ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom LVIII, numer 1 – 2010

PIOTR KULICKI

SYSTEMY SYLOGISTYKI DOWODOWEJ

WPROWADZENIE

Jan Łukasiewicz [3] przedstawił sylogistykę Arystotelesa w postaci systemu aksjomatycznego opartego na klasycznym rachunku zdań. W tym samym stylu zaprezentowano jeszcze kilka aksjomatyzacji sylogistyki, różniących się nieco aksjomatami i terminami pierwotnymi. Jedną z podstawowych różnic między systemami jest interpretacja zdań kategorycznych, w których powtarza się dwa razy ta sama zmienna – „każde S jest S” oraz „pewne S jest S”. Odwołując się do pewnych intuicji Arystotelesa, związanych z jego koncepcją dowodu, dotyczących pierwszego z wymienionych zdań, przedstawiamy trzy nowe systemy aksjomatyczne pozostające w tradycji Łukasiewicza. Rozpatrywane systemy różnią się między sobą podejściem do drugiego z nich, dla którego nie udało się znaleźć jednoznacznej interpretacji.

Dla precyzyjnego określenia zawartości systemów zostanie wykorzystana metoda aksjomatycznego odrzucania. Jednocześnie, dla dwóch z nich, przedstawimy interpretacje w rachunku zbiorów.

UWAGI O DOWODACH W *ANALITYKACH WTÓRYCH* ARYSTOTELESA

Przy formalizacji sylogistyki jako materiał źródłowy brane są zazwyczaj pod uwagę jedynie rozważania Arystotelesa dotyczące poprawnych trybów trzech figur sylogistycznych, zapisane w *Analitykach pierwszych*. Do tego

Dr PIOTR KULICKI – Katedra Podstaw Informatyki, Wydział Filozofii, Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II; adres do korespondencji: Al. Racławickie 14, 20-950 Lublin; e-mail: kulicki@kul.pl

dołącza się późniejsze osiągnięcia logiki tradycyjnej oraz intuicje związane z interpretacją terminów sylogistycznych w teorii zbiorów.

W niniejszej pracy uwzględnimy w aksjomatyzacji również uwagi Arystotelesa związane z jego koncepcją dowodu znajdujące się w *Analitykach wtórych*. *Dowód* jest dla Arystotelesa elementem budowania wiedzy naukowej (*episteme*) i dla zrozumienia jego koncepcji dowodu niezbędne jest odwołanie się do koncepcji wiedzy. Wiedza naukowa, w odróżnieniu od mniemania czy przekonania, ma walor konieczności, bo oparta jest na poznaniu istotnych własności przedmiotów poznawanych, ich rzeczywistych przyczyn.

> Jasne więc, że poznanie naukowe jest czymś tego rodzaju; bo jeżeli wziąć pod uwagę ludzi nie mających wiedzy naukowej i takich, którzy ją posiedli, to pierwsi sądzą, iż rzecz tak się przedstawia, a ci drudzy wiedzą, że tak się przedstawia i rzeczywiście tak jest; a zatem to, co stanowi przedmiot wiedzy bezwarunkowej, nie może być inne niż jest[1].

W związku z tym, jako elementy dowodu mogą wystąpić sylogizmy w szczególnym kontekście. „[...] sylogizm jest bardziej ogólny; dowód natomiast jest pewnym sylogizmem, ale nie każdy sylogizm jest dowodem.”[2] Przesłanki sylogizmów występujących w dowodach muszą być prawdziwe. Ponadto muszą odwoływać się do istotnych własności przedmiotów, o których coś stwierdzają.

> Przez dowód rozumiem sylogizm tworzący wiedzę naukową, czyli taki, dzięki któremu, jeżeli tylko jesteśmy w jego posiadaniu, mamy tę wiedzę. Jeżeli przeto wiedza jest taka, jak ustaliliśmy, to i przesłanki wiedzy demonstratywnej muszą być prawdziwe, pierwotne, bezpośrednie, lepiej znane wcześniejsze [od wniosku] i muszą być jego przyczyną[3].

W rezultacie pojawiają się pewne prawidłowości, dotyczące użycia sylogizmów w dowodach, wykraczające poza rozważania z *Analityków pierwszych*, które mogą zostać uwzględnione w aksjomatyzacji sylogistyki. W Księdze I *Analityków wtórych* czytamy:

---

[1] *Analityki wtóre*, 71 b. Wszystkie cytaty z Arystotelesa na podstawie tłumaczenia K. Leśniaka [1].

[2] *Analityki pierwsze*, 25 b.

[3] Tamże.

> Co więcej, jeżeli A jest własnością B, B nie może być własnością A, tzn. własnością własności. Dlatego A i B nie mogą być nawzajem orzekane o sobie; można coś prawdziwego o nich powiedzieć, ale jednego o drugim prawdziwie orzekać nie można[4].

Dalej następuje obszerna argumentacja za tym stwierdzeniem odwołująca się z jednej strony do powodów związanych z techniką budowania dowodów, a z drugiej do metafizycznych własności substancji, jakości, rodzajów oraz ich wzajemnych powiązań. Nie będziemy tu wchodzili w dyskusję tej argumentacji, przyjmując jedynie postawioną tezę i interpretując ją jako zdanie:

(*) „Nieprawda, że zarazem każde S jest P i każde P jest S."

zgodnie ze wskazówkami dotyczącymi sposobu czytania i rozumienia zdań ogólnotwierdzących z *Analityków pierwszych*. Zdanie to zostanie uwzględnione w tworzeniu przedstawionych dalej aksjomatyzacji sylogistyki.

