke gedrag weergeeft van een onafhankelijk van ons bestaande figuur in een Platonische schaakwereld. De schaakregels gelden bij fiat - ze definiëren wat het schaakspel is. Zo zijn ook de axioma's van de verschillende wiskundige disciplines geen ware beschrijvingen van een objectieve wiskundige werkelijkheid, maar principes waarmee wij zelf het vakgebied definiëren. Wiskunde geeft ons dus helemaal geen *kennis*, volgens dit standpunt. Het is een *spel*, waarvan het beoefenen eventueel gerechtvaardigd kan worden door nuttige toepassingen, bijvoorbeeld in de natuurkunde. We kunnen volkomen zeker zijn van zuiver wiskundige stellingen juist omdat ze nergens over gaan. Zodra we de wiskunde gaan toepassen verliezen we die zekerheid: we moeten dan maar afwachten of, en in hoeverre, de materiele werkelijkheid zich wiskundig laat modelleren.

Er zijn nog meer opvattingen over de aard van de wiskunde, bijvoorbeeld het door onze landgenoot L.E.J. Brouwer voorgestelde intuïtionisme. Zoals net aangeduid zijn al deze standpunten niet alleen belangrijk voor de filosofie en grondslagen van de wiskunde zelf, maar ook voor ons begrip van de natuurwetenschappen (waarin de wiskunde wordt toegepast) en voor onze filosofische visie op de aard van kennis (epistemologie).

Maar het zijn niet alleen zulke algemene kwesties waarin de wiskunde contact maakt met de filosofie. Het genadeloos stelselmatig wiskundig redeneren leidt heel geregeld tot resultaten die volmaakt onverwacht zijn voor de dagelijkse intuïtie. De wiskunde is daarom bij uitstek een instrument voor het vrij maken en oprekken van onze begrippen. Iemand die het bewijs ziet dat er meer reële getallen bestaan dan natuurlijke getallen, ondanks dat er al oneindig veel van zulke natuurlijke getallen zijn, ondergaat een conceptuele schokervaring en zal niet meer op dezelfde manier over ‘oneindig’ kunnen blijven denken als daarvoor. Iets dergelijks geldt voor de constatering dat er evenveel reële getallen zitten in het eindige interval (0,1] als op de oneindige halve reële rechte [1,??). Dit laatste is heel eenvoudig in te zien via de afbeelding 1/x - tenminste, als je eenmaal geleerd hebt hoe je naar dit soort dingen moet kijken! Dit zijn resultaten die vergelijkbaar zijn met de constructie van niet-Euclidische ruimten, bijvoorbeeld het drie-dimensionale analogon van een boloppervlak. Het moderne fysische wereldbeeld zou ondenkbaar zijn zonder zulke verrassende mathematische vondsten. Maar ook los van dit toepasbaarheidsaspect geeft de wiskunde zelf hier intellectuele verrijking, en filosofisch inzicht in de aard van onze concepten.

De wiskunde kan ook optreden als strenge meesteres, die filosofische gedachten kan zuiveren en reglementeren. Een voorbeeld is de wiskundige behandeling van het eerbiedwaardige filosofische probleem hoe ‘inductie’ te rechtvaardigen valt. We zijn allemaal geneigd te extrapoleren vanuit het verleden naar de toekomst: geen mens twijfelt aan het opkomen van de zon morgen, of de geldigheid van de gravitatiewet komende week. Maar onze ondersteunende gegevens slaan uitsluitend op het verleden; en er is geen logische tegenspraak tussen het altijd opkomen van de zon tot nu toe, en het af en toe een dag overslaan vanaf morgen. Dus hoe kunnen we zeker zijn over wat er gaat gebeuren? Het verleden legt de toekomst niet vast!

Dit beruchte inductieprobleem kan gemodelleerd worden met behulp van de kansrekening. Daarvoor is het nodig onze mate van geloof in het optreden van een toekomstige gebeurtenis kwantitatief uit te drukken, door een kans. Het blijkt dan dat er in principe slechts één rationele manier is om die kansen te ‘updaten’ bij het binnenkomen van nieuwe informatie, namelijk door toepassen van de regel van Bayes (dit is feitelijk het conditionaliseren van de kansen op de nieuwe gegevens). Gebruik van deze regel laat zien dat we gerechtvaardigd kunnen zijn vast te gaan geloven in de toekomstige geldigheid van een regelmatigheid als we a priori die regelmaat al een zekere (kleine) kans gaven en als er een overvloed van ondersteunend bewijsmateriaal binnenkomt. Dat leidt dan tot de paradoxale situatie dat we rationeel gerechtvaardigd kunnen zijn in onze stellige overtuigingen over de toekomst, ondanks het feit dat we niets over die toekomst zelf kunnen bewijzen!

Er is hier nog wel het een en ander meer over te zeggen en ook op af te dingen. Maar die overwegingen en bezwaren kunnen nu in exacte wiskundige vorm worden gegoten, en dat alleen al is winst. Een traditioneel filosofisch probleemgebied is toegankelijk geworden voor precieze analyse, en op het eerste gezicht vage bespiegelingen over rationaliteit nemen de vorm aan van wiskundige stellingen.

Nico Krijn en Manuel Nepveu leiden in dit boekje deze thema’s, en een aantal verwante andere, op speelse wijze in. Ze hebben niet de bedoeling ons te winnen voor een bepaald standpunt, maar proberen te prikkelen tot reflectie op de kwesties waarmee ze ons laten kennismaken. Het gaat om fascinerende problemen, en reflectie erop loont voor iedereen die in wiskunde en filosofie is geïnteresseerd!

Dennis Dieks

Hoogleraar filosofie en grondslagen van de natuurwetenschappen Universiteit Utrecht

Inleiding

Inleiding

Er zou eens een proefschriftje geschreven moeten worden over de invloed van de koffieautomaat op de carrières en het handelen van mensen. De nadruk zou dan niet zozeer moeten liggen op de kwaliteit van de koffie, alswel op de ontmoetingen die daar plaatsvinden. Zeker, de meeste van die ontmoetingen verdienen die naam niet eens, maar soms vindt er -onverwacht - een interactie plaats met blijvende gevolgen.
Een van ons (MN) zag zijn carrière bij een oliemaatschappij behoorlijk veranderen door een ontspannen gesprekje met een koffie-tappende geoloog die zorgelijk opperde dat hij een mathematisch ingevoerde persoon zocht voor zijn afdeling...

Nico Krijn, al geruime tijd bij TNO, besloot gevolg te geven aan een lang gekoesterde wens om een filosofiestudie op te pakken, nadat hij als elektronicus was begonnen en later bij de financiële afdeling terecht was gekomen. Manuel Nepveu startte zijn loopbaan in de theoretische astrofysica en kwam via een oliemaatschappij uiteindelijk bij TNO terecht.

Wij ontmoetten elkaar een aantal jaren geleden voor het eerst bij de koffieautomaat op de afdeling waar wij werkten. Daar ontstond een niet-alledaagse ‘encounter’. Dat leidde weer tot de gesprekken die in dit boekje beschreven zijn. Natuurlijk hadden we geen dictafoon bij ons en natuurlijk werden niet alle gesprekken letterlijk in het zicht van het bruin vocht afscheidende apparaat gevoerd. Al snel kwam het idee op om die gesprekken neer te schrijven. En misschien... te publiceren.

Het eerste gesprek gaat over Wiskunde en Filosofie in een brede setting. Er wordt een aantal aspecten aangesneden, die wij beiden op onze eigen manier ervaren. De basis van dit gesprek - en van dit hele boekje- is het besef van het volstrekt aparte karakter van de wiskunde, de diepe verwondering over de kracht, macht en schoonheid van dit vak

Het tweede gesprek gaat over het Oneindige in de Wiskunde. Voor de een werpt dit diepe vragen op van filosofische aard, terwijl de ander er op een volstrekt operationele manier mee omgaat. Dat geeft de nodige aanvaringen, deels als gevolg van een andere ‘studiecultuur’.

Het derde gesprek, tenslotte, gaat over de Waarschijnlijkheid. De filosoof is geobsedeerd door de interpretaties van dit begrip en de paradoxen waarin je gevangen kunt raken. De astrofysicus gebruikt de achterliggende theorie in zijn dagelijkse arbeid. Hij kijkt op een epistemologische manier aan tegen het waarschijnlijkheidsbegrip en probeert te demystificeren waar dat maar kan.

In dit boekje maken wij de lezer deelgenoot van onze reis, de moeilijkheden die we daarbij tegenkomen, de vergezichten. Maar bovenal hopen wij dat de lezer deelgenoot wordt van het plezier waarmee wij deze (twist?)gesprekken hebben gevoerd en van de hoogachting die wij beiden voor de Wiskunde en haar beste beoefenaars hebben.

Wij danken Mark van Atten en onze TNO-collega Paul Egberts voor hun solide adviezen.

Nico Krijn, Manuel Nepveu,
augustus 2007

Wiskunde & filosofie

Wiskunde & filosofie

Filosofen stellen vragen als 'wat is wiskunde?', 'hoe krijgen we kennis van wiskunde?', 'wordt wiskunde ontdekt of uitgevonden?'. In het algemeen staan filosofen op grote afstand van de alledaagse wiskundige praktijk. Filosofische vragen zijn voor de praktijk niet belangrijk. Wiskundigen - de naam zegt het al - bedrijven wiskunde. Voor hen is wiskunde een gereedschap. Je kunt er berekeningen mee maken, kansen bepalen, modellen ontwikkelen, enz. Wiskunde werkt! Daar gaat het om. Het resultaat van onderstaande bespiegelingen is een woordenwisseling waarbij de wiskundige zelfs handtastelijk wordt.

NK: De vraag naar de grondslagen van de wiskunde kan volgens Julius Moravcsik op twee manieren benaderd worden. Ten eerste kan onderzocht worden of de wiskunde te reduceren is tot een andere discipline. Dit brengt met zich mee dat alle wiskundige uitspraken worden vertaald in de taal van de andere discipline. Daar zijn twee redenen voor. Het is de wens naar eenvoud en een conceptuele economie, en de overtuiging dat de elementen die het domein van de andere discipline vormen duidelijker en beter te begrijpen zijn dan die van de wiskunde. In de negentiende en twintigste eeuw is geprobeerd alle wiskunde te vertalen in logica en verzamelingenleer.* De andere benadering van de grondslagen van de wiskunde is een zoektocht naar de bestaansvorm. Plato en zijn tijdgenoten zochten naar de bestaansvorm van getallen. Bij dit soort onderzoek was de vraag niet hoe getallen functioneren in meetkundige formules maar hoe zij bestaan.* Tegenwoordig stelt men, abstracter, dat wiskunde gaat over structuren. Echter, de vraag blijft: hoe bestaan die wiskundige structuren?

Er zijn grofweg drie manieren waarop wiskunde kan bestaan. Ten eerste kun je aannemen dat de wiskunde als het ware is af te lezen aan de natuur. Volgens dit zogenaamde naturalisme is wiskunde louter een abstractie van de materiële wereld. Volgens de tweede stroming - het realisme - bestaat de wiskunde op zichzelf, onafhankelijk van de materiële wereld, in een abstracte wereld. Plato is een belangrijke vertegenwoordiger van dit realisme. De Nederlander Brouwer vertegenwoordigt met het door hem ontwikkelde intuïtionisme een derde stroming: wiskunde ontstaat in de mens en is onafhankelijk van de ervaring. Wiskundige objecten bestaan alleen voor zover zij de resultaten zijn van mijn constructies. Er is volgens Brouwer geen Platonisch rijk met wiskundige objecten. Tot welke stroming behoor jij?

* De wiskundige-logicus Gottlob Frege [1848-1925] legde de grondslagen en de logicus-filosoof Bertrand Russell [1872-1970] werkte het programma samen met Alfred North Whitehead [1861-1947] verder uit in het Principia Mathematica van 1910.

L.E.J. Brouwer [1881-1966] : 'Stelling 26 - Wiskunde is zelf niet een wetenschap, maar een moment in de daad, die het bedrijven van wetenschap is'

MN: Strikt genomen ben ik geen wiskundige maar sterrenkundige met een fikse wiskundige belangstelling. Mijn werk heeft me trouwens steeds meer de toegepast wiskundige kant opgedreven.

Wiskunde is voor veel wetenschapsbeoefenaren een gereedschap, maar zuivere wiskundigen zullen deze opvatting wat eenzijdig vinden. Zij kunnen zich bezighouden met wiskunde die (nog?) nergens toepassing vindt of waarvan niet een-twee-drie vaststaat dat die ooit betekenis zou kunnen krijgen als hulpmiddel, als gereedschap. Zij beoefenen wiskunde als *l'art pour l'art*, zoals een theoretische fysicus naar elektromagnetische velden kijkt zonder ook maar in de verste verten aan antennes en radiootjes te denken.

Anderzijds kan een bepaald stuk wiskunde inderdaad als gereedschap dienen voor een ander stuk wiskunde. Zo wordt de zogenaamde hoofdstelling van de algebra* prachtig bewezen met resultaten *uit de niet tot de algebra* behorende theorie van de analytische functies.

Je stelt een directe vraag over het bestaan van de wiskunde, maar er komt geen direct antwoord, ben ik bang.

Als *wiskundigen* spreken over het 'bestaan' van getallen bedoelen zij - althans velen van hen - dat zij getallen kunnen terugbrengen tot iets anders. In mijn eerste jaar analyse in Utrecht werd in een college van een vol semester getoond hoe de reële getallen geconstrueerd konden worden met behulp van -zet je schrap- 'equivalentieklassen van Cauchy-rijen van rationale getallen'. Een mondvol, maar de essentie is dat reële getallen teruggebracht worden tot iets anders. En dat andere kennen de wiskundigen al. 'Eigenlijk' zijn reële getallen niets anders dan...

Dit is echter niet wat *filosofen* onder 'bestaan' lijken te verstaan. Zoals je in je vraag aangeeft zijn er mathematici die zich thuis voelen bij de beeldspraak dat iets geconstrueerd wordt door de menselijke geest en dat er niet van een voorafgaand bestaan kan worden gesproken. Bestond Australië in het jaar 1400? Voor de Aboriginals wel, voor de gemiddelde Hagenaar van toen zeker niet. Anderzijds, een superieure geest zoals ooit beschreven door de Franse wis- en sterrenkundige Pierre-Simon Laplace zou zeggen dat Australië in 1400 bestond in objectieve zin. Kun je op zo'n manier ook tegen het bestaan van reële getallen aankijken?

Ik voel me hier hoogst ongemakkelijk bij. Ik heb wel eens horen zeggen dat de muziek van Mozart 'direct uit de hemel' komt. Iets dergelijks zou je ook kunnen beweren van bepaalde stukken wiskunde. De theorie van de analytische functies is zo oogverblindend mooi dat je je als het ware niet kunt voorstellen dat dit puur en alleen mensenwerk is. Anderzijds zijn er ook stukken wiskunde waar het 'zwoegen' aan is af te zien. Je zou kunnen denken dat de eerste soort al 'bestaat' en alleen maar zichtbaar gemaakt moet worden, terwijl de tweede soort zuiver en alleen een menselijke uitvinding is. Ik houd beide uitdrukkingen voor zuivere beeldspraak. Als je het niet als beeldspraak ziet, dan *maak* je een probleem. Het gevaar is dat je verstrikt raakt in allerhande discussies die meer met taal te maken hebben dan met een buitentalige werkelijkheid. Anders gezegd, we hebben dan te maken met een schijnprobleem.

Ik geef toe dat daarmee deze discussie meteen doodgeslagen wordt, het is niet anders. Maar we kunnen het natuurlijk ook over schijnproblemen hebben...

N.K.: Ja, ja, ik had een zeker vermoeden dat je niet een eenvoudig antwoord zou geven als: 'Ik behoor voor honderd procent tot de tweede stroming, volgende vraag a.u.b.' Je laat je niet in een hokje duwen. Je combineert in feite de opvattingen van Ludwig Wittgenstein en Kurt Gödel. Wittgenstein, die ik verzuimde in mijn overzicht hierboven op te nemen, is van mening dat wiskunde wordt uitgevonden. Gödel staat in de traditie van het realisme van Plato. Hij beschouwt wiskundige objecten als 'werkelijke objecten, die onafhankelijk bestaan van onze definities en constructies'. Die objecten bestaan in een niet zintuiglijk waarneembare wereld. Echter, deze wereld is volgens Gödel een essentieel onderdeel van onze actuele wereld. Als je aanneemt dat de objecten van de wiskunde op een of andere manier bestaan, dan is het welhaast vanzelfsprekend dat je die objecten kunt ontdekken. Dat is inderdaad de overtuiging van Gödel. Wat Gödel betreft is er dus een wiskundige hemel, maar een die op aarde bestaat.

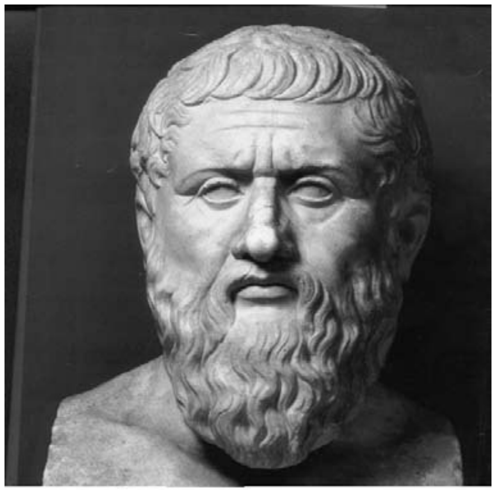
Wittgenstein en Gödel kun je beschouwen als twee tegenpolen. Alleen heeft Wittgenstein niets gepresteerd op wiskundig gebied, terwijl Gödel met zijn ontdekkingen de wereld op zijn kop zette. Wittgenstein noemde de stellingen van Gödel zelfs 'hocus-pocus'. Stel dat je nog nooit een penseel hebt vastgehouden. Je hebt nog nooit een eenvoudig stilleven geschilderd, en je verkondigt dat de schilderijen van Rembrandt niet zijn aan te zien, en dat Rembrandts opvattingen over kunst geen hout snijden! Op de ontdekkingen van Gödel kom ik later terug.

