AKSJOMATYCZNE SYSTEMY RACHUNKU NAZW

Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II
Wydział Filozofii

WYDAWNICTWO KUL

WYDAWNICTWO KUL

Piotr Kulicki

AKSJOMATYCZNE SYSTEMY RACHUNKU NAZW

WYDAWNICTWO KUL
LUBLIN 2011

Recenzent
dr hab. Marcin Tkaczyk

Projekt okładki
Marcin Pieczyrak

ISBN 978-83-7702-216-0

Wydawnictwo KUL
ul. Zbożowa 61, 20-827 Lublin
tel. 0-81 740-93-40, fax 0-81 740-93-50
e-mail: wydawnictwo@kul.lublin.pl
http://wydawnictwo.kul.lublin.pl

Druk i oprawa:
elpil
ul. Artyleryjska 11
08-110 Siedlce
e-mail: info@elpil.com.pl

Spis treści

Wstęp

Logika nazw jest teorią badającą związki logiczne pomiędzy nazwami i zarazem badającą poprawność rozumowań kierowanych schematami, które nazwami można uzupełnić.

Logika nazw (rachunek nazw) jest najstarszym elmentem znanej nam dzisiaj logiki. Pierwszy system rachunku nazw przedstawił w postaci sylogistyki Arystoteles w IV w. p.n.e. Do połowy XIX w. sylogistyka stanowiła zasadniczy fragment znanej logiki. Badania prowadzone były w starożytności i średniowieczu w ramach tzw. logiki tradycyjnej. Wspomnieć tu warto też prace G.W. Leibniza, który m.in. znalazł dla sylogistyki interpretację arytmetyczną oraz L. Eulera i J. Venna, którzy stworzyli systemy diagramów pozwalające na rozstrzyganie o poprawności schematów sylogistycznych. Rozwój logiki matematycznej, który nastąpił od połowy XIX w., zmarginalizował sylogistykę. Zainteresowanie nią przywrócił w latach trzydziestych XX w. J. Łukasiewicz [30, 32] badając sylogistykę Arystotelesa narzędziami współczesnej logiki matematycznej. Prace nad sylogistyką rozpoczęte przez Łukasiewicza były dalej prowadzone częściowo jako kontynuacja jego podejścia, a częściowo w opozycji do jego sposobu traktowania sylogistyki (np. J. Corcoran [7, 8]). Sylogistyka pozostaje w kręgu zainteresowania logiki do dzisiaj, z nowszych prac można wymienić prace A. Pietruszczaka [40, 41], D. Westerstahla [68], F. Johnsona [18], J.N. Martina [35], W. Suchonia [60] i K. Polickiego [45]. W ostatnich latach sylogistyka wzbudziła zainteresowanie również w kontekście informatyki, np. w pracach C. Rochy i J. Meseguera [50] czy L.S. Mossa i I. Pratt-Hartmanna [39, 46].

Osobny kierunek w rozwoju rachunku nazw stworzony został przez S. Leśniewskiego i jego kontynuatorów, w ramach teorii nazwanej przez jej twórcę Ontologią (podstawowe wiadomości o Ontologii Leśniewskiego można znaleźć np. w [56, 48]). Leśniewski wykorzystuje stworzony przez siebie specjalny formalizm i nie ma na celu jedynie formalizacji rachunku nazw, lecz budowę fundamentów nauk formalnych w ogóle. Niemniej jednak jego prace wniosły istotny wkład w rozwój samego rachunku nazw. Badania nad rachunkiem nazw w ramach tego paradygmatu również są kontynuowane m.in. przez autorów takich jak M. Takano [61], A. Pietruszczak [42, 43], T. Waragai [65, 66], R. Urbaniak [64]. Jednym z interesujących kierunków badań zapoczątkowanym przez L. Borkowskiego [5, 6] i kontunuowanym przez E. Wojciechowskiego [71, 72], jest tworzenie systemów złożeniowych dla Ontologii.

Ciągłe zainteresowanie rachunkiem nazw związane jest z jego trzema cechami:

- rozumowania, które można sformalizować na poziomie nazw są często stosowane w myśleniu zdroworozsądkowym, rachunek nazw jest przedmiotem podstawowego kursu logiki (sylogistyka),
- dotyczy rozumowań często występujących w opisach rzeczywistości: metafizyka, ontologia, porządkowanie pojęć w kontekście technologii informatycznej w tzw. inżynierii ontologicznej,
- jest interesującym przedmiotem badań metalogicznych, jako prosty a zarazem niebanalny system formalny.

W niniejszej pracy staramy się potraktować rachunek nazw jako teorię autonomiczną, niesprowadzalną do rachunku zbiorów czy rachunku predykatów. Staramy się podkreślać specyfikę przedmiotu oraz metod. Nawiązujemy przy tym do Arystotelesa, który budował sylogistykę niezależnie od wspomnianych teorii, bo ich nie znał i obiekty takie jak zbiory były jemu i jego współczesnym obce, w odróżnieniu od nazw, które w świadomości owego czasu były już obecne. W znajdowaniu inspiracji u Arystotelesa korzystamy ze wsparcia Łukasiewicza i wykorzystujemy jego rekonstrukcję sylogistyki jako podstawę dalszych prac.

Nie pretendujemy do tego, aby dokonać adekwatnej rekonstrukcji logiki Arystotelesa. Czerpiemy jedynie pewne inspiracje z bogactwa myśli zawartych w tekstach Arystotelesa. Nie staramy się również przedstawić wyczerpującej relacji z dotychczasowych badań nad rachunkiem nazw – potrzebna byłaby do tego osobna, znacznie obszerniejsza książka. Przedstawiamy pewne podejście do rachunku nazw i w ramach tego podejścia analizujemy pewną część możliwych systemów, ze szczególnym uwzględnieniem znanych i intuicyjnie czytelnych systemów obecnych w literaturze. Uwzględniamy też systemy mniej znane, mające interesujące własności.

Metodykę formalizacji czerpiemy głównie od Łukasiewicza. Wykorzystujemy aksjomatyzację rachunku nazw nadbudowaną nad klasycznym rachunkiem zdań oraz metodę aksjomatycznego odrzucania. Są to techniki mało obecne we współczesnych pracach nad rachunkiem nazw, a użyteczne i skuteczne. W szczególności pozwalają na ocenę jakości formalizacji – poprawności i pełności systemów aksjomatycznych. Jako narzędzia pomocniczego do wskazywania pewnych właściwości wyprowadzalności używać będziemy rezolucyjnego ujęcia logiki klasycznej. Modele w teorii zbiorów będziemy wykorzystywać również pomocniczo, głównie do wykazywania niezależności pewnych formuł, a nie jak w większości prac współczesnych jako podstawowego narzędzia do wykazywania pełności systemu aksjomatycznego, stanowiącej o poprawności formalizacji.

Specyfiką proponowanego podejścia jest więc ujęcie w punkcie wyjścia syntaktyczne. Dominująca część prac dotycząca sylogistyki wychodzi od ujęcia stosunków pomiędzy zakresami nazw, czyli ujęcia semantycznego w sensie semantyki formalnej.

W pracy zastosowane zostały narzędzia informatyczne służące do automatycznej dedukcji – niektóre dowody, niewymagające szczególnej inwencji, wykonywane są automatycznie, za pomocą programu komputerowego. Tekst programu oraz wyniki jego pracy przedstawione są na końcu monografii (Dodatki B i C). Wykorzystane narzędzia informatyczne działają na poziomie syntaktycznym – stosowany jest system oparty na rezolucji (Prolog) oraz zdefiniowany na jego bazie system założeniowy.

Przedstawiamy i analizujemy różne systemy sylogistyki jako systemy dedukcyjne. Pozostają one w relacjach do siebie, tworząc pewną przestrzeń, którą chcemy zbadać. Wśród systemów występują klasyczne, znane z literatury, mające interpretacje zakresowe (system Łukasiewicza, system dopuszczający nazwy puste, system Brentany) oraz nieklasyczne. Te drugie można podzielić na wprowadzające nowe funktory (funktory zaczerpnięte z Ontologii Leśniewskiego, inne funktory pochodzące z języka naturalnego) oraz nadające nową interpretację starym funktorom.

Podstawowym celem, który ma zrealizować niniejsza książka, jest zaprezentowanie bogactwa aksjomatycznych systemów rachunku nazw. Przedstawione zostały w tym celu w jednolity sposób znane systemy rachunku nazw oraz kilka nowych systemów skonstruowanych przez Autora niniejszej monografii. Ponieważ kryteria wyboru pomiędzy podobnymi systemami logicznymi mogą być różne, staramy się podać możliwie bogatą charakterystykę omawianych systemów, obejmującą standardową aksjomatykę, aksjomatykę odrzuceniową, formalny model oraz charakterystyczne dla systemów metody rozstrzygania. Przedmiotem rozważań są również relacje pomiędzy poszczególnymi systemami.

Wkład niniejszej pracy w rozwój badań nad rachunkiem nazw jest dwojaki. Po pierwsze, w systematyczny sposób prezentujemy bogactwo aksjomatycznych systemów rachunku nazw. Szczególnie interesujące wydaje się przedstawienie systemów nieklasycznych, w większości nieposiadających interpretacji zakresowej. Po drugie, pokazujemy szereg drobnych, nieznanych dotąd, rezultatów dotyczących poszczególnych systemów.

Praca jest podzielona na pięć rozdziałów. W pierwszym rozdziale opisane są narzędzia formalne używane do analiz prowadzonych w rozdziałach następnych. W rozdziale drugim zaprezentowane są klasyczne zakresowe systemy sylogistyki. Przedmiotem rozdziału trzeciego są systemy rachunku nazw z funktorem ε Leśniewskiego. W rozdziale czwartym przedstawione są nieklasyczne systemy sylogistyki. Rozdział piąty poświęcony jest procedurom rozstrzygania opartym o matryce.

Ze względu na to, że rezultaty przedstawiane w tekście mają różny charakter, na początku każdego rozdziału zaznaczamy, które z nich są zaczerpnięte z literatury, które pochodzą z wcześniejszych prac Autora niniejszej monografii, które zaś pojawiają się tu po raz pierwszy. Taka organizacja tekstu ma na celu zachowanie ciągłości wewnątrz rozdziałów oraz niezakłócanietoku myslowego przez dodatkowe informacje.

Rozdział 1

Narzędzia formalne

Rozdział niniejszy ma charakter wprowadzający i sprawozdawczy. Rozpoczniemy go od uwag dotyczących sposobu formalizacji teorii nazw, zastosowanego w dalszych częściach pracy. Przedstawimy krótko różne możliwości występujące w literaturze, z zaznaczeniem wyborów dokonanych przez Autora. Część tych ustaleń zebrana jest w postaci formalnej definicji języka przedstawionej w kolejnym podrozdziale.

Następnie przytoczymy znane z literatury wyniki badań dotyczące logiki pierwszego rzędu i systemów rezolucyjnych, interesujące w kontekście aksjomatycznych systemów rachunku nazw. Wyniki te zostały zastosowane do systemów zdefiniowanych w języku bez kwantyfikatorów i symboli funkcyjnych. Otrzymane rezultaty nie są zaskakujące, porządkują jednak ogólne własności systemów, takich jak rozważane w pracy formalizacje rachunku nazw i pozwalają na skoncentrowanie się w dalszych rozdziałach pracy na specyfice konkretnych systemów aksjomatycznych. Pewną nowością pojawiającą się w niniejszej pracy jest zaimplementowanie przedstawionej procedury decyzyjnej dla sprawdzania konsekwencji w postaci programu komputerowego w języku Prolog.

Na koniec przedstawimy uwagi dotyczące możliwości wykorzystania metody aksjomatycznego odrzucania jako narzędzia badania adekwatności systemów aksjomatycznych w stosunku do leżących u ich podstaw intuicji. Idea ta nie jest nowa, ale pozostaje stosunkowo mało znana i mogłaby być z powodzeniem szerzej stosowana w logice. W niniejszej pracy będzie ona stanowić podstawowe narzędzie oceny adekwatności przedstawianych systemów aksjomatycznych rachunku nazw.

1.1 Jak formalizować rachunek nazw?

Zanim zaprezentujemy konkretne systemy rachunku nazw, zwrócimy uwagę na ogólne problemy związane z wyborem narzędzi formalnych, odpowiednich do konstrukcji takich systemów. Współczesna dyskusja nad sposobem formalizacji teorii nazw rozpoczęła się po tym, jak Łukasiewicz podjął próbę analizy sylogistyki Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej. Wątpliwości często podnoszone były w kontekście zgodności formalizmu z intencją Arystotelesa, ale mają one charakter ogólniejszy – niezależnie od tego co miał na myśli Arystoteles, budując rachunek nazw, musimy się zdecydować na jakiś formalizm. Pojawiają się następujące problemy:

- jak reprezentować sylogizmy i inne podstawowe konstrukcje występujące w teorii nazw (jako wyrażenia języka, reguły, schematy wnioskowania czy też po prostu wnioskowania bądź wyprowadzenia);
- jakie typy nazw dopuszczać w konstruowanym rachunku i czy w jakiś inny sposób ograniczać podstawianie (czy np. zdanie „każde S jest S" jest sensowne);
- czy i jak rozszerzać język tradycyjnego rachunku nazw, np. poprzez dodanie operacji boolowskich określonych na nazwach, bądź niestandardowych funktorów.

Omówimy te kwestie w kolejnych podrozdziałach.

1.1.1 Sylogizmy jako zdania i reguły

Najczęściej stosowane w pracach dotyczących sylogistyki i szerzej rachunku nazw są dwie reprezentacje, spośród których w jednej sylogizmy traktuje się jako zdania, w drugiej – jako reguły. Łukasiewicz ([30, 32]) przedstawia sylogizmy w postaci tez systemu nadbudowanego nad klasycznym rachunkiem zdań (KRZ). Spotkało się to z krytyką, m.in. Corcorana ([7, 8]), który uważa, że bardziej adekwatne jest ujęcie sylogizmów jako reguł bądź schematów wnioskowania. Przyjrzyjmy się podstawowym różnicom pomiędzy tymi podejściami.

Klasyczna sylogistyka jest formalną teorią ujmującą rozumowania, w których zarówno przesłankami, jak i wnioskiem są zdania kategoryczne. W ramach narzędzi, którymi dysponuje współczesna logika formalna, można takie rozumowania formalizować na kilka sposobów, m.in. jako zdania języka o strukturze implikacji oraz jako reguły lub schematy wnioskowania. Pierwszy sposób zastosował Łukasiewicz, drugi – Corcoran. W pierwszym przypadku przesłanki rozumowania traktować można jako czynniki koniunkcji stanowiącej poprzednik implikacji, a wniosek jako następnik implikacji. Otrzymujemy formuły, które można w naturalny sposób przekształcić w reguły[1].

Ujęcie sylogizmów jako tego rodzaju implikacji wymaga przyjęcia określonej interpretacji funktora implikacji oraz koniunkcji. Łukasiewicz przyjął najprostsze rozwiązanie, w którym rozumienie tych funktorów czerpie się z klasycznego rachunku zdań. Klasyczna interpretacja funktorów nie jest tu bynajmniej oczywista. Sama definicja sylogizmu, pochodząca z „Analityk pierwszych":

„Sylogizm jest to wypowiedź, w której, gdy się coś założy, coś innego niż się założyło, musi wynikać dlatego, że się założyło" (Analityki pierwsze 24b[2]),

sugeruje dwie cechy sylogizmów, które klasyczny rachunek zdań ignoruje – nietautologiczność (*coś innego* niż się założyło) i relewancję (*dlatego*, że się założyło)[3].

Łukasiewicz uczynił coś więcej – przyjął, że sylogistyka jest nadbudowana nad klasycznym rachunkiem zdań i tym samym dopuścił konstrukcje inne niż te o postaci sylogizmu. Sprawia to, że traci się bezpośrednią relację z regułami. Ten element jego ujęcia sylogistyki Arystotelesa wydaje się być szczególnie kontrowersyjny.

W związku z tym, dla lepszego zrozumienia istoty ujęcia sylogistyki przez Łukasiewicza można odseparować dwa elementy:

(1) formalizację rozumowań poprzez zdania języka o strukturze implikacji z klasycznym rozumieniem funktorów rachunku zdań,

[1]Fakt wzajemnej przekładalności reguł na implikacje w kontekście sylogistyki zauważa J. Woleński we wstępie do książki Łukasiewicza [32]. Warunkiem takiego przekształcenia jest skończoność zbioru przesłanek w regułach. Reguły, z którymi mamy do czynienia przy faktycznych formalizacjach sylogistyki powstających w tym paradygmacie, są skończone. Zasadnicze rezultaty dotyczące skończoności rozumowań sylogistycznych u Arystotelesa pokazuje J. Lear w pracy [27].

[2]Wszystkie cytaty z Arystotelesa przytoczone są w tłumaczeniu K. Leśniaka z [2].

[3]Na temat rozumienia implikacji u Arystotelesa na poziomie intuicyjnym można przeczytać w pracy M. Tkaczyka [62]. Formalne ujęcie tego typu implikacji występuje w literaturze pod nazwą implikacji konektywnej (connexive implication) [36, 37].

(2) użycie do budowy wyrażeń funktorów KRZ w dowolnej konfiguracji.

W ten sposób można wyodrębnić fragment rachunku zdań, który jest faktycznie potrzebny do budowania rachunku nazw. W kolejnym podrozdziale, po wprowadzeniu formalnych narzędzi umożliwiających taką analizę, zajmiemy się tym problemem dokładniej.

Po przeanalizowaniu tych problemów, w zasadniczej części pracy, będziemy posługiwali się, idąc za przykładem Łukasiewicza, ujęciem aksjomatycznym i dla wygody będziemy tworzyli systemy, które są nadbudowane nad pełnym klasycznym rachunkiem zdań.

1.1.2 Dopuszczalne rodzaje nazw

W semiotyce logicznej występują dwa podziały nazw interesujące z punktu widzenia formalizacji rachunku nazw. Pierwszy podział dokonywany jest ze względu na sposób odnoszenia się do przedmiotów i rozróżnia nazwy na generalne (zbiorowe) i indywidualne (własne). Nazwy generalne desygnują przedmioty ze względu na spełnianie przez nie warunków treściowych, nazwy indywidualne desygnują konkretne obiekty na mocy konwencji językowej. Drugi podział dokonywany jest ze względu na liczbę desygnatów i rozróżnia nazwy puste, nieposiadające w ogóle desygnatów, nazwy jednostkowe, posiadające dokładnie jeden desygnat i nazwy ogólne, posiadające więcej niż jeden desygnat.

W rozważaniach z zakresu teorii nazw pojawiały się postulaty ograniczenia używanych nazw do wybranych kategorii powstałych na gruncie wspomnianych podziałów. Postulaty te mają różną motywację i różnego typu uzasadnienia.

W słynnej pracy „Sens i znaczenie”[4] G. Frege postuluje wyeliminowanie z języka nauki nazw pustych. W uzasadnieniu Frege posługuje się rozumowaniem, które można streścić w ten sposób, że używanie nazw bez denotacji prowadzi do bezprzedmiotowych dyskusji i manipulacji. Arystoteles dopuszcza nazwy bez denotacji, przyjmując, że zdania atomowe, w których takie nazwy się pojawiają, są fałszywe[5].

Z kolei Łukasiewicz, formalizując sylogistykę i powołując się na Arystotelesa, eliminuje z języka sylogistyki nazwy indywidualne.

---

[4] Polskie wydanie tego tekstu opublikowano jako część książki „Pisma semantyczne” [10].

[5] Porównanie tych dwóch podejść znaleźć można w pracy Z. Dywana [9].

„Po pierwsze, przesłanka ‘Sokrates jest człowiekiem’ jest zdaniem jednostkowym, ponieważ jej podmiot – ‘Sokrates’ – to termin indywiduowy. A przecież Arystoteles nie wprowadza do swego systemu terminów lub przesłanek jednostkowych”[6].

Podobne ograniczenie występuje u P. Geacha, który w łączeniu w tradycyjnej sylogistyce nazw indywidualnych i generalnych upatruje źródła *zepsucia* logiki[7].

Łukasiewicza formalizacja sylogistyki zakłada jednocześnie, że nazwy, które wstawiać można jako argumenty zdań kategorycznych, są niepuste, na co zwraca uwagę Słupecki, analizując Łukasiewiczowski system sylogistyki[8].

Odmienne podejście do omawianej kwestii prezentuje Leśniewski, dopuszczając w Ontologii wszelkie rodzaje nazw. W szczególności nie są eleminowane nazwy puste, gdyż Ontologia nie wymaga istnienia żadnego przedmiotu, oraz nazwy indywidualne, co uwidacznia się w przykładach przytaczanych przy omawianiu Ontologii[9].

W niniejszej pracy przyjmiemy rozwiązanie Leśniewskiego. Głównym motywem jest chęć jak najszerszego ujęcia teorii nazw w jednolitym formalizmie, bez wyłączania z niego jakichkolwiek nazw. Dodatkowo zbliżamy się w ten sposób do języka naturalnego, w którym wymienione kategorie nazw nie są wyraźnie rozgraniczone i ściśle przypisane do specyficznych kontekstów użycia.

Innego typu wątpliwości wzbudza dopuszczalność zdań kategorycznych, w których dwa razy występuje ten sam argument. W logice współczesnej tego typu formuły są traktowane jako naturalne i mogą powstać w wyniku podstawienia tej samej wartości (stałej bądź zmiennej) w dowolnym wyrażeniu. Łukasiewicz w swoim systemie formalizującym sylogistykę Arystotelesa używa nawet formuł „każde S jest S” i „pewne S jest S” jako aksjomatów. Takie zdania nie występują jednak w podanym przez Arystotelesa opisie trybów sylogistycznych[10].

[6] Łukasiewicz [32] str. 9-10.

[7] Zob. wykład „History of corruption in logic”, wydany jako część książki [11], str. 44-62.

[8] Zob. książeczka „Z badań nad sylogistyką Arystotelesa” [55].

[9] Dobrze znane są charakterystyczne przykłady pochodzące z książki T. Kotarbińskiego [19]: „Uran jest planetą” i „Jan III Sobieski jest zwycięzcą spod Wiednia”.

[10] Faktycznie Arystoteles posługuje się tego typu zdaniami w innych rozważaniach, np. w „Analitykach pierwszych” II 64b.

Fakt ten wiązać można ze wspomnianym już wymogiem, głoszącym że sylogizm ma prowadzić do nowej wiedzy, wyprowadzić na jego podstawie można „coś innego niż się założyło”, a z drugiej strony to, co jest wyprowadzone, „musi wynikać dlatego, że się założyło”. W tym kontekście zdania „każde S jest S” i „pewne S jest S” nie są przydatne, bo przy normalnym użyciu sylogizmów nic nowego z nich nie wynika ani same nie mogą stanowić nowej wiedzy wynikającej z pewnych założeń. Można, kierując się taką motywacją, podejmować próby tworzenia systemu formalnego w oparciu o język, z którego tego typu zdania są wyeliminowane. Zastosujemy jednak inne podejście, w którym będziemy zgodnie z praktyką logiki współczesnej dopuszczać tego typu wyrażenia jako poprawne syntaktycznie i analizować ich prawdziwość.

Konkludując powyższe rozważania dotyczące dopuszczalności nazw w języku, przyjmujemy w niniejszej pracy rozwiązanie w ramach którego dopuszczamy używanie wszelkich nazw, bez ograniczeń nakładanych na podstawianie, a te formuły atomowe, których z różnych powodów nie chcemy uznać za prawidłowe, będziemy traktować jako syntaktycznie poprawne, lecz fałszywe (nie włączamy ich do zbioru tez).

1.1.3 Rozszerzenia języka

Od strony językowej podstawą dla naszych rozważań jest język sylogistyki Arystotelesa w ujęciu Łukasiewicza, w którym występują zdania kategoryczne o postaci „każde S jest P” oraz „pewne S są P”, połączone spójnikami pochodzącymi z klasycznego rachunku zdań. W różnych współczesnych formalizacjach język ten bywa wzbogacany o dodatkowe elementy. Przyjrzyjmy się krótko niektórym rozszerzeniom występującym w literaturze.

Pierwsze z możliwych rozszerzeń języka rachunku nazw polega na dodaniu dodatkowych funktorów zdaniotwórczych od argumentów nazwowych. Tego typu rozszerzenie występuje w Ontologii Leśniewskiego, w której pierwotnym funktorem tego typu jest funktor ε (odczytywany jako „jest”), a na jego podstawie definiowane są funktory sylogistyki w różnych interpretacjach oraz inne funktory jednoargumentowe wyrażające cechy nazw związane z ich liczbą desygnatów oraz stałe nazwowe[11]. Cały szereg kolejnych funktorów tej samej kategorii co funktory sylogistyki można zbudować poprzez zestawienie możliwych stosunków pomiędzy zakresami dwóch nazw[12].

[11] Definicje tych funktorów w ramach Ontologii podaje m.in. Słupecki [56].
[12] Szerokie omówienie tego typu konstrukcji można znaleźć w pracy Suchonia [60].

Innym źródłem, z którego czerpać można funktory wzbogacające rachunek nazw, jest język naturalny. Tego typu inspirację ma funktor ε Leśniewskiego mający w intencji twórcy Ontologii formalizować użycie w języku polskim słowa „jest" bądź łacińskiego „est". Szczególnie interesujące wydaje się tu wprowadzenie do rachunku nazw formalnych odpowiedników angielskich zwrotów „is a" oraz „is the"[13].

Funktory, których będziemy używać w niniejszej pracy, zostaną wymienione w kolejnym podrozdziale w ramach formalnej definicji języka rachunku nazw. O wyborze zadecydowało ich osadzenie w tradycji logicznej oraz zbieżność z wypowiedziami z języka naturalnego.

Innym znanym z literatury sposobem rozszerzenia rachunku nazw jest wprowadzenie do niego funktorów nazwotwórczych od argumentów nazwowych[14]. Wśród nich występują odpowiedniki dobrze znanych operacji na zbiorach w postaci negacji przynazwowej (odpowiadającej dopełnieniu zbiorów) oraz iloczynu i sumy nazw (odpowiadających iloczynowi i sumie zbiorów). Tego typu rozszerzeń podstawowego rachunku nazw nie będziemy w niniejszej rozprawie stosować z dwóch powodów. Pierwszy z nich jest merytoryczny. Wydaje się, że takie działania, dobrze funkcjonujące w odniesieniu do zbiorów, nie zawsze w sposób intuicyjnie wiarygodny dają się przenieść na nazwy. Nie każda nazwa ma intuicyjnie czytelne dopełnienie, a nie każda para nazw – sumę i iloczyn. Drugi powód ma charakter pragmatyczno-techniczny. Okazuje się bowiem, że nawet najprostsze środki pozwalają na ukazanie bogactwa systemów, a wprowadzenie dodatkowych elementów zaciemniałoby i tak już skomplikowany obraz możliwych formalizacji rachunku nazw. Ewentualne wzbogacenie rozpatrywanych systemów o odpowiedniki boolowskich operacji na zbiorach, przede wszystkim o negację przynazwową, pozostawimy jako temat przyszłych analiz.

Innym bardzo interesującym rozszerzeniem języka rachunku nazw jest wprowadzenie do niego relacji[15]. Takie rozszerzenie sylogistyki na pewno warto przeanalizować również w ujęciu aksjomatycznym, wykracza to jednak poza zakres niniejszej pracy.

Najsilniejszym od strony formalnej rozszerzeniem rachunku nazw jest wprowadzenie do niego standardowych kwantyfikatorów wiążących zmienne nazwowe. Tego typu podejście występuje w Ontologii Leśniewskiego. Takie

[13]Takie funktory występują m.in. w pracy Mossa [39].

[14]Działania na nazwach występują m.in. w formalizacjach sylogistyki, pochodzących od A. Wedberga [67], J.C. Shepherdsona [51] i E.J. Lemmona [28].

[15]Rozszerzenie to występuje w pracy Pratt-Hartmanna i Mossa [46].

rozszerzenie z jednej strony wzmacnia możliwości ekspresyjne języka, z drugiej jednak powoduje, że formułowane w nim teorie są znacznie trudniejsze z obliczeniowego punktu widzenia. Pełny rachunek kwantyfikatorów pierwszego rzędu jest bowiem nierozstrzygalny[16]. Leśniewski, tworząc Ontologię, miał na celu nie aksjomatyzację teorii nazw, lecz budowę fundamentów nauk formalnych w ogóle, jako alternatywę do rachunku zbiorów i systemu podstaw matematyki, przedstawionego przez Whiteheada i Russela w „Principia Matematica".

W niniejszej rozprawie do języka rachunku nazw kwantyfikatorów wprowadzać nie będziemy. Podstawowym motywem dla tego wyboru jest formalna prostota systemów bezkwantyfikatorowych oraz ich niska złożoność obliczeniowa. Dodatkowo zauważyć można, że funktory sylogistyki stanowią tzw. kwantyfikatory języka naturalnego (w ich odczytaniu występują słowa „każde" i „pewne") i jednym z motywów budowania teorii nazw jest wykorzystanie jej do analizy wypowiedzi z języka naturalnego bez użycia standardowych kwantyfikatorów.

1.2 Definicja języka

Zdefiniujemy teraz formalnie język rachunku nazw, który będzie używany w pracy. Alfabet rachunku składa się z następujących symboli:

- zmienne nazwowe: $S, P, M, \ldots, M_1, M_2, \ldots$;
- dwuargumentowe funktory zdaniotwórcze od argumentów nazwowych (w notacji infiksowej):
  - a (funktor tworzący zdania ogólnotwierdzące sylogistyki, np. formułę „SaP" odczytać należy jako „każde S jest P"),
  - i (funktor tworzący zdania szczegółowotwierdzące sylogistyki – „SiP" odczytać należy jako „pewne S są P"),
  - e (funktor tworzący zdania ogólnoprzeczące sylogistyki – „SeP" odczytać należy jako „żadne S nie jest P"),
  - o (funktor tworzący zdania szczegółowoprzeczące sylogistyki – „SoP" odczytać należy jako „pewne S nie są P"),

[16] Zob. np. w książce A. Grzegorczyka „Zarys logiki matematycznej" [14], Twierdzenie 42, str. 442.

  - ε (funktor 'jest' Leśniewskiego – „$S\varepsilon P$" odczytać neleży jako „S jest P"),
  - is_the (funktor odpowiadający wyrażeniu „is the" z języka angielskiego a jednocześnie '=' z Ontologii Leśniewskiego – „S is_the P" odczytać neleży jako „S jest obiektem identycznym z P"),
  - is_a (funktor odpowiadający wyrażeniu „is a" z języka angielskiego – „S is_a P" odczytać należy jako „S jest jednym z P");

- jednoargumentowe funktory zdaniotwórcze od argumentu nazwowego pochodzące z Ontologii Leśniewskiego:
  - *sol* (tworzący prawdziwe zdania dla nazw jednostkowych i pustych),
  - *ob* (tworzący prawdziwe zdania dla nazw jednostkowych – „$ob(S)$" odczytać można jako „S jest obiektem"),
  - *ex* (tworzący prawdziwe zdania dla nazw niepustych);

- funktory klasycznego rachunku zdań: $\neg$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\rightarrow$ (implikacja), $\equiv$ (równoważność);

- nawiasy.

Dodatkowo używać będziemy następujących symboli metajęzykowych:

- zmienne reprezentujące zmienne nazwowe[17]: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots$;
- zmienne reprezentujące wyrażenia zdaniowe: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$;
- zmienne reprezentujące zbiory takich wyrażeń: $\Phi, \Psi, \ldots, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$;
- zmienne przyjęte do oznaczania zbiorów zbiorów wyrażeń zdaniowych: $K, K_1, K_2, \ldots$, reguł (prowadzących od zbiorów formuł zdaniowych do formuł zdaniowych): $r, r_1, r_2, \ldots$, zbiorów reguł: $\mathcal{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$;
- quasi-cudzysłowy;

[17]Zmienne tego typu wykorzystywane będą do pisania o wyrażeniach, których kształt nie jest do końca określony. Formuły w języku zawierają jako argumenty funktorów specyficznych rachunku nazw zmienne nazwowe. Pisząc ogólnie o tych formułach, w sytuacjach, w których nie wiemy, jakie konkretnie zmienne nazwowe z języka są w nich użyte, będziemy stosowali dla ich nazywania zmienne metajęzykowe.

- symbol asercji i wyprowadzalności: $\vdash$ ($\vdash \alpha$ oznacza, że α jest tezą, a $\alpha \vdash \beta$ oznacza, że β jest wyprowadzalne z α);
- symbol odrzucania: $\dashv$ ($\dashv \alpha$ oznacza, że α jest odrzucone)
- podstawienia wyrażeń nazwowych za zmienne nazwowe w formułach i zbiorach formuł: $e, e_1, e_2, \ldots$.

Jeśli w danym kontekście nie będzie to prowadziło do nieporozumień będziemy opuszczać w tekście quasi-cudzysłowy oraz symbol asercji.

Poprawnie zbudowaną formułę rachunku nazw możemy teraz zdefiniować indukcyjnie w następujący sposób.

1. Wyrażenia $\ulcorner \mathcal{X} a \mathcal{Y} \urcorner$, $\ulcorner \mathcal{X} i \mathcal{Y} \urcorner$, $\ulcorner \mathcal{X} e \mathcal{Y} \urcorner$, $\ulcorner \mathcal{X} o \mathcal{Y} \urcorner$, $\ulcorner \mathcal{X} \varepsilon \mathcal{Y} \urcorner$, $\ulcorner \mathcal{X}\ is\_the\ \mathcal{Y} \urcorner$, $\ulcorner \mathcal{X}\ is\_a\ \mathcal{Y} \urcorner$, $\ulcorner sol(\mathcal{X}) \urcorner$, $\ulcorner ob(\mathcal{X}) \urcorner$, $\ulcorner ex(\mathcal{X}) \urcorner$, gdzie $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ reprezentują zmienne nazwowe, są poprawnie zbudowanymi formułami.
2. Jeżeli α jest poprawnie zbudowaną formułą, to $\ulcorner \neg\alpha \urcorner$ jest dobrze zbudowaną formułą.
3. Jeżeli α i β są poprawnie zbudowanymi formułami, to $\ulcorner (\alpha \wedge \beta) \urcorner$, $\ulcorner (\alpha \vee \beta) \urcorner$, $\ulcorner (\alpha \rightarrow \beta) \urcorner$ i $\ulcorner (\alpha \equiv \beta) \urcorner$ są poprawnie zbudowanymi formułami.

Jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumień, będziemy opuszczać nawiasy, przyjmując zwykłą kolejność wiązania funktorów. Wykorzystując łączność koniunkcji i alternatywy, będziemy również zamiast $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ oraz $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ pisać $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, a zamiast $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ oraz $\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ – $\alpha \vee \beta \vee \gamma$. Przy większej ilości wyrażeń połączonych funktorem koniunkcji (alternatywy) będziemy stosować zapis $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ ($\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$), rozumiejąc go zgodnie z przyjętym zwyczajem.

Przy definiowaniu konkretnych systemów rachunku nazw będziemy ograniczali ten język, używając jedynie wprost wymienionych funktorów zdaniotwórczych od argumentów nazwowych. Funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych pozostaną niezmienione.

Dowolne wyrażenie, zbudowane z funktora zdaniotwórczego od argumentów nazwowych oraz jego argumentów, nazywać będziemy formułą *atomową* lub krótko – *atomem*. Dowolną koniunkcję formuł atomowych (także jednoelementową, tzn. po prostu formułę atomową) będziemy nazywać formułą *elementarną*. Niech α będzie formułą elementarną, a β formułą atomową.

Każde wyrażenie o postaci $\alpha \to \beta$, $\neg\alpha$ lub β będziemy nazywać formułą *hornowską*[18]. Z kolei każde wyrażenie o postaci $\alpha \to \beta$ lub β będziemy nazywać formułą *definitywną*. Formuły hornowskie oraz formuły o postaci $\alpha \to \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$, $n \geqslant 2$, gdzie α jest formułą elementarną, a β_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ formułami atomowymi, będziemy nazywać formułami *klauzulowymi*. Niech teraz α i β będą formułami elementarnymi. Jeżeli wszystkie atomy występujące jako elementy koniunkcji formuły β występują również w formule α, to będziemy pisać, że α *zawiera* β. Oczywiście, na gruncie klasycznego rachunku zdań w tej sytuacji dowodliwa jest implikacja $\alpha \to \beta$.

1.3 Teorie pierwszego rzędu, systemy aksjomatyczne i rezolucyjne

Po wprowadzeniu powyższych ustaleń terminologicznych powrócimy do problemu sformułowania rachunku nazw jako teorii aksjomatycznej. Nie chodzi w tym momencie o żaden konkretny system (te będą rozpatrywane w kolejnych rozdziałach), ale o samą zasadę formalizacji.

Język, którym się posługujemy, traktować można jako fragment języka logiki pierwszego rzędu, w którym nieobecne są kwantyfikatory[19]. Każda z formuł może być traktowana jako otwarta formuła języka pierwszego rzędu i interpretowana wtedy jako poprzedzona kwantyfikatorami ogólnymi wiążącymi wszystkie występujące w niej zmienne nazwowe.

Przyjmujemy następujące reguły wnioskowania:

- reguła odrywania MP o postaci:

$$\frac{\vdash \alpha \to \beta; \vdash \alpha}{\vdash \beta};$$

[18] Terminologia dotycząca wyrażeń o specyficznej formie pochodzi z teorii programowania w języku logiki, zob. [20, 29].

[19] Zwykle wymaga się od teorii pierwszego rzędu, aby zmienne nazwowe w nich występujące miały charakter indywiduowy i reprezentowały nazwy konkretnych obiektów. W rachunku nazw zmienne nazwowe mają inny charakter – reprezentują dowolne nazwy. W związku z tym rachunek nazw nie jest typową teorią pierwszego rzędu. Jeśli nie wnikamy w to, jakiego typu zmienne nazwowe mamy w systemie, to rachunek nazw nie różni się od innych teorii pierwszego rzędu. Możemy do niego zastosować wszystkie formalne rezultaty dotyczące logiki pierwszego rzędu.

- reguła podstawiania Sub o postaci:

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash e(\alpha)},$$

  gdzie e jest dowolnym podstawieniem wyrażeń nazwowych za zmienne nazwowe.

Aksjomatami są wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań w języku oraz specyficzne aksjomaty konkretnej teorii.

Wyprowadzeniem formuły α ze zbioru formuł Φ będziemy nazywać ciąg formuł, którego każdy wyraz jest aksjomatem systemu, należy do zbioru Φ bądź został otrzymany z poprzednich wyrazów ciągu za pomocą jednej z reguł systemu, a ostatnim wyrazem tego ciągu jest formuła α.

Niech $\perp$ oznacza zdanie kontradyktoryczne (które jest w systemie równoważne $\alpha \wedge \neg\alpha$), Cn_I będzie operacją konsekwencji w logice pierwszego rzędu, a Cn operacją konsekwencji określoną przez reguły MP i Sub oraz wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań jako aksjomaty. Obie reguły są dopuszczalne w logice pierwszego rzędu – jeżeli ich przesłanki są tezami, to wniosek też jest tezą, a aksjomaty są jej tezami. Wobec tego możemy zauważyć następującą prawidłowość.

Obserwacja 1. *Jeżeli* $\perp \in Cn(\Phi)$, *to* $\perp \in Cn_I(\Phi)$.

Układ przedmiotów z dowolnej dziedziny (indywiduów, klas, relacji) jest *modelem* dla formuły wtedy i tylko wtedy, gdy po przyporządkowaniu przedmiotów tego układu wszystkim stałym i zmiennym symbolom, które występują w danej formule, otrzymujemy zdanie prawdziwe. Układ przedmiotów jest modelem dla zbioru formuł wtedy i tylko wtedy, gdy jest modelem dla wszystkich formuł z tego zbioru przy tym samym dla wszystkich formuł przyporządkowaniu przedmiotów stałym i zmiennym. Formułę oraz zbiór formuł, dla których nie istnieje model, nazywać będziemy *niespełnialnymi*.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy twierdzenie Gödla o pełności logiki pierwszego rzędu[20].

Twierdzenie 1. $\perp \in Cn_I(\Phi)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór* Φ *jest niespełnialny.*

[20] Zob. np. [14], Twierdzenie 25, str. 271.

Przedstawimy teraz podstawowe pojęcia i rezultaty z zakresu rezolucyjnego ujęcia logiki.

Dowolny atom oraz negację atomu ustalonego języka nazywać będziemy *literałem*, przy czym atom nazywać będziemy też literałem *pozytywnym*, a negację atomu – *negatywnym*. Dowolny skończony zbiór literałów nazywać będziemy *klauzulą*. Klauzulę pustą oznaczać będziemy symbolem $\Box$. Klauzulę stanowiącą sumę zbioru literałów pozytywnych: $\Phi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ oraz negatywnych $\Psi = \{\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_n\}$, gdzie $m, n \geqslant 0$, będziemy zapisywać następująco:

$$\Phi \leftarrow \Psi',$$

gdzie $\Psi' = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Zbiory Φ oraz Ψ' będziemy nazywać odpowiednio lewą i prawą stroną tej klauzuli. Dla uproszczenia, w zapisie klauzul będziemy, zgodnie ze zwyczajem, zapisywać sumę zbiorów przy użyciu przecinka oraz zaniedbywać różnicę pomiędzy jednoelementowymi zbiorami i ich elementami, i tak np. zamiast pisać: $\{\alpha\} \cup \Phi$, będziemy pisali: α, Φ. W tej konwencji wspomnianą wyżej klauzulę możemy zapisać również następująco:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \leftarrow \beta_1, \ldots, \beta_n.$$

Intuicyjnie niepusta klauzula reprezentuje alternatywę swoich elementów, a klauzula pusta odpowiada zdaniu kontradyktorycznemu. Układ przedmiotów jest modelem dla klauzuli wtedy i tylko wtedy, gdy jest modelem dla co najmniej jednej formuły należącej do tej klauzuli. Niech będzie dany pewien układ przedmiotów i ustalone przyporządkowanie przedmiotów tego układu do wszystkich stałych i zmiennych symboli, które występują w pewnym zbiorze klauzul. Wybrany układ jest modelem dla zbioru klauzul wtedy i tylko wtedy, gdy przy ustalonym przyporządkowaniu układ ten jest modelem dla wszystkich klauzul z rozpatrywanego zbioru. Zbiór klauzul, dla którego nie istnieje model, nazywać będziemy niespełnialnym.

Dla klauzul rozpatruje się regułę rezolucji (Rez_k) o schemacie:

$$\frac{\Phi_1 \leftarrow \Psi_1, \alpha_1; \alpha_2, \Phi_2 \leftarrow \Psi_2}{e_1(\Phi_1), e_2(\Phi_2) \leftarrow e_1(\Psi_1), e_2(\Psi_2)},$$

gdzie α_1 i α_2 są atomami, Φ_1, Φ_2, Ψ_1 oraz Ψ_2 są skończonymi zbiorami atomów, natomiast e_1 i e_2 są podstawieniami, takimi że $e_1(\alpha_1) = e_2(\alpha_2)$. Klauzule $\Phi_1 \leftarrow \Psi_1, \alpha_1$ oraz $\alpha_2, \Phi_2 \leftarrow \Psi_2$ będziemy nazywali odpowiednio lewą i prawą przesłanką reguły rezolucji. Atomy α_1 i α_2 będziemy określali jako zunifikowane przez podstawienia e_1 i e_2. W przypadku konkretnego użycia reguły rezolucji odpowiednie atomy występujące w roli α_1 i α_2 w regule określać będziemy jako wyeliminowane przez to użycie.

Wyprowadzenie klauzuli Φ ze zbioru klauzul K rozumiemy, analogicznie do wyprowadzenia formuły ze zbioru formuł, jako ciąg klauzul, zawierający jako swój ostatni element klauzulę Φ, którego każdy wyraz należy do zbioru K lub został otrzymany z poprzednich wyrazów przy użyciu reguły rezolucji (Rez_k).

W podstawowej dla ujęcia rezolucyjnego pracy [49] J.A. Robinson sformułował następujące twierdzenie[21]:

Twierdzenie 2. *Niech Cn_{Rez} będzie operacją konsekwencji wyznaczoną jedynie przez regułę Rez_k, a K skończonym zbiorem klauzul. Zbiór K jest niespełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy $\Box \in Cn_{Rez}(K)$.*

Intuicyjny związek pomiędzy klauzulą a wyrażeniem języka rachunku nazw będącym alternatywą jej elementów możemy rozszerzyć do dowolnych formuł i sformalizować poprzez zdefiniowanie przekształcenia formuł języka rachunku nazw na zbiór klauzul. Otrzymany zbiór klauzul nazywać będziemy *postacią klauzulową* formuły.

Każda formuła może być przy użyciu praw KRZ przekształcona do formuły równoważnej będącej w koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej:

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n,\ n \geqslant 1, \tag{1.1}$$

gdzie $\alpha_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n$ są alternatywami literałów. Do przekształcenia wystarczy wykorzystać schemat ekstensjonalności dla równoważności w klasycznym rachunku zdań:

$$\text{Jeżeli } (\alpha \equiv \beta) \text{ to } \gamma \equiv \gamma(\alpha//\beta), \tag{1.2}$$

gdzie $\gamma(\alpha//\beta)$ jest formułą otrzymaną z γ przez zastąpienie dowolnej ilości wystąpień formuły α przez formułę β; oraz następujące prawa tego rachunku:

$$(\alpha \equiv \beta) \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)), \tag{1.3}$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta), \tag{1.4}$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta), \tag{1.5}$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta), \tag{1.6}$$

[21] Resolution Theorem, str. 30.

$$((\alpha \wedge \beta) \vee \gamma) \equiv ((\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)), \tag{1.7}$$

$$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)). \tag{1.8}$$

Postać klauzulową formuły definiujemy następująco:

- postacią klauzulową alternatywy literałów jest jednoelementowy zbiór klauzul zawierający jako swój element zbiór literałów tworzących tę alternatywę;
- postacią klauzulową koniunkcji alternatyw elementarnych (wyrażenia, które jest w koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej) jest suma postaci klauzulowych jej czynników;
- postacią klauzulową dowolnej formuły jest postać klauzulowa równoważnego jej wyrażenia w koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej.

Przekształcenie możemy rozszerzyć na zbiory formuł. Postacią klauzulową zbioru formuł jest suma postaci klauzulowych jego elementów.

Określenie postaci klauzulowej oraz niespełnialności dla zbiorów formuł i zbiorów klauzul gwarantuje słuszność następującej obserwacji:

Obserwacja 2. *Zbiór formuł jest niespełnialny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór klauzul stanowiący jego postać klauzulową jest niespełnialny.*

Reguła rezolucji może w systemie aksjomatycznym zostać zastąpiona przez połączenie reguły *Sub* oraz następującej reguły Rez_f[22]:

$$\frac{\alpha_1 \rightarrow \beta_1 \vee \gamma; \gamma \wedge \alpha_2 \rightarrow \beta_2}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \rightarrow \beta_1 \vee \beta_2},$$

gdzie γ jest formułą atomową, α_1, α_2 są formułami elementarnymi bądź są równoważne $\neg\bot$, zaś β_1 i β_2 są alternatywami formuł atomowych (możliwie jednoelementowymi, tzn. atomami) bądź są równoważne $\bot$. Formuły $\neg\bot$ i $\bot$ są odpowiednikami zbiorów pustych, które mogą wystąpić w odpowiednich miejscach w regule rezolucji dla klauzul.

Ze względu na to, że formuła:

$$(\alpha_1 \rightarrow \beta_1 \vee \gamma) \wedge (\gamma \wedge \alpha_2 \rightarrow \beta_2) \rightarrow (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \rightarrow \beta_1 \vee \beta_2) \tag{1.9}$$

[22]Taka forma wprowadzenia do systemu reguły rezolucji występuje np. w książce [3].

jest tezą klasycznego rachunku zdań, reguła Rez_f jest dopuszczalna w rozpatrywanych przez nas systemach rachunku nazw. Fakt ten prowadzi do następującej obserwacji:

Obserwacja 3. *Niech Φ będzie dowolnym zbiorem formuł języka rachunku nazw, a K postacią klauzulową tego zbioru. Jeżeli $\Box \in Cn_{Rez}(K)$, to $\bot \in Cn(\Phi)$.*

Zestawienie Twierdzenia 1, Twierdzenia 2 oraz Obserwacji 1, Obserwacji 2 i Obserwacji 3 prowadzi do następującego lematu określającego relację między interesującymi nas systemami aksjomatycznymi a systemami rezolucyjnymi.

Lemat 1. *Niech Φ będzie skończonym zbiorem formuł języka rachunku nazw, a K zbiorem klauzul stanowiącym jego postać klauzulową. Następujące stwierdzenia są równoważne:*
(i) $\Box \in Cn_{Rez}(K)$;
(ii) $\bot \in Cn(\Phi)$;
(iii) $\bot \in Cn_I(\Phi)$.

W dalszym ciągu interesować nas będzie, jak przy pomocy podejścia rezolucyjnego sprawdzić, czy dana formuła α języka rachunku nazw jest tezą systemu aksjomatycznego, którego aksjomaty specyficzne tworzą skończony zbiór Φ, tzn. czy $\alpha \in Cn(\Phi)$.

Na potrzeby tych rozważań, w celach czysto technicznych, rozszerzymy język, którym się posługujemy o stałe nazwowe. Nie będą one występować w formułach języka rachunku nazw, bedą wykorzystywane jedynie w procedurach dowodowych, opartych o regułę rezolucji oraz związanych z nimi dowodach założeniowych. Tego typu stałe nazwowe nie są więc z intuicyjnego punktu widzenia nazwami konkretnych przedmiotów ze świata pozajęzykowego, jak zwykle rozumie się stałe nazwowe, lecz wyrażeniami nazwowymi, mającymi tę własność, że nie można za nie nic podstawić.

Zaczniemy od sformułowania i udowodnienia twierdzenia o dedukcji dla operacji Cn[23].

Twierdzenie 3. *Niech Φ będzie skończonym zbiorem formuł, β dowolną formułą, a α formułą nie zawierającą zmiennych.*

$$\textit{Jeżeli } \beta \in Cn(\Phi \cup \{\alpha\}), \textit{ to } \ulcorner \alpha \to \beta \urcorner \in Cn(\Phi).$$

[23]Twierdzenie występuje w pracy [22] jako Lemat 1.

Dowód. Przeprowadzimy indukcję ze względu na liczbę zastosowań reguł w wyprowadzeniu, tzn. taką liczbę k, że $\gamma \in Cn^k(\Psi)$, gdy γ daje się wyprowadzić z Ψ przy k-krotnym użyciu jednej z reguł MP lub Sub. Oczywiście, $Cn(\Psi) = \bigcup\{Cn^k(\Psi)\}$. Udowodnimy indukcyjnie następującą zależność:

$$\text{dla każdego } k \text{ jeżeli } \beta \in Cn^k(\Phi \cup \{\alpha\}), \text{ to } \ulcorner \alpha \to \beta \urcorner \in Cn(\Phi). \tag{1.10}$$

Niech $k = 0$, co oznacza, że $\beta \in (\Phi \cup \{\alpha\})$. Jeżeli $\beta = \alpha$, to ponieważ $\ulcorner \alpha \to \alpha \urcorner \in Cn(\emptyset) \subseteq Cn(\Phi)$ mamy również $\ulcorner \alpha \to \beta \urcorner \in Cn(\Phi)$. Jeżeli zaś $\beta \in \Phi$, to, ponieważ $\ulcorner \beta \to (\alpha \to \beta) \urcorner \in Cn(\emptyset) \subseteq Cn(\Phi)$ stosując regułę odrywania MP, otrzymamy $\ulcorner \alpha \to \beta \urcorner \in Cn(\Phi)$.

Załóżmy teraz indukcyjnie, że (1.10) zachodzi dla każdego $k < l$ oraz, że $\beta \in Cn^l(\Phi \cup \{\alpha\})$. Jeżeli formuła β została otrzymana przy użyciu reguły odrywania MP, to istnieje formuła γ oraz liczby naturalne $m, n < l$ takie, że $\gamma \in Cn^m(\Phi \bigcup \{\alpha\})$ oraz $\ulcorner \gamma \to \beta \urcorner \in Cn^n(\Phi \bigcup \{\alpha\})$. Z założenia indukcyjnego mamy stąd $\ulcorner \alpha \to \gamma \urcorner, \ulcorner \alpha \to (\gamma \to \beta) \urcorner \in Cn(\Phi)$, i dalej, $\ulcorner \alpha \to \beta \urcorner \in Cn(\Phi)$. Jeżeli natomiast formuła α została otrzymana przy użyciu reguły podstawiania Sub, to istnieje formuła γ oraz liczba naturalna $n < l$ taka, że $\gamma \in Cn^n(\Phi \bigcup \{\alpha\})$ i podstawienie e takie, że $\beta = e(\gamma)$. Na mocy założenia indukcyjnego $\ulcorner \alpha \to \gamma \urcorner \in Cn(\Phi)$. Stosując regułę podstawiania Sub, otrzymujemy $e(\alpha \to \gamma) \in Cn(\Phi)$. Ze względu na to, że α nie zawiera zmiennych $e(\alpha) = \alpha$, a zatem $e(\alpha \to \gamma) = \alpha \to \beta$. Stąd $\ulcorner \alpha \to \beta \urcorner \in Cn(\Phi)$. ■

Wykorzystamy jeszcze następujący lemat:

Lemat 2. *Niech Φ będzie skończonym zbiorem formuł, α formułą, a $Const = \{c_1, c_2, \ldots\}$ przeliczalnym zbiorem stałych nazwowych, które nie występują w Φ ani w α. Niech dalej α^* będzie formułą otrzymaną z α przez podstawienie za wszystkie zmienne różnych stałych ze zbioru $Const$.*

$$\alpha^* \in Cn(\Phi) \textit{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \alpha \in Cn(\Phi)$$

Dowód. Dowód jest taki sam jak analogicznego twierdzenia dla logiki pierwszego rzędu[24]. Wystarczy zauważyć, że w wyprowadzeniu formuły α^* z formuł ze zbioru Φ można zastąpić stałe ze zbioru $Const$ zmiennymi, za które te stałe zostały podstawione dla otrzymania z formuły α formuły α^*. Ponieważ stałe ze zbioru $Const$ nie występują w Φ ani w α, otrzymany ciąg będzie wyprowadzeniem wyrażenia α z tych samych formuł ze zbioru Φ. ■

[24] Por. Twierdzenie 14, str. 196 w [14].

Powyższe twierdzenia pozwalają na scharakteryzowanie operacji konsekwencji związanej z aksjomatycznymi systemami rachunku nazw poprzez następujące twierdzenie[25]:

Twierdzenie 4. *Niech Φ będzie skończonym zbiorem wyrażeń rachunku nazw, α formułą tego rachunku, $Const = \{c_1, c_2, \ldots\}$ przeliczalnym zbiorem stałych nazwowych, które nie występują w Φ ani w α, a α^* formułą otrzymaną z α przez podstawienie za wszystkie zmienne różnych stałych ze zbioru $Const$. Niech dalej K będzie zbiorem klauzul, stanowiącym postać klauzulową zbioru $\Phi \cup \{\neg\alpha^*\}$. Następujące warunki są równoważne:*
(i) $\Box \in Cn_{Rez}(K)$;
(ii) $\alpha \in Cn(\Phi)$;
(iii) $\alpha \in Cn_I(\Phi)$.

Dowód. (i) $\rightarrow$ (ii). Załóżmy, że $\Box \in Cn_{Rez}(K)$. Na mocy Lematu 1 wynika stąd, że $\perp \in Cn(\Phi \cup \{\neg\alpha^*\})$. Na mocy Twierdzenia 3, które możemy zastosować, ponieważ $\neg\alpha^*$ nie zawiera zmiennych, wynika stąd, że $\neg\alpha^* \rightarrow \perp \in Cn(\Phi)$, i dalej, $\alpha^* \in Cn(\Phi)$. Dzięki Lematowi 2 wynika stąd, że $\alpha \in Cn(\Phi)$.

(ii) $\rightarrow$ (iii). Zależność zachodzi, ponieważ reguły definiujące operacje Cn są zachowane przez operację Cn_I.

(iii) $\rightarrow$ (i). Załóżmy, że $\alpha \in Cn_I(\Phi)$. Stosując regułę podstawiania obowiązującą w ramach operacji Cn_I otrzymamy $\alpha^* \in Cn_I(\Phi)$. Ponieważ operacja Cn_I jest oparta na klasycznym rachunku zdań, $\perp \in Cn_I(\Phi \cup \{\neg\alpha^*\})$. Na mocy Lematu 1 w tej sytuacji $\Box \in Cn_{Rez}(K)$.

■

1.4 Implikacje, reguły i wyprowadzenia

Ograniczenie w systemach rezolucyjnych zbioru reguł do jedynej reguły rezolucji pozwala na zaobserwowanie interesujących prawidłowości dotyczących wyprowadzalności, w szczególności dotyczących formuł klauzulowych i hornowskich. Rozpocznijmy od następujących lematów dotyczących przesuwania pewnych elementów wewnątrz wyprowadzenia.

[25] Twierdzenie 1 w pracy [22].

Lemat 3. *W dowolnym wyprowadzeniu w systemie z regułą rezolucji jako jedyną regułą można użycie reguły rezolucji z zastosowaniem jednoelementowej klauzuli jako jednej z przesłanek przesunąć w wyprowadzeniu przed lub za inne zastosowanie reguły rezolucji.*

Dowód. Rozważmy najpierw sytuację przesuwania użycia interesującego nas przypadku rezolucji przed inne jej użycie. Weźmy pod uwagę przykład, w którym z klauzul:

$$\alpha_1, \Phi_1 \leftarrow \Psi_1, \beta_1 \tag{1.11}$$

i

$$\beta_2, \Phi_2 \leftarrow \Psi_2 \tag{1.12}$$

wyprowadzona jest klauzula:

$$e_1(\alpha_1), e_1(\Phi_1), e_2(\Phi_2) \leftarrow e_1(\Psi_1), e_2(\Psi_2), \tag{1.13}$$

gdzie e_1 i e_2 są podstawieniami takimi, że $e_1(\beta_1) = e_2(\beta_2)$, i dalej, z klauzuli (1.13) oraz

$$\emptyset \leftarrow \alpha \tag{1.14}$$

wyprowadzona jest klauzula:

$$e_3(e_1(\Phi_1)), e_3(e_2(\Phi_2)) \leftarrow e_3(e_1(\Psi_1)), e_3(e_2(\Psi_2)), \tag{1.15}$$

gdzie e i e_3 są podstawieniami takimi, że $e(\alpha) = e_3(e_1(\alpha_1))$.

W tej sytuacji, ponieważ $e(\alpha) = e_3(e_1(\alpha_1))$, z klauzul (1.14) i (1.11) można wyprowadzić klauzulę:

$$e_3(e_1(\Phi)) \leftarrow e_3(e_1(\Psi)), e_3(e_1(\beta)). \tag{1.16}$$

Ponieważ $e_1(\beta_1) = e_2(\beta_2)$, mamy również $e_3(e_1(\beta_1)) = e_3(e_2(\beta_2))$. Zatem z klauzul (1.16) i (1.12) możemy otrzymać klauzulę (1.15).

Powyższe przekształcenie można zastosować niezależnie od tego, które z atomów α i α_1 oraz β_1 i β_2, tworzących pary literałów eliminowanych poprzez zastosowanie reguły rezolucji, tworzą literały pozytywne (znajdują się po lewej stronie znaku „$\leftarrow$"), a które negatywne (znajdują się po prawej stronie znaku „$\leftarrow$"). W związku z tym zastosowanie reguły rezolucji z użyciem klauzuli jednoelementowej zawsze można przesunąć przed jej inne zastosowanie.

Rozważmy teraz przykład przesunięcia użycia interesującego nas przypadku rezolucji za inne jej użycie. Niech z klauzul:

$$\emptyset \leftarrow \alpha \tag{1.17}$$

i

$$\alpha_1, \Phi_1 \leftarrow \Psi_1, \beta_1 \tag{1.18}$$

wyprowadzona będzie przy użyciu reguły rezolucji Rez_k klauzula:

$$e_1(\Phi_1) \leftarrow e_1(\Psi_1), e_1(\beta_1), \tag{1.19}$$

gdzie e i e_1 są podstawieniami takimi, że $e(\alpha) = e_1(\alpha_1)$,
i dalej, z klauzuli (1.19) oraz

$$\beta_2, \Phi_2 \leftarrow \Psi_2 \tag{1.20}$$

wyprowadzona jest klauzula:

$$e_3(e_1(\Phi_1)), e_2(\Phi_2) \leftarrow e_3(e_1(\Psi_1)), e_2(\Psi_2), \tag{1.21}$$

gdzie $e_3(e_1(\beta_1)) = e_2(\beta_2)$.

W tej sytuacji, ponieważ $e_3(e_1(\beta_1)) = e_2(\beta_2)$, możemy z klauzul (1.18) i (1.20) wyprowadzić klauzulę:

$$e_3(e_1(\alpha_1)), e_3(e_1(\Phi_1)), e_2(\Phi_2) \leftarrow e_3(e_1(\Psi_1)), e_2(\Psi_2). \tag{1.22}$$

Ponieważ $e_1(\alpha_1) = \alpha$, mamy również $e_3(e_1(\alpha_1)) = e_3(e(\alpha))$. Możemy więc zastosować regułę rezolucji do klauzul (1.17) i (1.22) (stosując do nich odpowiednio podstawienia $e_3 \circ e_1$ oraz $e_3 \circ e$, otrzymując w rezultacie klauzulę (1.21)).

Tak jak w przypadku przesuwania interesującego nas zastosowania reguły rezolucji w przeciwną stronę, powyższe przekształcenie można zastosować niezależnie od tego, które z atomów α i α_1 oraz β_1 i β_2, tworzących pary literałów eliminowanych poprzez zastosowanie reguły rezolucji, tworzą literały pozytywne (znajdują się po lewej stronie znaku „$\leftarrow$”), a które negatywne (znajdują się po prawej stronie znaku „$\leftarrow$”), a zatem zastosowanie reguły rezolucji z użyciem klauzuli jednoelementowej zawsze można przesunąć za inne zastosowanie. ■

Lemat 4. *Jeżeli klauzulę Φ da się wyprowadzić ze zbioru klauzul K, to istnieje wyprowadzenie Φ z K, w którym wszystkie klauzule jednoelementowe, o ile w wyprowadzeniu występują, wykorzystane są w ostatnich zastosowaniach reguły rezolucji.*

Dowód. Na mocy Lematu 3 zastosowanie reguły rezolucji z klauzulą jednoelementową jako przesłanką można przesunąć w ramach wyprowadzenia za każde inne zastosowanie rezolucji. Sukcesywnie przesuwając w ten sposób wszystkie zastosowania reguły rezolucji z klauzulą jednoelementową na koniec wyprowadzenia, otrzymamy wyprowadzenie, o którego istnieniu mówi lemat. ■

Obserwacja 4. *Postacią klauzulową negacji formuły klauzulowej jest zbiór jednoelementowych klauzul. Postacią klauzulową negacji formuły definitywnej jest zbiór jednoelementowych klauzul, z których dokładnie jedna zawiera negatywny literał, a wszystkie inne zawierają pozytywne literały.*

Jeżeli w formule klauzulowej usuniemy z poprzednika lub następnika jakiś jej element, to otrzymamy formułę od niej *silniejszą*. Prawidłowość tę wyrazimy formalnie z wykorzystaniem funkcji *str*, przekształcającej formuły klauzulowe w zbiory formuł klauzulowych, zdefiniowanej w następujący sposób:

Definicja 1. *Niech α będzie formułą klauzulową o postaci:*

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_m \to \gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_n.$$

$str(\alpha)$ jest zbiorem wszystkich implikacji, których poprzednikiem jest koniunkcja dowolnie wybranych elementów ze zbioru $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, a następnikiem alternatywa dowolnie wybranych elementów ze zbioru $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

Następujące prawa rachunku zdań:
dołączanie alternatywy w następniku i koniunkcji w poprzedniku implikacji:

$$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \vee \gamma), \tag{1.23}$$

$$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \gamma \to \beta), \tag{1.24}$$

tautologii dla koniunkcji i implikacji:

$$(\alpha \wedge \alpha) \equiv \alpha, \tag{1.25}$$

$$(\alpha \vee \alpha) \equiv \alpha \tag{1.26}$$

oraz symetryczności i łączności dla koniunkcji i alternatywy:

$$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha, \tag{1.27}$$

$$\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha, \tag{1.28}$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \tag{1.29}$$

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \tag{1.30}$$

uzasadniają poniższą obserwację.

Obserwacja 5. *Jeżeli* $\alpha \in str(\beta)$*, to* $\alpha \rightarrow \beta$.

Twierdzenie 5. *Niech* α *będzie formułą klauzulową, a* Φ *zbiorem formuł klauzulowych. Następujące warunki są równoważne:*
(i) istnieje formuła $\beta \in str(\alpha)$*, która daje się wyprowadzić z* Φ *przy użyciu reguły rezolucji dla formuł* Rez_f *i reguły podstawiania* Sub*;*
(ii) $\alpha \in Cn(\Phi)$.

Dowód. Zachodzenie zależności (i) $\rightarrow$ (ii) jest oczywiste, zważywszy na dopuszczalność reguły Rez_f na gruncie klasycznego rachunku zdań.

Dla pokazania zależności (ii) $\rightarrow$ (i) załóżmy, że

$$\alpha = (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \rightarrow \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n) \in Cn(\Phi), (m, n \geqslant 0).$$

Niech α^* będzie rezultatem podstawienia za wszystkie zmienne w α różnych stałych, które nie występują w α ani w Φ. Ponieważ α i – co za tym idzie – α^* są formułami klauzulowymi, zgodnie z obserwacją (4) postać klauzulowa $\neg\alpha^*$ jest zbiorem jednoelementowych klauzul:

$$\{\alpha_1 \leftarrow \emptyset, \ldots, \alpha_m \leftarrow \emptyset, \emptyset \leftarrow \beta_1, \ldots, \emptyset \leftarrow \beta_n\},$$

który oznaczymy L. Niech K będzie postacią klauzulową Φ. Z Twierdzenia 4 mamy wtedy $\Box \in Cn_{Rez}(K \cup L)$. Z Lematu 4 wynika, że istnieje wyprowadzenie klauzuli $\Box$ ze zbioru $K \cup L$, w którym wszystkie występujące w nim elementy zbioru L są wykorzystane w ostatnich krokach wyprowadzenia. Ponieważ atomy występujące w klauzulach ze zbioru L odpowiadają atomom z formuły α (zbudowane są przy użyciu tych samych funktorów), a w miejsce zmiennych występujących w α występują w tych klauzulach różne stałe niewystępujące w Φ, w wyprowadzeniu bezpośrednio przed atomami z L musi znajdować się klauzula Ψ, która zawiera jako pozytywne literały elementy ze zbioru $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, a jako negatywne – negacje elementów ze zbioru $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. W wyprowadzeniu tym przed klauzulą Ψ nie znajduje się żaden element ze zbioru L, a więc początkowy fragment wyprowadzenia, kończący się na klauzuli Ψ, stanowi wyprowadzenie klauzuli Ψ ze zbioru K. Ponieważ Φ zawiera jedynie formuły klauzulowe, wyprowadzenie klauzuli Ψ ze zbioru klauzul K możemy bezpośrednio przekształcić na wyprowadzenie ze zbioru formuł Φ, w którym stosowana jest jedynie reguła rezolucji dla formuł Rez_f i reguła podstawiania Sub wyrażenia klauzulowego, w którego poprzedniku znajduje się koniunkcja pewnych elementów zbioru $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, a w następniku alternatywa pewnych elementów zbioru $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Wyrażenie to jest elementem zbioru $str(\alpha)$. ■

Obserwacja 6. *W wyniku zastosowania reguły rezolucji dla formuł Rez_f do przesłanek, które są formułami definitywnymi, otrzymuje się formułę definitywną. W wyniku zastosowania reguły rezolucji dla formuł Rez_f do przesłanek, które są formułami hornowskimi otrzymuje się formułę hornowską.*

Stosując więc regułę rezolucji w zbiorze klauzul definitywnych (hornowskich) otrzymać można jedynie formuły definitywne (hornowskie).