Ponieważ w Księdze II *Analityków pierwszych* Arystoteles powołuje się na zdania ogólnotwierdzące odwracalne, w rozważaniach dotyczących dowodu błędnego koła[5] przyjmujemy, że zdanie (*) jest związane jedynie z dowodami i dlatego przedstawione systemy nazywamy sylogistyką dowodową.

USTALENIA TERMINOLOGICZNE

Za Łukasiewiczem będziemy rozważali sylogistykę jako teorię nabudowaną na klasycznym rachunku zdań (KRZ). Zmienne nazwowe oznaczać będziemy literami: S, P, M, ..., S_1, S_2, ...; predykaty charakterystyczne dla sylogistyki – literami a oraz i (będziemy je zapisywać w notacji infiksowej, np.: SaP, SiP i w ten sposób utworzone zdania atomowe sylogistyki odczytywać odpowiednio „każde S jest P" oraz „pewne S jest P"); funktory KRZ – symbolami: $\neg$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\rightarrow$ (implikacja). Za poprawnie zbudowaną formułę (wyrażenia) języka sylogistyki będziemy uważali dowolne zdanie atomowe sylogistyki oraz każde zdanie otrzymane z poprawnie zbudowanych zdań za pomocą właściwie użytych funktorów KRZ.

---

[4] *Analityki wtóre*, 83 a.

[5] Por. *Analityki pierwsze*, 57 b, 58 a.

Korzystać będziemy również z symboli metajęzykowych – zmienne przebiegające zbiór zmiennych nazwowych oznaczać będziemy: X, Y, Z, ..., X_1, X_2, ...; formuły atomowe: A, B, ..., A_1, A_2, ... ; dowolne formuły zdaniowe języka sylogistyki: α, β, ... Ponadto dla oznaczenia asercji i wyprowadzalności używać będziemy symbolu: $\vdash$, a dla odrzucenia – symbolu: $\dashv$. Symbol asercji będzie pomijany, o ile z kontekstu wynika, że mamy do czynienia z formułą uznaną.

Dowolną koniunkcję formuł atomowych (także jednoelementową, tzn. po prostu formułę atomową) będziemy nazywać formułą *elementarną*. Formuły o postaci $\alpha \rightarrow A$, $\neg\alpha$ oraz A, gdzie α jest formułą elementarną, a A formułą atomową, będziemy nazywać formułami *hornowskimi*. W sytuacji, w której istnieje formuła γ, taka że $\alpha \equiv \beta \wedge \gamma$, gdzie α, β, γ są formułami elementarnymi, będziemy używać sformułowania α *zawiera* β. Zdefiniujemy specyficzny rodzaj formuł elementarnych – *łańcuchy* łączące zmienne. Zbiór wszystkich łańcuchów łączący zmienną X ze zmienną Y oznaczać będziemy L(X,Y) i rozumieć zgodnie z następująca definicja indukcyjną:

(i) $XaY \in L(X,Y)$, gdzie X oraz Y są różnymi zmiennymi;
(ii) jeżeli $\alpha \in L(Z,Y)$, to $XaZ \wedge \alpha \in L(X,Y)$, gdzie X nie występuje w α;
(iii) jeżeli $\alpha \in L(X,Y)$ i $\beta \equiv \alpha$ i β jest formułą elementarną, to $\beta \in L(X,Y)$.

Dowolny element zbioru łańcuchów L(X,Y) (dowolny łańcuch łączący zmienną X ze zmienną Y) oznaczać będziemy symbolem l(X,Y).

W definiowaniu systemów używane będą reguły odrywania (MP) i podstawiania (Subst) za zmienne nazwowe o następujących schematach:

(MP) $$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \alpha}{\beta},$$

(Subst) $$\frac{\alpha}{e(\alpha)},$$

gdzie e jest podstawieniem za zmienne nazwowe.

Ponadto używać będziemy reguł odrzucania przez odrywanie (MP^{-1}), przez podstawianie ($Subst^{-1}$), oraz reguły dysjunkcji (Dysj) o poniższych schematach:

(MP^{-1}) $$\frac{\vdash \alpha \to \beta, \dashv \beta}{\dashv \alpha},$$

(Subst^{-1}) $$\frac{\dashv e(\alpha)}{\dashv \alpha},$$

(Dysj) $$\frac{\dashv \alpha \to A_1, \ldots, \dashv \alpha \to A_n}{\dashv \alpha \to A_1 \vee \ldots \vee A_n},$$

gdzie α jest koniunkcją formuł atomowych.