Als een stuk van de wiskunde - waar het zwoegen aan is af te zien - wordt uitgevonden, hoe verklaar je dan dat wiskundigen langs verschillende wegen dezelfde ontdekking doen, zoals twee sterrenkundigen - dit voorbeeld moet je aanspreken - dezelfde bestaande ster ontdekken. Zo ontdekte Gottfried Leibniz bijna gelijktijdig en onafhankelijk van Isaac Newton de differentiaal- en integraalrekening.

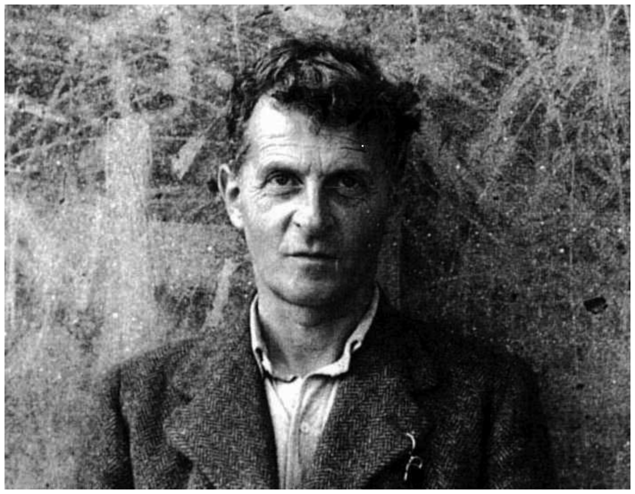
MN: Pas op. De vraag wie de uitvinder van iets is, kan wel eens lastiger zijn dan je denkt. Bij de integraalrekening kun je de eerste wortels al terugvinden bij niemand minder dan Archimedes. Je zou vermoedelijk beter kunnen zeggen dat Leibniz en Newton aan het eind staan van een lange keten. Zij maakten de stappen die nodig zijn om de differentiaal- en integraalrekening te 'democratiseren', toegankelijk te maken voor al hun collegae. Maar ik onderbrak je, ga verder.

NK: Bovendien blijken verscheidene en tevens sterk verschillende stukken wiskunde vaak

* Iedere n-de graadsvergelijking heeft een oplossing in de complexe getallen.



Een buste van Plato [427-347 v.Chr.] uit de collectie van Sala delle Muse van het Vaticaan te Rome. Een citaat uit Plato's Sophist: 'De vreemdeling zegt: '[...] In het algemeen rekenen we getallen toch tot de dingen die bestaan?' En Theatetus antwoordt 'Ja, als iets daartoe gerekend dient te worden, dan wel het getal'.



Ludwig Wittgenstein [1889-1951]: '[..] that what is called a mathematical discovery had much better be called a mathematical invention'.

onderling verbonden te zijn. De Zwitserse wiskundige Leonhard Euler heeft een aantal ontdekkingen van dergelijke dwarsverbanden op zijn naam staan, Een voorbeeld van zo'n verrassend dwarsverband is Eulers vergelijking $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, met $i=\sqrt{-1}$. Substitutie van $x=\pi$ geeft: $e^{i\pi} = -1$. Hier wordt het geometrisch domein waartoe pi, de cosinus en sinus behoren, verbonden met het domein van de complexe getallen. Tevens constateer je zelf dat 'de hoofdstelling van de algebra prachtig bewezen is met resultaten uit de theorie van de analytische functies'. Dat duidt toch op een hecht bouwwerk waarin constructies worden *ontdekt* die de delen van het bouwwerk met elkaar verbinden, kortom op bestaande wiskundige objecten.

MN: Als twee wiskundigen van hetzelfde stelsel axioma's uitgaan *kunnen* ze hetzelfde ontdekken. Maar dat hoeft niet. Je kunt je voorstellen dat er een tweede wiskundige is die van dezelfde axioma's uitgaat als de welbekende Euclides, maar die zich helemaal niet met driehoeken wenst bezig te houden. Hij zal de stellingen die betrekking hebben op driehoeken niet vinden, maar wat hij wel vindt is in ieder geval consistent met wat de bekende voorman van de meetkunde vond. Maar ook als deze tweede wiskundige zich wel met driehoeken bezighoudt is het niet gezegd dat hij ontdekt wat Euclides wel heeft gevonden (bijvoorbeeld door gebrek aan aanleg komt hij maar niet op het idee dat de zwaartelijnen in een driehoek wel eens door één punt zouden kunnen gaan...). Maar er geldt dus wel: er is consistentie tussen de vindingen van de beide heren...

De beroemde formule die je aanhaalt verbindt twee werelden: die van de analyse en die van de meetkunde. Via een reeksontwikkeling kun je een formele definitie geven van de linkerkant van de formule (in het complexe vlak, maar dit terzijde) en van iedere term rechts. In dat geval is de formule een trivialiteit, MAAR... Je moet dan nog bewijzen dat de functies 'sin' en 'cos' die je via reeksontwikkeling hebt gedefinieerd overeenkomen met de in principe *andere* 'SIN' en 'COS' die je uit je middelbare schooltijd kent als functies van hoeken, althans voor reëel argument.

Dat deze dwarsverbanden te leggen zijn betekent dat dezelfde mentale constructie meer dan één realisatie kent. Dezelfde wijn zit in verschillende flessen (geen zakken, svp).

Wiskundigen kunnen ook op een andere wijze verbanden leggen: ze kunnen op jacht gaan naar een overkoepelende structuur die verscheidene gebieden van de wiskunde in zich sluit. Zo kon Bernard Riemann generalisaties vinden van de Euclidische meetkunde waarbij de afstandsfunctie tussen naburige punten niet via de stelling van Pythagoras wordt gegeven, maar door een wat algemenere vorm. In één klap werden daarmee de verscheidene niet-Euclidische meetkunden gevangen in één structuur.

Tijd voor wat stekeligheid. Ik heb niet de indruk dat alle filosofen een ex treem uitgebreide wetenschappelijke achtergrond hebben, of dat zij goed beseffen wat wetenschapsbeoefenaren eigenlijk weten en kunnen. Ik heb Karl Popper ooit in een lang televisie-interview volstrekte trivialiteiten horen beweren ten aanzien van het niet kunnen bewijzen van hypothesen. Hij scheen te denken dat fysici halve debielen zijn die niet weten wat ze eigenlijk doen. Het was ergerlijk. Met veel aplomb debiteerde de wereld beroemde filosoof de ene trivialiteit na de ander en zijn ondervrager zat er slechts eerbiedig bij, zonder in hoongelach uit te barsten...

Gedurende mijn studie heb ik het woord 'waarheid' niet of nauwelijks in de mond horen nemen door mijn leermeesters. Men sprak wel van 'een adequate beschrijving' of iets in die geest. Natuurwetenschappers weten heel goed dat zij niet verder kunnen gaan dan dat. 'Waarheid' is een term die filosofen graag in de mond nemen, fysici kijken wel uit.

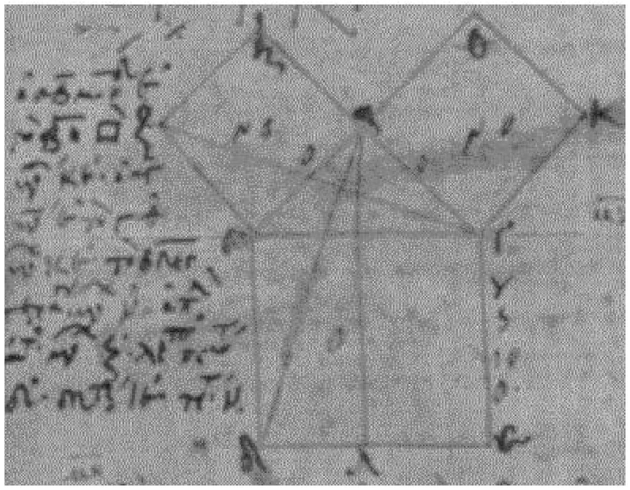
NK: Ik zal de 'waarheid' van Popper wat toelichten. Er zijn twee belangrijke, elkaar beconcurrerende, waarheidstheorieën, de coherentietheorie en de correspondentietheorie. Volgens de coherentietheorie is een uitspraak waar als deze past in het geheel van alle uitspraken die ik voor waar aanneem. Door het toevoegen van de nieuwe uitspraak aan de door mij reeds geaccepteerde uitspraken wordt de coherentie van het geheel behouden of zelfs versterkt. Volgens de correspondentietheorie is een uitspraak waar als die in overeenstemming is met de feiten. Kort gezegd: het ijkpunt voor de coherentietheorie zit in mijn hoofd, en het ijkpunt voor de correspondentietheorie ligt in de wereld.

In zijn boek over wetenschapsfilosofie heeft Popper geen gebruik gemaakt van de termen 'waar' en 'onwaar'.[2] De logicus Alfred Tarski definieert in navolging van Aristoteles waarheid als: correspondentie met de feiten. Nadat Popper in 1935 Tarski ontmoet in de *Volksgarten* in Wenen, aarzelt Popper niet langer de woorden 'waar' en 'onwaar' te gebruiken. Als Popper zegt dat een theorie 'waar' is, dan geeft de theorie dus een adequate beschrijving van de fysieke verschijnselen. Het is een kwestie van woorden en definities. Popper is van mening dat de natuurwetenschappen steeds dichter bij 'de waarheid' komen: de beschrijvingen van de natuur worden steeds beter.*

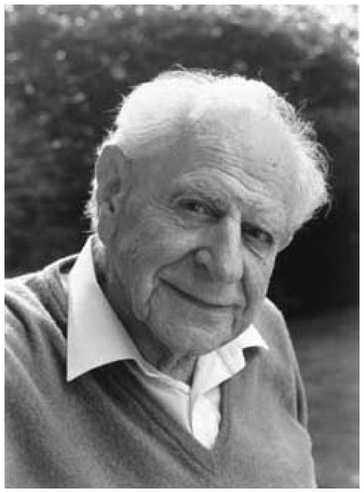
Traditioneel noemt men solide theorieën over de natuur 'wetten'. Ook weer zo'n term met een lange geschiedenis. 'Wetten' suggereert dat er een macht (god) deze wetten uitvaardigt en dat de natuur deze wetten gehoorzaamt.

In 1964 publiceert Gödel een artikel over een wiskundig probleem[3]. Hij maakt een vergelijking tussen zintuiglijke waarneming en, wat hij noemt een 'wiskundige intuïtie' van objecten die we kennen uit de verzamelingenleer. Bij deze intuïtie ervaart hij dat 'de axioma's zich als waar opdringen'. Hij ziet niet in waarom wij minder vertrouwen zouden hebben in wiskundige intuïtie dan in zintuiglijke waarneming. Heb jij ook zoveel vertrouwen in je wiskundige intuïtie?

MN: Axioma's zijn in mijn optiek niet 'waar'. Een stelsel van axioma's kun je naar



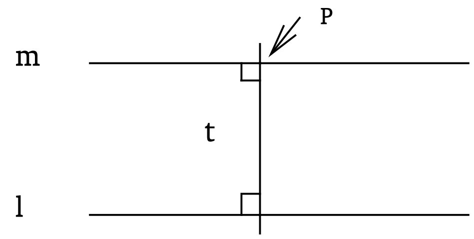
Euclides schreef zijn Elementen omstreeks 300 v. Chr., een veelomvatten-de verhandeling over geometrie, verhoudingen, en de getallentheorie. De afbeelding toont propositie 47 uit boek I, de stelling van Pythagoras.



Karl Popper [1902-1994] is vooral bekend geworden door zijn uitwerking van het falsificatie-beginsel als toets voor wetenschappelijke uitspra-ken. Dit beginsel werd overigens reeds in 1647 door Pascal geformuleerd.

willekeur samenstellen. Oké, axioma's mogen niet contradictoir zijn, dat is dan een harde eis. Maar verder mag je je pakket samenstellen zoals je zelf wilt. Een heel andere kwestie is of een 'pakketje axioma's' ook interessant is. Daarvoor heb je intuïtie nodig. De negentiende-eeuwer Riemann had de intuïtie dat zijn definitie van het lijnelement aanleiding zou geven tot interessante wiskunde, 'bruikbaar' in een zeer ruime betekenis van het woord. Hij had gelijk. Ik heb geen idee hoeveel mislukte pogingen er zijn gedaan door wiskundigen om een leuk setje axioma's bijeen te rapen. Een groot 'ontwerper' als Riemann had kennelijk een fijne neus voor wat een 'waardevol' nieuw axioma is, in dit geval in de meetkunde.

Overigens, het parallellenaxioma uit de vlakke meetkunde heeft men tot in de achttiende eeuw proberen af te leiden uit de andere axioma's. Men dacht dat er geen andere meetkunde kon bestaan dan die waarin door een punt P buiten een lijn *l* precies een rechte *m* te vinden was die evenwijdig loopt aan de eerste lijn *l*. Toen later uitgewerkte niet-Euclidische meetkunden werden gepresenteerd, bleek dat het parallellenaxioma niet uit de andere volgt en er ook niet strijdig mee is.



NK: Je hebt meen ik eenzelfde visie over axioma's als Henri Poincaré. Die schreef in 1902: 'De meetkundige axioma's zijn noch [..] intuïties, noch experimentele feiten. Het zijn conventies. Onze keuze tussen alle mogelijke conventies wordt geleid door experimentele feiten; maar het blijft vrij, en wordt alleen beperkt door de noodzaak van het voorkomen van elke tegenspraak'.[4]

Hiervoor typeerde je de zuivere wiskunde als 'een die nog (?) nergens toepassing vindt'. In de praktijk blijkt telkens dat allerlei wiskunde, die aanvankelijk niet meer dan Spielerei was, een toepassing vindt. Volgens Nicolai Lobachevsky, die ook aan het parallellenaxioma sleutelde, is er 'niet één tak van de wiskunde, hoe abstract ook, die niet op zekere dag kan worden toegepast op de fenomenen van de materiële wereld'. De vrijheid bij het kiezen van axioma's wordt in feite beperkt tot de axioma's die je zelf als 'waardevol' omschrijft. De andere komen gewoon niet in aanmerking. De axiomakeuze van Riemann is daar een goed voorbeeld van. Albert Einstein had, naar eigen zeggen, de Algemene Relativiteitstheorie niet kunnen ontwikkelen zonder de meetkunde van Riemann. Het parallelaxioma van Euclides is correct voor aardse afstanden. Het parallelaxioma van Riemann maakt de meetkunde geschikt voor afstanden op interstellaire schaal. Het betreft dus een verbetering, een uitbreiding van Euclides' axioma.

Als Gödel het heeft over de objecten van de verzamelingenleer, redeneert hij van de abstracte wereld naar de fysieke wereld: 'Een wiskundige uitspraak zegt niets over de fysieke wereld, want die uitspraak is al waar door de betekenis van de termen die erin zitten'. Bij meetkunde redeneert hij net de andere kant op, van de fysieke wereld naar de abstracte wiskundige wereld. In 1973 spreekt Gödel met Marvin Greenberg over meetkunde. Gödel vertelt aan Greenberg: 'Meetkundige intuïtie is, strikt gesproken, niet een wiskundige, maar eerder een [..] fysische intuïtie. In zuiver wiskundig opzicht is onze Euclidische intuïtie van de ruimte volmaakt correct, het representeert namelijk correct een zekere structuur die bestaat in het rijk van wiskundige objecten. Zelfs fysiek is het correct 'op kleine schaal''.[5] Dus de axioma's die 'bestaan' en 'waar' zijn in het abstracte wiskundige domein passen op de materiële wereld. Jij noemt dit 'leuke setjes axioma's'.

MN: Je ziet dat je de verschillende soorten meetkunde kunt opvatten als even zo vele intellectuele mogelijkheden, Spielereien. Ik bedoel dit uiteraard niet denigrerend. In de natuurkunde worden sommige van deze mogelijkheden bij benadering gerealiseerd. Je zou kunnen zeggen dat je 'wiskundige' meetkunden hebt en 'fysische'. De vlakke meetkunde van Euclides geeft een afdoende beschrijving voor meetkundige kwesties in huis, tuin en keuken. De boldriehoeksmeetkunde is de te gebruiken meetkunde als je de meetkundig kortste vliegafstand tussen Tokio en Wenen wilt berekenen. En in de Algemene Relativiteitstheorie gebruik je een Riemannse meetkunde waarbij de materie zelf in het geweer komt.

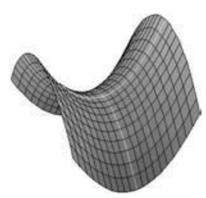
Je ziet dat ik boven zinsneden heb gebruikt als 'afdoende beschrijving' en 'bij benadering gerealiseerd'. Op het moment dat een van de ontworpen meetkunden wordt gebruikt in de fysica moet bezien worden in hoeverre de aan die meetkunde ten grondslag liggende axiomata een goed model vormen voor de materiële wereld. Spielerei is ernst geworden.

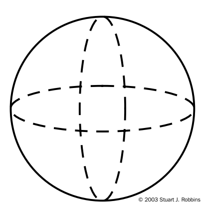
Maar hier zien we nog iets anders. In 1960 publiceerde de Nobelprijswinnaar voor Natuurkunde Eugene Wigner een heel interessant artikel.[6] Daarin verbaast hij zich over 'het wonder dat de taal van de wiskunde geëigend is voor de formulering van de natuurwetten [..] een prachtige gift die wij begrijpen noch verdienen'. Concepten uit de analyse kunnen we inzetten om de meetkundige aspecten van de wereld om ons heen te beschrijven en - in ieder geval tot op zekere hoogte - te begrijpen. De complexe functietheorie speelt een rol in bijvoorbeeld de elektrotechniek, de optica en de plasmafysica. Hoe komt dat? Zegt het iets over de 'natuurlijke' wereld? Zegt het iets over hoe wij mensen denken? Zouden wij op even krachtige en fraaie resultaten stuiten als we de wiskunde bij deze beschrijving zouden uitsluiten? Zouden we überhaupt op iets zinnigs stuiten?