Zestawiając tę obserwację z Twierdzeniem 5, otrzymamy bezpośrednio pokazane przez J.C.C. McKinseya[26] twierdzenie dotyczące teorii hornowskich.

Twierdzenie 6. *Niech α będzie formułą elementarną, a β_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ atomami. Jeżeli wszystkie aksjomaty bezkwantyfikatorowej teorii opartej na klasycznym rachunku zdań są formułami hornowskimi, to formuła*

$$\alpha \to \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$$

jest tezą tej teorii wtedy i tylko wtedy, gdy tezą jest przynajmniej jedna z formuł

$$\alpha \to \beta_1, \ldots, \alpha \to \beta_n.$$

Powyższe rezultaty pozwalają na ponowne przyjrzenie się relacjom pomiędzy formalizacją rachunku nazw w postaci systemu aksjomatycznego nadbudowanego nad klasycznym rachunkiem zdań a formalizacją opartą na regułach. W systemach regułowych rachunku nazw podstawowym elementem

[26] Zob. [38]. W kontekście systemów rezolucyjnych twierdzenie przedstawione i udowodnione jest również w pracy [22].

formalizacji są reguły. Każda z reguł zbudowana jest ze zbioru przesłanek i z wniosku, a każda z przesłanek i wniosek są formułami atomowymi języka rachunku nazw. Ograniczamy się do reguł, których zbiory przesłanek są skończone. Przedmiotem analizy są dwie kwestie:
(1) czy z danego zbioru wyrażeń atomowych języka Φ przy użyciu reguł ze zbioru $\mathcal{R}$ da się wyprowadzić jakieś wyrażenie atomowe języka α,
(2) czy jakaś reguła wtórna r jest wyprowadzalna ze zbioru reguł $\mathcal{R}$.

W pierwszej z poruszonych kwestii mamy do czynienia z sytuacją, w której reguły można stosować wielokrotnie i formuła uzyskana jako rezultat zastosowania reguły może być przesłanką w kolejnym jej użyciu. Zwróćmy uwagę, że nie wszystkie elementy zbioru Φ muszą być użyte w wyprowadzeniu. W ujęciu aksjomatycznym możemy sformułować analogiczny problem. Zamiast dowolnej reguły ze zbioru $\mathcal{R}$ możemy użyć implikacji, której poprzednikiem jest koniunkcja przesłanek, a następnikiem wniosek reguły. Implikacje takie są oczywiście formułami definitywnymi.

Poniższa prawidłowość wynika wprost z definicji operacji Cn, w której obecne są reguła odrywania MP i podstawiania Sub, oraz z Twierdzenia 5.

Obserwacja 7. *Niech α będzie formułą atomową języka rachunku nazw, Φ zbiorem formuł atomowych języka rachunku nazw, a $\mathcal{R}$ zbiorem reguł. Niech dalej Ψ będzie zbiorem wszystkich formuł definitywnych odpowiadających regułom ze zbioru $\mathcal{R}$.*

α jest wyprowadzalne ze zbioru Φ przy użyciu reguł za zbioru $\mathcal{R}$
wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Cn(\Phi \cup \Psi)$.

W sformułowaniu drugiej kwestii pojawia się pojęcie reguły wtórnej, związane z przekształceniem reguł. Takie przekształcanie może być określane na różne sposoby. W pracy [46] nowe reguły otrzymywane są w sposób następujący:
Niech r_1 i r_2 będą regułami o schematach odpowiednio:

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}/\alpha$$

oraz

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}/\beta.$$

Nową regułę możemy otrzymać, o ile dla pewnego $i, 1 \leqslant i \leqslant m$ $\alpha_i = \beta$. (Przy różnicach pomiędzy α_i oraz β sprowadzających się do kształtu zmiennych, można tak przeformułować którąś z reguł poprzez wymianę zmiennych, aby te różnice zlikwidować.) Nowa reguła przyjmie postać:

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \ldots, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m\}/\alpha.$$

Łatwo zauważyć, że treściowo sposób ten odpowiada dokładnie regule rezolucji. Fakt ten w połączeniu z Twierdzeniem 5 wyraża następująca obserwacja:

Obserwacja 8. *Niech r będzie regułą, $\mathcal{R}$ zbiorem reguł, α formułą definitywną odpowiadającą regule r, a Ψ zbiorem wszystkich formuł definitywnych odpowiadających regułom ze zbioru $\mathcal{R}$.*

Reguła r jest wyprowadzalna ze zbioru $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in Cn(\Psi)$.

Zauważmy, że stosowanie tej procedury nie pozwala na dodanie do zbioru przesłanek dodatkowych elementów, odpowiadające wzmacnianiu poprzednika implikacji dopuszczalnemu w klasycznym rachunku zdań.

Podsumowując, możemy stwierdzić, że podejście aksjomatyczne i regułowe różnią się głównie formalnie. Jeżeli skupimy się w podejściu aksjomatycznym na formułach definitywnych, to zauważymy, że można je przełożyć na reguły i odwrotnie, a wszelkie interesujące rozumowania można w obie strony przetłumaczyć.

Użycie rachunku zdań ogranicza się w tym wypadku do reguły rezolucji dla formuł Rez_f schematu ekstensjonalności dla równoważności (1.2) oraz praw rachunku zdań oznaczonych jako formuły (1.24) – (1.30). Formuła (1.24) ma zastosowanie jedynie w przypadku zagadnienia (1). Dodatkowo, rozszerzenie do pełnego klasycznego rachunku zdań można ograniczyć do praw pozwalających na sprowadzenie dowolnej formuły do postaci normalnej, tzn. formuł (1.3) – (1.8).

Odnieśmy teraz powyższe rezultaty do sylogistyki, powracając w ten sposób do kwestii postawionej na początku tego rozdziału. Formułami atomowymi w sylogistyce są zdania kategoryczne (SaP, SiP, SeP oraz SoP). Język rachunku nazw jest więc tu ograniczony poprzez użycie jedynie tych funktorów sylogistyki.

Jak zauważyliśmy, sylogizmom rozpatrywanym przez Arystotelesa i w logice tradycyjnej odpowiadają w ujęciu aksjomatycznym formuły o postaci implikacji, której poprzednikiem jest koniunkcja wyrażeń atomowych będących przesłankami sylogizmu, a następnikiem wyrażenie atomowe będące wnioskiem. Są one więc w naszej terminologii formułami definitywnymi. W związku z tym możemy wprost zastosować powyższe rezultaty.

Charakterystyczną cechą systemu sylogistyki, zaproponowanego przez Łukasiewicza, którą posiadają również systemy rozpatrywane w niniejszej pracy, jest to, że w systemie tylko funktory i oraz a, tworzące zdania pozytywne o postaci SaP i SiP, są terminami pierwotnymi, a funktory e oraz i, tworzące zdania negatywne, potraktowane są jako *skróty* definicyjne, określone według następujących defionicji:

$$SeP =_{df} \neg SiP; \tag{1.31}$$

$$SoP =_{df} \neg SaP; \tag{1.32}$$

W rezultacie negatywne zdania kategoryczne sylogistyki nie są wyrażeniami atomowymi systemu Łukasiewicza, a sylogizm zawierający zdania kategoryczne negatywne przyjmie postać inną niż formuła definitywna (ani czynniki poprzednika, ani następnik implikacji, która reprezentuje sylogizm, nie muszą być atomami).

Jednakże przy zastosowaniu praw rachunku zdań:

$$\alpha \wedge \neg\beta \rightarrow \gamma \equiv \alpha \rightarrow \beta \vee \gamma \tag{1.33}$$

oraz

$$\alpha \rightarrow \beta \vee \neg\gamma \equiv \alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta \tag{1.34}$$

lub

$$\alpha \rightarrow \neg\beta \equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \tag{1.35}$$

możemy znaleźć formułę klauzulową odpowiadającą tego typu sylogizmowi[27], a więc rezultaty niniejszego podrozdziału mają do nich zastosowanie.

[27]Stosując prawidła dotyczące sylogizmów znane z logiki tradycyjnej: (i) tylko jedna przesłanka sylogizmu może być negatywna oraz (ii) jeżeli wśród przesłanek jest przesłanka negatywna, to wniosek też musi być negatywny moglibyśmy w tym miejscu ograniczyć się do formuł hornowskich, lecz dotyczy to tylko klasycznej sylogistyki.

1.5 Rozstrzygalność definitywnych teorii opartych na klasycznym rachunku zdań

W oparciu o Twierdzenie 4 zbudujemy procedurę decyzyjną dla problemu wyprowadzalności w ramach teorii definitywnych określonych w języku rachunku nazw, tzn. dla odpowiedzi na pytanie czy dana formuła α należy do zbioru $Cn(\Phi)$, gdy Φ jest zbiorem formuł definitywnych.

Na mocy wspomnianego twierdzenia, dla skończonego zbioru dowolnych formuł Φ zachodzi $\alpha \in Cn(\Phi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Box \in Cn_{Rez}(K)$, gdzie K jest zbiorem klauzul stanowiącym postać klauzulową zbioru $\Phi \cup \{\neg\alpha^*\}$, a α^* formułą otrzymaną z α przez podstawienie za wszystkie zmienne różnych stałych nie występujących w α ani w Φ.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do formuł definitywnych, tzn. formuł o postaci:

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta,$$

gdzie $n \geqslant 0$, a α_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ oraz β są formułami atomowymi. Postać klauzulową takiej formuły stanowi jednoelementowy zbiór klauzul zwierający następującą klauzulę:

$$\beta \leftarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n,$$

a postać klauzulowa negacji tego typu formuły przyjmuje postać następującego zbioru jednoelementowych klauzul:

$$\{\emptyset \leftarrow \beta, \alpha_1 \leftarrow \emptyset, \ldots, \alpha_n \leftarrow \emptyset\}$$

W rozptrywanej przez nas sytuacji, w której zbiór formuł $\Phi \cup \{\alpha\}$ zawiera jedynie formuły definitywne, zdefiniowany powyżej zbiór klauzul K, stanowiący postać klauzulową zbioru formuł $\Phi \cup \{\neg\alpha^*\}$, zawiera więc dokładnie jedną klauzulę z pustą lewą stroną i jednoelementową prawą stroną, tzn. klauzulę o postaci:

$$\text{(A)} \quad \emptyset \leftarrow \alpha,$$

a pozostałe klauzule są klauzulami definitywnymi z niepustą prawą stroną, tzn. przyjmują postać:

$$\text{(B)} \quad \beta \leftarrow \alpha_1, \ldots, \alpha_n (n \geqslant 1),$$

lub klauzulami definitywnymi z pustą prawą stroną, tzn. przyjmują postać:

$$\text{(C)}\quad \beta \leftarrow \emptyset,$$

gdzie we wszystkich przypadkach α, β oraz α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ są atomami.

Aby w wyprowadzeniu rezolucyjnym mogła zostać na koniec otrzymana klauzula pusta, każdy z atomów występujących w klauzulach użytych w tym wyprowadzeniu musi zostać wyeliminowany przez jakieś użycie reguły rezolucji. Aby to było możliwe, dla każdego z atomów każdej klauzuli musi w wyprowadzeniu pojawić się klauzula, która zawiera po przeciwnej stronie znaku „←" atom, który będzie mu odpowiadał (taka para atomów będzie wspólnie wyeliminowana poprzez jakieś użycie reguły rezolucji[28]). W szczególności dla każdej występującej w nim klauzuli o postaci (B) musi w tym wyprowadzeniu znaleźć się n klauzul o postaci (C), odpowiadających elementom prawej strony tej klauzuli.

Rozpatrzmy sytuację, w której w wyprowadzeniu prowadzącym do klauzuli pustej reguła rezolucji jest użyta do dwóch przesłanek o postaci (B). Niech prawa przesłanka ma postać: $\delta \leftarrow \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ $(m \geqslant 1)$. Jak zauważyliśmy, w naszym wyprowadzeniu dla każdego i $(1 \geqslant i \geqslant m)$ musi występować klauzula $\gamma'_i \leftarrow \emptyset$ taka, że atomy γ_i i γ'_i są wspólnie wyeliminowane poprzez jakieś użycie reguły rezolucji. Na mocy Lematu 3 można wtedy tak przesunąć użycie tych klauzul, aby znalazły się przed interesującym nas użyciem reguły rezolucji. W tak przekształconym wyprowadzeniu prawa przesłanka będzie miała postać $e(\delta) \leftarrow \emptyset$, dla pewnego podstawienia e.

W ten sposób można wyeliminować wszystkie użycia reguły rezolucji, w których obie przesłanki mają postać (B). Z kolei na mocy tego samego Lematu 3 użycie reguły rezolucji z wykorzystaniem jedynej w interesującym nas wyprowadzeniu klauzuli o postaci (A) można przesunąć na sam koniec wyprowadzenia.

W przekształconym wyprowadzeniu wszystkie użycia reguły rezolucji mają jako prawą przesłankę formuły o postaci (C), a wszystkie, z wyjątkiem ostatniej, jako lewą przesłankę – klauzulę o postaci (B). W ostatnim użyciu reguły rezolucji jako lewa przesłanka użyta jest klauzula o postaci (A).

Takie wyprowadzenie rezolucyjne można przedstawić bez zmiany jego istoty, w postaci dowodu założeniowego formuły definitywnej α w zbiorze formuł definitywnych Φ określonego w poniższej definicji.

[28]Może się zdarzyć, że w wyprowadzeniu, zanim atomy te zostaną wyeliminowane, na jednym z nich lub obu zostanie dokonane podstawienie. Niezależnie od tego, czy takie podstawienie ma miejsce czy też nie, atomy te da się zunifikować.

Definicja 2. *Niech Φ będzie zbiorem formuł definitywnych, a α formułą definitywną. Niech dalej $Const = \{c_1, c_2, \ldots\}$ będzie przeliczalnym zbiorem stałych nazwowych, które nie występują w Φ ani w α, a α^* formułą otrzymaną z α przez podstawienie za wszystkie zmienne różnych stałych ze zbioru $Const$.*

Dowodem założeniowym α w Φ nazywać będziemy ciąg formuł (wyrazy tego ciągu będziemy nazywać wierszami), zbudowany w następujący sposób:

- *każdy wiersz dowodu jest uzyskany przy użyciu jednej z poniższych reguł dołączania nowych wierszy do dowodu:*
  - *do dowodu można dołączyć jako nowy wiersz każdy element poprzednika formuły α^*;*
  - *dla dowolnego $\beta = \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n \rightarrow \delta$ $(n \geqslant 0)$ należącego do Φ, jeżeli istnieje podstawienie e, takie że wierszami dowodu są wszystkie elementy poprzednika $e(\beta)$, tzn. każde $e(\gamma_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, to można dołączyć następnik $e(\beta)$, tzn. formułę $e(\delta)$, o ile wierszem w dowodzie nie jest już $e(\delta)$ ani żadna formuła δ_1, taka że istnieje podstawienie e_1, takie że $e(\delta) = e_1(\delta_1)$.*
- *ostatnim wierszem dowodu jest następnik formuły α^* bądź wyrażenie atomowe α_1, takie że istnieje podstawienie e_1, takie że $e_1(\alpha_1)$ jest identyczne z tym następnikiem.*

Twierdzenie 7. *Niech Φ będzie zbiorem formuł definitywnych, a α formułą definitywną. $\alpha \in Cn(\Phi)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód założeniowy formuły α w Φ.*

Dowód. Powyższe rozważania pokazują, że $\Box \in Cn_{Rez}(K)$, gdzie K jest zbiorem klauzul stanowiącym postać klauzulową zbioru $\Phi \cup \{\neg\alpha^*\}$, a α^* formułą otrzymaną z α przez podstawienie za wszystkie zmienne różnych stałych, które nie występują w α ani w Φ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód założeniowy formuły α w Φ. Zatem na mocy Twierdzenia 4 zachodzi również dowodzona równoważność. ■

Ponieważ dla ustalonego zbioru formuł definitywnych Φ i ustalonej formuły definitywnej α ilość stałych występujących w α^* jest skończona, zawsze skończona jest również ilość atomów niesprowadzalnych do siebie przez podstawianie, które mogą być dołączone do dowodu. W związku z tym skończona jest także liczba potencjalnych dowodów, tzn. wszystkich ciągów powstałych zgodnie z regułami dołączania nowych wierszy do dowodu. W tej sytuacji procedura sukcesywnego dołączania wszystkich możliwych wierszy do dowodu jest procedurą decyzyjną. Jeżeli bowiem w takim ciągu pojawi się wyraz identyczny z następnikiem α^* albo do niego sprowadzalny przez podstawianie, to $\alpha \in Cn(\Phi)$, a jeżeli takiego wyrazu nie uzyska się, to $\alpha \notin Cn(\Phi)$.

Zdefiniowana powyżej procedura tworzenia dowodu założeniowego została zaimplementowana w postaci programu komputerowego w języku Prolog. Tekst programu znajduje się w Aneksie B. Przykłady użycia programu w zastosowaniu do systemów analizowanych w dalszej części pracy znajdują się w Aneksie C.

1.6 Pełność systemu bez formalnych modeli

Przejdziemy teraz do zawartości treściowej formalizacji teorii nazw. Podstawowym kryterium oceny jej jakości jest adekwatność w stosunku do leżących u jej podstaw intuicji. Na adekwatność składają się dwie własności: poprawność[29] i pełność. W przypadku systemu aksjomatycznego poprawność oznacza, że wszystkie tezy systemu są zgodne z leżącymi u podstaw systemu intuicjami, a pełność – że tezami systemu są wszystkie formuły, które przyjmowane są intuicyjnie, co jest równoznaczne z tym, że wszystkie wyrażenia, które nie są tezami, są zgodnie z intuicją odrzucane. W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele sformułowań tej fundamentalnej intuicji różniących się nieco szczegółami. Przytoczymy poniżej kilka z nich. W pierwszych dwóch pojawia się pełność wprost dotycząca zbiorów formuł, a za kryterium intuicyjnego przyjmowania uznawana jest prawdziwość tych formuł (zdań).

K. Ajdukiewicz używa pojęcia pełności, rozumianego w sposób następujący:

„Pytanie to należy odróżnić od pytania, czy każde zdanie prawdziwe dające się w języku tej teorii sformułować może być udowodnione (o ile nie jest aksjomatem tej teorii) za pomocą środków dowodowych, jakimi ona dysponuje"[30].

[29] Użyty tu termin *poprawność* odpowiada angielskiemu *soundness*. Polska terminologia nie jest tu w pełni ujednolicona, pojęcie to jest zwykle pomijane w podręcznikach i słownikach z dziedziny logiki i łączone z pełnością. W literaturze oprócz terminu poprawność spotkać można również bezbłędność (por. [63]).

[30] [1] str. 215.

L. Borkowski podaje zaś następującą definicję pełności:

„System S jest pełny wtedy i tylko wtedy, gdy każde wyrażenie prawdziwe systemu S jest tezą systemu S”[31].

W rozważaniach metalogicznych zazwyczaj stosuje się klasyczną, korespondencyjną koncepcję prawdy. W sformułowaniu Ajdukiewicza przedstawia się ona w następujący sposób:

„Jakieś zdanie oznajmujące jest prawdą, gdy jest właśnie tak, jak ono głosi; jest zaś fałszem, gdy nie jest tak, jak ono głosi”[32].

Powyższe określenia mają pewną wadę. Nie wszystkie systemy formalne, którymi zajmuje się logika, odwołują się do prawdziwości. Przykładem może tu być logika intuicjonistyczna, gdzie celem jest ujęcie raczej tego co konstruktywnie dowodliwe niż prawdziwe. W analogiczny sposób można jednak i w odniesieniu do formalnych ujęć tego typu logiki rozważać ich pełność. W ogólności można rozumienie pełności w powyższych określeniach zachować, zamieniając w nich termin *prawdziwe* na termin np. *uznawane* lub *przyjmowane.*

Kolejne definicje wiążą pełność ze zbiorami sposobów wnioskowania bądź rozumowań i odwołują się do ich poprawności bądź niezawodności, które odpowiadają prawdziwości zdań.

A. Grzegorczyk o pełności pisze tak:

„Naturalny, historyczny rozwój logiki rzeczywiście doprowadził do powstania takiego systemu logiki, o którym można dowieść, że zawiera wszelkie sposoby (schematy) logiczne poprawnego wnioskowania na dowolny temat. Tę jego własność zwiemy pełnością*”*[33].

W.A. Pogorzelski używa zaś następującego sformułowania:

„Problem pełności można sformułować jako pytanie o to czy wszystkie niezawodne sposoby rozumowania oparte są faktycznie na prawach logiki formalnej”[34].

[31] [4] str. 378.
[32] [1] str. 29.
[33] [14] str. 121.
[34] [44] str. 366.

Jak zauważyliśmy w poprzednich sekcjach niniejszego rozdziału, pomiędzy prawdziwością (uznawaniem) zdań a poprawnością rozumowań (reguł wnioskowania) istnieje ścisły związek. Prawdziwe zdania mogą bowiem stanowić podstawę dla konstrukcji poprawnych rozumowań, a poprawne rozumowania mogą zostać przekształcone w odpowiadające im prawdziwe zdania. Fakt ten pozwala przyjąć, że wszystkie powyższe definicje wyrażają na swój sposób tę samą intuicję, która nie rodzi kontrowersji[35]. We wszystkich definicjach pełność ma charakter semantyczny w tym sensie, że odnosi system formalny do czegoś zewnętrznego, rzeczywistości lub przynajmniej pozaformalnego sposobu myślenia o niej.

Problemem jednak pozostaje to, jak zweryfikować, które zdania są prawdziwe, a w szczególności, jak uczynić to na tyle precyzyjnie, aby móc wykorzystać to w badaniach logicznych. Najczęściej wykorzystuje się w tym celu formalne modele i prawdziwość określa się jako prawdziwość w modelu, którą rozumie się poprzez formalne warunki nakładane na obiekty w modelu.

W rezultacie, w praktyce prawdziwość zdań zazwyczaj utożsamiana jest wręcz z ich prawdziwością w jakimś formalnym modelu lub klasie modeli. Jako prosty przykład może tu służyć charakterystyka funktorów klasycznego rachunku zdań poprzez tabele prawdziwościowe. Zdanie jest prawdziwe, kiedy jako całość przyjmuje wartość 1. W systemach formalnych zazwyczaj występują wyrażenia zawierające zmienne wolne. Takie wyrażenie jest traktowane jako prawdziwe, o ile jest prawdziwe przy każdym podstawieniu obiektów z modelu za zmienne. W przypadku klasycznego rachunku zdań obiektami w modelu są wartości logiczne 1 i 0. Formuła klasycznego rachunku zdań jest więc prawdziwa, jeżeli otrzymujemy wartość 1 przy każdym podstawieniu wartości 1 bądź 0 za zmienne w niej występujące.

Modele wprost pojawiają się w definicji pełności, np. w poniższej definicji pochodzącej z *Małej encyklopedii logiki* pod redakcją W. Marciszewskiego:

[35] W bardziej szczegółowych rozważaniach rozróżnia się czasem pełność silną (ang. strong completeness) i pełność słabą (ang. weak completeness) – zob. np. [44], str. 318. Ten pierwszy rodzaj pełności odnosi się do systemów logicznych na poziomie relacji konsekwencji, a więc zbioru uznanych za poprawne rozumowań, ten drugi na poziomie zbioru tez, a więc przyjętych formuł. W systemach, z którymi mamy do czynienia w niniejszej pracy, pojęcia te są zbieżne, choć w ogólności nie są.

„System dedukcyjny logiki jest pełny wtedy i tylko wtedy, gdy z jego aksjomatów dadzą się wywieść wszystkie zdania będące zdaniami prawdziwymi w każdym modelu”[36].

Przyjmując takie stanowisko rezygnujemy jednak z semantycznego charakteru pełności. Rozpatrujemy bowiem wzajemne relacje pomiędzy dwoma systemami formalnymi – systemem aksjomatycznym i systemem definiującym formalny model. Podwójne ujęcie formalne daje niewątpliwie pełniejszy obraz systemu, ale nie łączy tego systemu z pozaformalną rzeczywistością. Zagadnienie pełności systemu aksjomatycznego w stosunku do leżących u jego podstaw intuicji nie jest rozwiązane przez wykazanie pełności w stosunku do modelu, a jedynie odsunięte. Pojawia się bowiem kolejny problem – adekwatności formalnego modelu w stosunku do rzeczywistości bądź sposobu myślenia, który rozpatrywany system formalny ma ujmować. W związku z tym, w analizie trafności ujęć aksjomatycznych nie będziemy traktować pełności w modelu jako ostatecznego kryterium.

Kolejne problemy z wykorzystaniem modeli do badania rachunku nazw związane są z faktem, że modele takie budowane są w oparciu o zbiory oraz relacje pomiędzy zbiorami i operacje na zbiorach. Jeden z nich, mniej ważny z punktu widzenia niniejszej rozprawy, jest natury historycznej, drugi ma charakter merytoryczny.

Chociaż pewne intuicje leżące u podstaw teorii zbiorów występowały w filozofii i matematyce znacznie wcześniej, uporządkowana teoria pojawiła się dopiero w XIX wieku[37]. Wyłaniające się z niej pojęcie zbioru, skądinąd współcześnie odbierane jako naturalne, a wręcz oczywiste, w czasach powstawania i rozwoju teorii nazw było nieznane. W związku z tym interpretowanie starożytnego czy średniowiecznego ujęcia nazw przy użyciu współczesnego pojęcia zbioru może być nieadekwatne.

Zastrzeżenia merytoryczne związane są z problemami występującymi wewnątrz teorii zbiorów. O ich skali niech świadczy poniższy fragment tekstu E. Zermela:

„Obecnie, samo istnienie tej dyscypliny wydaje się być zagrożone przez pewne sprzeczności lub ‘antynomie’ wyprowadzone z jej zasad, wydawałoby się

[36]W. Marciszewski, hasło *zupełność systemu*, w pracy [34], str. 236.

[37]Informacje o historii pojęć występujących w teorii zbiorów można znaleźć m.in. w pracy [13].

w sposób konieczny rządzących naszym myśleniem. [...] W szczególności, mając na uwadze 'antynomię Russella' [...] zbioru wszystkich zbiorów, które nie są własnymi elementami, nie wydaje się dłużej możliwe przypisywanie dowolnemu logicznie definiowalnemu pojęciu jakiegoś zbioru lub klasy jako zakresu"[38].

Współcześnie znane są różne sposoby usuwania wspomnianych antynomii, prowadzące jednakże do różniących się nieco między sobą formalnych teorii precyzujących znaczenie terminów *zbiór* i *element*. Na poziomie podstawowych operacji na zbiorach teorie te pokrywają się, a różnice nie powodują praktycznych problemów na poziomie interpretacji systemów rachunku nazw. Niemniej jednak przy rozumieniu teorii nazw poprzez jej interpretację w teorii zbiorów wskazana jest pewna doza ostrożności.

Dodatkowym motywem skłaniającym ku tej ostrożności jest fakt, iż Leśniewski budował swoją Ontologię, w ramach której przedstawił teorię nazw, w opozycji do teorii zbiorów, chcąc uniknąć problemów, pojawiających sie na jej gruncie. Teoria nazw, przynajmniej w ujęciu Leśniewskiego, może być więc postrzegana jako element jednego ze sposobów unikania wspomnianych antynomii, alternatywnego w stosunku do teorii zbiorów.

Powyższe uwagi dotyczące wykorzystania formalnych modeli w dowodach pełności oraz teorii zbiorów w żadnym razie nie mają na celu podważania ich wartości poznawczej ani formalnej poprawności. Nie rezygnujemy również z używania modeli wykorzystujących zbiory i analizy relacji pomiędzy teorią aksjomatyczną a modelem. Szukamy jedynie innych, niezależnych od nich, sposobów na ocenę formalnych systemów rachunku nazw pod względem ich zgodności z intuicją.

Podążymy śladem Arystotelesa i odwołującego się doń Łukasiewicza. W „Analitykach pierwszych" Arystoteles wykazuje, że schematy sylogistyczne różne od uznanych przez niego sylogizmów nie powinny być uznawane. Dowodzi w ten sposób pełności swojego systemu sylogistyki. Rozważa wszystkie możliwe schematy o dwóch przesłankach należące do każdej z trzech figur. W większości przypadków odrzucenie schematu uzasadnia, podając kontrprzykład, jak w poniższym fragmencie:

„Również w żadnym przypadku nie powstanie sylogizm, gdy obydwa zdania są szczegółowe, w tym albo obydwa przeczące, albo jedno twierdzące a drugie

[38] [15], s. 200, cytat za: [13], s. 258.

przeczące, albo jedno nieokreślone, a drugie określone, bądź też obydwa nieokreślone. Terminy wspólne dla wszystkich: 'zwierzę', 'białe', 'koń'; 'zwierzę', 'białe', 'kamień'." (Analityki pierwsze, Księga I 26b).

Mamy tu do czynienia z kilkoma schematami sylogistycznymi. Ograniczając się do zdań ogólnych i szczegółowych występujących w wykorzystywanym w niniejszej rozprawie języku rachunku nazw, a pomijając zdania nieokreślone, możemy przedstawić je w postaci następujących implikacji:

$$MoP \wedge SoM \to SaP; \tag{1.36}$$

$$MoP \wedge SoM \to SiP; \tag{1.37}$$

$$MoP \wedge SoM \to SeP; \tag{1.38}$$

$$MoP \wedge SoM \to SoP; \tag{1.39}$$

$$MoP \wedge SiM \to SaP; \tag{1.40}$$

$$MoP \wedge SiM \to SiP; \tag{1.41}$$

$$MoP \wedge SiM \to SeP; \tag{1.42}$$

$$MoP \wedge SiM \to SoP; \tag{1.43}$$

$$MiP \wedge SoM \to SaP; \tag{1.44}$$

$$MiP \wedge SoM \to SiP; \tag{1.45}$$

$$MiP \wedge SoM \to SeP; \tag{1.46}$$

$$MiP \wedge SoM \to SoP. \tag{1.47}$$

Zapisując przedstawione kontrprzykłady, podstawiamy za P – nazwę *zwierzę*, za M – *rzecz biała*, a za S – *koń* lub *kamień*, w zależności od następnika. Analizując podstawienia elementów poprzednika (przesłanek), widzimy, że w przypadku pierwszego z nich rzeczywiście niektóre rzeczy białe są zwierzętami, a niektóre nie są. W przypadku drugiego otrzymujemy również prawdziwe stwierdzenia: niektóre kamienie są białe, inne nie są, niektóre konie są białe, a inne nie. Z kolei następnik implikacji (wniosek) w przypadku formuł z twierdzącym następnikiem (1.36), (1.37), (1.40), (1.41), (1.44), (1.45) jest fałszywy, gdy przyjmuje postać zdania: *Każdy kamień jest zwierzęciem/Pewien kamień jest zwierzęciem*, a w przypadku formuł z przeczącym następnikiem (1.38), (1.39), (1.42), (1.43), (1.46), (1.47) – zdania *Żaden koń nie jest zwierzęciem/Pewien koń nie jest zwierzęciem.*

Pokazanie przykładów falsyfikujących wszystkie nieakceptowane formuły jest pracochłonne, a w wielu przypadkach niemożliwe ze względu na ich nieograniczoną liczbę, np. gdyby rozpatrywać rozumowania o dowolnej liczbie przesłanek (czynników w poprzedniku implikacji). Już u Arystotelesa znaleźć można jednak wskazówkę, dotyczącą innego sposobu odrzucania takich formuł, którą wyłuskuje i rozbudowuje Łukasiewicz. U Arystotelesa występuje tekst następujący:

„Bo jeżeli można zgodnie z prawdą powiedzieć, że M nie przysługuje niektórym O, skoro nie przysługuje żadnemu i widzieliśmy, że sylogizm jest wtedy niemożliwy, jasne, że również i w tym wypadku nie będzie możliwy.” (Analityki pierwsze, Księga I 27b)

Przekładając to rozumowanie na wykorzystywany przez nas język symboliczny, otrzymujemy jako jego przesłanki $\vdash MeO \rightarrow MoO$ i $\dashv \alpha \rightarrow MoO$, a jako wniosek $\dashv \alpha \rightarrow MeO$. Łukasiewicz rozumowanie to uogólnia, przechodząc od przesłanek $\dashv \beta$ i $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ do wniosku $\dashv \alpha$, formułując w ten sposób regułę odrzucania przez podstawianie[39].

Wykorzystanie reguł, takich jak sformułowana powyżej reguła odrzucania przez odrywanie, pozwala na odrzucenie nieskończonej ilości formuł, które nie są tezami. Powstaje w rezultacie system formalny, definiujący zbiór formuł odrzuconych, uzupełniający zwykły system aksjomatyczny. System skonstruowany jest za pomocą zbioru aksjomatów odrzuconych oraz zbioru reguł odrzucania[40].

Aby system taki był zgodny z intuicją (poprawny), aksjomaty odrzucone muszą być fałszywe (nieakceptowane), a reguły muszą prowadzić od wyrażeń fałszywych (nieakceptowanych) do wyrażeń, które są również fałszywe (nieakceptowane)[41]. W przypadku aksjomatów odrzuconych wystarczającym

[39] [32], str. 98: „Jeżeli została uznana implikacja ‘Jeśli α, to β’, ale odrzucony został jej następnik β, to jej poprzednik α także musi być odrzucony.” Dodaje również dodatkową regułę odrzucania przez podstawianie: „Jeżeli α jest podstawieniem β, i α zostało odrzucone, to β także musi być odrzucone.”([32], str. 99).

[40] Wprowadzone przez Łukasiewicza systemy odrzuceniowe stały się przedmiotem dalszych analiz. Do ważniejszych osiągnięć od strony metodologicznej należy zaliczyć sformułowanie systemów odrzucania w postaci operacji konsekwencji [58, 59, 70]. Z kolei w praktyce logicznej warto zwrócić uwagę na skonstruowanie systemów odrzuceniowych dla wielu zdaniowych logik nieklasycznych [57, 52, 12, 53]. Systemy te okazały się przydatne m.in. w dowodach rozstrzygalności.

[41] W regule odrzucania przez odrywanie występują dwie przesłanki, z których jedna

argumentem za ich fałszywością może być podanie kontrprzykładu, tak jak czyni to Arystoteles w stosunku do większości nieakceptowanych sylogizmów.

Mając do dyspozycji poprawny system odrzuceniowy, stanowiący uzupełnienie systemu aksjomatycznego, możemy wykorzystać go do wykazania pełności formalizacji. Wystarczy pokazać, że każde wyrażenie języka, w którym budowany jest system formalny, jest albo tezą, albo wyrażeniem odrzuconym[42].

W praktyce wykorzystanie systemu odrzuceniowego może przebiegać w odmiennej kolejności: najpierw skonstruowany może być system odrzuceniowy uzupełniający system aksjomatyczny w taki sposób, aby zbiór wyrażeń języka został rozłącznie i wyczerpująco podzielony na tezy i wyrażenia odrzucone, a następnie można badać, czy wyrażenia odrzucone faktycznie nie powinny być uznane. Jeśli tak jest, to system aksjomatyczny jest pełny w omówionym na wstępie tego podrozdziału fundamentalnym sensie.

Adekwatność (zarówno poprawność, jak i pełność) systemu formalnego w stosunku do intuicji weryfikowana jest na poziomie formuł oraz reguł. Reguły – zarówno uznawania, jak i odrzucania – są zazwyczaj standardowe i ich prawidłowość nie wzbudza wątpliwości. Pozostaje więc jedynie sprawdzenie, czy aksjomaty są przyjęte zgodnie z intuicją, a aksjomaty odrzucone nie powinny być akceptowane. W przypadku tych ostatnich wystarczy wskazanie kontrprzykładu. Wydaje się, że w przypadku przynajmniej niektórych systemów formalnych ten rodzaj analizy okazuje się wygodniejszy i pewniejszy niż rozważania nad adekwatnością formalnego modelu w stosunku do fragmentu rzeczywistości, który ma on reprezentować.

Analizując metodę aksjomatycznego odrzucania z nieco innej perspekty-

stwierdza, że implikacja jest tezą, a druga, że jej następnik jest wyrażeniem odrzuconym. Oczywiście, fałszywe powinno być wyrażenie odrzucone, a teza powinna być prawdziwa. Dla uniknięcia nieporozumienia możemy za T. Skurą sformułować regułę w sposób następujący:

$$\frac{\dashv \beta}{\dashv \alpha}, \text{ o ile } \vdash \alpha \to \beta.$$

Warto zauważyć, że w obecności reguły odrzucania przez odrywanie, w której jedna z przesłanek jest asercją, system odrzuceniowy jest nierozerwalnie związany z *pozytywnym* systemem aksjomatycznym.

[42] Słupecki własność taką nazywał Ł-rozstrzygalnością. W niniejszych rozważaniach nie używamy tego terminu ze względu na to, że ich przedmiotem jest pełność systemu, a nie rozstrzygalność. Problem rozstrzygania poruszony będzie w dalszej części niniejszej rozprawy.

wy, można zauważyć, że system odrzucania dopełniający system aksjomatyczny określać musi wszystkie możliwe rozszerzenia tego systemu w tym sensie, że wszystkie formuły, o które można rozszerzyć system, są odrzucone. W przeciwnym bowiem przypadku podział na tezy i formuły odrzucone nie byłby rozłączny. Jeżeli każde z tych rozszerzeń uznajemy za zbyt mocne, rozważany system jest pełny[43].

1.7 Systemy aksjomatycznego odrzucania

Rozważania z poprzedniego podrozdziału prowadzą do definiowania systemów aksjomatycznego odrzucania uzupełniających systemy aksjomatyczne rachunku nazw, które będziemy definiować w kolejnych rozdziałach. W ich określaniu posługiwać się będziemy następującymi regułami odrzucania:

- reguła odrzucania przez odrywanie MP^{-1} o postaci:

$$\frac{\vdash \alpha \to \beta; \dashv \beta}{\dashv \alpha},$$

- reguła odrzucania przez podstawianie Sub^{-1} o postaci:

$$\frac{\dashv e(\alpha)}{\dashv \alpha},$$

  gdzie e jest podstawieniem zmiennych lub stałych nazwowych za zmienne nazwowe,

- reguła dekompozycji $Comp^{-1}$ o postaci:

$$\frac{\dashv \alpha \to \beta_1; \ldots; \dashv \alpha \to \beta_n}{\dashv \alpha \to \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n}, n \geqslant 1,$$

  gdzie α jest formułą elementarną, a $\beta_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ są atomami.

Reguły MP^{-1} i Sub^{-1} odpowiadają regułom MP i Sub ze standardowych systemów aksjomatycznych i przyjęcie ich nie wydaje się być z jakichkolwiek powodów kontrowersyjne. W pracy [55] Słupecki pokazuje, że nie da

[43] Formalnie takie określenie pełności przypomina zupełność. Różnica polega na tym, że każde rozszerzenie systemu zupełnego prowadzi do sprzeczności, a pełnego – jedynie do uznania jakiegoś zdania fałszywego lub z innych powodów nieakceptowanego.

się przedstawić aksjomatyki odrzuceniowej dla systemu sylogistyki Łukasiewicza z użyciem jedynie tych dwóch reguł i skończonej liczby aksjomatów odrzuconych. Rezultat ten odnosi się także do innych systemów omawianych w niniejszej rozprawie. W związku z tym używana będzie dodatkowa reguła $Comp^{-1}$. Reguła ta jest w systemie aksjomatycznego odrzucania formalnym wyrazem Twierdzenia 6, obowiązującego we wszystkich teoriach, których aksjomatami są jedynie formuły hornowskie.

Pokażemy teraz kilka ogólnych własności systemów aksjomatycznych, uzupełnionych o system aksjomatycznego odrzucania wykorzystujący powyższe reguły.

Definicja 3. *Teorią hornowską nazywać będziemy zbiór formuł zawierający zbiór podstawień tez klasycznego rachunku zdań oraz zbiór formuł hornowskich jako zbiór aksjomatów specyficznych, domknięty na reguły MP i $Subst$.*

Twierdzenie 8. *Niech T będzie teorią hornowską zbudowaną w języku rachunku nazw, tzn. zbiorem formuł $Cn(\Phi)$, gdzie Φ jest ustalonym zbiorem formuł hornowskich, a Cn operacją konsekwencji wyznaczoną przez reguły MP i Sub. Niech dalej T będzie uzupełniona o system aksjomatycznego odrzucania, określony poprzez reguły MP^{-1}, Sub^{-1} i $Comp^{-1}$ oraz zbiór formuł hornowskich Ψ, jako zbiór aksjomatów odrzuconych.*

Jeżeli formuła hornowska α jest wyrażeniem odrzuconym, to dla pewnego $\beta \in \Psi$ mamy $\beta \in Cn(\Phi \cup \{\alpha\})$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że reguły MP^{-1} i Sub^{-1} stanowią odwrócenie odpowiednio reguł MP i Sub. W związku z tym, jeżeli $\dashv \gamma_1$ jest otrzymane z $\dashv \gamma_2$ przy użyciu reguły Sub^{-1}, to $\vdash \gamma_2$ można otrzymać z $\vdash \gamma_1$ przy użyciu reguły Sub, a jeżeli $\dashv \delta_1$ jest otrzymane z $\vdash \delta_2$ i $\dashv \delta_3$, to $\vdash \delta_3$ można otrzymać z $\vdash \delta_2$ i $\vdash \delta_1$. W związku z tym, jeżeli w odrzuceniu formuły α w systemie T nie jest wykorzystana reguła $Comp^{-1}$, to dla pewnego aksjomatu odrzuconego β mamy $\beta \in Cn(\Phi \cup \{\alpha\})$.

Pozostaje więc do pokazania, że fakt ten ma miejsce również w przypadku, gdy do odrzucenia formuły α została użyta reguła $Comp^{-1}$. Wykorzystamy w tym celu fakt, że aksjomaty teorii T oraz formuła α są formułami hornowskimi i w związku z tym można zastosować w tej sytuacji Twierdzenie 6.

Załóżmy teraz indukcyjnie, że interesująca nas prawidłowość zachodzi, gdy reguła $Comp^{-1}$ użyta jest nie więcej niż k razy. Niech teraz do odrzucenia α reguła $Comp^{-1}$ będzie użyta $k+1$ razy i niech ostatnie jej użycie prowadzi od przesłanek $\dashv \gamma_1, \ldots, \dashv \gamma_n$ do wniosku $\dashv \gamma$, gdzie $\gamma = (\gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_n)$. Ponieważ mamy do czynienia z ostatnim użyciem reguły $Comp^{-1}$, w pozostałej części odrzucenia wykorzystane są jedynie reguły MP^{-1} i Sub^{-1}, a więc $\gamma \in Cn(\Phi \cup \{\alpha\})$. Zgodnie z Twierdzeniem 6 w tej sytuacji dla pewnego i takiego, że $1 \leqslant i \leqslant n$ mamy też $\gamma_i \in Cn(\Phi \cup \{\alpha\})$. Reguła $Comp^{-1}$ użyta jest do odrzucenia formuły γ_i nie więcej niż k razy, a więc z założenia indukcyjnego wynika, że istnieje $\beta \in \Psi$, takie że $\beta \in Cn(\Phi \cup \{\gamma_i\})$. Wobec tego również $\beta \in Cn(\Phi \cup \{\alpha\})$. ■

Jeżeli w systemie T, określonym jak w Twierdzeniu 8, w którym Φ jest zbiorem aksjomatów, a Ψ – zbiorem aksjomatów odrzuconych, żaden z elementów Ψ nie jest tezą systemu, to dla dowolnej formuły α z faktu, iż $Cn(\Phi \cup \{\alpha\}) \cap \Psi \neq \emptyset$ w oczywisty sposób wynika, że α nie jest tezą systemu T, tzn. $\alpha \notin Cn(\Phi)$. Weźmy teraz pod uwagę systemy, dla których uzupełnienie odrzuceniowe jest adekwatne, tzn. każda formuła języka jest w nich tezą bądź wyrażeniem odrzuconym i żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym. W systemach takich, jeżeli z formuły α da się wyprowadzić przynajmniej jeden aksjomat odrzucony, to formuła α jest również odrzucona. Z tego faktu oraz z Twierdzenia 8 wynika następujący wniosek:

Wniosek 1. *Niech T będzie teorią hornowską, określoną jak w Twierdzeniu 8, dla której zdefiniowany jest adekwatny system aksjomatycznego odrzucania.*

Formuła hornowska α jest odrzucona wtedy i tylko wtedy, gdy w systemie T da się wyprowadzić z α któryś z aksjomatów odrzuconych.

W ogólności fakt, iż z jakiejś formuły α da się wyprowadzić w dowolnym systemie T aksjomat odrzucony, nie gwarantuje, że formuła α jest odrzucona. Reguła MP, wykorzystana w wyprowadzeniu aksjomatu odrzuconego z formuły α, nie zawsze bowiem daje się odwrócić. Reguła MP^{-1} wymaga bowiem, aby użyta w niej przesłanka uznawana była tezą teorii T, natomiast w wyprowadzeniu aksjomatu odrzuconego z formuły α wystarczy, aby analogiczna przesłanka była wyprowadzalna w T z α.

Autor nie posiada również dowodu potwierdzającego intuicyjnie naturalną hipotezę, że w dowolnym systemie aksjomatycznego odrzucania dla teorii hornowskich, określonym z użyciem reguł odrzucania MP^{-1}, Sub^{-1} oraz $Comp^{-1}$, w którym aksjomatami odrzuconymi są formuły hornowskie, do odrzucenia dowolnej odrzuconej formuły hornowskiej nie jest potrzebna reguła $Comp^{-1}$.

1.8 Struktury modelowe dla rachunku nazw

Jak zaznaczyliśmy w poprzednim podrozdziale, struktury teoriomodelowe nie będą dla nas podstawowym narzędziem analizy poprawności prezentowanych formalizmów. Niemniej jednak pozostają one ważne z trzech powodów. Po pierwsze, poznanie struktury teoriomodelowej, w stosunku do której system aksjomatyczny jest adekwatny, dostarcza cennych informacji na temat tego systemu. Po drugie, podejście teoriomodelowe wykorzystywane jest w większości prac na temat rachunku nazw i musimy się nim posłużyć choćby dla porównania przedstawionych tu rezultatów z wynikami zaprezentowanymi we wcześniejszych pracach. Po trzecie, struktury teoriomodelowe będą stosowane jako narzędzie techniczne do wykazywania niezależności formuł.

Wykorzystywać będziemy dwa sposoby opisu klasy modeli. Pierwszy z nich odpowiada najczęściej występującej w literaturze interpretacji, w której zmiennym z rachunku nazw odpowiadają w modelu zbiory przedmiotów z jakiejś dziedziny, a stałe rachunku nazw określone są poprzez odpowiadające im relacje pomiędzy zbiorami. W różnych klasach modeli, odpowiadających różnym systemom aksjomatycznym, interpretacja stałych może się różnić. Drugi sposób określenia klasy modeli polega na przyporządkowaniu zmiennym nazwowym stałych z pewnego zbioru i zdefiniowaniu interpretacji funktorów specyficznych rachunku nazw poprzez wskazanie dla każdego funktora i każdego doboru jego argumentów, które zdania atomowe są w takim modelu prawdziwe. Takimi strukturami będziemy posługiwali się w celach technicznych.

Niech zm będzie zbiorem zmiennych nazwowych, $form$ zbiorem formuł, a $\{0, 1\}$ zbiorem wartości logicznych, gdzie 1 oznacza prawdę, a 0 – fałsz. Pierwszy z wymienionych sposobów określania struktury teoriomodelowej wprowadzimy formalnie poprzez klasę modeli $\mathsf{M}_I = (D, I, v)$, gdzie D jest zbiorem stanowiącym dziedzinę modelu, $v : zm \longrightarrow 2^D$ wartościowaniem przypisującym zmiennym podzbiory zbioru D (funkcja v jest rozszerzona na dowolne formuły w ten sposób, że stałe pozostają niezmienione), a $I : form' \longrightarrow \{0, 1\}$, gdzie $form' = \{v(\alpha) : \alpha \in form\}$, jest ustaloną funkcją interpretacji specyficznych stałych rachunku nazw. W razie potrzeby na dziedziny D i wartościowania v będziemy nakładali dodatkowe warunki. Poszczególne modele w ramach jednej klasy modeli różnią się między sobą dziedziną oraz funkcją wartościowania. Z kolei różne klasy modeli różną się między sobą funkcją I[44]. Funkcja I w przypadku rozpatrywanych dalej modeli będzie określana poprzez wskazanie odpowiedniej relacji na zbiorach, która musi zachodzić, aby atomowe zdanie było prawdziwe, oraz odpowiedniej interpretacji dla funktorów rachunku zdań. Symbolem M_I będziemy również oznaczać klasę modeli M_I (modeli M_I dla wszystkich dopuszczalnych zbiorów i wartościowań). Do konkretnych modeli będziemy odwoływać się poprzez wskazanie dziedziny D i wartościowania v.

W drugim ze sposobów klasę modeli określamy jako klasę modeli $\mathcal{M}_I = (N, I, v)$, gdzie N jest ustalonym niepustym zbiorem dowolnych obiektów, $v : zm \longrightarrow N$ wartościowaniem (funkcja v jest rozszerzona na dowolne formuły w ten sposób, że stałe pozostają niezmienione), a $I : form' \longrightarrow \{0, 1\}$, gdzie $form' = \{v(\alpha) : \alpha \in form\}$, jest ustaloną interpretacją wskazującą, które zdania atomowe po wartościowaniu są prawdziwe, a które fałszywe, oraz jak interpretowane są funktory rachunku zdań. Poszczególne modele w ramach jednej klasy modeli różnią się jedynie funkcją wartościowania. Z kolei różne klasy modeli rozpatrywane w pracy różnią się zbiorem N oraz funkcją I. Funkacja I będzie najczęściej definiowana poprzez podanie matryc dla jej wartości w odniesieniu do poszczególnych funktorów rachunku nazw. Symbolem $\mathcal{M}_I$ będziemy również oznaczać klasę modeli $\mathcal{M}_I$. Do konkretnych modeli będziemy odwoływać się poprzez wskazanie wartościowania v.

Na bazie modelu $\mathsf{M}_I = (D, I, v)$ można zawsze zdefiniować model $\mathcal{M}_{I'} = (N, I', v')$ w ten sposób, że obiekty ze zbioru N odpowiadają podzbiorom zbioru D i odpowiednio do tego określone są funkcje I' i v'. Przejście między klasami modeli w przeciwną stronę nie jest tak naturalne, gdyż zbiór N nie musi odpowiadać podzbiorom żadnego zbioru, a relacja określona na jego elementach nie musi być wyrażalna w postaci czytelnej relacji pomiędzy zbiorami.

Formułę α będziemy określać jako spełnioną w modelu M_I określonym w dziedzinie D i wykorzystującym ustalone wartościowanie v wtedy i tylko wtedy, gdy $I(v(\alpha)) = 1$. Formułę będziemy określać jako tautologię w klasie modeli M_I wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona spełniona w każdym modelu z M_I. Analogicznie formułę α będziemy określać jako spełnioną w modelu $\mathcal{M}_I$ wykorzystującym ustalone wartościowanie v wtedy i tylko wtedy, gdy $I(v(\alpha)) = 1$. Formułę będziemy określać jako tautologię w klasie modeli $\mathcal{M}_I$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona spełniona w każdym modelu z $\mathcal{M}_I$.

[44]Dla odróżnienia poszczególnych interpretacji będziemy stosować indeksy, otrzymamy więc interpretacje: I_1, I_2 itd.

Rozdział 2

Klasyczne systemy zakresowe

Właściwą część pracy rozpoczniemy od analizy znanych z literatury systemów rachunku nazw, które wykorzystują funktory sylogistyki i mają intuicyjną interpretację w rachunku zbiorów. Jako pierwszy zaprezentujemy system pochodzący od Łukasiewicza, dla którego system aksjomatycznego odrzucania opracował J. Słupecki [30, 55, 32]. W ramach tej prezentacji referować będziemy rezultaty przedstawione przez Łukasiewicza i Słupeckiego. Charakterystyczną cechą systemu jest to, że przy przejściu do interpretacji w teorii zbiorów nazwom mogą odpowiadać jedynie zbiory niepuste.

Następnie przejdziemy do systemu, który również można zinterpretować w teorii zbiorów i w którym nazwy puste są dopuszczalne. Ideę taką zaproponował Słupecki w pracy [54], ale przedstawiony przez niego system nie w pełni realizuje założenie[1]. Pewną aksjomatyzację tego systemu podał E.J. Lemmon [28], zastosował on jednak w niej dodatkowe operacje na nazwach – negację oraz iloczyn nazwowy. Aksjomatyzację zawierającą tylko funktory używanego przez nas języka przedstawił A. Pietruszczak [40]. Tu wykorzystamy równoważną aksjomatyzację przedstawioną wcześniej w pracy [23]. Nowym, niepublikowanym wcześniej elementem jest przedstawienie aksjomatycznego odrzucania dla tego systemu z pełnym dowodem jego adekwatności.

Ostatnim w tym rozdziale systemem jest system zwany *systemem Brentany*[2]. Podobnie jak w poprzednim systemie, w jego interpretacji w teorii zbiorów można posługiwać się zbiorami pustymi. Różnica polega na interpretacji zdań ogólnotwierdzących, w których pierwszemu z terminów odpo-

[1] System Słupeckiego będzie przedmiotem rozważań w dalszej części pracy.

[2] System jest nazwany „Brentano style syllogistic” w podręczniku A.N. Priora Formal Logic [47], str. 311.

wiada zbiór pusty. W poprzednim systemie takie zdanie interpretowane jest jako fałszywe, w systemie Brentany uznawane jest ono za prawdziwe. Sprawia to, że w systemie nie jest tezą przyjmowana u Arystotelesa i w logice tradycyjnej implikacja $SaP \rightarrow SiP$. Podejście to bliższe jest współczesnym intuicjom związanym ze zbiorami, według których nazwa pusta jest *częścią* każdej innej nazwy, a inaczej rzecz ujmując, zawieranie się nazwy w jakiejś innej nazwie nie implikuje istnienia jej desygnatów. Podobne podejście przyjmują Pietruszczak w pracy [42] oraz Pratt-Hartmann i Moss [46]. Dla systemu Brentany podajemy również aksjomatykę odrzuceniową, która dotąd nie pojawiła się w literaturze. System aksjomatycznego odrzucania jest tu nieco bardziej skomplikowany niż w innych systemach, które rozpatrujemy w niniejszej pracy, gdyż w odróżnieniu od nich system Brentany nie jest teorią hornowską. System aksjomatycznego odrzucania dla sylogistyki Brentany nie był wcześniej opublikowany.

2.1 System Łukasiewicza

2.1.1 System aksjomatyczny

Terminami pierwotnymi systemu Łukasiewicza (**Łuk**) są a oraz i. Przyjmujemy w systemie reguły wnioskowania MP i Sub.

Aksjomatami są wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań w języku oraz formuły:

$$SaS, \tag{2.1}$$

$$SiS, \tag{2.2}$$

$$MaP \wedge SaM \rightarrow SaP, \tag{2.3}$$

$$MaP \wedge MiS \rightarrow SiP. \tag{2.4}$$

Łatwo sprawdzić, że tezami systemu są następujące wyrażenia:

$$PiS \rightarrow SiP, \tag{2.5}$$

otrzymane z (2.4) i (2.1);

$$SaP \rightarrow SiP, \tag{2.6}$$

otrzymane z (2.4) i (2.2);

$$PaS \rightarrow SiP, \tag{2.7}$$

otrzymane z (2.5) i (2.6);

$$MaS \wedge MaP \to SiP, \tag{2.8}$$

otrzymane z (2.4) i (2.6) oraz

$$M_1 i M_2 \wedge M_1 a S \wedge M_1 a P \to SiP, \tag{2.9}$$

otrzymane z (2.4).

Definicja 4. *Niech dla dowolnych zmiennych $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ $aL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ będzie najmniejszym zbiorem formuł, takim że:*

- $\mathcal{X}a\mathcal{Y} \in aL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *oraz*
- *jeżeli* $\alpha \in aL(\mathcal{X},\mathcal{Z})$, *to* $\alpha \wedge \mathcal{Z}a\mathcal{Y} \in aL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.

Elementy zbioru $aL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ nazywać będziemy łańcuchami łączącymi zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$. Mniej formalnie dowolny łańcuch łączący zmienne $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ można zapisać następująco:

$$\mathcal{X}_1 a \mathcal{X}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{X}_{n-1} a \mathcal{X}_n,$$

gdzie $n \geqslant 2$.

Lemat 5. *Niech α będzie formułą elementarną. Jeżeli α zawiera dowolny łańcuch łączący zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$, to formuła*

$$\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$$

*jest tezą systemu **Łuk**.*

Dowód. Przez prostą indukcję z wykorzystaniem aksjomatu (2.3) otrzymamy fakt, że dla dowolnego $\beta \in aL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $\beta \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ jest tezą systemu **Łuk**. Skoro α zawiera takie β, tezą klasycznego rachunku zdań jest formuła $\alpha \to \beta$, a więc również $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ jest tezą **Łuk**. ∎

Lemat 6. *Niech α będzie formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ różnymi zmiennymi.*

*(i) Jeżeli dla pewnej zmiennej $\mathcal{Z}$ spełnione są równocześnie dwa warunki: (1) $\mathcal{Z}$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{X}$ lub α zawiera β, takie że $\beta \in aL(\mathcal{Z},\mathcal{X})$, oraz (2) $\mathcal{Z}$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{Y}$ lub α zawiera γ, takie że $\gamma \in aL(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$, to $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$ jest tezą **Łuk**.*

*(ii) Jeżeli dla pewnych zmiennych $\mathcal{Z}$ oraz $\mathcal{V}$ α zawiera atom $\mathcal{Z}i\mathcal{V}$ i spełnione są równocześnie dwa warunki: (1) $\mathcal{Z}$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{X}$ lub α zawiera β, takie że $\beta \in aL(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$ i (2) $\mathcal{V}$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{Y}$ lub α zawiera γ, takie że $\gamma \in aL(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$, to $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$ oraz $\alpha \to \mathcal{Y}i\mathcal{X}$ są tezami **Łuk**.*

Dowód. (i) W zależności od tego które z członów alternatyw występujących w warunkach (1) i (2) są spełnione, jest bezpośrednią konsekwencją Lematu 5 w zestawieniu z tezą (2.6), (2.7) lub (2.8).

(ii) W zależności od tego które z członów alternatyw występujących w warunkach (1) i (2) są spełnione, jest bezpośrednią konsekwencją prawa tautologii rachunku zdań lub tezy (2.5), Lematu 5 w zestawieniu z aksjomatem (2.4) lub tezą (2.9) (z ewentualnym wykorzystaniem tezy (2.5)). ■

2.1.2 Aksjomatyczny system odrzucania

W systemie przyjęte są reguły odrzucania: MP^{-1}, Sub^{-1} oraz $Comp^{-1}$ zdefiniowane w poprzednim rozdziale. Jedynym aksjomatem odrzuconym jest następująca formuła:

$$PaM \wedge SaM \to SiP. \tag{2.10}$$

Definicja 5. *Wyrażeniem odrzuconym systemu **Łuk** jest aksjomat odrzucony (2.10) oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania: MP^{-1}, Sub^{-1} lub $Comp^{-1}$.*

Lemat 7. *W systemie **Łuk** wyrażeniami odrzuconymi są:*

$$\neg SaS, \tag{2.11}$$

$$PaS \to SaP, \tag{2.12}$$

$$SaP \tag{2.13}$$

oraz

$$SiP. \tag{2.14}$$

Dowód.

Odrzucenie formuły (2.11):

1.	$\vdash SaS \to (\neg SaS \to (SaM \wedge PaM \to SiP))$	KRZ
2.	$\vdash SaS$	aksjomat (2.1)
3.	$\vdash SaS \to (\neg SaS \to (SaM \wedge PaM \to SiP))$	MP: 1, 2
4.	$\dashv PaM \wedge SaM \to SiP$	aks. odrzucony (2.10)
	$\dashv \neg SaS$	MP^{-1}: 3, 4

Odrzucenie formuły (2.12):

1.	$\vdash MaP \wedge SaM \to SaP$	aksjomat (2.3)
2.	$\vdash SaP \to SiP$	teza (2.6)
3.	$\vdash MaP \wedge SaM \to SiP$	KRZ, 1, 2
4.	$\vdash (MaP \wedge SaM \to SiP) \to$ $((PaM \to MaP) \to (SaM \wedge PaM \to SiP))$	KRZ
5.	$\vdash (PaM \to MaP) \to (SaM \wedge PaM \to SiP)$	MP: 4, 3
6.	$\dashv PaM \wedge SaM \to SiP$	aks. odrzucony (2.10)
7.	$\dashv PaM \to MaP$	MP^{-1}: 5, 6
	$\dashv PaS \to SaP$	Sub^{-1}: 7

Odrzucenie formuły (2.13):

1.	$\dashv PaS \to SaP$	odrzucenie (2.12)
2.	$\vdash SaP \to (PaS \to SaP)$	KRZ
	$\dashv SaP$	MP^{-1}: 2, 1

Odrzucenie formuły (2.14):

1.	$\dashv SaM \wedge PaM \to SiP$	aksjomat odrzucony (2.10)
2.	$\vdash SiP \to (SaM \wedge PaM \to SiP)$	KRZ
	$\dashv SiP$	MP^{-1}: 2, 1

■

Lemat 8. *Każda formuła atomowa języka systemu* ***Łuk*** *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Formuły atomowe o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{X}i\mathcal{X}$ są tezami ze względu na aksjomaty (2.1) i (2.2). Wszystkie formuły atomowe z różnymi zmiennymi jako argumentami można odrzucić, korzystając z reguły Sub^{-1} zastosowanej do formuł (2.13) i (2.14), odrzuconych na mocy Lematu 7. ■

Lemat 9. *Każda formuła hornowska języka systemu* ***Łuk*** *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Ze względu na Lemat 8 wystarczy rozważyć formuły hornowskie języka systemu o następujących postaciach: (i) $\neg\alpha$, (ii) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{X}$, (iii) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{X}$, (iv) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y}$, (v) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y}$, gdzie α jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi.

Przypadek (i). Każde wyrażenie tej postaci jest wyrażeniem odrzuconym. Niech e_1 będzie podstawieniem, w którym S podstawione jest za wszystkie zmienne z α. $e_1(\alpha)$ jest więc koniunkcją atomów ze zbioru $\{SaS, SiS\}$. Ponieważ tezą systemu **Łuk** jest formuła (2.6), mamy również $\vdash SaS \rightarrow e_1(\alpha)$ oraz dzięki transpozycji $\vdash \neg e_1(\alpha) \rightarrow \neg SaS$. Na mocy Lematu 7 mamy $\dashv \neg SaS$, a zatem przy użyciu reguły MP^{-1} możemy otrzymać $\dashv \neg e_1(\alpha)$ i dalej, na mocy reguły Sub^{-1}, $\dashv \neg\alpha$.

Przypadki (ii) i (iii). W obecności odpowiednio aksjomatów (2.1) i (2.2) wyrażenia $\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{X}$ oraz $\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{X}$ są tezami systemu **Łuk**.

Przypadek (iv). Jeżeli α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$, to na podstawie Lematu 5 formuła $\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ jest tezą systemu **Łuk**. W przeciwnym przypadku zastosujemy podstawienie e_2, w którym P podstawia się za $\mathcal{Y}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{Z}$, taką że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{Y}$, a S podstawia się za wszystkie inne zmienne występujące w rozważanym wyrażeniu (w tym $\mathcal{X}$). Wtedy $e_2(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{PaP$, SaS, PaS, SiS, PiP, SiP, $PiS\}$. Ze względu na aksjomaty (2.1) i (2.2) i tezy (2.6) i (2.7) mamy w tej sytuacji $\vdash PaS \rightarrow e_2(\alpha)$. Ponieważ $e_2(\mathcal{X}a\mathcal{Y}) = SaP$, zachodzi również jako podstawienie prawa KRZ $\vdash (PaS \rightarrow e_2(\alpha)) \rightarrow (e_2(\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y}) \rightarrow (PaS \rightarrow SaP))$, a zatem także $\vdash e_2(\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y}) \rightarrow (PaS \rightarrow SaP)$.

Na mocy Lematu 7 mamy $\dashv PaS \rightarrow SaP$, a zatem przy użyciu reguły MP^{-1} możemy otrzymać $\dashv e_2(\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y})$ i dalej, na mocy reguły Sub^{-1}, $\dashv \alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y}$.

Przypadek (v). Jeżeli α spełnia jeden z warunków Lematu 6, to na jego mocy jest tezą systemu **Łuk**. W przeciwnym wypadku zastosujemy podstawienie e_3, w którym S podstawiamy za $\mathcal{X}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{V}$, dla której α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{V}$ z $\mathcal{X}$; P podstawiamy za $\mathcal{Y}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{Z}$, dla której α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{Y}$; M podstawiamy za wszystkie inne zmienne. Wtedy $e_3(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{PaP$, SaS, MaM, PaM, SaM, PiP, SiS, MiM, PiM, MiP, SiM, $MiS\}$. Ze względu du na aksjomaty (2.1) i (2.2) oraz tezy (2.6) i (2.7) mamy w tej sytuacji $\vdash (PaM \wedge SaM) \to e_3(\alpha)$. Ponieważ $e_3(\mathcal{X}i\mathcal{Y}) = SiP$ zachodzi również jako podstawienie prawa KRZ $\vdash (PaM \wedge SaM \to e_3(\alpha)) \to (e_3(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}) \to (PaM \wedge SaM \to SiP))$, a zatem także $\vdash e_3(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}) \to (PaM \wedge SaM \to SiP)$. Przy użyciu aksjomatu odrzuconego i reguły MP^{-1} można stąd wyprowadzić $\dashv e_3(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y})$ i dalej, przy użyciu reguły Sub^{-1}, $\dashv \alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$. ■

Lemat 10. *Aksjomat odrzucony (2.10) nie jest tezą systemu* ***Łuk****.*

Dowód. Przedstawimy klasę modeli, taką że z jednej strony aksjomaty systemu **Łuk** są jej tautologiami, a reguły MP i Sub zachowują tautologiczność, a z drugiej strony aksjomat odrzucony nie jest tautologią. Klasa ta określona jest następująco: $\mathcal{M}_{I_1} = (N_1, I_1, v)$, gdzie $N_1 = \{n_1, n_2, n_3\}$, I_1 dla funktorów rachunku zdań jest określona klasycznie, a dla formuł atomowych – przez następujące matryce:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	1	0	1
n_2	0	1	1
n_3	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3
n_1	1	0	1
n_2	0	1	1
n_3	1	1	1

Reguła MP zachowuje tautologiczność, bo interpretacja implikacji jest klasyczna. Reguła Sub nie wpływa na tautologiczność, bo formuła jest tautologią, gdy jest prawdziwa przy każdym wartościowaniu, a podstawienie nie może tego zmienić. Sprawdzenie, że aksjomaty systemu **Łuk** są tautologiami, jest rutynowe.