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Jako podstawę dla konstruowanych systemów sylogistyki dowodowej przyjmiemy aksjomatyzację sylogistyki przedstawioną przez J. Słupeckiego [6] (system S), stanowiącą minimalny system zbudowany w stylu Łukasiewicza, zawierający prawa Arystotelesowskiej sylogistyki asertorycznej. System określony jest poprzez reguły MP i Subst oraz zbiór aksjomatów, do którego należy każde podstawienie tezy KRZ w języku sylogistyki oraz następujące aksjomaty specyficzne:

(Ax1) $\quad SaM \wedge MaP \to SaP;$

(Ax2) $\quad SiM \wedge MaP \to PiS;$

(Ax3) $\quad SaP \to SiP;$

(Ax4) $\quad SiP \to PiS.$

Najmniejszy z systemów sylogistyki dowodowej, D1, powstanie poprzez dołączenie do systemu Słupeckiego następującego aksjomatu wyrażającego zdanie (*)[6]:

(Ax5) $\quad \neg SaS.$

Kolejne systemy wzbogacane są o aksjomaty, w których określane są

[6] Łatwo sprawdzić, że na gruncie systemu S formuły (*) i (Ax5) są dedukcyjnie równoważne.

warunki prawdziwości zdania atomowego typu XiX. System pośredni, D2, powstaje przez dodanie do systemu D1 aksjomatu:

(Ax6) $SiP \rightarrow SiS$,

będącego tezą systemów sylogistyki, w których daje się interpretować zdania szczegółowotwierdzące jako stwierdzenie nierozłączności odpowiednich nazw, np. system Łukasiewicza, oraz systemy z tzw. mocną interpretacją zdań ogólnotwierdzących [2,5]. Z kolei maksymalny system D3 powstaje przez dołączenie do D2 Łukasiewiczowskiego aksjomatu:

(Ax7) SiS.

Łatwe do weryfikacji własności rozpatrywanych systemów wyrażone są poprzez następujące lematy, które podajemy bez dowodów.

LEMAT 1

Tezami systemu S są wszystkie formuły o postaci:
(a) $l(X,Y) \rightarrow XaY$;
(b) $l(X,Y) \wedge l(X,Z) \rightarrow YiZ$;
(c) $X_1iX_2 \wedge l(X_1,Y) \wedge l(X_2,Z) \rightarrow YiZ$;
(d) $PaS \rightarrow SiS$.

LEMAT 2

Tezami systemu D1 są wszystkie formuły o postaci:
(a) $\neg(l(X,Y) \wedge YaX)$
oraz
(b) $XaX \rightarrow A$;
(c) $l(X,Y) \wedge YaX \rightarrow A$;
dla dowolnego atomu A.

LEMAT 3

Tezami systemu D2 są następujące formuły:
(a) $SaP \rightarrow SiS$,
(b) $PiS \rightarrow SiS$

ODRZUCENIOWE UZUPEŁNIENIE SYSTEMÓW

Aby lepiej zrozumieć specyfikę zdefiniowanych powyżej systemów sylogistyki, przeanalizujemy ich rozszerzenia, tworząc aksjomatykę odrzuceniową[7].

Wykorzystamy następujące schematy aksjomatów odrzuconych:

($Ax^{-1}1$) $—| S_1iS_1 \wedge P_1iP_1 \wedge l(S_1,S_2) \wedge l(P_1,P_2) \wedge S_2aM \wedge P_2aM \wedge l(M,N) \rightarrow$ $\rightarrow S_2iP_2$,[8] gdzie $l(S_1,S_2)$, $l(P_1,P_2)$ i $l(M,N)$ nie zawierają wspólnych zmiennych;

($Ax^{-1}2$) $—| l(S,P) \rightarrow SiS$;

($Ax^{-1}3$) $—| l(P,M) \rightarrow SiS$, gdzie S nie występuje w $l(P,M)$,

stwierdzające, że odrzucone jest każde wyrażenie o odpowiedniej postaci.

Intuicyjne uchwycenie znaczenia powyższych schematów formuł odrzuconych jest trudniejsze niż zrozumienie aksjomatów, gdyż ze względów technicznych są one bardziej skomplikowane. Schemat ($Ax^{-1}1$) zbliżony jest do przyjętego przez Łukasiewicza aksjomatu odrzuconego $SaM \wedge PaM \rightarrow SiP$ i jego intuicyjny sens jest podobny. Łatwo znaleźć dla tej formuły intuicyjnie czytelny kontrprzykład. Schemat formuły odrzuconej przez ($Ax^{-1}2$) intuicyjnie bliska jest aksjomatowi (Ax6), a więc jego odrzucenie oznacza, że system D1 jest właściwym podsystemem D2. Z kolei odrzucenie schematu formuły występującego w ($Ax^{-1}3$) można odczytać w taki sposób, że nie można przyjąć, że prawdziwe jest wyrażenie o postaci XiX na podstawie prawdziwości wyrażeń nie zawierających zmiennej X.

DEFINICJA 1

(a) Wyrażeniem odrzuconym systemu D1 jest każde wyrażenie podpadające pod jeden ze schematów aksjomatów odrzuconych ($Ax^{-1}1$) lub ($Ax^{-1}2$) oraz wyrażenia, które można otrzymać z wyrażeń odrzuconych D1 oraz z tez D1 za pomocą reguł odrzucania (MP^{-1}), ($Subst^{-1}$) oraz (Dysj).

(b) Wyrażeniem odrzuconym systemu D2 jest każde wyrażenie podpadające pod jeden ze schemat aksjomatów odrzuconych ($Ax^{-1}1$) lub ($Ax^{-1}3$) oraz wyrażenia, które można otrzymać z wyrażeń odrzuco-

[7] Analogiczne rozważania przeprowadza dla swojego systemu Łukasiewicz [3].