NK: De wiskunde levert een beschrijving van abstracte structuren. Volgens Gödel draait het bij zo'n beschrijving uiteindelijk om begrip van de gebruikte wiskundige uitspraken. Als de betekenissen van wiskundige uitspraken goed worden verhelderd, dan worden deze uitspraken vanzelfsprekender. De verheldering kan niet tot stand worden gebracht door het geven van expliciete definities, waarbij begrippen in termen van andere begrippen worden

Ook Kurt Gödel [1906-1978] (rechts op de foto) ontmoet in 1935 Alfred Tarski [1901-1983] in Wenen.

Euclides stelt dat door een punt dat niet op een gegeven lijn ligt één lijn kan worden getrokken parallel aan die lijn. Aan het begin van de negentiende eeuw wordt een niet-Euclidische geometrie het eerst ontdekt door Bolyai (linker foto), een Hongaar, en onafhankelijk door Lobachevsky (midden), een Rus. Zij postuleren dat door een punt dat niet op een gegeven lijn ligt oneindig veel lijnen kunnen worden getrokken parallel aan die lijn. Deze niet-Euclidische variant staat bekend als de hyperbolische geometrie. Later modificeert Riemann (rechts) het parallel postulaat op een andere manier. Door een punt dat niet op een gegeven lijn ligt helemaal geen lijn kan worden getrokken parallel aan die lijn. Deze niet-Euclidische variant staat bekend als elliptische geometrie.





Spherical Geometry

De hyperbolische geometrie kan het best gevisualiseerd worden aan de hand van het oppervlak van een zadel. Dit oppervlak heeft een negatieve kromming. Op zo'n zadelop-pervlak is verhouding van de om-trek van een cirkel tot zijn diameter altijd groter dan π. Door een punt buiten een gegeven lijn kunnen meerdere lijnen parallel aan die lijn worden getrokken. Hier is de som van de hoeken van een driehoek kleiner dan 180º.

De elliptische geometrie kan het best gevisualiseerd worden aan de hand van het oppervlak van een bol. Dit oppervlak heeft een positieve kromming. Rechte lijnen worden opgevat als grote cirkels over het oppervlak van de bol. De be-schouwde ruimte is eindig, een lijn heeft een maximale lengte. Het is eenvoudig in te zien dat lijnen niet parallel kunnen lopen. Alle grote cirkels snijden elkaar niet één maar twee keer. De som van de hoeken in een driehoek is groter dan 180º. De verhouding van omtrek van een cirkel tot zijn diameter is minder dan π.

gedefinieerd. We hebben een verheldering van de betekenis nodig die geen beroep doet op andere, uiteindelijk ongedefinieerde uitspraken. De methode voor deze verduidelijking vindt Gödel in de fenomenologie van Husserl. Welke methode gebruiken wiskundigen om tot inzicht en begrip te komen?

MN: In het voorwoord van een alleraardigst inleidend boek over kansrekening schrijft de inmiddels overleden Utrechtse wiskundige Hans Freudenthal dat een bewijs van een wiskundige stelling 'veelal het enige middel is om te weten te komen wat er met een stelling is bedoeld'. Het bewijs is onderdeel van het wiskunstig spel en ook nog eens een manier om de stelling nader tot de lezer te brengen. Als een stelling wordt toegelicht, bijvoorbeeld op college, is het bepaald zinnig om expliciete voorbeelden te geven, dat wil zeggen beeldende, pakkende speciale gevallen. Begrip wordt aangekweekt door voorbeelden aan te reiken en die in alledaagse taal toe te lichten. Hier is sprake van verheldering buiten strikt wiskundig handelen om; de wiskundige wordt als het ware handtastelijk. In leerboeken vind je deze benadering zelden en in handboeken al helemaal niet. Resultaten, stellingen uit deze boeken lijken uit de lucht te vallen, maar de ontdekkers zijn vast heel erg informeel met hun object van onderzoek omgegaan voordat zij de stellingen abstract vorm gaven.

NK: De natuurkunde is een inductieve wetenschap. Als een theorie wordt ondersteund door een experiment, dan wordt aangenomen dat deze theorie juist is. Het aantal waarnemingen in een experiment is beperkt, de inductieve methode levert altijd een uitkomst met een bepaalde onzekerheid. De proef van Millikan is een experiment om de elektrische lading van een elektron te bepalen. Hoeveel experimenten men ook uitvoert, nooit zal men vast kunnen stellen dat alle elektronen deze lading bezitten. Dat lukt niet met eindige middelen. Daar durf ik voor een zak wijn om te wedden. In de natuurkunde wordt een theorie aangehouden zolang ze bruikbare voorspellingen oplevert en anders wordt ze aangepast of afgedankt. Wiskunde is een deductieve wetenschap. Hier immers worden stellingen niet gerechtvaardigd langs de weg van experimenteel onderzoek, maar bewezen op grond van afleidingen. Een mooi voorbeeld is het vermoeden van Goldbach.* Wiskundigen zijn gaan experimenteren en hebben in 1998 Goldbachs vermoeden bevestigd tot $4.10^{14.}$ Als het vermoeden van Goldbach betrekking zou hebben op een natuurkundig verschijnsel zou men, op basis van een dergelijk experiment, spreken van de wet van Goldbach. Wiskundigen rusten niet tot een deugdelijk bewijs kan worden afgeleid. Waarom verlangen wiskundigen absolute zekerheid? Overigens zou ik van zo'n fraai vermoeden een eenvoudig en elegant bewijs wensen.

MN: Ik wil op een paar punten ingaan van het vorige. Je zegt doodleuk dat de wiskunde een deductieve wetenschap is. Dat is echter maar een kant van de zaak. Dat kan voor degene die alleen naar de leerboekjes kijkt met hun stelling-bewijs-stelling-bewijs structuur een logische conclusie lijken. Maar kijk ook eens naar het creatieve proces. De ontdekker / uitvinder / schepper leeft in onzekerheid en hij is als iemand die van ijsschots naar ijsschots springt om een deels bevroren rivier over te steken. Hij mag hopen dat hij steeds weer een ijsschots vindt om verder te komen. Maar heeft hij garanties dat hij uiteindelijk aan de overkant komt? Neen, hij kan een onhandige ijsschots uitkiezen die het hem onmogelijk maakt aan de overkant te komen. Misschien bestaat er zelfs op een bepaald moment helemaal geen ijsschots meer die hem verder helpt. Als ik dit zou kunnen bewijzen, dan volgt dat vermoedelijk ook en dan... Hij gist zijn weg naar het resultaat dat hem voor ogen staat en waarvan hij gelooft en hoopt dat het juist is. Dit duidelijk inductieve proces loopt dus anders dan je uit de structuur van een leerboek in je onschuld zou denken. De leerboeken geven geen beeld van dit proces, maar alleen van het schaven, vijlen, gladstrijken wanneer je al weet hoe het zit.

De intellectuele bezigheid die door Simon Stevin 'wisconst' is gedoopt wil juist een bewijs leveren via de logica, alleen de logica. Het is de kunst, het spel, de sport.

Vanuit meer praktisch oogpunt wil je voor eventueel later gebruik van een wiskundig resultaat dat dat resultaat ook echt 'staat'. Stel je eens voor dat een stelling (zogenaamd) bewezen wordt die later plots onjuist blijkt. Waar is de fout gemaakt? Bij het 'bewijs' van de stelling zelf, of misschien ergens in de fundamenten, twintig stellingen terug, zeg maar? Door een hoge mate van gestrengheid te eisen en geen 'experimentele' resultaten toe te laten kun je een eventuele fout beter lokaliseren.

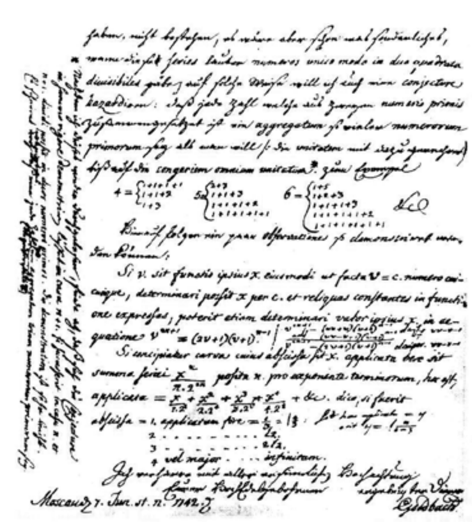
Gestrengheid kan in verschillende disciplines trouwens telkens wat anders betekenen. Een ingenieur, een fysicus en een wiskundige staan bij een weiland. Zij zien alle drie een beest in de wei staan. Zegt de ingenieur: 'Er lopen rode koeien in de wei'. De fysicus riposteert: 'Er loopt een rode koe in de wei'. De mathematicus tenslotte antwoordt: 'Er staat een koe in de wei die aan zijn rechterzijde rood is'.

Nog even naar het vermoeden van Goldbach. Als wiskundigen getracht zouden hebben om het vermoeden te testen tot iets van de orde van 1014 is dat knap krankzinnig. Ik geloof eerder dat enkele computerfreaks dit hebben gedaan, geen wiskundigen. De laatste categorie heeft niet dit, naar mensenmaat geweldig grote, aantal nodig om vertrouwen te krijgen in een mathematisch vermoeden. Want alleen daar gaat het hier om. Hoe dat vertrouwen ontstaat? Misschien moet je daarvoor eens met een psycholoog gaan praten. Wanneer gaan mensen geloven dat iets waar is? Misschien moet deze vraag toegespitst worden op een wiskundige en fysische context. Tenslotte zijn mensen - mathematen en fysici incluis - buiten deze context bereid om heel veel 'zomaar' te geloven, bijvoorbeeld omdat ze als kind zijn geïndoctrineerd... Hm, indoctrinatie...

NK: De filosoof constateert dat de uitdrukking 'een waarheid als een koe' op een catego-

* Goldbachs vermoeden in predikaatlogica luidt: $\forall x \exists y\ z\ ((x = \text{even} \wedge x > 2 \wedge \text{Priem}(y) \wedge \text{Priem}(z)) \leftrightarrow x = y + z)$. Tot op heden is het niet gelukt dit vermoeden deductief te bewijzen.

Hans Freudenthal [1905-1990] geportretteerd Eirka Visser in 1985. Het doek hangt in de bibliotheek van de faculteit Wiskunde van de Universiteit Utrecht. Freudenthal kwam door toedoen van Brouwer naar Nederland. Hij was een veelzijdig wiskundige. Hij hield zich vooral bezig met topologie en wiskunde-pedagogie. Daarnaast heeft hij een 'universele' tool Lincos ontwikkeld, bruikbaar voor communicatie met buitenaardse beschavingen.



Christian Goldbach [1690-1764] formuleert zijn vermoeden, dat elk even getal groter dan twee de som is van twee priemgetallen, in een brief aan Euler van 1742. In de marge van de brief schrijft hij zijn vermoeden dat elk getal groter dan twee de som is van drie priemg-etallen: 'Es scheinet wenig-stens, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sey'.

riefout berust. Bij deze categoriefout wordt een abstract object wordt vergeleken met een fysiek. Rudolf Carnap gaf als voorbeeld van een categoriefout: Ceasar is een priemgetal.

De Hongaarse wiskundige Imre Lakatos is van mening dat wiskunde een inductieve wetenschap is. Hij heeft de geschiedenis van het Descartes-Euler-vermoeden[*] onderzocht. In de loop van de geschiedenis werd dit vermoeden bij herhaling bevestigd en weerlegd. Lakatos past de kennistheorie van Popper toe op de wiskunde. Wiskunde is in de geschiedenis van de wetenschap altijd ten voorbeeld gesteld als het domein van zekerheid. In een bewijs, meent Lakatos, wordt een bepaald vermoeden ingebed in geaccepteerde achtergrondkennis. Wie een bewijs levert legt alleen een verband tussen de te bewijzen stelling - het vermoeden - en de achtergrondkennis. Ook in de wiskunde kunnen we onze vermoedens slechts verbeteren door de punten te zoeken waar zij in strijd komen met de achtergrondkennis. Lakatos gaat er van uit dat wiskundige uitspraken feilbaar en voor verbetering vatbaar zijn.[†]Als wiskunde een inductieve wetenschap is, hoe zit het dan met de wiskunde 'uit de hemel'?

MN: Wat een bewijs is, is zeker niet tijdsonafhankelijk. In de achttiende en negentiende eeuw werd in een 'bewijs' wel eens gebruik gemaakt van kennis buiten de wiskunde. De huidige wiskundige loopt rood aan wanneer zoiets gebeurt. Terecht. Maar zelfs de hele groten uit de achttiende eeuw deden wel dingen waarbij thans het rode potlood driftig gehanteerd zou worden. Men aanvaardt nu, zo lijkt het in elk geval, minder dan toen.

Het leveren van een bewijs moet je trouwens echt leren. In het eerste en tweede jaar abstracte analyse in Utrecht werd de aanstaande wiskundige of theoretische (astro)fysicus door de mangel gehaald. Wie, zoals ikzelf, zijn middelbare schoolwiskunde had gedaan met twee vingers in de neus werd even op zijn nummer gezet: slordigheid werd wreed gestraft. De docenten hadden natuurlijk gewoon gelijk met hun onverbiddelijke eis tot grote nauwgezetheid en ik heb er een houding van aangeleerd die ik als onderzoeker goed kan gebruiken. Tenslotte bevind je jezelf aan het onderzoeksfront in een soort niemandsland. Er is niemand die je bij het handje houd. Je bent je eigen gids en je eigen rechter, in elk geval tot het moment dat je je wetenschappelijke artikel bij een tijdschrift inlevert...

Overigens heeft een wiskundig bewijs soms iets van buitengewone gratie en speelsheid. Een voorbeeld moge dit verduidelijken. Je hebt op een stuk papier een patroon getekend van 7X7 vierkantjes. In het vierkantje linksonder zet je een schaakpaard neer. Vraag: Kun je nu in precies zeven paardensprongen op het vierkantje rechtsboven terechtkomen? Je moet het maar eens proberen.

Na een tijdje krijg je ongetwijfeld het gevoel, het zeer sterke vermoeden dat het niet kan. Maar kun je dat vermoeden ook bewijzen? Dat moet je wel doen natuurlijk, anders is je taak

* Voor een ruime klasse van polyhedra geldt: H+V=R+2, aantal hoeken + aan-tal vlakken = aantal ribben + 2.

† Wie zich vastklampt aan het traditionele 'Euclidische ideaal' van wiskundige kennis, moet veel producten van wiskundige arbeid afwijzen. Het wiskundig werk van Newton, bijvoorbeeld, mag dan niet tot de wiskunde worden gerekend omdat diens formulering van de differentiaalrekening niet voldoet aan de eisen die we er nu aan stellen.

Imre Lakatos [1922-1994]: 'The logical the-ory of mathematics is an exciting, sophisti-cated speculation like any other theory. It is an empiricist theory and thus if not shown to be false, will remain conjectural for ever'.

op onbevredigende wijze beëindigd.

Welnu, een bewijs dat het antwoord op de vraag 'nee' is, kan worden geleverd. Dat kan inderdaad via een vondst die eigenlijk niets met het probleem zoals geformuleerd te maken heeft. Je gaat de het ruitjesbord inkleuren zoals dat op een schaakbord het geval is: de hokjes worden afwisselend wit en zwart gekleurd. Je schaakpaard staat linksonder op een wit veld (zeg). Bij zijn volgende sprong komt hij op een zwart veld. Daarna weer op een wit veld, enzovoorts. Om van een wit veld op een wit veld terecht te komen heb je altijd een even aantal sprongen nodig. De hele diagonaal van linksonder tot rechtsboven bestaat uit velden van dezelfde kleur. Bijgevolg kun je alleen maar via een even aantal sprongen je doel - het veld rechtsboven - bereiken. Dus de boven gestelde vraag heeft als antwoord: neen.

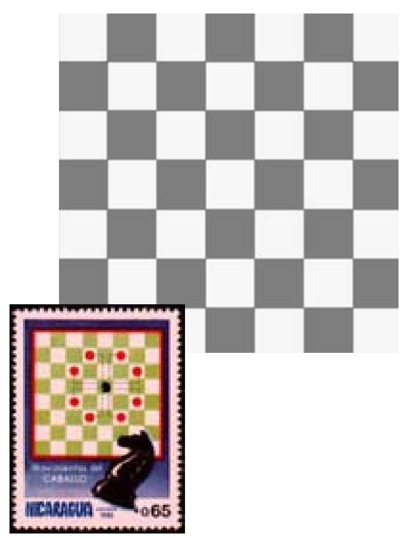
Wat is hier gebeurd? Ik heb opgemerkt dat het voor de beantwoording van het probleem wezenlijk is een onderscheid te maken tussen twee soorten velden. In het geval dat de opgave zo was ingekleed dat je een schaakbord voor je had van 8 bij 8, had je oplossing vermoedelijk heel snel gezien, maar in de opgave wordt van ruitjes gesproken op een niet-schaakbord. Je wiskundige kronkel moet zelf op het idee komen om velden van twee soorten te onderscheiden. Waar de vaardigheid vandaan komt om te zien dat 'dit extraatje' het probleem oplost...? De elegantie van de oplossing is echter duidelijk voor elke mathematische geest.

NK: Ik bracht Gödel hiervoor een paar maal ter sprake. In zijn proefschrift geeft hij het bewijs van de volledigheid van een deel van de logica.[*] Hij toont aan dat alle uitspraken die uit deze logica zijn af te leiden waar zijn, en omgekeerd, dat alle uitspraken die waar zijn afleidbaar zijn. Dit bewijs heet de volledigheidstelling. Na zijn promotie krijgt Gödel een essay van Thoralf Skolem in handen dat gepubliceerd was in 1922. Skolem geeft in dit essay, bij een verbetering aan Leopold Löwenheims werk, een lemma aan dat de sleutel vormt tot het bewijs van de volledigheidstelling. De resterende stap is in feite een trivialiteit. Hoe komt het dat Skolem dit niet heeft ingezien?[†] Skolem heeft een andere filosofische opvatting dan Gödel. Aan Hao Wang schrijft Gödel in 1967 dat zijn filosofische visie het hem makkelijk maakt wiskundige theorema's te ontdekken: 'Het was ook fundamenteel voor mijn overige werk in de logica'. Voor Gödel is zijn filosofische opvatting van belang voor zijn wiskundig werk. Welke rol speelt de filosofie bij je dagelijkse werk?