Aksjomat odrzucony (2.10) jest fałszywy w modelu przy następującym wartościowaniu v: $P - n_1$, $S - n_2$ i $M - n_3$[3]. ■

Twierdzenie 9. *Każda formuła języka systemu* ***Łuk*** *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

[3]Ponieważ kwestię wyprowadzalności aksjomatu odrzuconego w systemie **Łuk** można rozstrzygnąć w oparciu o procedurę przedstawioną w Podrozdziale 1.5, wystarczyłoby jako dowód pokazać użycie programu implementującego tę procedurę z negatywnym wynikiem próby znalezienia dowodu. Tego typu komputerowe dowody wzbudzają jednak pewne kontrowersje. Problematyka ta szeroko dyskutowana była w kontekście komputerowego dowodu twierdzenia o czterech barwach, zob. np. [69].

Dowód. Ponieważ system **Łuk** jest nadbudowany nad klasycznym rachunkiem zdań, w którym każda formuła może być sprowadzona do koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej, wystarczy rozpatrzyć formuły o postaci:

$$\alpha \to \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n \ (n \geqslant 0), \tag{2.15}$$

gdzie α jest formułą elementarną, a β_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ są atomami (jeśli $n = 0$, interpretujemy formułę ze schematu (2.15) jako $\neg\alpha$).

Na podstawie Lematu 9 każda formuła hornowska jest tezą bądź wyrażeniem odrzuconym systemu **Łuk**. Na mocy praw klasycznego rachunku zdań, jeżeli dla dowolnego i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tezą jest $\alpha \to \beta_i$, to $\alpha \to \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$ również jest tezą. Z drugiej strony, w związku z obecnością reguły $Comp^{-1}$, jeżeli dla każdego i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $\alpha \to \beta_i$ jest odrzucone, to $\alpha \to \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n$ jest również odrzucone. Tak więc każda formuła języka jest tezą lub wyrażeniem odrzuconym systemu **Łuk**.

Aby zakończyć dowód musimy wykazać, że żadna formuła odrzucona nie jest tezą. Lemat 10 pokazuje, że aksjomat odrzucony nie jest tezą. Ponieważ reguły odrzucania MP^{-1} i Sub^{-1} stanowią odpowiednio odwrócenie reguł MP i Sub, ich użycie prowadzi od formuł odrzuconych (w przypadku reguły MP^{-1} chodzi o przesłankę odrzuconą), które nie są tezami, do innych formuł, które tezami też nie są. Z kolei ponieważ system **Łuk** jest teorią hornowską odnosi się do niej Twierdzenie 6. W związku z tym również reguła $Comp^{-1}$, o ile jej przesłanki nie są tezami, prowadzi do wniosku, który tezą nie jest. W rezultacie żadna formuła odrzucona nie jest tezą. ■

2.1.3 Model w rachunku zbiorów

W rachunku zbiorów interpretuje się system Łukasiewicza, przypisując nazwom niepuste zbiory, a zdania ogólno- i szczegółowotwierdzące interpretuje się odpowiednio jako zawieranie się zbiorów oraz posiadanie niepustego przecięcia.

Formalnie klasę modeli dla systemu Łukasiewicza określa struktura: $\mathsf{M}_{I_2} = (D, I_2, v)$, gdzie D jest niepustym zbiorem, wartościowanie v przypisuje zmiennym niepuste podzbiory D, a interpretacja I_2 dla formuł atomowych jest określona następująco:

$$\begin{array}{lll} I_2(v(\mathcal{X} a \mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \subseteq v(\mathcal{Y}); \\ I_2(v(\mathcal{X} i \mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset, \end{array}$$

a dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna.

Twierdzenie 10. *System **Łuk** jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy* M_{I_2}.

Dowód. W obecności Twierdzenia 9 wystarczy pokazać, że tezy systemu są tautologiami w klasie modeli M_{I_2}, a wyrażenia odrzucone nie są.

Podstawowe własności zawierania się zbiorów gwarantują, że aksjomaty **Łuk** są tautologiami. Aksjomat odrzucony jest niespełniony na przykład w modelu określonym w zbiorze $D = \{1, 2\}$ przez następujące wartościowanie: $v(S) = \{1\}$, $v(P) = \{2\}$, $v(M) = \{1, 2\}$.

Reguły MP i MP^{-1} zachowują odpowiednio tautologiczność i nietautologiczność, ponieważ interpretacja implikacji jest standardowa. Z kolei reguły Sub i Sub^{-1} zachowują odpowiednio tautologiczność i nietautologiczność, ponieważ jeżeli formuła jest prawdziwa w każdym modelu, to podstawienie za zmienne zdaniowe nie może tego zmienić. Pozostaje więc udowodnić, że reguła $Comp^{-1}$ prowadzi od niespełnionych przesłanek do niespełnionej konkluzji. Pokażemy, jak skonstruować odpowiedni model dla $n = 2$. Dla rozszerzenia tego rezultatu na przypadek ogólny wystarczy zastosować prostą indukcję.

Rozpatrzmy dwie niespełnione formuły, mogące stanowić przesłanki reguły $Comp^{-1}$ o postaciach odpowiednio: $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$, gdzie $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ ($n \geqslant 0$, a dla każdego i, takiego że $0 \leqslant i \leqslant n$ α_i są atomami), a β_1 i β_2 są atomami. W tej sytuacji istnieją w M_{I_2} modele w dziedzinach odpowiednio D_1 i D_2 określone przez wartościowania odpowiednio v_1 i v_2, takie że $I_2(v_1(\alpha \to \beta_1)) = I_2(v_2(\alpha \to \beta_2)) = 0$.

W związku z tym $I_2(v_1(\beta_1)) = I_2(v_2(\beta_2)) = 0$ oraz dla każdego i, takiego że $0 \leqslant i \leqslant n$: $I_2(v_1(\alpha_i)) = I_2(v_2(\alpha_i)) = 1$.

Zdefiniujmy kolejny model z M_{I_2} w dziedzinie $D_1 \times D_2$ z wartościowaniem v_3 określonym dla dowolnej zmiennej $\mathcal{X}$ następująco: $v_3(\mathcal{X}) = v_1(\mathcal{X}) \times v_2(\mathcal{X})$.

Ponieważ dla dowolnych zbiorów x_1, x_2, y_1 i y_2 zachodzą następujące prawidłowości:

$$(x_1 \subseteq y_1 \wedge x_2 \subseteq y_2) \equiv (x_1 \times x_2) \subseteq (y_1 \times y_2), \tag{2.16}$$

$$(x_1 \cap y_1 \neq \emptyset \wedge x_2 \cap y_2 \neq \emptyset) \equiv (x_1 \times x_2) \cap (y_1 \times y_2) \neq \emptyset, \tag{2.17}$$

$I_2(v_3(\alpha_i)) = 1$ dla każdego i, takiego że $0 \leqslant i \leqslant n$ oraz $I_2(v_3(\beta_1)) = I_2(v_3(\beta_2)) = 0$, a więc również $I_2(v_3(\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2)) = 0$, co oznacza, że konkluzja reguły $Comp^{-1}$ nie jest tautologią. ■

2.1.4 Niezależność aksjomatów

Twierdzenie 11. *Aksjomaty systemu **Łuk** są niezależne.*

Dowód. Posłużymy się rozumowaniem analogicznym do wykorzystanego w dowodzie Lematu 10. Dla każdego z aksjomatów przedstawimy więc klasę modeli $\mathcal{M}_I$, taką że pozostałe aksjomaty są w niej tautologiami, a rozpatrywany aksjomat nie jest. Ograniczymy się do przedstawienia interpretacji I, odpowiedniej dla wykazania niezależności każdego z aksjomatów oraz wartościowania pokazującego, że aksjomat nie jest tautologią. We wszystkich przypadkach interpretacja funktorów rachunku zdań jest klasyczna.

Aksjomat (2.1) – dziedzina $\{n_1\}$, interpretacja I_3:

$I_3(n_1 a n_1) = 0$;
$I_3(n_1 i n_1) = 1$.

Aksjomat (2.2) – dziedzina $\{n_1\}$, interpretacja I_4:

$I_4(n_1 a n_1) = 1$;
$I_4(n_1 i n_1) = 0$.

Aksjomat (2.3) – dziedzina $\{n_1, n_2, n_3\}$, interpretacja I_5:

$I_5(v(\mathcal{X} i \mathcal{Y})) = 1$ dla dowolnych argumentów;
$I_5(v(\mathcal{X} a \mathcal{Y}))$ przyjmuje wartości zgodnie z matrycą:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	1	1	0
n_2	1	1	1
n_3	1	1	1

Aksjomat (2.3) jest fałszywy przy wartościowaniu v: $S - n_1$, $P - n_3$, $M - n_2$.

Aksjomat (2.4) – dziedzina $\{n_1, n_2\}$, interpretacja I_6:

$I_6(v(\mathcal{X} a \mathcal{Y}))$ oraz $I_6(v(\mathcal{X} i \mathcal{Y}))$ przyjmuje wartości zgodnie z poniższą matrycą:

a/i	n_1	n_2
n_1	1	1
n_2	0	1

Aksjomat (2.4) jest fałszywy przy wartościowaniu v: $S - n_2$, $P - n_1$, $M - n_1$.

■

2.2 System sylogistyki dopuszczający nazwy puste

2.2.1 System aksjomatyczny

W systemie sylogistyki dopuszczającym nazwy puste (system standardowy sylogistyki – **Stnd**) język jest ten sam, co w systemie **Łuk**, a więc terminami pierwotnymi są a oraz i. Aksjomatami są wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań w języku, formuły (2.3), (2.4), (2.6) oraz:

$$PiS \to SaS. \tag{2.18}$$

Aksjomat (2.18) jest w oczywisty sposób wyprowadzalny z formuły (2.1), a więc wszystkie aksjomaty systemu **Stnd** są aksjomatami lub tezami systemu **Łuk**, co oznacza, że system **Stnd** jest zawarty w systemie **Łuk**.

W oparciu o aksjomaty (2.18) i (2.6) możemy otrzymać:

$$SiS \equiv SaS. \tag{2.19}$$

Na podstawie aksjomatów (2.18) i (2.4) można w systemie **Stnd** udowodnić formułę (2.5), a formuły (2.4) i (2.6) są aksjomatami systemu **Stnd**. Zatem można również udowodnić w systemie formuły (2.7), (2.8) i (2.9) oraz, co za tym idzie, obowiązują w nim odpowiedniki Lematów 5 i 6.

Tezami systemu **Stnd** są również następujące formuły:

$$PaS \to PaP, \tag{2.20}$$

otrzymane z (2.18) i (2.7);

$$PaS \to SaS, \tag{2.21}$$

otrzymane z (2.18) i (2.6);

$$PaS \to PiP, \tag{2.22}$$

otrzymane z (2.20) i (2.5);

$$PaS \to SiS, \tag{2.23}$$

otrzymane z (2.21) i (2.5).

Lemat 11. *Niech α będzie dowolną koniunkcją atomów ze zbioru $\{PaP$, SaS, SaP, SiS, PiP, SiP, $PiS\}$. Formuła $PaS \to \alpha$ jest tezą systemu **Stnd**.*

Dowód. Własność określona w twierdzeniu jest prostą konsekwencją faktu, że tezami systemu **Stnd** są formuły (2.20), (2.21), (2.6), (2.7), (2.22) i (2.23). ■

2.2.2 Aksjomatyczny system odrzucania

Charakterystyka systemu **Stnd** z powyższej sekcji pozwala na przeprowadzenie rozważań dotyczących systemu aksjomatycznego odrzucania, analogicznego do systemu **Łuk**. Określony on będzie przy użyciu reguł odrzucania MP^{-1}, Sub^{-1} oraz $Comp^{-1}$. Aksjomatami odrzuconymi dla systemy **Stnd** są formuły (2.10) oraz

$$PaP \to SiS. \tag{2.24}$$

Definicja 6. *Wyrażeniem odrzuconym systemu **Stnd** jest każdy z aksjomatów odrzuconych (2.10) i (2.24) a także każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania: MP^{-1}, Sub^{-1} lub $Comp^{-1}$.*

W systemie **Stnd** obowiązuje własność analogiczna do Lematu 7.

Lemat 12. *Formuły (2.11), (2.12) oraz (2.2) są formułami odrzuconymi systemu **Stnd**.*

Dowód. W przypadku formuły (2.12) dowód jest identyczny jak w Lemacie 7[4]. Odrzucenie formuły (2.11) w systemie **Stnd** jest następujące:

[4]Wykorzystane w dowodzie formuły przyjęte i odrzucone w systemie **Łuk** są również odpowiednio przyjęte i odrzucone w systemie **Stnd**. Inaczej jest z odrzuceniem formuły (2.11), gdyż został tu wykorzystany aksjomat (2.1), który nie jest tezą systemu **Stnd**.

1.	$\vdash \neg PaP \to (PaP \to SiS))$	KRZ
2.	$\dashv PaP \to SiS$	aksjomat odrzucony (2.24)
3.	$\dashv \neg PaP$	MP^{-1}: 1, 2
	$\dashv \neg SaS$	Sub^{-1}: 3

Odrzucenie formuły (2.2) w systemie **Stnd** jest następujące:

1.	$\vdash SiS \to (PaP \to SiS))$	KRZ
2.	$\dashv PaP \to SiS$	aksjomat odrzucony (2.24)
	$\dashv SiS$	MP^{-1}: 1, 2

■

Lemat 13. *Każda formuła atomowa języka systemu **Stnd** jest wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Z $\dashv SiS$ oraz aksjomatu (2.6) uzyskać można $\dashv SaS$. Odrzucenie każdego innego wyrażenia atomowego można uzyskać przy użyciu reguły Sub^{-1}.

■

Lemat 14. *Każda formuła hornowska języka systemu **Stnd** jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Jak w dowodzie Lematu 9 pokażemy zachodzenie lematu dla formuł hornowskich o następujących postaciach: (i) $\neg\alpha$, (ii) $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{X}$, (iii) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$, (iv) $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$, (v) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$, gdzie α jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi.

W związku z tym, że w systemie **Stnd** obowiązują własności analogiczne do tych, które dla systemu **Łuk** określone są w Lematach 5 i 6 oraz odrzucone są formuły wymienione w Lemacie 12 dla przypadków (i), (iv) i (v), dowód pokrywa się z analogicznymi przypadkami dla systemu **Łuk** (w przypadku (iv) i (v) uwzględniony musi zostać Lemat 11).

Przypadek (ii). Ze względu na tezę (2.19) każda formuła o tej postaci jest równoważna formule o postaci (iii), a więc jest tezą lub formułą odrzuconą.

Przypadek (iii). Jeżeli w wyrażeniu α, stanowiącym poprzednik rozpatrywanej formuły, występuje zmienna $\mathcal{X}$, to na mocy aksjomatów (2.18) i (2.6) oraz tezy (2.5) formuła ta jest tezą systemu **Stnd**.

W przeciwnym przypadku stosujemy do niej podstawienie e, w którym za $\mathcal{X}$ podstawiamy S, a za wszystkie inne zmienne podstawiamy P. $e(\alpha)$

jest wtedy koniunkcją wyrażeń ze zbioru $\{PaP, PiP\}$, równoważną PaP, a $e(\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{X})$ jest równoważna aksjomatowi odrzuconemu (2.24). Stosując regułę MP^{-1}, otrzymamy więc $\dashv e(\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{X})$, a dalej stosując regułę Sub^{-1}, $\dashv \alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{X}$. ∎

Lemat 15. *Aksjomaty odrzucone (2.10) i (2.24) nie są tezami systemu* ***Stnd****.*

Dowód. Możemy zastosować rozumowanie analogiczne do użytego w dowodzie Lematu 10. W przypadku aksjomatu (2.10) można zastosować wprost klasę modeli $\mathcal{M}_{I_1}$ z tego dowodu. W przypadku aksjomatu odrzuconego (2.24) odpowiednia klasa modeli może być określona następująco: $\mathcal{M}_{I_7} = (N_7, v, I_7)$, gdzie dziedzina $N_7 = \{n_1, n_2\}$, a interpretacja I_7 dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych określona jest przez matrycę:

a/i	n_1	n_2
n_1	0	0
n_2	0	1

Aksjomat odrzucony (2.24) jest fałszywy przy wartościowaniu v, takim że $v(P) = n_2$, a za $v(S) = n_1$. ∎

Twierdzenie 12. *Każda formuła języka systemu* ***Stnd*** *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak Twierdzenia 9, przy czym wykorzystać trzeba Lematy 14 oraz 15. ∎

2.2.3 Model w rachunku zbiorów

Modele dla systemu **Stnd** różnią się od modeli dla systemu **Łuk** tym, że funkcja wartościowania może przyporządkować zmiennej również zbiór pusty. Jednocześnie, aby zdanie ogólnotwierdzące było prawdziwe, wymagane jest, aby obu nazwom w nim występującym odpowiadały niepuste zbiory.

Klasę modeli dla systemu **Stnd** określa struktura $\mathsf{M}_{I_8} = (D, I_8, v)$, gdzie D jest niepustym zbiorem, wartościowanie v przypisuje zmiennym dowolne podzbiory D, a interpretacja I_8 dla formuł atomowych jest określona następująco:

$$I_8(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad v(\mathcal{X}) \subseteq v(\mathcal{Y}) \text{ i } v(\mathcal{X}) \neq \emptyset;$$
$$I_8(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset,$$

a dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna.

Twierdzenie 13. *System **Stnd** jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy* M_{I_8}.

Dowód. Tak jak w przypadku Twierdzenia 10 wystarczy pokazać, że tezy systemu są tautologiami w klasie modeli M_{I_8}, a wyrażenia odrzucone nie są.

Sprawdzenie, że aksjomaty **Stnd** są tautologiami, jest rutynowe. Aksjomaty odrzucone są fałszywe odpowiednio przy następujących interpretacjach występujących w nim zmiennych: $v(S) = \{1\}$, $v(P) = \{2\}$, $v(M) = \{1, 2\}$ ($D = \{1, 2\}$) – dla (2.10) oraz $v(S) = \emptyset$, $v(P) = \{1\}$ ($D = \{1\}$) – dla (2.24).

Reguły MP, Sub, MP^{-1} i Sub^{-1} zachowują odpowiednio tautologiczność i nietautologiczność. Pozostaje do udowodnienia, że reguła $Comp^{-1}$ prowadzi od przesłanek, które nie są tautologiami, do konkluzji, która tautologią też nie jest. Tak jak w przypadku Twierdzenia 10 ograniczymy się do wykazania tego faktu dla $n = 2$.

Wykorzystamy prawo rachunku zbiorów (2.17) z dowodu Twierdzenia 10 oraz fakt, że dla dowolnych zbiorów x_1, x_2, y_1 i y_2 zachodzi

$$(x_1 \subseteq y_1 \wedge x_1 \neq \emptyset \wedge x_2 \subseteq y_2 \wedge x_2 \neq \emptyset) \equiv (x_1 \times x_2) \subseteq (y_1 \times y_2) \wedge (x_1 \times x_2) \neq \emptyset. \tag{2.25}$$

Niech $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$ (dla α będącej formułą elementarną, a β_1 i β_2 formułami atomowymi) będą formułami, które nie są tautologiami. W tej sytuacji istnieją w M_{I_8} modele w dziedzinach odpowiednio D_1 i D_2, określone przez wartościowania odpowiednio v_1 i v_2, takie że $I_8(v_1(\alpha \to \beta_1)) = I_8(v_2(\alpha \to \beta_2)) = 0$. W związku z tym $I_8(v_1(\beta_1)) = I_8(v_2(\beta_2)) = 0$ oraz $I_8(v_1(\alpha)) = I_8(v_2(\alpha)) = 1$.

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 10 zdefiniujmy kolejny model z M_{I_8} w dziedzinie $D_1 \times D_2$, z wartościowaniem v_3 określonym dla dowolnej zmiennej $\mathcal{X}$ następująco: $v_3(\mathcal{X}) = v_1(\mathcal{X}) \times v_2(\mathcal{X})$. W modelu tym formuła $\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2$ jest niespełniona, co pozwala zakończyć dowód. ■

2.2.4 Niezależność aksjomatów

Twierdzenie 14. *Aksjomaty systemu **Stnd** są niezależne.*

Dowód. Dowód będzie przebiegał w sposób analogiczny do dowodu Twierdzenia 11. Wykorzystamy również klasy modeli użyte w tamtym dowodzie.

Dla wykazania niezależności aksjomatów (2.18) i (2.6) można zastosować dziedzinę $\{n_1\}$ i odpowiednio interpretacje I_3 oraz I_4, dla aksjomatu (2.8) – dziedzinę $\{n_1, n_2, n_3\}$ i interpretację I_5, a dla aksjomatu (2.9) – dziedzinę $\{n_1, n_2\}$ i interpretację I_6. Wartościowania, dla których formuły nie są spełnione w modelach, są takie same jak w dowodzie Twierdzenia 11. ∎

Analogicznie do dobrze znanego pojęcia niezależności aksjomatów można postawić problem niezależności aksjomatów odrzuconych.

Definicja 7. *Zbiór aksjomatów odrzuconych Φ w systemie opartym o aksjomaty uznane Ψ jest niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje formuła $\alpha \in \Phi$, którą daje się odrzucić w systemie określonym poprzez zbiór aksjomatów uznanych Ψ i odrzuconych $\Phi - \{\alpha\}$ przy zachowaniu tych samych reguł uznawania i odrzucania.*

Twierdzenie 15. *Zbiór aksjomatów odrzuconych systemu **Stnd** jest niezależny.*

Dowód. Dowód rozpoczniemy od pokazania, że aksjomaty odrzucone nie są na gruncie systemu **Stnd** wzajemnie z siebie wyprowadzalne. Aby udowodnić, że aksjomat odrzucony (2.10) nie jest wyprowadzalny w systemie **Stnd** z aksjomatu odrzuconego (2.24), wystarczy zauważyć, że aksjomaty systemu **Stnd** oraz aksjomat (2.24) są tezami systemu **Łuk**, natomiast aksjomat (2.10) nie jest.

Z kolei fakt, że aksjomat odrzucony (2.24) nie jest wyprowadzalny z aksjomatu odrzuconego (2.10) w systemie **Stnd**, wynika z tego, iż aksjomaty systemu **Stnd** oraz aksjomat (2.10) są tautologiami, a aksjomat (2.24) nie jest, w klasie modeli $M_{I_9} = (N_9, I_9, v)$, gdzie $N_9 = \{n_1, n_2\}$. Interpretacja I_9 dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla atomów jest wyznaczona przez matrycę:

a/i	n_1	n_2
n_1	0	0
n_2	0	1

Aksjomat (2.24) nie jest spełniony w modelu z wartościowaniem v, w którym $v(S) = n_1$, a $v(P) = n_2$.

Ponieważ aksjomaty odrzucone są formułami hornowskimi, na mocy Twierdzenia 8 możemy stwierdzić, że żadnego z aksjomatów odrzuconych nie da się odrzucić przy użyciu drugiego. ■

2.3 Sylogistyka Brentany

2.3.1 System aksjomatyczny

W systemie sylogistyki Brentany (system **B**) język jest ten sam, co w systemie **Łuk**, a więc terminami pierwotnymi są a oraz i. Aksjomatami są wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań w języku, formuły (2.1), (2.3), (2.4) oraz

$$SiP \to SiS, \tag{2.26}$$

$$SaP \vee SiS. \tag{2.27}$$

Dzięki aksjomatowi (2.3) w systemie **B** obowiązuje odpowiednik Lematu 5. Tezami systemu są formuły (2.5) otrzymane z (2.4) i (2.1) i (2.9) otrzymane z (2.4) oraz

$$SiS \wedge SaP \to SiP, \tag{2.28}$$

otrzymane z (2.4);

$$SiS \wedge SaP \to PiS, \tag{2.29}$$

otrzymane z (2.28), (2.5);

$$SiS \wedge SaP \to PiP, \tag{2.30}$$

otrzymane z (2.29) oraz (2.26);

$$MiM \wedge MaS \wedge MaP \to SiP, \tag{2.31}$$

otrzymane z (2.9);

$$MiN \wedge MaS \wedge MaP \to SiP, \tag{2.32}$$

otrzymane z (2.31) i (2.26);

$$NiM \wedge MaS \wedge MaP \to SiP, \tag{2.33}$$

otrzymane z (2.32) i (2.5);

$$SaM \rightarrow SaP \vee MiM, \tag{2.34}$$

otrzymane z (2.3) oraz (2.27);

$$MaS \wedge MaP \rightarrow SiP \vee MaN, \tag{2.35}$$

otrzymane z (2.31) i (2.27);

$$SaM \wedge SiS \wedge MaS \wedge MaP \rightarrow SiP, \tag{2.36}$$

otrzymane z (2.31) i (2.28);

$$MaP \wedge SiS \wedge SaM \rightarrow SiP, \tag{2.37}$$

otrzymane z (2.28), (2.3);

$$MaP \wedge SiS \wedge SaM \rightarrow PiS, \tag{2.38}$$

otrzymane z (2.37), (2.5);

$$MaN \wedge MiP \wedge NaS \rightarrow SiP, \tag{2.39}$$

otrzymane z (2.3), (2.4);

$$SiM \wedge MaP \rightarrow SiP, \tag{2.40}$$

otrzymane z (2.4), (2.5);

$$MaS \wedge MiM \wedge SaP \rightarrow SiP, \tag{2.41}$$

otrzymane z (2.28) i (2.30);

$$MaS \wedge MiM \wedge SaP \rightarrow PiS, \tag{2.42}$$

otrzymane z (2.41) i (2.5);

$$MaS \wedge MiM \wedge SaP \rightarrow PiP, \tag{2.43}$$

otrzymane z (2.42) i (2.26).

2.3.2 Model w teorii zbiorów – interpretacja w systemie Stnd

Model dla systemu **B** jest podobny do modelu systemu **Stnd** z tą różnicą, że przy zdaniach ogólnotwierdzących (zbudowanych przy użyciu funktora a) nie wymaga się, aby zbiory odpowiadające argumentom były niepuste.

Formalnie klasę modeli dla systemu **B** określa następująca struktura: $\mathsf{M}_{I_{10}} = (D, I_{10}, v)$, gdzie D jest niepustym zbiorem, wartościowanie v przypisuje zmiennym dowolne podzbiory D, a interpretacja I_{10} dla formuł atomowych jest określona następująco:

$$I_{10}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad v(\mathcal{X}) \subseteq v(\mathcal{Y});$$
$$I_{10}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset,$$

a dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna.

Definicja 8. *Niech funkcja g_b dla dowolnej formuły języka będzie określona w następujący sposób:*
$g_b(\mathcal{X}a\mathcal{Y}) = \mathcal{X}a\mathcal{Y} \vee \neg(\mathcal{X}i\mathcal{X});$
$g_b(\mathcal{X}i\mathcal{Y}) = \mathcal{X}i\mathcal{Y};$
$g_b(\neg\alpha) = \neg(g_b(\alpha));$
$g_b(\alpha \wedge \beta) = g_b(\alpha) \wedge g_b(\beta);$
$g_b(\alpha \vee \beta) = g_b(\alpha) \vee g_b(\beta);$
$g_b(\alpha \rightarrow \beta) = g_b(\alpha) \rightarrow g_b(\beta);$
$g_b(\alpha \equiv \beta) = g_b(\alpha) \equiv g_b(\beta).$

Definicja 9. *Niech funkcja g_s dla dowolnej formuły języka będzie określona w następujący sposób:*
$g_s(\mathcal{X}a\mathcal{Y}) = \mathcal{X}a\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}i\mathcal{X};$
$g_s(\mathcal{X}i\mathcal{Y}) = \mathcal{X}i\mathcal{Y};$
$g_s(\neg\alpha) = \neg(g_s(\alpha));$
$g_s(\alpha \wedge \beta) = g_s(\alpha) \wedge g_s(\beta);$
$g_s(\alpha \vee \beta) = g_s(\alpha) \vee g_s(\beta);$
$g_s(\alpha \rightarrow \beta) = g_s(\alpha) \rightarrow g_s(\beta);$
$g_s(\alpha \equiv \beta) = g_s(\alpha) \equiv g_s(\beta).$

Lemat 16. *Jeżeli α jest tezą systemu **B**, to $g_b(\alpha)$ jest tezą systemu **Stnd**.*

Dowód. Ponieważ oba systemy nadbudowane są nad klasycznym rachunkiem zdań, wystarczy pokazać, że tezami systemu **Stnd** są wyrażenia będące wartościami funkcji g_b zastosowanej do aksjomatów specyficznych systemu **B**, (2.1) – (2.27). Przyjmują one postać:

$$SaS \vee \neg SiS, \tag{2.44}$$

$$SiP \to SiS, \tag{2.45}$$

$$(MaP \vee \neg MiM) \wedge (SaM \vee \neg SiS) \to (SaP \vee \neg SiS), \tag{2.46}$$

$$(MaP \vee \neg MiM) \wedge MiS \to SiP, \tag{2.47}$$

$$SaP \vee \neg SiS \vee SiS. \tag{2.48}$$

Formuła (2.44) jest równoważna w KRZ formule $SiS \to SaS$ będącej podstawieniem aksjomatu (2.18).

Formuła (2.45) jest bezpośrednią konsekwencją aksjomatów (2.18) i (2.6).

Formuła (2.46) jest w KRZ równoważna:

$$(MaP \wedge SaM) \vee (MaP \wedge \neg SiS) \vee (\neg MiM \wedge SaM) \vee (\neg MiM \wedge \neg SiS) \to \\ (SaP \vee \neg SiS)$$

oraz

$$((MaP \wedge SaM) \to (SaP \vee \neg SiS)) \wedge ((MaP \wedge \neg SiS) \to (SaP \vee \neg SiS)) \wedge \\ ((\neg MiM \wedge SaM) \to (SaP \vee \neg SiS)) \wedge ((\neg MiM \wedge \neg SiS) \to (SaP \vee \neg SiS)).$$

Każdy z członów powyższej koniunkcji jest tezą systemu **Stnd** na mocy odpowiednio: pierwszy – aksjomatu (2.3), drugi i czwarty – praw KRZ, trzeci, który z kolei jest równoważny $(SaM \wedge SiS) \to (SaP \vee MiM)$ – aksjomatu (2.6) oraz tezy (2.45).

Formuła (2.47) jest w KRZ równoważna:

$$(MaP \wedge MiS) \vee (\neg MiM \wedge MiS) \to SiP$$

oraz

$$(MaP \wedge MiS \to SiP) \wedge (\neg MiM \wedge MiS \to SiP)$$

i

$$(MaP \wedge MiS \to SiP) \wedge (MiS \to SiP \vee MiM).$$

Pierwszy człon koniunkcji jest identyczny z aksjomatem (2.4), a drugi jest wyprowadzalny w **Stnd** z tezy (2.45).

Formuła (2.48) jest podstawieniem tezy KRZ. ■

Lemat 17. *Jeżeli α jest tezą systemu **Stnd**, to $g_s(\alpha)$ jest tezą systemu **B**.*

Dowód. Jak w dowodzie Lematu 16 ograniczymy się do pokazania, że formuły otrzymane przez zastosowanie funkcji g_s do aksjomatów specyficznych systemu **Stnd** są tezami **B**. Przyjmują one następującą postać:

$$SiP \to SaS \wedge SiS, \tag{2.49}$$

$$SaP \wedge SiS \to SiP, \tag{2.50}$$

$$MaP \wedge MiM \wedge SaM \wedge SiS \to SaP \wedge SiS, \tag{2.51}$$

$$MaP \wedge MiM \wedge MiS \to SiP. \tag{2.52}$$

Formuła (2.49) jest bezpośrednią konsekwencją aksjomatów (2.1) i (2.26).

Formuła (2.50) jest równoważna tezie systemu **B** (2.28).

Formuły (2.51) i (2.52) są konsekwencją odpowiednio (2.3) i (2.4) w klasycznym rachunku zdań.

■

Lemat 18. *W systemie **B** dla dowolnej formuły α zachodzi równoważność*

$$g_s(g_b(\alpha)) \equiv \alpha.$$

Dowód. Wystarczy pokazać równoważność dla wyrażeń o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ – indukcyjne rozszerzenie jej na dowolne formuły jest rutynowe. Z zastosowania rozważanej funkcji otrzymamy:

$$g_s(g_b(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = g_s(\mathcal{X}a\mathcal{Y} \vee \neg\mathcal{X}i\mathcal{X}) = (\mathcal{X}a\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}i\mathcal{X}) \vee \neg\mathcal{X}i\mathcal{X}.$$

Na mocy praw KRZ zachodzą następujące równoważności:

$$(\mathcal{X}a\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}i\mathcal{X}) \vee \neg\mathcal{X}i\mathcal{X} \equiv (\mathcal{X}a\mathcal{Y} \vee \neg\mathcal{X}i\mathcal{X}) \wedge (\mathcal{X}i\mathcal{X} \vee \neg\mathcal{X}i\mathcal{X}) \equiv \mathcal{X}a\mathcal{Y} \vee \neg\mathcal{X}i\mathcal{X}.$$

Ponieważ w **B** mamy $\neg\mathcal{X}i\mathcal{X} \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ (przekształcony w KRZ aksjomat (2.27)), otrzymamy również:

$$\mathcal{X}a\mathcal{Y} \vee \neg\mathcal{X}i\mathcal{X} \equiv \mathcal{X}a\mathcal{Y}.$$

■

Lemat 19. *Formuła $g_b(\alpha)$ jest tautologią w klasie modeli M_{I_8} wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tautologią w klasie modeli $\mathsf{M}_{I_{10}}$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że przy ustalonej dziedzinie D i wartościowaniu v dowolna formuła atomowa β jest spełniona w modelu $\mathsf{M}_{I_{10}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g_b(\beta)$ jest spełniona w modelu M_{I_8}. W przypadku atomu o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ funkcja g_b prowadzi do identycznej formuły, a warunki interpretacji I_8 oraz I_{10} są identyczne. Dla $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ z definicji funkcji g_b mamy $g_b(\mathcal{X}a\mathcal{Y}) = \mathcal{X}a\mathcal{Y} \vee \neg\mathcal{X}i\mathcal{X}$, a w interpretacji I_8 oznacza to, że $(v(\mathcal{X}) \subseteq v(\mathcal{Y}) \wedge v(\mathcal{X}) \neq \emptyset)$ lub $v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{X}) = \emptyset$, co z kolei jest równoważne $f(\mathcal{X}) \subseteq f(\mathcal{Y})$. W interpretacji I_{10} formuła $v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\mathcal{X}) \subseteq f(\mathcal{Y})$. ■

Twierdzenie 16. *System **B** jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy* $\mathsf{M}_{I_{10}}$.

Dowód. Poprawność. Niech α będzie dowolną tezą systemu **B**. Na mocy Lematu 16 $g_b(\alpha)$ jest tezą **Stnd**. Na mocy Twierdzenia 13 $g_b(\alpha)$ jest spełniona w każdym modelu z klasy M_{I_8}. W tej sytuacji, na mocy Lematu 19, α jest spełniona w każdym modelu z klasy $\mathsf{M}_{I_{10}}$.

Pełność. Niech teraz α będzie formułą spełnioną w każdym modelu należącym do klasy $\mathsf{M}_{I_{10}}$. Na mocy Lematu 19 $g_b(\alpha)$ jest spełniona w każdym modelu z klasy M_{I_8}. Na mocy Twierdzenia 13 $g_b(\alpha)$ jest tezą **Stnd**. Na mocy Lematu 17 $g_s(g_b(\alpha))$ jest tezą **B**. Lemat 18 gwarantuje, że w systemie **B** $g_s(g_b(\alpha)) \equiv \alpha$, a więc α jest tezą **B**. ■

2.3.3 Hornowski fragment

Hornowski fragment systemu **B**, który oznaczać będziemy **B-horn**, używa tego samego języka, a jako aksjomaty, oprócz podstawień tez klasycznego rachunku zdań, wykorzystuje formuły (2.1), (2.26), (2.3) i (2.4).

Ze względu na to, że w dowodach tez (2.5), (2.28), (2.9) oraz (2.31) nie korzysta się z aksjomatu (2.4), są one tezami systemu **B-horn**. Dzięki aksjomatowi (2.3) w systemie **B-horn**, tak jak i w systemie **B**, obowiązuje odpowiednik Lematu 5.

Dla systemu **B-horn** można określić system aksjomatycznego odrzucania jak w pozostałych systemach będących teoriami hornowskimi. Regułami odrzucania są MP^{-1}, Sub^{-1} oraz $Comp^{-1}$. Aksjomatami odrzuconymi dla systemu są formuły:

$$SiS \wedge PiP \wedge SaM \wedge PaM \rightarrow SiP; \tag{2.53}$$

$$PiP \wedge SaP \rightarrow SiS. \tag{2.54}$$

Definicja 10. *Wyrażeniem odrzuconym systemu* ***B-horn*** *jest każdy z aksjomatów odrzuconych (2.53) i (2.54) oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania:* MP^{-1}, Sub^{-1} *lub* $Comp^{-1}$.

Lemat 20. *Formuły (2.10), (2.2), (2.11), (2.13) oraz*

$$PaS \wedge PiP \to SaP \tag{2.55}$$

są formułami odrzuconymi systemu ***B-horn****.*

Dowód. Dla odrzucenia formuły (2.10) wystarczy zauważyć, że implikacja, w której poprzedniku znajduje się formuła (2.10), a w następniku aksjomat odrzucony (2.53), jest podstawieniem tezy KRZ, a zatem formułę (2.10) można odrzucić, wykorzystując regułę MP^{-1}.

Analogicznie dla odrzucenia formuły (2.2) można wykorzystać fakt, że implikacja z formułą (2.2) jako poprzednikiem i aksjomatem odrzuconym (2.54) jako następnikiem jest podstawieniem tezy KRZ.

Ponieważ formuła (2.1) jest aksjomatem systemu **B-horn**, a formuła (2.10) jest odrzucona w systemie **B-horn**, dla odrzucenia formuły (2.11) w tym systemie można zastosować dowód z Lematu 7.

Odrzucenie formuły (2.55) w systemie **B-horn** jest następujące:

1.	$\vdash MaP \wedge SiS \wedge SaM \to SiP$	teza (2.37)
2.	$\vdash (MaP \wedge SiS \wedge SaM \to SiP) \to$	
	$((PaM \wedge PiP \to MaP) \to$	
	$(SiS \wedge PiP \wedge SaM \wedge PaM \to SiP))$	KRZ
3.	$\vdash (PaM \wedge PiP \to MaP) \to$	
	$(SiS \wedge PiP \wedge SaM \wedge PaM \to SiP)$	MP: 2, 1
4.	$\dashv SiS \wedge PiP \wedge SaM \wedge PaM \to SiP$	a. odrz. (2.54)
5.	$\dashv PaM \wedge PiP \to MaP$	MP^{-1}: 3, 4
	$\dashv PaS \wedge PiP \to SaP$	Sub^{-1}: 5

Odrzucenie formuły (2.13) w systemie **B-horn** jest następujące:

1.	$\dashv PaS \wedge PiP \to SaP$	odrzucenie formuły (2.55)
2.	$\vdash SaP \to (PaS \wedge PiP \to SaP)$	KRZ
	$\dashv SaP$	MP^{-1}: 2, 1

■

Lemat 21. *Każda formuła atomowa języka systemu* ***B-horn*** *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Formuły atomowe o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{X}$ są tezami ze względu na aksjomat (2.1). $\dashv SiS$ oraz $\dashv SaP$ zachodzi na mocy Lematu 20. Pozostałe formuły atomowe z wyjątkiem tych o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{X}$ można odrzucić przy użyciu reguły Sub^{-1}. ■

Lemat 22. *Każda formuła hornowska języka systemu **B-horn** jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Rozpatrzymy osobno następujące przypadki formuł hornowskich: (i) $\neg\alpha$, (ii) $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{X}$, (iii) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$, (iv) $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$, (v) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$, gdzie α jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi.

Dla przypadków (i) i (ii) dowód jest identyczny jak w analogicznych przypadkach Twierdzenia 9 (w przypadku (i) wszystkie formuły są odrzucone, a w przypadku (ii) są tezami).

W przypadku (iii), jeżeli dla pewnych $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ oraz $\beta \in aL(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$ α zawiera $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}i\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}i\mathcal{Y} \wedge \beta$ lub $\mathcal{Y}i\mathcal{Z} \wedge \beta$, to na mocy aksjomatów (2.26) i (2.4), tezy (2.5) oraz Lematu 5, α jest tezą. W przeciwnym przypadku zastosujemy podstawienie e_1, określone następująco: S podstawione jest za $\mathcal{X}$ i każdą zmienną $\mathcal{Y}$, taką że α zawiera element zbioru $aL(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, a P za wszystkie inne zmienne. $e_1(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{SaS$, SaP, PaP, $PiP\}$. Ponieważ formuła (2.1) jest aksjomatem systemu **B-horn**, zachodzi $\vdash SaP \wedge PiP \to e_1(\alpha)$, a więc również

$$\vdash e_1(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}) \to (SaP \wedge PiP \to SiS).$$

Wykorzystując regułę MP^{-1} i aksjomat odrzucony (2.54), otrzymujemy stąd $\dashv e_1(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X})$ i dalej przy użyciu reguły Sub^{-1}: $\dashv \alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$.

Przypadek (iv). Jeżeli α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$, to na podstawie Lematu 5, formuła $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ jest tezą systemu **Łuk**. W przeciwnym przypadku zastosujemy podstawienie e_2, określone następująco: P podstawia się za $\mathcal{Y}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{Z}$, taką że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{Y}$, a S podstawia się za wszystkie inne zmienne występujące w rozważanym wyrażeniu (w tym $\mathcal{X}$). Wtedy $e_2(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{PaP$, SaS, PaS, SiS, PiP, SiP, $PiS\}$. Ze względu na aksjomat (2.1) oraz tezy (2.28), (2.29) i (2.30) mamy w tej sytuacji $\vdash PaS \wedge PiP \to e_2(\alpha)$. Ponieważ $e_2(\mathcal{X}a\mathcal{Y}) = SaP$ zachodzi również jako podstawienie prawa KRZ $\vdash (PaS \wedge PiP \to e_2(\alpha)) \to (e_2(\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}) \to (PaS \wedge PiP \to SaP))$, a zatem także $\vdash e_2(\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}) \to (PaS \wedge PiP \to SaP)$.

Na mocy Lematu 20 mamy $\dashv PaS \wedge PiP \to SaP$, a więc przy użyciu reguły MP^{-1} możemy otrzymać $\dashv e_2(\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y})$, i dalej, na mocy reguły Sub^{-1}, $\dashv \alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$.

W ramach przypadku (v) rozważymy trzy możliwości: (a) α zawiera elementy zbiorów $aL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ oraz $aL(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ (b) nie zachodzi poprzedni przypadek, ale α zawiera element zbioru $aL(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \cup aL(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ i (c) nie zachodzi żaden z wymienionych przypadków.

W przypadku (a) jeżeli α zawiera dowolny atom zbudowany przy użyciu funktora i z $\mathcal{X}$ bądź $\mathcal{Y}$ użytym jako argument lub dla pewnych $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{V}$ oraz $\beta \in aL(\mathcal{Z},\mathcal{X})$ $\mathcal{Z}i\mathcal{V} \wedge \beta$ lub $\mathcal{V}i\mathcal{Z} \wedge \beta$, to rozpatrywana formuła jest tezą. W przeciwnym wypadku zastosujemy podstawienie e_3, określone następująco: S podstawiamy za $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{Z}$, taką że α zawiera element zbioru $aL(\mathcal{Z},\mathcal{X}) \cup aL(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$, P – za pozostałe zmienne. Analogicznie jak w przypadku (iv), formuła $e_3(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{SaS$, SaP, PaP, $PiP\}$, a więc zachodzi $\vdash e_3(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}) \to (PaS \wedge PiP \to SiS)$. Przy użyciu reguły MP^{-1} i aksjomatu odrzuconego (2.54) otrzymamy stąd $\dashv e_3(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y})$, i dalej, przy użyciu reguły Sub^{-1}, $\dashv \alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$.

Przy rozpatrywaniu przypadku (b) przyjmiemy, że α zawiera łańcuch łączący zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$, przy łańcuchu odwrotnym sytuacja jest analogiczna. Jeżeli zatem α zawiera $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}i\mathcal{X}$ lub dla pewnych $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{V}$ oraz $\beta \in aL(\mathcal{Z},\mathcal{X})$, $\mathcal{Z}i\mathcal{V} \wedge \beta$ lub $\mathcal{V}i\mathcal{Z} \wedge \beta$, to rozpatrywana formuła jest tezą. W przeciwnym wypadku użyjemy podstawienia e_4, określonego następująco: S podstawiamy za $\mathcal{X}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{Z}$, taką że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{X}$; P – za pozostałe zmienne, w tym $\mathcal{Y}$. $e_4(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{SaS$, SaP, PaP, $PiP\}$. Mamy więc

$$\vdash e_4(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}) \to (SaP \wedge PiP \to SiP).$$

Ze względu na aksjomat (2.26) wynika stąd

$$\vdash e_4(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}) \to (SaP \wedge PiP \to SiS).$$

Tak jak w przypadku (a) możemy stąd otrzymać $\dashv \alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$.

W przypadku (c), jeżeli α zawiera $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}i\mathcal{X}$ lub dla pewnego $\mathcal{Z}$ łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{X}$ oraz jeden z atomów $\mathcal{Z}i\mathcal{Y}$ lub $\mathcal{Y}i\mathcal{Z}$, lub łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{Y}$ oraz jeden z atomów $\mathcal{Z}i\mathcal{X}$ lub $\mathcal{X}i\mathcal{Z}$, lub dla pewnych $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{V}$ oraz $\beta \in aL(\mathcal{Z},\mathcal{X})$ i $\gamma \in aL(\mathcal{V},\mathcal{Y})$, $\mathcal{Z}i\mathcal{V} \wedge \beta \wedge \gamma$ lub $\mathcal{V}i\mathcal{Z} \wedge \beta \wedge \gamma$, to rozpatrywana formuła jest tezą na mocy aksjomatu (2.4), tezy (2.9) oraz Lematu

5. W przeciwnym wypadku skorzystamy z podstawienia e_5, określonego następująco: S podstawiamy za $\mathcal{X}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{Z}$, taką że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{X}$, P – za $\mathcal{Y}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{V}$, taką że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{Y}$, M – za wszystkie inne zmienne. $e_5(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{SaS$, PaP, MaM, SaM, PaM, SiS, PiP, MiM, SiM, MiS, PiM, $MiP\}$. W związku z tym $\vdash SiS \wedge PiP \wedge SaM \wedge PaM \rightarrow e_5(\alpha)$, a co za tym idzie $\vdash e_5(\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y}) \rightarrow (SiS \wedge PiP \wedge SaM \wedge PaM \rightarrow SiP)$. Przy użyciu reguły MP^{-1} i aksjomatu odrzuconego (2.53) otrzymamy stąd $\dashv e_5(\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y})$ i dalej, przy użyciu reguły Sub^{-1}, $\dashv \alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y}$. ■

Lemat 23. *Aksjomaty odrzucone (2.53) i (2.54) nie są tezami systemu **B-horn**.*

Dowód. Możemy zastosować rozumowanie analogiczne do użytego w dowodzie Lematu 10. W przypadku aksjomatu (2.53) można zastosować wprost klasę modeli $\mathcal{M}_{I_1}$ z tego dowodu. W przypadku aksjomatu odrzuconego (2.54), odpowiednia klasa modeli może być określona następująco: $\mathcal{M}_{I_{11}} = (N_{11}, v, I_{11})$, gdzie dziedzina $N_{11} = \{n_1, n_2\}$, a interpretacja I_{11} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych określona jest przez matryce:

a	n_1	n_2
n_1	1	1
n_2	0	1

i	n_1	n_2
n_1	0	0
n_2	0	1

Aksjomat odrzucony (2.54) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że $v(P) = n_2$, a $v(S) = n_1$. ■

Twierdzenie 17. *Każda formuła języka systemu **B-horn** jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak Twierdzenia 9 z wykorzystaniem Lematu 22 i Lematu 23. ■

2.3.4 Aksjomatyka odrzuceniowa dla systemu B

Do określenia aksjomatycznego odrzucania w systemie **B** wykorzystamy słabą regułę dekompozycji SC^{-1} o schemacie:

$$\frac{\dashv \alpha \rightarrow \beta_i \vee \beta_j, \text{ dla każdych i, j, takich że: } 1 \leqslant i < j \leqslant n}{\dashv \alpha \rightarrow \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_n}, n \geqslant 2, \qquad (2.56)$$

gdzie α jest formułą elementarną, a β_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) są atomami.

Jedyny aksjomat odrzucony przyjmuje postać:

$$MaS \wedge MaP \wedge MaQ \wedge SaR \wedge PaR \wedge RaN \wedge QaN \wedge SiS \wedge PiP \wedge QiQ \to SiP \vee RiQ. \tag{2.57}$$

Definicja 11. *Wyrażeniem odrzuconym systemu **B** nazywamy aksjomat odrzucony (2.57) oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania: MP^{-1}, Sub^{-1} lub SC^{-1}.*

Lemat 24. *Formuły (2.53) oraz (2.54) są odrzucone w systemie **B**.*

Dowód. W dowodzie będziemy aksjomat odrzucony (2.57) oznaczać jako α. Odrzucenie formuły (2.53):

1.	$\vdash (SiS \wedge PiP \wedge SaR \wedge PaR \to SiP) \to \alpha$	KRZ
2.	$\dashv \alpha$	aks. odrzucony (2.57)
3.	$\dashv SiS \wedge PiP \wedge SaR \wedge PaR \to SiP$	MP: 2, 1
	$\dashv SiS \wedge PiP \wedge SaM \wedge PaM \to SiP$	Sub^{-1}: 3

Odrzucenie formuły (2.54):

1.	$\vdash (MiM \wedge MaS \wedge MaP \to SiP) \to$ $((SiS \wedge MaS \to MiM) \to \alpha)$	KRZ
2.	$\vdash MiM \wedge MaS \wedge MaP \to SiP$	teza (2.31)
3.	$\vdash (SiS \wedge MaS \to MiM) \to \alpha$	MP: 1, 2
4.	$\dashv \alpha$	aks. odrzucony (2.57)
5.	$\dashv SiS \wedge MaS \to MiM$	MP^{-1}: 3, 4
	$\dashv PiP \wedge SaP \to SiS$	Sub^{-1}: 5

■

Konsekwencją Lematu 24 jest to, że wszystkie hornowskie formuły odrzucone w systemie **B-horn** są odrzucone w systemie **B**. Pozostałe formuły hornowskie są tezami systemu **B-horn**, a więc i **B**, a zatem każda formuła hornowska systemu **B** jest jego tezą lub wyrażeniem odrzuconym.

W dalszych rozważaniach posłużymy się następującą formułą:

$$\begin{gathered} MaM \wedge MaS \wedge MaP \wedge MaR \wedge MaQ \wedge MaN \wedge SaS \wedge SaR \wedge SaN \wedge \\ PaP \wedge PaR \wedge PaN \wedge RaR \wedge RaN \wedge QaQ \wedge QaN \wedge NaN \wedge \\ SiS \wedge SiR \wedge RiS \wedge SiN \wedge NiS \wedge PiP \wedge PiR \wedge RiP \wedge PiN \wedge NiP \wedge \\ RiR \wedge RiN \wedge NiR \wedge QiQ \wedge QiN \wedge NiQ \wedge NiN \rightarrow \\ SaM \vee SaP \vee SaQ \vee PaM \vee PaS \vee PaQ \vee RaM \vee RaS \vee RaP \vee RaQ \vee \\ QaM \vee QaS \vee QaP \vee QaR \vee NaM \vee NaS \vee NaP \vee NaR \vee NaQ \vee \\ MiM \vee MiS \vee SiM \vee MiP \vee PiM \vee MiR \vee RiM \vee MiQ \vee QiM \vee \\ MiN \vee NiM \vee SiP \vee PiS \vee SiQ \vee QiS \vee PiQ \vee QiP \vee RiQ \vee QiR. \end{gathered} \tag{2.58}$$

Lemat 25. *Formuła (2.58) jest wyrażeniem odrzuconym w systemie **B**.*

Dowód. Pokażemy najpierw, że tezami systemu **B** są implikacje, których poprzednikami są atomy występujące w następniku (2.58), niewystępujące w następniku (2.57), w koniunkcji z atomami występującymi w poprzedniku (2.58), a następnikami – jeden z elementów następnika (2.57), wskazując odpowiednie tezy systemu **B**:

- $SaM : SaM \wedge SiS \wedge MaS \wedge MaP \rightarrow SiP$ (2.36);
- $SaP : SaP \wedge SiS \rightarrow SiP$ (2.28);
- $SaQ : SaQ \wedge SiS \wedge SaR \rightarrow RiQ$ (2.31);
- $PaM : PaM \wedge PiP \wedge MaS \wedge MaP \rightarrow SiP$ (2.36);
- $PaS : PaS \wedge PiP \rightarrow SiP$ (2.29);
- $PaQ : PaQ \wedge PiP \wedge PaR \rightarrow RiQ$ (2.31);
- $RaM : RaM \wedge RiR \wedge MaR \wedge MaQ \rightarrow RiQ$ (2.36);
- $RaS : RaS \wedge PiP \wedge PaR \rightarrow SiP$ (2.38);
- $RaP : RaP \wedge SiS \wedge SaR \rightarrow SiP$ (2.37);
- $RaQ : RaQ \wedge RiR \rightarrow RiQ$ (2.28);
- $QaM : QaM \wedge QiQ \wedge MaR \wedge MaQ \rightarrow RiQ$ (2.36);

- $QaS : QaS \wedge QiQ \wedge SaR \rightarrow RiQ$ (2.38);
- $QaP : QaP \wedge QiQ \wedge PaR \rightarrow RiQ$ (2.38);
- $QaR : QaR \wedge QiQ \rightarrow RiQ$ (2.29);
- $NaM : NaM \wedge NiN \wedge MaS \wedge MaP \rightarrow SiP$ (2.36);
- $NaS : NaS \wedge NiQ \wedge SaR \rightarrow RiQ$ (3.32);
- $NaP : NaP \wedge NiQ \wedge PaR \rightarrow RiQ$ (2.39);
- $NaR : NaR \wedge NiQ \rightarrow RiQ$ (2.4);
- $NaQ : NaQ \wedge NiR \rightarrow RiQ$ (2.4);
- $MiM : MiM \wedge MaS \wedge MaP \rightarrow SiP$ (2.31);
- $MiS : MiS \wedge MaP \rightarrow SiP$ (2.4);
- $SiM : SiM \wedge MaP \rightarrow SiP$ (2.40);
- $MiP : MiP \wedge MaS \rightarrow SiP$ (2.40);
- $PiM : PiM \wedge MaS \rightarrow SiP$ (2.4);
- $MiR : MiR \wedge MaQ \rightarrow RiQ$ (2.4);
- $RiM : RiM \wedge MaQ \rightarrow RiQ$ (2.40);
- $MiQ : MiQ \wedge MaR \rightarrow RiQ$ (2.40);
- $QiM : QiM \wedge MaR \rightarrow RiQ$ (2.4);
- $MiN : MiN \wedge MaS \wedge MaP \rightarrow SiP$ (2.32);
- $NiM : NiM \wedge MaS \wedge MaP \rightarrow SiP$ (2.33);
- $PiS : PiS \rightarrow SiP$ (2.5);
- $SiQ : SiQ \wedge SaR \rightarrow RiQ$ (2.40);
- $QiS : QiS \wedge SaR \rightarrow RiQ$ (2.4);
- $PiQ : PiQ \wedge PaR \rightarrow RiQ$ (2.40);

- $QiP : QiP \wedge PaR \rightarrow RiQ$ (2.4);
- $QiR : QiR \rightarrow RiQ$ (2.5).

Wystarczy teraz pokazać, że tezami **B** są implikacje, których poprzednikami są elementy poprzednika (2.57), a następnikami elementy poprzednika (2.58):

- $MaM, SaS, PaP, RaR, QaQ, NaN$ są tezami systemu **B** (podstawieniami (2.1));
- $MaR : MaS \wedge SaR \rightarrow MaR$ (2.3);
- $MaN : MaQ \wedge QaN \rightarrow MaN$ (2.3);
- $SaN : SaR \wedge RaN \rightarrow SaN$ (2.3);
- $PaN : PaR \wedge RaN \rightarrow PaN$ (2.3);
- $SiR : SaR \wedge SiS \rightarrow SiR$ (2.28);
- $RiS : SaR \wedge SiS \rightarrow RiS$ (2.29);
- $SiN : SaR \wedge RaN \wedge SiS \rightarrow SiN$ (2.37);
- $NiS : SaR \wedge RaN \wedge SiS \rightarrow NiS$ (2.38);
- $PiR : PaR \wedge PiP \rightarrow PiR$ (2.28);
- $RiP : PaR \wedge PiP \rightarrow RiP$ (2.29);
- $PiN : PaR \wedge RaN \wedge PiP \rightarrow PiN$ (2.37);
- $NiP : PaR \wedge RaN \wedge PiP \rightarrow NiP$ (2.38);
- $RiN : PaR \wedge PiP \wedge RaN \rightarrow RiN$ (2.41);
- $NiR : PaR \wedge PiP \wedge RaN \rightarrow NiR$ (2.42);
- $QiN : QaN \wedge QiQ \rightarrow QiN$ (2.28);
- $NiQ : QaN \wedge QiQ \rightarrow NiQ$ (2.29);
- $RiR : SiS \wedge SaR \rightarrow RiR$ (2.30);

- $NiN : SaR \wedge SiS \wedge RaN \rightarrow NiN$ (2.43).

■

Lemat 26. *Każde wyrażenie języka systemu **B** o postaci* $\alpha \rightarrow \beta_1 \vee \beta_2$*, gdzie* α *jest wyrażeniem elementarnym, a* β_1 *oraz* β_2 *atomami, jest tezą lub wyrażeniem odrzuconym systemu.*

Dowód. Rozpatrzymy następujące przypadki interesujących nas formuł, różniące się kształtem następnika: (i) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}a\mathcal{V}$, (ii) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}i\mathcal{V}$, (iii) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}a\mathcal{V}$.

W przypadku (i) rozpatrywana formuła jest tezą systemu, gdy spełniony jest przynajmniej jeden z poniższych warunków:

- tezą jest $\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y}$, tzn. zachodzi jedna z następujących sytuacji: (I) α zawiera atom $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ lub $\mathcal{Y}i\mathcal{X}$, (II) α zawiera $\mathcal{Z}i\mathcal{V}$ lub $\mathcal{V}i\mathcal{Z}$ oraz elementy zbiorów $aL(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$ i $aL(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$, (III) α zawiera atom zbudowany przy użyciu funktora i oraz zmiennej $\mathcal{U}$ oraz elementy zbiorów $aL(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ i $aL(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ bądź (IV) $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{Y}$ są tą samą zmienną i α zawiera atom zbudowany przy użyciu funktora i oraz $\mathcal{X}$ jako przynajmniej jednego z argumentów;

- tezą jest $\alpha \rightarrow \mathcal{Z}a\mathcal{V}$, tzn. $\mathcal{Z}$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{V}$ lub α zawiera łańcuch łączący zmienną $\mathcal{Z}$ ze zmienną $\mathcal{V}$;

- spełnione są jednocześnie dwa warunki: (I) $\mathcal{X}$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{Z}$ lub α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{X}$ oraz (II) $\mathcal{Y}$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{Z}$ lub α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{Y}$.

Pokażemy teraz, że gdy żaden z powyższych warunków nie zachodzi, rozpatrywana formuła jest wyrażeniem odrzuconym. Rozważymy dwie możliwości: (a) zmienna $\mathcal{Z}$ jest różna od $\mathcal{X}$ i od $\mathcal{Y}$ oraz α nie zawiera łańcucha łączącego $\mathcal{Z}$ ani z $\mathcal{X}$ ani z $\mathcal{Y}$ oraz (b) zmienna $\mathcal{Z}$ jest identyczna z jedną ze zmiennych $\mathcal{X}$ albo $\mathcal{Y}$ lub α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{X}$ albo $\mathcal{Y}$ (α nie zawiera obu takich łańcuchów równocześnie, bo formuła byłaby tezą).

W przypadku (a) podstawiamy:

- M za wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera jednocześnie łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}$ oraz łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}$, oraz za $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, o ile α zawiera łańcuch łączący odpowiednio $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$ lub $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$;

- S za $\mathcal{X}$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;
- P za $\mathcal{Y}$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;
- R za $\mathcal{V}$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{V}$, za które nie zostały podstawione M, S ani P;
- N za wszystkie inne zmienne łącznie z $\mathcal{Z}$.

W zależności od zawartości formuły α możemy otrzymać w rezultacie implikację o jednej z następujących postaci:

1. następnik $MiM \vee NaM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, NaN, MaN, $NiN\}$;
2. następnik $MiMlorNaR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, RaR, NaN, MaR, MaN, RaN, RiR, NiN, RiN, $NiR\}$;
3. następnik $SiM \vee NaM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, NaN, MaS, MaN, SaN, SiS, NiN, SiN, $NiS\}$;
4. następnik $SiM \vee NaS$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, NaN, MaS, MaN, SaN, SiS, NiN, SiN, $NiS\}$;
5. następnik $SiM \vee NaR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, RaR, NaN, MaS, MaR, MaN, SaR, SaN, RaN, SiS, RiR, NiN, SiR, RiS, SiN, NiS, RiN, $NiR\}$;
6. następnik $MiP \vee NaM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, NaN, MaP, MaN, PaN, PiP, NiN, PiN, $NiP\}$;
7. następnik $MiP \vee NaP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, NaN, MaP, MaN, PaN, PiP, NiN, PiN, $NiP\}$;
8. następnik $MiP \vee NaR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, RaR, NaN, MaP, MaR, MaN, PaR, PaN, RaN, PiP, RiR, NiN, PiR, RiP, PiN, NiP, RiN, $NiR\}$;
9. następnik $SiP \vee NaM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, PiR PiN, $NiP\}$;

10. następnik $SiP \vee NaS$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, PiR, PiN, $NiP\}$;

11. następnik $SiP \vee NaP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, PiR, PiN, $NiP\}$;

12. następnik $SiP \vee NaR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, RaR, NaN, MaS, MaP, MaR, MaN, SaR, SaN, PaR, PaN, RaN, SiS, PiP, RiR, NiN, SiR, RiS, SiN, NiS, PiR, RiP, PiN, NiP, RiN, $NiR\}$.

Można zauważyć, że dla każdej z wymienionych formuł (oznaczmy je β) implikacja, której poprzednikiem jest β, a następnikiem – formuła (2.58), jest podstawieniem prawa KRZ. Zatem przy użyciu reguły MP^{-1} można odrzucić β, a przy użyciu Sub^{-1} – rozpatrywaną w tym punkcie formułę.

W przypadku (b) przyjmijmy, że zmienną, która jest identyczna z $\mathcal{Z}$ lub połączona z $\mathcal{Z}$ łańcuchem zawartym w α jest $\mathcal{X}$ (ponieważ w systemie **B** mamy równoważność $SiP \equiv PiS$ wystarczy to dla dowolnej formuły rozpatrywanej w tym przypadku). Przy takim założeniu, aby rozpatrywana formuła nie była tezą, zmienne $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{Z}$ muszą być różne od zmiennych $\mathcal{Y}$ oraz $\mathcal{V}$, jak również α nie może zawierać łańcucha łączącego $\mathcal{X}$ lub $\mathcal{Z}$ ani z $\mathcal{Y}$, ani z $\mathcal{V}$.

Podstawimy:

- M za wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera jednocześnie łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}$ oraz łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}$, oraz za $\mathcal{Y}$, o ile α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$;

- P za $\mathcal{V}$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{V}$, za które nie zostało podstawione M;

- R za $\mathcal{Y}$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}$, za które nie zostały podstawione M ani P;

- Q za $\mathcal{X}$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}$ (łącznie z $\mathcal{Z}$),

- N za wszystkie inne zmienne.

W rezultacie, w zależności od zawartości formuły α możemy otrzymać implikację o jednej z następujących postaci:

1. następnik $QiM \vee QaM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, QaQ, NaN, MaQ, MaN, QaN, QiQ, NiN, QiN, $NiQ\}$;

2. następnik $RiM \vee RaP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, QaQ, NaN, MaP, MaQ, MaN, PaN, QaN, PiP, QiQ, NiN, PiN, NiP, QiN, $NiQ\}$;

3. następnik $QiP \vee QaM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, QaQ, NaN, MaP, MaQ, MaN, PaN, QaN, PiP, QiQ, NiN, PiN, NiP, QiN, $NiQ\}$;

4. następnik $QiP \vee QaP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, QaQ, NaN, MaP, MaQ, MaN, PaN, QaN, PiP, QiQ, NiN, PiN, NiP, QiN, $NiQ\}$;

5. następnik $QiR \vee QaM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, RaR, QaQ, NaN, MaR, MaQ, MaN, RaN, QaN, RiR, QiQ, NiN, RiN, NiR, QiN, $NiQ\}$;

6. następnik $QiR \vee QaP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, RaR, QaQ, NaN, MaP, MaR, MaQ, MaN, PaR, PaN, RaN, QaN, PiP, RiR, QiQ, NiN, PiR, RiP, PiN, NiP, RiN, NiR, QiN, $NiQ\}$.

Tak jak w przypadku (a) rozpatrywana formuła jest odrzucona.

W przypadku (ii) rozpatrywana formuła o postaci $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}i\mathcal{V}$ jest tezą systemu, gdy $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$ lub $\alpha \to \mathcal{Z}i\mathcal{V}$. W przeciwnym wypadku rozważymy osobno różne możliwości związane z powiązaniami pomiędzy zmiennymi występującymi w następniku. Dla ich określenia przyjmijmy, że następnik naszej formuły jest alternatywą ustawionych w dowolnej kolejności atomów: $\mathcal{X}_i i \mathcal{X}_j$, gdzie $i \neq j \in \{1, 2\}$ oraz $\mathcal{Y}_k i \mathcal{Y}_l$, gdzie $k \neq l \in \{1, 2\}$. W tej sytuacji rozważymy przypadki, w których tak można dobrać wartość indeksów i, j, k, l, że spełnione są warunki:

(a) $\mathcal{X}_1$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{Y}_1$ lub α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{X}_1$ z $\mathcal{Y}_1$ oraz $\mathcal{X}_2$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{Y}_2$ lub α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{X}_2$ z $\mathcal{Y}_2$;

(b) nie zachodzi (a) i dodatkowo $\mathcal{X}_1$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{Y}_1$ lub α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{X}_1$ z $\mathcal{Y}_1$ oraz $\mathcal{X}_2$ jest tą samą zmienną co Y_2 lub α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Y}_2$ z $\mathcal{X}_2$;

(c) nie zachodzą (a) i (b), ale $\mathcal{X}_1$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{Y}_1$ lub α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{X}_1$ z $\mathcal{Y}_1$;

(d) nie zachodzą (a), (b) ani (c), tzn. zmienne $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ są różne od zmiennych $\mathcal{Y}_1$ i $\mathcal{Y}_2$ i α nie zawiera żadnego łańcucha łączącego $\mathcal{X}_i$ z $\mathcal{Y}_k$ ani $\mathcal{Y}_k$ z $\mathcal{X}_i$ przy dowolnych $i, k \in \{1, 2\}$.