[8] Na gruncie systemów D2 i D3 schemat wyrażenia występujący w $Ax^{-1}1$ można równoważnie zastąpić nieco prostszym: $l(S_1,S_2) \wedge l(P_1,P_2) \wedge S_2aM \wedge P_2aM \wedge l(M,N) \rightarrow S_2iP_2$, gdzie $l(S_1,S_2)$, $l(P_1,P_2)$ i $l(M,N)$ nie zawierają wspólnych zmiennych.

nych D2 oraz z tez D2 za pomocą reguł odrzucania (MP^{-1}), ($Subst^{-1}$) oraz (Dysj).

(c) Wyrażeniem odrzuconym systemu D3 jest każde wyrażenie podpadające pod schemat aksjomatu odrzuconego ($Ax^{-1}1$) oraz wyrażenia, które można otrzymać z wyrażeń odrzuconych D3 oraz z tez D3 za pomocą reguł odrzucania (MP^{-1}), ($Subst^{-1}$) oraz (Dysj).

Ponieważ reguły odrzucania (MP^{-1}) i ($Subst^{-1}$) są odwróceniem reguł (MP) i (Subst) prawdziwy jest następujący lemat.

LEMAT 4

Jeżeli $\alpha \vdash \beta$ oraz $\dashv \beta$, to $\dashv \alpha$.

TWIERDZENIE 1

Każde wyrażenie języka sylogistyki jest albo tezą systemu D1 albo wyrażeniem odrzuconym tego systemu w sensie Definicji 1.

DOWÓD

Na gruncie KRZ każdą formułę można równoważnie rozłożyć na koniunkcję formuł o postaci: $\alpha \to A_1 \vee ... \vee A_n$, gdzie α jest formułą elementarną, a A_i $1 \leq i \leq n$ formułami atomowymi. Wystarczy więc udowodnić twierdzenie dla tego rodzaju formuł. Z kolei McKinsley [4] pokazał, że dla teorii, których aksjomaty mają postać formuł hornowskich zachodzi następująca własność dysjunkcji:

Formuła o postaci $\alpha \to A_1 \vee ... \vee A_n$ jest tezą wtw tezą jest co najmniej jedna z formuł: $\alpha \to A_1, ... , \alpha \to A_n$.

W związku z tym wystarczy pokazać, że każda formuła hornowska jest bądź tezą bądź wyrażeniem odrzuconym. W przypadku innych formuł będą one tezami lub wyrażeniami odrzuconymi na podstawie reguły (Dysj).

Pokażemy najpierw, że każda formuła hornowska sylogistyki jest tezą lub wyrażeniem odrzuconym. Rozpatrzymy wszystkie możliwości kształtu formuły hornowskiej α języka sylogistyki ze względu na następnik implikacji: (i) formuła hornowska bez następnika, tzn. negacja formuły elementarnej, (ii) następnik o postaci XaX, (iii) następnik o postaci XaY, gdzie X jest różne od Y, (iv) następnik o postaci XiX, (v) następnik o postaci XiY, gdzie X jest różne od Y.

(i) Formuła α ma postać $\neg\beta$, gdzie β jest formułą elementarną. Jeżeli β zawiera formułę atomową o postaci XaX lub formułę równoważną koniunkcji $l(X,Y) \wedge YaX$, to na mocy aksjomatu Ax5 lub Lematu 2a jest tezą D1. W przeciwnym przypadku, wszystkie zmienne występujące w atomach ogólnotwierdzących β możemy uporządkować liniowo w taki sposób, że pierwszy argument w zdaniu ogólnotwierdzącym zawsze będzie w tym porządku ściśle wcześniejszy niż drugi, tzn. można te zmienne oznaczyć symbolami X_1, X_2, ..., X_n, $n \geq 2$, w taki sposób, że każde zdanie ogólnotwierdzące występujące w β ma postać $X_i a X_j$, gdzie $i<j$. Na gruncie systemu D1 można w tej sytuacji z α wyprowadzić formułę o postaci:

$$(1) \qquad \neg (X_1 i X_1 \wedge X_1 a X_2 \wedge X_2 a X_3 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} a X_n).$$

Powstaje ona przez (1) dodanie jako czynników koniunkcji elementów o postaci $X_k a X_{k+1}$, $1<k<n$, niewystępujących w β oraz atomu $X_1 i X_1$, o ile nie występował w β, co możliwe jest na mocy odpowiedniego prawa KRZ, (2) podstawienie za zmienne różne od X_i $1 \leq i \leq n$ zmiennej X_1 oraz (3) opuszczenie pozostałych elementów β jako wyprowadzanych z $X_1 i X_1 \wedge X_1 a X_2 \wedge X_2 a X_3 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} a X_n$ na mocy Lematu 1a, 1d oraz aksjomatu Ax3. Gdy w β nie występuje żadne zdanie ogólnotwierdzące dołączamy takie zdanie na mocy prawa KRZ.

Z kolei z formuły (1) można wyprowadzić formułę podpadającą pod schemat aksjomatu odrzuconego $Ax^{-1}1$, ponieważ stanowi ona negację części takiej formuły. Każda zatem formuła o postaci rozpatrywanej przez nas w tym przypadku, nie będąca tezą D1, jest odrzucona na mocy Lematu 4.

(ii) Formuła α ma postać $\beta \rightarrow XaX$, gdzie β jest formuła elementarną. W obecności aksjomatu Ax5 α jest równoważne $\neg\beta$ i zastosować do niej można rozważania z punktu (i).