MN: Als je onderzoek doet heb je een bepaalde houding, die voortvloeit uit wat je van belang vindt. Je zou dat filosofie kunnen noemen. Ik ben geneigd heel veel waarde te hechten aan algemene theoretische overwegingen. Binnen de statistiek ben ik een fervent aanhanger van de Bayesiaanse School. Statistische uitspraken moeten geheel op de waarschijnlijk-

* De propositielogica en de eerste orde predikaatlogica.

† Kennelijk omdat algemene semantiek over (willekeurige) oneindige domeinen voor hem, als finitist, niet in aanmerking kwam voor de grondslagen van de wiskunde. Onder invloed van David Hilberts programma was er een algemene tendentie infinitaire methoden niet in de metamathematica toe te laten.



Een bizar schaakbord met 49 velden in plaats van de gebruikelijke 64. De postzegel uit Nigaragua laat alle acht mogelijke paardensprongen zien die vanuit een positie mogelijk zijn.

heidsrekening gebaseerd zijn en mogen wat mij betreft geen ad-hoc elementen bevatten. Het zou hier te ver voeren om duidelijk te maken wat de verschillen zijn met de klassieke statistiek die uit het begin van de vorige eeuw stamt. Voor de huidige discussie is alleen van belang dat ik *op algemene gronden sterk* de voorkeur geef aan het Bayesiaanse gedachtegoed waar dat een rol speelt… en daarnaar handel.

NK: Met behulp van formules worden in een wiskundige taal de structuren beschreven. Brouwer spreekt van 'een taal die de wiskunde begeleidt'. Er is volgens Brouwer 'ook voor zuivere wiskunde geen zekere taal'. Gödel stelt dat de wiskundige wereld complexer en sterker is dan wiskundige taal. Deze taal geeft een ware maar incomplete beschrijving van de wiskundige werkelijkheid. Volgens Wittgenstein kan alleen de eerste orde logica in taal worden uitgedrukt, voor de overige wiskunde is de taal niet toereikend. Heerst er onder wiskundigen ook zo'n opmerkelijke overeenstemming over de wiskundige taal?

MN: Ik kan hier alleen maar met een zeer laag bij de grondse reactie komen die geen vol antwoord is op jouw vraag. Als ik wel eens iets aan anderen moet uitleggen ben ik geneigd mijn handen zeer nadrukkelijk te gebruiken. Ik word bij het uitleggen handtastelijk. Dat is al eerder aan de orde geweest, trouwens. Dat uitleggen gebeurt in huis-tuin-en-keuken Nederlands en die taal is voor de wiskunde niet precies genoeg. Jargon is dan ook niet voor niets gevormd in de loop van de tijd en uiteraard geldt dat voor alle gespecialiseerde bezigheden. Kees Andriesse - die ik ken uit de tijd dat hij in Groningen bij Ruimteonderzoek werkte, en ik aldaar bij Sterrenkunde - vertelde me ooit dat hij er wel enkele jaren over had gedaan om vanuit een ingenieursachtergrond het sterrenkundige jargon aan te leren, *met alles wat daar achter steekt*. Dat laatste is wezenlijk. Er zitten achter jargon veronderstellingen die de buitenstaander niet kent. Die worden ook zelden geëxpliciteerd door de gebruikers: je hebt juist jargon om dat niet te hoeven doen. In elk begrip zit het een en ander aan kennis en veronderstellingen verborgen.

Dat de taal in haar uiterste ontvouwing te zwak zou zijn voor de wiskunde is speculatie. Kun je mentale constructies bedenken waarover je niet meer kunt praten? Hoe communiceer je dan met je vakgenoten? Kun je veralgemening bedenken die zich onttrekken aan de taal waarin de lagere concepten nog wel te vangen zijn? Hoe komt dat dan?

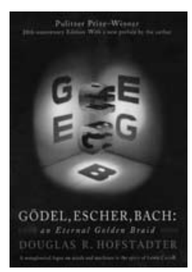
Als je over je mentale constructies niet kunt spreken is het vast en zeker tijd voor een dosis wantrouwen.

NK: De beroemdste prestatie van Gödel is de zogenaamde eerst onvolledigheidstelling. Deze toont aan dat ieder formeel wiskundig systeem dat een greintje rekenkunde bevat onvolledig is: er zullen altijd ware uitspraken bestaan die binnen het systeem, hoe uitgebreid ook, noch bewijsbaar noch onbewijsbaar zullen zijn. Merk je iets van de gevolgen van deze stelling in de wiskundige praktijk?

MN: Ik heb geen idee wat de zuivere wiskundige in zijn onderzoekingen al of niet merkt van de genoemde stelling. In de wereld van de toegepaste wiskunde* merk je hier volgens mij helemaal niets van. Mijn vermoeden is dat de uitspraken die in de categorie niet-bewijsbaar / niet-weerlegbaar vallen enigszins (understatement) gekunsteld zullen zijn. Kijk maar eens naar het bewijs van de stelling zoals dat (aangepast voor leken, zonder twijfel) weergegeven is in het boek *Gödel, Escher, Bach an eternal golden braid* van Douglas R. Hofstadter.[7] Maar dat vermoeden glashard onderbouwen kan ik niet…

* Het Engelse 'applied mathematics' hangt in tussen wiskunde en fysica en wordt niet echt gedekt door wat men in Nederland 'toegepaste wiskunde' noemt.

Kurt Gödel, ook wel 'de Einstein van de logica' genoemd, hier gefotografeerd onder huiselijke omstandigheden in zijn kamer te Princeton in 1958.



weerlegbaar vallen enigszins (understatement) gekunsteld zullen zijn. Kijk maar eens naar het bewijs van de stelling zoals dat (aangepast voor leken, zonder twijfel) weergegeven is in het boek Gödel, Escher, Bach an eternal golden braid van Douglas R. Hofstadter. Maar dat vermoeden glashard onderbouwen kan ik niet…

Het oneindige in de wiskunde

Het oneindige in de wiskunde

In dit debat staat het oneindige in de wiskunde centraal. Wie de natuurlijke getallen op een rijtje zet beseft dat hij almaar door kan gaan. Zo komt het oneindige om de hoek kijken. Niet, of misschien niet, als zelfstandig wiskundig concept, maar in eerste instantie als blote aanduiding van een reeks handelingen waaraan geen eind komt. Wanneer het mathematische vakgebied der analyse tot ontwikkeling komt duikt het symbool ∞ op, elegant onder en boven sommatietekens en integraalsymbolen geschreven. De vraag is gerechtvaardigd wat de wiskundigen van de zeventiende, achttiende en begin negentiende eeuw zich hierbij precies gedacht hebben.

Er gebeurt op het eind van de negentiende eeuw iets opvallends: het oneindige wordt door Georg Cantor opgevat als een wiskundige entiteit op zichzelf. Het oneindige wordt tot een wiskundige entiteit, waaraan 'heuse' wiskunde bedreven kan worden.

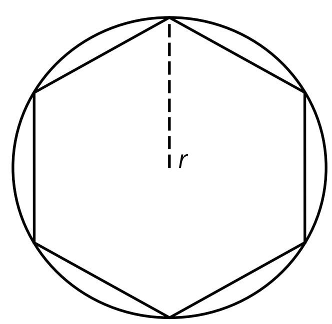
Er ontstaat een 'transfiniete rekenkunde' die nauw verbonden is met de leer der verzamelingen. Opvallend is dat er sprake is van verschillende soorten van oneindigheid.

De natuurlijke getallen kunnen op een rijtje gezet en netjes afgeteld worden in principe. Men kan zeggen dat men op een gegeven moment alle natuurlijke getallen beneden de 1 miljard geteld heeft. Voor de reële getallen is dat niet waar en Cantor laat dat zien in een verbazingwekkend eenvoudig bewijs uit het ongerijmde. De oneindigheid geassocieerd met de reële getallen is een andere dan de oneindigheid van de 'aftelbare' natuurlijke getallen. De zogenaamde 'machtigheid' van de reële getallen is wezenlijk groter dan die van de natuurlijke. Maar daarbij houdt het niet op. Oneerbiedig gezegd komt Cantor tot een hele dierentuin van oneindigheden. En dat brengt moeilijkheden met zich mee. Wiskundig ingestelde filosofen en filosofisch ingestelde wiskundigen gaan in de decennia die volgen in debat over wat dit alles voor de wiskunde betekent. Sterker nog, òf het wat betekent.

MN: Een eerste kennismaking van de mensheid met het oneindige moet al vroeg tot stand zijn gekomen. Is daar eigenlijk iets concreets over bekend?

NK: In 2000 v.Chr. beschikten de Babyloniërs al over een hoog ontwikkelde wiskunde. Zij beperkten zich tot praktische problemen* van het dagelijks leven, en niets in het dagelijks

* zNaast de wiskunde met praktische toepassingen beoefenden zij een recreatie-ve wiskunde, waarmee zij onder andere kwadratische vergelijkingen oplosten.



Een cirkel met ingeschreven veelhoek voor het bepalen van de oppervlakte.

leven heeft direct te maken met oneindigheid. Vanaf de zesde eeuw v.Chr. transformeerden de Grieken de wiskunde tot een wetenschap waarbij kennis het belangrijkste doel werd, wiskunde werd een intellectuele discipline. Niet alleen de idee van oneindig groot, maar ook die van oneindig klein interesseerde de Grieken. Het oneindig kleine komt tevoorschijn bij het bepalen van oppervlakten van gekromde figuren. Van een rechthoekige figuur is de oppervlakte eenvoudig te bepalen, maar hoe bepaal je de oppervlakte van een cirkel? Het probleem staat bekend als ‘de kwadratuur van de cirkel’: hoe vind je bij een gegeven cirkel een vierkant - kwadraat - dat dezelfde oppervlakte heeft. De Grieken gebruikten een ingeschreven veelhoek waarvan het oppervlak een benadering is van die van de cirkel. Als we het aantal zijden van de veelhoek vergroten, dan wordt de benadering verbeterd. Maar... gaat dit proces oneindig door? Of kunnen we in een bepaald stadium stoppen en zeggen dat de veelhoek samenvalt met de cirkel? Anaxagoras is de eerste wiskundige waarvan wij weten dat hij probeerde de cirkel te kwadreren.

MN: In moderne termen gesteld: het probleem van het kwadreren van de cirkel hoort thuis in de integraalrekening, in tegenstelling tot de differentiaalrekening die van toepassing is op veranderingen van krommen.

Vanuit onderwijsoogpunt is het volgende interessant. De integraalrekening is in feite de oudste tak van de infinitesimaalrekening[*], tenminste, als je de pogingen van Euclides en anderen om inhouden van figuren te berekenen als een vroege vorm van integraalrekening ziet.

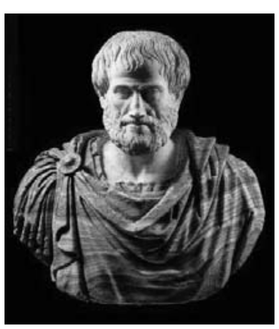
De differentiaalrekening is zo beschouwd later ontwikkeld. In het algemeen volgt het onderwijs de ontwikkeling van een vakgebied. Omdat de moeilijkheidsgraad in de loop van de ontwikkeling toeneemt, maar ook vanwege de ‘innere Logik’. Echter, de integraalrekening wordt in het huidige onderwijs behandeld na de differentiaalrekening, en voor het berekenen van (Riemannse-) integralen kan dat ook niet anders. Maar dit is een zijpaadje...

NK: Dat is een leuke observatie. Maar weer even terug naar de hoofdweg. De Grieken waren onderling verdeeld over de aard van het oneindig kleine. Er ontstonden twee rivaliserende scholen. De Eleaten geloofden in de oneindige deelbaarheid en ontkenden het bestaan van een kleinste eenheid. Zeno is een bekende voorman van deze stroming. De Pythagoreeërs daarentegen reduceerden alle problemen tot hele getallen en waren aanhangers van het atomisme. Zij waren van mening dat alles (ruimte, tijd en materie) uiteindelijk is opgebouwd uit kleine basiseenheden. De strijd tussen atomisme en continuïteit als modellen van de empirische werkelijkheid is tot op de huidige dag niet ten volle beslecht.

MN: Gauss waarschuwde ervoor dat het oneindige niet mag worden opgevat als iets dat er ‘is’, maar als iets dat een limietprocedure aanduidt. Hij schrijft in een brief aan een vriend

* Infinitesimaalrekening wordt ook wel analyse genoemd.

De pre-Socratische Griekse filosof Anaxagoras [circa 500-428 v.Chr] schreef: ‘Onder het kleine is er niet het kleinste en onder het grote niet het grootste, maar er is altijd iets nog kleiner en iets nog groter’.



Aristoteles [384-322 v.Chr.] nam een duidelijk standpunt in: ‘Actuele onein-digheid bestaat niet’.

dat hij protesteert tegen het gebruik van oneindigheid als iets voltooids ‘Het oneindige is slechts een wijze van spreken [..]’.[*] Volgt hieruit dat er wiskundigen waren in zijn tijd die het oneindige als een getal zagen? Was deze uitspraak bedoeld als een vermaning?

NK: Toch zeg ik eerst nog iets over de Grieken. Als men in de middeleeuwen sprak over ‘de filosoof’, dan bedoelde men Aristoteles. Deze autoriteit beschouwde oneindigheid als een onbereikbaar ideaal. Bij het aftellen van natuurlijke getallen komt men steeds verder, maar een volledige opsomming is onmogelijk, het ‘getal’ oneindig wordt nooit bereikt. Oneindigheid in de ogen van Aristoteles is *een potentiële* oneindigheid. Over het oneindige kleine had Aristoteles een zelfde opvatting: een onbeperkt proces van voortdurende deling. Tot aan het midden van de achttiende eeuw was dat de gebruikelijke visie. Newton, Euler en Gauss konden er uitstekend mee overweg. De opmerking van Gauss was bedoeld als een afkeuring van het gebruik van het oneindige als was het een getal, waarvoor dezelfde rekenregels kunnen worden toegepast als voor gewone getallen. Zelfs Euler bijvoorbeeld, schroomde niet te zeggen dat 1/0 oneindig is, en dat 2/0 twee maal zo groot is als 1/0.

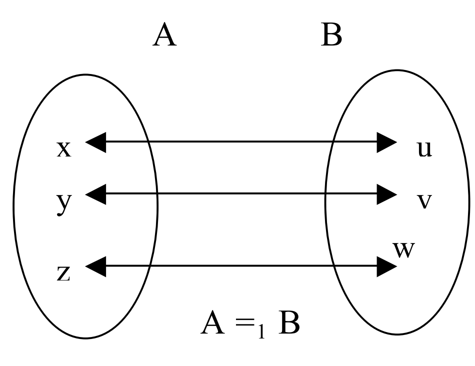
Cantor daarentegen accepteerde actuele oneindigheid door te benadrukken dat een verzameling - en een oneindige verzameling in het bijzonder - moet worden beschouwd als een totaliteit, te begrijpen als een object. Daar kun je natuurlijk vraagtekens bij zetten. Hoe kunnen wij met ons eindige verstand oneindigheid omvatten? Volgend de filosofische duizendpoot Bertrand Russell kunnen we dat. Als *A* en *B* verzamelingen zijn en er bestaat een bi-jectie[†] tussen *A* en *B*, dan zijn *A* en *B* gelijkmachtig, simpel gezegd: de verzamelingen *A* en *B* zijn even groot. Hier speelt het onderscheid tussen eindig en oneindig geen rol. Vervolgens definieerde Russell de getallen met behulp van mathematische inductie, en hij nam een oneindige verzameling als een waarvan het kardinaalgetal niet eindig is. Hij concludeerde: je begrijpt wat een ‘verzameling’ is, je begrijpt ook wat een ‘eindige verzameling’ is, dus je begrijpt ook een ‘verzameling die niet eindig is’.[‡] Dit begrip van verzamelingen beschouwt Russell als ‘[..] taken to be the sole source of our knowledge of the properties of the infinite’.[8] Begrijpen wiskundigen nu dan wat oneindig is?

MN: Als ik op je zojuist gegeven schets van de geschiedenis van het begrip oneindig terugkijk merk ik dat er door de wiskundigen pas in de negentiende eeuw *expliciet* over het oneindige wordt nagedacht. Je weet dat wiskundigen soms proberen - zoals we in een vorig gesprek over filosofie en wiskunde vaststelden - begrippen te definiëren door ze terug te brengen tot iets anders dat al bekend is.

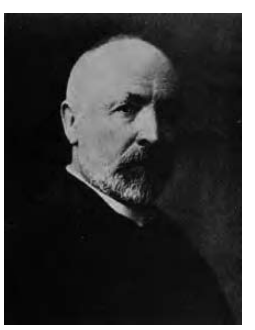
* ‘[..] façon de parler [..]’

† Als f een bi-jectie is van verzameling A naar verzameling B dan brengt f een één-op-één correspondentie tot stand tussen de elementen van A en B: bij elk a A hoort precies één b∈B met b = f(a), en bij elke b∈B hoort precies één a∈A met
a = f--1(b).

‡ Formeler uitgedrukt: volgens het theorema van Dedekind is verzameling S oneindig alleen en alleen dan als er een echte deelverzameling bestaat van S die dezelfde kardinaliteit heeft als S.



Een bi-jectie, de twee verzamelingen A en B hebben een zelfde kardinaalgetal.



Georg Cantor [1845-1918] is de geestelijke vader van de verzamelingenleer en van een coherente theorie over het oneindige. Hij was de eerste die veronderstelde dat het mogelijk zou kunnen zijn wiskunde te herleiden tot de theorie van de verzamelingen.

In een bekend leerboek der algebra van Birkhoff en MacLane[9] beginnen de auteurs met een definitie van een kardinaalgetal *n* van een verzameling in termen van het bestaan van een één-op-één correspondentie tussen de elementen van de verzameling en de eerste *n* natuurlijke getallen. Dan volgt er deze definitie: 'A nonempty set *S* is called finite if and only if its cardinal number is a positive integer. A set which is not empty or finite is called infinite'. De laatste zin doet precies wat Bertrand Russell verwoordde. Bovendien weten we dat het laatste deel van de definitie geen loze bewering is; de verzameling van de natuurlijke getallen N is immers niet-leeg en niet eindig...