Dla uproszczenia dalszych rozważań przyjmijmy, bez utraty ogólności dzięki symetryczności alternatywy oraz funktora i, że następnik naszej formuły ma postać $\mathcal{X}_1 i \mathcal{X}_2 \vee \mathcal{Y}_1 i \mathcal{Y}_2$.

W przypadku (a) podstawiamy:

- M za wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera jednocześnie łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}_1$ oraz łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}_2$, oraz za $\mathcal{Y}_1$ i $\mathcal{Y}_2$, o ile α zawiera łańcuch łączący odpowiednio $\mathcal{Y}_1$ z $\mathcal{Y}_2$ lub $\mathcal{Y}_2$ z $\mathcal{Y}_1$;

- S za $\mathcal{Y}_1$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}_1$, łącznie z $\mathcal{X}_1$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;

- P za $\mathcal{Y}_2$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}_2$, łącznie z $\mathcal{X}_2$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;

- N za wszystkie inne zmienne.

W rezultacie, w zależności od zawartości formuły α możemy otrzymać implikację o jednej z następujących postaci:

1. następnik $MiM \vee MiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, NaN, MaN, NiN\}$;

2. następnik $MiM \vee MiP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, PaP, NaN, MaP, MaN, PaN, PiP, NiN, PiN, NiP\}$;

3. następnik $MiM \vee SiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, SaS, NaN, MaS, MaN, SaN, SiS, NiN, SiN, NiS\}$;

4. następnik $MiM \vee SiP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, NiS\ PiN, NiP\}$;

5. następnik $MiP \vee MiP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, NaN, MaP, MaN, PaN, PiP, NiN, PiN, $NiP\}$;

6. następnik $MiP \vee SiP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, NiS PiN, $NiP\}$;

7. następnik $SiM \vee SiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, NaN, MaS, MaN, SaN, SiS, NiN, SiN, $NiS\}$;

8. następnik $SiM \vee SiP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, NiS PiN, $NiP\}$;

9. następnik $SiP \vee SiP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, NiS PiN, $NiP\}$;

Tak jak w poprzednich przypadkach wynika stąd, że rozpatrywana formuła jest odrzucona w systemie **B**.

W przypadku (b) podstawiamy:

- M za wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera jednocześnie łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}_1$ oraz łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}_2$, oraz za $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$, o ile α zawiera łańcuch łączący odpowiednio $\mathcal{X}_1$ z $\mathcal{X}_2$ lub $\mathcal{X}_2$ z $\mathcal{X}_1$, jak również wszystkie zmienne $\mathcal{V}$, takie że α zawiera jednocześnie łańcuch łączący $\mathcal{V}$ z $\mathcal{Y}_1$ oraz łączący $\mathcal{V}$ z $\mathcal{Y}_2$, oraz za $\mathcal{Y}_1$ i $\mathcal{Y}_2$, o ile α zawiera łańcuch łączący odpowiednio $\mathcal{Y}_1$ z $\mathcal{Y}_2$ lub $\mathcal{Y}_2$ z $\mathcal{Y}_1$;

- S za $\mathcal{Y}_1$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}_1$, łącznie z $\mathcal{X}_1$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;

- P za $\mathcal{X}_2$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}_2$, łącznie z $\mathcal{Y}_2$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;

- N za wszystkie inne zmienne.

W rezultacie, w zależności od zawartości formuły α możemy otrzymać implikację o jednej z następujących postaci:

1. następnik $MiM \vee MiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, NaN, MaN, $NiN\}$;

2. następnik $MiP \vee MiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, NaN, MaP, MaN, PaN, PiP, NiN, PiN, $NiP\}$;

3. następnik $MiM \vee SiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, NaN, MaS, MaN, SaN, SiS, NiN, SiN, $NiS\}$;

4. następnik $MiP \vee SiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, NiS PiN, $NiP\}$;

5. następnik $MiP \vee MiP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, NaN, MaP, MaN, PaN, PiP, NiN, PiN, $NiP\}$;

6. następnik $MiP \vee SiP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, NiS PiN, $NiP\}$;

7. następnik $SiM \vee SiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, NaN, MaS, MaN, SaN, SiS, NiN, SiN, $NiS\}$;

8. następnik $SiP \vee SiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, NiS PiN, $NiP\}$;

9. następnik $SiP \vee SiP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, NaN, MaS, MaP, MaN, SaN, PaN, SiS, PiP, NiN, SiN, NiS PiN, $NiP\}$;

Znowu, tak jak w poprzednich przypadkach, wynika stąd, że rozpatrywana formuła jest odrzucona w systemie **B**.

W przypadku (c) podstawiamy:

- M za wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera jednocześnie łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}_1$ oraz łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}_2$, oraz za $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$, o ile α zawiera łańcuch łączący odpowiednio $\mathcal{X}_1$ z $\mathcal{X}_2$ lub $\mathcal{X}_2$ z $\mathcal{X}_1$, jak również wszystkie zmienne $\mathcal{V}$, takie że α zawiera jednocześnie łańcuch łączący $\mathcal{V}$ z $\mathcal{Y}_1$ oraz łączący $\mathcal{V}$ z $\mathcal{Y}_2$, oraz za $\mathcal{Y}_1$ i $\mathcal{Y}_2$, o ile α zawiera łańcuch łączący odpowiednio $\mathcal{Y}_1$ z $\mathcal{Y}_2$ lub $\mathcal{Y}_2$ z $\mathcal{Y}_1$;

- Q za $\mathcal{Y}_1$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}_1$, łącznie z $\mathcal{X}_1$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;

- P za $\mathcal{X}_2$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}_2$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;
- R za $\mathcal{Y}_2$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}_2$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;
- N za wszystkie inne zmienne.

W rezultacie, w zależności od zawartości formuły α możemy otrzymać implikację o jednej z następujących postaci:

1. następnik $MiM \vee MiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, NaN, MaN, NiN\}$;
2. następnik $MiM \vee MiR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, RaR, NaN, MaR, MaN, RaN, RiR, NiN, RiN, NiR\}$;
3. następnik $MiP \vee MiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, PaP, NaN, MaP, MaN, PaN, PiP, NiN, PiN, NiP\}$;
4. następnik $MiP \vee MiR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, RaR, PaP, NaN, MaP, MaR, MaN, PaR, RaN, PaN, RaN, PiP, RiR, NiN, PiR, RiP\ PiN, NiP\ RiN, NiR\}$;
5. następnik $MiM \vee QiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, QaQ, NaN, MaQ, MaN, QaN, QiQ, NiN, QiN, NiQ\}$;
6. następnik $MiM \vee QiR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, RaR, QaQ, NaN, MaQ, MaR, MaN, RaN, QaN, QiQ, RiR, NiN, RiN, NiR, QiN, NiQ\}$;
7. następnik $MiP \vee QiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, PaP, QaQ, NaN, MaQ, MaP, MaN, PaN, QaN, QiQ, PiP, NiN, PiN, NiP, QiN, NiQ\}$;
8. następnik $MiP \vee QiR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, PaP, RaR, QaQ, NaN, MaP, MaR, MaQ, MaN, PaR, PaN, RaN, QaN, PiP, RiR, QiQ, NiN, PiR, RiP, PiN, NiP, RiN, NiR, QiN, NiQ\}$;
9. następnik $QiM \vee QiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM, QaQ, NaN, MaQ, MaN, QaN, QiQ, NiN, QiN, NiQ\}$;

10. następnik $QiM \vee QiR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, RaR, QaQ, NaN, MaQ, MaR, MaN, RaN, QaN, QiQ, RiR, NiN, RiN, NiR, QiN, $NiQ\}$;

11. następnik $QiP \vee QiM$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, QaQ, NaN, MaQ, MaP, MaN, PaN, QaN, QiQ, PiP, NiN, PiN, NiP, QiN, $NiQ\}$;

12. następnik $QiP \vee QiR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, PaP, RaR, QaQ, NaN, MaP, MaR, MaQ, MaN, PaR, PaN, RaN, QaN, PiP, RiR, QiQ, NiN, PiR, RiP, PiN, NiP, RiN, NiR, QiN, $NiQ\}$;

Znowu, tak jak w poprzednich przypadkach, wynika stąd, że rozpatrywana formuła jest odrzucona w systemie **B**.

W przypadku (d) podstawiamy:

- M za wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera jednocześnie łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}_1$ oraz łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}_2$, oraz za $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$, o ile α zawiera łańcuch łączący odpowiednio $\mathcal{X}_1$ z $\mathcal{X}_2$ lub $\mathcal{X}_2$ z $\mathcal{X}_1$, jak również wszystkie zmienne $\mathcal{V}$ takie, że α zawiera jednocześnie łańcuch łączący $\mathcal{V}$ z $\mathcal{Y}_1$ oraz łączący $\mathcal{V}$ z $\mathcal{Y}_2$ oraz za $\mathcal{Y}_1$ i $\mathcal{Y}_2$, o ile α zawiera łańcuch łączący odpowiednio $\mathcal{Y}_1$ z $\mathcal{Y}_2$ lub $\mathcal{Y}_2$ z $\mathcal{Y}_1$;

- S za $\mathcal{X}_1$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}_1$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;

- P za $\mathcal{X}_2$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{X}_2$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;

- Q za $\mathcal{Y}_1$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}_1$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;

- R za $\mathcal{Y}_2$ oraz wszystkie zmienne $\mathcal{U}$, takie że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}_2$, gdy nie została za nie podstawiona zmienna M;

- N za wszystkie inne zmienne.

W wyrażeniu otrzymanym przez podstawienie z α nie może być atomów QaS, QaP, RaS ani QaP oraz par atomów SaQ i SaR oraz PaQ i PaR. W związku z tym zmienne P, Q, R, S mogą w tym wyrażeniu wystąpić jedynie w następujących kombinacjach atomów zbudowanych przy użyciu funktora a:

1. brak atomu z tymi zmiennymi;
2. SaQ oraz PaR;
3. SaQ;
4. PaR;
5. SaR oraz PaQ;
6. SaR;
7. PaQ;
8. SaR oraz PaR;
9. SaQ oraz PaQ.

W przypadkach 1 – 4 podstawimy dalej S za Q oraz P za R, a w przypadkach 5 – 7 S za R oraz P za Q. W rezultacie tych podstawień otrzymamy jedną z formuł wymienionych w punkcie (a), a więc wyjściowa formuła jest odrzucona. Pozostaje więc do rozpatrzenia przypadek 8, gdyż przypadek 9 różni się od niego tylko kształtem zmiennych. W przypadku tym, w zależności od zawartości formuły α, możemy otrzymać implikację o jednej z następujących postaci:

- następnik $SiP \vee MiR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, SaS, PaP, RaR, NaN, MaS, MaP, MaR, MaN, SaR SaN, PaR, PaN, RaN, SiS, PiP, RiR, NiN, SiR, RiS, SiN, NiS, PiR, RiP, PiN, NiP, RiN, $NiR\}$;
- następnik $SiP \vee QiR$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{MaM$, MaS, MaP, MaR, MaQ, MaN, SaS, SaR, SaN, PaP, PaR, PaN, RaR, RaN, QaQ, QaN, NaN, SiS, SiR, RiS, SiN, NiS, PiP, PiR, RiP, PiN, NiP, RiR, RiN, NiR, QiQ, QiN, $NiQ\}$

Po raz kolejny – tak jak w poprzednich przypadkach – wynika stąd, że wyjściowa formuła jest odrzucona w systemie **B**.

W przypadku (iii) rozpatrywana formuła o postaci $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}a\mathcal{V}$ jest tezą systemu gdy $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ lub $\alpha \to \mathcal{Z}a\mathcal{V}$. W przeciwnym przypadku rozważymy dwie możliwości: (a) $\mathcal{Y}$ oraz $\mathcal{V}$ są tą samą zmienną lub α zawiera łańcuchy łączące $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}$ z $\mathcal{Y}$, oraz (b) $\mathcal{Y}$ jest różne od $\mathcal{V}$ oraz α nie zawiera łańcucha łączącego $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{V}$.

W przypadku (a) podstawiamy:

- S za $\mathcal{Y}$, $\mathcal{V}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{U}$, taką że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}$;
- N za wszystkie inne zmienne.

W rezultacie zastosowania podstawienia do rozpatrywanej formuły otrzymamy implikację, której poprzednikiem jest koniunkcja atomów ze zbioru $\{NaN, SaS, SaN, NiN, SiS, NiS, SiN\}$, a następnikiem wyrażenie $NaS \vee NaS$. Implikacja z taką formułą jako poprzednikiem i formułą (2.58) jako następnikiem jest podstawieniem prawa KRZ, a więc wyjściowa formuła jest odrzucona.

W przypadku (b) podstawiamy:

- P za $\mathcal{Y}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{U}$, taką że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{Y}$;
- Q za $\mathcal{V}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{U}$, taką że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{U}$ z $\mathcal{V}$;
- N za wszystkie inne zmienne.

W rezultacie podstawienia w poprzedniku implikacji nie wystąpią atomy NaP, NaQ, PaQ ani QaP. W zależności od zawartości formuły α możemy otrzymać implikację o jednej z następujących postaci:

1. następnik $NaP \vee NaP$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{PaP$, NaN, PaN, PiP, NiN PiN, $NiP\}$;
2. następnik $NaP \vee NaQ$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{PaP$, QaQ, NaN, PaN, QaN, PiP, QiQ, NiN, QiP, PiQ, QiN, NiQ, RiN, $NiR\}$;
3. następnik $NaP \vee PaQ$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{PaP$, QaQ, NaN, PaN, QaN, PiP, QiQ, NiN, QiP, PiQ, QiN, NiQ, RiN, $NiR\}$;

4. następnik $QaP \vee NaQ$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{PaP$, QaQ, NaN, PaN, QaN, PiP, QiQ, NiN, QiP, PiQ, QiN, NiQ, RiN, $NiR\}$;

5. następnik $QaP \vee PaQ$, poprzednik zawierający elementy zbioru $\{PaP$, QaQ, NaN, PaN, QaN, PiP, QiQ, NiN, QiP, PiQ, QiN, NiQ, RiN, $NiR\}$.

Także w tym wypadku – tak jak w poprzednich przypadkach – wynika stąd, że rozpatrywana formuła jest odrzucona w systemie **B**. ■

Lemat 27. *Jeżeli wyrażenie o postaci $\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3$, gdzie α jest wyrażeniem elementarnym, a β_1, β_2 oraz β_3 są atomami, jest tezą systemu **B**, to tezą jest przynajmniej jedno z wyrażeń $\alpha \to \beta_i \vee \beta_j$, gdzie $i, j \in 1, 2, 3$.*

Dowód. Stosując Twierdzenie 5 do systemu **B**, możemy stwierdzić, że każda teza systemu daje się wyprowadzić z aksjomatów przy użyciu reguły podstawiania za zmienne nazwowe, reguły Rez_f, dodawania elementów do poprzednika i następnika oraz eliminację tautologicznej koniunkcji i alternatywy.

Jeżeli formuła byłaby otrzymana w ten ostatni sposób, tzn. poprzez eliminację podwójnego elementu w następniku, to jakaś inna formuła, która znalazłaby się w wyprowadzeniu, wcześniej musiałaby spełniać warunki naszego lematu i w związku z tym możemy tę ewentualność pominąć, zajmując się pierwszą w wyprowadzeniu formułą spełniającą te warunki.

Załóżmy, że wyrażenie $\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2 \vee \beta_3$ jest tezą **B**. W tej sytuacji daje się je otrzymać bądź przez dodanie elementu do następnika do innej tezy **B** i w tym wypadku oczywiście tezą jest przynajmniej jedno z wyrażeń $\alpha \to \beta_i \vee \beta_j$, gdzie $i, j \in 1, 2, 3$, bądź przy użyciu reguły Rez_f z przesłanek:

(1) $\alpha_1 \to \gamma_1 \vee \gamma_2$ oraz

(2) $\alpha_2 \to \delta_1 \vee \delta_2$,

gdzie α_1 i α_2 są wyrażeniami elementarnymi, a γ_1, γ_2, δ_1 oraz δ_2 atomami, przy czym α_1 może być 'puste' i wtedy przesłanka (1) przyjmuje postać $\gamma_1 \vee \gamma_2$. Jeżeli przy tym tezą jest jedno z wyrażeń: $\alpha_1 \to \gamma_1$, $\alpha_1 \to \gamma_2$, $\alpha_2 \to \delta_1$ lub $\alpha_2 \to \delta_2$, to tezą jest również jedno z wyrażeń $\alpha \to \beta_i \vee \beta_j$, gdzie $i, j \in 1, 2, 3$. W przeciwnym wypadku, jak pokazaliśmy w dowodzie Lematu 26, przesłanki reguły Rez_f muszą przyjąć postać odpowiednio:

(1) $\alpha_1 \to \mathcal{X}_1 i \mathcal{Y}_1 \vee \mathcal{Z}_1 a \mathcal{V}_1$ oraz

(2) $\alpha_2 \to \mathcal{X}_2 i \mathcal{Y}_2 \vee \mathcal{Z}_2 a \mathcal{V}_2$,

przy czym dla każdego $i \in \{1, 2\}$ zachodzi jeden z warunków: (i) $\mathcal{X}_i = \mathcal{Y}_i =$

$\mathcal{Z}_i$, (ii) $\mathcal{X}_i = \mathcal{Y}_i$ oraz α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}_i$ z $\mathcal{X}_i$, (iii) $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Z}_i$ oraz α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}_i$ z $\mathcal{X}_i$ (ze względu na równoważność $SiP \equiv PiS$ zmienne $\mathcal{X}_i$ i $\mathcal{Y}_i$ mogą być zamienione miejscami), (iv) α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}_i$ z $\mathcal{X}_i$ oraz łańcuch łączący $\mathcal{Z}_i$ z $\mathcal{Y}_i$.

Aby reguła Rez_f mogła zostać zastosowana α_2, musi zawierać jeden z atomów: $\mathcal{X}_1 i \mathcal{Y}_1$ lub $\mathcal{Z}_1 a \mathcal{V}_1$, który nie pojawi się w poprzedniku formuły otrzymanej przy użyciu reguły. Jeżeli ten atom nie jest częścią łańcucha łączącego $\mathcal{Z}_2$ z $\mathcal{X}_2$ (ani w przypadku (iv) łańcucha łączącego $\mathcal{Z}_2$ z $\mathcal{Y}_2$), to jako rezultat wykorzystania reguły otrzymamy formułę

$$\alpha \rightarrow \mathcal{X}_2 i \mathcal{Y}_2 \vee \mathcal{Z}_2 a \mathcal{V}_2 \vee \gamma_i, i \in \{1, 2\},$$

w której α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}_2$ z $\mathcal{X}_2$ (a w przypadku (iv) również łańcuch łączący $\mathcal{Z}_2$ z $\mathcal{Y}_2$). Wtedy tezą jest również formuła

$$\alpha \rightarrow \mathcal{X}_2 i \mathcal{Y}_2 \vee \mathcal{Z}_2 a \mathcal{V}_2.$$

Rozpatrzmy teraz sytuację, w której atomem łączącym następnik (1) z poprzednikiem (2) jest $\mathcal{Z}_1 a \mathcal{V}_1$ i jest on częścią łańcucha łączącego $\mathcal{Z}_2$ z $\mathcal{X}_2$ (lub w przypadku (iv) łańcucha łączącego $\mathcal{Z}_2$ z $\mathcal{Y}_2$). Zachodzić może jedna z możliwości: (a) $\mathcal{Z}_1$ jest tą samą zmienną co $\mathcal{Z}_2$ – oznaczymy ją $\mathcal{Z}$ – lub (b) $\mathcal{Z}_1$ jest różne od $\mathcal{Z}_2$. W przypadku (a) z zastosowania reguły otrzymamy wyrażenie

$$\alpha \rightarrow \mathcal{X}_1 i \mathcal{Y}_1 \vee \mathcal{X}_2 i \mathcal{Y}_2 \vee \mathcal{Z} a \mathcal{V}_2,$$

gdzie α zawiera α_1, a więc tezą jest

$$\alpha \rightarrow \mathcal{X}_1 i \mathcal{Y}_1 \vee \mathcal{Z} a \mathcal{V}_2.$$

W przypadku (b) otrzymamy

$$\alpha \rightarrow \mathcal{X}_1 i \mathcal{Y}_1 \vee \mathcal{X}_2 i \mathcal{Y}_2 \vee \mathcal{Z}_2 a \mathcal{V}_2,$$

gdzie α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}_2$ z $\mathcal{Z}_1$ oraz α_1 (która zawiera odpowiednie łańcuchy łączące $\mathcal{Z}_1$ z X_1 i/lub $\mathcal{Y}_1$). W związku z tym tezą musi być

$$\alpha \rightarrow \mathcal{X}_1 i \mathcal{Y}_1 \vee \mathcal{Z}_2 a \mathcal{V}_2.$$

Zatem we wszystkich możliwych przypadkach z przyjętego założenia wynika, że tezą jest jedno z wyrażeń $\alpha \rightarrow \beta_i \vee \beta_j$, gdzie $i, j \in 1, 2, 3$. ■

Lemat 28. *Aksjomat odrzucony (2.57) nie jest tezą systemu **B**.*

Dowód. Odpowiednia klasa modeli $\mathcal{M}_{I_{12}}$ określona jest przez interpretację, która dla funktorów zdaniowych jest klasyczna, a dla atomów zdefiniowana jest przez matryce:

a	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
n_1	1	1	1	1	1	1
n_2	0	1	0	1	0	1
n_3	0	0	1	1	0	1
n_4	0	0	0	1	0	1
n_5	0	0	0	0	1	1
n_6	0	0	0	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
n_1	0	0	0	0	0	0
n_2	0	1	0	1	0	1
n_3	0	0	1	1	0	1
n_4	0	1	1	1	0	1
n_5	0	0	0	0	1	1
n_6	0	1	1	1	1	1

Sprawdzenie, że aksjomaty **B** są tautologiami w klasie modeli $M_{I_{12}}$, jest rutynowe. Aksjomat odrzucony (2.57) jest fałszywy w modelu przy wartościowaniu v, takim że: $v(M) = n_1$, $v(S) = n_2$, $v(P) = n_4$, $v(R) = n_3$, $v(Q) = n_5$ a $v(N) = n_6$. ■

Twierdzenie 18. *Każda formuła języka systemu **B** jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 9, wykorzystać trzeba Lematy 26, 27 oraz 28. ■

2.3.5 Niezależność aksjomatów

Twierdzenie 19. *Aksjomaty systemu **B** są niezależne.*

Dowód. Tak jak w dotychczasowych dowodach twierdzeń o niezależności aksjomatyzacji dla każdego aksjomatu, pokażemy klasę modeli, w której pozostałe aksjomaty są tautologiami, a rozpatrywany aksjomat nie jest. We wszystkich przypadkach interpretacja funktorów rachunku zdań jest klasyczna.

Dla aksjomatów (2.1), (2.3) i (2.4) można zastosować odpowiednio klasy modeli $\mathcal{M}_{I_3}$, $\mathcal{M}_{I_5}$ i $\mathcal{M}_{I_6}$ z dowodu Twierdzenia 11, z wykorzystaniem dla wykazania nietautologiczności wartościowań takich samych jak w tamtym dowodzie.

Aksjomat (2.26).

Interpretacja I_{13}:

a	n_1	n_2
n_1	1	1
n_2	0	1

i	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	1	1

Aksjomat (2.26) jest fałszywy przy wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$.

Aksjomat (2.27).

Interpretacja I_{14}:

a	n_1	n_2
n_1	1	0
n_2	0	1

i	n_1	n_2
n_1	0	0
n_2	0	1

Aksjomat (2.27) jest fałszywy przy wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$. ■

Rozdział 3

Systemy z funktorem ε Leśniewskiego

W niniejszym rozdziale zajmiemy się przedstawieniem systemów skonstruowanych w stylu Łukasiewicza, obejmujących wyłącznie funktory spoza sylogistyki lub łączących funktory sylogistyki z innymi funktorami. Większość rozpatrywanych funktorów pochodzi z Ontologii Leśniewskiego, pozostałe są funktorami obecnymi w języku naturalnym. Zostały one włączone do rachunku nazw w pracach zmierzających ku ujęciu w ramach sylogistyki jak największej części rozumowań zdroworozsądkowych (zob. np. [39]).

W pierwszym podrozdziale zajmiemy się systemem, w którym jedynym funktorem jest ε Leśniewskiego. System ten został zaprezentowany przez A. Ishimoto [16]. Tu uzupełniamy go o część odrzuceniową.

W ujęciu Leśniewskiego dodatkowe funktory mogą być dołączane do systemu poprzez definicje. Jednakże w większości definicji w Ontologii występują kwantyfikatory. W systemach bezkwantyfikatorowych funktory te muszą być więc wprowadzone poprzez dodatkowe aksjomaty. W kolejnych podrozdziałach wzbogacamy system o funktor *sol* oraz o funktory sylogistyki a i i. System rozszerzony o funktor *sol* jest interesujący, gdyż mimo iż dodany jest tylko jeden funktor, który może się wydawać mało ekspresyjny, system różni się od systemu Ishimoty pod względem klasy modeli potrzebnych do ustalenia procedury rozstrzygania określonej w dalszej części pracy.

W przypadku rozszerzenia o funktory sylogistyki otrzymujemy system, w którym można zdefiniować funktor *sol* oraz większość innych funktorów Ontologii, jak również funktory *is_the* i *is_a* . Część rezultatów dotycząca tego systemu została zaprezentowana w artykule [25]. W ostatnim podrozdziale pokazujemy relację pomiędzy przedstawionymi systemami a oryginalnym systemem Ontologii Leśniewskiego.

Podobne podejście – konstrukcję aksjomatycznego systemu bezkwantyfikatorowego dla funktorów rachunku nazw prezentuje Pietruszczak w pracy [42]. Podejście prezentowane w niniejszej pracy różni się tym, że dla przedstawionych systemów pokazujemy również aksjomatykę odrzuceniową i na niej opieramy argumentację dotyczącą adekwatności aksjomatyzacji oraz dowody pełności w stosunku do odpowiednich klas modeli. Inne są też szczegóły techniczne (dobór reguł i symboli pierwotnych). W pracy [42] przedstawiony jest cały szereg aksjomatyzacji różniących się doborem symboli pierwotnych. W naszych rozważaniach ograniczamy się do analizy kilku wybranych przykładów.

3.1 Podstawowa bezkwantyfikatorowa Ontologia Leśniewskiego

3.1.1 System aksjomatyczny

W systemie podstawowym bezkwantyfikatorowej Ontologii Leśniewskiego (**OntP**) jedynym terminem pierwotnym jest ε. Aksjomatami są wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań w języku oraz formuły:

$$S\varepsilon P \to S\varepsilon S, \tag{3.1}$$

$$S\varepsilon M \wedge M\varepsilon P \to S\varepsilon P, \tag{3.2}$$

$$S\varepsilon P \wedge P\varepsilon M \to P\varepsilon S. \tag{3.3}$$

Definicja 12. *Niech dla dowolnych zmiennych $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ $\varepsilon L_1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ będzie najmniejszym zbiorem formuł, takim że:*

1. $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y} \in \varepsilon L_1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$;

2. *jeżeli dla pewnego $\mathcal{Z}$ $\alpha \in \varepsilon L_1(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ i $\beta \in \varepsilon L_1(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$, to $\alpha \wedge \beta \in \varepsilon L_1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$;*

3. *jeżeli $\alpha \in \varepsilon L_1(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, to dla dowolnego $\mathcal{V}$ $\alpha \wedge \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{V} \in \varepsilon L_1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.*

Elementy zbioru $\varepsilon L_1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ w rozważaniach dotyczących systemu **OntP** nazywać będziemy ε-łańcuchami łączącymi zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$. ε-łańcuchem łączącym zmienną $\mathcal{X}_1$ ze zmienną $\mathcal{X}_n$ jest więc każda formuła o postaci: $\mathcal{X}_1\varepsilon\mathcal{X}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{X}_{n-1}\varepsilon\mathcal{X}_n$, gdzie $n \geqslant 2$, ale również np. $\mathcal{X}_2\varepsilon\mathcal{X}_1 \wedge \mathcal{X}_1\varepsilon\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}_1\varepsilon\mathcal{X}_n$. Definicja zbioru łańcuchów jest dobrana tak, aby zagwarantować zachodzenie następującego lematu i aby wymieniony w nim warunek był warunkiem koniecznym.

Lemat 29. *Jeżeli α zawiera element zbioru $\varepsilon L_1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, to $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ jest tezą systemu **OntP**.*

Dowód. Dowód przez indukcję ze względu na konstrukcję ε-łańcucha zawartego w α. Wystarczy zauważyć, że punkty 2 i 3 definicji odpowiadają aksjomatom (3.2) i (3.3). ■

3.1.2 Aksjomatyczny system odrzucania

Aksjomatyczny system odrzucania dla systemu **OntP** określony jest przy użyciu reguł odrzucania MP^{-1}, Sub^{-1} oraz $Comp^{-1}$.

Aksjomatem odrzuconym dla systemu **OntP** jest następująca formuła:

$$P\varepsilon M \wedge S\varepsilon M \to S\varepsilon P \tag{3.4}$$

Definicja 13. *Wyrażeniem odrzuconym systemu **OntP** jest aksjomat odrzucony oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania MP^{-1}, Sub^{-1} lub $Comp^{-1}$.*

Lemat 30. *W systemie **OntP** odrzucone są formuły:*

$$S\varepsilon P \to P\varepsilon S, \tag{3.5}$$

$$\neg S\varepsilon S, \tag{3.6}$$

$$S\varepsilon P \to P\varepsilon P \tag{3.7}$$

oraz

$$P\varepsilon P \tag{3.8}$$

Dowód.
Odrzucenie formuły (3.5):

1.	$\vdash (S\varepsilon M \wedge M\varepsilon P \to S\varepsilon P) \to$ $((M\varepsilon P \to P\varepsilon M) \to (S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \to S\varepsilon P))$	KRZ
2	$\vdash S\varepsilon M \wedge M\varepsilon P \to S\varepsilon P$	aksjomat (3.2)
3.	$\vdash (M\varepsilon P \to P\varepsilon M) \to (S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \to S\varepsilon P)$	MP 1, 2
4.	$\dashv S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \to S\varepsilon P$	aks. odrzucony (3.4)
5.	$\dashv M\varepsilon P \to P\varepsilon M$	MP^{-1}: 3, 4
	$\dashv S\varepsilon P \to P\varepsilon S$	Sub^{-1}: 5

Odrzucenie formuły (3.6):

1.	$\vdash (S\varepsilon P \to S\varepsilon S) \to$ $((S\varepsilon S \to P\varepsilon S) \to (S\varepsilon P \to P\varepsilon S))$	KRZ
2	$\vdash S\varepsilon P \to S\varepsilon S$	aksjomat (3.1)
3.	$\vdash (S\varepsilon S \to P\varepsilon S) \to (S\varepsilon P \to P\varepsilon S)$	MP: 1, 2
4.	$\dashv S\varepsilon P \to P\varepsilon S$	formuła odrzucona (3.5)
5.	$\dashv S\varepsilon S \to P\varepsilon S$	MP^{-1}: 3, 4
6.	$\vdash \neg S\varepsilon S \to (S\varepsilon S \to P\varepsilon S)$	KRZ
	$\dashv \neg S\varepsilon S$	MP^{-1}: 6, 5

Odrzucenie formuły (3.7):

1.	$\vdash (S\varepsilon P \wedge P\varepsilon P \to P\varepsilon S) \to$ $((S\varepsilon P \to P\varepsilon P) \to (S\varepsilon P \to P\varepsilon S))$	KRZ
2	$\vdash S\varepsilon P \wedge P\varepsilon P \to P\varepsilon S$	podst. aksjomatu (3.3)
3.	$\vdash (S\varepsilon P \to P\varepsilon P) \to (S\varepsilon P \to P\varepsilon S)$	MP 1, 2
4.	$\dashv S\varepsilon P \to P\varepsilon S$	formuła odrzucona (3.5)
	$\dashv S\varepsilon P \to P\varepsilon P$	MP^{-1}: 3, 4

Odrzucenie formuły (3.8):

1.	$\dashv S\varepsilon P \to P\varepsilon P$	odrzucenie formuły (3.7)
2.	$\vdash P\varepsilon P \to (S\varepsilon P \to P\varepsilon P)$ KRZ	
	$\dashv P\varepsilon P$	MP^{-1}: 2, 1

■

Lemat 31. *Każda formuła atomowa języka systemu **OntP** jest wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Na mocy Lematu 30 mamy $\dashv P\varepsilon P$. Użycie reguły Sub^{-1} pozwala odrzucić każde inne wyrażenie atomowe. ■

Lemat 32. *Każda formuła hornowska języka systemu **OntP** jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Rozważymy osobno każdą z możliwych postaci formuły hornowskiej języka systemu, różną od formuł atomowych, które są odrzucone na mocy Lematu 31: (i) $\neg\alpha$, (ii) $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}$, (iii) $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$, gdzie α jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi.

W przypadku (i) po podstawieniu zmiennej P za wszystkie zmienne otrzymamy formułę równoważną $\neg P\varepsilon P$. Na mocy Lematu 30 formuła ta jest odrzucona, a więc wykorzystując regułę Sub^{-1}, możemy również odrzucić wyjściową formułę $\neg\alpha$.

W przypadku (ii) jeżeli dla pewnej zmiennej $\mathcal{Y}$ α zawiera atom $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$, to na mocy (3.1) rozpatrywana formuła jest tezą systemu **OntP**. W przeciwnym przypadku możemy zastosować podstawienie e_1, takie że S podstawione jest za $\mathcal{X}$, a P za wszystkie inne zmienne. $e_1(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{P\varepsilon S, P\varepsilon P\}$. Zachodzi więc na mocy aksjomatu (3.1) $\vdash P\varepsilon S \to e_1(\alpha)$. Ponieważ $e_1(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}) = S\varepsilon S$, mamy również $\vdash e_1(\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}) \to (P\varepsilon S \to S\varepsilon S)$. Wykorzystując regułę MP^{-1} oraz $\dashv P\varepsilon S \to S\varepsilon S$ z Lematu 30, otrzymamy $\dashv e_1(\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X})$, i dalej, z użyciem reguły Sub^{-1}, $\dashv \alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}$.

W przypadku (iii) jeżeli α zawiera ε-łańcuch łączący $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$, to na mocy Lematu 29 rozpatrywana formuła jest tezą. W przeciwnym wypadku rozpatrzymy dwie możliwości: (a) α nie zawiera atomu $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Z}$ dla żadnego $\mathcal{Z}$ i (b) α zawiera atom $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Z}$ dla pewnego $\mathcal{Z}$.

W przypadku (a) wykorzystamy podstawienie e_1 określone dla przypadku (ii). $e_1(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{P\varepsilon S, P\varepsilon P\}$, a $e_1(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}) = S\varepsilon P$. Mamy zatem $\vdash e_1(\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}) \to (P\varepsilon S \to S\varepsilon P)$ i w konsekwencji $\dashv \alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ ($P\varepsilon S \to S\varepsilon P$ jest bowiem formułą (3.5) odrzuconą na mocy Lematu 30).

W przypadku (b) zastosujemy podstawienie e_2, w którym podstawiamy S za $\mathcal{X}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{Z}$, taką że α zawiera $\varepsilon L_1(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$; M za zmienne $\mathcal{Z}$, takie że α zawiera element zbioru $\varepsilon L_1(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$, za które nie zostało podstawione S; P za wszystkie pozostałe zmienne. Ponieważ α nie zawiera ε-łańcucha łączącego $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$ ani $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$, $e_2(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{S\varepsilon M, P\varepsilon M, S\varepsilon S, P\varepsilon P\}$, zatem $\vdash (S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M) \to e_2(\alpha)$. Ponieważ $e_2(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}) = S\varepsilon P$, mamy także $\vdash e_2(\alpha\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}) \to (S\varepsilon M \wedge P\varepsilon\mathcal{M} \to S\varepsilon P)$. Używając reguły MP^{-1} i aksjomatu odrzuconego otrzymamy $\dashv e_2(\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y})$, a dalej, przy użyciu reguły Sub^{-1}, $\dashv \alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$. ■

Lemat 33. *Aksjomat odrzucony (3.4) nie jest tezą systemu* ***OntP****.*

Dowód. Tezy systemu **OntP** są tautologiami, a aksjomat odrzucony nie jest tautologią w klasie modeli $\mathcal{M}_{I_{15}} = (\{n_1, n_2, n_3\}, I_{15}, v)$, gdzie interpretacja I_{15} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych wyznaczona jest przez matrycę:

ε	n_1	n_2	n_3
n_1	1	0	1
n_2	0	1	1
n_3	0	0	0

Sprawdzenie, że aksjomaty **OntP** są prawdziwe w modelu, jest rutynowe. Aksjomat odrzucony (3.4) jest fałszywy w modelu przy wartościowaniu v, takim że: $v(P) = n_1$, $v(S) = n_2$, a $v(M) = n_3$.

■

Twierdzenie 20. *Każda formuła języka systemu* ***OntP*** *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 9 z wykorzystaniem Lematów 32 i 33. ■

3.1.3 Model w rachunku zbiorów

Model w rachunku zbiorów dla systemu **OntP** jest zgodny ze standardową interpretacją Ontologii Leśniewskiego, w której zdanie $S\varepsilon P$ jest prawdziwe, o ile S jest nazwą jednostkową, której zakres jest zawarty w zakresie nazwy P[1]. Formalnie klasę modeli dla systemu **OntP** określa następująca struktura: $\mathsf{M}_{I_{16}} = (D, I_{16}, v)$, gdzie D jest dowolnym zbiorem, wartościowanie v przypisuje zmiennym dowolne podzbiory D, a interpretacja I_{16} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych jest określona następująco:

$$I_{16}(v(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad v(\mathcal{X}) \subseteq v(\mathcal{Y}) \text{ i } |v(\mathcal{X})| = 1.$$

[1]Zakresowe ujęcie Ontologii Leśniewskiego przedstawione zostało przez C. Lejewskiego przy użyciu diagramów, tzw. tablicy ontologicznej. Ujęcie wprost odwołujące się do zakresów nazw zostało szczegółowo opracowane przez Pietruszczaka w pracy [42].

Twierdzenie 21. *System **OntP** jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy modeli* $\mathsf{M}_{I_{16}}$.

Dowód. Tak jak w przypadku Twierdzenia 10 wystarczy pokazać, że tezy systemu są tautologiami, a wyrażenia odrzucone nie są.

Sprawdzenie, że aksjomaty **OntP** są tautologiami w modelu, jest rutynowe. Aksjomat odrzucony jest niespełniony przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = \{1\}$, $v(P) = \{2\}$, $v(M) = \{1, 2\}$.

Reguły MP, Sub, MP^{-1} i Sub^{-1} zachowują odpowiednio tautologiczność i nietautologiczność. Pozostaje do udowodnienia, że reguła $Comp^{-1}$ prowadzi od przesłanek, które nie są tautologiami, do konkluzji, która tautologią nie jest. Tak jak w przypadku Twierdzenia 10 ograniczymy się do wykazania tego faktu dla $n = 2$.

Zwróćmy uwagę, że dla dowolnych zbiorów x_1, x_2, y_1 i y_2 zachodzi

$$(x_1 \subseteq y_1 \wedge |x_1| = 1 \wedge x_2 \subseteq y_2 \wedge |x_2| = 1) \equiv (x_1 \times x_2) \subseteq (y_1 \times y_2) \wedge |x_1 \times x_2| = 1. \tag{3.9}$$

Niech $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$ (dla α będącej formułą elementarną, a β_1 i β_2 formułami atomowymi) będą formułami, które nie są tautologiami. W tej sytuacji istnieją w $\mathsf{M}_{I_{16}}$ modele w dziedzinach odpowiednio D_1 i D_2, określone przez wartościowania odpowiednio v_1 i v_2, takie że $I_{16}(v_1(\alpha \to \beta_1)) = I_{16}(v_2(\alpha \to \beta_2)) = 0$.

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 10 zdefiniujmy kolejny model z $\mathsf{M}_{I_{16}}$ w dziedzinie $D_1 \times D_2$, z wartościowaniem v_3, określonym dla dowolnej zmiennej $\mathcal{X}$ następująco: $v_3(\mathcal{X}) = v_1(\mathcal{X}) \times v_2(\mathcal{X})$. W modelu tym formuła $\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2$ jest niespełniona, co pozwala zakończyć dowód. ■

3.1.4 Niezależność aksjomatów

Twierdzenie 22. *Aksjomaty systemu **OntP** są niezależne.*

Dowód. Tak jak w dotychczasowych dowodach twierdzeń o niezależności aksjomatyzacji dla każdego aksjomatu pokażemy klasę modeli, w której pozostałe aksjomaty są tautologiami, a rozpatrywany aksjomat nie jest. We wszystkich przypadkach interpretacja funktorów rachunku zdań jest klasyczna.

Aksjomat (3.1).

Interpretacja I_{17}:

ε	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	0	0

Aksjomat (3.1) nie jest spełniony w modelu o wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$ a $v(P) = n_2$.

Aksjomat (3.2).

Interpretacja I_{18}:

ε	n_1	n_2	n_3
n_1	1	1	0
n_2	1	1	1
n_3	1	1	1

Aksjomat (3.2) nie jest spełniony w modelu o wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_3$, $v(M) = n_2$.

Aksjomat (3.3).

Interpretacja I_{19}:

ε	n_1	n_2
n_1	1	1
n_2	0	1

Aksjomat (3.3) nie jest spełniony w modelu o wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$, $v(M) = n_1$.

■

3.2 Bezkwantyfikatorowa Ontologia wzbogacona o funktor *sol*

3.2.1 System aksjomatyczny

Przeanalizujemy teraz rozszerzenie systemu **OntP** polegające na dodaniu do jego języka jednoargumentowego funktora *sol* i odpowiednim rozszerzeniu zbioru tez. Terminami pierwotnymi otrzymanego w ten sposób systemu **OntSol** są ε i *sol*. Aksjomatami są wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań w języku, aksjomaty systemu **OntP** (3.1), (3.2) i (3.3) oraz dodatkowo aksjomaty:

$$sol(S) \wedge P\varepsilon S \rightarrow S\varepsilon S, \tag{3.10}$$

$$S\varepsilon S \rightarrow sol(S). \tag{3.11}$$

Tezą **OntSol** jest następująca formuła (otrzymana z aksjomatów (3.3) i (3.10)):

$$P\varepsilon S \wedge sol(S) \rightarrow S\varepsilon P. \tag{3.12}$$

Definicja 14. *Niech dla dowolnych zmiennych $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ $\varepsilon L_2(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ będzie najmniejszym zbiorem formuł, takim że:*

1. $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y} \in \varepsilon L_2(\mathcal{X},\mathcal{Y})$;
2. *jeżeli dla pewnego $\mathcal{Z}$ $\alpha \in \varepsilon L_2(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ i $\beta \in \varepsilon L_2(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$, to $\alpha \wedge \beta \in \varepsilon L_2(\mathcal{X},\mathcal{Y})$;*
3. *jeżeli $\alpha \in \varepsilon L_2(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, to dla dowolnego $\mathcal{V}$ $\alpha \wedge \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{V} \in \varepsilon L_2(\mathcal{X},\mathcal{Y})$;*
4. *jeżeli $\alpha \in \varepsilon L_2(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, to $\alpha \wedge sol(X) \in \varepsilon L_2(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.*

Elementy zbioru $\varepsilon L_2(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ w rozważaniach dotyczących systemu **OntSol** nazywać będziemy ε-łańcuchami łączącymi zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$. Oczywiście, zbiór $\varepsilon L_2(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ zawiera zbiór $\varepsilon L_1(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Dodatkowo należą do niego formuły zawierające atomy zbudowane za pomocą funktora *sol*, np: $sol(\mathcal{X}) \wedge \mathcal{Y}\varepsilon\mathcal{X}$. Jak w przypadku systemu **OntP** zbiór ε-łańcuchów służy do sformułowania poniższego lematu.

Lemat 34. *Jeżeli α zawiera element zbioru $\varepsilon L_2(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, to $\alpha \rightarrow \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ jest tezą systemu* ***OntSol****.*

Dowód. Dowód przez indukcję ze względu na konstrukcję ε-łańcucha zawartego w α. Tak jak w przypadku systemu **OntP**, punkty 2 i 3 definicji odpowiadają aksjomatom (3.2) i (3.3). Jednocześnie punkt 4 definicji odpowiada tezie (3.12). ■

3.2.2 Aksjomatyczny system odrzucania

Aksjomatyczny system odrzucania dla systemu **OntSol** określony jest przy użyciu reguł odrzucania MP^{-1}, Sub^{-1} oraz $Comp^{-1}$.

Aksjomatami odrzuconymi są (3.4) oraz

$$sol(S) \wedge P\varepsilon P \rightarrow S\varepsilon S. \tag{3.13}$$

Definicja 15. *Wyrażeniem odrzuconym systemu **OntSol** jest każdy z aksjomatów odrzuconych oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania: MP^{-1}, Sub^{-1} lub $Comp^{-1}$.*

Lemat 35. *W systemie **OntSol** odrzucone są następujące formuły (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) oraz*

$$P\varepsilon S \rightarrow sol(S) \tag{3.14}$$

i

$$sol(S) \tag{3.15}$$

Dowód. W przypadku formuł (3.5), (3.6), (3.7) oraz (3.8) dowód jest identyczny w stosunku do dowodu Lematu 30. Odrzucenie formuły (3.14) jest następujące:

1.	$\vdash (sol(S) \wedge P\varepsilon S \rightarrow S\varepsilon S) \rightarrow$ $((P\varepsilon S \rightarrow sol(S)) \rightarrow (P\varepsilon S \rightarrow S\varepsilon S))$	KRZ
2	$\vdash sol(S) \wedge P\varepsilon S \rightarrow S\varepsilon S$	aksjomat (3.10)
3.	$\vdash (P\varepsilon S \rightarrow sol(S)) \rightarrow (P\varepsilon S \rightarrow S\varepsilon S)$	MP 1, 2
4.	$\dashv P\varepsilon S \rightarrow S\varepsilon S$	Sub^{-1}: formuła odrzucona (3.7)
	$\dashv P\varepsilon S \rightarrow sol(S)$	MP^{-1}: 3, 4

Odrzucenie formuły (3.15) jest konsekwencją tego, że formuła $sol(S) \rightarrow (P\varepsilon S \rightarrow sol(S))$ jest podstawieniem tezy KRZ, a formuła (3.14) jest wyrażeniem odrzuconym. ■

Lemat 36. *Każda formuła atomowa języka systemu **OntSol** jest wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Na mocy Lematu 35 mamy $\dashv P \varepsilon P$ i $\dashv sol(P)$. Użycie reguły Sub^{-1} pozwala odrzucić każde inne wyrażenie atomowe. ■

Lemat 37. *Każda formuła hornowska języka systemu* ***OntSol*** *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Rozważymy osobno każdą z możliwych postaci formuły hornowskiej języka systemu, różną od formuł atomowych, które są odrzucone na mocy Lematu 36: (i) $\neg\alpha$, (ii) $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}$, (iii) $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$, (iv) $\alpha \to sol(\mathcal{X})$, gdzie α jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi.

W przypadku (i), po podstawieniu zmiennej S za wszystkie zmienne otrzymamy formułę $\neg(S\varepsilon S \wedge sol(S))$, równoważną na mocy aksjomatu (3.11) $\neg S\varepsilon S$. Formuła ta jest w myśl Lematu 35 odrzucona, a więc wyjściowa formuła $\neg\alpha$ również jest odrzucona.

W przypadku (ii), jeżeli dla pewnej zmiennej $\mathcal{Y}$ α zawiera atom $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$, to na mocy (3.1) rozpatrywana formuła jest tezą systemu **OntSol**. Jeżeli zaś α zawiera atom $sol(\mathcal{X})$ oraz dla pewnego $\mathcal{Y}$ atom $\mathcal{Y}\varepsilon\mathcal{X}$, to rozpatrywana formuła jest tezą na mocy aksjomatu (3.13). W przeciwnym wypadku stosujemy podstawienie e_1, w którym S podstawiamy za $\mathcal{X}$, a P za wszystkie inne zmienne. Rozważymy dwie możliwości: (a) α zawiera $sol(\mathcal{X})$ i (b) α nie zawiera $sol(\mathcal{X})$.

W przypadku (a) $e_1(\alpha)$ stanowi koniunkcję atomów ze zbioru $\{sol(S), P\varepsilon P, sol(P)\}$, a $e_1(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}) = S\varepsilon S$. W obecności aksjomatu (3.11) zachodzi $\vdash P\varepsilon P \wedge sol(S) \to e_1(\alpha)$. Mamy więc:

$$\vdash e_1(\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}) \to P\varepsilon P \wedge sol(S) \to S\varepsilon S.$$

Stąd i z aksjomatu odrzuconego (3.13) możemy otrzymać $\dashv \alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}$.

W przypadku (b) $e_1(\alpha)$ stanowi koniunkcję atomów ze zbioru $\{P\varepsilon S, P\varepsilon P, sol(P)\}$. W obecności aksjomatów (3.1) i (3.11) zachodzi $\vdash P\varepsilon S \to e_1(\alpha)$. Mamy więc $\vdash e_1(\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}) \to P\varepsilon S \to S\varepsilon S$. W myśl Lematu (35) $\dashv P\varepsilon S \to S\varepsilon S$. Stąd możemy otrzymać $\dashv \alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}$.

W przypadku (iii) jeżeli α zawiera element zbioru $\varepsilon L_2(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, to na mocy Lematu 34 rozpatrywana formuła jest tezą. W przeciwnym wypadku rozpatrzymy dwie możliwości: (a) α nie zawiera atomu $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Z}$ dla żadnego $\mathcal{Z}$ ani atomu $sol(\mathcal{X})$ i (b) α zawiera atom $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Z}$ dla pewnego $\mathcal{Z}$ lub atom $sol(\mathcal{X})$.

W przypadku (a) skorzystamy z podstawienia e_1 określanego w punkcie (ii). $e_1(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{P\varepsilon S,\ P\varepsilon P,\ sol(P)\}$. Tak jak w przypdaku (ii) wyjściowa formuła jest więc odrzucona.

W przypadku (b) zastosujemy podstawienie e_2, w którym podstawiamy M za wszystkie zmienne $\mathcal{Z}$, takie że α zawiera element zbioru $\varepsilon L_2(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ i element zbioru $\varepsilon L_2(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ (nie może byc wśród nich $\mathcal{X}$ ani $\mathcal{Y}$, bo α zawierałaby ε-łańcuch łączący $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$); S za $\mathcal{X}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{V}$, za którą nie została podstawiona zmienna M, taką że α zawiera element $\varepsilon L_2(\mathcal{X}, \mathcal{V})$ (wśród nich nie ma $\mathcal{Y}$); P za wszystkie pozostałe zmienne (w tym $\mathcal{Y}$). Ponieważ α nie zawiera ε-łańcucha łączącego $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$ ani $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$, $e_2(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{S\varepsilon M,\ P\varepsilon M,\ S\varepsilon S,\ P\varepsilon P,\ sol(S),\ sol(P)\}$, a $e_2(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}) = S\varepsilon P$. W obecności aksjomatów (3.1) oraz (3.11) mamy $\vdash S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \rightarrow e_2(\alpha)$, a stąd:

$$\vdash e_2(\alpha \rightarrow \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}) \rightarrow (S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \rightarrow S\varepsilon P).$$

W związku z tym, że następnik tej implikacji jest identyczny z aksjomatem odrzuconym, mamy $\dashv e_2(\alpha \rightarrow \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y})$ i $\dashv \alpha \rightarrow \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$.

W przypadku (iv), jeżeli α zawiera atom $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ dla dowolnego $\mathcal{Y}$ lub atom $sol(\mathcal{X})$, to formuła jest tezą. W przeciwnym wypadku stosujemy do rozpatrywanej formuły podstawienie e_1. $e_1(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{sol(P), P\varepsilon P, P\varepsilon P\}$, a $e_1(sol(\mathcal{X})) = sol(S)$. W obecności aksjomatów (3.1) oraz (3.11) mamy $\vdash P\varepsilon S \rightarrow e_1(\alpha)$, a stąd

$$\vdash e_1(\alpha \rightarrow sol(\mathcal{X})) \rightarrow (P\varepsilon S \rightarrow sol(S).$$

Następnik tej implikacji jest identyczny z wyrażeniem odrzuconym (3.14), a więc odrzucone jest również $e_1(\alpha \rightarrow sol(\mathcal{X}))$ oraz $\alpha \rightarrow sol(\mathcal{X})$. ■

Lemat 38. *Aksjomaty odrzucone (3.4) i (3.13) nie są tezami* ***OntSol****.*

Dowód. Możemy zastosować rozumowanie analogiczne do użytego w dowodzie Lematu 10. W przypadku aksjomatu odrzuconego (3.4) odpowiednia klasa modeli może być określona następująco: $\mathcal{M}_{I_{20}} = (N_{20}, v, I_{20})$, gdzie dziedzina $N_{20} = \{n_1, n_2, n_3\}$, a interpretacja I_{20} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych określona jest przez matrycę:

ε	n_1	n_2	n_3	sol
n_1	1	0	1	1
n_2	0	1	1	1
n_3	0	0	0	0

Sprawdzenie, że aksjomaty **OntSol** są tautologiami w tej klasie modeli, jest rutynowe. Aksjomat odrzucony (3.4) nie jest spełniony w modelu przy wartościowaniu v, takim że: $v(P) = n_1$, $v(S) = n_2$ i $v(M) = n_3$.

Z kolei dla aksjomatu odrzuconego (3.13) odpowiednia klasa modeli może być określona następująco: $\mathcal{M}_{I_{21}} = (N_{21}, v, I_{21})$, gdzie dziedzina $N_{21} = \{n_1, n_2, n_3\}$, a interpretacja I_{21} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych określona jest przez matrycę:

ε	n_1	n_2	sol
n_1	1	0	1
n_2	0	0	1

Sprawdzenie, że aksjomaty **OntSol** są prawdziwe w modelu jest rutynowe. Aksjomat odrzucony (3.13) nie jest spełniony w modelu przy wartościowaniu v, takim że: $v(P) = n_1$, $v(S) = n_2$ ■

Twierdzenie 23. *Każda formuła języka systemu **OntSol** jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 9, z wykorzystaniem Lematów 37 i 38. ■

3.2.3 Model w rachunku zbiorów

Model w rachunku zbiorów dla systemu **OntSol** stanowi rozszerzenie modelu dla systemu **OntP** o funktor *sol*, który jest prawdziwy dla nazw, którym w modelu odpowiada zbiór jednoelementowy lub pusty.

Klasę modeli dla systemu **OntSol** określa struktura: $\mathsf{M}_{I_{22}} = (D, I_{22}, v)$, gdzie D jest dowolnym zbiorem, wartościowanie v przypisuje zmiennym dowolne podzbiory D, a interpretacja I_{22} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych jest określona następująco:

$$\begin{array}{lll} I_{22}(v(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \subseteq v(\mathcal{Y}) \text{ i } |v(\mathcal{X})| = 1; \\ I_{22}(v(sol(\mathcal{X}))) = 1 & \text{wtw} & |v(\mathcal{X})| \leqslant 1. \end{array}$$

Lemat 39. *Niech $\alpha \to \beta$ będzie formułą hornowską języka systemu **OntSol**, która nie jest tautologią w klasie modeli $\mathsf{M}_{I_{22}}$. Jeżeli α nie zawiera atomu $sol(\mathcal{X})$, to istnieje model z $\mathsf{M}_{I_{22}}$ z wartościowaniem v, takim że $v(\mathcal{X}) \neq \emptyset$.*

Dowód. Niech v_1 będzie wartościowaniem, takim że formuła $\alpha \to \beta$ (α nie zawiera $sol(\mathcal{X})$) nie jest spełniona w modelu $\mathsf{M}_{I_{22}} = (D, v_1, I_{22})$ oraz $v_1(\mathcal{X}) = \emptyset$. W tej sytuacji dla dowolnego $\mathcal{Y}$ mamy $I_{22}(v_1(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y})) = I_{22}(v_1(\mathcal{Y}\varepsilon\mathcal{X})) = 0$. Ponieważ $I_{22}(v_1(\alpha \to \beta)) = 0$, mamy też $I_{22}(v_1(\alpha)) = 1$, co oznacza, że zmienna $\mathcal{X}$ nie może wystąpić w α. Z kolei, ponieważ $I_{22}(v_1(\beta)) = 0$, β nie może być równe $sol(\mathcal{X})$ i może (i) nie zawierać zmiennej $\mathcal{X}$ bądź przyjmować jedną z postaci: (ii) $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}$, (iii) $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ bądź (iv) $\mathcal{Y}\varepsilon\mathcal{X}$.

W każdym z wymienionych przypadków można wskazać wartościowanie v, takie że $v(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ i $I_{22}(v(\alpha \to \beta)) = 0$. We wszystkich przypadkach $v(\mathcal{Y}) = v_1(\mathcal{Y})$, o ile $\mathcal{Y}$ jest różne od $\mathcal{X}$. W przypadkach (i), (ii) oraz (iii) $v(\mathcal{X})$ może być równy dowolnemu zbiorowi dwuelementowemu, a w przypadku (iv) – dowolnemu zbiorowi dwuelementowemu niezawierającemu $v(\mathcal{Y})$. ■

Twierdzenie 24. *System **OntSol** jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy modeli* $\mathsf{M}_{I_{22}}$.

Dowód. Tak jak w przypadku Twierdzenia 10 wystarczy pokazać, że tezy systemu są tautologiami w klasie modeli, a wyrażenia odrzucone nie są.

Sprawdzenie, że aksjomaty **OntSol** są tautologiami, jest rutynowe. Aksjomaty odrzucone nie są spełnione odpowiednio przy wartościowaniach v_1 i v_2: dla (3.4) – $v_1(S) = \{1\}$, $v_1(P) = \{2\}$, $v_1(M) = \{1, 2\}$, dla (3.13) – $v_2(S) = \emptyset$, $v_2(P) = \{1\}$.

Reguły MP, Sub, MP^{-1} i Sub^{-1} zachowują odpowiednio tautologiczność i nietautologiczność. Pozostaje do udowodnienia, że reguła $Comp^{-1}$ prowadzi od fałszywych przesłanek, do fałszywej konkluzji. Tak jak w przypadku Twierdzenia 10 ograniczymy się do wykazania tego faktu dla $n = 2$.

Wykorzystamy fakt, że dla dowolnych zbiorów x_1, x_2, y_1 i y_2 zachodzi prawidłowość (3.9) z dowodu pełności w modelu systemu **OntP** oraz fakt, że

$$(\mid x_1 \mid \leqslant 1 \wedge \mid x_2 \mid \leqslant 1) \to \mid x_1 \times x_2 \mid \leqslant 1. \tag{3.16}$$

Niech $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$ (dla α będącej formułą elementarną, a β_1 i β_2 formułami atomowymi) będą formułami, które nie są tautologiami. W tej sytuacji istnieją w $\mathsf{M}_{I_{22}}$ modele w dziedzinach odpowiednio D_1 i D_2, określone przez wartościowania odpowiednio v_1 i v_2, takie że $I_{22}(v_1(\alpha \to \beta_1)) = I_{22}(v_2(\alpha \to \beta_2)) = 0$.

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 10 zdefiniujmy kolejny model z $\mathsf{M}_{I_{22}}$ w dziedzinie $D_1 \times D_2$ z wartościowaniem v_3 określonym dla dowolnej zmiennej $\mathcal{X}$ następująco: $v_3(\mathcal{X}) = v_1(\mathcal{X}) \times v_2(\mathcal{X})$. Na mocy (3.9) i (3.16)

$I_{22}(v_3(\alpha)) = 1$. Jeżeli β_i $(i \in \{1,2\})$ ma postać $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$, to na mocy (3.9) $I_{22}(v_3(\alpha \to \beta_i) = 0$. Jeżeli natomiast β_i $(i \in \{1,2\})$ ma postać $sol(\mathcal{X})$, to przyjmujemy, że wartościowanie v_j $(j \in \{1,2\}), j \neq i)$ jest dobrane tak, że $v_j(\mathcal{X}) \neq \emptyset$. Model taki istnieje na mocy Lematu 39, ponieważ α nie może zawierać $sol(\mathcal{X})$. W tej sytuacji, ponieważ $|f_i(\mathcal{X})| > 1$, również $|v_i(\mathcal{X})| > 1$, a więc $I_{22}(v_3(\alpha \to \beta_i) = 0$. ■

3.2.4 Niezależność aksjomatów

Twierdzenie 25. *Aksjomaty systemu **OntSol** są niezależne.*

Dowód. Tak jak w dotychchzasowych dowodach twierdzeń o niezależności aksjomatyzacji dla każdego aksjomatu pokażemy klasę modeli, w której pozostałe aksjomaty są tautologiami, a rozpatrywany aksjomat nie jest. We wszystkich przypadkach interpretacja funktorów rachunku zdań jest klasyczna.

Aksjomat (3.1).

Interpretacja I_{23}:

ε	n_1	n_2	sol
n_1	0	1	0
n_2	0	0	0

Aksjomat (3.1) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$.

Aksjomat (3.2).

Interpretacja I_{24}:

ε	n_1	n_2	n_3	sol
n_1	1	1	0	1
n_2	1	1	1	1
n_3	1	1	1	1

Aksjomat (3.2) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_3$, $v(M) = n_2$.

Aksjomat (3.3).

Interpretacja I_{25}:

ε	n_1	n_2	sol
n_1	1	1	1
n_2	0	1	1

Aksjomat (3.3) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$, $v(M) = n_2$.

Aksjomat (3.10).

Interpretacja I_{26}:

ε	n_1	n_2	sol
n_1	0	0	1
n_2	1	1	1

Aksjomat (3.10) jest niespełniony przy wartościowaniu v, przy którym: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$.

Aksjomat (3.11).

Interpretacja I_{27} w dziedzinie $\{n_1\}$:

$I_{27}(n_1 \varepsilon n_1) = 1$,
$I_{27}(sol(n_1)) = 0$. ■

Twierdzenie 26. *Aksjomaty odrzucone systemu* ***OntSol*** *są w* ***OntSol*** *niezależne.*

Dowód. Tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 15 wystarczy pokazać, że żadnego z dwóch aksjomatów nie da się w systemie wyprowadzić z drugiego. Pokażemy to przez wskazanie interpretacji wyznaczających klasy modeli, dla których aksjomaty systemu oraz jeden z aksjomatów odrzuconych są tautologiami, a drugi z aksjomatów odrzuconych nie jest tautologią.

Niezależność aksjomatu (3.4).

Interpretacja I_{28}:

ε	n_1	n_2	n_3	sol
n_1	1	0	1	1
n_2	0	1	1	1
n_3	0	0	0	0

Aksjomat (3.4) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$, a $v(M) = n_3$.

Niezależność aksjomatu (3.13).

Interpretacja I_{29}:

ε	n_1	n_2	sol
n_1	0	0	1
n_2	0	1	1

Aksjomat (3.13) jest niespełniony przy interpretacji v, takiej że $v(S) = n_1$, a $v(P) = n_2$. ■

3.3 Bezkwantyfikatorowa Ontologia wzbogacona o funktory sylogistyki

3.3.1 System aksjomatyczny

W oryginalnym ujęciu Ontologii Leśniewskiego wszelkie inne funktory poza funktorem ε są definiowane. W definicjach wykorzystywane są jednak kwantyfikatory. Aby zbudować bezkwantyfikatorowy system zawierający funktory występujące w Ontologii inne niż ε w systemie **OntSyl** wprowadzimy je aksjomatycznie. Terminami pierwotnymi systemu **OntSyl** są funktory ε, a oraz i.

Aksjomatami systemu **OntSyl** są wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań oraz następujące formuły:

$$S\varepsilon P \to S\varepsilon S, \tag{3.17}$$

$$S\varepsilon P \to SaP, \tag{3.18}$$

$$SaM \wedge M\varepsilon P \to S\varepsilon P, \tag{3.19}$$

$$SiP \wedge P\varepsilon P \to P\varepsilon S, \tag{3.20}$$

$$PiS \to SaS, \tag{3.21}$$

$$SaP \to SiP, \tag{3.22}$$

$$SaM \wedge MaP \to SaP, \tag{3.23}$$

$$SiM \wedge MaP \to PiS. \tag{3.24}$$

Aksjomaty (3.21) – (3.24) pokrywają się z aksjomatami systemu **Stnd**. W związku z tym w systemie **OntSyl** obowiązuje odpowiednik Lematu 5, tzn. jeżeli formuła elementarna α zawiera łańcuch łączący zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$, to formuła $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ jest tezą systemu **OntSyl**. Łatwo sprawdzić, że następujące formuły są tezami systemu. Z (3.18) i (3.19) otrzymujemy:

$$S\varepsilon M \wedge M\varepsilon P \to S\varepsilon P; \tag{3.25}$$

z (3.18) i (3.22):

$$S\varepsilon P \to SiP; \tag{3.26}$$

z (3.20) i (3.26):

$$S\varepsilon P \wedge P\varepsilon M \to P\varepsilon S; \tag{3.27}$$

z (3.23) i (3.21):

$$SiP \to PiS; \tag{3.28}$$

z (3.20) i (3.22):

$$SaP \wedge P\varepsilon P \to P\varepsilon S; \tag{3.29}$$

z (3.20), (3.22) i (3.28):

$$SaP \wedge S\varepsilon S \to S\varepsilon P; \tag{3.30}$$

z (3.24) i (3.18):

$$SiM \wedge M\varepsilon P \to PiS; \tag{3.31}$$

z (3.18), (3.23), (3.22) i (3.20):

$$S\varepsilon M \wedge MaP \to S\varepsilon P; \tag{3.32}$$

z (3.22), (3.20) i (3.19):

$$SaP \wedge P\varepsilon P \to S\varepsilon S; \tag{3.33}$$

z (3.17) i (3.33):

$$SaM \wedge M\varepsilon P \to S\varepsilon S; \tag{3.34}$$

z (3.24):

$$M_1 i M_2 \wedge M_1 a S \wedge M_2 a P \to SiP; \tag{3.35}$$

z (3.24), (3.22) i (3.28):

$$MaS \wedge MaP \to SiP; \tag{3.36}$$

z (3.21) i (3.22):

$$SaS \equiv SiS; \tag{3.37}$$

z (3.26) i (3.21):

$$S\varepsilon P \to PaP; \tag{3.38}$$

z (3.17) i (3.18):

$$S\varepsilon P \to SaS; \tag{3.39}$$

z (3.38) i (3.22):

$$S\varepsilon P \to PiP; \tag{3.40}$$

z (3.26) i (3.28):

$$S\varepsilon P \to PiS; \tag{3.41}$$

z (3.39) i (3.22):

$$S\varepsilon P \to SiS. \tag{3.42}$$

Warto zauważyć, że formuły (3.17), (3.25) i (3.27) są aksjomatami systemu **OntP**.