(iii) Formuła α ma postać $\beta \rightarrow XaY$, gdzie X jest różne od Y, a β jest formułą elementarną. Jeżeli β zawiera formułę atomową o postaci ZaZ lub formułę równoważną koniunkcji $l(Z,V) \wedge VaZ$, to na mocy aksjomatu Ax5 lub lematu 2a α jest tezą D1. Jeżeli β zawiera formułę $l(X,Y)$, to α jest tezą D1 na mocy Lematu 1a. Jeżeli nie zachodzi żadna z wymienionych sytuacji, to postępując analogicznie jak w (i), możemy z α wyprowadzić formułę o postaci:

$$(2) \quad X_1 i X_1 \wedge X_1 a X_2 \wedge X_2 a X_3 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} a X_n \rightarrow X_i a X_j,\ 1 \leq j < i \leq n,\ n \geq 2.$$

W wypadku, gdy w poprzedniku wyrażenia α nie występuje któraś ze zmiennych z następnika XaY za zmienną taka podstawiamy X_n za X bądź X_1 za Y.

Na mocy Lematu 1a mamy również:

(3) $X_1iX_1 \wedge X_1aX_2 \wedge X_2aX_3 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}aX_n \rightarrow X_jaX_i,\ 1 \leq j < i \leq n,\ n \geq 2.$

Ponieważ tezą jest formuła $\neg(X_iaX_j \wedge X_jaX_i)$, z (2) możemy wyprowadzić formułę (1) i dalej formułę podpadającą pod schemat $Ax^{-1}1$. Każda zatem formuła o postaci rozpatrywanej przez nas w tym przypadku, nie będąca tezą, jest odrzucona.

(iv) Formuła α ma postać $\beta \rightarrow XiX$, gdzie β jest formuła elementarną. Jeżeli β zawiera formułę atomową o postaci ZaZ lub formułę równoważną koniunkcji $l(Z,V) \wedge VaZ$, to na mocy aksjomatu Ax5 lub lematu 2a α jest tezą D1. Jeżeli β zawiera formułę o postaci YaX, to α jest tezą D1 na mocy lematu 1d. Również jeżeli β zawiera formułę atomową XiX, to α na mocy prawa KRZ jest tezą. Jeżeli nie zachodzi żadna z wymienionych sytuacji, to postępując analogicznie jak w (i) i (iii), możemy z α wyprowadzić formułę o postaci:

(4) $X_1aX_2 \wedge X_2aX_3 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}aX_n \rightarrow X_1iX_1,\ n \geq 2,$

i dalej formułę podpadającą pod schemat $Ax^{-1}2$. Każda zatem formuła o postaci rozpatrywanej przez nas w tym przypadku, nie będąca tezą, jest odrzucona.

(v) Formuła α ma postać $\beta \rightarrow XiY$, gdzie X jest różne od Y, a β jest formułą elementarną. Jeżeli β zawiera formułę atomową o postaci ZaZ lub formułę równoważną koniunkcji $l(Z,V) \wedge VaZ$, to na mocy aksjomatu Ax5 lub lematu 2a α jest tezą D1. Jeżeli β zawiera formuły l(Z,X) i l(Z,Y) lub ZiV, l(Z,X) i l(V,Y), to α jest tezą D1 na mocy lematu 1b lub 1c. Jeżeli nie zachodzi żadna z wymienionych sytuacji, to postępując analogicznie jak w (i), (iii) i (iv) możemy z α wprost wyprowadzić formułę podpadającą pod schemat $Ax^{-1}1$.

Pozostaje nam pokazanie, że żadne wyrażenie hornowskie sylogistyki nie jest zarazem tezą i wyrażeniem odrzuconym D1. W tym celu posłużymy się interpretacją D1 w teorii zbiorów, I_1, w której aksjomaty odrzucone są fałszywe. Nazwom przypisywać będziemy dowolne niepuste zbiory, natomiast wyrażenia atomowe interpretować będziemy następująco. Niech s(X) i s(Y) będą zbiorami przypisanymi odpowiednio zmiennym X oraz Y.

- Zdanie XaY interpretujemy jako: $s(X) \subset s(Y)$.
- Zdanie XiY interpretujemy jako: $s(X) \cap s(Y) \neq \emptyset$ i przynajmniej jeden ze zbiorów s(X) i s(Y) ma przynajmniej 2 elementy.

Sprawdzenie, że aksjomaty D1 są prawdziwe w przedstawionej interpretacji pozostawiamy Czytelnikowi. W dowolnej formule podpadającej pod schemat aksjomatu odrzuconego $Ax^{-1}1$, który można zapisać w następujący sposób:

$S_1iS_1 \wedge P_1iP_1 \wedge l(S_1,S_m) \wedge l(P_1,P_n) \wedge S_maM_1 \wedge P_naM_1 \wedge l(M_1,M_k) \rightarrow S_miP_n$;

niech wyrażenia $l(S_1,S_m)$, $l(P_1,P_n)$ i $l(M_1,M_k)$ będą odpowiednio o postaci:

$S_1aS_2 \wedge S_2aS_3 \wedge ... \wedge S_{m-1}aS_m$, $m \geq 2$
$P_1aP_2 \wedge P_2aP_3 \wedge ... \wedge P_{n-1}aP_n$, $n \geq 2$ oraz
$M_1aM_2 \wedge M_2aM_3 \wedge ... \wedge M_{k-1}aM_k$, $k \geq 2$

Wtedy przy następującym przypisaniu zmiennym zbiorów otrzymamy zawsze zdanie fałszywe:

$s(S_1) = \{1,3\}$;
$s(S_i) = s(S_{i-1}) \cup \{2i+1\}$, dla $1<i\leq m$;
$s(P_1) = \{2,4\}$;
$s(P_i) = s(P_{i-1}) \cup \{2i+2\}$, dla $1<i\leq n$;
$s(M_1) = s(S_m) \cup s(P_n)$;
$s(M_i) = s(M_{i-1}) \cup \{-i\}$ dla $1<i\leq k$.