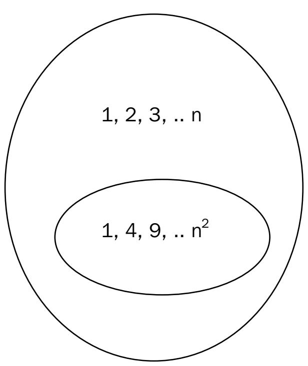
Het oneindige wordt in verband gebracht met het bestaan van bi-jecties tussen (delen van) verzamelingen, en bi-jecties zijn dingen die we al kennen... Met het begrippenapparaat van verzamelingen en afbeeldingen tussen verzamelingen kan dan op een 'gezonde' basis doorgeredeneerd worden en het onderscheid gemaakt tussen aftelbare en overaftelbare verzamelingen.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	...	*N*
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	*4*	*9*	*16*	*25*	*36*	*49*	*64*	...	N^2

NK: Maar daarbij komen wel wonderlijke paradoxen aan het licht. De volgende puzzel, die bekent staat als Galileo's-paradox, heeft veel wiskundigen geïntrigeerd. In het schema links staan de natuurlijke getallen met daaronder hun kwadraten. Het lijkt alsof de verzameling van de natuurlijke getallen even groot is als de verzameling van kwadraten, terwijl de verzameling van kwadraten een deelverzameling is van de verzameling van natuurlijke getallen. Wat is hier aan de hand?

Voor we in het oneindige duiken hebben we twee begrippen nodig die al vluchtig ter sprake kwamen: *ordinaalgetallen en kardinaalgetallen*. Een ordinaalgetal meet de plaats van een object in een welgeordende rij. Een kardinaalgetal meet de grootte van een verzameling. Voor eindige getallen kan men de natuurlijke getallen gebruiken, zowel voor de ordening (eerste, tweede, derde, ..) als om de grootte van de verzameling te bepalen (bevat 1 element, bevat 2 elementen, ..). De verzameling natuurlijke getallen N kan men op oneindig veel verschillende manieren ordenen. Met de oneindige verzameling N is één oneindig kardinaalgetal geassocieerd en vele ordinaalgetallen.

Om een idee te krijgen van oneindigheid kunnen we nagaan hoe ver we komen met eenvoudig tellen. Cantor telde: eerste, tweede, derde .. en sloot deze oneindige rij af met de limiet-ordinaal ω (omega). Beginnend met ω telde Cantor door: ω+1, ω+2, .. eindigend met de limiet-ordinaal ω+ω=ω.2. Let op, verrassenderwijs is ω.2 = ω+ω, maar 2.ω= 2+2+2+ .. = ω. De eerste transfiniete getallen ontstaan door dit proces te blijven herhalen. Cantor koos voor oneindigheid het symbool ω, de laatste letter uit het Griekse alfabet. Hij beschouwde deze ω als een afsluiting van de reeks eindige getallen. De omega zou verwijzen naar het bijbelboek Openbaringen 1:8 'Ik ben de alfa en de omega'. Met de theorie van transfiniete getallen zou je in een verzameling het aantal elementen voorbij ω kunnen tellen.



De verzameling kwadraten is een deelverzameling van de verzameling van de natuurlijke getallen.

MN: Ja, knappe jongens die zuivere wiskundigen, maar dit alles is wel heel erg wiskundig l'art pour l'art...

NK: Heb geduld, ik ga verder, en er komen nog meer kunsten aan te pas. Cantor vermoedde aanvankelijk dat elke oneindige verzameling aftelbaar zou zijn. Hij besteedde veel tijd om dit te bewijzen. Echter, dit vermoeden bleek niet juist te zijn. De kardinaliteit van de verzameling natuurlijke getallen noemde Cantor $\aleph_0$ (alef nul) en hij toonde uiteindelijk zelf aan dat de verzameling van alle deelverzamelingen van N een grotere kardinaliteit heeft dan $\aleph_0$. Algemeen geldt dat van elke verzameling *S*, de machtsverzameling van *S* - genoteerd als $\wp(S)$ - een grotere kardinaliteit dan *S*. Terzijde: dit levert meteen een leuke paradox op. Als je voor *S* de verzameling van alle verzamelingen neemt, dan bestaat er een verzameling als $\wp(S)$ die 'groter' is dan *S*. (!) Het kan worden aangetoond dat $\wp$(N) dezelfde kardinaliteit heeft als de niet-aftelbare verzameling van alle reële getallen R of als de niet-aftelbare verzameling van alle punten op een rechte lijn. Er zijn eindeloos veel kardinaalgetallen: naast de enige aftelbare kardinaal $\aleph_0$ is er de eerste niet aftelbare kardinaal $\aleph_1$, de daarop volgende $\aleph_2$, etcetera. Om deze dierentuin te kunnen beheren ontwikkelde Cantor tussen 1874 en 1879 een nieuwe wiskundige discipline: de verzamelingenleer. Voor een theorie over het oneindige greep hij dus niet terug op bestaande concepten, maar ontwikkelde nieuwe.

Cantor heeft de puzzel van Galilei opgelost en er een grotere puzzel voor in de plaats gegeven: de continuümhypothese, die tot op de dag van vandaag niet opgelost is. [*]Volgens Aczel[10], die verwijst naar de Joodse achtergrond van Cantor, zag Cantor de letter alef als een symbool voor god en zijn oneindigheid. Cantor vertelde dat hij trots was op zijn keuze van de letter alef als symbool voor de transfiniete getallen, aangezien de alef de eerste letter is van het Hebreeuwse alfabet. Cantor beschouwde de transfiniete getallen als een nieuw begin van wiskunde: het begin van het actuele oneindige. Volgens Nederlandse wiskundige Hans Lauwerier[0] echter introduceerde Cantor de alef omdat de gewone letters van het Romaanse en Griekse schrift veel werden gebruikt of al een vaste betekenis hadden en de alef voorhanden was op de meeste Duitse schrijfmachines van die tijd.[11]

MN: Elegante hoogdravendheid tegenover Hollandse nuchterheid.

NK: Laten we de zaak nuchter bekijken. Cantor stelde dat het ontkennen van actuele oneindigheid het ontkennen van irrationale getallen inhoudt, want zulke getallen - die bestaan - hebben een oneindige decimale uitbreiding. Elke eindige decimaal zou alleen een rationale benadering zijn.

Hoe gaan mensen van de praktijk - fysici - om met meerdere oneindigheden? Speelt het

* Cantors continuüm hypothese (CH) is het vermoeden dat 2exp $\aleph^0 = \aleph^1$. Cantor en anderen probeerden CH te bewijzen. Door het werk van Gödel en Cohen werd duidelijk dat CH noch kan worden bewezen noch kan worden weerlegd op basis van de axioma's van de verzamelingenleer (ZFC). De vraag of CH waar is of niet blijft open.

Er zijn twee principes voor het genereren van ordinaalgetallen:
1 Vanuit ordinaalgetal a is het volgende ordinaalgetal a+1 te vinden.
2 Als er een stijgende rij ordinaalgetallen is, dan is lim(a) het laatste ordi-naalgetal dat groter is dan alle a's.
Op basis van het tweede principe ontstaat na een lege rij het eerste ordinaal-getal 0. Hierop wordt het eerste principe herhaald toegepast om de ordinaal-getallen 1,2,3,4, .. n te vormen. De lim(n) van deze stijgende rij is ω.. . Door het eerste beginsel opnieuw toe te passen onstaat de rij ω, ω+1, ω+2, .. lim(ω+n) = ω+ωτ = ω.2. Zo ontstaan de eerste transfiniete getallen:

1,2,3 .. ωzz
ω+1, ω+2, .. ω+ω(=ω.2)
ω.2+1, ω.2+2, ω.2+3, .. ω.2+ω (=ω.3)
ω.3+1, ω.3+2, .. ω.4, .. ω.5, .. ωω (=ω2)
ω2+1, ω2+2, .. ω2+ω
ω2+ω+1, ω2+ω+2, .. ω2+ω.2
ω2+ω.2+1, ω2+ω.2+2, .. ω2+ω.3
ω2+ω.3+1, ω2+ω.3+2, .. ω2+ω2(=ω2.2)
ω2.2+1, ω2.2+2, .. ω2.2+ω(=ω2.3)
ω2.3+1, ω2.3+2, .. ω2.ω(=ω3)
ω3+1, .. ω4, .. ω5, .. ωω
ωexpω.. ωexpωexpω .. ωexpωexpωexpω ... ωω

wel een rol bij hen?

MN: Wacht even. Ik wil eerst even terug naar een vorige observatie van mij. Mijn opmerking dat Cantor het begrip oneindigheid terug bracht tot iets bekends is kennelijk onjuist. Voor de niet volledig ingevoerde 21ste-eeuwer is verzamelingenleer iets dat v__r het praten over oneindig lijkt te komen, maar historisch is de ontwikkeling van de concepten kennelijk hand in hand gegaan. Hoewel? Was er niet een intuïtieve vorm van de verzamelingenleer voor Cantor?

NK: Ja die was er, maar niet vóór Cantor. De verzamelingenleer die Cantor ontwikkelde staat nu bekend als de naïeve verzamelingenleer of de intuïtieve verzamelingenleer.* In 1895 ontdekte Cantor de eerste paradox in zijn theorie. Het werd duidelijk dat er iets niet klopte met de naïeve benadering van het bestaan van verzamelingen. In 1903 werden de problemen algemeen bekend. In een poging dit op te lossen werd de verzamelingenleer gereconstrueerd met een axiomatische benadering. Hieruit ontstond de axiomatische verzamelingenleer.

MN: Duidelijk. Maar nu een antwoord op je vraag naar de relevantie van dit alles voor fysici. Voor de toepassingen van de wiskunde in de fysica is deze hele discussie extreem esoterisch. De problemen die er in de natuurkunde bestaan met oneindig liggen op het *operationele vlak*, zal ik maar zeggen. Een voorbeeld.

In het begin van de twintigste eeuw hadden fysici behoefte aan een functie die overal nul was, maar op één punt 'waarde' oneindig aannam en waarvan de integraal over het totale domein gelijk 1 was. Dit is de beroemde delta-functie. Hoe wiskundigen reageerden bij de introductie van dit krankzinnige beest laat zich raden. Het vreemde was wel dat de fysici met behulp van dit wiskundige onding in hun werk prima resultaten boekten. Dit heeft er toe geleid dat enkele wiskundigen en mathematische fysici de zaak toch maar eens nader gingen bekijken en er achter kwamen dat een wiskundig zuivere invoering van de zogenoemde delta-distributie mogelijk is. Ik noem Laurent Schwarz en James Lighthill. Maar nogmaals, dit heeft uitsluitend te maken met hoe je met zekere praktische problemen omgaat waarbij oneindig optreedt. Fysici komen het oneindige tegen in hun omgaan met N (typisch bij sommaties) en met R en zelfs R^M waarbij M een getal van de orde 10^{26} kan zijn zoals bij de faseruimte van de statistische mechanica, om maar een voorbeeld te noemen. Het worstelen met machtigheden daarentegen is niet hun probleem, het staat ver af van hun 'noden'. Worstelen is wel gedaan door een aantal mathematen en logici. Dat weet ik.

NK: Nou en of! Er is inderdaad heel wat geworsteld na Cantor. In 1907 promoveert de Nederlander Bertus Brouwer op *Over de grondslagen der wiskunde*. Dirk van Dalen[12] schrijft: 'een klaroenstoot, dat was Brouwers dissertatie; maar wel van een eenzame in de woestijn'. Brouwer is het volledig oneens met Cantor. Zijn XIII[de] stelling in het proefschrift luidt: 'De tweede getalklasse van Cantor bestaat niet'. Brouwer heeft er niets op tegen om na 0,1,2,3 .. ω weer opnieuw te gaan tellen: ω, ω+1, .. en weer een groter gebied te openen. Zo kunnen we doorgaan - enzovoort - waarbij het geheel van de ingevoerde getallen aftelbaar blijft. Behalve de oneindige, bestaan geen andere machtigheden dan aftelbaar oneindig onaf, het geheel van de welgeordende getallen is aftelbaar onaf. 'Aftelbaar' betekent dat er een aftelbare groep welgedefinieerd is in aan te geven, 'onaf' betekent dat uit elke aftelbare groep nieuwe elementen af te leiden zijn die tot de verzameling in kwestie behoren. Een voorbeeld van een aftelbare onaffe verzameling is het geheel van alle definieerbare punten op het continuüm. Brouwer stelt: 'Bij het nooit klaar komend opbouwen van een aftelbare onaffe verzameling kunnen we al voortbouwend naar opvolging afbeelden op de rij der welgeordende verzamelingen, die eveneens nooit uitgeput raakt; het begrip van gelijkmachtigheid uitbreidend, om het hier toepasbaar te houden, kunnen we zeggen: *Alle aftelbare onaffe verzamelingen zijn gelijkmachtig*'.

Brouwer beschouwt de wiskundige 'objecten' als mentale constructies. De getallenverzameling van de natuurlijke getallen bijvoorbeeld onstaat in degene die wiskunde bedrijft: begin met nul, en voeg één toe aan elk reeds eerder geconstrueerd getal. Het oneindige wordt geconstrueerd in de tijd, Brouwer haalt Aristoteles' idee van potentiële oneindigheid weer van stal: het oneindige is 'in wording', nooit actueel. Samengevat: er is één soort oneindigheid die onbereikbaar is. Wellicht dat deze benadering van het oneindige het meest de praktijk van de wiskunde-gebruiker benadert.

MN: Ik ben het met je laatste opmerking eens. Het symbool ∞ wordt niet gebruikt als een getal (actueel oneindig), maar als iets dat in een limietproces betekenis heeft. Zo wordt dat bij de colleges analyse ook geleerd.

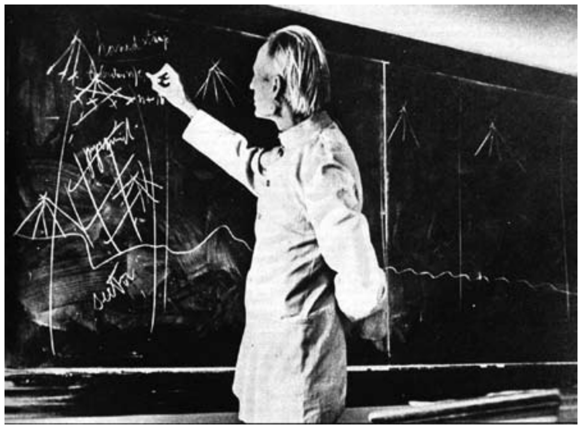
Ik haalde in het begin van de discussie de natuurkundige Jaynes aan, een voorvechter van de opvatting dat de waarschijnlijkheidsrekening een uitbreiding is van de logica, een manier om onvolledige kennis daarin te incorporeren. In zijn boek haalt hij fel uit naar het gebruik van het concept van de oneindige verzamelingen. Filosofisch gezegd, hij vindt het idee van het actueel oneindige abject. Hij sluit dus aan bij de methodologie die in de klassieke analyse wordt gebruikt ten aanzien van de omgang met het oneindige. Als een 'praktische' theoretische fysicus haalt hij voorbeelden aan waarbij de vreselijkste ongelukken gebeuren door een omgaan met het oneindige dat afwijkt van wat in de analyseboekjes voor eerste- en tweedejaars studenten geleerd wordt. Jaynes memoreert in appendices van zijn boek13 (kopen dat boek!) dat Brouwer en Hermann Weyl beseften dat de klassieke logica was ontworpen voor de toepassing op *eindige* verzamelingen. De toepassing op *oneindige* verzamelingen door logici als Cantor verdient justificatie die er niet komt. Weyl beschrijft die toepassing als: '[..] the Fall and original sin of set theory, for which it is justly punished by the antinomies'.

Ook Henri Poincaré moet niets van het gegoochel van de logici hebben en in zijn in het Engels vertaalde *Science and Method* geeft hij een weerwoord en schrijft: '[..] Het wordt tijd dat deze overdrijvingen worden behandeld zoals ze verdienen. Ik heb geen enkele hoop deze logici te overtuigen, want zij hebben al veel te lang in deze atmosfeer doorgebracht'.

Misschien is het in deze discussie relevant op te merken dat Poincaré en Weyl beiden niet alleen wiskundigen waren, maar dat zij ook in de fysica iets hebben betekend. Zij stonden met beide benen op de grond.

NK: Inderdaad, het werk van Cantor stond onder zware kritiek. Leopold Kronecker, die van mening was dat de natuurlijke getallen de enige werkelijke wiskundige objecten zijn, noemde Cantors resultaten 'wiskundige onzin'. Hij probeerde zelfs een publicatie van Cantor tegen te houden. Een bekende uitdrukking van Kronecker is: 'God maakte de natuurlijke getallen en al het overige is mensenwerk'. De opvattingen van Kronecker sluiten aan bij het atomisme van de Pythagoreeërs. In de geschiedenis van de filosofie is het opvallend hoe vaak men teruggrijpt op oude concepten.

In het algemeen heb je een behoorlijke wiskundige bagage nodig om wiskundige bewijzen te kunnen volgen. De twee volgende bewijzen over oneindigheid zijn kinderlijk



Bertus Brouwer 1881-1966] beweerde in zijn proefschrift 'De tweede getalklasse van Cantor bestaat niet'.

* Intuitive set theory or naive set theory.

eenvoudig, ze doen alleen geen beroep op ingewikkelde vergelijkingen, je hebt alleen wat visueel voorstellingsvermogen nodig. Het eerste bewijs toont aan dat de verzameling rationale getallen - dat zijn alle breuken - even groot is als de verzameling natuurlijke getallen. Anders gezegd: de verzamelingen N en Q zijn gelijkmachtig, hun kardinaliteit is (alef)^0. Dat is contraintuïtief, want tussen twee opvolgende natuurlijke getallen liggen oneindig veel breuken. Bijvoorbeeld tussen de natuurlijke getallen 6 en 7 liggen de breuken 6 1/2 .. 6 1/3 .. 6 1/4 .. enzovoort. In onderstaande tabel neemt van links naar rechts de noemer toe, en van boven naar beneden de teller. Met deze methode kun je in principe alle breuken opsommen. Van de oneindig grote tabel is maar een klein hoekje afgebeeld, dat van het begin van de positieve breuken. De tabel kan worden doorgewerkt door de pijlen te volgen.