Definicja 16. *Niech dla dowolnej zmiennej $\mathcal{X}$ $ind(\mathcal{X})$ będzie najmniejszym zbiorem zawierającym formuły: $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$, $\alpha \wedge \mathcal{Z}\varepsilon\mathcal{V}$, dla pewnych zmiennych $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{V}$ oraz $\alpha \in aL(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$.*

Gdy α zawiera element ze zbioru $ind(\mathcal{X})$ będziemy pisać, że zmienna $\mathcal{X}$ jest zindywidualizowana w α. Definicja zmiennej zindywidualizowanej jest dobrana tak, aby zachodził następujący lemat:

Lemat 40. *Jeżeli $\mathcal{X}$ jest zindywidualizowane w α, to $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}$ jest tezą systemu* ***OntSyl****.*

Dowód. Zachodzenie lematu wynika z Definicji 16 ze względu na tezy (3.33) i (3.34) oraz obowiązywanie w systemie Lematu 5. ■

Definicja 17. *Niech dla dowolnych zmiennych $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ $\varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ będzie najmniejszym zbiorem formuł, takim że:*

1. *$\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y} \in \varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Y})$;*
2. *jeżeli $\alpha \in (aL(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \cup aL(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$ i $\beta \in ind(\mathcal{X})$, to $\alpha \wedge \beta \in \varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Y})$;*
3. *jeżeli $\alpha \in ind(\mathcal{X})$, to $\alpha \wedge \mathcal{X}i\mathcal{Y}, \alpha \wedge \mathcal{Y}i\mathcal{X} \in \varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Y})$;*
4. *jeżeli $\alpha \in \varepsilon L_3(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ i $\beta \in ind(\mathcal{X})$, to $\alpha \wedge \beta \in \varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Y})$;*
5. *jeżeli $\alpha \in \varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ i $\beta \in \varepsilon L_3(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$, to $\alpha \wedge \beta \in \varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Y})$;*
6. *jeżeli $\alpha \in \varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ i $\beta \in aL(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$, to $\alpha \wedge \beta \in \varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.*

Elementy zbioru $\varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ nazywać będziemy w kontekście rozważań o systemie **OntSyl** ε-łańcuchami łączącymi zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$.

Lemat 41. *Jeżeli α zawiera element zbioru $\varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, to $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ jest tezą systemu* ***OntSyl****.*

Dowód. Dowód przez indukcję ze względu na liczbę zastosowań operacji zdefiniowanych przez punkty 4, 5, lub 6 z Definicji 17 w konstrukcji ε-łańcucha zawartego w α.

Pokażemy najpierw, że lemat obowiązuje dla formuły α zawierającej ε-łańcuch skonstruowany zgodnie z punktami 1, 2 lub 3 Definicji 17. Jeżeli α zawiera $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$, to oczywiście $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ jest tezą. Jeżeli α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$ bądź $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$, a zmienna $\mathcal{X}$ jest zindywidualizowana w α, to $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ jest tezą na mocy Lematu 5, Lematu 40 oraz tez (3.30) i (3.29). Jeżeli zmienna $\mathcal{X}$ jest zindywidualizowana w α i α zawiera jeden z atomów $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ lub $\mathcal{Y}i\mathcal{X}$, to $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ jest tezą na mocy Lematu 40 oraz aksjomatu (3.20) i tezy (3.28).

Załóżmy teraz, że lemat obowiązuje dla ε-łańcuchów, przy konstrukcji których zastosowano mniej niż n razy operacje wykorzystane w punktach 4, 5, lub 6 z Definicji 17. Pokażemy, że obowiązuje również, gdy wymienione operacje zastosowano n razy, co zakończy dowód. Jeżeli z α wyprowadzić można $\mathcal{Y}\varepsilon\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}$ jest zindywidualizowane w α, to $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ jest tezą na mocy tezy (3.20). Jeżeli z α wyprowadzić można $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Z}$ i $\mathcal{Z}\varepsilon\mathcal{Y}$, to na mocy tezy (3.25) tezą jest $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$. Jeżeli natomiast z α wyprowadzić można $\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Z}$ i $\mathcal{Z}a\mathcal{Y}$, to $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ jest tezą na mocy tezy (3.32). ■

Lemat 42. *Jeżeli α jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{\mathcal{Y}\varepsilon\mathcal{X}, \mathcal{Y}\varepsilon\mathcal{Y}, \mathcal{X}a\mathcal{X}, \mathcal{Y}a\mathcal{X}, \mathcal{Y}a\mathcal{Y}, \mathcal{X}i\mathcal{X}, \mathcal{X}i\mathcal{Y}, \mathcal{Y}i\mathcal{X}, \mathcal{Y}i\mathcal{Y}\}$, to formuła*

$$\mathcal{Y}\varepsilon\mathcal{X} \to \alpha$$

*jest tezą systemu **OntSyl**.*

Dowód. Lemat jest prostą konsekwencją faktu, że formuły (3.17), (3.38), (3.18), (3.39), (3.40), (3.41), (3.26) i (3.42) są aksjomatami lub tezami systemu **OntSyl**. ■

3.3.2 Aksjomatyczny system odrzucania

Aksjomatyczny system odrzucania dla systemu **OntSyl** określony jest przy użyciu reguł odrzucania MP^{-1}, Sub^{-1} oraz $Comp^{-1}$. Aksjomatami odrzuconymi dla systemu są następujące formuły:

$$S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \to SiP, \tag{3.43}$$

$$P\varepsilon P \to SiS. \tag{3.44}$$

Definicja 18. *Wyrażeniem odrzuconym systemu **OntSyl** jest każdy z aksjomatów odrzuconych oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania MP^{-1}, Sub^{-1} lub $Comp^{-1}$.*

Lemat 43. *Następujące formuły są formułami odrzuconymi systemu **OntSyl**:*

$$P\varepsilon S \to S\varepsilon P, \tag{3.45}$$

$$P\varepsilon S \to S\varepsilon S, \tag{3.46}$$

$$S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \to S\varepsilon P, \tag{3.47}$$

$$P\varepsilon P \to SaS, \tag{3.48}$$

$$P\varepsilon S \to SaP, \tag{3.49}$$

$$S\varepsilon M \land P\varepsilon M \to SaP, \tag{3.50}$$

$$SiS, \tag{3.51}$$

$$\neg S\varepsilon P. \tag{3.52}$$

Dowód.
Formuła (3.45):

1.	$\vdash S\varepsilon M \land M\varepsilon P \to SiP$	KRZ, tezy (3.25), (3.26)
2.	$\vdash (P\varepsilon M \to M\varepsilon P) \to (S\varepsilon M \land P\varepsilon M \to SiP)$	KRZ, 1
3.	$\dashv S\varepsilon M \land P\varepsilon M \to SiP$	aks. odrzucony (3.43)
4.	$\dashv P\varepsilon M \to M\varepsilon P$	MP^{-1}: 2, 3
	$\dashv P\varepsilon S \to S\varepsilon P$	Sub^{-1}: 4

Formuła (3.46):

1.	$\vdash P\varepsilon S \land S\varepsilon S \to S\varepsilon P$	teza (3.27)
2.	$\vdash (P\varepsilon S \to S\varepsilon S) \to (P\varepsilon S \to S\varepsilon P)$	KRZ, 1
3.	$\dashv P\varepsilon S \to S\varepsilon P$	formuła odrzucona (3.45)
	$\dashv P\varepsilon S \to S\varepsilon S$	MP^{-1}: 2, 3

Formuła (3.47):

1.	$\vdash S\varepsilon P \to SiP$	teza (3.26)
2.	$\vdash (S\varepsilon M \land P\varepsilon M \to S\varepsilon P) \to$	
	$(S\varepsilon M \land P\varepsilon M \to SiP)$	KRZ, 1
3.	$\dashv S\varepsilon M \land P\varepsilon M \to SiP$	aks. odrzucony (3.43)
	$\dashv S\varepsilon M \land P\varepsilon M \to S\varepsilon P$	MP^{-1}: 2, 3

Formuła (3.48):

1.	$\vdash SaS \to SiS$	aksjomat (3.22)
2.	$\vdash (P\varepsilon P \to SaS) \to (P\varepsilon P \to SiS)$	KRZ, 1
3.	$\dashv P\varepsilon P \to SiS$	aks. odrzucony (3.44)
	$\dashv P\varepsilon P \to SaS$	MP^{-1}: 2, 3

Formuła (3.49):

1.	$\vdash S\varepsilon M \land MaP \to S\varepsilon P$	teza (3.32)
2.	$\vdash (P\varepsilon M \to MaP) \to$	
	$(S\varepsilon M \land P\varepsilon M \to S\varepsilon P)$	KRZ, 1
3.	$\dashv S\varepsilon M \land P\varepsilon M \to S\varepsilon P$	formuła odrzucona (3.45)
4.	$\dashv P\varepsilon M \to MaP$	MP^{-1}: 2, 3
	$\dashv P\varepsilon S \to SaP$	Sub^{-1}: 4

Formuła (3.50):

1.	$\vdash SaP \to SiP$	aksjomat (3.22)
2.	$\vdash (S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \to SaP) \to$	
	$(S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \to SiP)$	KRZ, 1
3.	$\dashv S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \to SiP$	aks. odrzucony (3.43)
	$\dashv S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \to SaP$	MP^{-1}: 2, 3

Formuła (3.51):

1.	$\vdash SiS \to (P\varepsilon P \to SiS)$	KRZ
2.	$\dashv P\varepsilon P \to SiS$	aks. odrzucony (3.44)
	$\dashv SiS$	MP^{-1}: 1, 2

Formuła (3.52):

1.	$\vdash \neg P\varepsilon P \to (P\varepsilon P \to SiS)$	KRZ
2.	$\dashv P\varepsilon P \to SiS$	aks. odrzucony (3.44)
3.	$\dashv \neg P\varepsilon P$	MP^{-1}: 1, 2
	$\dashv \neg S\varepsilon P$	Sub^{-1}: 3

■

Lemat 44. *Każda formuła atomowa jest formułą odrzuconą systemu* ***OntSyl****.*

Dowód. Na mocy Lematu 43 odrzucona jest formuła SiS. Przy użyciu reguły MP^{-1} z $\dashv SiS$ oraz (3.26) i (3.22) możemy otrzymać odpowiednio $\dashv S\varepsilon S$ oraz $\dashv SaS$. Przy użyciu reguły Sub^{-1} możemy odrzucić każdy inny atom. ■

Lemat 45. *Każde wyrażenie o postaci $\neg\alpha$, gdzie α jest koniunkcją atomów, jest formułą odrzuconą.*

Dowód. Niech β będzie koniunkcją atomów ze zbioru $\{S\varepsilon S, SaS, SiS\}$. Przy użyciu praw KRZ aksjomatu (3.17) i tez (3.39) oraz (3.42), otrzymujemy $\vdash S\varepsilon P \to \beta$, i dalej, przez transpozycję $\vdash \neg\beta \to \neg S\varepsilon P$. Ponieważ na podstawie Lematu 43 mamy $\dashv \neg S\varepsilon P$, przy użyciu reguły MP^{-1} otrzymujemy $\dashv \neg\beta$. Korzystając z reguły Sub^{-1} uzyskujemy $\dashv \neg\alpha$. ■

Lemat 46. *Każda formuła hornowska języka systemu* ***OntSyl*** *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Lematy 44 i 45 pozwalają ograniczyć dowód do formuł o postaci: (i) $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}$, (ii) $\alpha \to \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$, (iii) $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{X}$, (iv) $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$, (v) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$, (vi) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$, gdzie α jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi.

W przypadku (i), jeżeli $\mathcal{X}$ jest zindywidualizowane w α, to rozpatrywana formuła jest tezą systemu **OntSyl** na mocy Lematu 40. W przeciwnym wypadku zastosujemy podstawienie e_1, w którym podstawiamy S za $\mathcal{X}$ i każdą zmienną $\mathcal{Y}$, taką że α zawiera element zbioru $aL(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i P za wszystkie inne zmienne. $e_1(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{P\varepsilon S$, $P\varepsilon P$, SaS, PaS, PaP, SiS, SiP, PiS, $PiP\}$, a $e_1(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}) = S\varepsilon S$. Na mocy Lematu 42 mamy $\vdash P\varepsilon S \rightarrow e_1(\alpha)$. Wynika stąd, że $\vdash e_1(\alpha \rightarrow \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}) \rightarrow (P\varepsilon S \rightarrow S\varepsilon S)$. Następnik tej implikacji jest identyczny z formułą odrzuconą (3.46), a więc wykorzystując regułę MP^{-1} , i dalej, regułę Sub^{-1} możemy otrzymać $\dashv \alpha \rightarrow \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{X}$.

W przypadku (ii), jeżeli α zawiera jakiś element zbioru $\varepsilon L_3(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, to $\alpha \rightarrow \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$ jest tezą **OntSyl** na mocy Lematu 41. W przeciwnym wypadku rozpatrzymy dwie możliwości (a) zmienna $\mathcal{X}$ nie jest zindywidualizowana w α i (b) zmienna $\mathcal{X}$ jest zindywidualizowana w α.

W przypadku (a) wykorzystamy podstawienie e_1 z punktu (i). Ponieważ $\mathcal{X}$ nie jest zindywidualizowane, $e_1(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{P\varepsilon S$, $P\varepsilon P$, PaS, PaP, SaS, PiS, PiP, SiS, $SiP\}$, a $e_1(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y})$ ma postać $S\varepsilon S$ lub $S\varepsilon P$. Stosując rozumowanie analogiczne do zastosowanego w punkcie (i), z uwzględnieniem odrzucenia formuły (3.46) bądź (3.45), otrzymamy $\dashv \alpha \rightarrow \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$.

W przypadku (b) stosujemy podstawienie e_2, w którym podstawiamy S za $\mathcal{X}$ i każde $\mathcal{Z}$, takie że α zawiera element $\varepsilon L_3(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ oraz $\varepsilon L_3(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$; M za każde $\mathcal{Z}$, takie że α zawiera element $\varepsilon L_3(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$, za które nie zostało podstawione S; P za wszystkie inne zmienne. Przy tak określonym podstawieniu M nie jest zindywidualizowane w $e_2(\alpha)$, $e_2(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}) = S\varepsilon P$, a S i P nie występują razem w żadnym atomie z $e_2(\alpha)$. W związku z tym $e_2(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{S\varepsilon M$, $P\varepsilon M$, $S\varepsilon S$, $P\varepsilon P$, SaM, PaM, SaS, PaP, MaM, SiM, PiM, MiS, MiP, SiS, PiP, $MiM\}$. Na mocy Lematu 42 mamy $\vdash S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \rightarrow e_2(\alpha)$, a stąd na mocy praw KRZ $\vdash e_2(\alpha \rightarrow \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}) \rightarrow (S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \rightarrow S\varepsilon P)$. Ponieważ na mocy Lematu 43 odrzucona jest formuła (3.47), odrzucona jest również rozpatrywana formuła $\alpha \rightarrow \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y}$.

W przypadku (iii), jeżeli α zawiera atom, w którym występuje zmienna $\mathcal{X}$, to na mocy tez (3.38), (3.39) oraz aksjomatu (3.21) wraz z aksjomatem (3.22) i tezą (3.28) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{X}$ jest tezą. W przeciwnym przypadku zastosujemy podstawienie e_3, w którym podstawiamy S za $\mathcal{X}$, a P za wszystkie inne zmienne. $e_3(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{P\varepsilon P$, PaP, $PiP\}$. W związku z tym tezą systemu **OntSyl** jest formuła $e_3(\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{X}) \to (P\varepsilon P \to SaS)$. Ponieważ odrzucona jest formuła (3.48), odrzucona jest również rozpatrywana formuła $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{X}$.

W przypadku (iv), jeżeli α zawiera element $aL(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ lub $\varepsilon L_3(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, to na mocy Lematu (5) lub Lematu 41 oraz aksjomatu (3.18) $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ jest tezą. W przeciwnym wypadku rozważymy dwa przypadki: (a) $\mathcal{X}$ nie jest zindywidualizowane w α i (b) $\mathcal{X}$ jest zindywidualizowane w α.

W przypadku (a) zastosujemy podstawienie e_1 określone dla przypadku (i). Ponieważ $\mathcal{X}$ nie jest zindywidualizowane w α, $e_1(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{P\varepsilon P, P\varepsilon S$, SaS, PaS, PaP, SiS, SiP, PiS, $PiP\}$. Z kolei $e_1(\mathcal{X}a\mathcal{Y}) = SaP$. Na mocy Lematu 42 mamy $\vdash P\varepsilon S \to e_1(\alpha)$, a na mocy praw KRZ również $\vdash e_1(\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}) \to (P\varepsilon S \to SaP)$. Ponieważ na mocy Lematu 43 odrzucona jest formuła 3.49 ($P\varepsilon S \to SaP$), odrzucona jest również rozpatrywana formuła $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$.

W przypadku (b) wykorzystamy podstawienie e_2 określone dla przypadku (ii) (b). Stosując rozumowanie analogiczne do zastosowanego w przypadku (ii) (b) z wykorzystaniem faktu, że na mocy Lematu 43 odrzucona jest formuła (3.50), uzyskamy odrzucenie formuły $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$.

Przypadek (v), ze względu na tezę (3.37), redukuje się do przypadku (iii).

W przypadku (vi) mamy do czynienia z formułą $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$, która jest tezą, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:

- α zawiera $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}i\mathcal{X}$, element $\varepsilon L_3(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $aL(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\varepsilon L_3(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ lub $aL(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$;
- dla pewnej zmiennej $\mathcal{Z}$, α zawiera element zbioru $\varepsilon L_3(\mathcal{Z}, \mathcal{X}) \cup aL(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$ i element zbioru $\varepsilon L_3(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}) \cup aL(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$;
- dla pewnych zmiennych $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{V}$, α zawiera $\mathcal{Z}i\mathcal{V}$ lub $\mathcal{V}i\mathcal{Z}$ oraz elementy zbiorów $\varepsilon L_3(\mathcal{Z}, \mathcal{X}) \cup aL(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$ i $\varepsilon L_3(\mathcal{V}, \mathcal{Y}) \cup aL(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$;

Powyższy fakt jest konsekwencją aksjomatu (3.22), tez (3.26), (3.35) i (5), oraz Lematu 41.

Jeżeli rozpatrywana formuła nie spełnia żadnego z wyżej wymienionych warunków stosujemy podstawienie e_4, w którym podstawiamy S za $\mathcal{X}$ oraz każde $\mathcal{Z}$, takie że α zawiera element zbioru $eL(\mathcal{Z}, \mathcal{X}) \cup aL(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$, P za $\mathcal{Y}$, każde $\mathcal{Z}$, takie że α zawiera element zbioru $eL(\mathcal{Z},\mathcal{Y}) \cup aL(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$ oraz każdą inną zmienną zindywidualizowaną w α, za którą nie zostało wcześniej podstawione S, M za wszystkie inne zmienne.

$e_4(\mathcal{X}i\mathcal{Y})$ jest równe SiP. Ponieważ α nie zawiera żadnego elementu zbioru $\varepsilon L_3(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \cup aL(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \cup \varepsilon L_3(\mathcal{Y},\mathcal{X}) \cup aL(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, $e_4(\alpha)$ nie zawiera żadnego atomu, w którym występuje jednocześnie S i P. Z kolei zmienna M nie może być zindywidualizowana w $e_4(\alpha)$. Formuła $e_4(\alpha)$ jest więc koniunkcją elementów zbioru $\{S\varepsilon M$, $P\varepsilon M$, $S\varepsilon S$, $P\ estP$, SaM, PaM, SaS, PaP, MaM, SiM, PiM, MiS, MiP, SiS, PiP, $MiM\}$. Na podstawie Lematu 42 mamy więc $\vdash (S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M) \rightarrow e_4(\alpha)$ i na podstawie praw KRZ $\vdash e_4(\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y}) \rightarrow S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \rightarrow SiP$. W obecności aksjomatu odrzuconego (3.43) możemy stąd wyprowadzić stosując reguły MP^{-1} i Sub^{-1}: $\dashv \alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y}$. ■

Lemat 47. *Aksjomaty odrzucone nie są tezami systemu* ***OntSyl****.*

Dowód. Możemy zastosować rozumowanie analogiczne do użytego w dowodzie Lematu 10. W przypadku aksjomatu odrzuconego (3.43), odpowiednia klasa modeli może być określona następująco: $\mathcal{M}_{I_{30}} = (N_{30}, v, I_{30})$, gdzie dziedzina $N_{30} = \{n_1, n_2, n_3\}$, a interpretacja I_{30} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych określona jest przez matryce:

ε	n_1	n_2	n_3
n_1	1	0	1
n_2	0	1	1
n_3	0	0	0

a	n_1	n_2	n_3
n_1	1	0	1
n_2	0	1	1
n_3	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3
n_1	1	0	1
n_2	0	1	1
n_3	1	1	1

Aksjomat jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$, a $v(M) = n_3$.

W przypadku aksjomatu odrzuconego (3.44) odpowiednia klasa modeli może być określona następująco: $\mathcal{M}_{I_{31}} = (N_{31}, v, I_{31})$, gdzie dziedzina $N_{31} = \{n_1, n_2\}$, a interpretacja I_{31} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych określona jest przez matrycę:

$\varepsilon/a/i$	n_1	n_2
n_1	0	0
n_2	0	1

Aksjomat jest niespełniony przy wartościowaniu v, dla którego $v(S) = n_1$ i $v(P) = n_2$. ■

Twierdzenie 27. *Każda formuła języka systemu **OntSyl** jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak Twierdzenia 9. ■

3.3.3 Model w rachunku zbiorów

Model dla rozszerzonego systemu Ontologii stanowi połączenie modelu dla systemu **OntP** z modelem standardowej sylogistyki dopuszczającej używanie nazw pustych **Stnd**.

Klasę modeli dla systemu **OntSyl** określa struktura: $\mathsf{M}_{I_{32}} = (D, I_{32}, v)$, gdzie D jest dowolnym zbiorem, wartościowanie v przypisuje zmiennym dowolne podzbiory D, interpretacja I_{32} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych jest określona następująco:

$$
\begin{array}{lll}
I_{32}(v(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \subseteq v(\mathcal{Y}) \text{ i } |v(\mathcal{X})| = 1; \\
I_{32}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \subseteq v(\mathcal{Y}) \text{ i } v(\mathcal{X}) \neq \emptyset; \\
I_{32}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset.
\end{array}
$$

Twierdzenie 28. *System **OntSyl** jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy $\mathsf{M}_{I_{32}}$.*

Dowód. Tak jak w przypadku Twierdzenia 10 wystarczy pokazać, że tezy systemu są tautologiami w klasie modeli, a wyrażenia odrzucone nie są.

Sprawdzenie, że aksjomaty **OntSyl** są tautologiami jest rutynowe. Aksjomaty odrzucone są niespełnione odpowiednio przy następujących wartościowaniach v_1 i v_2: $v_1(S) = \{1\}$, $v_1(P) = \{2\}$, $v_1(M) = \{1, 2\}$ dla aksjomatu odrzuconego (3.43) oraz $v_2(S) = \emptyset$, $v_2(P) = \{1\}$ dla – (3.44).

Reguły MP, Sub, MP^{-1} i Sub^{-1} zachowują, tak jak w przypadku wcześniej rozpatrywanych systemów, odpowiednio tautologiczność i nietautologiczność. Pozostaje do udowodnienia, że reguła $Comp^{-1}$ prowadzi od fałszywych przesłanek do fałszywej konkluzji. Tak jak w przypadku Twierdzenia 10 ograniczymy się do wykazania tego faktu dla $n = 2$.

Wykorzystamy prawa rachunku zbiorów (2.17), (2.25) i (3.9) z dowodu Twierdzeń 10, 13 i 21. Podobnie jak w poprzednich twierdzeniach o pełności niech formuły $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$ będą niespełnione w modelach określonych przez dziedziny odpowiednio D_1 i D_2 oraz wartościowania odpowiednio

v_1 i v_2. Rozpatrzymy model określony w dziedzinie $D_1 \times D_2$ z wartościowaniem v_3, takim że dla każdej zmiennej $\mathcal{X}$, $v_3(\mathcal{X}) = v_1(\mathcal{X}) \times v_2(\mathcal{X})$. Na podstawie wymienionych praw rachunku zbiorów otrzymujemy:

$$I_{32}(v_3(\alpha \rightarrow \beta_1 \vee \beta_2)) = 0.$$

■

3.3.4 Niezależność aksjomatów

Twierdzenie 29. *Aksjomaty systemu **OntSyl** są niezależne.*

Dowód. Tak jak w dotychczasowych dowodach twierdzeń o niezależności aksjomatyzacji dla każdego aksjomatu pokażemy klasę modeli, w której pozostałe aksjomaty są tautologiami, a rozpatrywany aksjomat nie jest. We wszystkich przypadkach interpretacja funktorów rachunku zdań jest klasyczna.

Aksjomat (3.17).

Interpretacja I_{33}:
dla dowolnego atomu α zbudowanego z użyciem funktora i i dowolnego wartościowania v $I_{33}(v(\alpha)) = 1$, dla pozostałych zdań atomowych interpretacja określona jest poprzez matryce:

ε	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	0	0

a	n_1	n_2
n_1	1	1
n_2	0	1

Aksjomat (3.17) jest niespełniony przy wartościowaniu v, dla którego: $v(S) = n_1$ a $v(P) = n_2$.

Aksjomat (3.18).

Interpretacja I_{34}:
dla dowolnego atomu α zbudowanego z użyciem funktora ε i dowolnego wartościowania v $I_{34}(v(\alpha)) = 1$, dla pozostałych zdań atomowych interpretacja daje zawsze wartość 0.

Aksjomat (3.19).

Interpretacja I_{35}:
dla dowolnego atomu α zbudowanego z użyciem funktora a lub i i dowolnego wartościowania v $I_{35}(v(\alpha)) = 1$, dla pozostałych zdań atomowych interpretacja określona jest poprzez matrycę:

ε	n_1	n_2
n_1	0	0
n_2	1	1

Aksjomat (3.19) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$, $v(M) = n_2$.

Aksjomat (3.20).

Interpretacja I_{36}:
dla dowolnego atomu α zbudowanego z użyciem funktora i i dowolnego wartościowania v $I_{36}(v(\alpha)) = 1$, dla pozostałych zdań atomowych interpretacja określona jest poprzez matryce:

ε/a	n_1	n_2
n_1	0	0
n_2	1	1

Aksjomat (3.20) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$.

Aksjomat (3.21).

Interpretacja I_{37}:
dla dowolnego atomu α zbudowanego z użyciem funktora i oraz dowolnego wartościowania v $I_{37}(v(\alpha)) = 1$, dla pozostałych zdań atomowych interpretacja daje zawsze wartość 0.

Aksjomat (3.22).

Interpretacja I_{38}:
dla dowolnego atomu α zbudowanego z użyciem funktora i oraz dowolnego

wartościowania v $I_{38}(v(\alpha)) = 0$, dla pozostałych zdań atomowych interpretacja daje zawsze wartość 1.

Aksjomat (3.23).

Interpretacja I_{39}:
dla dowolnego atomu α zbudowanego z użyciem funktora i oraz dowolnego wartościowania v $I_{39}(v(\alpha)) = 1$, dla dowolnego atomu β zbudowanego z użyciem funktora ε oraz dowolnego wartościowania v $I_{39}(v(\beta)) = 0$, dla pozostałych atomów interpretację I_{39} określa matryca:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	1	1	0
n_2	1	1	1
n_3	1	1	1

Aksjomat (3.23) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_3$, a $v(M) = n_2$.

Aksjomat (3.24).

Interpretacja I_{40}:
dla dowolnego atomu α zbudowanego z użyciem funktora ε oraz dowolnego wartościowania v $I_{40}(v(\alpha)) = 0$, dla pozostałych atomów interpretację I_{40} określa matryca:

a/i	n_1	n_2
n_1	1	1
n_2	0	1

Aksjomat (3.24) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$, $v(M) = n_2$. ■

Twierdzenie 30. *Aksjomaty odrzucone systemu* ***OntSyl*** *są niezależne.*

Dowód. Tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 15 wystarczy pokazać, że żadnego z dwóch aksjomatów nie da się w systemie wyprowadzić z drugiego. Pokażemy to przez wskazanie interpretacji wyznaczających klasy modeli, dla których aksjomaty systemu oraz jeden z aksjomatów odrzuconych są tautologiami, a drugi z aksjomatów odrzuconych nie jest tautologią.

Niezależność aksjomatu (3.43) pokazuje interpretacja I_{41} określona przez matryce:

ε	n_1	n_2	n_3
n_1	1	0	1
n_2	0	1	1
n_3	0	0	0

a	n_1	n_2	n_3
n_1	1	0	1
n_2	0	1	1
n_3	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3
n_1	1	0	1
n_2	0	1	1
n_3	1	1	1

Aksjomat (3.4) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$, a $v(M) = n_3$.

Niezależność aksjomatu (3.44) pokazuje interpretacja I_{42} określona przez matrycę:

$\varepsilon/a/i$	n_1	n_2
n_1	0	0
n_2	0	1

Aksjomat (3.13) jest niespełniony przy wartościowaniu v, dla którego $v(S) = n_1$, a $v(P) = n_2$. ■

3.3.5 Definicje dodatkowych stałych Ontologii Leśniewskiego w systemie OntSyl

System **OntSyl** można wzbogacić poprzez wprowadzenie przy pomocy metajęzykowych skrótów definicyjnych kolejne funktory rachunku nazw (funktory e oraz o określone są w Rozdziale 1.1 przy użyciu definicji (1.31) oraz (1.32)):

$$ex_1(S) =_{df} S\varepsilon S, \tag{3.53}$$

$$ex(S) =_{df} SiS, \tag{3.54}$$

$$sol(S) =_{df} ex_1(S) \vee \neg ex(S), \tag{3.55}$$

$$S\ is\_the\ P =_{df} S\varepsilon P \wedge P\varepsilon S, \tag{3.56}$$

$$S\ is\_a\ P =_{df} S\varepsilon P \wedge \neg P\varepsilon P. \tag{3.57}$$

Wszystkie powyższe skróty definicyjne są wolne od kwantyfikatorów. Rozpatrywany system zawiera wszystkie funktory rachunku nazw, które zostały określone na początku niniejszej pracy[2].

Wykorzystując powyższe definicje możemy rozszerzyć interpretację I_{32}, konstytuującą klasę modeli względem której system **OntSyl** jest pełny, o interpretację zdefiniowanych funktorów. Interpretacja zdefiniowanych funktorów jest następująca:

$$
\begin{array}{lll}
I_{32}(v(\mathcal{X}e\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{Y}) = \emptyset; \\
I_{32}(v(\mathcal{X}o\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \not\subseteq v(\mathcal{Y}) \text{ lub } v(\mathcal{X}) = \emptyset; \\
I_{32}(v(ex_1(\mathcal{X}))) = 1 & \text{wtw} & |v(\mathcal{X})| = 1; \\
I_{32}(v(ex(\mathcal{X}))) = 1 & \text{wtw} & |v(\mathcal{X})| \geqslant 1; \\
I_{32}(v(sol(\mathcal{X}))) = 1 & \text{wtw} & |v(\mathcal{X})| \leqslant 1; \\
I_{32}(v(\mathcal{X}\ is\_the\ \mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) = v(\mathcal{Y}) \text{ i } |v(\mathcal{X})| = 1; \\
I_{32}(v(\mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \subseteq v(\mathcal{Y}) \text{ i } |v(\mathcal{X})| = 1 \text{ i } |v(\mathcal{Y})| > 1.
\end{array}
$$

3.3.6 Alternatywna aksjomatyzacja systemu

Alternatywną w stosunku do systemu **OntSyl** aksjomatyzację opartą na innych terminach pierwotnych oznaczymy **OntSyl***. Terminami pierwotnymi są a, i oraz ex_1. Aksjomatami są podstawienia wszystkich tez klasycznego rachunku zdań w języku systemu, aksjomaty systemu **Stnd**: (2.18), (2.6), (2.3) i (2.4) oraz następujące formuły:

$$ex_1(S) \rightarrow SiS, \tag{3.58}$$

$$ex_1(S) \wedge SiP \rightarrow SaP, \tag{3.59}$$

$$ex_1(P) \wedge SaP \rightarrow ex_1(S). \tag{3.60}$$

W systemie **OntSyl*** można zdefiniować funktor ε przy użyciu następującej formuły:

$$S\varepsilon P \equiv SaP \wedge ex_1(S). \tag{3.61}$$

[2]Do systemu można dołączyć również inne funktory, które dadzą się zdefiniować w oparciu o stosunki zakresowe między nazwami. Przykładem niech będzie funktor tworzący zdania ogólnotwierdzące w tzw. słabej interpretacji (odpowiadającej zwykłemu zawieraniu się odpowiednich zbiorów i rozumieniu funktora a w systemie **B**) występujący m. in. w pracach [56, 42]. Funktor ten, dla którego przyjmiemy tu oznaczenie $a^\star$ możemy zdefiniować następująco:

$$Aa^\star B =_{df} AaB \vee \neg AiA$$

.

Twierdzenie 31. *System* ***OntSyl*** *z definicją (3.53) jest równoważny systemowi* ***OntSyl**** *z definicją (3.61).*

Dowód. Po zastąpieniu w aksjomatach (3.17), (3.18), (3.19) i (3.20) systemu **OntSyl** atomów zawierających funktor ε odpowiednimi wyrażeniami zgodnie z definicją (3.61), otrzymamy następujące formuły:

$$SaP \wedge ex_1(S) \to SaS \wedge ex_1(S), \tag{3.62}$$

$$SaP \wedge ex_1(S) \to SaP, \tag{3.63}$$

$$SaM \wedge MaP \wedge ex_1(M) \to SaP \wedge ex_1(S), \tag{3.64}$$

$$SiP \wedge PaP \wedge ex_1(P) \to PaS \wedge ex_1(P). \tag{3.65}$$

Są one tezami systemu **OntSyl*** na mocy odpowiednio:

- (2.18) i (2.19) dla (3.62);
- prawa tautologii klasycznego rachunku zdań dla (3.63);
- (2.3) i (3.60) dla (3.64);
- (3.59) dla (3.65).

Z kolei aksjomaty (3.58), (3.59), (3.60) po zastąpieniu atomów, w których występuje funktor ex_1 zgodnie z definicją (3.53), przyjmują postać:

$$S\varepsilon S \to SiS, \tag{3.66}$$

$$S\varepsilon S \wedge SiP \to SaP, \tag{3.67}$$

$$P\varepsilon P \wedge SaP \to S\varepsilon S. \tag{3.68}$$

Są one tezami systemu **OntSyl** na mocy odpowiednio:

- (3.26) dla (3.66);
- (3.18) i (3.20) dla (3.67);
- (3.33) dla (3.68).

∎

3.4 Separacja w odniesieniu do Ontologii Leśniewskiego

Ontologia Leśniewskiego zbudowana jest w języku, który stanowi rozszerzenie języka rachunku nazw o kwantyfikatory. Ograniczymy się do podstawowej Ontologii[3] – tej części Ontologii, która odpowiada teorii nazw w naszym rozumieniu.

Poprawnie zbudowaną formułę rachunku podstawowej Ontologii można zdefiniować indukcyjnie w następujący sposób.

1. Wyrażenia $\ulcorner \mathcal{X}a\mathcal{Y} \urcorner$, $\ulcorner \mathcal{X}i\mathcal{Y} \urcorner$, $\ulcorner \mathcal{X}\varepsilon\mathcal{Y} \urcorner$, gdzie $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ reprezentują zmienne nazwowe, są poprawnie zbudowanymi formułami.

2. Jeżeli α jest poprawnie zbudowaną formułą, to $\ulcorner \neg\alpha \urcorner$ jest poprawnie zbudowaną formułą.

3. Jeżeli α i β są poprawnie zbudowanymi formułami, to $\ulcorner(\alpha \wedge \beta)\urcorner$, $\ulcorner(\alpha \vee \beta)\urcorner$, $\ulcorner(\alpha \to \beta)\urcorner$ i $\ulcorner(\alpha \equiv \beta)\urcorner$ są poprawnie zbudowanymi formułami.

4. Jeżeli α jest poprawnie zbudowaną formułą, a $\mathcal{X}$ zmienną, to $\ulcorner \forall_{\mathcal{X}}\alpha \urcorner$ oraz $\ulcorner \exists_{\mathcal{X}}\alpha \urcorner$ są poprawnie zbudowanymi formułami.

Język określony jest w bardzo podobny sposób do języka logiki pierwszego rzędu i w odniesieniu do rachunku nazw tu rozpatrywanego w zasadzie nie ma różnicy między tymi formalizmami.

Podstawowy system Ontologii oparty jest na regułach odrywania i podstawiania oraz regułach dla kwantyfikatorów. Jedyny aksjomat Ontologii przyjmuje postać (w wersji z pracy Słupeckiego [56]):

$$S\varepsilon P \equiv \exists_M(M\varepsilon S) \wedge \forall_{M,N}(M\varepsilon S \wedge N\varepsilon S \to M\varepsilon N) \wedge \forall_M(M\varepsilon S \to M\varepsilon P) \quad (3.69)$$

[3] W Ontologii używa się pojęcia Ontologia elementarna, które nie pokrywa się jednak z podstawową Ontologią, o której mowa w niniejszej pracy.

Formalizacji podsatwowej Ontologii dopełniają definicje[4]:

$$SaP \equiv \exists_M(M\varepsilon S) \wedge \forall_M(M\varepsilon S \to M\varepsilon P); \tag{3.70}$$

$$SiP \equiv \exists_M(M\varepsilon S \wedge M\varepsilon P). \tag{3.71}$$

Twierdzenie 32. *Każda teza podstawowej Ontologii należąca do języka rachuku nazw jest tezą systemu* ***OntSyl****.*

Dowód. Można sprawdzić, że zarówno aksjomat Ontologii, jak i powyższe definicje (3.70) i (3.71) są prawdziwe w każdym modelu należącym do klasy $\mathsf{M}_{I_{32}}$. W związku z tym każda teza podstawowej Ontologii jest w tej klasie tautologią. Na mocy Twierdzenia 28 jest wtedy tezą systemu **OntSyl**. ■

Stosunek pomiędzy systemem podstawowej Ontologii a systemami bezkwantyfikatorowego rachunku nazw jest wyraźnie widoczny w świetle następującego faktu przedstawionego przez M. Takano w pracy [61]. Autor ten podaje, że aksjomat Ontologii (3.69) można uzyskać z formuł (3.1), (3.2) i (3.3) oraz następującej formuły:

$$\forall_S \forall_P \forall_M ((\forall_N (N\varepsilon S \equiv N\varepsilon P) \wedge S\varepsilon M) \to P\varepsilon M). \tag{3.72}$$

Formuła (3.72) jest pewną formą zasady ekstensjonalności[5]. Można więc fakt, że pełna oryginalna Ontologia Leśniewskiego może zostać właśnie tak otrzymana z systemu bezkwantyfikatorowego rozumieć w ten sposób, że system bezkwantyfikatorowy wyraża specyficzna treść logiczną Ontologii, a dodatkowy aksjomat wyraża w istocie prawidłowość ogólniejszą dotyczącą sposobu traktowania identycznych nazw w teorii kwantyfikatorów.

[4]Poniższe definicje mają, zgodnie z praktyką Leśniewskiego, charakter zdań języka, można więc rozumieć je jako aksjomaty charakteryzujące wprowadzane przez definicje stałe. Definicje w systemach Leśniewskiego mogą mieć charakter twórczy - umożliwiać udowodnienie tez, w których nie występują terminy definiowane, a które nie dadzą się udowodnić bez tych definicji. Rozpatrywane tu dwie definicje nie mają charakteru twórczego.

[5]Szerzej o różnych formach zasady ekstensjonalności i ich roli w Ontologii pisze Waragai w pracy [65].

Rozdział 4

Sylogistyki nieklasyczne

Punktem wyjścia dla rozważań niniejszego rozdziału jest system sylogistyki zaprezentowany przez Słupeckiego w pracy [54]. Pokazuje on, że można skonstruować sensowny system sylogistyki, który nie ma interpretacji zakresowej. Zauważenie tego faktu odkrywa całą przestrzeń aksjomatycznych systemów sylogistyki. Część tej przestrzeni rozpościera się między systemem Słupeckiego a systemem Łukasiewicza. Jeszcze inne systemy są rozszerzeniami systemu Słupeckiego i krzyżują się z systemem Łukasiewicza.

Rozpoczniemy ten rozdział od przedstawienia i analizy systemu Słupeckiego. Zaprezentujemy jego aksjomatykę za artykułem [54] oraz system aksjomatycznego odrzucania, który pojawił się w pracy B. Iwanusia [17]. Przedstawimy również strukturę teoriomodelową dla tego systemu, która opisana została w artykule [26] Autora niniejszej rozprawy.

Kolejne systemy zostały określone jako sylogistyka dowodowa. Przedstawimy uzasadnienie intuicyjne dla konstruowania takich systemów oraz ich formalną prezentację wraz z uzupełnieniem w postaci aksjomatycznego odrzucania.

Z punktu widzenia systemu aksjomatycznego i modelu zmiana jest bardzo prosta. Dodany jest aksjomat antyzwrotności dla zdań ogólnotwierdzących, a w modelu odpowiada temu zmiana relacji zawierania się na relację właściwego zawierania się. Zmiana ta powoduje jednak większe różnice na poziomie aksjomatyki odrzuceniowej. Nie da się zbudować systemów aksjomatycznego odrzucania dla tych teorii z użyciem skończonej liczby aksjomatów, tak jak w systemach **Łuk**, **Stnd**, czy też w systemie Słupeckiego, ale wykorzystane są schematy aksjomatów odrzuconych.

Podstawy sylogistyki dowodowej zostały zaprezentowane w pracy [24]. Rozważania o sylogistyce dowodowej zostały w niniejszej rozprawie poszerzone o semantykę systemu, który oznaczać będziemy $\mathbf{D}_1$ oraz o wykazanie niezależności wszystkich systemów aksjomatycznych.

Następnie przedstawimy szereg tez systemu Łukasiewicza, które nie są tezami systemu Słupeckiego, oraz ich wzajemne relacje. W ten sposób zapoznamy się z przestrzenią możliwych do zdefiniowania systemów znajdujących się pomiędzy systemem Słupeckiego a systemem Łukasiewicza. Analizy te nie były wcześniej publikowane. Podrozdział dotyczący systemów, które umieścić można pomiędzy systemem Słupeckiego a systemem Łukasiewicza, ma charakter szkicowy, gdyż liczba systemów, które można tu zbudować jest znaczna, a przestrzeń ta nie była dotąd badana. Przedstawione zostaną zatem jedynie wybrane systemy i wstępna ich analiza. Dla niektórych z nich zaprezentujemy pewne intuicje semantyczne. Kwestia charakteru struktury, którą tworzą omawiane systemy oraz ich semantyki, pozostaje więc w zasadzie problemem otwartym.

4.1 System Słupeckiego

4.1.1 System aksjomatyczny

W systemie Słupeckiego (**Słp**) język jest ten sam, co w systemie **Łuk**, a więc terminami pierwotnymi są a oraz i. Wykorzystywane są reguły odrywania MP i podstawiania *Sub*. Aksjomatami są wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań w języku oraz formuły (2.3), (2.4), (2.5) i (2.6).

Wszystkie aksjomaty systemu **Słp** są aksjomatami bądź tezami systemu **Stnd**, a więc system **Słp** jest podsystemem systemu **Stnd** oraz systemu **Łuk**.

Tak jak w systemie **Łuk**, tezami systemu **Słp** są formuły (2.7), (2.8), (2.9) i (2.22). W związku z tym w systemie **Słp** obowiązują odpowiedniki Lematów 5 oraz 6.

Lemat 48. *Niech α będzie formułą o postaci $\beta \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ lub $\beta \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$, gdzie β jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi.*

*α jest tezą systemu **Słp** wtedy i tylko wtedy, gdy α jest tezą systemu **Łuk**.*

Dowód. ($\to$) Zachodzi, ponieważ system **Słp** jest podsystemem systemu **Łuk**.

($\leftarrow$) Niech α będzie tezą systemu **Łuk**. Jak wynika z dowodu Lematu 9 (przypadek (iv) i (v)), wyrażenie o postaci $\beta \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ jest tezą systemu wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki Lematu 5, a wyrażenie o postaci $\beta \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$ jest tezą systemu **Łuk** wtedy i tylko wtedy, gdy β spełnia warunki Lematu 6. Ponieważ odpowiedniki Lematów 5 i 6 zachodzą dla systemu **Słp**, α jest tezą **Słp**. ■

Tezami systemu **Słp** są następujące formuły:

$$SaM \wedge MaS \to MaM, \tag{4.1}$$

stanowiąca podstawienie aksjomatu (2.3) i

$$SaP \to PiP, \tag{4.2}$$

otrzymana z aksjomatów (2.4) i (2.5).

4.1.2 Aksjomatyczny system odrzucania

Aksjomatyczny system odrzucania dla systemu **Słp** określony jest przy użyciu reguł odrzucania MP^{-1}, Sub^{-1} oraz $Comp^{-1}$. Aksjomatami odrzuconymi dla systemu **Słp** są następujące formuły:

$$MaP \wedge PaP \to MiM, \tag{4.3}$$

$$SaS \wedge SaM \wedge MaP \wedge PaP \to MaM, \tag{4.4}$$

$$SaS \wedge SaM \wedge PaP \wedge PaM \wedge MaM \to SiP. \tag{4.5}$$

Definicja 19. *Wyrażeniem odrzuconym systemu **Słp** jest każdy z aksjomatów odrzuconych (4.3), (4.4) i (4.5) oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania: MP^{-1}, Sub^{-1} lub $Comp^{-1}$.*

Lemat 49. *W systemie **Słp** wyrażeniami odrzuconymi są formuły: (2.11), (2.1), (2.2), oraz*

$$SaS \wedge PaP \wedge PaS \to SaP. \tag{4.6}$$

Dowód. Odrzucenie formuł (2.1), (2.2) uzyskać można poprzez zastosowanie reguły MP^{-1} do aksjomatów odrzuconych (4.4) i (4.3) i odpowiednich podstawień praw KRZ.

Odrzucenie formuły (2.11) jest następujące:

1.	$\vdash \neg PaP \rightarrow (MaP \wedge PaP \rightarrow MiM))$	KRZ
2.	$\dashv MaP \wedge PaP \rightarrow MiM$	aksjomat odrzucony (4.3)
3.	$\dashv \neg PaP$	MP^{-1}: 1, 2
	$\dashv \neg SaS$	Sub^{-1}: 3

Odrzucenie formuły (4.6) jest następujące (α reprezentować będzie formułę (4.5):

1.	$\vdash (SaM \wedge MaP \rightarrow SiP) \rightarrow$ $((PaP \wedge MaM \wedge PaM \rightarrow MaP) \rightarrow \alpha)$	KRZ
2.	$\vdash SaM \wedge MaP \rightarrow SiP$	KRZ, aks. (2.3), aks.(2.6)
3.	$\vdash (PaP \wedge MaM \wedge PaM \rightarrow MaP) \rightarrow \alpha$	MP: 1, 2
4.	$\dashv \alpha$	aks. odrzucony (4.5)
5.	$\dashv PaP \wedge MaM \wedge PaM \rightarrow MaP$	MP^{-1}: 3, 4
	$\dashv PaP \wedge SaS \wedge PaS \rightarrow SaP$	Sub^{-1}: 5

■

Lemat 50. *Każda formuła atomowa języka systemu **Słp** jest wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Wszystkie formuły atomowe można odrzucić korzystając z reguły Sub^{-1} zastosowanej do formuł (2.1) i (2.2) odrzuconych na mocy Lematu 49. ■

Lemat 51. *Każda formuła hornowska języka systemu **Słp** jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Jak w dowodzie Lematu 9, rozważymy osobno każdą z możliwych postaci formuły hornowskiej języka systemu (pomijając formuły atomowe, które są odrzucone na mocy Lematu 50): (i) $\neg\alpha$, (ii) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{X}$, (iii) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{X}$, (iv) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y}$, (v) $\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y}$, gdzie α jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi.

Ponieważ odrzucona jest formuła (2.11) wymieniona w Lemacie 49, dla przypadku (i) dowód pokrywa się z analogicznymi przypadkami dla systemu **Łuk**.

Przypadek (ii). Formuła o tej postaci jest tezą systemu **Słp**, gdy α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{X}$ z $\mathcal{X}$. W przeciwnym przypadku stosujemy podstawienie

e_1, w którym podstawiamy: M za $\mathcal{X}$; S za każdą zmienną $\mathcal{Y}$, taką że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$; P za wszystkie inne zmienne. $e_1(\mathcal{X}) = M$, a $e_1(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{PaP$, SaS, SaM, MaP, SaP, SiS, PiP, MiM, MiS, SiM, MiP, PiM, SiP, $PiS\}$. Przy użyciu aksjomatów (2.5), (2.6) i (2.3) uzyskamy w tej sytuacji $\vdash PaP \wedge SaS \wedge SaM \wedge MaP \rightarrow e_1(\alpha)$, i dalej, $\vdash e_1(\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{X}) \rightarrow (PaP \wedge SaS \wedge SaM \wedge MaP \rightarrow MaM)$. W obecności aksjomatu odrzuconego (4.4) otrzymamy stąd przy użyciu reguły MP^{-1} $\dashv e_1(\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{X})$, i dalej, przy użyciu reguły Sub^{-1}, $\dashv \alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{X}$.

Przypadek (iii). Formuła o postaci $\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{X}$ jest tezą systemu **Słp**, gdy α zawiera atom $\mathcal{X}i\mathcal{X}$ lub dla pewnego $\mathcal{Y}$ atom $\mathcal{Y}a\mathcal{X}$. W przeciwnym przypadku wykorzystamy podstawienie e_2, w którym podstawiamy: S za $\mathcal{X}$; P za wszystkie inne zmienne. $e_2(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{PaP$, SaP, PiP, SiP, $PiS\}$. Przy użyciu aksjomatów (2.5) i (2.6) otrzymamy $\vdash SaP \wedge PaP \rightarrow e_2(\alpha)$. Stąd na mocy praw KRZ mamy:

$$\vdash e_2(\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{X}) \rightarrow (SaP \wedge PaP \rightarrow SiS).$$

Następnik tej implikacji jest odrzucony przez zastosowanie reguły Sub^{-1} do aksjomatu (4.3), a więc odrzucona jest również formuła $\alpha \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{X}$.

W kolejnych przypadkach zastosujemy Lemat 48.

Przypadek (iv). Jeżeli α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$, to formuła $\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ jest tezą systemu **Łuk**, a więc również tezą **Słp**. W przeciwnym przypadku stosujemy podstawienie e_3, w którym podstawiamy: P za $\mathcal{Y}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{Z}$, taką że α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{Y}$ oraz S za wszystkie inne zmienne występujące w rozważanym wyrażeniu (w tym $\mathcal{X}$). $e_3(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{PaP$, SaS, PaS, SiS, PiP, SiP, $PiS\}$. Ze względu na aksjomat (2.6) i tezę (2.7) mamy $\vdash PaP \wedge SaS \wedge PaS \rightarrow e_3(\alpha)$, i dalej, na podstawie praw KRZ:

$$\vdash e_3(\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y}) \rightarrow (PaP \wedge SaS \wedge PaS \rightarrow SaP).$$

Następnik tej implikacji jest identyczny z formułą odrzuconą (4.6), a zatem odrzucona jest również wyjściowa formuła $\alpha \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y}$.

Przypadek (v). Jeżeli α spełnia jeden z warunków Lematu 6, to na jego mocy jest tezą systemu **Łuk**, a więc jest również tezą **Słp** .

W przeciwnym wypadku stosujemy podstawienie e_4, w którym podstawiamy: S za $\mathcal{X}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{V}$, dla której α zawiera łańcuch łączący

$\mathcal{V}$ z $\mathcal{X}$; P za $\mathcal{Y}$ oraz każdą zmienną $\mathcal{Z}$, dla której α zawiera łańcuch łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{Y}$; M za wszystkie inne zmienne. $e_4(\alpha)$ jest koniunkcją atomów ze zbioru $\{PaP, SaS, MaM, PaM, SaM, PiP, SiS, MiM, PiM, MiP, SiM, MiS\}$. Ponieważ tezami systemu są wyrażenia $SaP \to SiP$ i $SaP \to PiS$, mamy $\vdash PaP \wedge SaS \wedge MaM \wedge PaM \wedge SaM \to e_4(\alpha)$ i stąd na mocy praw KRZ $\vdash e_4(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}) \to (PaP \wedge SaS \wedge MaM \wedge PaM \wedge SaM \to SiP)$. Następnik ostatniej implikacji jest identyczny z aksjomatem odrzuconym (4.5), a więc wyjściowa formuła $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$ jest odrzucona. ■

Lemat 52. *Aksjomaty odrzucone (4.3), (4.4) i (4.5) nie są tezami systemu* ***Słp****.*

Dowód. Możemy zastosować rozumowanie analogiczne do użytego w dowodzie Lematu 10. We wszystkich interpretacjach w dowodzie funktory rachunku zdań interpretowane są klasycznie.

W przypadku aksjomatu odrzuconego (4.3) odpowiednia klasa modeli może być określona przez interpretację I_{43}, która dla formuł atomowych określona jest przez matryce:

a	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	0	1

i	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	1	1

Aksjomat odrzucony (4.3) jest niespełniony w modelu przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_1$, a $v(M) = n_2$.

W przypadku aksjomatu odrzuconego (4.4) odpowiednia klasa modeli może być określona przez interpretację I_{44}, która dla formuł atomowych zbudowanych przy użyciu funktora i daje zawsze wartość 1, a dla pozostałych formuł atomowych określona jest przez matrycę:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	1	1	1
n_2	0	0	1
n_3	0	0	1

Aksjomat odrzucony (4.4) jest niespełniony przy wartościowaniu v, w którym $v(P) = n_1$, $v(S) = n_3$ i $v(M) = n_2$.

W przypadku aksjomatu odrzuconego (4.5) odpowiednia klasa modeli może być określona przez interpretację I_1 z dowodu Twierdzenia 10, dotyczącego systemu **Łuk**.

Aksjomat odrzucony (4.5) jest niespełniony w modelu przy wartościowaniu v, w którym $v(P) = n_1$, $v(S) = n_2$, a $v(M) = n_3$. ■

Twierdzenie 33. *Każda formuła języka systemu **Słp** jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak Twierdzenia 9, z wykorzystaniem Lematu 51 oraz Lematu 52. ■

4.1.3 Niezależność aksjomatów

Zarówno aksjomaty, jak i aksjomaty odrzucone są w systemie **Słp** niezależne.

Twierdzenie 34. *Aksjomaty systemu **Słp** są niezależne.*

Dowód. W dowodzie posłużymy się rozumowaniem analogicznym do wykorzystanego w dowodzie Lematu 10. We wszystkich przypadkach interpretacja funktorów rachunku zdań jest klasyczna

Aksjomat (2.5).

Interpretacja I_3 z dowodu Twierdzenia 11.

Aksjomat (2.6).

Interpretacja I_{45}, która dla atomów zbudowanych z użyciem funktora a przyjmuje zawsze wartość 0, a dla pozostałych wartości zgodnie z matrycą:

i	n_1	n_2
n_1	1	0
n_2	1	1

Aksjomat (2.6) jest niespełniony przy wartościowaniu v, takim że $v(S) = n_2$, a $v(P) = n_1$.

Aksjomat (2.3).

Interpretacja I_5 z dowodu Twierdzenia 11 z tym samym wartościowaniem pokazującym nietautologiczność aksjomatu.

Aksjomat (2.4).

Interpretacja I_{46} określona poprzez matryce:

a	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	0	0

i	n_1	n_2
n_1	1	1
n_2	1	0

Aksjomat (2.4) jest fałszywy przy wartościowaniu v, dla którego: $v(S) = n_2$, $v(P) = n_2$, $v(M) = n_1$. ■

Twierdzenie 35. *Aksjomaty odrzucone systemu* ***Słp*** *są w systemie* ***Słp*** *niezależne.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że w każdej klasie modeli wykorzystanej w dowodzie Lematu 52 do wykazania, że poszczególne aksjomaty odrzucone nie są tezami **Słp**, pozostałe aksjomaty odrzucone są tautologiami. ■

4.1.4 Specyfika systemu Słupeckiego

System Słupeckiego charakteryzuje się tym, że z jednej strony wszystkie jego aksjomaty odpowiadają formom wnioskowania występującym u Arystotelesa, a z drugiej strony da się w nim udowodnić wszystkie formuły odpowiadające znanym z pism Arystotelesa formom rozumowań, wyrażalne w jego języku – tezami systemu są wszystkie sylogizmy oraz prawa kwadratu logicznego i konwersji. W tym sensie jest to system najbardziej zbliżony do oryginalnej sylogistyki wyłaniającej się z „Analityk pierwszych” Arystotelesa[1]. Problemem z nim związanym jest brak bezpośredniej interpretacji w teorii zbiorów. Okazało się bowiem, że wbrew pierwotnym intuicjom Słupeckiego nie odpowiada on dokładnie interpretacji związanej z systemem **Stnd**, będąc systemem od niego słabszym. Jednocześnie nie daje się wskazać innej naturalnej interpretacji dla tego systemu w rachunku zbiorów[2].

Wskazuje to na pewną rozbieżność pomiędzy wiernością systemowi klasycznej sylogistyki na poziomie syntaktycznym, a powszechnie przyjmowaną intuicją łączenia nazw ze zbiorami we współczesnym rozumieniu.

[1] Oczywiście nie możemy mieć pewności, że formalizacja sylogistyki, którą odnajdujemy w „Analitykach pierwszych” jest w pełni zgodna z intencją Arystotelesa.

[2] Obecność formuły (4.4) jako aksjomatu odrzuconego sprawia, że prawdziwość zdania typu $\mathcal{X}a\mathcal{X}$ nie może być wyznaczona przez zakres nazwy odpowiadającej zmiennej $\mathcal{X}$.

Dla lepszego zrozumienia *semantycznej* strony systemu Słupeckiego przedstawimy dla niego interpretację teoriomodelową. Jak już wspomnieliśmy, nie daje się jej zbudować w zwykły sposób, poprzez przypisanie nazwom zbiorów i określenie interpretacji funktorów w oparciu o relacje pomiędzy tymi zbiorami. Zbudujemy więc interpretację korzystającą z dodatkowych własności przypisywanych zmiennym nazwowym w ramach funkcji wartościowania. Funkcja ta przyporządkowywać będzie zmiennej nazwowej nie zbiór, ale parę: zbiór i etykietę pochodzącą ze zbioru $\{0,1\}$. Interpretacja funktorów będzie zdefiniowana w oparciu o tę parę.

Klasę modeli dla systemu **Słp** określa struktura: $\mathsf{M}_{I_{47}} = (D, I_{47}, v)$, gdzie D jest niepustym zbiorem, a wartościowanie v przypisuje zmiennym uporządkowaną parę (Z, E) $(Z \in (2^D - \emptyset)$, $E \in \{0,1\})$. Wartościowanie v można w tej sytuacji rozłożyć na dwie funkcje przypisujące zmiennym odpowiednio pierwszy i drugi element uporządkowanej pary będącej wartością funcji v. Oznaczymy te składowe funkcje literami f i g $(f : var \longrightarrow (2^D - \emptyset)$; $g : var \longrightarrow \{0,1\})$. Przy tych oznaczeniach dla dowolnego $\mathcal{X}$ wartościowanie v można zapisać następująco $v(\mathcal{X}) = (f(\mathcal{X}), g(\mathcal{X}))$. Interpretacja I_{47} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych jest określona następująco:

$$I_{47}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad \begin{array}{l} f(\mathcal{X}) \subset f(\mathcal{Y}) \text{ lub} \\ f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{Y}) \text{ i } g(\mathcal{X}) = g(\mathcal{Y}) = 1; \end{array}$$

$$I_{47}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad \begin{array}{l} f(\mathcal{X}) \cap f(\mathcal{Y}) \neq \emptyset \text{ lub} \\ f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{Y}) \text{ i } g(\mathcal{X}) = g(\mathcal{Y}) = 1 \text{ lub} \\ f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{Y}) \text{ i } |f(\mathcal{X})| \geqslant 2. \end{array}$$

W określeniu interpretacji dla funktora a mamy do czynienia z właściwym zawieraniem się zbiorów.

Zauważmy, że definicja modeli $\mathsf{M}_{I_{47}}$ jest taka, że dla formuł atomowych z różnymi zmiennymi[3] otrzymujemy te same wartości co w interpretacji I_2, określonej dla systemu **Łuk**. Różnica dotyczy atomów, w których zmienne są takie same. W tej sytuacji brana jest pod uwagę etykieta przypisana zmiennej przez funkcję g, która określa dla których nazw spełniona jest formuła $\mathcal{X}a\mathcal{X}$

[3]Formalnie rozróżnione są co prawda zbiory w interpretacji, a nie zmienne, ale pozwala to w rezultacie na rozróżnienie zmiennych, gdyż w przypadku dwóch różnych zmiennych pojawić się muszą w ramach klasy modeli wartościowania przypisujące zmiennym różne zbiory.

(i w konsekwencji w związku z tezą $SaP \to SiP$ również formuła $\mathcal{X}i\mathcal{X}$). Dodatkowo ostatni z członów alternatywy w warunku dla zdań o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ odpowiada tezie $SaP \to PiP$[4].

Do udowodnienia pełności potrzebne będą następujące dwa lematy:

Lemat 53. *Niech α będzie formułą o postaci $\beta \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ lub $\beta \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$, gdzie β jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ różnymi zmiennymi. Jeżeli α nie jest tezą systemu **Słp**, to istnieje model z klasy $\mathsf{M}_{I_{47}}$, w którym formuła α nie jest spełniona, taki że $f(\mathcal{X}) \neq f(\mathcal{Y})$.*

Dowód. Na mocy Lematu 48, jeżeli α nie jest tezą **Słp**, to nie jest również tezą **Łuk**. Zgodnie z Twierdzeniem 10 istnieje więc model w klasie modeli M_{I_2}, w którym formuła α nie jest spełniona. Aby to było możliwe, musi istnieć w ramach tego modelu dziedzina D i wartościowanie v, takie że $v(\mathcal{X}) \neq v(\mathcal{Y})$. Wobec tego możemy użyć tego wartościowania v jako funkcji f oraz dziedziny D, tworząc model z klasy $\mathsf{M}_{I_{47}}$, w którym formuła α jest niespełniona. ■

Lemat 54. *Niech dziedziny D_1 i D_2 oraz wartościowania v_1 i v_2 (dla dowolnego $i \in \{1, 2\}$ oraz $\mathcal{X}$, $v_i(\mathcal{X}) = (f_i(\mathcal{X}), g_i(\mathcal{X}))$) wyznaczają modele z klasy $\mathsf{M}_{I_{47}}$. W tej sytuacji dziedzina $D_3 = D_1 \times D_2$ i wartościowanie v_3, takie że dla dowolnego $\mathcal{X}$, $v_3(\mathcal{X}) = (f_1(\mathcal{X}) \times f_2(\mathcal{X}), min(g_1(\mathcal{X}), g_2(\mathcal{X})))$ również wyznacza model z klasy v_3, dla którego zachodzą następujące prawidłowości:*
(i) Jeżeli $I_{47}(v_1(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = I_{47}(v_2(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1$, to $I_{47}(v_3(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1$.
(ii) Jeżeli $I_{47}(v_1(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = I_{47}(v_2(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1$, to $I_{47}(v_3(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1$.

Dowód. Rozważymy dwa przypadki: (a) $f_1(\mathcal{X}) \neq f_1(\mathcal{Y})$ lub $f_2(\mathcal{X}) \neq f_2(\mathcal{Y})$ i (b) $f_1(\mathcal{X}) = f_1(\mathcal{Y})$ oraz $f_2(\mathcal{X}) = f_2(\mathcal{Y})$.

[4] W pracy [26] pokazano, że klasa modeli $\mathsf{M}_{I_{47}}$ może być równoważnie zastąpiona klasą modeli $\mathsf{M}_{I_{48}}$, w której dopuszcza się jako wartości funkcji f zbiór pusty. Odpowiednia interpretacja I_{48} jest wtedy definiowana następująco:

$$I_{48}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad \begin{array}{l} \emptyset \neq f(\mathcal{X}) \subset f(\mathcal{Y}) \text{ lub} \\ f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{Y}) \text{ i } g(\mathcal{X}) = g(\mathcal{Y}) = 1; \end{array}$$

$$I_{48}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad \begin{array}{l} f(\mathcal{X}) \cap f(\mathcal{Y}) \neq \emptyset \text{ lub} \\ f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{Y}) \text{ i } g(\mathcal{X}) = g(\mathcal{Y}) = 1 \text{ lub} \\ f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{Y}) \text{ i } |f(\mathcal{X})| \geqslant 2 \end{array}$$

W tej interpretacji dla formuł z różnymi zmiennymi otrzymujemy wartości takie same jak w interpretacji I_8 określonej dla systemu **Stnd**.

(i) W przypadku (a) $f_3(\mathcal{X}) = (f_1(\mathcal{X}) \times f_2(\mathcal{X})) \neq f_3(\mathcal{Y}) = (f_1(\mathcal{Y}) \times f_2(\mathcal{Y}))$ i $f_3(\mathcal{X}) \subset f_3(\mathcal{Y})$. W związku z tym $I_{47}(v_3(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1$. W przypadku (b) $f_3(\mathcal{X}) = (f_1(\mathcal{X}) \times f_2(\mathcal{X})) = f_3(\mathcal{Y}) = (f_1(\mathcal{Y}) \times f_2(\mathcal{Y}))$. Skoro $I_{47}(v_1(XaY)) = 1$ oraz $I_{47}(v_2(XaY)) = 1$, mamy również $g_1(\mathcal{X}) = g_1(\mathcal{Y}) = g_2(\mathcal{X}) = g_2(\mathcal{Y}) = 1$. W związku z tym $g_3(\mathcal{X}) = g_3(\mathcal{Y}) = 1$, i dalej, $I_{47}(v_3(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1$.

(ii) W przypadku (a), skoro $f_1(\mathcal{X}) \cap f_1(\mathcal{Y}) \neq \emptyset$ i $f_2(\mathcal{X}) \cap f_2(\mathcal{Y}) \neq \emptyset$, mamy też $f_3(\mathcal{X}) \cap f_3(\mathcal{Y}) \neq \emptyset$, i dalej, $I_{47}(v_3(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1$. W przypadku (b) $f_3(\mathcal{X}) = f_3(\mathcal{Y})$. Jeżeli teraz $|f_1(\mathcal{X})| \geqslant 2$ lub $|f_2(\mathcal{X})| \geqslant 2$, to również $|f_3(\mathcal{X})| \geqslant 2$ i $I_{47}(v_3(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1$. W przeciwnym wypadku $g_1(\mathcal{X}) = g_1(\mathcal{Y}) = g_2(\mathcal{X}) = g_2(\mathcal{Y}) = 1$. W związku z tym $g_3(\mathcal{X}) = g_3(\mathcal{Y}) = 1$, i dalej, $I_{47}(v_3(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1$. ■

Twierdzenie 36. *System* ***Słp*** *jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy modeli* $\mathsf{M}_{I_{47}}$.

Dowód. Na mocy Twierdzenia 33 wystarczy pokazać, że wszystkie tezy są tautologiami, a żadne wyrażenie odrzucone nie jest tautologą w klasie modeli $\mathsf{M}_{I_{47}}$.

Sprawdzenie, że aksjomaty są tautologiami, jest rutynowe. Aksjomaty odrzucone są niespełnione w modelach wyznaczonych przez następujące dziedziny i funkcje tworzące wartościowania:

- aksjomat (4.3) – $D = \{1, 2\}, f(S) = \{1\}, f(M) = \{1, 2\}, g(S) = 0, g(M) = 1$;
- aksjomat (4.4) – $D = \{1, 2, 3\}, f(S) = \{1\}, f(M) = \{1, 2\}, f(P) = \{1, 2, 3\}, g(S) = g(P) = 1, g(M) = 0$;
- aksjomat (4.5) – $D = \{1, 2\}, f(S) = \{1\}, f(P) = \{2\}, f(M) = \{1, 2\}, g(S) = g(P) = g(M) = 1$.