Z kolei w schemacie aksjomatu $Ax^{-1}2$, zapisanego jako: $l(S_1,S_m) \rightarrow S_1iS_1$, niech formuła $l(S_1,S_m)$ przyjmie postać: $S_1aS_2 \wedge S_2aS_3 \wedge ... \wedge S_{m-1}aS_m$, $m \geq 2$. Wtedy przy następującym przypisaniu zmiennym zbiorów otrzymamy zawsze zdanie fałszywe:

$s(S_1) = \{1\}$;
$s(S_i) = s(S_{i-1}) \cup \{i\}$, $1<i\leq m$. Q.E.D.

TWIERDZENIE 2

Każde wyrażenie języka sylogistyki jest albo tezą systemu D2 albo wyrażeniem odrzuconym tego systemu w sensie Definicji 1.

DOWÓD

Celem pokazania, że każde wyrażenie języka sylogistyki jest tezą lub wyrażeniem odrzuconym systemu D2, wystarczy rozpatrzyć przypadki (i) – (v) z dowodu Twierdzenia 1. Sytuacje (i), (ii), (iii) i (v) pozostają bez zmian w stosunku do systemu D1. W przypadku (iv) rozpatrujemy wyrażenie α o postaci $\beta \rightarrow XiX$, gdzie β jest formułą elementarną. Jeżeli β zawiera formułę atomową o postaci ZaZ lub formułę równoważną koniunkcji $l(Z,V) \wedge VaZ$, to na mocy aksjomatu Ax5 lub lematu 2a α jest tezą D2. Jeżeli β zawiera dowolne wyrażenie atomowe ze zmienną X, to α jest tezą D2 na mocy aksjomatu Ax6 lub Lematu 1d, 3a lub 3b. W przeciwnym wypadku z α można wyprowadzić wyrażenie podpadające pod schemat $Ax^{-1}3$. Każda zatem formuła języka sylogistyki, która nie jest tezą D2, jest odrzucona.

W celu pokazania, że żadne hornowskie wyrażenie odrzucone D2 nie jest tezą D2, posłużymy się interpretacją D2 w rachunku zbiorów I_2, w której zmiennym przypisane zostaną dowolne zbiory, a wyrażenia atomowe interpretować będziemy następująco. Niech s(X) i s(Y) będą zbiorami przypisanymi odpowiednio zmiennym X oraz Y.

- Zdanie XaY interpretujemy jako: $s(X) \subset s(Y)$ i $s(X) \neq \emptyset$.
- Zdanie XiY interpretujemy jako: $s(X) \cap s(Y) \neq \emptyset$.

Sprawdzenie, że aksjomaty D2 są prawdziwe w tej interpretacji, pozostawiamy Czytelnikowi. W dowolnej formule podpadającej pod schemat aksjomatu odrzuconego $Ax^{-1}1$ możemy zastosować to samo podstawienie, co w dowodzie Twierdzenia 1. Schemat aksjomatu odrzuconego $Ax^{-1}3$ zapiszmy w postaci: $P_1aP_2 \wedge P_2aP_3 \wedge ... \wedge P_{m-1}aP_m \rightarrow SiS$ $m \geq 2$. Wtedy przy następującym przypisaniu zmiennym zbiorów otrzymamy zawsze zdanie fałszywe:

$s(P_1) = \{1\}$;
$s(P_i) = s(S_{i-1}) \cup \{i\}$, $1 < i \leq m$;
$s(S) = \emptyset$. Q.E.D.

TWIERDZENIE 3

Każde wyrażenie języka sylogistyki jest albo tezą systemu D3 albo wyrażeniem odrzuconym tego systemu w sensie Definicji 1.

DOWÓD

Tak jak w przypadku poprzednich twierdzeń dla pokazania, że każde wyrażenie języka sylogistyki jest tezą lub wyrażeniem odrzuconym systemu D2 wystarczy rozpatrzyć przypadki (i) – (v) z dowodu Twierdzenia 1. Sytuacje (i), (ii), (iii) i (v) pozostają bez zmian w stosunku do systemów D1 i D2. W przypadku (iv) dla którego rozpatrujemy wyrażenie α o postaci $\beta \rightarrow XiX$, gdzie β jest formuła elementarną, α jest tezą D3 na mocy Ax7.

W celu pokazania, że żadne hornowskie wyrażenie odrzucone D3 nie jest tezą D3, posłużymy się interpretacją D3 w teorii zbiorów, I_3, w której zmiennym przypisane zostaną dowolne niepuste zbiory, a wyrażenia atomowe interpretować będziemy następująco. Niech s(X) i s(Y) będą zbiorami przypisanymi odpowiednio zmiennym X oraz Y.

- Zdanie XaY interpretujemy jako: $s(X) \subset s(Y)$.
- Zdanie XiY interpretujemy jako: $s(X) \cap s(Y) \neq \varnothing$.