Sommige breukenwaarden komen meerdere keren voor, zoals 1/2, 2/4, 3/6. Die kunnen worden overgeslagen. Wat je dan krijgt is en bi-jectie tussen de verzameling positieve breuken en de verzameling positieve hele getallen. Cantor toonde met dit elegante bewijs aan dat de rationale getallen een verzameling vormen met de kardinaliteit (alef)$_0$.

Cantor gebruikt een bewijs uit het ongerijmde om aan te tonen dat de verzameling reële getallen niet-aftelbaar is. Hij stelt eerst dat de verzameling reële getallen wel aftelbaar is. In dat geval kunnen we over een tabel beschikken met alle reële getallen. Aan elk reëel getal kunnen we een natuurlijk getal koppelen. Maar volgens Cantor kunnen er getallen worden gevormd die niet in de tabel voorkomen. Als de verzameling reële getallen aftelbaar is dan kan dat niet, want elk reëel getal moet in de tabel zitten. De enige manier om deze tegenspraak op te lossen is door het uitgangspunt te verwerpen, met als conclusie dat de verzameling reële getallen niet-aftelbaar is. Kort gezegd, er zijn meer reële getallen dan natuurlijke getallen.

Hieronder is een stukje van de oneindige lange tabel gegeven met de reële getallen. Voor het gemak nemen we alleen getallen tussen 0 en 1.

Reëel getal	Natuurlijk getal
0,532728283 ..	1
0,924725123 ..	2
0,637383930 ..	3
0,864619374 ..	4

Op het eerste gezicht zou je denken dat je alle reële getallen kunt koppelen aan een natuurlijk getal. In dat geval zou de verzameling reële getallen net zo groot zijn als de verzameling natuurlijke getallen. Er is dan een één-op-één correspondentie tussen de twee verzamelingen, en dat is de definitie voor 'even groot'.

Cantor ontdekt dat er een methode is om extra reële getallen te genereren, die niet in de tabel voorkomen. Cantor gaat door de tabel. Van het eerste getal neemt hij het eerste cijfer,

1/1	⇨	1/2		1/3	⇨	1/4		1/5	⇨	1/6	..
	⬃		⬀		⬃		⬀		⬃		
2/1		2/2		2/3		2/4		2/5		2/6	..
⇩	⬀		⬃		⬀		⬃				
3/1		3/2		3/3		3/4		3/5		3/6	..
	⬃		⬀		⬃						
4/1		4/2		4/3		4/4		4/5		4/6	..
⇩	⬀		⬃								
5/1		5/2		5/3		5/4		5/5		5/6	..
	⬃										
6/1		6/2		6/3		6/4		6/5		6/6/	..
⇩											
..		..		..		..		..		..	

van het tweede getal het tweede cijfer, van het derde getal het derde cijfer, enz. Hieronder zijn de cijfers die Cantor neemt onderstreept.

Reëel getal	Natuurlijk getal
0,532728283 ..	1
0,924725123 ..	2
0,637383930 ..	3
0,864619374 ..	4

Met de onderstreepte cijfers maakt Cantor het getal 0,5276 .. Vervolgens verandert hij elk cijfer in dit getal, bijvoorbeeld door overal een 1 bij op te tellen. Met het nieuwe getal 0,6387 .. is er iets vreemds. Het verschilt namelijk met elk getal in de tabel. Het eerste cijfer was het eerste cijfer van het eerste getal. Nu is dat cijfer 1 meer geworden. Het nieuwe getal is ongelijk aan het eerste. Van het tweede getal in de tabel is het tweede cijfer veranderd. Het nieuwe getal is dus ook ongelijk aan het tweede getal. Enzovoort. Met dit diagonaalbewijs - de naam spreekt voor zich - heeft Cantor aangetoond dat er meer reële getallen zijn dan natuurlijke getallen.

Poincaré daagde Cantor uit te bewijzen dat R groter is dan N. Hij vond dat Cantor alleen aangetoond had dat we geen methode kunnen ontwerpen waarmee natuurlijke getallen gepaard kunnen worden aan reële getallen. Het is mogelijk dat R geen echte verzameling is, doordat de onhandelbare reële getallen zich niet laten groeperen in een gedetermineerd geheel.

Zojuist bracht je Hermann Weyl ter sprake. Recent onderzoek van Dennis Hesseling heeft aangetoond dat het bekende grondslagendebat in de wiskunde in gang werd gezet door een publicatie van Weyl.[14] Deze plaatste in 1921 het thema over het 'wiskundige bestaan' definitief op de agenda. Weyl, die onder David Hilbert studeerde, werd een van de eerste aanhangers van Brouwers intuïtionisme.

Hilbert noemde Cantors schepping een 'paradijs'. Volgens Hilbert lieten recente weten-schappelijke ontwikkelingen geen ruimte voor oneindigheid. Van een vloeistof krijgen we de indruk dat deze onbeperkt deelbaar is, en dat de kleinste delen ervan dezelfde eigenschappen vertonen als het geheel doet. Maar de moderne wetenschap heeft grenzen aan de deelbaarheid ontdekt. In plaats van het oude principe *natura non facit saltus* kunnen we het tegendeel stellen, namelijk, de natuur maakt sprongen. Euclidische meetkunde leidt noodza-kelijk tot het postulaat dat ruimte oneindig is. Ofschoon deze meetkunde een consistent conceptueel systeem is, volgt daar niet uit dat de werkelijkheid Euclidisch is.

MN: Wacht even. Hilbert haalt resultaten uit de fysica aan om iets over het oneindige te zeggen? Dat vind ik voor een wiskundige nogal kras. Kijk, dat fysici een bepaald

David Hilbert [1862-1943] is bekend als grondlegger van de functionaal-analyse. Hij was een internationale grooheid, een richtingbepalende wiskun-dige. In 1899 publiceerde hij Grundlagen der Geometrie. Hierin presenteer-de hij de Euclidische meetkunde in een axiomatisch raam. In 1900 gaf hij een lezing te Parijs. Voor het internationaal gezelschap wiskundigen formu-leerde hij drie-entwintig wiskundige problemen als onderzoeksprogramma voor de twintigste eeuw.

oneindigheidsbegrip van wiskundigen gebruiken dan wel naast zich neerleggen is te begrijpen en oké. Zij zijn de gebruikers, het is hun legitieme keus. Maar dat een wiskundige resultaten uit de natuurkunde gebruikt als opstapje naar het oneindige?!

NK: Ja dat doen ze, Hilbert gebruikt de resultaten uit de fysica om aan te tonen dat oneindigheid in fysieke wereld niet aanwezig is. Tegelijkertijd onderkent hij de oneindigheid in de wiskundige wereld. Cantors 'paradijs' blijkt niet een aards maar een wiskundig paradijs te zijn. De resultaten uit de fysica zijn inderdaad een 'opstapje', zoals je zegt, naar het rijke domein van de wiskunde. Einstein heeft volgens Hilbert aangetoond dat we de Euclidische meetkunde moeten opgeven. Hij is van mening dat materie en energie niet onbeperkt deelbaar zijn. De werkelijkheid is eindig, zowel in het groot als in het klein. Toch speelt het oneindige een belangrijke rol in ons denken als onontkoombaar concept. Als voorbeeld geeft Hilbert een eenvoudige formule uit de getallentheorie:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2 = n (n+1) (2n+1) /6$$

Voor n mogen we elk natuurlijk getal substitueren. Deze formule bevat impliciet *oneindig veel* proposities. Het lijkt erop dat het oneindige een interne aangelegenheid is van wiskunde.

Hilbert verklaarde dat aan alle wetenschappelijk denken een bepaalde, zeer evidente soort van redeneren ten grondslag ligt. Deze redeneringen zijn finitistisch van aard. Een bewering als 2+3=5 behoort tot het finitistische deel van de rekenkunde, Goldbachs vermoeden - ieder even getal groter dan twee is de som van twee priemgetallen - kennelijk niet. Een probleem is hoe kan binnen het finitistisch deel van de rekenkunde een zin toegekend worden aan het niet-finitistische deel. De wiskunde moet geformuleerd worden als een formele axiomatische theorie. Met behulp van finitistische middelen moet bewezen worden dat deze theorie vrij is van contradicties. Het consistentiebewijs mag op geen enkele wijze het bestaan van het actueel oneindige gebruiken.

Er is een analogie met de Euclidische meetkunde: door een handige interpretatie kunnen uitspraken over punten in het oneindige herleid worden tot uitspraken over gewone punten en lijnen. De punten in het oneindige heten de ideale punten en de punten van het vlak de reële punten. In een bewijs over reële punten kunnen de stappen waarin ideale punten voorkomen geëlimineerd worden. Analoog heten in de rekenkunde de finitistische uitspraken de 'reële uitspraken' en de overige de 'ideale uitspraken'. De toespraak uit 1925 waarin Hilbert deze ideeën presenteert is gepubliceerd onder de titel *Über das Unendliche* en sedertdien is dit lezenswaardige artikel in veel bloemlezingen opgenomen.[15]

Hilbert heeft dus het domein van het oneindige behoorlijk ingeperkt: de fysieke wereld is eindig, het oneindige lijkt alleen voor te komen in wiskunde. Ideale objecten mogen alleen worden toegelaten tot de wiskunde als aangetoond kan worden dat deze onschadelijk zijn, dat wil zeggen ons niet in staat stelt een contradictie, zoals 0=1, te bewijzen. Het oneindige wordt als het ware omzeild. Deze wiskundige staat met beide benen op de grond. Met hem moet je door één deur kunnen.

MN: Als ik het voorgaande samenvat komt het er nu op neer dat
1) Cantor met het actueel oneindige aan de slag gaat als een 'tastbare' grootheid,
2) Brouwer daar niets van moet hebben omdat het wiskunde bedrijven voor hem een proces is waarin het oneindige nooit daadwerkelijk grijpbaar is,
3) Hilbert het oneindige wel binnen de wiskunde erkent, maar dat oneindige in zijn wiskundig handelen slechts beperkt toelaat.

Het aardige is dat hier een fundamenteel verschil van inzicht tussen deze grootheden duidelijk wordt, dat consequenties heeft voor hun handelen. Het gaat hier niet om een leunstoeldiscussie zonder enige consequentie voor het wiskundige doen en laten van deze mannen.

Bij alle veranderingen die in het wiskundeonderwijs op middelbare scholen hebben plaatsgevonden in de laatste 30-35 jaar is er voor zover ik weet nooit voor gekozen om het oneindige op het lesprogramma te zetten. Als geschiedkundig thema zou het eigenlijk wel interessant zijn: laten zien dat filosofische opvattingen gevolgen hebben voor je handelen, ook - of misschien *juist* - in de wiskunde. Een ideetje voor de volgende hervormingsronde?

Waarschijnlijkheid, een wiskundig buitenbeentje?

Waarschijnlijkheid, een wiskundig buitenbeentje?

Er zijn inmiddels veel wiskundige theorieën met een erkende status. Het is al heel lang niet meer zo dat de wiskunde overzichtelijk ingedeeld wordt in slechts enkele deelgebieden, zoals de algebra en meetkunde van de schoolwiskunde in de eerste vijf, zes decennia van de vorige eeuw: de wiskunde beslaat een immens gebied.In dit immense gebied bevindt zich de waarschijnlijkheidstheorie. Het is niet duidelijk wat er in de vroegste tijden met het begrip waarschijnlijkheid werd gedaan. Rond het midden van de zeventiende eeuw begint het begrip in de intellectuele geschiedenis van Europa duidelijk vorm te krijgen en sinds die tijd begint er een goed te volgen stroom van artikelen en boeken over te ontstaan. Beroemde namen die in de eerste honderdvijftig jaar een rol spelen: Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Christiaan Huygens, Johan de Witt (inderdaad, de door het grauw schandelijk vermoorde raadpensionaris...) in de zeventiende eeuw, de telgen uit het geslacht der Bernoulli's, Abraham de Moivre, Thomas Bayes, Pierre-Simon Laplace in de eeuw daarna.

Pas in 1933 vindt een axiomatisering plaats van de waarschijnlijkheidstheorie door de veelzijdige Rus Andrey Kolmogorov. Die axiomatisering is een codificering van een vaag, intuïtief begrip 'kans' of 'waarschijnlijkheid' dat we allemaal wel hebben. Zoals de Euclidische meetkunde axiomatisch is opgezet, zo kan van ieder gebied in de wiskunde een axiomatische opzet worden gepresenteerd. Dat is alleen lange tijd helemaal niet zo gebruikelijk geweest. In 1812 bijvoorbeeld laat Laplace aan zijn behandeling van de waarschijnlijkheidstheorie geen axioma-stelsel in de huidige strenge betekenis voorafgaan.[16]

Vanaf het moment dat zo'n axiomasysteem bestaat, is het duidelijk hoe er met dit mathematische begrip moet worden gewerkt. Maar de gebruiker van zo'n systeem kan nog altijd zijn eigen interpretatie aan deze mathematische waarschijnlijkheid hangen. Het is niet de taak van de wiskundige om daarover 'bindende' uitspraken te doen: het toepassen van een wiskundige theorie is de verantwoordelijkheid van de gebruiker.

Merkwaardig genoeg hebben waarschijnlijkheidstheoretici in het verleden heel vaak juist wel de toepasbaarheid aan de orde gesteld. Of beter gezegd, zij laten zich uit over een 'correcte' opvatting van het begrip waarschijnlijkheid. Een paar voorbeelden. In het eerste deel van het gezaghebbende leerboek van Feller[17] wordt het gebruik dat Laplace maakte van waarschijnlijkheid veroordeeld. Met name de beroemde Rule of Succession moet het ontgelden.. In het fraaie Nederlandse boek van Stam18 is de toon iets gematigder, maar ook hier spreekt de auteur zijn voorkeur uit. In het moderne boek van Grimmett en Stirzaker19 laten de auteurs zich bij een van de voorbeelden (in een juridische context) ook iets ontvallen over de toepasbaarheid. Waarom vallen de hier genoemde wiskundigen zo uit hun rol en spreken zij zich uit over iets waarover zij gemeenlijk hun mond houden?

NK: In het algemeen staat de wiskundige praktijk ver van de filosofie. Het verschil tussen actuele en potentiële oneindigheid speelt geen rol in de wiskundige praktijk, ook de vraag of de verzameling van alle verzamelingen bestaat doet niet ter zake. De wiskundige praktijk geeft niet direct aanleiding tot filosofische vragen. Bij de waarschijnlijkheidstheorie ligt dat anders. Bertrands paradoxen beslaan een scala van problemen binnen de waarschijnlijkheidstheorie. Van Wesley Salmon[20] leende ik de volgende variant.

Stel dat we weten dat een auto tussen de één en twee minuten nodig heeft om een kilometer af te leggen, verder weten we niets over de tijd die nodig is. Als we het *principe van indifferentie*** toepassen, dan kunnen we concluderen dat de tijd die nodig is met dezelfde kans ligt tussen de één en anderhalve minuut, als tussen de anderhalve en twee minuten. Deze gegevens kunnen ook anders uitgedrukt worden. We weten dat de gemiddelde snelheid van de reis ligt tussen de zestig en dertig kilometer per uur. Verder weten we niets over de gemiddelde snelheid. Als we weer het beginsel van indifferentie toepassen, dan kunnen we concluderen dat de gemiddelde snelheid van de auto met dezelfde kans ligt tussen zestig en vijfenveertig kilometer per uur, als tussen vijfenveertig en dertig kilometer per uur. Helaas zijn de bovenstaande resultaten tegenstrijdig.

De reistijd van anderhalve minuut komt overeen met een gemiddelde snelheid van veertig kilometer per uur, niet met vijfenveertig kilometer per uur.

Hoewel één contradictie genoeg is, staat dit voorbeeld niet op zichzelf. Gelijksoortige tegenstrijdigheden doen zich voor in elke situatie waarbij we te maken hebben met twee grootheden waartussen geen lineair verband is. Uiteraard kun je veel voorkomen door geen gebruik te maken van niet-lineaire functies, zoals logaritmische, kwadratische, en e-machtfuncties en dergelijke, maar zelfs als je uitgaat van primaire grootheden als snelheid en tijd kom je in dit soort problemen. Bertrands paradoxen stemmen wiskundigen wellicht tot nadenken, want wat is de betekenis van de bepaalde waarschijnlijkheid?

MN: Aha, de werkelijke of schijnbare contradicties. Nemen we jouw voorbeeld. Inderdaad, als je voor de genoemde tijd een uniforme verdeling kiest, zeg, dan is de bijbehorende verdeling voor de gemiddelde snelheden zeker geen uniforme verdeling en natuurlijk ook andersom. Dit voorbeeld laat zien dat je een keuze moet maken welke parameter je als de meest fundamentele beschouwt. Hier hebben we niet te maken met een 'contradictie', maar veeleer met een keuzeprobleem. Als je de ene verdeling kiest, dan ligt de andere vast. Je intuïtieve idee dat een uniforme verdeling van de ene grootheid met een uniforme verdeling van de inverse moet corresponderen is wiskundig onjuist. Je moet de wiskunde niet de schuld geven, zoals een enkele filosoof wel eens doet, maar je gebrekkige intuïtie! Dit soort voorbeelden leert je dat je intuïtie soms bijgeslepen moet worden. De inmiddels gestorven natuurkundige Jaynes wijdt in zijn fraaie boek een dik hoofdstuk aan paradoxen, schijnbare tegenstrijdigheden. Steeds weer ontrafelt hij deze als zijnde het gevolg van 1) gebrekkige intuïtie, 2) verborgen aannames die fout blijken en eventueel 3) slordig gebruikte wiskunde. Het kost mij niet de minste moeite je gek te krijgen met een aantal van zulke paradoxen.