Reguły MP, Sub, MP^{-1} i Sub^{-1} zachowują odpowiednio tautologiczność i nietautologiczność. Aby zakończyć dowód, musimy wykazać, że reguła $Comp^{-1}$ prowadzi od przesłanek, które nie są tautologiami, do wniosku, który też tautologią nie jest. Pokażemy w tym celu, że jeżeli dwie formuły hornowskie $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$ nie są tautologiami, to tautologią nie jest formuła $\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2$. Rozszerzenie tej prawidłowości na dowolną ilość przesłanek reguły $Comp^{-1}$ można przeprowadzić przez prostą indukcję.

Niech D_1 i D_2 będą dziedzinami, a v_1 określone przez f_1, g_1 i v_2 określone przez f_2 i g_2 wartościowaniami wyznaczającymi odpowiednio modele, w których niespełnione są wyrażenia $\alpha \rightarrow \beta_1$ i $\alpha \rightarrow \beta_2$, tzn. $I_{47}(v_1(\alpha \rightarrow \beta_1)) = I_{47}(v_2(\alpha \rightarrow \beta_2)) = 0$.

Na mocy Lematu 53, jeżeli β_i $(i \in \{1, 2\})$ jest zbudowana przy użyciu dwóch różnych zmiennych $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, to funkcja f_i może być dobrana tak, aby $f_i(\mathcal{X}) \neq f_i(\mathcal{Y})$. Jeżeli β_i $(i \in \{1, 2\})$ przyjmuje postać $\mathcal{X}i\mathcal{X}$, to funkcje f_1 i f_2 muszą być dobrane tak, aby $|f_1(\mathcal{X})| = |f_2(\mathcal{X})| = 1$, w przeciwnym przypadku $I_{47}(v_i(\alpha \rightarrow \beta_i))$ przyjmowałoby wartość 1.

Pokażemy teraz, że dla modelu określonego przez dziedzinę $D_3 = D_1 \times D_2$ i wartościowanie $v_3(\mathcal{X}) = (f_1(\mathcal{X}) \times f_2(\mathcal{X}), min(g_1(\mathcal{X}), g_2(\mathcal{X})))$ zachodzi $I_{47}(v_3(\alpha \rightarrow \beta_1 \vee \beta_2)) = 0$. Na mocy Lematu 54 $I_{47}(v_3(\alpha)) = 1$. Musimy pokazać, że $I_{47}(v_3(\beta_1)) = I_{47}(v_3(\beta_2)) = 0$. Jeżeli β_i $(i \in \{1, 2\})$ przyjmuje postać $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ lub $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$, gdzie $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi, to $f_3(\mathcal{X}) \neq f_3(\mathcal{Y})$. Co więcej, w przypadku $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ mamy $f_3(\mathcal{X}) \not\subseteq f_3(\mathcal{Y})$, a w przypadku $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ mamy $f_3(\mathcal{X}) \cap f_3(\mathcal{Y}) = \emptyset$. W obu przypadkach $I_{47}(v_3(\beta_i)) = 0$. Jeżeli zaś $\beta_i = \mathcal{X}a\mathcal{X}$ lub $\beta_i = \mathcal{X}i\mathcal{X}$, to $g_3(\mathcal{X}) = 0$. Ponadto, w przypadku $\mathcal{X}i\mathcal{X}$ $f_3(X) = f_1 \times f_2$ jest zbiorem jednoelementowym. W rezultacie $I_{47}(v_3(\beta_i)) = 0$. ■

4.2 Sylogistyka dowodowa

4.2.1 Motywacja

Przy formalizacji sylogistyki jako materiał źródłowy brane są zazwyczaj pod uwagę jedynie rozważania Arystotelesa, dotyczące poprawnych trybów trzech figur sylogistycznych, zapisane w „Analitykach pierwszych". Do tego dołącza się późniejsze osiągnięcia logiki tradycyjnej oraz intuicje związane z interpretacją terminów sylogistycznych w teorii zbiorów.

Przy konstrukcji systemu analizowanego w niniejszym rozdziale uwzględnimy w aksjomatyzacji również uwagi Arystotelesa, związane z jego koncepcją dowodu, znajdujące się w „Analitykach wtórych". Dowód jest dla Arystotelesa elementem budowania wiedzy naukowej (episteme) i dla zrozumienia jego koncepcji dowodu niezbędne jest odwołanie się do koncepcji wiedzy. Wiedza naukowa, w odróżnieniu od mniemania czy przekonania, ma walor konieczności, bo oparta jest na poznaniu istotnych własności przedmiotów poznawanych, ich rzeczywistych przyczyn.

„Jasne więc, że poznanie naukowe jest czymś tego rodzaju; bo jeżeli wziąć pod uwagę ludzi nie mających wiedzy naukowej i takich, którzy ją posiedli, to pierwsi sądzą, iż rzecz tak się przedstawia, a ci drudzy wiedzą, że tak się przedstawia i rzeczywiście tak jest; a zatem to, co stanowi przedmiot wiedzy bezwarunkowej, nie może być inne niż jest.” (Analityki wtóre, 71 b)

W związku z tym, jako elementy dowodu mogą wystąpić sylogizmy w szczególnym kontekście: *„... sylogizm jest bardziej ogólny; dowód natomiast jest pewnym sylogizmem, ale nie każdy sylogizm jest dowodem.”* Przesłanki sylogizmów występujących w dowodach muszą być prawdziwe. Ponadto, muszą odwoływać się do istotnych własności przedmiotów, o których coś stwierdzają.

„Przez dowód rozumiem sylogizm tworzący wiedzę naukową, czyli taki, dzięki któremu, jeżeli tylko jesteśmy w jego posiadaniu, mamy tę wiedzę. Jeżeli przeto wiedza jest taka, jak ustaliliśmy, to i przesłanki wiedzy demonstratywnej muszą być prawdziwe, pierwotne, bezpośrednie, lepiej znane wcześniejsze [od wniosku] i muszą być jego przyczyną.” (Analityki wtóre, 71 b)

W rezultacie pojawiają się pewne prawidłowości, dotyczące użycia sylogizmów w dowodach, wykraczające poza rozważania z „Analityk pierwszych”, które mogą zostać uwzględnione w aksjomatyzacji sylogistyki. W Księdze I „Analityk wtórych” czytamy:

„Co więcej, jeżeli A jest własnością B, B nie może być własnością A, tzn. własnością własności. Dlatego A i B nie mogą być nawzajem orzekane o sobie; można coś prawdziwego o nich powiedzieć, ale jednego o drugim prawdziwie orzekać nie można.” (Analityki wtóre 83 a)

Dalej następuje obszerna argumentacja za tym stwierdzeniem odwołująca się z jednej strony do powodów związanych z techniką budowania dowodów, a z drugiej do metafizycznych własności substancji, jakości, rodzajów oraz ich wzajemnych powiązań. Nie będziemy tu wchodzili w dyskusję na temat tej argumentacji, przyjmując jedynie postawioną tezę i interpretując ją jako zdanie:

(*) „Nieprawda, że zarazem każde S jest P i każde P jest S”

zgodnie ze wskazówkami dotyczącymi sposobu czytania i rozumienia zdań ogólnotwierdzących z „Analityk pierwszych”. Zdanie to zostanie uwzględnione w tworzeniu przedstawionych dalej aksjomatyzacji sylogistyki.

Ponieważ w Księdze II „Analityk pierwszych” Arystoteles powołuje się na zdania ogólnotwierdzące odwracalne, w rozważaniach dotyczących dowodu błędnego koła przyjmujemy, że zdanie (*) jest związane jedynie z dowodami i dlatego przedstawione systemy nazywamy sylogistyką dowodową.

4.2.2 System $\mathbf{D}_1$

System aksjomatyczny

Terminami pierwotnymi systemu $\mathbf{D}_1$ są a oraz i. Przyjmujemy w systemie reguły wnioskowania MP i Sub. Aksjomatami $\mathbf{D}_1$ są wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań w języku, aksjomaty systemu **Słp**: (2.5), (2.6), (2.3) i (2.4) oraz formuła

$$\neg SaS. \tag{4.7}$$

Ponieważ system $\mathbf{D}_1$ jest rozszerzeniem systemu **Słp**, obowiązują w nim odpowiedniki Lematów 5 i 6. Na podstawie prawa transpozycji rachunku zdań i aksjomatu (2.3) otrzymać możemy jako tezę następujące wyrażenie reprezentujące w zapisie formalnym zdanie (*):

$$\neg(SaP \wedge PaS). \tag{4.8}$$

W systemach sylogistyki dowodowej istotne jest powtarzanie się tych samych zmiennych w łańcuchach. W związku z tym przyjmiemy poniższą definicję zbioru łańcuchów prostych wykorzystywaną w analizie tych systemów:

Definicja 20. *Niech dla dowolnych zmiennych $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ $dL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ będzie najmniejszym zbiorem formuł, takim że:*

- *$\mathcal{X}a\mathcal{Y} \in dL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, gdzie $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi oraz*
- *jeżeli $\alpha \in dL(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ i zmienna $\mathcal{Y}$ nie występuje w α, to $\alpha \wedge \mathcal{Z}a\mathcal{Y} \in dL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$.*

Elementy zbioru $dL(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ nazywać będziemy łańcuchami prostymi łączącymi zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$. Łańcuchem prostym jest więc każdy łańcuch, w którym żadna zmienna się nie powtarza.

Lemat 55. *Niech α będzie formułą elementarną należącą do zbioru $dL(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, a β dowolnym atomem. Tezami systemu $\boldsymbol{D}_1$ są wszystkie wyrażenia podpadające pod następujące schematy:*

$$\neg(\alpha \wedge \mathcal{Y}a\mathcal{X}), \tag{4.9}$$

$$\mathcal{X}a\mathcal{X} \rightarrow \beta, \tag{4.10}$$

$$\alpha \wedge \mathcal{Y}a\mathcal{X} \rightarrow \beta. \tag{4.11}$$

Dowód. Formuły podpadające pod schemat (4.9) są konsekwencją formuły (4.8) i Lematu 5. Formuły podpadające pod schemat (4.10) są konsekwencją aksjomatu (4.7) i Lematu 5. Formuły podpadające pod schemat (4.11) są konsekwencją formuł podpadających pod schemat (4.9). ■

System aksjomatycznego odrzucania

Następujące schematy będą wykorzystane do określenia systemu aksjomatycznego odrzucania dla systemu $\mathbf{D}_1$:

$$S_1iS_1 \wedge \alpha \wedge S_maM_1 \wedge P_1iP_1 \wedge \beta \wedge P_naM_1 \wedge \gamma \rightarrow S_miP_n, \tag{4.12}$$

gdzie $\alpha \in dL(S_1, S_m)$, $\beta \in dL(P_1, P_n)$, $\gamma \in dL(M_1, M_k)$ oraz α, β i γ nie zawierają wspólnych zmiennych;

$$\alpha \rightarrow SiS, \tag{4.13}$$

gdzie $\alpha \in dL(S, P)$.

Definicja 21. *Wyrażeniem odrzuconym systemu $\boldsymbol{D}_1$ jest każda formuła podpadająca pod któryś ze schematów (4.12) lub (4.13) oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania: MP^{-1}, Sub^{-1} lub $Comp^{-1}$.*

Lemat 56. *Każda formuła o postaci*

$$\neg(S_1iS_1 \wedge S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{n-1}aS_n). \tag{4.14}$$

jest odrzucona w systemie $\boldsymbol{D}_1$.

Dowód. Każda z rozpatrywanych formuł jest identyczna z negacją pewnej formuły podpadającej pod schemat (4.12) i może być w związku z tym odrzucona przy użyciu reguły MP^{-1}. ■

Lemat 57. *Każda formuła atomowa języka systemu* $\boldsymbol{D}_1$ *jest wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Ponieważ odrzucona jest każda formuła podpadająca pod schemat (4.13), odrzucona jest również formuła SiS. W obecności aksjomatu (2.6) odrzucone jest również SaS. W związku z tym, przy użyciu reguły Sub^{-1} można odrzucić każde wyrażenie atomowe języka systemu. ■

Lemat 58. *Każda formuła hornowska języka systemu* $\boldsymbol{D}_1$ *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Rozważymy osobno każdą z możliwych postaci formuły hornowskiej języka systemu (poza odrzuconymi formułami atomowymi): (i) $\neg\alpha$, (ii) $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{X}$, (iii) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$, (iv) $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$, (v) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{Y}$, gdzie α jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi.

Przypadek (i). Jeżeli α zawiera atom o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{X}$ bądź atom $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ i łańcuch prosty łączący zmienną $\mathcal{Y}$ ze zmienną $\mathcal{X}$, to na mocy aksjomatu (4.7) bądź Lematu 55 (i) $\neg\alpha$ jest tezą systemu $\mathbf{D}_1$.

W przeciwnym wypadku możemy wszystkie zmienne występujące w atomach zbudowanych przy użyciu funktora a formuły α uporządkować liniowo w taki sposób, że pierwszy argument każdego z takich atomów jest w tym porządku ściśle wcześniejszy od drugiego. Możemy więc skonstruować podstawienie e_1, w którym za te zmienne podstawiać będziemy zmienne ze zbioru $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, $n \geqslant 2$, w taki sposób, że każde zdanie zbudowane z użyciem funktora a w formule α przyjmie postać S_iaS_j, gdzie $i < j$. Za wszystkie inne zmienne podstawmy S_1. Na mocy aksjomatów (2.5) i (2.6), (2.3), tezy (2.21) oraz praw klasycznego rachunku zdań mamy:

$$\vdash e_1(\neg\alpha) \to \neg(S_1iS_1 \wedge S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{n-1}aS_n).$$

Następnik tej implikacji jest identyczny z wyrażeniem (4.14) odrzuconym na mocy Lematu 56, a zatem przy użyciu reguły MP^{-1} otrzymujemy $\dashv e_1(\neg\alpha)$, a dalej, przy użyciu reguły Sub^{-1}, $\dashv \neg\alpha$.

Przypadek (ii). W obecności aksjomatu (4.7) formuła taka jest równoważna $\neg\alpha$ i tym samym zastosować do niej można rezultat dotyczący przypadku (i).

Przypadek (iii). Jeżeli α zawiera atom o postaci $\mathcal{Y}a\mathcal{Y}$ bądź atom $\mathcal{Y}a\mathcal{Z}$ i łańcuch prosty łączący zmienną $\mathcal{Z}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$, to na mocy aksjomatu (4.7) bądź Obserwacji 55 (i) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$ jest tezą systemu $\mathbf{D}_1$. Z kolei, gdy α zawiera atom $\mathcal{X}i\mathcal{X}$ lub dla pewnego $\mathcal{Y}$ atom $\mathcal{Y}a\mathcal{X}$, to $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$ jest tezą systemu $\mathbf{D}_1$ na mocy prawa tautologii dla klasycznego rachunku zdań lub tezy (2.21).

W przeciwnym wypadku, tak jak w przypadku (i) możemy uporządkować liniowo zmienne występujące w α w atomach zbudowanych z użyciem funktora a i skonstruować podstawienie e_2 w następujący sposób: za $\mathcal{X}$ podstawić zmienną S_1, za zmienne pojawiające się w atomach zbudowanych z użyciem funktora a, różnych od $\mathcal{X}$, kolejno elementy zbioru $\{S_2, \ldots, S_n\}$, $n \geqslant 2$, a za wszystkie pozostałe zmienne – S_n. Na mocy praw KRZ oraz formuł (2.6), (2.7) i (2.23) otrzymujemy:

$$\vdash e_3(\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}) \to (S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{n-1}aS_n \to S_1iS_1).$$

Ponieważ następnik tej implikacji podpada pod schemat aksjomatu odrzuconego (4.13), odrzucona jest również formuła $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$.

Przypadek (iv). Jak w poprzednich przypadkach rozpatrywana formuła jest tezą jeżeli α zawiera atom $\mathcal{Z}a\mathcal{Z}$ bądź atom $\mathcal{Z}a\mathcal{V}$ i łańcuch prosty łączący zmienną $\mathcal{V}$ ze zmienną $\mathcal{Z}$. Dodatkowo, formuła ta jest tezą, gdy α zawiera łańcuch prosty łączący zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$.

W przeciwnym wypadku, wykorzystując zbiór zmiennych $\{S_1, \ldots, S_n\}$ ($n \geqslant 2$) i podstawienie e_1 określone jak w przypadku (i), otrzymamy $e_1(\mathcal{X}) = S_i$ i $e_1(\mathcal{Y}) = S_j$, takie że ($1 \leqslant j < i \leqslant n$). W tej sytuacji na mocy praw KRZ oraz formuł (2.6), (2.7) i (2.23) otrzymujemy:

$$\vdash e_1(\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}) \to (S_1iS_1 \wedge S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{n-1}aS_n \to S_iaS_j).$$

Jednocześnie na mocy Lematu 5 mamy również:

$$\vdash S_1iS_1 \wedge S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{n-1}aS_n \to S_jaS_i$$

oraz jako podstawienie tezy (4.8) $\neg(S_iaS_j \wedge S_jaS_i)$. Przekształcając te tezy systemu $\mathbf{D}_1$ przy użyciu praw KRZ, otrzymujemy:

$$\vdash e_1(\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}) \to \neg(S_1iS_1 \wedge S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{n-1}aS_n).$$

Następnik ostatniej implikacji jest identyczny z pewną formułą odrzuconą podpadającą pod schemat (4.14), a zatem odrzucona jest również formuła $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$.

Przypadek (v). Jak w poprzednich przypadkach rozpatrywana formuła jest tezą, jeżeli α zawiera atom $\mathcal{Z}a\mathcal{Z}$ bądź atom $\mathcal{Z}a\mathcal{V}$ i łańcuch prosty łączący zmienną $\mathcal{V}$ ze zmienną $\mathcal{Z}$. Dodatkowo, na mocy Lematu 6 jest tezą, jeżeli α zawiera:

- atom $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ lub $\mathcal{Y}i\mathcal{X}$ lub
- łańcuch prosty łączący $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$ lub $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$ lub
- dla pewnej zmiennej $\mathcal{Z}$ łańcuchy proste łączące $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{Y}$ lub
- atom $\mathcal{Z}i\mathcal{V}$ lub $\mathcal{V}iZ$ oraz łańcuch prosty łączący $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{X}$ i $\mathcal{V}$ z $\mathcal{Y}$.

W przeciwnym wypadku, wykorzystując fakt, że wszystkie zmienne występujące w atomach zbudowanych za pomocą funktora a da się ustawić w ciągi, które nie zawierają pętli, definiujemy podstawienie e_3, w którym podstawiamy:

- S_m za $\mathcal{X}$;
- P_n za $\mathcal{Y}$;
- elementy zbioru $\{S_1, \ldots, S_m\}$ za zmienne połączone łańcuchem prostym z $\mathcal{X}$;
- elementy zbioru $\{P_1, \ldots, P_n\}$ za zmienne połączone łańcuchem prostym z $\mathcal{Y}$;
- elementy zbioru $\{M_1, \ldots, M_k\}$ za wszystkie inne zmienne występujące w atomach zbudowanych za pomocą funktora a;
- M_1 za wszystkie pozostałe zmienne.

W tej sytuacji na mocy praw KRZ oraz formuł (2.6), (2.7) i (2.23) otrzymujemy jako tezę systemu $\mathbf{D}_1$ implikację, której poprzednikiem jest $e_1(\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y})$, a następnikiem formuła:

$$\begin{aligned} S_1iS_1 \wedge S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{m-1}aS_m \wedge S_maM_1 \wedge \\ P_1iP_1 \wedge P_1aP_2 \wedge \ldots \wedge P_{n-1}aP_n \wedge P_naM_1 \wedge \\ M_1aM_2 \wedge \ldots \wedge M_{k-1}aM_k \to S_miP_n \end{aligned}$$

podpadająca pod schemat (4.12). W związku z tym formuła $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ jest odrzucona. ■

Lemat 59. *Żadna z formuł podpadających pod schematy (4.12) i (4.13) nie jest tezą systemu* $\boldsymbol{D}_1$.

Dowód. Przedstawimy klasę modeli $\mathsf{M}_{I_{49}}$, w której wszystkie aksjomaty i tezy systemu $\mathbf{D}_1$ są tautologiami, a aksjomaty odrzucone nie są. Każdy z modeli przyjmuje postać (D, I_{49}, v), gdzie D jest niepustym zbiorem stanowiącym dziedzinę modelu, v wartościowaniem przypisującym zmiennym niepuste podzbiory dziedziny D, a I_{49} interpretacją, która dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych określona jest następująco:

$$
\begin{array}{lll}
I_{49}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \subset v(\mathcal{Y}); \\
I_{49}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y}) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset \text{ i } min(|v(\mathcal{X})|, |v(\mathcal{Y})|) \geqslant 2
\end{array}
$$

Łatwo sprawdzić, że wszystkie aksjomaty systemu $\mathbf{D}_1$ są prawdziwe w tak określonym modelu.

Rozważmy teraz dowolną formułę podpadającą pod schemat (4.12), tzn. formułę

$$S_1 i S_1 \wedge \alpha \wedge S_m a M_1 \wedge P_1 i P_1 \wedge \beta \wedge P_n a M_1 \wedge \gamma \to S_2 i P_2,$$

gdzie α, β i γ przyjmują odpowiednio postać:

- $S_1 a S_2 \wedge \ldots \wedge S_{m-1} a S_m$,
- $P_1 a P_2 \wedge \ldots \wedge P_{n-1} a P_n$ oraz
- $M_1 a M_2 \wedge \ldots \wedge M_{k-1} a M_k$.

Przy funkcji f określonej w następujący sposób:
$v(S_1) = \{1, 3\}$;
$v(S_i) = v(S_{i-1}) \cup \{2i + 1\}$, dla $1 < i \leqslant m$;
$v(P_1) = \{2, 4\}$;
$v(P_i) = v(P_{i-1}) \cup \{2i + 2\}$, dla $1 < i \leqslant n$;
$v(M_1) = v(S_m) \cup f(P_m)$;
$v(M_i) = v(M_{i-1}) \cup \{-i\}$, dla $1 < i \leqslant k$,
otrzymamy w schemacie zawsze zdanie fałszywe.

Z kolei formuły podpadające pod schemat (4.13), przyjmują postać

$$S_1 a S_2 \wedge \ldots \wedge S_{m-1} a S_m \to S_1 i S_1.$$

Są one fałszywe przy funkcji f określonej w następujący sposób:
$v(S_1) = \{1\}$;
$v(S_i) = v(S_{i-1}) \cup \{i\}$, dla $1 < i \leqslant m$. ■

Twierdzenie 37. *Każda formuła języka systemu* $\boldsymbol{D}_1$ *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak Twierdzenia 9, z wykorzystaniem Lematu 58 oraz Lematu 59. ■

Model dla systemu $\mathbf{D}_1$

System $\mathbf{D}_1$, tak samo jak system **Słp**, nie posiada naturalnego modelu w teorii zbiorów. Można jednak zdefiniować strukturę teoriomodelową dla systemu $\mathbf{D}_1$ w sposób analogiczny do modelu dla systemu **Słp**.

Klasę modeli dla systemu **Słp** określa struktura: $\mathsf{M}_{I_{50}} = (D, I_{50}, v)$, gdzie D jest niepustym zbiorem, v wartościowaniem, które złożone jest z funkcji f i g ($f : var \longrightarrow (2^D - \emptyset)$; $g : var \longrightarrow \{0, 1\}$) w taki sposób, że dla dowolnego $\mathcal{X}$, $v(\mathcal{X}) = (f(\mathcal{X}), g(\mathcal{X}))$. Interpretacja I_{50} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych jest określona następująco:

$$I_{50}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad f(\mathcal{X}) \subset f(\mathcal{Y});$$

$$I_{50}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad \begin{array}{l} f(\mathcal{X}) \cap f(\mathcal{Y}) \neq \emptyset \text{ lub} \\ f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{Y}) \text{ i } g(\mathcal{X}) = g(\mathcal{Y}) = 1 \text{ lub} \\ f(\mathcal{X}) = f(\mathcal{Y}) \text{ i } |f(\mathcal{X})| \geqslant 2. \end{array}$$

Tak jak w przypadku modelu dla systemu **Słp** zawieranie się, występujące w warunku dla $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$, jest właściwe.

Do udowodnienia pełności potrzebne będą poniższe dwa lematy.

Lemat 60. *Niech* α *będzie formułą o postaci* $\beta \rightarrow \mathcal{X}a\mathcal{Y}$ *lub* $\beta \rightarrow \mathcal{X}i\mathcal{Y}$*, gdzie* β *jest formułą elementarną, a* $\mathcal{X}$ *i* $\mathcal{Y}$ *różnymi zmiennymi. Jeżeli* α *nie jest tezą systemu* $\boldsymbol{D}_1$*, to istnieje model z klasy* $\mathsf{M}_{I_{50}}$*, w którym formuła* α *nie jest spełniona, taki że* $f(\mathcal{X}) \neq f(\mathcal{Y})$.

Dowód. W przypadku fałszywej formuły α o następniku o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ w jej poprzedniku nie może być łańcucha prostego łączącego zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$. Zatem istnieje model z $\mathsf{M}_{I_{50}}$, w którym poprzednik formuły α jest prawdziwy, a $f(X)$ nie zawiera się w $f(Y)$.

W przypadku fałszywej formuły α o następniku o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ jej poprzednik nie zawiera

- ani atomu $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ lub $\mathcal{Y}i\mathcal{X}$,
- ani łańcucha prostego łączącego $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Y}$ ani $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$,
- ani dla żadnej zmiennej $\mathcal{Z}$ łańcuchów prostych łączących $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{X}$ ani $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{Y}$,
- ani też atomu $\mathcal{Z}i\mathcal{V}$ lub $\mathcal{V}iZ$ oraz łańcuchów prostych łączących $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{X}$ i $\mathcal{V}$ z $\mathcal{Y}$.

Można zatem znaleźć taką funkcję f, że poprzednik będzie prawdziwy, a $f(\mathcal{X})$ i $f(\mathcal{Y})$ będą rozłącznymi zbiorami. ■

Lemat 61. *Niech dziedziny D_1 i D_2 oraz wartościowania v_1 i v_2 (dla dowolnego $i \in \{1, 2\}$ oraz $\mathcal{X}$, $v_1(\mathcal{X}) = (f_i(\mathcal{X}), g_i(\mathcal{X}))$) wyznaczają modele z klasy $\mathsf{M}_{I_{50}}$. W tej sytuacji dziedzina $D_3 = D_1 \times D_2$ i wartościowanie v_3, takie że dla dowolnego $\mathcal{X}$, $v_3(\mathcal{X}) = (f_1(\mathcal{X}) \times f_2(\mathcal{X}), min(g_1(\mathcal{X}), g_2(\mathcal{X})))$ również wyznacza model z klasy v_3, dla którego zachodzą następujące prawidłowości.*
(i) Jeżeli $I_{50}(v_1(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = I_{50}(v_2(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1$, to $I_{50}(v_3(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1$.
(ii) Jeżeli $I_{50}(v_1(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = I_{50}(v_2(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1$, to $I_{50}(v_3(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1$.

Dowód. (i) Zachodzi, ponieważ wartościowania v_1 i v_2 są tak określone, że $f_1(\mathcal{X}) \subset f_1(\mathcal{Y})$ oraz $f_2(\mathcal{X}) \subset f_2(\mathcal{Y})$, a więc również $f_3(\mathcal{X}) \subset f_3(\mathcal{Y})$.

(ii) Dowód jest identyczny jak przypadku (ii) Lematu 54. ■

Twierdzenie 38. *System $\boldsymbol{D}_1$ jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy modeli $\mathsf{M}_{I_{50}}$.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 37 wystarczy pokazać, że wszystkie tezy są tautologiami, a żadne wyrażenie odrzucone nie jest tautologą w modelach z klasy $\mathsf{M}_{I_{50}}$. Sprawdzenie, że aksjomaty są prawdziwe jest zwykłą rutyną.

Formuły podpadające pod schemat (4.12) są niespełnione w modelu przy zastosowaniu funkcji f, zdefiniowanej w dowodzie Lematu 59 dla pokazania, że formuły te nie są tezami, i dowolnej funkcji g. Z kolei dla wykazania, że formuły podpadające pod schemat (4.13) są niespełnione, można zastosować funkcję f określoną dla nich w tym samym dowodzie oraz funkcję g, taką że $g(S_1) = 0$.

Reguły MP, Sub, MP^{-1} i Sub^{-1} zachowują odpowiednio tautologiczność i nietautologiczność. Aby zakończyć dowód, musimy wykazać, że reguła $Comp^{-1}$ prowadzi od niespełnionych przesłanek do wniosku, który też nie jest spełniony. Pokażemy w tym celu, że jeżeli dwie formuły hornowskie $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$ nie są tautologiami, to tautologią nie jest formuła $\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2$. Rozszerzenie tej prawidłowości na dowolną ilość przesłanek reguły $Comp^{-1}$ można przeprowadzić przez prostą indukcję.

Niech D_1 i D_2 będą dziedzinami, a v_1 określone przez f_1, g_1 i v_2 określone przez f_2 i g_2 wartościowaniami wyznaczającymi odpowiednio modele, w których niespełnione są wyrażenia $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$, tzn. $I_{50}(v_1(\alpha \to \beta_1)) = I_{47}(v_2(\alpha \to \beta_2)) = 0$.

Na mocy Lematu 60, jeżeli β_i $(i \in \{1,2\})$ jest zbudowana przy użyciu dwóch różnych zmiennych $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, to funkcja f_i może być dobrana tak, aby $f_i(\mathcal{X}) \neq f_i(\mathcal{Y})$. Jeżeli β_i $(i \in \{1,2\})$ przyjmuje postać $\mathcal{X}i\mathcal{X}$, to funkcje f_1 i f_2 muszą być dobrane tak, aby $|f_1(\mathcal{X})| = |f_2(\mathcal{X})| = 1$, w przeciwnym wypadku $I_{50}(v_i(\alpha \to \beta_i))$ przyjmowałoby wartość 1.

Pokażemy teraz, że dla modelu określonego przez dziedzinę $D_3 = D_1 \times D_2$ i wartościowanie $v_3(\mathcal{X}) = (f_1(\mathcal{X}) \times f_2(\mathcal{X}), min(g_1(\mathcal{X}), g_2(\mathcal{X})))$ zachodzi $I_{50}(v_3(\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2)) = 0$. Na mocy Lematu 61 $I_{50}(v_3(\alpha)) = 1$. Musimy pokazać, że $I_{50}(v_3(\beta_1)) = I_{50}(v_3(\beta_2)) = 0$. Jeżeli β_i $(i \in \{1,2\})$ przyjmuje postać $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ lub $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$, gdzie $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi, to $f_3(\mathcal{X}) \neq f_3(\mathcal{Y})$. Co więcej, w przypadku $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ mamy $f_3(\mathcal{X}) \not\subset f_3(\mathcal{Y})$, a w przypadku $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ mamy $f_3(\mathcal{X}) \cap f_3(\mathcal{Y}) = \emptyset$. W obu przypadkach $I_{50}(v_3(\beta_i)) = 0$. $\beta_i = \mathcal{X}a\mathcal{X}$ jest fałszywe w każdym modelu z $\mathsf{M}_{I_{50}}$. Jeżeli zaś $\beta_i = \mathcal{X}i\mathcal{X}$, to $g_3(\mathcal{X}) = 0$, a $f_3(X) = f_1 \times f_2$ jest zbiorem jednoelementowym. W rezultacie $I_{47}(v_3(\beta_i)) = 0$. ■

Niezależność aksjomatów

Zarówno aksjomaty, jak i aksjomaty odrzucone są w systemie $\mathbf{D}_1$ niezależne.

Twierdzenie 39. *Aksjomaty systemu $\boldsymbol{D}_1$ są niezależne.*

Dowód. Dla wykazania niezależności aksjomatów (2.5), (2.6), i (2.4) można zastosować modele z dowodu Twierdzenia 34 – interpretacje odpowiednio I_3, I_4 oraz I_6 z zachowaniem wartościowań. Niezależność aksjomatu (4.7) pokazuje model, w którym wszystkie atomy są prawdziwe.

Aksjomat (2.3) – dziedzina $\{n_1, n_2, n_3\}$, interpretacja I_{51}:

$I_{51}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1$ dla dowolnych argumentów;

$I_{51}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y}))$ przyjmuje wartości zgodnie z poniższą matrycą:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	0
n_2	1	0	1
n_3	1	1	0

Aksjomat (2.3) jest niespełniony przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_1$, $v(P) = n_3$, a $v(M) = n_2$. ■

Twierdzenie 40. *Schematów aksjomatów (4.12) i (4.13) nie można zastąpić w systemie $\boldsymbol{D}_1$ pojedynczymi formułami, zachowując zbiór wyrażeń odrzuconych.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że wszystkie formuły podpadające pod schematy wyrażeń odrzuconych nie są tezami, a więc aby system odrzucania był adekwatny muszą one być formułami odrzuconymi. Zwróćmy dalej uwagę na fakt, że w poprzednikach obu schematów występują nieokreślonej długości łańcuchy proste, tzn. formuły o postaci: $\mathcal{X}_1 a \mathcal{X}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{X}_{n-1} a \mathcal{X}_n$, dla dowolnego n.

Załóżmy teraz nie wprost, że istnieje pojedyncza formuła α pozwalająca na odrzucenie wszystkich formuł podpadających pod któryś ze schematów. Ze względu na sprowadzalność wszystkich formuł do koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej, bez utraty ogólności możemy przyjąć, że α jest formułą klauzulową, tzn. przyjmuje postać: $\beta \to \gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_n$ $(n \geqslant 0)$.

Formuła α nie może być tezą systemu, bo wtedy zbiór wyrażeń odrzuconych byłby inny. Z praw KRZ wynika, że tezą nie może być formuła $\neg\beta$. Istnieje więc model z klasy modeli $\mathsf{M}_{I_{49}}$, w którym $\neg\beta$ jest niespełnione. Niech D będzie dziedziną tego modelu i niech $|D| = k$. Rozpatrzmy teraz klasę modeli $\mathsf{M}_{I_{49}^k}$, do której należą modele z klasy $\mathsf{M}_{I_{49}}$, których dziedzina ma co najwyżej k elementów. Oczywiście formuła α nie jest tautologią w tej klasie modeli. Jednocześnie, ustalając w schemacie $\mathcal{X}_1 a \mathcal{X}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{X}_{n-1} a \mathcal{X}_n$ $n = k + 1$, otrzymamy formułę, która nie jest spełniona w żadnym modelu z klasy $\mathsf{M}_{I_{49}^k}$, a więc odpowiednie realizacje schematów aksjomatów odrzuceniowych (oznaczmy je δ_1 i δ_2) będą w tej klasie modeli tautologiami. Formuła α nie jest więc wyprowadzalna z δ_1 ani δ_2.

Wobec faktu, iż system $\mathbf{D}_1$ jest teorią hornowską, a aksjomaty odrzucone δ_1 i δ_2 są formułami hornowskimi, reguła $Comp^{-1}$ zachowuje własność niebycia tezą w systemach będących rozszerzeniami $\mathbf{D}_1$ o odpowiednio δ_1 i δ_2, tak jak reguły MP^{-1} i Sub^{-1}. Wobec tego odrzucenie formuły α nie może doprowadzić do odrzucenia δ_1 ani δ_2, a więc założenie dowodu nie wprost jest fałszywe. ∎

Niezależność schematów aksjomatów odrzuconych będziemy rozumieli w ten sposób, że formuł podpadających pod jeden ze schematów nie można odrzucić korzystając z formuł podpadających pod drugi schemat.

Twierdzenie 41. *Schematy aksjomatów odrzuconych systemu $\boldsymbol{D}_1$ są w systemie $\boldsymbol{D}_1$ niezależne.*

Dowód. Schemat (4.12). Wszystkie formuły podpadające pod schemat (4.13) są tautologiami, a żadna formuła podpadająca pod schemat (4.12) nie jest tautologią w klasie modeli $\mathsf{M}_{I_{52}} = (D, I_{52}, v)$, gdzie D jest niepustą dziedziną, wartościowanie v przypisuje zmiennym niepuste podzbiory D, a I_{52} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla atomów określona jest następująco:

$$\begin{array}{lll} I_{52}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \subset v(\mathcal{Y}); \\ I_{52}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset. \end{array}$$

Każda formuła podpadająca pod schemat (4.12) jest niespełniona przy wartościowaniu v określonym jak w dowodzie Lematu 59 dla tej formuły.

Schemat (4.13). Wszystkie formuły podpadające pod schemat (4.12) są tautologiami, a żadna formuła podpadająca pod schemat (4.13) nie jest tautologią w klasie modeli $\mathsf{M}_{I_{53}}) = (D, I_{53}, v)$, gdzie D jest niepustą dziedziną, wartościowanie v przypisuje zmiennym niepuste podzbiory D, a I_{53} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla atomów określona jest następująco:

$$\begin{array}{lll} I_{52}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \subset v(\mathcal{Y}); \\ I_{52}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \neq \emptyset \text{ lub } v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset. \end{array}$$

Każda formuła podpadająca pod schemat (4.13), przyjmująca postać

$$S_1 a S_2 \wedge \ldots \wedge S_{m-1} a S_m \to S_1 i S_1$$

jest niespełniona przy wartościowaniu v określonym w następujący sposób:
$v(S_1) = \emptyset$;
$v(S_i) = v(S_{i-1}) \cup \{i\}$, dla $1 < i \leqslant m$.

∎

System $\mathbf{D}_1$ można rozszerzyć o formuły dotyczące zdań o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{X}$ występujące w roli aksjomatów w systemach **Stnd** i **Łuk**. Otrzymane w ten sposób systemy przedstawione zostaną w kolejnych podrozdziałach.

4.2.3 System $\mathbf{D}_2$

System aksjomatyczny

Terminami pierwotnymi systemu $\mathbf{D}_2$ są a oraz i. Przyjmujemy w systemie reguły wnioskowania MP i Sub. Aksjomatami $\mathbf{D}_2$ są wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań w języku, aksjomaty systemu $\mathbf{D}_1$ – (2.5), (2.6), (2.3), (2.4) i (4.7) oraz formuła (2.26).

W obecności aksjomatów (2.5) i (2.26) tezą systemu jest formuła

$$SaP \to SiS. \tag{4.15}$$

System aksjomatycznego odrzucania

Następujące schematy będą wykorzystane do określenia systemu aksjomatycznego odrzucania dla systemu $\mathbf{D}_2$:

$$\alpha \wedge S_m a M_1 \wedge \beta \wedge P_n a M_1 \wedge \gamma \to S_m i P_n, \tag{4.16}$$

gdzie $\alpha \in dL(S_1, S_m)$, $\beta \in dL(P_1, P_n)$, $\gamma \in dL(M_1, M_k)$ oraz α, β i γ nie zawierają wspólnych zmiennych;

$$\alpha \to MiM, \tag{4.17}$$

gdzie $\alpha \in dL(S, P)$ i M nie występuje w α.

Definicja 22. *Wyrażeniem odrzuconym systemu $\boldsymbol{D}_2$ jest każda formuła podpadająca pod któryś ze schematów (4.16) lub (4.17) oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania: MP^{-1}, Sub^{-1} lub $Comp^{-1}$.*

Lemat 62. *Na gruncie systemu $\boldsymbol{D}_2$ tezą jest równoważność formuł podpadających pod schematy (4.12) i (4.16) z tymi samymi wyrażeniami α, β i γ.*

Dowód. Wystarczy do poprzednika zastosować tezę (4.15). ■

Lemat 63. *W systemie $\boldsymbol{D}_2$ formuły (4.14) są wyrażeniami odrzuconymi.*

Dowód. Ze względu na Lemat 62 w systemie $\mathbf{D}_2$ odrzucona jest każda z formuł (4.12). W związku z tym odrzucone są również formuły (4.14). ■

Lemat 64. *Każda formuła atomowa języka systemu $\boldsymbol{D}_2$ jest wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak Lematu 57. ■

Lemat 65. *Każda formuła hornowska języka systemu* $\boldsymbol{D}_2$ *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Tak jak w przypadku Lematu 58 rozpatrzymy wszystkie możliwe typy formuł hornowskich języka, wyłączając formuły atomowe odrzucone w myśl Lematu 64, tzn. przypadki (i) - (v) z dowodu Lematu 58. Ponieważ z jednej strony system $\mathbf{D}_2$ jest rozszerzeniem systemu $\mathbf{D}_1$, a z drugiej na mocy Lematów 62 i 63 formuły podpadające pod schematy (4.12) oraz (4.14) są odrzucone, w systemie $\mathbf{D}_2$ w przypadkach (i), (ii), (iv) i (v) możemy wykorzystać dowód Lematu 58. Pozostaje więc do rozpatrzenia jedynie przypadek (iii).

Tak jak w systemie $\mathbf{D}_1$, jeżeli α zawiera atom o postaci $\mathcal{Y}a\mathcal{Y}$ bądź atom $\mathcal{Y}a\mathcal{Z}$ i łańcuch prosty łączący zmienną $\mathcal{Z}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$, to na mocy aksjomatu (4.7) bądź Lematu 55 (i) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$ jest tezą systemu $\mathbf{D}_2$. Dodatkowo, dzięki aksjomatowi (2.26) i tezom (4.15) i (2.21) $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$ jest tezą, jeżeli α zawiera jakikolwiek atom, w którym występuje zmienna $\mathcal{X}$.

W przeciwnym wypadku można tak uporządkować zmienne w α, aby podstawić za nie zmienne ze zbioru $\{S_1, \ldots, S_n\}$, a za $\mathcal{X}$ – M. Implikacja, której poprzednikiem jest rezultat takiego podstawienia, a następnikiem odpowiednia formuła podpadająca pod schemat (4.17), jest tezą $\mathbf{D}_2$. W związku z tym wyjściowa formuła jest odrzucona. ■

Lemat 66. *Żadna z formuł podpadających pod schematy (4.16) i (4.17) nie jest tezą systemu* $\boldsymbol{D}_2$.

Dowód. Przedstawimy klasę modeli $\mathsf{M}_{I_{53}}$, w której wszystkie aksjomaty i tezy systemu $\mathbf{D}_2$ są tautologiami, a aksjomaty odrzucone nie są. Każdy z modeli przyjmuje postać (D, I_{53}, v), gdzie D jest niepustym zbiorem stanowiącym dziedzinę modelu, v wartościowaniem przypisującym zmiennym dowolne podzbiory dziedziny D, a I_{53} interpretacją, która dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych określona jest następująco:

$$I_{53}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad v(\mathcal{X}) \subset v(\mathcal{Y}) \text{ i } v(\mathcal{X}) \neq \emptyset;$$
$$I_{53}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1 \quad \text{wtw} \quad v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset.$$

Dla pokazania nietautologiczności formuł podpadających pod schemat (4.16) można zastosować podstawienie wykorzystane dla (4.12) w dowodzie Lematu 59.

Z kolei formuły podpadające pod schemat (4.17), tzn. formuły o postaci

$$S_1 a S_2 \wedge \ldots \wedge S_{m-1} a S_m \rightarrow MiM$$

nie są spełnione przy następującym wartościowaniu v:
$v(S_1) = \{1\}$;
$v(S_i) = v(S_{i-1}) \cup \{i\}$, dla $1 < i \leqslant m$;
$v(M) = \emptyset$. ■

Twierdzenie 42. *Każda formuła języka systemu $\boldsymbol{D}_2$ jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak Twierdzenia 9 z wykorzystaniem Lematu 65 oraz Lematu 66. ■

Pełność w modelu

Do wykazania pełności systemu $\mathbf{D}_2$ w stosunku do odpowiedniej klasy modeli udowodnimy następujący lemat.

Lemat 67. *Niech α będzie formułą o postaci $\beta \rightarrow \mathcal{X} a \mathcal{Y}$, gdzie β jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ różnymi zmiennymi.*

Jeżeli α nie jest tezą systemu $\boldsymbol{D}_2$, to istnieje model z klasy modeli $\mathsf{M}_{I_{53}}$ taki, że α nie jest spełniona w modelu i $v(\mathcal{X}) \neq v(\mathcal{Y})$.

Dowód. W przypadku niespełnionej formuły α o następniku o postaci $\mathcal{X} a \mathcal{Y}$ w jej poprzedniku nie może być łańcucha prostego łączącego zmienną $\mathcal{X}$ ze zmienną $\mathcal{Y}$. Zatem istnieje model z $\mathsf{M}_{I_{53}}$, w którym poprzednik formuły α jest prawdziwy, a $v(\mathcal{X})$ nie zawiera się w $v(\mathcal{Y})$, a zatem również $v(\mathcal{X}) \neq v(\mathcal{Y})$. ■

Twierdzenie 43. *System $\boldsymbol{D}_2$ jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy modeli $\mathsf{M}_{I_{53}}$.*

Dowód. Sprawdzenie, że aksjomaty są tautologiami w modelu, jest rutynowe. Aksjomaty odrzucone nie są tautologiami w klasie modeli $\mathsf{M}_{I_{53}}$, co pokazuje Lemat 66.

Wystarczy teraz pokazać, tak jak w przypadku analogicznych twierdzeń formułowanych dla wcześniej rozpatrywanych systemów, że jeżeli $\alpha \rightarrow \beta_1$ i $\alpha \rightarrow \beta_2$ nie są tautologiami, to nie jest tautologią formuła $\alpha \rightarrow \beta_1 \vee \beta_2$ (dla α będącej formułą elementarną, a β_1 i β_2 formułami atomowymi).

Niech $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$ będą formułami, które nie są tautologiami. W tej sytuacji istnieją w $\mathsf{M}_{I_{53}}$ modele w dziedzinach odpowiednio D_1 i D_2 określone przez wartościowania odpowiednio v_1 i v_2 takie, że $I_{53}(v_1(\alpha \to \beta_1)) = I_{53}(v_2(\alpha \to \beta_2)) = 0$.

Na mocy Lematu 67, jeżeli β_i ($i \in \{1, 2\}$) jest o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$, gdy $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi, to wartościowanie v_i może być dobrane tak, aby $v_i(\mathcal{X}) \neq v_i(\mathcal{Y})$. Rozpatrzmy teraz model z klasy $\mathsf{M}_{I_{53}}$ określony za pomocą dziedziny $D_3 = D_1 \times D_2$ oraz wartościowania v_3 takiego, że dla dowolnego $\mathcal{X}$, $v_3(\mathcal{X}) = v_1(\mathcal{X}) \times v_2(\mathcal{X})$. Na mocy praw rachunku zbiorów (2.17) oraz

$$(x_1 \subset y_1 \wedge x_2 \subset y_2) \to (x_1 \times x_2) \subset (y_1 \times y_2), \tag{4.18}$$

ponieważ $I_{53}(v_1(\alpha)) = I_{53}(v_2(\alpha)) = 1$, również $I_{53}(v_3(\alpha)) = 1$.

Rozpatrzmy teraz spełnianie formuł β_1 i β_2 w modelu z wartościowaniem v_3. Mogą one przyjąć jedną z trzech postaci: (i) $\mathcal{X}a\mathcal{X}$, (ii) $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$, gdy $\mathcal{X}$ jest różne od $\mathcal{Y}$ oraz (iii) $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$. W przypadku (i) każda formuła o tej postaci jest niespełniona w każdym modelu z klasy $\mathsf{M}_{I_{53}}$. W przypadku (ii) na mocy Lematu 67 dla β_i o tej postaci $v_i(X) \neq v_i(Y)$, $i \in \{1, 2\}$. Jednocześnie, ponieważ $I_{53}(v_i(\beta_i)) = 0$, mamy $v_i(X) \not\subset v_i(Y)$. W tej sytuacji niezależnie od funkcji v_j, $j \in \{1, 2\}, j \neq i$ $v_3(X) \not\subset v_3(Y)$. W przypadku (iii) dla odpowiedniego β_i, $i \in \{1, 2\}$ o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ mamy $v_i(\mathcal{X}) \cap v_i(\mathcal{Y}) = \emptyset$. W tej sytuacji również $v_3(\mathcal{X}) \cap v_3(\mathcal{Y}) = \emptyset$.

Dla wszystkich możliwych β_1 i β_2 mamy więc $I_{53}(v_3(\beta_1)) = I_{53}(v_3(\beta_2)) = 0$, a zatem również $I_{53}(v_3(\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2) = 0$. ■

Niezależność aksjomatów

Twierdzenie 44. *Aksjomaty systemu $\boldsymbol{D}_2$ są niezależne.*

Dowód. Dla wykazania niezależności aksjomatów (2.5) i (2.6) wystarczy zastosować interpretacje funktorów jak w dowodzie Twierdzenia 34, aksjomatów (4.7) i (2.3) – jak w dowodzie Twierdzenia 39.

Aksjomat (2.4) – dziedzina $\{n_1, n_2, n_3\}$, interpretacja I_{54}, klasyczna dla funktorów rachunku zdań, a dla formuł atomowych zgodna z matrycami:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	0	0	1
n_2	0	0	0
n_3	0	0	0

i	n_1	n_2	n_3
n_1	1	1	1
n_2	1	1	0
n_3	1	0	1

Aksjomat (2.4) jest niespełniony przy wartościowaniu v takim, że: $v(M) = n_1$, $v(S) = n_2$, a $v(P) = n_3$.

Aksjomat (2.26). Dziedzina $\{n_1, n_2\}$, interpretacja I_{55}, klasyczna dla funktorów rachunku zdań, $I_{55}(\alpha) = 0$, dla każdego α zbudowanego za pomocą funktora a, a dla pozostałych formuł atomowych zgodna z poniższymi matrycami:

i	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	1	1

Aksjomat (2.26) jest niespełniony przy wartościowaniu v takim, że: $v(S) = n_1$, $v(P) = n_2$. ■

Twierdzenie 45. *Schematów aksjomatów (4.16) i (4.17) nie można zastąpić w systemie $\boldsymbol{D}_2$ pojedynczymi formułami, zachowując zbiór wyrażeń odrzuconych.*

Dowód. Identyczny jak Twierdzenia 40. ■

Twierdzenie 46. *Schematy aksjomatów odrzuconych systemu $\boldsymbol{D}_2$ są w systemie $\boldsymbol{D}_2$ niezależne.*

Dowód. Niezależność schematu (4.16) można wykazać, stosując ten sam model, który został wykorzystany do wykazania niezależności schematu (4.12) w systemie $\mathbf{D}_1$ w dowodzie Twierdzenia 41.

Wszystkie formuły podpadające pod schemat (4.16) są tautologiami, a żadna formuła podpadająca pod schemat (4.17) nie jest tautologią w klasie modeli $\mathsf{M}_{I_{56}} = (D, I_{56}, v)$, gdzie D jest niepustą dziedziną, wartościowanie v przypisuje zmiennym dowolne podzbiory D, a interpretacja I_{56} dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla atomów określona jest następująco:

$$\begin{array}{lll} I_{56}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \subset v(\mathcal{Y}) \text{ i } v(\mathcal{X}) \neq \emptyset; \\ I_{56}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1 & \text{wtw} & v(\mathcal{X}) \neq \emptyset \text{ i } v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset. \end{array}$$

Każda formuła podpadająca pod schemat (4.17), tzn. przyjmująca postać

$$S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{m-1}aS_m \to MiM$$

jest niespełniona przy wartościowaniu v określonym w następujący sposób:
$v(S_1) = \{1\}$;
$v(S_i) = v(S_{i-1}) \cup \{i\}$, dla $1 < i \leqslant m$;
$v(M) = \emptyset$. ■

4.2.4 System $\mathbf{D}_3$

System aksjomatyczny

Terminami pierwotnymi systemu $\mathbf{D}_3$ są a oraz i. Przyjmujemy w systemie reguły wnioskowania MP i Sub oraz aksjomaty systemu $\mathbf{D}_1$ (bez formuły (2.5)) – (2.6), (2.3), (2.4) i (4.7) oraz (2.2).

Formuła (2.5) jest w tym systemie wyprowadzalna.

System aksjomatycznego odrzucania

Definicja 23. *Wyrażeniem odrzuconym systemu $\boldsymbol{D}_3$ jest każda formuła podpadająca pod schemat (4.16) oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania: MP^{-1}, Sub^{-1} lub $Comp^{-1}$.*

Lemat 68. *Każda formuła atomowa języka systemu $\boldsymbol{D}_3$ jest tezą bądź wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Formuły o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{X}$ są tezami systemu $\mathbf{D}_3$. W przypadku pozostałych atomów, które są odrzucone, dowód jest taki sam jak Lematu 57. ■

Lemat 69. *Każda formuła hornowska języka systemu $\boldsymbol{D}_3$ jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Tak jak w przypadku Lematu 58 rozpatrzymy wszystkie możliwe typy formuł hornowskich języka, tzn. przypadki (i) - (v) z dowodu tamtego Lematu. Tak jak w przypadku Lematu 65 do przypadków (i), (ii), (iv) i (v) możemy zastosować rozumowanie z dowodu Lematu 58. W przypadku (iii) mamy do czynienia z formułami o postaci $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$, które są tezami $\mathbf{D}_3$ na mocy aksjomatu (2.2). ■

Lemat 70. *Żadna z formuł podpadających pod schemat (4.16) nie jest tezą systemu $\boldsymbol{D}_3$.*

Dowód. Przedstawimy klasę modeli $\mathsf{M}_{I_{58}}$, w której wszystkie aksjomaty i tezy systemu $\mathbf{D}_3$ są tautologiami, a aksjomaty odrzucone nie są. Każdy z modeli przyjmuje postać (D, I_{58}, v), gdzie D jest niepustym zbiorem stanowiącym dziedzinę modelu, v wartościowaniem przypisującym zmiennym niepuste podzbiory dziedziny D, a I_{58} interpretacją, która dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna, a dla formuł atomowych określona jest następująco:

$I_{58}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1$ wtw $v(\mathcal{X}) \subset v(\mathcal{Y})$;
$I_{58}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1$ wtw $v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset$.

Dla pokazania nietautologiczności formuł podpadających pod schemat (4.16) można zastosować podstawienie wykorzystane dla (4.12) w dowodzie Lematu 59. ■

Twierdzenie 47. *Każda formuła języka systemu $\boldsymbol{D}_3$ jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak Twierdzenia 9 z wykorzystaniem Lematu 69 oraz Lematu 70. ■

Pełność w modelu

Do wykazania pełności systemu $\mathbf{D}_3$ w stosunku do odpowiedniej klasy modeli udowodnimy następujący lemat analogiczny do Lematu 67 dla systemu $\mathbf{D}_2$.

Lemat 71. *Niech α będzie formułą o postaci $\beta \to \mathcal{X}a\mathcal{Y}$, gdzie β jest formułą elementarną, a $\mathcal{X}$ jest różne od $\mathcal{Y}$.*

Jeżeli α nie jest tezą systemu $\boldsymbol{D}_3$, to istnieje model z klasy modeli $\mathsf{M}_{I_{58}}$ taki, że α nie jest spełniona w modelu i $v(\mathcal{X}) \neq v(\mathcal{Y})$.

Dowód. Taki sam jak Lematu 67. ■

Twierdzenie 48. *System $\boldsymbol{D}_3$ jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy modeli $\mathsf{M}_{I_{58}}$.*

Dowód. Sprawdzenie, że aksjomaty są tautologiami w modelu, jest rutynowe. Aksjomaty nie są tautologiami w klasie modeli $\mathsf{M}_{I_{58}}$, co pokazuje dowód Lematu 70.

Tak jak w przypadku analogicznych twierdzeń formułowanych dla wcześniej rozpatrywanych systemów, wystarczy teraz pokazać, że reguła $Comp^{-1}$ prowadzi od dwóch przesłanek, które nie są tautologiami, do wniosku, który nie jest tautologią.

Niech $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$ będą formułami, które nie są tautologiami. W tej sytuacji istnieją w $\mathsf{M}_{I_{58}}$ modele w dziedzinach odpowiednio D_1 i D_2 określone przez wartościowania odpowiednio v_1 i v_2 takie, że $I_{58}(v_1(\alpha \to \beta_1)) = I_{58}(v_2(\alpha \to \beta_2)) = 0$.

Na mocy Lematu 71, jeżeli β_i ($i \in \{1,2\}$) jest o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$, gdy $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są różnymi zmiennymi, to wartościowanie v_i może być dobrane tak, aby $v_i(\mathcal{X}) \neq v_i(\mathcal{Y})$. Rozpatrzmy teraz model z klasy $\mathsf{M}_{I_{58}}$ określony za pomocą dziedziny $D_3 = D_1 \times D_2$ oraz wartościowania v_3 takiego, że dla dowolnego $\mathcal{X}$, $v_3(\mathcal{X}) = v_1(\mathcal{X}) \times v_2(\mathcal{X})$. Na mocy praw rachunku zbiorów (2.17), (4.18) oraz

$$(x_1 \neq \emptyset \wedge x_2 \neq \emptyset) \to (x_1 \times x_2) \neq \emptyset, \tag{4.19}$$

ponieważ $I_{58}(v_1(\alpha)) = I_{58}(v_2(\alpha)) = 1$, również $I_{58}(v_3(\alpha)) = 1$.

Dalej możemy zastosować to samo rozumowanie, które wystąpiło w dowodzie Twierdzenia 48 i otrzymamy $I_{58}(v_3(\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2)) = 0$. ■

Niezależność aksjomatów

Twierdzenie 49. *Aksjomaty systemu $\boldsymbol{D}_3$ są niezależne.*

Dowód. Dla wykazania niezależności aksjomatu (2.6) można zastosować klasę modeli $\mathcal{M}_{I_{45}}$ z dowodu Twierdzenia 34, aksjomatów (2.3) i (4.7) – modele określone dla nich w dowodzie Twierdzenia 39, a aksjomatów (2.4) i (2.2) odpowiednio klasy modeli $\mathcal{M}_{I_{54}}$ oraz $\mathcal{M}_{I_{55}}$ z dowodu Twierdzenia 44, z zastosowanymi w tamtych dowodach wartościowaniami. ■

Twierdzenie 50. *Schematu aksjomatu (4.16) nie można zastąpić w systemie $\boldsymbol{D}_3$ pojedynczą formułą, zachowując zbiór wyrażeń odrzuconych.*

Dowód. Identyczny jak Twierdzenia 40. ■

4.3 Systemy pomiędzy systemem Łuk a Słp

4.3.1 Tezy systemu Łuk stanowiące rozszerzenia Słp

Przestrzeń systemów pomiędzy systemem **Słp** a **Łuk** można opisać poprzez wskazanie formuł będących tezami **Łuk**, które nie są tezami **Słp**. Zbiór tych formuł jest nieskończony, a wzajemne relacje cechuje duży stopień skomplikowania. Nie będziemy w niniejszej pracy dokładnie tej struktury analizować, gdyż taka analiza stanowić może temat osobnych, znacznie obszerniejszych rozważań. Przedstawimy jedynie ogólny zarys tej struktury formuł oraz przyjrzymy się wybranym systemom, które mogą powstać z wykorzystaniem tych formuł jako aksjomatów.

Dla zobrazowania struktury zbioru interesujących nas formuł rozpatrzymy szczegółowo skończony jej podzbiór zawierający wybrane, najbardziej charakterystyczne i zarazem najkrótsze jego elementy. Traktować je można jako swoisty szkielet całego zbioru.

W poniższej tabeli umieszczone są formuły, które znajdują się na diagramie z Rysunku 4.1. Oprócz samych formuł w pierwszej kolumnie tabeli znajduje się numer formuły występujący na diagramie, a w trzeciej kolumnie – numer formuły z wcześniejszego tekstu, jeżeli formuła taka wcześniej już wystąpiła.

numer formuły na diagramie	formuła	odnośnik w tekście
⟨5⟩	$MaP \wedge PaP \rightarrow MiM$	(4.3)
⟨6⟩	$MiP \wedge PaP \wedge MaS \rightarrow MiM$	
⟨7⟩	$MaP \wedge SaS \rightarrow MiM$	
⟨8⟩	$MaP \rightarrow MiM$	(2.22)
⟨9⟩	$MiP \wedge PaP \rightarrow MiM$	
⟨10⟩	$MiP \wedge PaN \wedge SaS \rightarrow MiM$	
⟨11⟩	$MiP \wedge PaN \rightarrow MiM$	
⟨12⟩	$MiP \wedge NaP \rightarrow MiM$	
⟨13⟩	$MiP \wedge PiP \wedge SaS \rightarrow MiM$	
⟨14⟩	$MiP \wedge PiP \wedge SaN \rightarrow MiM$	
⟨15⟩	$MiP \wedge SaS \rightarrow MiM$	
⟨16⟩	$MiP \wedge PiP \rightarrow MiM$	
⟨17⟩	$MiP \wedge NaS \rightarrow MiM$	
⟨18⟩	$SaS \rightarrow MiM$	(2.24)
⟨19⟩	$MiP \wedge SiS \rightarrow MiM$	
⟨20⟩	$SaP \rightarrow MiM$	
⟨21⟩	$MiP \rightarrow MiM$	(2.26)
⟨22⟩	$SiS \rightarrow MiM$	
⟨23⟩	$SiP \rightarrow MiM$	
⟨24⟩	SiS	(2.2)

numer formuły na diagramie	formuła	odnośnik w tekście
⟨25⟩	$SaS \wedge SaM \wedge MaP \wedge PaP \rightarrow MaM$	(4.4)
⟨26⟩	$SaS \wedge SaM \wedge MaP \rightarrow MaM$	
⟨27⟩	$SiS \wedge SaM \wedge MaP \wedge PaP \rightarrow MaM$	
⟨28⟩	$SaS \wedge SaM \rightarrow MaM$	
⟨29⟩	$SiS \wedge SaM \wedge MaP \wedge NaN \rightarrow MaM$	
⟨30⟩	$SiS \wedge SaM \wedge MaP \rightarrow MaM$	
⟨31⟩	$SaM \wedge MaP \wedge PaP \rightarrow MaM$	
⟨32⟩	$SiS \wedge SaM \wedge NaN \rightarrow MaM$	
⟨33⟩	$SaM \wedge PaP \wedge SaP \rightarrow MaM$	
⟨34⟩	$SaM \wedge MaP \rightarrow MaM$	
⟨35⟩	$SiS \wedge SaM \rightarrow MaM$	
⟨36⟩	$MiP \wedge PaP \wedge SaM \rightarrow MaM$	
⟨37⟩	$SaM \wedge PaP \rightarrow MaM$	
⟨38⟩	$SaM \rightarrow MaM$	(2.21)
⟨39⟩	$MiM \wedge MaP \wedge PaP \rightarrow MaM$	
⟨40⟩	$MiM \wedge MaP \wedge SaS \rightarrow MaM$	
⟨41⟩	$MiM \wedge NaN \wedge MiN \rightarrow MaM$	
⟨42⟩	$MiM \wedge MaP \rightarrow MaM$	
⟨43⟩	$MiM \wedge SaS \rightarrow MaM$	
⟨44⟩	$MiM \wedge MiP \wedge PaN \rightarrow MaM$	
⟨45⟩	$MiM \wedge SaP \rightarrow MaM$	
⟨46⟩	$MiM \rightarrow MaM$	

numer formuły na diagramie	formuła	odnośnik w tekście
$\langle 47\rangle$	$MaP \wedge PaP \to MaM$	
$\langle 48\rangle$	$MiP \wedge PaP \wedge NaS \to MaM$	
$\langle 49\rangle$	$MaP \wedge NaN \to MaM$	
$\langle 50\rangle$	$MaP \to MaM$	(2.20)
$\langle 51\rangle$	$MiP \wedge PaP \to MaM$	
$\langle 52\rangle$	$MiP \wedge PaN \wedge SaS \to MaM$	
$\langle 53\rangle$	$MiP \wedge PaN \to MaM$	
$\langle 54\rangle$	$MiP \wedge PiP \wedge SaS \to MaM$	
$\langle 55\rangle$	$MiP \wedge PiP \wedge SaN \to MaM$	
$\langle 56\rangle$	$MiP \wedge SaS \to MaM$	
$\langle 57\rangle$	$MiP \wedge PiP \to MaM$	
$\langle 58\rangle$	$MiP \wedge NaS \to MaM$	
$\langle 59\rangle$	$SaS \to MaM$	
$\langle 60\rangle$	$MiP \wedge SiS \to MaM$	
$\langle 61\rangle$	$SaP \to MaM$	
$\langle 62\rangle$	$MiP \to MaM$	(2.18)
$\langle 63\rangle$	$SiS \to MaM$	
$\langle 64\rangle$	$SiP \to MaM$	
$\langle 65\rangle$	SaS	(2.1)

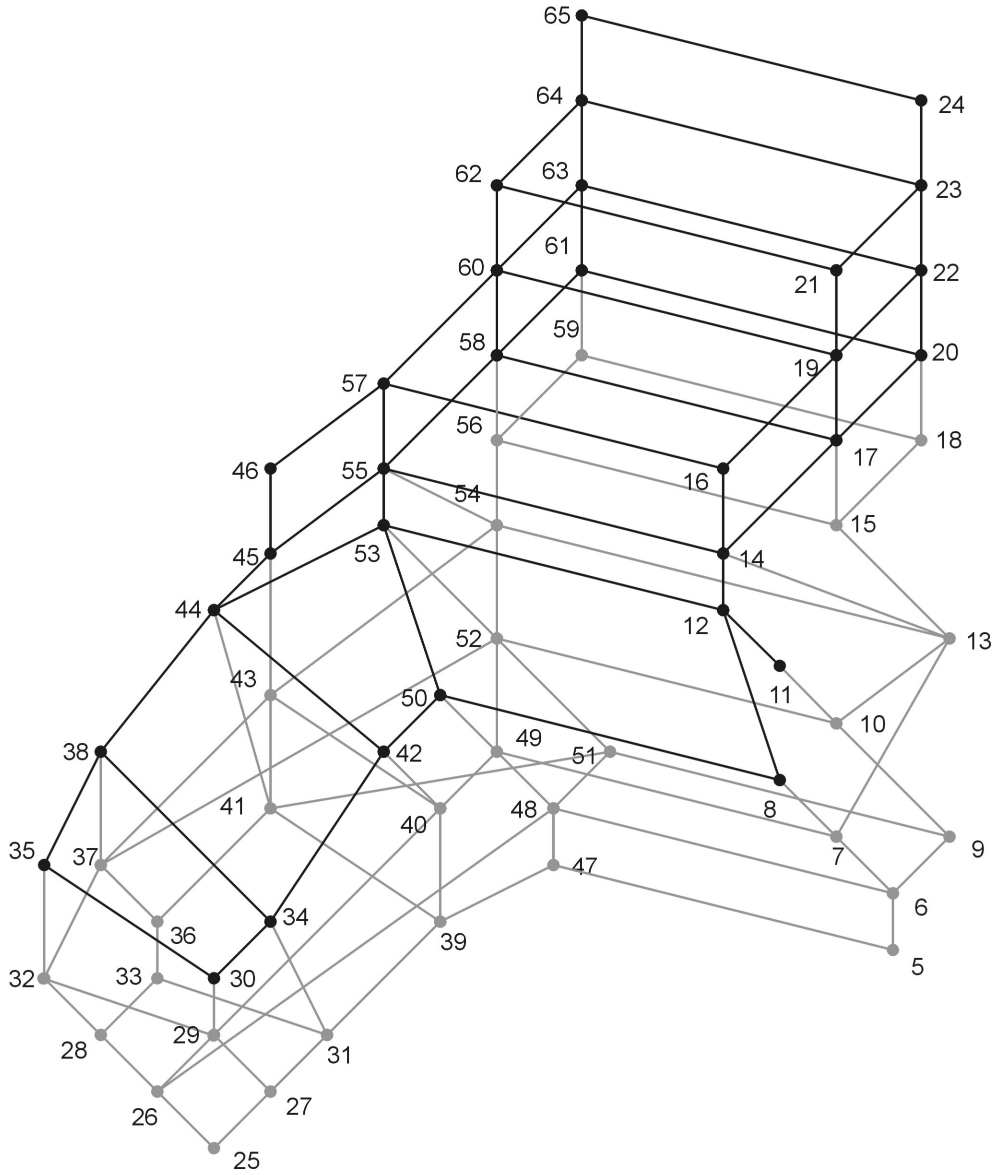
Relacja wyprowadzalności, jaka zachodzi pomiędzy powyższymi formułami, przedstawiona jest na Rysunku 4.1.