Znowu rutynowe sprawdzenie, że aksjomaty D3 są prawdziwe w przedstawionej interpretacji, pozostawiamy Czytelnikowi. W dowolnej formule podpadającej pod schemat aksjomatu odrzuconego $Ax^{-1}1$ możemy zaś zastosować to samo podstawienie, co w dowodzie Twierdzenia 1. Q.E.D.

INTERPRETACJE SYSTEMÓW D2 I D3 W RACHUNKU ZBIORÓW

Pokażemy teraz, że systemy D2 i D3 są pełne odpowiednio w stosunku do modeli w rachunku zbiorów wyznaczonych przez interpretacje funktorów sylogistycznych wykorzystanych w dowodzie twierdzeń 2 i 3.

LEMAT 5

Jeżeli α o postaci $\beta \rightarrow XaY$, gdzie β jest wyrażeniem elementarnym, a X oraz Y są różnymi zmiennymi, nie jest tezą D2 (D3), to istnieje funkcja s przypisująca zmiennym zbiory takie, że α jest przy tej funkcji fałszywa przy interpretacji I_2 (I_3) funktorów sylogistyki w rachunku zbiorów oraz $s(X) \neq s(Y)$.

DOWÓD

Ponieważ z każdego wyrażenia α o rozpatrywanej przez nas postaci, które nie jest tezą systemu D2 i D3 (z dowodów Twierdzeń 1, 2 i 3 widać, że w przypadku wyrażeń o tej postaci systemy D1, D2 i D3 nie różnią się), można wyprowadzić poprzez podstawianie oraz dołączanie nowych czynników w poprzedniku formułę równoważną formule o postaci (2) z dowodu Twierdzenia 1, wystarczy, że pokażemy funkcję s dla wyrażeń o tej właśnie postaci, tzn.:

$$X_1iX_1 \wedge X_1aX_2 \wedge X_2aX_3 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}aX_n \rightarrow X_iaX_j,\ 1 \leq j < i \leq n,\ n \geq 2.$$

Przy obu interpretacjach, I_2 i I_3, funktorów sylogistycznych następująca funkcja s przypisująca zmiennym zbiory sprawia, że interpretacja tego wyrażenia jest fałszywa w rachunku zbiorów:

$s(X_1) = \{1\}$;
$s(X_i) = s(X_{i-1}) \cup \{i\}$, $1<i\leq n$.

Zmiennym występującym w następniku tak określona funkcja s przypisuje zawsze różne zbiory. Q.E.D.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy znane właściwości iloczynów kartezjańskich zbiorów, które przytoczymy tu bez dowodów.

LEMAT 6

Niech a, b, c, d będą dowolnymi zbiorami.
(a) Jeżeli $a,b \neq\emptyset$, to $a\times b \neq\emptyset$.
(b) Jeżeli $a\subset b$ i $c\subset d$, to $a\times c\subset b\times d$.
(c) Jeżeli $a\cap b\neq\emptyset$ i $c\cap d\neq\emptyset$, to $a\times c\cap\ b\times d\neq\emptyset$.
(d) Jeżeli dla przy różnych a i b $a\not\subset b$ lub przy różnych c i d $c\not\subset d$, to $a\times c\not\subset b\times d$.
(e) Jeżeli $a\cap b=\emptyset$ lub $c\cap d=\emptyset$, to $a\times c\cap\ b\times d=\emptyset$.

TWIERDZENIE 4

System D2 jest pełny ze względu na model w rachunku zbiorów wyznaczony przez interpretację I_2 zmiennych i funktorów sylogistycznych.

DOWÓD

Ponieważ aksjomaty D2 są prawdziwe w rozpatrywanej interpretacji, aksjomaty odrzucone – fałszywe, a reguły MP i Subst oraz MP^{-1} i $Subst^{-1}$ zachowują odpowiednio prawdziwość i fałszywość w dowolnej interpretacji, wystarczy pokazać, że reguła odrzucania Dysj jest dopuszczalna w interpretacja I_2, tzn. przy interpretacji I_2 falsyfikowalne są wyrażenia o postaci $\alpha\rightarrow A_1\vee...\vee A_n$, gdzie α jest formułą elementarną, a A_i $1\leq i\leq n$ formułą atomową, o ile fałszywe są wszystkie wyrażenia $\alpha\rightarrow A_i$, $1\leq i\leq n$. Pokażemy jak skonstruować odpowiednie zbiory dla n=2, naturalne rozszerzenie tego rezultatu na przypadek ogólny jest oczywiste.

Niech s_1 i s_2 będą funkcjami przypisującymi zmiennym występującym odpowiednio w formułach $\alpha \rightarrow A_1$ i $\alpha \rightarrow A_2$ zbiory w taki sposób, że w interpretacji I_2 formuły te będą fałszywe. Dla dowolnej zmiennej X funkcję s definiujemy następująco:

$s(X) = s_1(X) \times s_2(X)$.

Rozpatrzmy najpierw formuły występujące w α. Ponieważ α jest prawdziwe w interpretacji I_2 przy zastosowaniu funkcji s_1 i s_2, dla każdego zdania atomowego o postaci XaY występującego w α, zachodzi $s_1(X)\subset s_1(Y)$ oraz $s_2(X)\subset s_2(Y)$, a o postaci XiY – $s_1(X)\cap s_1(Y)\neq\emptyset$ oraz XiY – $s_1(X)\cap s_1(Y)\neq\emptyset$. Na mocy zatem Lematu 6b oraz 6c zachodzi dla zdań o postaci XaY występujących w α $s(X)\subset s(Y)$, a dla zdań o postaci XiY występujących w α - $s(X)\cap s(Y)\neq\emptyset$. Jednocześnie dla zdania o postaci XaY, ponieważ $s_1(X)\neq\emptyset$ oraz $s_2(X)\neq\emptyset$, na mocy Lematu 6a, mamy $s(X)\neq\emptyset$. W związku z powyższym wszystkie zdania występujące w α są prawdziwe w interpretacji I_2 przy zastosowaniu funkcji s.