* Volgens het *principe van indifferentie (principle of indifference)* hebben twee uitkomsten dezelfde mogelijkheid - dezelfde kans - als we geen reden hebben de een te prefereren boven de ander. Als we bijvoorbeeld constateren dat een munt volmaakt symmetrisch is, dan zeggen we dat de kans op kruis gelijk is aan de kans op munt.

Steeds weer blijkt dat niet de kansrekening foutief is, tegenstrijdige resultaten geeft, maar dat de fout of impliciete slordigheid ligt bij degene die met de paradox op de proppen komt. Het is eigenlijk afgrijselijk platvloers.Vooral filosofen breken hier nogal eens hun nek. Zie je me lekker vals kijken?

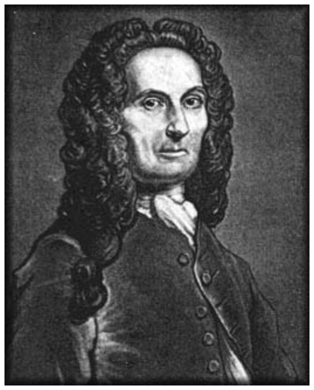
NK: Laat ik dan maar teruggaan naar een historische vraag. Het is niet duidelijk wat er in de vroegste tijden met het begrip waarschijnlijkheid werd gedaan. De Grieken ontwikkelde geen waarschijnlijk-heidstheorie. Zij waren hartstochtelijke gokkers en bekwame wiskundigen, maar hun wiskunde was niet geschikt om het gokken te analyseren. Als reden wordt vaak aangevoerd dat de Grieken niet over een algebraïsch systeem beschikten. Zou de binomiaal-distributie kunnen worden geformuleerd zonder een goede algebraïsche notatie? Kunnen de limietstellingen van Jakob Bernoulli en Abraham de Moivre ontwikkeld worden zonder gebruik te maken van de algebra en de analyse?

MN: Wanneer je beseft dat de Grieken er een duidelijk meetkundige of meetkundig geïnspireerde denktrant op na hielden, zul je begrijpen dat zij die vrij zeker ook in de kanswereld hadden ingevoerd, als zij daar werk van hadden gemaakt. De oude Grieken waren dan vlot in de problemen gekomen. En wel als volgt. De binomiale verdeling ontstaat als je de macht $(P+Q)^n$ als een veelterm schrijft en stelt dat p (= kans op optreden van een bepaald uitkomst) + q (= kans op niet-optreden daarvan) = 1.

Misschien heeft het ontbreken van kansrekening als mathematische discipline iets te maken met het wereldbeeld van de Grieken. Het aardige is dat in dat wereldbeeld de Kosmos en het Lot een hoofdrol spelen en dat de goden op het tweede plan komen. Ook de goden hebben niet alle macht om dingen steeds naar believen te veranderen. Je kunt wel proberen om ze via offers gunstig te stemmen, maar je weet nooit of ze wat voor je willen en zelfs maar kunnen doen, de Griekse goden hebben beperkte bevoegdheden. De Grieken hadden weliswaar de notie van regelmaat, zoals trouwens zoveel volkeren, maar is een door goden bevolkte wereld er eentje waarin het begrip waarschijnlijkheid kan floreren? The answer, my friend, is blowing in the wind.

NK: De eerste waarschijnlijkheids-problemen hadden betrekking op regelmatige dobbelstenen. De aanname dat alle zijden dezelfde mogelijkheid hebben was voor de wiskundige behandeling van belang. In de oude wereld kende men onze dobbelsteen niet. Men dobbelde met een astralagus, dat is een klein bot uit de hiel van een schaap of een hert. Het heeft vier enigszins rechte vlakken waarop het kan rusten en twee ronde vlakken. Het is duidelijk dat de empirische waarschijnlijkheid varieerde van astralagus tot astralagus. De onzuivere astralagi lenen zich niet voor een waarschijnlijkheidstheorie. Echter, de Grieken beschikten wel over zuivere munten. Die hadden toch ook aanleiding kunnen zijn voor een waarschijnlijk-

Blaise Pascal [1623-1662] was Frans wis- en natuurkundige en zowel filosoof als theoloog. Hij stond nadrukkelijk aan de wieg van de kansrekening.



Abraham de Moivre [1667-1754] was Hugenoot. Hij week na de herroeping van het Edict van Nantes in 1685 uit naar Engeland. De Moivre publiceerde The doctrine of chance *in 1718. Hij herkende de centrale rol van de normale verde-ling.*

jkheidstheorie?

MN: Zoals ik daarnet al zei, de wiskunde zou een probleem zijn geweest en misschien is een wereldbeeld dat nogal verwarrend is en bezaaid met ‘acteurs’, niet de meest gelukkige achtergrond voor een ontwikkeling van de kansrekening. Het is speculatie, ik weet het.

Je had het over ‘empirische waarschijnlijkheid’. Daar zouden we een fikse boom over kunnen opzetten. Laat ik je zeggen dat het bepalen van kansen aan de hand van experimenten pas vrij laat in de geschiedenis aan de orde komt.

Het is bepaald niet voor niets dat een artikel uit 1763, op naam van de Engelse plattelandsdominee Thomas Bayes - maar belangrijk geredigeerd en aangevuld door zijn vriend Richard Price - de aandacht trekt van een wiskundige kanjer als Laplace. In dat artikel wordt namelijk het probleem aangesneden hoe je uit opgedane ervaring in experimenten iets over een kans op herhaling kunt afleiden. Maar dat is dus iets uit een andere tijd.

Trouwens, het is op zich pikant dat een discipline die zich met onzekerheid in optima forma bezighoudt, nu juist tot de wiskunde behoort, een vakgebied dat traditioneel niet direct met onzekerheid geassocieerd wordt.

Iets anders nu. Filosofen hebben zich niet uitsluitend hartstochtelijk gestort op paradoxen, maar ook op de interpretatie van het begrip kans. Ik ben van de klassieke lijn van Laplace. Maar misschien spreek ik voor mijn beurt en wil jij daar eerst iets over kwijt.

NK: Dat wil ik zeker. Er zijn twee soorten interpretaties van de kansrekening. In de *epistemologische* interpretatie wordt waarschijnlijkheid beschouwd als een graad van kennis die wij mensen hebben, de klassieke interpretatie van Laplace behoort tot deze categorie.

Volgens de *objectieve* interpretatie is waarschijnlijkheid een objectieve eigenschap van de wereld. Deze waarschijnlijkheid is onafhankelijk van het menselijk kennen. Helaas worden verschillende namen voor de twee stromingen gebruikt. De epistemische interpretatie wordt ook wel de subjectieve interpretatie genoemd, en de objectieve interpretatie noemen sommigen de wetenschappelijke interpretatie.

Het lijkt of de waarschijnlijkheidstheorie een januskop heeft. Aan de ene kant heeft het als statistiek betrekking op de wereld, aan de andere kant is het epistemisch, ontdaan van de statische achtergrond. Het verschil tussen de twee interpretaties wordt fraai geïllustreerd door een voorbeeld van Laplace. Stel je hebt een niet-zuivere munt en je weet niet in welke richting hij onzuiver is. Wat is de kans op munt $P(munt)=P$ bij een worp met deze munt, waarbij $0\leq p\leq 1$ Als je aanhanger bent van de epistemische interpretatie, zoals Laplace, dan luidt het antwoord: $p={}^1/_2$ Als je de objectieve traditie volgt dan is het antwoord: alles wat we weten van de waarde p is dat $p={}^1/_2$.

MN: Ik ben een aanhanger van de zogenaamde subjectieve school, al vind ik de naam ‘subjectief’ niet echt passend en de naam ‘objectief’ al helemaal niet. Stel dat we een dobbelsteen hebben die qua bouw volkomen symmetrisch is. Jouw ‘objectieven’ zullen dan zeggen dat de kansen over de zes mogelijkheden identiek zijn en beschouwen dit als een eigenschap van de dobbelsteen. Maar dat is helemaal niet zo! De uitkomst van een worp is niet alleen afhankelijk van de eigenschappen van de dobbelsteen, maar ook van de manier van werpen. Iedereen kan ook zo’n eerlijke dobbelsteen volkomen ‘oneerlijke’ uitkomsten laten geven, door de beginvoorwaarden bij de worp te manipuleren. (Jaynes gaat daar in zijn boek redelijk diep op in. De fysicus Jaynes zou een uitmuntend goochelaar zijn geweest.)

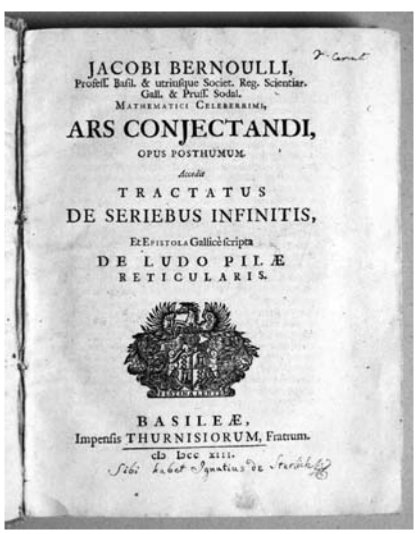
Dat betekent dat je niet alleen naar de steen moet kijken, maar dat je ook de ruimte van de beginvoorwaarden van de worp in je beschouwing moet betrekken. En dan is het gebeurd met de ‘objectieve’ interpretatie. Het is dan ook natuurlijker om te zeggen dat je *kennispositie* zodanig is dat je aan alle uitkomsten dezelfde kans toekent. Dan gebruik je het principe van indifferentie (of een moderne generalisatie daarvan, Maximum Entropie) om dat laatste te rechtvaardigen.

NK: De term ‘subjectief’heeft in het dagelijks taalgebruik vaak een negatieve betekenis. In de filosofie betekent een subjectieve interpretatie dat het ijkpunt, de referentie, in de mens ligt, in het subject. Daarentegen ligt bij de objectieve interpretatie het ijkpunt in de wereld buiten de mens. Laplace ging uit van een universum dat volledig deterministisch is. Hij stelde zich een ‘Intelligentie’ voor, die de volledige toestand van het universum op een bepaald moment kent en op basis daarvan in staat zou zijn het hele verleden en de hele toekomst van het universum uit te rekenen. Zo een wezen heeft geen kansrekening nodig, daar hebben alleen mensen met hun beperkte kennis behoefte aan.

MN: Hij schrijft dat in ongelofelijk mooi Frans. Elke keer als ik het lees krijg ik weer kippenvel. Hoofdstuk één in zijn *Essai philosophique sur les probabilités*. Lezen dat hoofdstuk!

NK: In de fysica is waarschijnlijkheid gerelateerd aan tijd - de tijd waarop een gebeurtenis die is voorspeld, plaatsvindt of niet. Op macroniveau met ‘normale’ oorzaak - gevolgrelaties zal de kans van bijna alle gebeurtenissen dicht bij de 1 of 0 liggen, maar door het indeterminisme van de kwantummechanica op microniveau zullen microscopische gebeurtenissen waarden hebben tussen de 0 en 1. Het deterministisch universum van Laplace werkt niet op microniveau volgens de standaardopvattingen in de fysica.

MN: Je hoeft de kwantumfysica er niet eens bij te roepen om te laten zien dat kansen niet per se dicht bij 0 of 1 hoeven te liggen. Als ik een dobbelsteen in een kogelbaan weggooi, zal ik aan ieder van de zes uitkomsten kans 1/6 toekennen, niet echt dicht bij 0 of 1. Mijn *kennispositie* immers is, dat ik met geen mogelijkheid iets definitievers zeggen kan.



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIɔ Iɔcc xiii.

Deze postzegel laat niet geheel toevallig een vorm zien van de wet van de grote getallen naast het portret van Jakob Bernoulli [1654-1705].

In 1713 werd dit boek van Jakob Bernoulli gepubliceerd. Dat was acht jaar na het overlijden van de schrijver. Het boek bevat een versie van de wet van de grote getallen. Daarmee wordt een intuïtief voorzien en aantrekkelijke eigenschap van het gehanteerde kansbegrip bewezen.

Een verzameling astralagi met een paar vroege dobbelstenen.

Ianus, de Romeinse god van de over-dekte doorgang en ingang. Als god van de poort ziet Ianus voor- en achter-waarts, en heeft daarom op Romeinse munten een dubbel gelaat.

Thomas Bayes [1702-1761] was een Engels geestelijke en tevens (ama-teur?)wiskundige. Zijn artikel Essay towards solving a problem in the doctrine of Chance *werd na zijn dood gevonden, belangrijk aangevuld en gepubliceerd door Richard Price. Dit artikel heeft Laplace vermoedelijk op het idee gebracht om de stelling van Bayes te formuleren; Bayes zelf heeft de stelling nooit ge-formuleerd. De stelling neemt een centrale plaats in, in wat nu Bayesiaanse Sta-tistiek wordt genoemd.*

NK: Degene die met de dobbelsteen werpt is ook onderdeel van het deterministische systeem. Manipulaties worden dus ook in de berekening van Laplace verwerkt, als dat tenminste lukken wil, waardoor de combinatie van 'eigenschappen dobbelsteen' plus 'manipulatie' niet meer per se zes identieke mogelijkheden oplevert.

MN: Nog even over het onderscheid 'subjectief / objectief'. De aanhangers van de 'objectieve' school worden meestal 'frequentisten' genoemd. Een kans is voor hen onlosmakelijk verbonden aan wat experimenten op de lange duur doen. De Bayesianen - de zogenaamde 'subjectieven' - zijn hun tegenpolen. Voor hen is kans in principe aan kennis gelieerd. Dat hoeft overigens niet te betekenen dat de beide stromingen bij hetzelfde probleempje andere antwoorden krijgen. Neen, het betekent *vooral* dat Bayesianen toepassingen van de waarschijnlijkheidstheorie aanvaarden waar de frequentist zich geen raad mee weet. Of beter nog, waarvan de frequentist zegt dat het niet zijn competentie is, maar dat van de statistici.

Want dat is nog een bijkomend verschil: de frequentist ziet waarschijnlijkheidstheorie en statistiek als twee afzonderlijke disciplines, de Bayesiaan daarentegen trekt de statistiek geheel binnen de waarschijnlijkheidstheorie. Immers, alles wat hij nodig heeft wordt hem methodisch binnen die theorie aangeleverd. In de ad-hoc oplossingen van de klassieke statistiek heeft hij geen trek en hij heeft ze ook niet nodig.

Dit was een hele mondvol. Laat ik daarom een, hopelijk aansprekend, ludiek voorbeeld geven. Je zit in de nachttrein naar het Zuiden en je valt in slaap. Midden in de nacht word je wakker. De trein staat stil op een Duits station, maar je ziet geen naamborden. Voor het station staan taxi's. Vier om precies te zijn. Elke taxi heeft een 'rugnummer'. De rugnummers kun je lezen: 12, 32, 33, 54. Vraag: hoeveel taxi's zijn er in die stad?

De frequentist verslijt je voor gek: Idioot, die je bent! Slecht gedefinieerde vraag, geen antwoord! De Bayesiaan is het daar zeer beslist niet mee eens. Hij zal een aanname maken over de *a priori* kans op het bestaan van *N* taxi's, *op basis van wat hij weet, zijn kennistoestand*. Hij zal in het onderhavige geval bijvoorbeeld stellen dat voor *N* een uniforme a priori kansverdeling op zijn plaats is, met N tussen 54 en een te kiezen limietwaarde N^*.

De stelling van Bayes, een eenvoudig resultaat uit de waarschijnlijkheidstheorie, maakt het hem nu mogelijk om de waarschijnlijkheid van zijn observatie (de vier rugnummers), gegeven de *a priori-kennis*, om te zetten in een *a posteriori-uitspraak* over de te verwachten waarde voor *N*.

Waar de frequentist het zichzelf verbiedt om aan een kennistoestand een kansverdeling te verbinden, doet de Bayesiaan dat wel. De een kan dus een antwoord geven, dat uiteraard afhangt van de kennis waar hij van uit gaat, de ander kan slechts schaapachtig toekijken.

NK: Op basis van de vier rugnummers en vooral door alledaagse kennis van de wereld kun je aannemen dat er in een stad geen 10.000 taxi's rondrijden. Maar het is best mogelijk dat er 54 taxi's zijn. Het probleem blijft dat er geen unieke methode is om a priori-kennis te bepalen. Elke waarde die je aan N^* toekent blijft ongemakkelijk arbitrair.

MN: Het aardige is overigens wel dat je in het onderhavige probleem met de vier taxi's de limiet kunt nemen voor N^* naar oneindig, waardoor die door jou genoemde willekeur verdwijnt.

De beste schatting zou bij de genoemde a priori zijn, dat er 81 taxi's in de stad rondrijden en je kunt aan dat getal nog een standaardafwijking hangen ook. Zie je slechts een enkele taxi, dan gaat dat niet. Je moet dan echt serieuze 'domein'kennis toevoegen. Je weet bijvoorbeeld dat het een wat grotere stad aan de Rijn moet zijn - de trein stopt tenslotte niet in een gat - en je weet misschien wat de opties zijn, omdat je op de hoogte bent van de geografie van Duitsland...

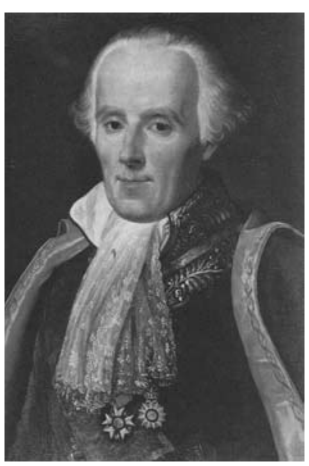
NK: Even wat anders. Een zekere bisschop Joseph Butler, een tijdgenoot van Bayes en eveneens theoloog, schreef al in 1736 'probability is the very guide of life'. En Laplace stelde dat 'de waarschijnlijkheidstheorie uiteindelijk alleen tot calculus gereduceerd gezond verstand is'. Je zou dus denken dat waarschijnlijkheidstheorie aansluit op onze menselijke intuïtie. Helaas blijkt dat in veel gevallen niet zo te zijn. Mensen vertrouwen op hun gevoel bij het nemen van besluiten, maar ons gevoel heeft het, als het kansen betreft, vaak bij het verkeerde eind. De mens schijnt een zwakke intuïtie voor kansen te hebben, in het bijzonder als onafhankelijke en voorwaardelijke kansen in het geding zijn. Ik geef een paar sprekende voorbeelden.