Rutynowe dowody wyprowadzalności poszczególnych formuł na gruncie systemu **Słp** umieszczone w dodatku zostały wygenerowane automatycznie z wykorzystaniem programu komputerowego napisanego w języku Prolog. Został tam również umieszczony tekst programu generującego dowody. W dodatku zostały również umieszczone dowody pokazujące, że pomiędzy formułami umieszczonymi na Rysunku 4.1 nie występują żadne więcej przypadki wyprowadzalności w systemie **Słp**.

Część formuł hornowskich języka rachunku nazw, niewystępujących na diagramie, jest w systemie **Słp** równoważna którejś z formuł z diagramu. Jako przykład może posłużyć formuła

$$MaP \wedge PiP \to MaM, \tag{4.20}$$

równoważna w systemie **Słp** formule $\langle 50\rangle$ ze względu na to, że tezą tego systemu jest formuła (4.2).



Rysunek 4.1: Diagram formuł

Kolejne formuły, których nie trzeba brać pod uwagę, są dedukcyjnie równoważne[5] w stosunku do którejś z wymienionych formuł na gruncie systemu **Słp**. Należy do nich formuła

$$MiP \wedge NaP \rightarrow MaM, \tag{4.21}$$

wyprowadzalna w systemie **Słp** z formuły ⟨53⟩, z której jednocześnie w tym systemie można formułę ⟨53⟩ wyprowadzić[6]:

```
93 ?- wyprowadzenie([1,2,3,4,53],66).

1.    a(a3, a2)   przesłanka
2.    i(a3, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a3)   formuła 2: [2]
4.    i(a1, a2)   przesłanka
5.    a(a2, a2)   formuła 53: [3, 1]
      a(a1, a1)   formuła 53: [4, 5]
true.

94 ?- wyprowadzenie([1,2,3,4,66],53).

1.    a(a2, a3)   przesłanka
2.    i(a2, a3)   formuła 1: [1]
3.    i(a1, a2)   przesłanka
4.    a(a2, a2)   formuła 66: [2, 1]
      a(a1, a1)   formuła 66: [3, 4]
true.
```

Inne tego typu formuły mają taką własność, że daje się znaleźć podstawienie, które zastosowane do części atomów z poprzednika implikacji sprawia, że stają się one identyczne z innymi atomami poprzednika, np. formuła

$$SaM \wedge SaP \rightarrow MaM \tag{4.22}$$

jest dedukcyjnie równoważna formule ⟨38⟩. Aby przejść od formuły ⟨38⟩ do formuły (4.21), wystarczy dołączyć dodatkowy czynnik do poprzednika zgodnie z odpowiednim prawem KRZ. Z kolei, aby z (4.21) uzyskać ⟨38⟩, można

[5]Formuły α i β są dedukcyjnie równoważne na gruncie określonego systemu wtedy i tylko wtedy, gdy w systemie tym zachodzi $\alpha \vdash \beta$ oraz $\beta \vdash \alpha$.

[6]Przedstawiony dowód wygenerowany został automatycznie przez program z załącznika.

podstawić M za P i następnie na mocy odpowiedniego prawa KRZ wyeliminować czynnik powtarzający się w poprzedniku.

Wśród wszystkich umieszczonych na diagramie formuł można wyróżnić kilka grup wyznaczonych przez pewne ich właściwości. Pierwszy wyraźny podział może być dokonany ze względu na następnik rozpatrywanych formuł. W przypadku formuł o numerach $\langle 5\rangle$ – $\langle 24\rangle$ następnik ma postać $\mathcal{X}i\mathcal{X}$, w pozostałych przypadkach następnik przyjmuje postać $\mathcal{X}a\mathcal{X}$. Formuły z następnikami szczegółowotwierdzącymi mają, z wyjątkiem formuły $\langle 11\rangle$, swoje odpowiedniki ogólnotwierdzące z identycznymi poprzednikami (są to formuły o numerach $\langle 47\rangle$ – $\langle 65\rangle$). Formuła $\langle 11\rangle$ stanowi tu wyjątek, gdyż jej ogólnotwierdzący odpowiednik (4.21) jest dedukcyjnie równoważny formule $\langle 53\rangle$. Dodatkowa różnica polega na tym, że zachodzi wyprowadzalność $\langle 52\rangle \vdash \langle 49\rangle$, a nie zachodzi wyprowadzalność $\langle 10\rangle \vdash \langle 7\rangle$ pomiędzy szczegółowotwierdzącymi odpowiednikami tych formuł.

Szczegółowotwierdzące odpowiedniki pozostałych formuł z następnikami ogólnotwierdzącymi, tzn. formuł $\langle 25\rangle$ – $\langle 46\rangle$, są tezami systemu **Słp**. Część z nich (formuły $\langle 39\rangle$ – $\langle 46\rangle$) zawiera w poprzedniku atom MiM, a pozostałe (formuły $\langle 25\rangle$ – $\langle 38\rangle$) zawierają atom SaM ($SaM \to MiM$ jest tezą **Słp**).

Z kolei formuła $\langle 50\rangle$ oraz wszystkie formuły z niej wyprowadzalne zawierają w poprzedniku atom MaP, pozostałe formuły tego atomu nie zawierają. Formuły zaznaczone na diagramie jaśniejszym kolorem – formuła $\langle 59\rangle$ i wszystkie formuły z niej wyprowadzalne – zawierają w poprzedniku przynajmniej jeden atom o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{X}$, pozostałe formuły, zaznaczone kolorem ciemniejszym, takich atomów nie zawierają.

Jak wyżej wspomniano, umieszczone na diagramie formuły są tylko częścią nieskończonego zbioru hornowskich tez systemu **Łuk**, niebędących tezami systemu **Słp**. Przyjrzymy się teraz niektórym sposobom, na jakie nieskończone zbiory formuł mogą być tworzone.

Zwrócimy najpierw uwagę na ciąg formuł, który umieścić można pomiędzy formułą $\langle 50\rangle$ a $\langle 47\rangle$, określony przez następujący schemat:

$$S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{n-1}aS_n \to S_1aS_1, \tag{4.23}$$

gdzie $n \geqslant 3$ (w przypadku $n = 2$ schemat przyjmuje postać formuły $\langle 50\rangle$).

W obecności aksjomatu (2.3) w systemie **Słp** każda formuła o postaci $(\mathcal{X}a\mathcal{Z} \wedge \alpha \to \beta) \to (\mathcal{X}a\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Y}a\mathcal{Z} \wedge \alpha \to \beta)$ jest tezą tego systemu. Wobec tego z formuły o schemacie (4.23) dla ustalonego n wyprowadzić można formułę o tym samym schemacie przy wartości $n = m$ takiej, że $2 \leqslant m \leqslant n$.

Wyprowadzalność w przeciwną stronę nie zachodzi, tzn. z formuły podpadającej pod schemat (4.23) dla określonego $n = k$ nie można wyprowadzić w systemie **Słp** formuły podpadającej pod ten sam schemat przy $n > k$. Aby to wykazać, dla dowolnego n rozpatrzymy klasę modeli stanowiącą podklasę klasy $\mathsf{M}_{I_{47}}$ zawierającą modele, których dziedzina zawiera nie więcej niż $k = n - 1$ elementów. Dla oznaczenia tej klasy przyjmiemy oznaczenie $\mathsf{M}_{I_{47}^k}$.

Oczywiście, ponieważ system **Słp** jest poprawny w stosunku do klasy modeli $\mathsf{M}_{I_{47}}$, aksjomaty systemu **Słp** są tautologiami również w klasie modeli $\mathsf{M}_{I_{47}^k}$. Formuła (4.23) przy wartości indeksu k jest tautologią w klasie modeli $\mathsf{M}_{I_{47}^k}$, ponieważ jej poprzednik zawsze będzie fałszywy ze względu na ilość elementów w dziedzinie. Z kolei formuła (4.23) przy wartości indeksu $k+1$ jest niespełniona przy wartościowaniu v określonym poprzez funkcje: g, przyjmującą zawsze wartość 0 oraz f, określoną w następujący sposób:

$f(S_1) = 1;$
$f(S_i) = f(S_{i-1}) \cup \{i\}$, dla $i > 1$.

Wszystkie formuły podpadające pod schemat (4.23) są wyprowadzalne z formuły $\langle 50 \rangle$. Odpowiednie wyprowadzenie można w tym przypadku otrzymać w ramach KRZ poprzez dodanie czynników koniunkcji do poprzednika.

Analogiczne nieskończone zbiory formuł można utworzyć także poprzez dodanie ciągów podobnych do tych występujących w poprzedniku schematu (4.23) do wielu innych formuł z diagramu. W szczególności analogiczne do przedstawionych powyżej schematy, które można umieścić pomiędzy formułami $\langle 38 \rangle$ a $\langle 28 \rangle$, przyjmują postać:

$$S_1 a S_1 \wedge \ldots \wedge S_{n-1} a S_n \rightarrow S_n a S_n, \tag{4.24}$$

gdzie $n \geqslant 3$ (w przypadku $n = 2$ schemat przyjmuje postać formuły $\langle 38 \rangle$).

Przedstawione rozszerzenia zbioru opisanego przez diagram z Rysunku 4.1 nie są jedynymi możliwymi, stanowią jedynie przykładowe fragmenty zbioru formuł o skomplikowanej strukturze związanej z wyprowadzalnością w systemie **Słp**. Celem ich prezentacji jest jedynie pokazanie szerszego tła dla wskazania wybranych systemów spomiędzy systemów **Słp** i **Łuk**.

4.3.2 Analiza wybranych systemów

System Słp$^+$

Omawiając system **Słp** zwróciliśmy uwagę na fakt, że o ile interpretacja zdań atomowych z różnymi zmiennymi jest tu taka sama jak w systemach **Stnd** i **Łuk**, to zdania postaci $\mathcal{X}a\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{X}i\mathcal{X}$ można traktować jako wyrażające pewną własność zmiennej $\mathcal{X}$. Stwierdziliśmy, budując odpowiednią strukturę semantyczną, że w systemie **Słp** własność ta jest niezależna od zakresu nazwy $\mathcal{X}$. W różnych rozszerzeniach systemu **Słp** własność ta będzie się zmieniała.

Jako przykład rozpatrzymy system, w którym aksjomatem wyznaczającym znaczenie zdań atomowych o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{X}$ jest formuła $\langle 25\rangle$ z diagramu, tzn. formuła (4.4), pełniąca funkcję aksjomatu odrzuconego systemu **Słp**. Analiza tak skonstruowanego systemu rzuci pewne światło na ten intuicyjnie nieco niejasny aksjomat. Dla uproszczenia rozważań przyjmiemy jednocześnie jako aksjomat wyznaczający znaczenie zdań atomowych o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{X}$ formułę $\langle 24\rangle$ z diagramu, tzn. formułę (2.2) – aksjomat systemu **Łuk**, zgodnie z którym wszystkie takie zdania są tezami. Tak określone rozszerzenie systemu **Słp** oznaczymy symbolem **Słp**$^+$.

Regułami w systemie **Słp**$^+$ są MP i Sub, a aksjomatami są wszystkie podstawienia tez KRZ oraz następujące formuły: (2.3), (2.4), (2.5), (4.4) oraz (2.2).

Z aksjomatów (2.4) oraz (2.2) można wyprowadzić formułę (2.6). Wzwiązku z tym tak określony system jest rzeczywiście rozszerzeniem systemu **Słp**. W świetle Lematu 48 jako bezpośrednią konsekwencję tego faktu oraz tego, że wszystkie aksjomaty systemu są tezami **Łuk**, otrzymujemy następujący lemat.

Lemat 72. *Każda formuła hornowska języka sylogistyki, w której następniku występuje atom z różnymi zmiennymi, jest tezą systemu* ***Słp***$^+$ *wtedy i tylko wtedy, gdy jest tezą systemu* ***Łuk****.*

System **Słp**$^+$ można uzupełnić o odpowiedni system odrzuceniowy określony przy użyciu reguł odrzucania MP^{-1}, Sub^{-1} oraz $Comp^{-1}$ z aksjomatami odrzuconymi, którymi są formuła (4.5) oraz wszystkie formuły podpadające pod schematy:

$$S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{n-1}aS_n \wedge S_naP \wedge PaP \rightarrow S_naS_n, \tag{4.25}$$

gdzie $n \geqslant 2$;

$$SaS \wedge SaP_1 \wedge P_1aP_2 \wedge \ldots \wedge P_{n-1}aP_n \to P_1aP_1, \tag{4.26}$$

gdzie $n \geqslant 2$.

Definicja 24. *Wyrażeniem odrzuconym systemu* ***Słp***$^+$ *jest aksjomat odrzucony (4.4), każda z formuł podpadająca pod jeden ze schematów (4.25) lub (4.26) oraz każde wyrażenie, które można otrzymać z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania:* MP^{-1}, Sub^{-1} *lub* $Comp^{-1}$.

Lemat 73. *Wyrażenia (2.11), (2.14) oraz (2.1) są wyrażeniami odrzuconymi systemu* ***Słp***$^+$.

Dowód. (2.11) Formuła

$$\neg SaS \to (SaS \wedge SaP_1 \wedge P_1aP_2 \to P_1aP_1)$$

jest podstawieniem tezy KRZ, a formuła

$$SaS \wedge SaP_1 \wedge P_1aP_2 \to P_1aP_1$$

jest odrzucona jako podpadająca pod schemat (4.26), a zatem korzystając z reguły MP^{-1}, otrzymujemy $\dashv \neg SaS$.

(2.14) Formuła

$$SiP \to (SaS \wedge SaM \wedge PaP \wedge PaM \wedge MaM \to SiP)$$

jest podstawieniem tezy KRZ, a formuła

$$SaS \wedge SaM \wedge PaP \wedge PaM \wedge MaM \to SiP$$

jest odrzucona jako aksjomat odrzucony (4.5), a zatem korzystając z reguły MP^{-1}, otrzymujemy $\dashv \neg SiP$.

(2.1) Ponieważ podstawieniem tezy KRZ jest formuła

$$S_2aS_2 \to (S_1aS_2 \wedge S_2aP \wedge PaP \to S_2aS_2),$$

formuła

$$S_1aS_2 \wedge S_2aP \wedge PaP \to S_2aS_2$$

jest odrzucona jako podpadająca pod schemat (4.25). Odrzucona jest więc również formuła S_2aS_2 i na mocy reguły Sub^{-1} również formuła SaS. ■

Lemat 74. *Każde wyrażenie atomowe o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ oraz $\mathcal{Z}i\mathcal{V}$, gdzie $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{V}$ są różnymi zmiennymi, a także każde wyrażenie o postaci $\neg\alpha$, gdzie α jest formułą elementarną, jest wyrażeniem odrzuconym systemu* $\boldsymbol{Słp}^{+}$.

Dowód. Każde wyrażenie atomowe o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ można odrzucić korzystając z reguły Sub^{-1} zastosowanej do $\dashv SaS$, a wyrażenie $\mathcal{Z}i\mathcal{V}$, gdzie $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{V}$ – do $\dashv SiP$. Z kolei każde wyrażenie o postaci $\neg\alpha$, gdzie α jest formułą elementarną, jest odrzucone, ponieważ odrzucona jest formuła (2.11) – analogicznie jak w systemie **Łuk**. ■

Lemat 75. *Każda formuła hornowska języka systemu* $\boldsymbol{Słp}^{+}$ *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. W obecności Lematów 72 i 74 oraz aksjomatu (2.2) wystarczy wykazać zachodzenie lematu dla formuł o postaci $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{X}$.

Jeżeli α zawiera atomy $\mathcal{Y}a\mathcal{Y}$ oraz $\mathcal{Z}a\mathcal{Z}$ oraz łańcuchy łączące $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$ oraz $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Z}$, to rozpatrywana formuła jest tezą systemu, którą otrzymać można z aksjomatów (4.3) oraz (2.3).

W przeciwnym wypadku mamy do czynienia z jedną z następujących możliwości: (i) nie ma takiego $\mathcal{Y}$, że α zawiera atom $\mathcal{Y}a\mathcal{Y}$ oraz łańcuch łączący $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$ lub (ii) nie ma takiego $\mathcal{Z}$, że α zawiera atom $\mathcal{Z}a\mathcal{Z}$ oraz łańcuch łączący $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Z}$.

W przypadku (i) wszystkie zmienne, które są połączone ze zmienną $\mathcal{X}$ w α można uporządkować liniowo w taki sposób, że w każdym atomie zbudowanym z użyciem funktora a, którego argumentami są takie zmienne, pierwszy z argumentów jest w porządku ściśle wcześniejszy od drugiego. Niech m będzie liczbą takich zmiennych, a $n = m + 1$. Niech teraz e będzie podstawieniem, w którym za każdą zmienną połączoną z $\mathcal{X}$ w α podstawiona jest zmienna S_i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$ w taki sposób, że jeżeli α zawiera atom zbudowany przy użyciu funktora a oraz dwóch zmiennych połączonych z $\mathcal{X}$, to rezultatem podstawienia e zastosowanego do tego atomu jest wyrażenie S_jaS_{j+1}, gdzie $1 \leqslant i < m$, za $\mathcal{X}$ podstawiona jest zmienna S_n, a za pozostałe zmienne – P. Przy tak zdefiniowanym podstawieniu e w systemie $\mathbf{Słp}^{+}$, ponieważ aksjomatami są formuły (2.2) i (2.3), a tezą jest (2.6), tezą jest również formuła

$$e(\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{X}) \equiv (S_1aS_2 \wedge \ldots \wedge S_{n-1}aS_n \wedge S_naP \wedge PaP \to S_naS_n).$$

W związku z tym, w obecności aksjomatu odrzuconego (4.25) formuła $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{X}$ jest wyrażeniem odrzuconym.

Przypadek (ii) jest symetryczny w stosunku do przypadku (i), można więc zastosować do niego analogiczne rozumowanie, z zastosowaniem aksjomatu odrzuconego (4.26). ■

Lemat 76. *Żadna z formuł podpadających pod schemat (4.25) lub (4.26) nie jest tezą systemu* ***Słp***$^+$*.*

Dowód. Strukturę teoriomodelową, w której tautologiami są wszystkie tezy systemu, a nie są nimi wszystkie formuły podpadające pod schematy (4.25) lub (4.26), stanowi klasa modeli $\mathsf{M}_{I_{59}} = (D, I_{49}, v)$, w której dziedzina D jest zbiorem nieskończonym, wartościowanie v przypisuje zmiennym niepuste podzbiory D, a interpretacja I_{59} dla formuł atomowych jest określona następująco:

$I_{59}(v(\mathcal{X}a\mathcal{Y})) = 1$ wtw $v(\mathcal{X}) \subset v(\mathcal{Y})$ lub
$v(\mathcal{X}) = v(\mathcal{Y})$ oraz $v(\mathcal{X})$ i $\overline{v(\mathcal{X})}$
są zbiorami nieskończonym

$I_{59}(v(\mathcal{X}i\mathcal{Y})) = 1$ wtw $v(\mathcal{X}) \cap v(\mathcal{Y}) \neq \emptyset$,

a dla funktorów rachunku zdań jest klasyczna.

Sprawdzenie, że aksjomaty systemu **Słp**$^+$ są tautologiami w klasie $\mathsf{M}_{I_{59}}$, jest rutynowe.

Aksjomat (4.5) jest niespełniony w modelu określonym w dziedzinie liczb całkowitych ($\mathbb{C}$) przy wartościowaniu v, w którym $v(S)$ jest zbiorem liczb parzystych, $v(P)$ jest zbiorem liczb nieparzystych, a $v(M)$ zbiorem liczb naturalnych ($\mathbb{N}$).

Formuły podpadające pod schemat (4.25) są niespełnione w modelu określonym w dziedzinie ($\mathbb{C}$) przy wartościowaniu v, w którym:
$v(S_1) = \{1\}$,
$v(S_i) = v(S_{i-1}) \cup \{1\}$, dla $i > 1$,
$v(P) = \mathbb{N}$.

Formuły podpadające pod schemat (4.26) są niespełnione w modelu określonym w dziedzinie ($\mathbb{C}$) przy wartościowaniu v, w którym:
$v(P_n) = \mathbb{C} - \{n\}$,
$v(P_i) = v(S_{i+1}) - \{i\}$, dla $1 \leqslant i < n$,
$v(S) = \mathbb{C} - \mathbb{N}$. ■

Twierdzenie 51. *Każda formuła języka systemu* ***Słp***$^+$ *jest tezą systemu lub* *wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak Twierdzenia 9 przy czym wykorzystać trzeba Lematy 75 oraz 76. ■

Twierdzenie 52. *System* $\boldsymbol{Słp}^{+}$ *jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy modeli* $\mathsf{M}_{I_{59}}$.

Dowód. Ponieważ wszystkie aksjomaty są tautologiami, aksjomaty odrzucone nie są (zgodnie z Lematem 76), a reguły MP, Sub, MP^{-1} oraz Sub^{-1} w oczywisty sposób zachowują odpowiednio tautologiczność i nietautologiczność, tak jak w przypadku dowodów pełności poprzednio rozpatrywanych systemów, wystarczy pokazać, że reguła $Comp^{-1}$ prowadzi od przesłanek, które nie są tautologiami, do wniosku, który też nie jest tautologią. Pokażemy ten fakt dla przypadku użycia reguły z dwoma przesłankami. Ogólny przypadek można dalej uzyskać przez prostą indukcję.

Niech $\alpha \to \beta_1$ i $\alpha \to \beta_2$ będą formułami odrzuconymi systemu, które nie są spełnione w modelach wyznaczonych w dziedzinie $\mathbb{C}$ odpowiednio przez wartościowania v_1 i v_2. Niech dalej oba wartościowania przypisują zbiory skończone każdej zmiennej $\mathcal{X}$, dla której α nie zawiera atomu o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{X}$ ani atomu $\mathcal{Y}a\mathcal{Y}$ oraz łańcucha łączącego $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$, oraz zbiory, których dopełnienie jest skończone każdej zmiennej $\mathcal{X}$, która nie spełnia powyższego warunku, dla której α nie zawiera atomu o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{X}$ ani atomu $\mathcal{Z}a\mathcal{Z}$ oraz łańcucha łączącego $\mathcal{X}$ z $\mathcal{Z}$. (Odpowiednio dobierając podzbiory zbioru $\mathbb{C}$ można niezależnie od skończoności zbiorów i ich dopełnień uzyskać dowolne relacje zakresowe, więc taki dobór wartościowania zawsze jest możliwy).

Formuła $\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2$ jest niespełniona w modelu z klasy $\mathsf{M}_{I_{59}}$ określonym w dziedzinie $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ przy użyciu wartościowania v_3, takiego że $v_3(\mathcal{X}) = v_1(\mathcal{X}) \times v_2(\mathcal{X})$, dla dowolnego $\mathcal{X}$. Aby to udowodnić, wystarczy do atomów, w których zmiennym przypisane są dwa różne zbiory, zastosować prawa rachunku zbiorów (2.17) i (4.18), a do przypadków atomów, w których obu zmiennym przypisany jest ten sam zbiór – prawidłowości:

Jeżeli x_1 i x_2 są skończonymi zbiorami, to $x_1 \times x_2$ jest skończonym zbiorem.

Jeżeli $\overline{x_1}$ i $\overline{x_2}$ są skończonymi zbiorami, to $\overline{x_1 \times x_2}$ jest skończonym zbiorem.

■

System **Łuk**$^-$

Formuły ⟨18⟩, ⟨20⟩, ⟨22⟩, ⟨23⟩, ⟨59⟩, ⟨61⟩, ⟨63⟩ i ⟨64⟩ charakteryzują się tym, że zmienna z następnika nie występuje w ich poprzedniku[7].

Oznacza to, że dla określonego $\mathcal{X}$ fakt, czy uznane jest wyrażenie atomowe o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{X}$ bądź $\mathcal{X}a\mathcal{X}$ zależy nie od samego $\mathcal{X}$, ale od pewnych globalnych własności dziedziny, którą się zajmujemy. Aby zbadać konsekwencje uznania tego typu formuł, przeanalizujemy system, w którym jedna z nich jest aksjomatem. Aby uprościć rozważania, przyjmiemy również w systemie formułę ⟨62⟩ z diagramu, tzn. formułę (2.18), będącą aksjomatem systemu **Stnd**. Takie rozszerzenie systemu **Słp** oznaczymy symbolem **Łuk**$^-$.

Regułami w systemie **Łuk**$^-$ są MP i Sub, a aksjomatami systemu są wszystkie podstawienia tez KRZ, formuły (2.3), (2.4), (2.6), (2.18) oraz formuła ⟨18⟩ z diagramu, tj.

$$SaS \to MiM. \tag{4.27}$$

Oczywiście, ponieważ aksjomatami systemu **Łuk**$^-$ są wszystkie aksjomaty systemu **Stnd**, pierwszy z nich jest rozszerzeniem drugiego. W szczególności tezami systemu **Łuk**$^-$ są formuły (2.19), (2.20), (2.21), (2.22) oraz (2.23).

Z aksjomatów (2.18) i (4.27) można wyprowadzić formułę ⟨64⟩ z diagramu, tj.

$$SiP \to MiM, \tag{4.28}$$

a zatem również pozostałe wymienione formuły, w których zmienne z następnika nie występują w poprzedniku. Zestawiając powyższe rezultaty, otrzymujemy bezpośrednio następujący lemat:

Lemat 77. *Każde wyrażenie o postaci $\alpha \to \mathcal{X}a\mathcal{X}$ bądź $\alpha \to \mathcal{X}i\mathcal{X}$, gdzie α jest formułą elementarną, jest tezą systemu **Łuk**$^-$.*

Tak określony system można uzupełnić o system aksjomatycznego odrzucania określony przy użyciu reguł odrzucania MP^{-1}, Sub^{-1} oraz $Comp^{-1}$ z aksjomatami odrzuconymi, którymi są formuły (2.10) oraz (2.1).

Definicja 25. *Wyrażeniem odrzuconym systemu **Łuk**$^-$ jest każdy z aksjomatów odrzuconych (2.10) i (2.1) oraz każde wyrażenie, które można otrzymać*

[7] Własność tę można nazwać tak samo jak analogiczną własność analizowaną w logikach modalnych niezupełnością w sensie Haldena, na co zwrócono uwagę w pracy [26].

z tez systemu oraz wyrażeń odrzuconych przy użyciu jednej z reguł odrzucania: MP^{-1}*,* Sub^{-1} *lub* $Comp^{-1}$*.*

Lemat 78. *Formuła (2.11) jest wyrażeniem odrzuconym systemu **Łuk**⁻*

Dowód. Dowód przedstawiony jest poniżej.

1.	$\vdash SaM \to SaS$	teza (2.20)
2.	$\vdash \neg SaS \to \neg SaM$	KRZ: 1
3.	$\vdash \neg SaM \to (SaM \wedge PaM \to SiP)$	KRZ
4.	$\dashv SaM \wedge PaM \to SiP$	aks. odrzucony (2.10)
5.	$\dashv \neg SaM$	MP^{-1}: 3, 4
	$\dashv \neg SaS$	MP^{-1}: 2,5

■

Lemat 79. *Każde wyrażenie atomowe oraz każde wyrażenie o postaci* $\neg\alpha$*, gdzie* α *jest formułą elementarną, jest wyrażeniem odrzuconym systemu* ***Łuk***$^{-}$*.*

Dowód. Każde wyrażenie atomowe można odrzucić stosując regułę MP^{-1} do aksjomatu odrzuconego (2.1) i formuły (2.19) (otrzymujemy $\dashv SiS$) oraz reguły Sub^{-1}, bądź stosując regułę Sub^{-1} wprost do aksjomatu odrzuconego (2.1).

Z kolei każde wyrażenie o postaci $\neg\alpha$, gdzie α jest formułą elementarną jest odrzucone, ponieważ odrzucona jest formuła (2.11) – analogicznie jak w systemie **Łuk**. ■

Lemat 80. *Każda formuła hornowska języka sylogistyki, w której następniku występuje atom z różnymi zmiennymi, jest tezą systemu* ***Łuk***$^{-}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy jest tezą systemu* ***Łuk****.*

Dowód. Zachodzenie lematu wynika z faktu, że system **Łuk**$^{-}$ znajduje się pomiędzy systemem **Słp** a systemem **Łuk**. ■

Lemat 81. *Każda formuła hornowska języka systemu* ***Łuk***$^{-}$ *jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Zachodzenie lematu jest bezpośrednią konsekwencją Lematów 77, 80 i 79. ■

Lemat 82. *Aksjomaty odrzucone (2.10) oraz (2.1) nie są tezami systemu* ***Łuk***$^{-}$*.*

Dowód. Wszystkie tezy systemu **Łuk**$^-$ są tezami systemu **Łuk**, a aksjomat odrzucony (2.10) nie jest tezą **Łuk**. Wobec tego aksjomat odrzucony nie jest również tezą systemu **Łuk**$^-$.

Wszystkie tezy systemu **Łuk**$^-$ są spełnione w modelu, w którym wszystkie atomy są fałszywe, a aksjomat odrzucony (2.1) w takim modelu nie jest spełniony, zatem nie jest tezą systemu **Łuk**$^-$. ■

Twierdzenie 53. *Każda formuła języka systemu **Łuk**$^-$ jest tezą systemu lub wyrażeniem odrzuconym, a żadna formuła nie jest jednocześnie tezą i wyrażeniem odrzuconym.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak Twierdzenia 9, przy czym wykorzystać trzeba Lematy 81 oraz 82. ■

Klasę modeli dla systemu **Łuk**$^-$ otrzymać można poprzez ograniczenie klasy modeli adekwatnej w stosunku do systemu **Słp**, tzn. klasy M_{I_8} w taki sposób, że dopuszczalne są tylko wartościowania, które przypisują wszystkim zmiennym zbiór pusty albo takie, które żadnej zmiennej nie przypisują zbioru niepustego. Tak określoną klasę modeli oznaczymy symbolem $\mathsf{M}^{\star}_{I_8}$.

Twierdzenie 54. *System **Łuk**$^-$ jest adekwatny (poprawny i pełny) w stosunku do klasy modeli* $\mathsf{M}^{\star}_{I_8}$.

Dowód. Tak jak w przypadku poprzednich twierdzeń o pełności, wystarczy pokazać, że tezy systemu są tautologiami w klasie modeli M_{I_8}, a wyrażenia odrzucone nie są.

Sprawdzenie, że aksjomaty systemu są tautologiami, jest rutynowe. Aksjomat odrzucony (2.10) nie jest spełniony w modelu określonym w dziedzinie $\{1,2\}$ przez wartościowanie v takie, że $v(S) = \{1\}$, $v(P) = \{2\}$, $v(M) = \{1,2\}$ $(D = \{1,2\})$. Aksjomat odrzucony (2.1) nie jest spełniony w modelu w dowolnej dziedzinie, określonym przez wartościowanie przypisujące każdej zmiennej zbiór pusty.

Reguły MP, Sub, MP^{-1} oraz Sub^{-1} w oczywisty sposób zachowują odpowiednio tautologiczność i nietautologiczność, tak jak w przypadku dowodów pełności poprzednio rozpatrywanych systemów.

Dla pokazania, że reguła $Comp^{-1}$ prowadzi od przesłanek, które nie są tautologiami, do wniosku, który nie jest tautologią, można zastosować to samo rozumowanie, które zostało wykorzystane w dowodzie Twierdzenia 13 dla systemu **Stnd**, polegające na budowaniu iloczynu kartezjańskiego modeli. Ponieważ stosowana interpretacja jest w obu przypadkach taka sama, model powstający jako iloczyn kartezjański modeli, w których niespełnione są przesłanki, będzie także w przypadku systemu **Łuk**$^{-}$ modelem, w którym wniosek nie jest spełniony. Wystarczy zatem pokazać, że model ten należy do klasy $\mathsf{M}^{\star}_{I_8}$, tzn. że jeżeli wartościowania v_1 i v_2 przypisują zbiór pusty wszystkim zmiennym albo nie przypisują go żadnej zmiennej, to warunek ten spełnia również wartościowanie v_3, określone w ten sposób, że $v_3(\mathcal{X}) = v_1(\mathcal{X}) \times v_2(\mathcal{X})$. W przypadku, gdy któreś z wartościowań v_1 bądź v_2 przypisuje wszystkim zmiennym zbiór pusty, tak samo zachowuje się wartościowanie v_3. W przypadku, gdy żadne z wartościowań nie przypisuje żadnej zmiennej zbioru pustego, ponieważ iloczyn kartezjański dwóch zbiorów niepustych jest zawsze niepusty, wartościowanie v_3 nie przypisuje zbioru pustego żadnej zmiennej. ■

Rozdział 5

Matrycowe procedury rozstrzygania

Ogólne wyniki z Rozdziału 1, dotyczące rozstrzygalności teorii hornowskich gwarantują, że wszystkie prezentowane w poprzednich rozdziałach systemy są rozstrzygalne. W niniejszym rozdziale zaprezentujemy alternatywną metodę rozstrzygania opartą o modele. Przedstawimy relację pomiędzy aksjomatyką odrzuceniową dla danego systemu rachunku nazw a procedurą decyzyjną dla tego systemu, skonstruowaną w oparciu o jego modele. Głównym rezultatem jest tu wykazanie, że uzupełnienie systemu o aksjomatykę odrzuceniową z wykorzystaniem skończonego zbioru aksjomatów odrzuconych pozwala na istotne ograniczenie rozmiaru modelu wystarczającego do zbudowania procedury rozstrzygania.

Uzyskane wyniki zestawimy z obecnymi w literaturze rezultatami [18, 43] dotyczącymi wielkości modeli, których trzeba użyć do rozstrzygania formuł w różnych systemach rachunku nazw.

Matryce dla systemu Łukasiewicza przedstawione zostały w pracy [21], dla systemu **OntSyl** – w pracy [25], a systemu **Słp** – w pracy [26]. Matryce dla pozostałych systemów nie były dotąd przedstawiane.

5.1 Aksjomaty odrzucone i modele dla formuł hornowskich

Twierdzenie 55. *Niech T będzie teorią hornowską uzupełnioną o adekwatny system aksjomatycznego odrzucania, wykorzystujący reguły MP^{-1}, Sub^{-1}*

i $Comp^{-1}$ *oraz aksjomaty odrzucone, będące formułami hornowskimi, a* $\mathcal{M}$ *klasą modeli teorii* T*.*

Jeżeli żaden z aksjomatów odrzuconych teorii T *nie jest tautologią w klasie modeli* $\mathcal{M}$*, to dowolna formuła hornowska* α *jest tezą systemu* T *wtedy i tylko wtedy, gdy jest tautologią w klasie modeli* $\mathcal{M}$*.*

Dowód. Jeżeli rozpatrywana formuła hornowska α jest tautologią w klasie modeli $\mathcal{M}$, to nie da się z niej wyprowadzić żadnego z aksjomatów odrzuconych. W związku z tym, zgodnie z Wnioskiem 1 nie jest formułą odrzuconą, a więc, ponieważ system odrzucania jest adekwatny, musi być tezą teorii T.

Jeżeli z kolei α nie jest tautologią w klasie modeli $\mathcal{M}$, to nie jest tezą, ponieważ $\mathcal{M}$ jest klasą modeli teorii T. ■

Wniosek 2. *Dla rozstrzygnięcia, czy dowolna formuła hornowska* α *jest tezą teorii hornowskiej* T*, wystarczy skonstruować klasę modeli* T*, w której aksjomaty odrzucone nie są tautologiami.*

Twierdzenie 55 pozwala na wykorzystanie aksjomatyki odrzuceniowej systemu rachunku nazw do konstrukcji efektywnych procedur decyzyjnych opartych o modele. Systemy rachunku nazw, analizowane w poprzednich rozdziałach, posiadają adekwatne charakterystyki teoriomodelowe. Czynnikiem, który decyduje o efektywności wykorzystania modeli do rozstrzygania formuł przy zastosowaniu modeli, jest rozmiar dziedziny modelu, który musi być użyty do falsyfikacji formuły. Problem wyznaczenia takiego rozmiaru pojawił się w literaturze w pracach [18, 43]. Wykorzystanie powyższych rezultatów, związanych z rozstrzyganiem dla formuł hornowskich w oparciu o modele wyznaczone przez aksjomaty odrzucone, pozwala spojrzeć na ten problem z nowej perspektywy. Rozmiar dziedziny modelu można bowiem ograniczyć do rozmiaru pozwalającego na falsyfikację aksjomatów odrzuconych. W kolejnych podrozdziałach przeanalizujemy takie ograniczenia tych systemów z poprzednich rozdziałów, dla których podaliśmy skończoną aksjomatykę odrzuceniową.

Możliwe jest również otrzymanie aksjomatyki odrzuceniowej w oparciu o klasę modeli adekwatną w stosunku do systemu aksjomatycznego, jeżeli ta klasa określona jest jako zbiór modeli $\mathcal{M}$, zdefiniowany jak w Rozdziale 1 w skończonej dziedzinie.

Definicja 26. *Niech* $\mathcal{M} = (N, I, v)$ *będzie modelem teorii hornowskiej* T*, takim że* $N = \{z_1, \ldots, z_k\}$*,* $k \in \mathbb{N}$*. Niech dalej* $\mathbf{S} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ *będzie zbiorem zmiennych nazwowych o tych samych indeksach co obiekty z modelu.*

Niech v_{aks} *będzie wartościowaniem, w którym każdej zmiennej ze zbioru* $\mathbf{S}$ *przyporządkowany jest obiekt ze zbioru* N *o tym samym indeksie. Niech teraz* Φ_0 *i* Φ_1 *będą zbiorami atomów języka rachunku nazw, zbudowanych przy użyciu zmiennych ze zbioru* S *w taki sposób, że* $\Phi_0 = \{\alpha : I(v_{aks}(\alpha)) = 0\}$*, a* $\Phi_1 = \{\alpha : I(v_{aks}(\alpha)) = 1\}$*.*

Formuła $aks(\mathcal{M})$ *jest implikacją, której poprzednikiem jest koniunkcja wszystkich elementów zbioru* Φ_1*, a następnikiem alternatywa wszystkich elementów zbioru* Φ_0*.*

Twierdzenie 56. *Niech* $\mathcal{M}$ *będzie klasą modeli teorii hornowskiej* T*, określoną w skończonej dziedzinie. System aksjomatycznego odrzucania dla systemu* T *można określić za pomocą reguł* MP^{-1}*,* $Subst^{-1}$ *i* $Comp^{-1}$ *oraz formuły* $aks(\mathcal{M})$ *jako jedynego aksjomatu odrzuconego.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że (i) aksjomat odrzucony $aks(\mathcal{M})$ nie jest tezą oraz, że (ii) każde wyrażenie hornowskie języka jest tezą albo wyrażeniem odrzuconym.

Warunek (i) spełniony jest, ponieważ formuła $aks(\mathcal{M})$ jest fałszywa w modelu $\mathcal{M}$.

Warunek (ii). Każda formuła jest tautologią w klasie modeli lub nie jest. Jeżeli formuła hornowska α jest tautologią, to jest również tezą T.

Jeżeli nie jest tautologią, to istnieje wartościowanie v, w którym jest niespełniona. Niech e będzie podstawieniem, w którym za każdą zmienną $\mathcal{X}$ z α podstawiona jest zmienna $\mathcal{Y}$, taka że $v_{aks}(\mathcal{Y}) = v(\mathcal{X})$, gdzie v_{aks} jest wartościowaniem z Definicji 26. Na mocy praw KRZ implikacja $e(\alpha) \to aks(\mathcal{M})$ jest tezą systemu T. W związku z tym α jest wyrażeniem odrzuconym. ■

5.2 Modele dla hornowskich systemów zakresowych

Okazuje się, że dla zakresowych systemów hornowskich z poprzednich rozdziałów odpowiednie klasy modeli można określić w dziedzinie zawierającej dwa elementy. Aby podkreślić, że elementy takie mogą być dowolnymi obiektami, posłużymy się dla ich oznaczenia symbolami: ♣ i ♠. Przyjmiemy na potrzeby dalszego ciągu niniejszego rozdziału następujące stałe oznaczenia dla nazw, których zakres stanowią odpowiednio zbiory:

- w_0 – $\emptyset$;
- w_1 – $\{\clubsuit\}$;
- w_2 – $\{\spadesuit\}$;
- w_3 – $\{\clubsuit, \spadesuit\}$;

Modele, występujące w twierdzeniach o pełności dla poszczególnych systemów, opisywane były jako modele typu M, wprowadzone w Rozdziale 1, tzn. takie, w których zmiennym odpowiadają podzbiory dziedziny, a interpretacja określona jest z użyciem stosunków zakresowych między nimi. Jak zauważyliśmy w Rozdziale 1, tak określoną klasę modeli można opisać również jako modele $\mathcal{M}$, w których zmiennym odpowiadają elementy dziedziny, a interpretacja jest określona przez bezpośrednie wskazanie dla każdego funktora par obiektów, dla których zdania są prawdziwe. Ten drugi sposób prezentacji modeli jest wygodniejszy w budowaniu procedur decyzyjnych i z niego będziemy korzystać w dalszych rozważaniach.

5.2.1 System Łuk

W systemie **Łuk** klasę modeli pozwalającą na rozstrzyganie w odniesieniu do formuł hornowskich można ograniczyć do dziedziny dwuelementowej i trzech nazw: w_1, w_2 i w_3.

Zdania atomowe przyjmują wartości logiczne zgodnie z definicją interpretacji I_2, określającą klasę modeli adekwatną w stosunku do systemu **Łuk**, np.:

- zdanie $w_1 a w_1$ jest prawdziwe, bo $\{\clubsuit\} \subseteq \{\clubsuit\}$;
- zdanie $w_1 a w_2$ jest fałszywe, bo $\{\clubsuit\} \nsubseteq \{\spadesuit\}$;
- zdanie $w_1 a w_1$ jest prawdziwe, bo $\{\clubsuit\} \subseteq \{\clubsuit, \spadesuit\}$.

Wartości logiczne wszystkich formuł atomowych ujęte są w poniższych matrycach[1]:

a	w_1	w_2	w_3
w_1	1	0	1
w_2	0	1	1
w_3	0	0	1

i	w_1	w_2	w_3
w_1	1	0	1
w_2	0	1	1
w_3	1	1	1

Twierdzenie 57. *Powyższe matryce pozwalają na rozstrzygnięcie, czy dana formuła hornowska jest tezą systemu **Łuk**.*

Dowód. Matryce są skonstruowane w oparciu o definicję modeli z klasy M_{I_2}, więc wyznaczone przez nie struktury są modelami systemu **Łuk**. Aby rozwiać ewentualne wątpliwości można sprawdzić, że aksjomaty **Łuk** są spełnione przy każdym podstawieniu nazw ze zbioru $\{w_1, w_2, w_3\}$ za zmienne.

Aksjomat odrzucony (2.10) nie jest spełniony przy wartościowaniu v, takim że $v(P) = w_1$, $v(S) = w_2$ i $v(M) = w_3$. ■

5.2.2 System Stnd

Matryce dla systmu **Stnd** powstają w sposób analogiczny do matryc dla systemu **Łuk**, poprzez ograniczenie modeli zbioru wyznaczonych przez interpretację I_8 do naszej dziedziny dwuelementowej i czterech stałych nazw w niej występujących: w_0, w_1, w_2 i w_3. Wartości poszczególnych formuł atomowych przedstawione są poniżej:

a	w_0	w_1	w_2	w_3
w_0	0	0	0	0
w_1	0	1	0	1
w_2	0	0	1	1
w_3	0	0	0	1

i	w_0	w_1	w_2	w_3
w_0	0	0	0	0
w_1	0	1	0	1
w_2	0	0	1	1
w_3	0	1	1	1

Twierdzenie 58. *Powyższe matryce pozwalają rozstrzygnąć, czy dana formuła hornowska jest tezą systemu **Stnd**.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 57, przy czym aksjomaty odrzucone (2.10) i (2.24) są fałszywe odpowiednio przy wartościowaniach v_1 i v_2, w których: $v_1(S) = w_1$, $v_1(P) = w_2$ i $v_1(M) = w_3$, a $v_2(P) = w_1$ i $v_2(S) = w_0$. ■

[1]Matryce pokrywają się co do zawartości z matrycami określającymi interpretację I_1.

5.2.3 System B-horn

Fakt, że zbiór aksjomatów systemu **B-horn** jest podzbiorem zbioru aksjomatów systemu **B** gwarantuje, że **B-horn** jest podsystemem systemu **B**. Każdy model **B** jest więc również modelem **B-horn**. Dla konstrukcji matryc odpowiednich dla systemu **B** wykorzystamy więc interpretację I_{10}, z modelu adekwatnego w stosunku do systemu **B** ograniczonego do stałych nazw w_0, w_1, w_2 i w_3, otrzymując:

a	w_0	w_1	w_2	w_3
w_0	1	1	1	1
w_1	0	1	0	1
w_2	0	0	1	1
w_3	0	0	0	1

i	w_0	w_1	w_2	w_3
w_0	0	0	0	0
w_1	0	1	0	1
w_2	0	0	1	1
w_3	0	1	1	1

Twierdzenie 59. *Powyższe matryce pozwalają rozstrzygnąć, czy dana formuła hornowska jest tezą systemu* ***B-horn****.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu dwóch poprzednich twierdzeń, przy czym aksjomaty odrzucone (2.53) i (2.54) są niespełnione odpowiednio przy wartościowaniach v_1 i v_2, w których: $v_1(S) = w_1$, $v_1(P) = w_2$ i $v_1(M) = w_3$, a $v_2(P) = w_1$ i $v(S) = w_0$. ■

5.2.4 System OntP

W stosunku do systemu **OntP** wykorzystamy klasę modeli określoną przez interpretację I_{16} ograniczoną do nazw w_1, w_2 i w_3, otrzymując następującą matrycę[2]:

ε	w_1	w_2	w_3
w_1	1	0	1
w_2	0	1	1
w_3	0	0	0

Twierdzenie 60. *Powyższa matryca pozwala rozstrzygnąć, czy dana formuła hornowska jest tezą systemu* ***OntP****.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu poprzednich twierdzeń, przy czym aksjomat odrzucony (3.4) jest niespełniony w modelu przy wartościowaniu v, w którym: $v(P) = w_1$, $v(S) = w_2$ i $v(M) = w_3$. ■

[2] Zawartość matrycy pokrywa się z zawartością matrycy z interpretacji I_{15}.

5.2.5 System OntSol

W stosunku do systemu **OntSol** wykorzystamy interpretację I_{22}, ograniczoną jak w systemie **Stnd** do nazw w_0, w_1, w_2 i w_3, otrzymując[3]:

ε	w_0	w_1	w_2	w_3	sol
w_0	0	0	0	0	1
w_1	0	1	0	1	1
w_2	0	0	1	1	1
w_3	0	0	0	0	0

Twierdzenie 61. *Powyższe matryce pozwalają rozstrzygnąć, czy dana formuła hornowska jest tezą systemu **OntSol**.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu poprzednich twierdzeń, przy czym aksjomaty odrzucone (3.4) i (3.13) nie są spełnione odpowiednio przy wartościowaniach v_1 i v_2, w których: $v_1(S) = w_1$, $v_1(P) = w_2$ i $v_1(M) = w_3$, a $v_2(P) = w_1$ i $v(S) = w_0$. ■

5.2.6 System OntSyl

W stosunku do systemu **OntSyl** wykorzystamy interpretację I_{32}, ograniczoną do nazw w_0, w_1, w_2 i w_3, otrzymując następujące matryce:

ε	w_0	w_1	w_2	w_3
w_0	0	0	0	0
w_1	0	1	0	1
w_2	0	0	1	1
w_3	0	0	0	0

a	w_0	w_1	w_2	w_3
w_0	0	0	0	0
w_1	0	1	0	1
w_2	0	0	1	1
w_3	0	0	0	1

i	w_0	w_1	w_2	w_3
w_0	0	0	0	0
w_1	0	1	0	1
w_2	0	0	1	1
w_3	0	1	1	1

[3] Fakt, że w strukturze modelowej dla systemu **OntSol** wykorzystany jest zbiór w_0, którego nie ma w odpowiedniej strukturze dla systemu **OntP**, potwierdza obserwacje z pracy [42], w której zauważono, że w stosunku do bezkwantyfikatorowego systemu z funktorem ε jako jedynym funktorem specyficznym można posłużyć się modelami, w których używa się jedynie niepustych zbiorów, a w odniesieniu do bogatszych systemów zbiór pusty jest niezbędny.

Twierdzenie 62. *Powyższe matryce pozwalają rozstrzygnąć, czy dana formuła hornowska jest tezą systemu **OntSyl**.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu poprzednich twierdzeń, przy czym aksjomaty odrzucone (3.43) i (3.44) nie są spełnione odpowiednio przy wartościowaniach v_1 i v_2, w których: $v_1(S) = w_1$, $v_1(P) = w_2$ i $v_1(M) = w_3$, a $v_2(P) = w_1$ i $v(S) = w_0$. ■

5.3 Matryce dla systemu Słp

5.3.1 Matryce pięcioelementowe

W systemie **Słp** charakterystyka modelu obejmuje nie tylko zakres nazw, ale również przypisaną im etykietę. Potrzebować będziemy również rozszerzenia modelu zdefiniowanego w sekcji 5.2 o dodatkowy obiekt w modelu – $\heartsuit$. Wykorzystamy następujące nazwy:

- s_1 ze zbiorem desygnatów $\{\clubsuit\}$ i etykietą 0;
- s_2 ze zbiorem desygnatów $\{\spadesuit\}$ i etykietą 1;
- s_3 ze zbiorem desygnatów $\{\clubsuit, \spadesuit\}$ i etykietą 0;
- s_4 ze zbiorem desygnatów $\{\heartsuit\}$ i etykietą 1;
- s_5 ze zbiorem desygnatów $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ i etykietą 1.

Wartości logiczne poszczególnych zdań atomowych, zgodne z interpretacją w stosunku do której system **Słp** jest pełny, są przedstawione w poniższych matrycach:

a	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0	0	1	0	1
s_2	0	1	1	0	1
s_3	0	0	0	0	1
s_4	0	0	0	1	1
s_5	0	0	0	0	1

i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0	0	1	0	1
s_2	0	1	1	0	1
s_3	1	1	1	0	1
s_4	0	0	0	1	1
s_5	1	1	1	1	1

Twierdzenie 63. *Formuła hornowska języka systemu **Słp** jest tezą wtedy i tylko wtedy, gdy jest tautologią w powyższych matrycach.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu poprzednich twierdzeń, przy czym aksjomaty odrzucone (4.3), (4.4) i (4.3) są fałszywe odpowiednio przy wartościowaniach v_1, v_2 i v_3: $v_1(S) = s_1$ i $v_1(M) = s_5$, $v_2(S) = s_2$, $v_2(P) = s_5$ i $v_2(M) = s_4$, a $v_3(S) = s_2$, $v_3(P) = s_3$ i $v_3(M) = s_5$. ■

5.3.2 Matryce czteroelementowe

Ograniczenie liczby zbiorów w modelu do czterech można uzyskać, wykorzystując interpretację koniunkcji i implikacji, pochodzącą z trójwartościowej logiki Łukasiewicza (zob. np. [33]), określoną przez następujące matryce[4]:

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

W modelu wykorzystamy dwie nazwy, którym odpowiada ten sam zbiór, ale różne etykiety. Będziemy tę sytuację reprezentować, wykorzystując w opisie matrycy dla obu tych nazw ten sam obiekt i przypisując wartość $\frac{1}{2}$ zdaniom atomowym, które dla różnych etykiet przyjmowałyby różne wartości logiczne w modelu.

Do konstrukcji matrycy skorzystamy z następujących obiektów, które można podstawiać za zmienne nazwowe[5]:

- t_2 ze zbiorem desygnatów $\{\spadesuit\}$ i etykietą 1;
- t_3 ze zbiorem desygnatów $\{\clubsuit, \spadesuit\}$ i etykietą 0;
- t_4 ze zbiorem desygnatów $\{\heartsuit\}$ i etykietą 0 lub 1;

[4]Ponieważ w procedurze rozstrzygania nie występują implikacje będące w zasięgu innych funktorów, można zastosować również następującą uproszczoną matrycę dla tego funktora:

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	0	1

[5]Dla odróżnienia od poprzedniego modelu będziemy teraz używać litery t z indeksem, wartość indeksu będzie tak dobrana, aby symbolowi t_i odpowiadał ten sam zbiór co wcześniej symbolom w_i oraz s_i.

- t_5 ze zbiorem desygnatów $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ i etykietą 1.

W tej sytuacji można wykorzystać następujące matryce dla funktorów sylogistyki:

a	t_2	t_3	t_4	t_5
t_2	1	1	0	1
t_3	0	0	0	1
t_4	0	0	$\frac{1}{2}$	1
t_5	0	0	0	1

i	t_2	t_3	t_4	t_5
t_2	1	1	0	1
t_3	1	1	0	1
t_4	0	0	$\frac{1}{2}$	1
t_5	1	1	1	1

Twierdzenie 64. *Formuła hornowska języka systemu **Słp** jest tezą wtedy i tylko wtedy, gdy jest tautologią w powyższych matrycach.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu poprzednich twierdzeń (zauważyć jedynie trzeba, że matryca dla implikacji jest normalna), przy czym aksjomaty odrzucone (4.3), (4.4) i (4.3) są niespełnione odpowiednio przy wartościowaniach v_1, v_2 i v_3, takich że: $v_1(S) = t_4$ i $v_1(M) = t_5$, $v_2(S) = t_2$, $v_2(P) = t_5$ i $v_2(M) = t_3$, a $v_3(S) = t_2$, $v_3(P) = t_4$ i $v_3(M) = t_5$. ■

5.3.3 Matryce trójelementowe

Kolejna matrycowa charakterystyka systemu **Słp** odchodzi nieco dalej od interpretacji funktorów, przy użyciu której zbudowana jest klasa modeli, w stosunku do której system jest pełny. Punktem wyjścia jest tu analogiczna matryca dla systemu **Łuk**. Tak jak w przypadku matrycy czteroelementowej zmodyfikowane zostanie rozumienie koniunkcji i implikacji. Funktory te będą zdefiniowane przy użyciu poniższych matryc[6]:

$\wedge$	0	u_1	u_2	1
0	0	0	0	0
u_1	0	u_1	u_1	u_1
u_2	0	u_1	u_2	u_2
1	0	u_1	u_2	1

$\rightarrow$	0	u_1	u_2	1
0	1	1	1	1
u_1	u_2	1	u_2	1
u_2	u_1	u_1	1	1
1	0	u_1	u_2	1

[6]Tak samo jak w przypadku logiki trójwartościowej, matryca dla implikacji może również zostać uproszczona do następującej postaci:

$\rightarrow$	0	u_1	u_2	1
0	1	1	1	1
u_1	0	1	0	1
u_2	0	0	1	1
1	0	0	0	1

W matrycach poza wartościami 1 i 0, które można rozumieć jako prawda i fałsz pojawiają się dwie dodatkowe wartości, które interpretować można jako wartości nieokreślone. Jedyną wartością wyróżnioną jest 1. Tabela dla funktora koniunkcji jest taka sama jak w czterowartościowej logice Łukasiewicza. Tabela dla implikacji pokrywa się z odpowiednią matrycą czterowartościowej logiki modalnej Łukasiewicza przedstawionej w [31].

Do rozstrzygania formuł hornowskich można wykorzystać następujące matryce dla funktorów sylogistyki:

a	x_1	x_2	x_3
x_1	u_1	0	1
x_2	0	u_2	1
x_3	0	0	u_1

i	x_1	x_2	x_3
x_1	u_1	0	1
x_2	0	u_2	1
x_3	1	1	1

Odwołując się do modeli z klasy M_{I_2}, nazwy występujące w opisie matrycy można zdefiniować następująco:

- x_1 ze zbiorem desygnatów $\{\clubsuit\}$ i etykietą 0 lub 1;
- x_2 ze zbiorem desygnatów $\{\spadesuit\}$ i etykietą 0 lub 1;
- x_3 ze zbiorem desygnatów $\{\clubsuit, \spadesuit\}$ i etykietą 0 lub 1.

Intuicyjny sens wartości u_1 i u_2 jest taki sam jak wartości $\frac{1}{2}$ w przypadku matryc trójwartościowych. Występują one w sytuacjach, w których wartość logiczna zdania jest niezdeterminowana. Ze względów technicznych potrzebne jest jednak wykorzystanie dwóch różnych wartości z podobną intuicyjną interpretacją.

Twierdzenie 65. *Formuła hornowska języka systemu **Słp** jest tezą wtedy i tylko wtedy, gdy jest tautologią w powyższych matrycach.*

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu poprzednich twierdzeń (tu też matryca dla implikacji jest normalna), przy czym aksjomaty odrzucone (4.3), (4.4) i (4.3) nie są spełnione odpowiednio przy wartościowaniach v_1, v_2 i v_3: $v_1(S) = x_2$ i $v_1(M) = x_3$, $v_2(S) = x_2$, $v_2(P) = x_3$ i $v_2(M) = x_2$, a $v_3(S) = x_1$, $v_3(P) = x_2$ i $v_3(M) = x_3$. ■

5.4 Matryce dla systemu Łuk$^-$

System **Łuk**$^-$ jest ostatnim z zaprezentowanych systemów, dla którego przedstawiony został system aksjomatycznego odrzucania ze skończonym zbiorem aksjomatów odrzuconych dla formuł hornowskich. Adekwatna klasa modeli dla tego systemu opiera się na interpretacji I_8, modele są jednak ograniczone do takich, w których albo wszystkim zmiennym odpowiadają niepuste zbiory, albo wszystkim odpowiada zbiór pusty. W związku z tym nie można określić wartości logicznej zdania atomowego w oparciu o zakresy zbiorów przypisanych do jego argumentów w izolacji od wartościowania dla innych nazw.

W tej sytuacji, aby stworzyć system matrycowy służący do rozstrzygania dla formuł hornowskich w tym systemie, posłużymy się nieklasyczną interpretacją funktorów koniunkcji i implikacji, zdefiniowaną za pomocą trójwartościowych matryc Łukasiewicza (przytoczonych w Podrozdziale 5.3.2).

Zdaniom atomowym oraz formułom elementarnym przysługiwać będą wartości 0 oraz $\frac{1}{2}$, z których żadna nie jest wyróżniona. Wartość wyróżniona 1 pojawi się tylko jako możliwa wartość implikacji. W związku z tym do rozstrzygania formuł hornowskich wystarczą następujące fragmenty przestawionych matryc:

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$
0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

$\to$	0	$\frac{1}{2}$
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1

Pełne matryce dla wszystkich wartości potrzebne są ze względu na dowód adekwatności, do wykazania domknięcia zbioru tautologii na regułę MP.

Matryce dla formuł atomowych są następujące:

a	w_1	w_2	w_3
w_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
w_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
w_3	0	0	$\frac{1}{2}$

i	w_1	w_2	w_3
w_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
w_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
w_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Twierdzenie 66. *Formuła hornowska języka systemu* ***Łuk***$^-$ *jest tezą wtedy i tylko wtedy, gdy jest tautologią w powyższych matrycach.*

Dowód. Dowód jest taki sam jak w przypadku poprzednich twierdzeń: matryca dla implikacji jest normalna, sprawdzenie, że aksjomaty systemu są tautologiami w matrycach jest rutynowe, aksjomat odrzucony (2.10) nie jest spełniony przy wartościowaniu v, takim że $v(P) = w_1$, $v(S) = w_2$ i $v(M) = w_3$, a aksjomat odrzucony (2.1) nie jest spełniony przy dowolnym wartościowaniu. ■

5.5 Procedura decyzyjna dla systemów hornowskich

Procedurę, która zostanie poniżej określona, można zastosować do wszystkich systemów, dla których zostały powyżej zdefiniowane matryce.

Procedura rozstrzygająca, czy dana formuła α jest tezą systemu jest następująca:

I. Formuła α ma postaci $\beta \to \gamma$ oraz $\beta \to \gamma_1 \vee \gamma_2$, gdzie β jest formułą elementarną, a γ, γ_1 i γ_2 są formułami atomowymi:

1. Sprawdź tautologiczność formuły α w matrycach.
2. Jeżeli formuła jest tautologią, to jest tezą. W przeciwnym wypadku α nie jest tezą.

II. Formuła α nie podpada pod przypadek I, ale jest formułą klauzulową, tzn. przyjmuje postać: $\beta \to \gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_n$, $n \geqslant 0$:

1. Znajdź wszystkie formuły o postaci $\beta \to \gamma_i \vee \gamma_j$, takie że $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
2. Do każdej z nich zastosuj procedurę z punktu I.
3. Jeżeli przynajmniej jedna z rozpatrzonych formuł jest tezą, to α jest tezą. W przeciwnym wypadku α nie jest tezą.

III. Formuła α nie jest formułą klauzulową:

1. Znajdź koniunkcję formuł klauzulowych $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ równoważną α w KRZ.
2. Do każdej z formuł klauzulowych α_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ zastosuj procedurę z punktu II.
3. Jeżeli wszystkie rozpatrzone formuły są tezami, to α jest tezą. W przeciwnym wypadku α nie jest tezą.

5.6 Rozstrzyganie dla systemu B

Ponieważ system **B** nie jest teorią hornowską, nie można zastosować do niego wprost ogólnych rezultatów z Sekcji (5.1). Można jednak zastosować analogiczną procedurę rozstrzygania, wykorzystując regułę SC^{-1} i twierdzenia dotyczące pełności odrzuceniowej i pełności w modelu, dotyczące tego systemu.

Musimy jedynie zwrócić uwagę na to, że w dowodzie Lematu 26, dla każdej formuly α, która nie jest tezą, pokazuje się podstawienie e, takie że tezą jest implikacja, której poprzednikiem jest $e(\alpha)$, a następnikiem aksjomat odrzucony. Wynika stąd bezpośrednio następujący wniosek:

Wniosek 3. *Jeżeli wyrażenie α języka systemu **B**, które jest wyrażeniem hornowskim lub przyjmuje postać $\gamma \to \beta_1 \vee \beta_2$, gdzie γ jest wyrażeniem elementarnym, a β_1 oraz β_2 atomami, jest wyrażeniem odrzuconym, to z formuły α na gruncie systemu **B** można wyprowadzić aksjomat odrzucony.*

Tak jak w przypadku systemu **Słp** dla zbudowania matryc odpowiednich dla systemu **B** potrzebować będziemy rozszerzenia modelu zdefiniowanego w Sekcji (5.2) o dodatkowy obiekt w modelu – $\heartsuit$ oraz dodatkowe nazwy – w_4 i w_5. Zakresami tych nazw są następujące zbiory:

- w_4 – $\{\heartsuit\}$;
- w_5 – $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$.

Wartości logiczne zdań atomowych dla tak zdefiniowanych nazw wyrażone są w poniższych matrycach[7]:

a	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
w_0	1	1	1	1	1	1
w_1	0	1	0	1	0	1
w_2	0	0	1	1	0	1
w_3	0	0	0	1	0	1
w_4	0	0	0	0	1	1
w_5	0	0	0	0	0	1

i	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
w_0	0	0	0	0	0	0
w_1	0	1	0	1	0	1
w_2	0	0	1	1	0	1
w_3	0	1	1	1	0	1
w_4	0	0	0	0	1	1
w_5	0	1	1	1	1	1

Twierdzenie 67. *Każde wyrażenie hornowskie języka systemu **B** oraz każde wyrażenie o postaci $\alpha \to \beta_1 \vee \beta_2$, gdzie α jest formułą elementarną, a β_1 i β_2 formułami atomowymi jest tezą systemu **B** wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwe w modelu określonym przez powyższe matryce.*

[7] Matryce o tej samej zawartości wykorzystane były w dowodzie Lematu 28.

Dowód. Matryce skonstruowane są zgodnie z interpretacją I_{10}, użytą do zdefiniowania klasy modeli, adekwatnej w stosunku do systemu **B**, a więc jeżeli formuła jest tezą **B**, to jest prawdziwa w modelu.

Aksjomat odrzucony (2.57) nie jest spełniony przy wartościowaniu v, w którym $v(M) = w_0$, $v(S) = w_1$, $v(P) = w_3$, $v(R) = w_2$, $v(Q) = w_4$, a $v(N) = w_5$. ■

Procedura rozstrzygająca, czy dana formuła α jest tezą systemu **B**, jest następująca:

I. Formuła α ma postaci $\beta \to \gamma$ oraz $\beta \to \gamma_1 \vee \gamma_2$, gdzie β jest formułą elementarną, a γ, γ_1 i γ_2 są formułami atomowymi:

1. Sprawdź tautologiczność formuły α w matrycach.

2. Jeżeli formuła jest tautologią, to jest tezą. W przeciwnym przypadku α nie jest tezą.

II. Formuła α nie podpada pod przypadek I, ale jest formułą klauzulową, tzn. przyjmuje postać: $\beta \to \gamma_1 \vee \ldots \vee \gamma_n$, $n \geqslant 0$:

1. Znajdź wszystkie formuły o postaci $\beta \to \gamma_i \vee \gamma_j$, takie że $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

2. Do każdej z nich zastosuj procedurę z punktu I.

3. Jeżeli przynajmniej jedna z rozpatrzonych formuł jest tezą, to α jest tezą. W przeciwnym wypadku α nie jest tezą.

III. Formuła α nie jest formułą klauzulową:

1. Znajdź koniunkcję formuł klauzulowych $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$, równoważną α w KRZ.

2. Do każdej z formuł klauzulowych α_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ zastosuj procedurę z punktu II.

3. Jeżeli wszystkie rozpatrzone formuły są tezami, to α jest tezą. W przeciwnym wypadku α nie jest tezą.

5.7 Porównanie modeli z innymi podejściami

W pracy [18] Johnson bada w ramach sylogistyki ze standardowym rozumieniem funktorów, odwołującym się do stosunków miedzyzakresowych, z semantyką taką jak system **Łuk**, specyficzny rodzaj wyprowadzeń, w których występują konstrukcje nazywane przez Johnsona łańcuchami sylogistycznymi. Przedstawimy ten rezultat w stylizacji językowej, którą posługujemy się w niniejszej pracy. W świetle rozważań z Rozdziału 1 jest to prezentacja równoważna.

Rozważmy formuły o postaci $at(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \wedge \ldots \wedge at(\mathcal{X}_{n-1}, \mathcal{X}_n) \to at(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_n)$, gdzie $at(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_{i+1}) (1 \leqslant i < n)$ jest atomem zbudowanym przy użyciu jednego z funktorów sylogistyki a, i, e lub o oraz zmiennych $\mathcal{X}_i$ i $\mathcal{X}_{i+1}$ w dowolnej kolejności, a dla każdych $k, l (1 \leqslant k, l < n)$, $\mathcal{X}_k$ i $\mathcal{X}_l$ są różnymi zmiennymi. Jeżeli taka formuła nie jest tezą systemu **Łuk**, to można znaleźć model $\mathsf{M} = (D, I_2, v)$, w którym D jest zbiorem trzyelementowym.