Dla zdań A_1 i A_2 musimy wziąć pod uwagę trzy możliwe postaci: (i) XaX, (ii) XaY, gdzie X oraz Y są różnymi zmiennymi oraz (iii) XiY. W przypadku (i) niezależnie od funkcji s zdanie takie w interpretacji I_2 będzie fałszywe. W przypadku (ii) dla zdania A_1 o postaci XaY zachodzi $s_1(X)\not\subset s_1(Y)$ oraz $s_2(X)\not\subset s_2(Y)$. Na mocy Lematu 5 możemy tak dobrać funkcje s_1 i s_2, że $s_1(X)\neq s_1(Y)$, a $s_2(X)\neq s_2(Y)$. W związku z tym, zgodnie z Lematem 6d, $s(X)\not\subset s(Y)$. Jednocześnie $s(X)\neq s(Y)$. W przypadku (iii) dla zdania A_1 o postaci XiY zachodzi $s_1(X)\cap s_1(Y)=\emptyset$, a dla zdania A_2 o tej samej postaci – $s_2(X)\cap s_2(Y)=\emptyset$. W związku z tym, na mocy Lematu 6e, w obu przypadkach $s(X)\cap s(Y)=\emptyset$. Zdania A_1 i A_2 są zatem fałszywe w interpretacji I_2, przy zastosowaniu funkcji s.

Wobec tego formuła $\alpha\to A_1\vee A_2$, w interpretacji I_2, przy zastosowaniu funkcji s, jest przekształcana w zdanie fałszywe. Q.E.D.

TWIERDZENIE 5

System D3 jest pełny ze względu na model w rachunku zbiorów wyznaczony przez interpretację I_3 zmiennych i funktorów sylogistycznych.

DOWÓD

Wystarczy zastosować to samo rozumowanie co w dowodzie Twierdzenia 4 przy wykorzystaniu tak samo zdefiniowanej funkcji s. Ponieważ interpretacja I_3 zakłada, że zmiennym przyporządkowane są niepuste zbiory musimy jedynie uwzględnić Lemat 6a, zgodnie z którym jeżeli $s_1(X)\neq\emptyset$ oraz $s_2(X)\neq\emptyset$, to również $s(X)\neq\emptyset$. Q.E.D.

Na koniec zauważmy, że rezultatu podobnego do Twierdzeń 4 i 5 nie daje się udowodnić dla systemu D1. Aby to zobaczyć, wystarczy wziąć pod uwagę formułę:

$$SiP \rightarrow SiS \vee PiP,$$

która nie jest tezą systemu D1 chociaż w interpretacji I_1 z dowodu Twierdzenia 1 jest przekształcana zawsze w zdanie prawdziwe.

BIBLIOGRAFIA

[1] A r y s t o t e l e s: Dzieła wszystkie, t. 1, Warszawa 1990.
[2] B o r k o w s k i L.: Logika Formalna, Warszawa 1970.
[3] Ł u k a s i e w i c z J.: Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic, Clarendon Press, Oxford 1952.
[4] M c K i n s l e y J.C.C.: The decision problem for some classes of sentences without quantifiers, „Journal of Symbolic Logic" 8 (1943), s. 61-76.
[5] P i e t r u s z c z a k A.: O logice tradycyjnej i rachunku nazw dopuszczającym podstawienia nazw pustych, „Ruch Filozoficzny" 44 (1987), nr 2, s. 158-166.
[6] S ł u p e c k i J.: Uwagi o sylogistyce Arystotelesa, „Annales UMCS" 1 (1946), nr 3, s. 187-191.

SYSTEMS OF DEMONSTRATIVE SYLLOGISTIC

S u m m a r y

Aristotle in *Analytica Posteriora* presented a notion of proof as a special case of syllogism. In the present paper the remarks of Aristotle on the subject are used as an inspiration for developing formal systems of demonstrative syllogistic, which are supposed to formalize syllogisms that are proofs. We build our systems in the style of J. Łukasiewicz as theories based on classical propositional logic. The difference between our systems and systems of syllogistic known from the literature lays in the interpretation of general positive sentences in which the same name occurs twice (of the form SaS). As a basic assumption of demonstrative syllogistic we accept a negation of such a sentence. We present three systems which differ in the interpretation of specific positive sentences in which the same name occurs twice (of the form SiS). The theories are defined as axiomatic systems. For all of them rejected axiomatizations are also supplied. For two of them a set theoretical model is also defined.

Translated by Piotr Kulicki

Słowa kluczowe: sylogistyka, dowód, aksjomatyczne odrzucanie.

Key words: syllogistic, proof, rejected axiomatization.

Information about Author: PIOTR KULICKI, Ph.D. – Department of Foundation of Computer Science, Faculty of Philosophy, The John Paul II Catholic University of Lublin; address for correspondence: Al. Racławickie 14, PL 20-950 Lublin; e-mail: kulicki@kul.pl