Het toekennen van gelijke kansen aan alle mogelijke uitkomsten van het werpen met een dobbelsteen heeft twee aspecten. Ten eerste moet de dobbelsteen zuiver zijn, de kansen van elk vlak zijn gelijk aan 1/6. Ten tweede moeten alle opeenvolgende worpen onafhankelijk zijn. De kans dat je met drie worpen achter elkaar een zes gooit met een dobbelsteen is $(1/6)^3 = 1/316$. Maar als je al twee keer een zes gegooid hebt is de kans dat je met de derde worp nog een zes gooit gelijk aan 1/6. Veel gokkers schatten die kans abusievelijk veel lager in.

Tijdens een loopgravenoorlog kruipen soldaten instinctief in een granaatkrater, omdat ze ervan overtuigd zijn daar nooit een tweede granaat zal inslaan. Ze denken dat er een magische kracht is die toevallige verbanden weet tegen te houden.

MN: Nou, nou. Hun intuïtie deugt hier niet. Ze hebben alleen maar een onzuiver beeld van 'kans'. Iets preciezer, hun niet-gearticuleerde begrip van 'voorwaardelijke kans' rammelt.

NK: Het kan nog bonter. Marc Kac[21] vertelt in zijn autobiografie een leuke grap van een passagier die de kans wilde verlagen dat een bom aan boord is van een vliegtuig waarmee hij



Pierre-Simon Laplace [1749-1827]. Uit zijn Essai philosophisme sur les pro-balités*: 'Ik ga hier zonder mathematische analyse de principes en algemene resultaten weergeven van de kansrekening [..] door ze toe te passen op de belangrijkste vragen van het leven, die inderdaad, voor het grootste deel, slechts problemen van waarschijnlijkheid zijn'.*

Edwin Thompson Jaynes [1922-1998] in zijn fysisch laboratorium in 1967. Hij beschouwde waarschijnlijkheidstheorie als 'de logica' die in wetenschap dient te worden gebruikt om voorspellingen - inferencing - te doen.

Giuseppe Maria Crespi, [1665-1747], Bolognese school, Drie maal een zes gooien van plan was te reizen. De kans dat iemand een bom bij zich heeft is gelukkig laag. Laten we aannemen dat deze kans p een op een miljoen is. De kans dat twee mensen een bom bij zich hebben in hetzelfde vliegtuig is p^2, dus een kans van $1/1.000.000^2$. De conclusie is dat je zelf alvast maar een bom mee moet nemen! ...

En deze. Stel dat een bepaalde ziekte bij 1% van de bevolking voorkomt. Een test die nagaat of iemand die ziekte heeft is voor 90% betrouwbaar. Een willekeurig proefpersoon wordt getest met positief resultaat. De betrouwbaarheid van de test was 90%, de kans dat de proefpersoon de ziekte heeft is 90%. Nee dus! Stel dat de bevolking uit 10.000 personen bestaat. Hiervan zijn dan naar verwachting ongeveer 100 ziek en 9.900 niet ziek. Van alle zieke mensen geeft de test bij 90% een positief resultaat, dat zijn er 90. Van alle niet zieke mensen geeft de test bij 90% een negatief resultaat, dat zijn er 8.910.

vv

n = 10.000	*positief*	*negatief*	*totaalz*
niet ziek	990	8.910	9.900
Ziek	90	10	100
Totaal	1.080	8.920	10.000

In totaal zijn er dus 1.080 mensen die positief getest worden. Hiervan zijn er in werkelijkheid 90 ziek. De kans dat een willekeurige proefpersoon bij een positieve test ziek is, is gelijk aan 90 / 1.080 dus slechts 8,3%. Doordat slechts 1% van de populatie ziek is en de testnauwkeurigheid nogal tegenvalt, worden er relatief veel mensen ten onrechte positief getest.

MN: Exact! Mensen schijnen moeilijk te kunnen verdisconteren dat de uiterst geringe a priori kans op ziekte bij een vrij beroerde testnauwkeurigheid tot gevolg heeft dat er vaak loos alarm zal zijn.

NK: Uitbaters van casino's, kermisexploitanten en loterijverkopers kennen onze gebrekkige intuïtie en spinnen er garen mee. In het evolutionair proces heeft de ontwikkeling van onze hersenen - en natuurlijk de bijbehorende denkkracht - bijgedragen aan de overlevingskans van onze soort. Je zou denken dat we over een sterk ontwikkelde intuïtie voor kansen zouden beschikken. Het tegendeel blijkt waar te zijn. Heb jij daar een verklaring voor?

MN: Ik moet bij deze vraag denken aan wat de hoogleraar Wagenaar in een tv-interview ooit zei over de functie van het geheugen: 'het gaat *niet* per se om het vastleggen van de waarheid [..]' ... Inderdaad, het zou voor iemands functioneren wel eens veel beter kunnen zijn om de waarheid m.b.t. een gebeurtenis *niet* of niet in volle omvang of gekleurd op te slaan.

Bij het taxeren van gevaar doet zich, denk ik, iets dergelijks voor. Wij hebben allemaal een redelijke intuïtie als het gaat om vallen van een bepaalde hoogte. Jij weet gewoon dat een sprong van het dak van je huis dodelijk is, althans tot groot letsel leidt. Maar hoe zit het met het taxeren van het gevaar van vliegen? Deze kans wordt door mensen vaak erg hoog ingeschat. Een vliegkilometer levert gemiddeld minder verliezen aan mensenlevens op dan een autokilometer, maar veel mensen zien dat niet zo. Je zou kunnen zeggen dat deze overdreven perceptie van het gevaar van vliegen er misschien voor zorgt dat mensen 'wel uitkijken' om het vliegtuig in te stappen. Laten we wel wezen, er bestaat de mogelijkheid dat je naar beneden komt op ongewenste wijze. (Overdreven) angst voor vliegen werkt in elk geval niet tegen je overlevingskansen in...

De volgende vraag ligt voor de hand: zijn er ook gevallen waarbij mensen kansen op gevaar te lichtvaardig nemen? Speculatie: ik kan me voorstellen dat de soldaten die in de Eerste Wereldoorlog uit de loopgraven moesten kruipen, recht tegen de mitrailleurs in, op zeker moment hun overlevingskansen zijn gaan overschatten. Mentaal lijfsbehoud.

Om het samen te vatten: als gevaren die men kan vermijden, worden overschat werkt dat niet tegen je; als gevaren die je niet ontlopen kunt, worden onderschat is dat misschien een betere voorwaarde om er het beste van te maken.

NK: De voorbeelden van mensen die geen gebruik maken van de waarschijnlijkheidstheorie spreken voor zich, maar ook bij het toepassen van waarschijnlijkheidstheorie gaat het niet altijd goed. Door de opkomst van de natuurwetenschap nam vanaf de zeventiende eeuw het gezag van bijbelteksten af. Laplace toonde aan - hoewel men zijn bewijs nu niet meer kan accepteren - dat ondanks de onderlinge gravitatiewerking van hemellichamen het zonnestelsel stabiel is, zodat men niet meer gods corrigerende werking hoeft te postuleren (zoals Newton deed) om de stabiliteit van het stelsel te verklaren. 'Je n'ai pas besoin de cette hypothèse', zou hij tegen Napoleon over god gezegd hebben.

De bekendste weerlegging van Genesis - indien letterlijk opgevat - werd door Darwin gegeven. De les die de gelovige kan trekken is dat hij beter geen exacte wetenschap kan toepassen op religie.

Er zit echter een andere kant aan de zaak, waardoor de rationele theologie tegenwoordig weer actueel is. Herman Philipse gaf over dit onderwerp onlangs een college-cyclus voor een tot aan de nok gevulde aula, toehoorders werden zelfs achter de spreker op het podium geplaatst. Richard Swinburne is van mening dat de rationele theologie dezelfde onderzoeksmethoden dient te hanteren als de empirische wetenschappen om intellectueel aanvaardbaar te zijn. De stelling van Bayes wordt door Swinburne in stelling gebracht om het bestaan van een scheppende god als wetenschappelijke hypothese te aanvaarden. Dat vergt het nodige kunst- en vliegwerk. Hoe bepaal je welke schepping op grond van het monotheïsme te verwachten is? En hoe bepaal je de a priori waarschijnlijkheid? Dat was bij het taxivoorbeeld al lastig! Swinburne pretendeert dat we uitsluitend het *criterium van eenvoud* moeten hanteren waardoor het monotheïsme het wint van rivalen zoals het polytheïsme. Volgens Philipse leidt dit tot onaanvaardbare consequenties, want volgens Swinburne is ongeacht het empirisch bewijsmateriaal de a priori waarschijnlijkheid dat het monotheïsme waar is reeds groter dan een half. Geen wetenschapper zal het *criterium van eenvoud* zwaarder laten wegen dan het empirisch bewijsmateriaal. Swinburnes rationele theorie is niet geloofwaardig omdat hij criteria voor theoriekeuze op een absurde manier toepast.[22]

MN: De bezwaren van Philipse zijn binnen de waarschijnlijkheidstheorie pregnanter te formuleren. Stel we hebben waarnemingen of beweringen genaamd 'Data' en verschillende hypotheses H_k waar tussen gekozen kan worden. De hypothese H_k staat dan bijvoorbeeld voor: er zijn *k* goden, De stelling van Bayes impliceert dat de a posteriori kans, de likelihood

Herman Philipse behandelt Bayes tijdens de druk bezochte Studium Generale colleges over het thema religie en wetenschap.

en de a priori kans gelieerd zijn volgens

$$P(H_k \mid Data) = P(Data \mid H_k)P(H_k) | P(Data)$$

We willen de a posteriori $P(Data \mid H_k)$ bepalen. Er moet dan natuurlijk een *algemeen aanvaarde* wijze zijn waarop de in deze formule optredende likelihood $P(Data \mid H_k)$ te bepalen of te schatten is. Dat komt overeen met het probleem dat Philipse signaleert over het bepalen van de te verwachten schepping als er een monotheïstisch god is. Hiervoor geldt $k=1$. Niet alleen de bepaling van de a priori kans is in het genoemde probleem een lachertje, zonder serieuze leidraad, de vaststelling van een likelihood is dat nog veel meer. Swinburne kwalificeert zich als een pseudo-wetenschapper, een rommelaartje.

Het is dit soort bezopen toepassingen - het bestaan van Atlantis aantonen middels de stelling van Bayes is er ook zo een- die het 'Bayesianisme' ooit in een kwade reuk hebben gebracht. Bij William Feller is er bijtend commentaar te vinden op dergelijke toepassingen. Helaas wordt door hem niet alleen het badwater weggespoeld, maar ook het lieve kind.

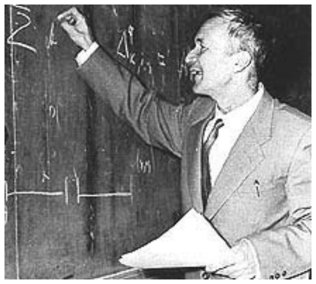
À propos, in 1710 publiceerde de Schotse arts John Arbuthnot een 'statistisch' godsbewijs met als feitenmateriaal dat er in Londen in 82 opvolgende jaren meer jongens dan meisjes geboren waren. Hij kreeg zijn essay gepubliceerd in de *Philosophical Transactions of the Royal Society.* Hij schatte de kans dat er bij toeval meer jongens dan meisjes werden geboren op $(1/2)^{82}$ en vond deze kans zo klein dat hij zich genoodzaakt voelde een Schepper te accepteren. We begrijpen nu, driehonderd jaar na dato, wat er mankeert aan zijn schatting en aan zijn redenering in haar geheel. Geboorten zijn geen spelletjes kruis en munt, zoals de Schotse arts impliciet aannam. Het grote aantal geboorten per jaar zal er bij een miniem grotere kans op een jongetje voor zorgen, dat er per jaar meer jongens zullen worden geboren met een waarschijnlijkheid die praktisch niet van 1 te onderscheiden is... Ook hier was de 'goddelijke' likelihood een probleem. Maar door de oppervlakkigheid van Arbuthnots redenering komt dat niet expliciet aan het licht. Toch geldt dit als de eerste manmoedige poging om een hypothese - geslacht is een kwestie van kruis of munt - op grond van gegevens te verwerpen. Er ging in de redeneerketen nogal wat mis, maar we mogen Arbuthnot niet te hard vallen. Hij leefde tenslotte in een tijd dat de kansrekening in de kinderschoenen stond. Laplace zou ditzelfde probleem, toegespitst op de situatie in Parijs, honderd jaar later correct analyseren.

NK: Zo, dat was dan het hoofdstuk wetenschappelijke incompetentie. Heb jij nog wat over de toepassing van de kansrekening te zeggen?

MN: Ja, ik wil nog wel iets benadrukken. De menselijke intuïtie mag niet al te geweldig zijn, je kunt ongelukken voorkomen door je strikt aan de regels van de waarschijnlijkheidstheorie te houden. Die regels zijn gecodeerd in het axiomasysteem van Kolmogorov. Als je het erover eens bent dat die axioma's omschrijven wat jij ziet als eigenschappen van het begrip 'kans', dan ben je gevrijwaard tegen ellende. Je bent op zijn minst ook gewapend om zogenaamde paradoxen te lijf te gaan. Je moet je ook zeer strikt houden aan allerhande mathematische gedragsregels. In een eerder gesprek hadden we het over de oneindigheid in de wiskunde. Toen heb ik gezegd dat een en ander in operationele zin zo werkt dat je een systeem *eerst* in een eindige parameter beschrijft en pas *daarna* de limiet van die parameter naar oneindig neemt. Doe je het anders, dan bestaat het risico op faliekant verkeerde resultaten. Ook daarvan zijn voorbeelden in de kansrekening. Ik verwijs je weer opnieuw naar het boek van Jaynes.

Enfin, door de axioma's van Kolmogorov ben je in staat om met het hele uitgekookte apparaat van de wiskunde tot resultaten te komen die onbetwijfelbaar zijn, ook al kunnen ze wel eens tegen onze intuïtie in gaan. Het blijkt dan bijvoorbeeld nodig om resultaten uit de maattheorie te gebruiken om stellingen te krijgen waar geen speld tussen te krijgen is. In de eenvoudige leerboekjes van het genre 'kansrekening voor de praktische geoloog' wordt dat alles niet behandeld, maar in de strikt wiskundige literatuur komen de subtiliteiten aan de oppervlakte die nodig zijn om tot werkelijk stevige resultaten te komen. De wiskunde is een machtig wapen, Nico, een machtig wapen!

Tot slot nog even aandacht voor heuse literatuur. Laplace schreef een overtuigend en prachtig verhaal met zijn *Essai philosophique sur les probabilités*, een didactisch meesterwerkje. Buitengewoon goed te volgen, ook na tweehonderd jaar. In de allerlaatste paragraaf begint hij met de beroemde zin 'Men ziet, [..] dat de waarschijnlijkheidstheorie in feite niets anders is dan gezond verstand herleid tot berekening'. Tenslotte eindigt hij met '[..] zal men inzien dat er geen wetenschap waardiger is om over na te denken, en nuttiger om er iedereen kennis van te laten nemen'. We kunnen ons slechts volmondig aansluiten bij deze woorden van de Franse grandmaître...



William Feller [1906-1970] 'All possible definitions of probability fall short of the actual practice'. Schrijver van een succesvol leerboek over waarschijnlijk-heidsleer in twee delen.

Register van personen

Noten

1 Moravcsik, J., *Plato and Platonism, Plato's conception of appearance and reality in ontology, epistemology, and ethics, and its modern echoes*, Blackwell, Oxford, 1992
2 Popper, K., *Logik der Forschung*, Julius Springer, Wien, 1935
3 Gödel, K., What is Cantor's continuum problem?, opgenomen in Benacerraf, P. & Putnam, H., *Philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964
4 Poincaré, H., *Een nacht vol opwinding, een keuze uit zijn filosofische essays*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1998
5 Greenberg, M.J., *Euclidean and non-Euclidean geometries, development and history*, W.H. Freeman and Company, New York, 1999
6 Wigner, E., 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences', opgenomen in *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, No. I, February 1960
7 Hofstadter, D.R., *Gödel, Escher, Bach, an eternal golden braid*, Basic Books, New York, 1979
8 Lavine, S., *Understanding the infinite*, Harvard University Press, Cambridge, 1994
9 Birkhoff G. & MacLane S., *A Survey of Modern Algebra*, The Macmillan Company, New York, 1965
10 Aczel, A.D., *The mystery of the alepf, mathematics, the kabbalah, and the search for infinity*, Simon & Schuster, New York, 2000
11 Lauwerier, H., *Oneindigheid, een onbereikbaar ideaal*, Aramith uitgevers, Bloemendaal, 1989
12 Dalen, D. van, *L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2001
13 Jaynes, E.T., *Probability Theory, the Logic of Science*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003
14 Hesseling, D.E., *Gnomes in the fog, the reception of Brouwer's intuitionism in the 1920s*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003
15 Hilbert, D., 'On the infinite', 1926, oorspronkelijke titel 'Über das Unendliche', opgenomen in Benacerraf, P. & Putnam, H. [editors], *Philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983
16 Laplace, P-S., *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812
17 Feller, W., *An introduction to probability theory and its applications*, volume I, John Wiley & Sons, New York, 1967
18 Stam, A.J., *Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening*, Technische uitgeverij H. Stam, Haarlem, 1964
19 Grimmett, G.R. & Stirzaker, D.R., *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, Oxford, 1982
20 Salmon, M.H., [et al.], *Introduction to the philosophy of science*, Hackett Publishing Company, Cambridge, 1999
21 Kac, M., *Enigmas of chance, an autobiography*, University of California Press, London, 1974
22 Philipse, H., 'De wederopstanding van de rationele theologie, godsdienstwijsbegeerte volgens Richard Swinburne', opgenomen in de *Academische boekengids*, november 2005