W niniejszej pracy badamy także ograniczenia rozmiaru modeli dla specyficznych formuł, w naszym przypadku formuł hornowskich. W ich przypadku jednak udaje się ograniczyć dziedzinę modelu do zbioru złożonego z dwóch elementów.

W pracy [43] Pietruszczak przeprowadza bardziej systematyczną analizę wielkości modeli w różnych systemach rachunku nazw, różniących się występującymi w nich funktorami z bogatego zbioru obejmującego funktory znane z sylogistyki i Ontologii Leśniewskiego oraz sumę i iloczyn nazw. Rezultaty określają tam rozmiar modelu dla dowolnych formuł w zależności od liczby występujących w formule zmiennych. Wśród wielu analizowanych systemów występują również odpowiedniki systemów **B** oraz **OntSyl**. W przypadku systemu **B** rozmiar dziedziny modelu wyrażony jest wzorem:

$$\frac{1}{2} n(n+1),$$

natomiast dla systemu **OntSyl**:

$$\frac{1}{2} n(n+3),$$

gdzie w obu przypadkach n jest liczbą zmiennych występujących w formule.

W niniejszej pracy rozmiary modeli, pozwalające na budowę procedury decyzyjnej, są znacznie mniejsze. W przypadku systemu **B** dziedzina zawiera trzy elementy, a w przypadku **OntSyl** oraz **Stnd**, na bazie którego można zrekonstruować system **B** – dwa. Jej rozmiar jest niezależny od liczby zmiennych. Jednakże modele tu wykorzystane są stosowane jedynie do formuł hornowskich. W związku z tym w procedurze decyzyjnej dla dowolnych formuł występuje jeszcze przekształcenie syntaktyczne formuły do postaci normalnej i w związku z tym otrzymanych rezultatów nie można wprost porównywać. Warto jednak przy tym zwrócić uwagę, że to formuły hornowskie mogą być wykorzystane jako podstawa do budowania reguł wnioskowania i dlatego odgrywają szczególną rolę w formalizacji rachunku nazw.

Zakończenie

Podstawowym zadaniem, które miała zrealizować niniejsza rozprawa było zaprezentowanie bogactwa aksjomatycznych systemów rachunku nazw. Przedstawiono w tym celu, w jednolity sposób, szereg znanych systemów rachunku nazw oraz kilka nowych systemów skonstruowanych przez Autora niniejszej pracy. Prezentacja każdego z nich zawiera aksjomatyzację, uzupełniający go system aksjomatycznego odrzucania oraz adekwatną charakterystykę teoriomodelową. Dla części przedstawiono również procedurę decyzyjną opartą o matryce.

Do systemów skonstruowanych przez Autora należą systemy określane jako sylogistyka dowodowa oraz systemy, które umieścić można pomiędzy systemami sylogistyki Słupeckiego i Łukasiewicza. Dodatkowo nowością jest aksjomatyczne odrzucanie dla systemów z funktorem ε Leśniewskiego oraz systemu Brentany, teoriomodelowa charakterystyka systemu Słupeckiego oraz wskazanie zależności pomiędzy aksjomatyką odrzuceniową a procedurami decyzyjnymi opartymi o modele dla formuł hornowskich.

Interesującym odkryciem jest to, że systemy sylogistyki dowodowej z aksjomatami niewiele różniącymi się od systemów standardowych, nie posiadają w odróżnieniu od nich skończonej aksjomatyzacji odrzuceniowej. Interesujące jest również to, że systemy **Łuk** i **Stnd** mają modele w dziedzinie dwuelementowej, a dla systemów **B** i **Słp** potrzebna jest dziedzina trzyelementowa.

Przedstawiając różne systemy aksjomatyczne rachunku nazw, nie staramy się wskazywać, który z nich jest właściwy bądź lepszy od innych. Wybór pomiędzy nimi pozostawiamy Czytelnikowi. Kryteria wyboru mogą być różne. Między innymi wymienić można posiadane intuicje dotyczące sensu funktorów rachunku nazw, zgodność z ich sposobem używania w języku naturalnym, zgodność z rozumieniem funktorów w ujęciu historycznym, względy praktyczne związane z budowaniem dowodów i wykonywaniem obliczeń.

Przedstawione analizy powinny być pomocne w dokonywaniu wyboru kierowanego każdym z wymienionych kryteriów. Sens funktorów w przedstawianych systemach naświetlany jest wielostronnie – poprzez system aksjomatyczny, aksjomatyczny system odrzucania, a więc wskazanie na formuły, które nie mają być ujęte w systemie, teoriomodelową strukturę odpowiadającą systemowi, a więc formalną jego semantykę. Z kolei dokonanie wyboru kierowane kryteriami obliczeniowymi wspierane jest przez rezultaty dotyczące rozmiaru dziedziny, w której określony jest model dla systemu, oraz rozmiaru matrycy potrzebnej do zdefiniowania procedury decyzyjnej.

Oczywiście, przedstawione rezultaty mogą stanowić punkt wyjścia dla dalszych badań. Interesujące wydają się szczególnie trzy kierunki. Pierwszym z nich jest rozszerzanie przedstawionego podejścia do rachunku nazw na systemy zawierające funktory nazwotwórcze – negację nazwową, sumę oraz iloczyn nazw oraz relacje. Drugi kierunek to dokładniejsze zbadanie przestrzeni *pośrednich* systemów rachunku nazw, rozciągającej się pomiędzy znanymi powszechnie systemami. W niniejszej pracy przedstawiono jedynie ogólny plan tej przestrzeni. Godne uwagi mogą się okazać nie tylko poszczególne systemy, które można tam odnaleźć, ale również ogólne własności samej ich struktury. W końcu trzeci możliwy kierunek to badania dotyczące stosowalności systemów rachunku nazw. W szczególności, jedną z domen zastosowania mogą tu być klasyfikacje pojęć występujące w kontekście tworzenia systemów informatycznych.

Dodatek A

Zestawienie systemów aksjomatycznych

A.1 Systemy sylogistyki

We wszystkich poniższych systemach regułami wyprowadzania są MP i Sub, a regułami odrzucania – MP^{-1} i Sub^{-1}. We wszystkich systemach oprócz systemu **B** występuje dodatkowo reguła $Comp^{-1}$, a w systemie **B** reguła SC^{-1}.

System Łuk

Aksjomaty:

(2.1) SaS

(2.2) SiS

(2.3) $MaP \wedge SaM \rightarrow SaP$

(2.4) $MaP \wedge MiS \rightarrow SiP$

Aksjomat odrzucony:

(2.10) $PaM \wedge SaM \rightarrow SiP$

System Stnd

Aksjomaty:

(2.3) $MaP \wedge SaM \to SaP$
(2.4) $MaP \wedge MiS \to SiP$
(2.6) $SaP \to SiP$
(2.18) $SiP \to SaS$

Aksjomaty odrzucone:

(2.10) $PaM \wedge SaM \to SiP$
(2.24) $PaP \to SiS$

System B

Aksjomaty:

(2.1) SaS
(2.3) $MaP \wedge SaM \to SaP$
(2.4) $MaP \wedge MiS \to SiP$
(2.26) $SiP \to SiS$
(2.27) $SaP \vee SiS$

Aksjomat odrzucony:

(2.57) $MaS \wedge MaP \wedge MaQ \wedge SaR \wedge PaR \wedge RaN \wedge QaN \wedge$
$SiS \wedge PiP \wedge QiQ \to SiP \vee RiQ$

System B-horn

Aksjomaty:

(2.1) SaS
(2.3) $MaP \wedge SaM \to SaP$
(2.4) $MaP \wedge MiS \to SiP$
(2.26) $SiP \to SiS$

Aksjomaty odrzucone:

(2.53) $SiS \wedge PiP \wedge SaM \wedge PaM \to SiP$
(2.54) $PiP \wedge SaP \to SiS$

System Słp

Aksjomaty:

(2.3) $MaP \wedge SaM \rightarrow SaP$

(2.4) $MaP \wedge MiS \rightarrow SiP$

(2.5) $PiS \rightarrow SiP$

(2.6) $SaP \rightarrow SiP$

Aksjomaty odrzucone:

(4.3) $PaM \wedge SaM \rightarrow SiP$

(4.4) $SaS \wedge SaM \wedge MaP \wedge PaP \rightarrow MaM$

(4.5) $SaS \wedge SaM \wedge PaP \wedge PaM \wedge MaM \rightarrow SiP$

System D$_1$

Aksjomaty:

(2.3) $MaP \wedge SaM \rightarrow SaP$

(2.4) $MaP \wedge MiS \rightarrow SiP$

(2.5) $PiS \rightarrow SiP$

(2.6) $SaP \rightarrow SiP$

(4.7) $\neg SaS$

Aksjomaty odrzucone (schematy):

(4.12) $S_1 i S_1 \wedge \alpha \wedge S_m a M_1 \wedge P_1 i P_1 \wedge \beta \wedge P_n a M_1 \wedge \gamma \rightarrow S_m i P_n$

(4.17) $\delta \rightarrow SiS$

gdzie $\alpha \in dL(S_1, S_m)$, $\beta \in dL(P_1, P_n)$, $\gamma \in dL(M_1, M_k)$ oraz α, β i γ nie zawierają wspólnych zmiennych, a $\delta \in dL(S, P)$.

System D$_2$

Aksjomaty:

(2.3) $MaP \wedge SaM \rightarrow SaP$

(2.4) $MaP \wedge MiS \rightarrow SiP$

(2.5) $PiS \rightarrow SiP$

(2.6) $SaP \rightarrow SiP$

(4.7) $\neg SaS$

(2.26) $SiP \rightarrow SiS$

Aksjomaty odrzucone:

(4.16) $\alpha \wedge S_m a M_1 \wedge \beta \wedge P_n a M_1 \wedge \gamma \rightarrow S_m i P_n$

(4.17) $\delta \rightarrow MiM$

gdzie $\alpha \in dL(S_1, S_m)$, $\beta \in dL(P_1, P_n)$, $\gamma \in dL(M_1, M_k)$ oraz α, β i γ nie zawierają wspólnych zmiennych, a $\delta \in dL(S, P)$ i M nie występuje w δ.

System $\mathbf{D_3}$

Aksjomaty:

(2.3) $MaP \wedge SaM \rightarrow SaP$

(2.4) $MaP \wedge MiS \rightarrow SiP$

(2.6) $SaP \rightarrow SiP$

(4.7) $\neg SaS$

(2.2) SiS

Aksjomat odrzucony (schemat):

(4.16) $\alpha \wedge S_m a M_1 \wedge \beta \wedge P_n a M_1 \wedge \gamma \rightarrow S_m i P_n$

gdzie $\alpha \in dL(S_1, S_m)$, $\beta \in dL(P_1, P_n)$, $\gamma \in dL(M_1, M_k)$ oraz α, β i γ nie zawierają wspólnych zmiennych.

System $\mathbf{Słp}^+$

Aksjomaty:

(2.3) $MaP \wedge SaM \rightarrow SaP$

(2.4) $MaP \wedge MiS \rightarrow SiP$

(2.5) $PiS \rightarrow SiP$

(4.4) $SaS \wedge SaM \wedge MaP \wedge PaP \rightarrow MaM$

(2.2) SiS

Aksjomaty odrzucone:

(4.5) $SaS \wedge SaM \wedge PaP \wedge PaM \wedge MaM \rightarrow SiP$

(4.25) $S_1 a S_2 \wedge \ldots \wedge S_{n-1} a S_n \wedge S_n a P \wedge PaP \rightarrow S_n a S_n (n \geqslant 2)$

System Łuk$^-$

Aksjomaty:

(2.3)	$MaP \wedge SaM \to SaP$
(2.4)	$MaP \wedge MiS \to SiP$
(2.6)	$SaP \to SiP$
(2.18)	$SiP \to SaS$
(4.27)	$SaS \to MiM$

Aksjomaty odrzucone:

(2.10)	$PaM \wedge SaM \to SiP$
(2.18)	SaS

A.2 Systemy Ontologii

We wszystkich poniższych systemach regułami wyprowadzania są MP i Sub, a regułami odrzucania – MP^{-1}, Sub^{-1} i $Comp^{-1}$.

System OntP

Aksjomaty:

(3.1)	$S\varepsilon P \to S\varepsilon S$
(3.2)	$S\varepsilon M \wedge M\varepsilon P \to S\varepsilon P$
(3.3)	$S\varepsilon P \wedge P\varepsilon M \to P\varepsilon S$

Aksjomat odrzucony:

(3.4)	$P\varepsilon M \wedge S\varepsilon M \to S\varepsilon P$

System OntSol

Aksjomaty:

(3.1)	$S\varepsilon P \to S\varepsilon SS$
(3.2)	$S\varepsilon M \wedge M\varepsilon P \to S\varepsilon P$
(3.3)	$S\varepsilon P \wedge P\varepsilon M \to P\varepsilon S$
(3.10)	$sol(S) \wedge P\varepsilon S \to S\varepsilon S$
(3.11)	$S\varepsilon S \to sol(S)$

Aksjomaty odrzucone:

(3.4)	$P\varepsilon M \wedge S\varepsilon M \to S\varepsilon P$
(3.13)	$sol(S) \wedge P\varepsilon P \to S\varepsilon S$

System OntSyl

Aksjomaty:

(3.17) $S\varepsilon P \to S\varepsilon S$

(3.18) $S\varepsilon P \to SaP$

(3.19) $SaM \wedge M\varepsilon P \to S\varepsilon P$

(3.20) $SiP \wedge P\varepsilon P \to P\varepsilon S$

(3.21) $PiS \to SaS$

(3.22) $SaP \to SiP$

(3.23) $SaM \wedge MaP \to SaP$

(3.24) $SiM \wedge MaP \to PiS$

Aksjomaty odrzucone:

(3.43) $S\varepsilon M \wedge P\varepsilon M \to SiP$

(3.44) $P\varepsilon P \to SiS$

Dodatek B

Program do tworzenia dowodów założeniowych

```
/* Plik dowody.pl  */

/* Wyprowadzenia w systemie */

wyprowadzenie(Lista_ax,Nr_formuly):-
                          retractall(axs(_,_)),
                          maplist(zapis_ax,Lista_ax),
                          ax(Formula,Nr_formuly),
                          podstaw(Formula,a),
                          dowod(Formula),
                      retractall(axs(_,_)), !.

zapis_ax(Nr) :-
             ax(Formula,Nr),
             assert(axs(Formula,Nr)).

podstaw(P,X):-
            term_variables(P,LVAR),
            reset_gensym(X),
            maplist(gensym(X),LVAR).


/* dowody */
dowod(c(Przeslanki,Konkluzja)) :-
        retractall(zapis_dowodu(_)),
        zapis_przeslanek(Przeslanki),
        generacja_dowodu(Konkluzja),
           prezent(Konkluzja,Dowod1),
```

```
          retractall(zapis_dowodu(_)),
        numers(Dowod1,Dowod2),
        numers2(Dowod2,Dowod),
        liniowanie(Dowod),nl,nl, !.
dowod(_).

% zapisanie przesłanek
zapis_przeslanek([]).
zapis_przeslanek([H|T]) :-
        assertz(zapis_dowodu(k(H,przeslanka,[]))),
        zapis_przeslanek(T).


% zakończenie dowodu
generacja_dowodu(Konkluzja) :-
        zapis_dowodu(k(Konkluzja,_,_)), !.

% generowanie kolejnych kroków dowodu
generacja_dowodu(Konkluzja) :-
        axs(c(Przeslanki_reg,Wniosek_reg),Nazwa),
        maplist(w_dowodzie,Przeslanki_reg),
        not(wystepuje(Wniosek_reg)),
        assertz(zapis_dowodu(k(Wniosek_reg,Nazwa,Przeslanki_reg))),!,
        generacja_dowodu(Konkluzja).

% brak dowodu
generacja_dowodu(_) :-
        retractall(zapis_dowodu(_)),
        nl, write('brak dowodu'),nl, !.

% kontrola dołączania nowych wierszy do dowodu (eliminacja powtórzeń)

wystepuje(F) :-
        w_dowodzie(D),
        subsumes(D,F), !.

w_dowodzie(F) :- zapis_dowodu(k(F,_,_)).


% PREZENTACJA DOWODU -
% Wybór potrzebnych wierszy, powiązanie ich i graficzna prezentacja
% w bazie zapisane kroki dowodu jako
% zapis_dowodu(k(krok,regula,przeslnki)

prezent(Konkluzja,Dowod):-
```

```
                          zapis_dowodu(k(Konkluzja,Regula,Przesl)),
                          uzup([[k(Konkluzja,Regula,Przesl)]],Dow),
                          list_to_set(Dow,Dowod), !.

prezent(_,Dowod):-
                          zapis_dowodu(k(sprzecznosc,Regula,Przesl)),
                          uzup([[k(sprzecznosc,Regula,Przesl)]],Dow),
                          list_to_set(Dow,Dowod).

uzup([[]|T],D):- !,
               append(T,D).

uzup([H|T],D):-
               dol(H,PH),
               uzup([PH,H|T],D).

dol([],[]).
dol([k(_,przeslanka,_)|T],PT):-
                          dol(T,PT).
dol([k(_,_,Lista)|T],D):-

                     dol_kroki(Lista,Kroki),
                     append(Kroki,PT,D),
                     dol(T,PT).

dol_kroki([],[]).
dol_kroki([H|T],[k(H,N,L)|KT]):-
                  zapis_dowodu(k(H,N,L)),
                  dol_kroki(T,KT).

numers2(D,DN):-
              nums2(D,D,DN), !.

nums2(_,[],[]).
nums2(D,[j(N,k(A,B,L))|T1],[j(N,k(A,B,LN))|T2]):-
                                               nums_list(D,L,LN),
                                               nums2(D,T1,T2), !.


nums_list(_,[],[]).
nums_list(D,[F|T1],[N|T2]):-
                           member(j(N,k(F,_,_)),D),
                          nums_list(D,T1,T2).
```

```
wypisanie_wiersza_dowodu(k(W1,przeslanka,_)):-
     write('   '), write(W1), write('   '), write('przesłanka'), !.
wypisanie_wiersza_dowodu(k(W1,W2,[])):-
     write('   '), write(W1), write('   formuła '), write(W2), !.
wypisanie_wiersza_dowodu(k(W1,W2,W3)):-
     write('   '), write(W1), write('   formuła '),
     write(W2), write(': '), write(W3).


liniowanie([j(_,W)]):-
                  nl,write('   '),wypisanie_wiersza_dowodu(W).
liniowanie([j(N,W),H|T]):-
                  nl,write(N),write('. '),wypisanie_wiersza_dowodu(W),
                  liniowanie([H|T]).


numers(Dowod,Dowod_numerowany):-
              length(Dowod,N),
              numlist(1,N,L),
              join(L,Dowod,Dowod_numerowany).

join([],[],[]).
join([H1|T1],[H2|T2],[j(H1,H2)|T]):-
                             join(T1,T2,T).


/**********************************************/
/*          DYREKTYWY DLA KOMPILATORA         */
/**********************************************/

:- dynamic
        zapis_dowodu/1,
        num_dek/1,
        axs/2.

/**********************************************/

/*  Plik aksjomaty.pl   */

% Aksjomaty sylogistyk

ax(c([a(S,P)],i(S,P)),1).
ax(c([i(S,P)],i(P,S)),2).
ax(c([a(M,P),a(S,M)],a(S,P)),3).
ax(c([a(M,P),i(S,M)],i(S,P)),4).
```

```
ax(c([a(M,P),a(P,P)],i(M,M)),5).
ax(c([i(M,P),a(P,P),a(M,S)],i(M,M)),6).
ax(c([a(S,S),a(M,P)],i(M,M)),7).
ax(c([a(M,P)],i(M,M)),8).
ax(c([i(M,P),a(P,P)],i(M,M)),9).
ax(c([a(S,S),i(M,P),a(P,N)],i(M,M)),10).
ax(c([i(M,P),a(P,N)],i(M,M)),11).
ax(c([i(M,P),a(N,P)],i(M,M)),12).
ax(c([i(M,P),i(P,P),a(S,S)],i(M,M)),13).
ax(c([i(M,P),i(P,P),a(S,N)],i(M,M)),14).
ax(c([i(M,P),a(S,S)],i(M,M)),15).
ax(c([i(M,P),i(P,P)],i(M,M)),16).
ax(c([i(M,P),a(N,S)],i(M,M)),17).
ax(c([a(S,S)],i(M,M)),18).
ax(c([i(S,S),i(M,P)],i(M,M)),19).
ax(c([a(S,P)],i(M,M)),20).
ax(c([i(M,P)],i(M,M)),21).
ax(c([i(S,S)],i(M,M)),22).
ax(c([i(S,P)],i(M,M)),23).
ax(c([],i(S,S)),24).

ax(c([a(S,S),a(S,M),a(M,P),a(P,P)],a(M,M)),25).
ax(c([a(S,S),a(S,M),a(M,P)],a(M,M)),26).
ax(c([i(S,S),a(S,M),a(M,P),a(P,P)],a(M,M)),27).
ax(c([a(S,S),a(S,M)],a(M,M)),28).
ax(c([i(S,S),a(S,M),a(M,P),a(N,N)],a(M,M)),29).
ax(c([i(S,S),a(S,M),a(M,P)],a(M,M)),30).
ax(c([a(S,M),a(M,P),a(P,P)],a(M,M)),31).
ax(c([i(S,S),a(S,M),a(N,N)],a(M,M)),32).
ax(c([a(S,M),a(P,P),a(S,P)],a(M,M)),33).
ax(c([a(S,M),a(M,P)],a(M,M)),34).
ax(c([i(S,S),a(S,M)],a(M,M)),35).
ax(c([i(M,P),a(P,P),a(S,M)],a(M,M)),36).
ax(c([a(S,M),a(P,P)],a(M,M)),37).
ax(c([a(S,M)],a(M,M)),38).
ax(c([i(M,M),a(M,P),a(P,P)],a(M,M)),39).
ax(c([i(M,M),a(M,P),a(S,S)],a(M,M)),40).
ax(c([i(M,M),a(N,N),i(M,N)],a(M,M)),41).
ax(c([i(M,M),a(M,P)],a(M,M)),42).
ax(c([i(M,M),a(S,S)],a(M,M)),43).
ax(c([i(M,M),i(M,P),a(P,N)],a(M,M)),44).
ax(c([i(M,M),a(S,P)],a(M,M)),45).
ax(c([i(M,M)],a(M,M)),46).
ax(c([a(M,P),a(P,P)],a(M,M)),47).
```

```
ax(c([i(M,P),a(P,P),a(M,S)],a(M,M)),48).
ax(c([a(M,P),a(N,N)],a(M,M)),49).
ax(c([a(M,P)],a(M,M)),50).
ax(c([i(M,P),a(P,P)],a(M,M)),51).
ax(c([i(M,P),a(P,N),a(S,S)],a(M,M)),52).
ax(c([i(M,P),a(P,N)],a(M,M)),53).
ax(c([i(M,P),i(P,P),a(S,S)],a(M,M)),54).
ax(c([i(M,P),i(P,P),a(S,N)],a(M,M)),55).
ax(c([i(M,P),a(S,S)],a(M,M)),56).
ax(c([i(M,P),i(P,P)],a(M,M)),57).
ax(c([i(M,P),a(N,S)],a(M,M)),58).
ax(c([a(S,S)],a(M,M)),59).
ax(c([i(M,P),i(S,S)],a(M,M)),60).
ax(c([a(S,P)],a(M,M)),61).
ax(c([i(M,P)],a(M,M)),62).
ax(c([i(S,S)],a(M,M)),63).
ax(c([i(S,P)],a(M,M)),64).
ax(c([],a(S,S)),65).
```

Dodatek C

Wyprowadzenia dla formuł z Diagramu

```
89 ?- proofs.
formuła 6: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X1, X3)], i(X1, X1))
formuła 5: c([a(X1, X2), a(X2, X2)], i(X1, X1))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    a(a2, a2)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 6: [2, 3, 1]

formuła 7: c([a(X1, X1), a(X2, X3)], i(X2, X2))
formuła 6: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X1, X3)], i(X1, X1))

1.    a(a2, a2)   przesłanka
2.    a(a1, a3)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 7: [1, 2]

formuła 9: c([i(X1, X2), a(X2, X2)], i(X1, X1))
formuła 6: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X1, X3)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 9: [1, 2]

formuła 8: c([a(X1, X2)], i(X1, X1))
formuła 7: c([a(X1, X1), a(X2, X3)], i(X2, X2))

1.    a(a2, a3)   przesłanka
      i(a2, a2)   formuła 8: [1]
```

```
formuła 13: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X3)], i(X1, X1))
formuła 7: c([a(X1, X1), a(X2, X3)], i(X2, X2))

1.    a(a2, a3)   przesłanka
2.    i(a2, a3)   formuła 1: [1]
3.    i(a3, a2)   formuła 2: [2]
4.    i(a3, a3)   formuła 4: [1, 3]
5.    a(a1, a1)   przesłanka
      i(a2, a2)   formuła 13: [2, 4, 5]

formuła 12: c([i(X1, X2), a(X3, X2)], i(X1, X1))
formuła 8: c([a(X1, X2)], i(X1, X1))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
      i(a1, a1)   formuła 12: [2, 1]

formuła 10: c([a(X1, X1), i(X2, X3), a(X3, X4)], i(X2, X2))
formuła 9: c([i(X1, X2), a(X2, X2)], i(X1, X1))

1.    a(a2, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 10: [1, 2, 1]

formuła 11: c([i(X1, X2), a(X2, X3)], i(X1, X1))
formuła 10: c([a(X1, X1), i(X2, X3), a(X3, X4)], i(X2, X2))

1.    i(a2, a3)   przesłanka
2.    a(a3, a4)   przesłanka
      i(a2, a2)   formuła 11: [1, 2]

formuła 13: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X3)], i(X1, X1))
formuła 10: c([a(X1, X1), i(X2, X3), a(X3, X4)], i(X2, X2))

1.    a(a3, a4)   przesłanka
2.    i(a3, a4)   formuła 1: [1]
3.    i(a4, a3)   formuła 2: [2]
4.    i(a4, a4)   formuła 4: [1, 3]
5.    a(a1, a1)   przesłanka
6.    i(a2, a3)   przesłanka
7.    i(a3, a3)   formuła 13: [2, 4, 5]
      i(a2, a2)   formuła 13: [6, 7, 5]

formuła 12: c([i(X1, X2), a(X3, X2)], i(X1, X1))
```

```
formuła 11: c([i(X1, X2), a(X2, X3)], i(X1, X1))

1.    a(a2, a3)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   przesłanka
3.    i(a1, a3)   formuła 4: [1, 2]
      i(a1, a1)   formuła 12: [3, 1]

formuła 14: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], i(X1, X1))
formuła 12: c([i(X1, X2), a(X3, X2)], i(X1, X1))

1.    a(a3, a2)   przesłanka
2.    i(a3, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a3)   formuła 2: [2]
4.    i(a1, a2)   przesłanka
5.    i(a2, a2)   formuła 4: [1, 3]
      i(a1, a1)   formuła 14: [4, 5, 1]

formuła 15: c([i(X1, X2), a(X3, X3)], i(X1, X1))
formuła 13: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X3)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a3, a3)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 15: [1, 2]

formuła 14: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], i(X1, X1))
formuła 13: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X3)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a2, a2)   przesłanka
3.    a(a3, a3)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 14: [1, 2, 3]

formuła 17: c([i(X1, X2), a(X3, X4)], i(X1, X1))
formuła 14: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a3, a4)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 17: [1, 2]

formuła 16: c([i(X1, X2), i(X2, X2)], i(X1, X1))
formuła 14: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a2, a2)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 16: [1, 2]
```

```
formuła 18: c([a(X1, X1)], i(X2, X2))
formuła 15: c([i(X1, X2), a(X3, X3)], i(X1, X1))

1.    a(a3, a3)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 18: [1]

formuła 17: c([i(X1, X2), a(X3, X4)], i(X1, X1))
formuła 15: c([i(X1, X2), a(X3, X3)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a3, a3)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 17: [1, 2]

formuła 19: c([i(X1, X1), i(X2, X3)], i(X2, X2))
formuła 16: c([i(X1, X2), i(X2, X2)], i(X1, X1))

1.    i(a2, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 19: [1, 2]

formuła 20: c([a(X1, X2)], i(X3, X3))
formuła 17: c([i(X1, X2), a(X3, X4)], i(X1, X1))

1.    a(a3, a4)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 20: [1]

formuła 19: c([i(X1, X1), i(X2, X3)], i(X2, X2))
formuła 17: c([i(X1, X2), a(X3, X4)], i(X1, X1))

1.    a(a3, a4)   przesłanka
2.    i(a3, a4)   formuła 1: [1]
3.    i(a4, a3)   formuła 2: [2]
4.    i(a4, a4)   formuła 4: [1, 3]
5.    i(a1, a2)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 19: [4, 5]

formuła 20: c([a(X1, X2)], i(X3, X3))
formuła 18: c([a(X1, X1)], i(X2, X2))

1.    a(a1, a1)   przesłanka
      i(a2, a2)   formuła 20: [1]

formuła 21: c([i(X1, X2)], i(X1, X1))
formuła 19: c([i(X1, X1), i(X2, X3)], i(X2, X2))
```

```
1.    i(a2, a3)   przesłanka
      i(a2, a2)   formuła 21: [1]

formuła 22: c([i(X1, X1)], i(X2, X2))
formuła 19: c([i(X1, X1), i(X2, X3)], i(X2, X2))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
      i(a2, a2)   formuła 22: [1]

formuła 22: c([i(X1, X1)], i(X2, X2))
formuła 20: c([a(X1, X2)], i(X3, X3))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    i(a2, a2)   formuła 4: [1, 3]
      i(a3, a3)   formuła 22: [4]

formuła 23: c([i(X1, X2)], i(X3, X3))
formuła 21: c([i(X1, X2)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
      i(a1, a1)   formuła 23: [1]

formuła 23: c([i(X1, X2)], i(X3, X3))
formuła 22: c([i(X1, X1)], i(X2, X2))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
      i(a2, a2)   formuła 23: [1]

formuła 24: c([], i(X1, X1))
formuła 23: c([i(X1, X2)], i(X3, X3))

      i(a3, a3)   formuła 24

formuła 26: c([a(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))
formuła 25: c([a(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
3.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 26: [1, 2, 3]

formuła 27: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3), a(X3, X3)], a(X2, X2))
```

```
formuła 25: c([a(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a1)   przesłanka
2.    i(a1, a1)   formuła 1: [1]
3.    a(a1, a2)   przesłanka
4.    a(a2, a3)   przesłanka
5.    a(a3, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 27: [2, 3, 4, 5]

formuła 28: c([a(X1, X1), a(X1, X2)], a(X2, X2))
formuła 26: c([a(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 28: [1, 2]

formuła 29: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X2, X2))
formuła 26: c([a(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a1)   przesłanka
2.    i(a1, a1)   formuła 1: [1]
3.    a(a1, a2)   przesłanka
4.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 29: [2, 3, 4, 1]

formuła 48: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X1, X3)], a(X1, X1))
formuła 26: c([a(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    a(a1, a1)   przesłanka
5.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 48: [3, 4, 5]

formuła 29: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X2, X2))
formuła 27: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
3.    a(a2, a3)   przesłanka
4.    a(a3, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 29: [1, 2, 3, 4]

formuła 31: c([a(X1, X2), a(X2, X3), a(X3, X3)], a(X2, X2))
```

```
formuła 27: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a3)   przesłanka
3.    a(a3, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 31: [1, 2, 3]

formuła 32: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X2, X2))
formuła 28: c([a(X1, X1), a(X1, X2)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a1)   przesłanka
2.    i(a1, a1)   formuła 1: [1]
3.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 32: [2, 3, 1]

formuła 33: c([a(X1, X2), a(X3, X3), a(X1, X3)], a(X2, X2))
formuła 28: c([a(X1, X1), a(X1, X2)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a1, a1)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 33: [1, 2, 2]

formuła 30: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))
formuła 29: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X2, X2))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
3.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 30: [1, 2, 3]

formuła 32: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X2, X2))
formuła 29: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X2, X2))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
3.    a(a4, a4)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 32: [1, 2, 3]

formuła 40: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 29: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    i(a2, a2)   formuła 4: [1, 3]
```

```
5.    a(a2, a3)   przesłanka
6.    a(a4, a4)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 40: [4, 5, 6]

formuła 34: c([a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))
formuła 30: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 34: [1, 2]

formuła 35: c([i(X1, X1), a(X1, X2)], a(X2, X2))
formuła 30: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 35: [1, 2]

formuła 33: c([a(X1, X2), a(X3, X3), a(X1, X3)], a(X2, X2))
formuła 31: c([a(X1, X2), a(X2, X3), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a2, a3)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
3.    a(a3, a3)   przesłanka
4.    a(a1, a3)   formuła 3: [1, 2]
      a(a2, a2)   formuła 33: [2, 3, 4]

formuła 34: c([a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))
formuła 31: c([a(X1, X2), a(X2, X3), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 34: [1, 2]

formuła 39: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 31: c([a(X1, X2), a(X2, X3), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    i(a2, a2)   formuła 4: [1, 3]
5.    a(a2, a3)   przesłanka
6.    a(a3, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 39: [4, 5, 6]
```

```
formuła 35: c([i(X1, X1), a(X1, X2)], a(X2, X2))
formuła 32: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 35: [1, 2]

formuła 37: c([a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X2, X2))
formuła 32: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a3, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 37: [1, 2]

formuła 36: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X3, X1)], a(X1, X1))
formuła 33: c([a(X1, X2), a(X3, X3), a(X1, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a3)   przesłanka
2.    i(a1, a3)   formuła 1: [1]
3.    a(a1, a2)   przesłanka
4.    i(a3, a1)   formuła 2: [2]
5.    i(a3, a2)   formuła 4: [3, 4]
6.    i(a2, a3)   formuła 2: [5]
7.    a(a3, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 36: [6, 7, 3]

formuła 38: c([a(X1, X2)], a(X2, X2))
formuła 34: c([a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 38: [1]

formuła 42: c([i(X1, X1), a(X1, X2)], a(X1, X1))
formuła 34: c([a(X1, X2), a(X2, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    i(a2, a2)   formuła 4: [1, 3]
5.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 42: [4, 5]

formuła 38: c([a(X1, X2)], a(X2, X2))
formuła 35: c([i(X1, X1), a(X1, X2)], a(X2, X2))
```

```
1.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 38: [1]

formuła 37: c([a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X2, X2))
formuła 36: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X3, X1)], a(X1, X1))

1.    a(a3, a1)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 37: [1, 2]

formuła 41: c([i(X1, X1), a(X2, X2), i(X1, X2)], a(X1, X1))
formuła 36: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X3, X1)], a(X1, X1))

1.    a(a3, a1)   przesłanka
2.    i(a3, a1)   formuła 1: [1]
3.    i(a1, a3)   formuła 2: [2]
4.    i(a1, a1)   formuła 4: [1, 3]
5.    a(a2, a2)   przesłanka
6.    i(a1, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 41: [4, 5, 6]

formuła 38: c([a(X1, X2)], a(X2, X2))
formuła 37: c([a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 38: [1]

formuła 43: c([i(X1, X1), a(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 37: c([a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    i(a2, a2)   formuła 4: [1, 3]
5.    a(a3, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 43: [4, 5]

formuła 52: c([i(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X1, X1))
formuła 37: c([a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    a(a3, a3)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 52: [3, 1, 4]
```

```
formuła 44: c([i(X1, X1), i(X1, X2), a(X2, X3)], a(X1, X1))
formuła 38: c([a(X1, X2)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    i(a2, a2)   formuła 4: [1, 3]
      a(a2, a2)   formuła 44: [4, 3, 1]

formuła 40: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 39: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
3.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 40: [1, 2, 3]

formuła 41: c([i(X1, X1), a(X2, X2), i(X1, X2)], a(X1, X1))
formuła 39: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a1)   przesłanka
3.    a(a2, a2)   przesłanka
4.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
      a(a1, a1)   formuła 41: [2, 3, 4]

formuła 47: c([a(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 39: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 47: [1, 2]

formuła 42: c([i(X1, X1), a(X1, X2)], a(X1, X1))
formuła 40: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 42: [1, 2]

formuła 43: c([i(X1, X1), a(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 40: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
```

```
2.    a(a3, a3)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 43: [1, 2]

formuła 49: c([a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 40: c([i(X1, X1), a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a3, a3)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 49: [1, 2]

formuła 43: c([i(X1, X1), a(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 41: c([i(X1, X1), a(X2, X2), i(X1, X2)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 43: [1, 2]

formuła 44: c([i(X1, X1), i(X1, X2), a(X2, X3)], a(X1, X1))
formuła 41: c([i(X1, X1), a(X2, X2), i(X1, X2)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   przesłanka
3.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 44: [1, 2, 3]

formuła 51: c([i(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 41: c([i(X1, X1), a(X2, X2), i(X1, X2)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 51: [1, 2]

formuła 44: c([i(X1, X1), i(X1, X2), a(X2, X3)], a(X1, X1))
formuła 42: c([i(X1, X1), a(X1, X2)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 44: [1, 1, 2]

formuła 50: c([a(X1, X2)], a(X1, X1))
formuła 42: c([i(X1, X1), a(X1, X2)], a(X1, X1))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 50: [1]
```

```
formuła 45: c([i(X1, X1), a(X2, X3)], a(X1, X1))
formuła 43: c([i(X1, X1), a(X2, X2)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 45: [1, 2]

formuła 54: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 43: c([i(X1, X1), a(X2, X2)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 54: [1, 1, 2]

formuła 45: c([i(X1, X1), a(X2, X3)], a(X1, X1))
formuła 44: c([i(X1, X1), i(X1, X2), a(X2, X3)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 45: [1, 2]

formuła 53: c([i(X1, X2), a(X2, X3)], a(X1, X1))
formuła 44: c([i(X1, X1), i(X1, X2), a(X2, X3)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 53: [1, 2]

formuła 46: c([i(X1, X1)], a(X1, X1))
formuła 45: c([i(X1, X1), a(X2, X3)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 46: [1]

formuła 55: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))
formuła 45: c([i(X1, X1), a(X2, X3)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 55: [1, 1, 2]

formuła 57: c([i(X1, X2), i(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 46: c([i(X1, X1)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
```

```
      a(a1, a1)   formuła 57: [1, 1]

formuła 48: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X1, X3)], a(X1, X1))
formuła 47: c([a(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 48: [2, 3, 1]

formuła 49: c([a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 48: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X1, X3)], a(X1, X1))

1.    a(a1, a3)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 49: [1, 2]

formuła 51: c([i(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 48: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X1, X3)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 51: [1, 2]

formuła 50: c([a(X1, X2)], a(X1, X1))
formuła 49: c([a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 50: [1]

formuła 52: c([i(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X1, X1))
formuła 49: c([a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    a(a3, a3)   przesłanka
5.    a(a2, a2)   formuła 52: [3, 1, 4]
      a(a1, a1)   formuła 52: [2, 5, 4]

formuła 53: c([i(X1, X2), a(X2, X3)], a(X1, X1))
formuła 50: c([a(X1, X2)], a(X1, X1))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
```

```
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    a(a2, a2)   formuła 53: [3, 1]
      a(a1, a1)   formuła 53: [2, 4]

formuła 52: c([i(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X1, X1))
formuła 51: c([i(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 52: [1, 2, 2]

formuła 53: c([i(X1, X2), a(X2, X3)], a(X1, X1))
formuła 52: c([i(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a3)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 53: [1, 2]

formuła 54: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 52: c([i(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X1, X1))

1.    a(a2, a3)   przesłanka
2.    i(a2, a3)   formuła 1: [1]
3.    i(a3, a2)   formuła 2: [2]
4.    i(a3, a3)   formuła 4: [1, 3]
5.    a(a4, a4)   przesłanka
6.    a(a2, a2)   formuła 54: [2, 4, 5]
7.    i(a1, a2)   przesłanka
8.    i(a2, a2)   formuła 1: [6]
      a(a1, a1)   formuła 54: [7, 8, 5]

formuła 55: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))
formuła 53: c([i(X1, X2), a(X2, X3)], a(X1, X1))

1.    a(a2, a3)   przesłanka
2.    i(a2, a3)   formuła 1: [1]
3.    i(a3, a2)   formuła 2: [2]
4.    i(a3, a3)   formuła 4: [1, 3]
5.    a(a2, a2)   formuła 55: [2, 4, 1]
6.    i(a1, a2)   przesłanka
7.    i(a2, a2)   formuła 1: [5]
      a(a1, a1)   formuła 55: [6, 7, 1]

formuła 55: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))
formuła 54: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
```

```
1.   i(a1, a2)   przesłanka
2.   i(a2, a2)   przesłanka
3.   a(a3, a3)   przesłanka
     a(a1, a1)   formuła 55: [1, 2, 3]

formuła 56: c([i(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 54: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))

1.   i(a1, a2)   przesłanka
2.   a(a3, a3)   przesłanka
     a(a1, a1)   formuła 56: [1, 2]

formuła 57: c([i(X1, X2), i(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 55: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))

1.   i(a1, a2)   przesłanka
2.   i(a2, a2)   przesłanka
     a(a1, a1)   formuła 57: [1, 2]

formuła 58: c([i(X1, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))
formuła 55: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))

1.   i(a1, a2)   przesłanka
2.   a(a3, a4)   przesłanka
     a(a1, a1)   formuła 58: [1, 2]

formuła 58: c([i(X1, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))
formuła 56: c([i(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))

1.   i(a1, a2)   przesłanka
2.   a(a3, a3)   przesłanka
     a(a1, a1)   formuła 58: [1, 2]

formuła 59: c([a(X1, X1)], a(X2, X2))
formuła 56: c([i(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))

1.   a(a3, a3)   przesłanka
     a(a1, a1)   formuła 59: [1]

formuła 60: c([i(X1, X2), i(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 57: c([i(X1, X2), i(X2, X2)], a(X1, X1))

1.   i(a1, a2)   przesłanka
2.   i(a2, a2)   przesłanka
```

```
      a(a1, a1)   formuła 60: [1, 2]

formuła 61: c([a(X1, X2)], a(X3, X3))
formuła 58: c([i(X1, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))

1.    a(a3, a4)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 61: [1]

formuła 60: c([i(X1, X2), i(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 58: c([i(X1, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))

1.    a(a3, a4)   przesłanka
2.    i(a3, a4)   formuła 1: [1]
3.    i(a4, a3)   formuła 2: [2]
4.    i(a1, a2)   przesłanka
5.    i(a4, a4)   formuła 4: [1, 3]
      a(a1, a1)   formuła 60: [4, 5]

formuła 61: c([a(X1, X2)], a(X3, X3))
formuła 59: c([a(X1, X1)], a(X2, X2))

1.    a(a1, a1)   przesłanka
      a(a2, a2)   formuła 61: [1]

formuła 63: c([i(X1, X1)], a(X2, X2))
formuła 60: c([i(X1, X2), i(X3, X3)], a(X1, X1))

1.    i(a3, a3)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 63: [1]

formuła 62: c([i(X1, X2)], a(X1, X1))
formuła 60: c([i(X1, X2), i(X3, X3)], a(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
      a(a1, a1)   formuła 62: [1]

formuła 63: c([i(X1, X1)], a(X2, X2))
formuła 61: c([a(X1, X2)], a(X3, X3))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a1, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a1)   formuła 2: [2]
4.    i(a2, a2)   formuła 4: [1, 3]
      a(a3, a3)   formuła 63: [4]
```

```
formuła 64: c([i(X1, X2)], a(X3, X3))
formuła 62: c([i(X1, X2)], a(X1, X1))

1.   i(a1, a2)   przesłanka
     a(a1, a1)   formuła 64: [1]

formuła 64: c([i(X1, X2)], a(X3, X3))
formuła 63: c([i(X1, X1)], a(X2, X2))

1.   i(a1, a1)   przesłanka
     a(a2, a2)   formuła 64: [1]

formuła 65: c([], a(X1, X1))
formuła 64: c([i(X1, X2)], a(X3, X3))

     a(a3, a3)   formuła 65

formuła 47: c([a(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 5: c([a(X1, X2), a(X2, X2)], i(X1, X1))

1.   a(a1, a2)   przesłanka
2.   a(a2, a2)   przesłanka
3.   a(a1, a1)   formuła 47: [1, 2]
     i(a1, a1)   formuła 1: [3]

formuła 48: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X1, X3)], a(X1, X1))
formuła 6: c([i(X1, X2), a(X2, X2), a(X1, X3)], i(X1, X1))

1.   i(a1, a2)   przesłanka
2.   a(a2, a2)   przesłanka
3.   a(a1, a3)   przesłanka
4.   a(a1, a1)   formuła 48: [1, 2, 3]
     i(a1, a1)   formuła 1: [4]

formuła 49: c([a(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 7: c([a(X1, X1), a(X2, X3)], i(X2, X2))

1.   a(a2, a3)   przesłanka
2.   a(a1, a1)   przesłanka
3.   a(a2, a2)   formuła 49: [1, 2]
     i(a2, a2)   formuła 1: [3]

formuła 50: c([a(X1, X2)], a(X1, X1))
formuła 8: c([a(X1, X2)], i(X1, X1))
```

```
1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a1, a1)   formuła 50: [1]
      i(a1, a1)   formuła 1: [2]

formuła 51: c([i(X1, X2), a(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 9: c([i(X1, X2), a(X2, X2)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   przesłanka
3.    a(a1, a1)   formuła 51: [1, 2]
      i(a1, a1)   formuła 1: [3]

formuła 52: c([i(X1, X2), a(X2, X3), a(X4, X4)], a(X1, X1))
formuła 10: c([a(X1, X1), i(X2, X3), a(X3, X4)], i(X2, X2))

1.    i(a2, a3)   przesłanka
2.    a(a3, a4)   przesłanka
3.    a(a1, a1)   przesłanka
4.    a(a2, a2)   formuła 52: [1, 2, 3]
      i(a2, a2)   formuła 1: [4]

formuła 53: c([i(X1, X2), a(X2, X3)], a(X1, X1))
formuła 12: c([i(X1, X2), a(X3, X2)], i(X1, X1))

1.    a(a3, a2)   przesłanka
2.    i(a3, a2)   formuła 1: [1]
3.    i(a2, a3)   formuła 2: [2]
4.    i(a1, a2)   przesłanka
5.    a(a2, a2)   formuła 53: [3, 1]
6.    a(a1, a1)   formuła 53: [4, 5]
      i(a1, a1)   formuła 1: [6]

formuła 54: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 13: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X3)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a2, a2)   przesłanka
3.    a(a3, a3)   przesłanka
4.    a(a1, a1)   formuła 54: [1, 2, 3]
      i(a1, a1)   formuła 1: [4]

formuła 55: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))
formuła 14: c([i(X1, X2), i(X2, X2), a(X3, X4)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
```

```
2.    i(a2, a2)   przesłanka
3.    a(a3, a4)   przesłanka
4.    a(a1, a1)   formuła 55: [1, 2, 3]
      i(a1, a1)   formuła 1: [4]
```

```
formuła 56: c([i(X1, X2), a(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 15: c([i(X1, X2), a(X3, X3)], i(X1, X1))
```

```
1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a3, a3)   przesłanka
3.    a(a1, a1)   formuła 56: [1, 2]
      i(a1, a1)   formuła 1: [3]
```

```
formuła 57: c([i(X1, X2), i(X2, X2)], a(X1, X1))
formuła 16: c([i(X1, X2), i(X2, X2)], i(X1, X1))
```

```
1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    i(a2, a2)   przesłanka
3.    a(a1, a1)   formuła 57: [1, 2]
      i(a1, a1)   formuła 1: [3]
```

```
formuła 58: c([i(X1, X2), a(X3, X4)], a(X1, X1))
formuła 17: c([i(X1, X2), a(X3, X4)], i(X1, X1))
```

```
1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a3, a4)   przesłanka
3.    a(a1, a1)   formuła 58: [1, 2]
      i(a1, a1)   formuła 1: [3]
```

```
formuła 59: c([a(X1, X1)], a(X2, X2))
formuła 18: c([a(X1, X1)], i(X2, X2))
```

```
1.    a(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   formuła 59: [1]
      i(a2, a2)   formuła 1: [2]
```

```
formuła 60: c([i(X1, X2), i(X3, X3)], a(X1, X1))
formuła 19: c([i(X1, X1), i(X2, X3)], i(X2, X2))
```

```
1.    i(a2, a3)   przesłanka
2.    i(a1, a1)   przesłanka
3.    a(a2, a2)   formuła 60: [1, 2]
      i(a2, a2)   formuła 1: [3]
```

```
formuła 61: c([a(X1, X2)], a(X3, X3))
```

```
formuła 20: c([a(X1, X2)], i(X3, X3))

1.    a(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a3, a3)   formuła 61: [1]
      i(a3, a3)   formuła 1: [2]

formuła 62: c([i(X1, X2)], a(X1, X1))
formuła 21: c([i(X1, X2)], i(X1, X1))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a1, a1)   formuła 62: [1]
      i(a1, a1)   formuła 1: [2]

formuła 63: c([i(X1, X1)], a(X2, X2))
formuła 22: c([i(X1, X1)], i(X2, X2))

1.    i(a1, a1)   przesłanka
2.    a(a2, a2)   formuła 63: [1]
      i(a2, a2)   formuła 1: [2]

formuła 64: c([i(X1, X2)], a(X3, X3))
formuła 23: c([i(X1, X2)], i(X3, X3))

1.    i(a1, a2)   przesłanka
2.    a(a3, a3)   formuła 64: [1]
      i(a3, a3)   formuła 1: [2]

formuła 65: c([], a(X1, X1))
formuła 24: c([], i(X1, X1))

1.    a(a1, a1)   formuła 65
      i(a1, a1)   formuła 1: [1]

false.
true.
```

Dodatek D

Dowody niezależności dla formuł z Diagramu

W związku z przechodniością relacji wyprowadzalności dla wskazania, że nie zachodzą między formułami umieszczonymi na diagramie żadne inne przypadki wyprowadzalności wystarczy pokazać, że relacja wyprowadzalności nie zachodzi pomiędzy formułami wymienionymi poniżej. Rozumowanie wskazujące na niezachodzenie wyprowadzalności jest takie same jak w dowodach twierdzeń o niezależności aksjomatów.

W związku z tym ograniczymy się do wskazania interpretracji (najczęściej poprzez odpowiednie matryce) określających modele typu $\mathcal{M}$, w których tautologiami są aksjomaty systemu **Słp** i pierwsza z pary rozpatrywanych formuł, a druga formuła tautologią nie jest oraz wartościowania ten ostatni fakt wykazującego, jeśli nie jest oczywiste. We wszystkich przypadkach interpretacja funktorów rachunku zdań jest klasyczna. Dla identyfikacji formuł będziemy posługiwali się ich numerami z Rysunku 4.1.

$\langle 24 \rangle \nvdash \langle 25 \rangle$

Atomy o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ – 1, a atomy o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ według matrycy:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	1	1	1
n_2	0	0	1
n_3	0	0	1

Formuła $\langle 25 \rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_1$, $v(M) = n_2$, $v(P) = n_3$.

$\langle 47 \rangle \nvdash \langle 26 \rangle$

Atomy o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ – 1, a atomy o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ według matrycy:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	1	1	1
n_2	0	0	1
n_3	0	0	0

Formuła ⟨26⟩ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_1$, $v(M) = n_2$, $v(P) = n_3$.

⟨28⟩ $\nvdash$ ⟨27⟩

Atomy o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ – 1, a atomy o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ według matrycy:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	1
n_2	0	0	1
n_3	0	0	1

Formuła ⟨27⟩ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_1$, $v(M) = n_2$, $v(P) = n_3$.

⟨50⟩ $\nvdash$ ⟨28⟩

Atomy o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ – 1, a atomy o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ według matrycy:

a	n_1	n_2
n_1	1	1
n_2	0	0

Formuła ⟨28⟩ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(M) = n_2$, $v(S) = n_1$.

⟨51⟩ $\nvdash$ ⟨29⟩

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2	n_3	n_4
n_1	0	1	1	0
n_2	0	0	1	0
n_3	0	0	0	0
n_4	0	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3	n_4
n_1	1	1	1	0
n_2	1	1	1	0
n_3	1	1	1	0
n_4	0	0	0	1

Formuła ⟨29⟩ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_1$, $v(M) = n_2$, $v(P) = n_3$, a $v(N) = n_4$.

⟨59⟩ $\nvdash$ ⟨30⟩

Atomy o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ – 1, a atomy o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ według matrycy:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	1
n_2	0	0	1
n_3	0	0	0

Formuła $\langle 30 \rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_1$, $v(M) = n_2$, $v(P) = n_3$.

$\langle 35 \rangle \nvdash \langle 31 \rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	1
n_2	0	0	1
n_3	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	1
n_2	1	1	1
n_3	1	1	1

Formuła $\langle 31 \rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_1$, $v(M) = n_2$, $v(P) = n_3$.

$\langle 33 \rangle \nvdash \langle 36 \rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	0
n_2	0	0	0
n_3	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	0
n_2	1	1	1
n_3	0	1	1

Formuła $\langle 36 \rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_1$, $v(M) = n_2$, $v(P) = n_3$.

$\langle 38 \rangle \nvdash \langle 39 \rangle$

Atomy o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ – 1, a atomy o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ według matrycy:

a	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	0	1

Formuła $\langle 39 \rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(M) = n_1$, $v(P) = n_2$.

$\langle 53 \rangle \nvdash \langle 43 \rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2
n_1	1	0
n_2	0	0

i	n_1	n_2
n_1	1	0
n_2	0	1

Formuła $\langle 43\rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_1$, $v(M) = n_2$.

$\langle 61\rangle \not\vdash \langle 46\rangle$

Atomy o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ – 0, a atomy o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ – 1.

$\langle 46\rangle \not\vdash \langle 5\rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	0	1

i	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	1	1

Formuła $\langle 5\rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(M) = n_1$, $v(P) = n_2$.

$\langle 47\rangle \not\vdash \langle 6\rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	1	0	1
n_2	0	0	1
n_3	0	0	0

i	n_1	n_2	n_3
n_1	1	1	1
n_2	1	0	1
n_3	1	1	1

Formuła $\langle 6\rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_3$, $v(M) = n_2$, $v(P) = n_1$.

$\langle 11\rangle \not\vdash \langle 7\rangle$ oraz $\langle 51\rangle \not\vdash \langle 7\rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	0
n_2	0	0	0
n_3	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	0
n_2	1	1	0
n_3	0	0	1

Formuła $\langle 7\rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_3$, $v(M) = n_1$, $v(P) = n_2$.

$\langle 59\rangle \not\vdash \langle 8\rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	0	0

i	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	1	1

Formuła $\langle 8\rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(M) = n_1$, $v(P) = n_2$.

$\langle 50\rangle \nvdash \langle 9\rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2
n_1	1	0
n_2	0	0

i	n_1	n_2
n_1	1	1
n_2	1	0

Formuła $\langle 9\rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(M) = n_2$, $v(P) = n_1$.

$\langle 51\rangle \nvdash \langle 10\rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2	n_3	n_4
n_1	0	0	0	0
n_2	0	0	1	0
n_3	0	0	0	0
n_4	0	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3	n_4
n_1	0	1	1	0
n_2	1	0	1	0
n_3	1	1	1	0
n_4	0	0	0	1

Formuła $\langle 10\rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_4$, $v(M) = n_1$, $v(P) = n_2$, a $v(N) = n_3$.

$\langle 59\rangle \nvdash \langle 11\rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	0	0	1
n_2	0	0	1
n_3	0	0	0

i	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	1
n_2	1	0	1
n_3	1	1	1

Formuła $\langle 11\rangle$ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(N) = n_3$, $v(M) = n_1$, $v(P) = n_2$.

$\langle 53\rangle \nvdash \langle 13\rangle$

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	0	0	0
n_2	0	0	0
n_3	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	0
n_2	1	1	0
n_3	0	0	1

Formuła ⟨13⟩ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_3$, $v(M) = n_1$, $v(P) = n_2$.

⟨57⟩ $\nvdash$ ⟨15⟩

Wszystkie atomy według matryc:

a	n_1	n_2	n_3
n_1	0	0	0
n_2	0	0	0
n_3	0	0	1

i	n_1	n_2	n_3
n_1	0	1	0
n_2	1	0	0
n_3	0	0	1

Formuła ⟨15⟩ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(S) = n_3$, $v(M) = n_1$, $v(P) = n_2$.

⟨62⟩ $\nvdash$ ⟨18⟩

Zachodzi, ponieważ formuła ⟨62⟩ jest tezą systemu **Stnd**, a formuła ⟨18⟩ nie jest.

⟨61⟩ $\nvdash$ ⟨16⟩

Atomy o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ – 0, a atomy o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ według matrycy:

i	n_1	n_2
n_1	1	1
n_2	1	0

Formuła ⟨16⟩ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(P) = n_1$, $v(M) = n_2$.

⟨63⟩ $\nvdash$ ⟨21⟩

Atomy o postaci $\mathcal{X}a\mathcal{Y}$ – 0, a atomy o postaci $\mathcal{X}i\mathcal{Y}$ według matrycy:

i	n_1	n_2
n_1	0	1
n_2	1	0

Formuła ⟨16⟩ nie jest spełniona przy wartościowaniu v, w którym $v(P) = n_2$, $v(M) = n_1$.

⟨64⟩ $\nvdash$ ⟨24⟩

Aksjomaty systemu **Słp** oraz formuła ⟨64⟩ są prawdziwe, a formuła ⟨24⟩ fałszywa w modelu, w którym wszystkie atomy są fałszywe.

Bibliografia

[1] K. Ajdukiewicz. *Logika pragmatyczna.* PWN, Warszawa, 1965.

[2] Arystoteles. *Dzieła wszystkie*, volume 1. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1990.

[3] A. Biela and A. Wojtylak. *Automatyczne dowodzenie twierdzeń.* Uniwersytet Śląski, Katowice, 1993.

[4] L. Borkowski. *Logika formalna.* PWN, Warszawa, 1970.

[5] L. Borkowski. Bezkwantyfikatorowy założeniowy system rachunku nazw. Część I. *Roczniki Filozoficzne*, 28(1):133–148, 1980.

[6] L. Borkowski. Bezkwantyfikatorowy założeniowy system rachunku nazw. Część II. *Roczniki Filozoficzne*, 41(1):11–21, 1993.

[7] J. Corcoran. Completeness of an ancient logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 37:696–702, 1972.

[8] J. Corcoran. Aristotle's natural deduction system. In Corcoran J., editor, *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*, pages 1–100. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974.

[9] Z. Dywan. Denotacja u Arystotelesa i Fregego. In Omyła M., editor, *Szkice z semiotyki i ontologii sytuacji*, pages 11–28. Biblioteka Myśli Semiotycznej, Polskie Towarzystwo Semiotyczne, Warszawa, 1991.

[10] G. Frege. *Pisma semantyczne.* PWN, Warszawa, 1977.

[11] P.T. Geach. *Logic Matters.* Campus (University of California Press). University of California Press, 1980.

[12] V. Goranko. Refutation systems in modal logic. *Studia Logica*, 53(2):299–324, 1994.

[13] L. Gruszecki. *U źródeł pojęć mnogościowych.* Wydawnictwo KUL, Lublin, 2005.

[14] A. Grzegorczyk. *Zarys logiki matematycznej.* PWN, Warszawa, 1969.

[15] J. Heijenoort, editor. *From Frege to Goedel: A Source Book in Mathematical Logic.* Harward University Press, Cambridge Massachusetts, 1967.

[16] A. Ishimoto. A propositional fragment of Lesniewski's Ontology. *Studia Logica*, 36:285–299, 1977.

[17] B. Iwanuś. O sylogistyce Arystotelesa. *Zeszyty Naukowe WSP w Opolu, Matematyka*, XXVIII:41–56, 1972.

[18] F. Johnson. Three-membered domains for Aristotle's syllogistic. *Studia Logica*, 50:181–187, 1991.

[19] T. Kotarbiński. *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk.* Ossolineum, 1929.

[20] R.A. Kowalski. *Logic for Problem Solving.* Elsevier, 1979.

[21] P. Kulicki. Modele dla sylogistyki Arystotelesa w dziedzinie dwuelementowej. *Roczniki Filozoficzne*, XLVI-XLVII/I:239–242, 1998/1999.

[22] P. Kulicki. *Logika programowania a sylogistyka Arystotelesa.* PhD thesis, KUL, 1999.

[23] P. Kulicki. The use of axiomatic rejection. In T. Childers, editor, *The Logica Yearbook 1999*, pages 109–117. Filosofia, Prague, 2000.

[24] P. Kulicki. Systemy sylogistyki dowodowej. *Roczniki Filozoficzne*, 58(1):139–153, 2010.

[25] P. Kulicki. An axiomatisation of the pure calculus of names. *Studia Logica*, 1:to appear, 2011.

[26] P. Kulicki. On a minimal system of Aristotle's Syllogistic. *Bulletin of the Section of Logic*, 1:1–14, 2011.

[27] J. Lear. Aristotle's compactness proof. *The Journal of Philosophy*, 76:198–215, 1979.

[28] E.J. Lemmon. Quantifiers and modal operators. *Proceedings of the Aristotelean Society*, 58:245–268, 1958.

[29] W.J. Lloyd. *Foundations of Logic Programming.* Springer, 1987.

[30] J. Łukasiewicz. O sylogistyce Arystotelesa. *Sprawozdania z czynności i posiedzeń Polskiej Akademii Umiejętności*, 44, Nr 6:220–227, 1939.

[31] J. Łukasiewicz. *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic.* Clarendon Press, Oxford, 1957.

[32] J. Łukasiewicz. *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej.* PWN, Warszawa, 1988.

[33] G. Malinowski. *Logiki wielowartościowe.* PWN, Warszawa, 2006.

[34] G. Marciszewski, editor. *Mała encyklopedia logiki.* PWN, Warszawa, 1988.

[35] J.N. Martin. Aristotle's natural deduction revisited. *History and Philosophy of Logic*, 18:1–15, 1997.

[36] S. McCall. Connexive implication. *The Journal of Symbolic Logic*, 31:415–433, 1966.

[37] S. McCall. Connexive implication and the syllogism. *Mind*, 76:346–356, 1967.

[38] J.C.C. McKinsey. The decision problem for some classes of sentences without quantifiers. *The Journal of Symbolic Logic*, 8:61–76, 1943.

[39] L.S. Moss. Completeness theorems for syllogistic fragments. In S. Kepser F. Hamm, editor, *Logics for Linguistic Structures*, pages 143–174. Mouton de Gruyter, Berlin, New York, 2008.

[40] A. Pietruszczak. O logice tradycyjnej i rachunku nazw dopuszczającym podstawienia nazw pustych. *Ruch Filozoficzny*, 44:158–166, 1987.

[41] A. Pietruszczak. O pewnym ujęciu logiki tradycyjnej. *Acta Universitatis Nicolai Copernici, Logika I*, pages 31–41, 1991.

[42] A. Pietruszczak. Standardowe rachunki nazw z funktorem Leśniewskiego. *Acta Universitatis Nicolai Copernici, Logika*, I:5–29, 1991.

[43] A. Pietruszczak. Cardinalities of models for pure calculi of names. *Reports on Mathematical Logic*, 28:87–102, 1994.

[44] W. A. Pogorzelski. *Elementarny słownik logiki formalnej.* Dział Wydawnictw Filii Uniwersytetu Warszawskiego, Białystok, 1992.

[45] K. Policki. Sylogistka typu Brentany i jej stosunek do Sylogistyki Arystotelesa. In R. Tomanek J. Krokos, K. Swiętorzecka, editor, *W kierunku filozofii klasycznej. Inspiracje i kontynuacje*, pages 485–501. Wydawnictwo UKSW, Warszawa, 2008.

[46] I. Pratt-Hartmann and L.S. Moss. Logics for the relational syllogistic. *The Review of Symbolic Logic*, 2:1–37, 2009.

[47] A.N. Prior. *Formal Logic.* Clerendon Press, Oxford, 1962.

[48] V. F. Rickey. A survey of Leśniewski's logic. *Studia Logica*, 36:407–426, 1977.

[49] J.A. Robinson. A machine oriented logic based on the resolution principle. *Journal of the ACM*, 12:23–41, 1965.

[50] C. Rocha and J. Meseguer. A rewriting decision procedure for Dijkstra-Scholten's syllogistic logic with complements. Technical report, University of Illinois at Urbana-Champaign Computer Science Department, 12 2007. Dostępny jako: http://hdl.handle.net/2142/11411.

[51] J.C. Shepherdson. On the interpretation of Aristotelian syllogistic. *The Journal of Symbolic Logic*, 21:137–147, 1956.

[52] T. Skura. Syntactic refutations against finite models in modal logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 35(4):595–605, 1994.

[53] T. Skura. A refutation theory. *Logica Universalis*, 3(2):293–302, 2009.

[54] J. Słupecki. Uwagi o sylogistyce Arystotelesa. *Annales UMCS*, I:187–191, 1946.

[55] J. Słupecki. *Z badań nad sylogistyką Arystotelesa.* Wroclaw, 1948.

[56] J. Słupecki. S. Leśniewski's calculus of names. *Studia Logica*, 3:7–76, 1955.

[57] J. Słupecki and G. Bryll. Proof of Ł-decidability of Lewis system S5. *Studia Logica*, 32:99–105, 1973. 10.1007/BF02123824.

[58] J. Słupecki, G. Bryll, and U. Wybraniec-Skardowska. Theory of rejected propositions. I. *Studia Logica*, 29(1), 1971.

[59] J. Słupecki, G. Bryll, and U. Wybraniec-Skardowska. The theory of rejected propositions. II. *Studia Logica*, 30(1), 1972.

[60] W. Suchoń. *Sylogistyki klasyczne*. Universitatis, Kraków, 1999.

[61] M. Takano. Syntactical proof of translation and separation theorems on subsystems of elementary ontology. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 37:129–138, 1991.

[62] M. Tkaczyk. Zdania warunkowe w logice starożytnej. *Kwartalnik Filozoficzny*, 35(4):23–41, 2007.

[63] M. Tkaczyk. *Logika czasu empirycznego*. Wydawnictwo KUL, 2009.

[64] R. Urbaniak. Some non-standard interpretations of the axiomatic basis of Leśniewski's ontology. *The Australasian Journal of Logic*, 4:13–46, 2006.

[65] T. Waragai. On the logical content of the weak law of extensionality and its relation to the successive simplification of the riginal axiom of Leśniewski's Ontology. *Technical Report 2003-2*, 2003.

[66] T. Waragai and K. Oyamada. A system of ontology based on identity and partial ordering as an adequate logical apparatus for describing taxonomical structures of concepts. *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 15(2):123–149, 2007.

[67] A. Wedberg. The Aristotelean theory of classes. *Ajatus*, 15:299–314, 1948.

[68] D. Westerstahl. Aristotelean syllogisms and generalized quantifiers. *Studia Logica*, 48(4):577–585, 1989.

[69] R. Wilson. *Four colors suffice: How the map problem was solved*. Princeton University Press, 2002.

[70] R. Wójcicki. Dual counterparts of consequence operations. *Bulletin of the Section of Logic*, 2:54–57, 1973.

[71] E. Wojciechowski. Bezkwantyfikatorowy rachunek nazw z regułą ekstensjonalności. *Roczniki Filozoficzne*, 56(1):417–429, 2008.

[72] E. Wojciechowski. Negacja nazwowa a nieokreśloność i nieostrość nazw. *Roczniki Filozoficzne*, 58(1):281–290, 2010.

Indeks rzeczowy