Das Kompositionalitätsprinzip

in seinen Anwendungen auf die "Slingshot-Argumente"

Hans-Peter Leeb

23. April 2003

Inhalt

Vorwort

Nach dem Kompositionalitätsprinzip ist die Bedeutung eines zusammengesetzten sprachlichen Ausdrucks nur von seiner Form und den Bedeutungen seiner Teilausdrücke abhängig. Dieses Abhängigkeitsverhältnis kann auf unterschiedliche Weisen präzisiert werden. So wird dieses Prinzip häufig als Funktionalitätsthese aufgefaßt: Demnach ist die Bedeutung eines zusammengesetzten Ausdrucks eine Funktion der Bedeutungen seiner Teilausdrücke und der syntaktischen Regeln, denen gemäß diese Teilausdrücke zusammengesetzt werden. Eine andere solche Präzisierungsmöglichkeit ist die folgende:

(B*) Wenn man in einem zusammengesetzten sprachlichen Ausdruck einen Teilausdruck durch einen anderen Ausdruck *ersetzt*, der dasselbe bedeutet, dann bedeuten jener zusammengesetzte Ausdruck und ein durch eine solche Ersetzung resultierender Ausdruck dasselbe.

Gemäß dieser Präzisierungsmöglichkeit wird das Kompositionalitätsprinzip als Substitutionsthese aufgefaßt.

Versteht man nun unter der Bedeutungsrelation die Relation des Bezeichnens, dann geht aus der Substitutionsthese (B*) das Kompositionalitätsprinzip des Referenzobjekts hervor; wenn man aber darunter die Relation des Als-Extension-Habens versteht, dann ergibt sich aus (B*) das Kompositionalitätsprinzip der Extension. Das Kompositionalitätsprinzip des Referenzobjekts sowie dasjenige der Extension werden somit hier als *Substitutionsthesen* aufgefaßt.

Unser Anliegen im ersten Teil der vorliegenden Arbeit ist, diese beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips zu präzisieren und auf ihre Ähnlichkeiten und Unterschiede hin zu untersuchen. Vom Kompositionalitätsprinzip des Sinns hingegen wird dabei nur wenig die Rede sein. Es werden weiters vier Extensionalitätsbegriffe, und zwar je zwei referenztheoretische sowie zwei extensionstheoretische voneinander unterschieden, welche in einem engen Zusammenhang mit jenen beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips stehen. Anschließend werden im zweiten Teil das "Slingshot-Argument" von KURT GÖDEL (1944) und dasjenige von WILLARD VAN ORMAN QUINE (1953) als Anwendungsbeispiele für die beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips vorgestellt und im sprachlichen Rahmen eines Kalküls der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität ($PL1^=$) formalisiert. Durch eine solche Formalisierung können alle Voraussetzungen eines "Slingshot-Aguments" herausgearbeitet werden, welche über die Postulate der ($PL1^=$) hinausgehen und zur Ableitung der Konklusion eines solchen Arguments erforderlich sind. Anhand des Arguments von Quine werden wir schließlich einen direkten Zusammenhang zwischen seinem Argument und den beiden extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffen herstellen können.

Diese Arbeit ist aus meiner Dissertation *Zwei Arten des semantischen Kompositionalitätsprinzips* hervorgegangen und im Rahmen zweier Projekte entstanden, welche durch Mittel des Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung, FWF, Wien, unterstützt wurden. Dem Fonds möchte ich hierfür meinen herzlichen Dank aussprechen.

Die beiden Forschungsprojekte wurden an der Universität Salzburg, und zwar am Forschungsinstitut Philosophie/Wirtschaft/Technik sowie an dessen Nachfolgerinstitut – dem Forschungsinstitut für Angewandte Ethik – durchgeführt und von Prof. Dr. Edgar Morscher geleitet. Ich danke ihm für seine volle Unterstützung sowie zahlreiche Hinweise und Diskussionen zum Thema. Mein diesbezüglicher weiterer Dank gilt v.a.: Prof. Dr. Johannes Brandl, Prof. Dr. Johannes Czermak, Prof. Dr. Georg Dorn, Prof. Dr. Dagfinn Føllesdal, Prof. Dr. Heinrich Ganthaler, Mag. Dr. Alexander Hieke, DDr. Johannes Leitgeb, Prof. Dr. Uwe Meixner, Prof. Dr. Otto Neumaier, M.Mat. Dr. Maristela Rocha, Prof. Dr. Gerhard Schurz, Prof. Dr. Paul Weingartner, Prof. Dr. Peter Woodruff, Prof. Dr. Gerhard Zecha sowie allen Teilnehmern der Forschungsseminare und Privatissima am Institut für Philosophie an der Universität Salzburg.

H.-P. L. April 2003

Einleitung

Es war einmal ein gewöhnlicher Kasten,
der mußte so manchen seiner Teile lassen.
Doch ging mal was an ihm in Brüche,
ersetzt ward es durch gleichwertige Stücke.
So blieb sein Wert stets unbeschadet,
ward auch noch so viel an ihm begradigt.

1 Die Ausgangsfrage

RUDOLF CARNAP versteht in *Introduction to Semantics* (1942) unter 'Semantik' jene Disziplin, in der die Relationen zwischen den Ausdrücken einer Sprache und der außersprachlichen Welt analysiert werden. Solche Relationen werden in der modernen Sprachphilosophie 'semantische Relationen' genannt. Ein Beispiel für eine solche Relation ist die Relation des Bezeichnens: Bestimmte Ausdrücke einer Sprache *bezeichnen* etwas in der Welt. So bezeichnet etwa der Eigenname 'Rhein' ein bestimmtes Einzelding, nämlich den Fluß Rhein, und das Eigenschaftswort 'rot' eine bestimmte Eigenschaft, nämlich die Farbe rot. Die semantische Relation des Bezeichnens nennt man heute in der Sprachphilosophie auch 'Referenzrelation'. Eine *Referenzrelation* ist eine mindestens zweistellige Relation zwischen bestimmten Ausdrücken einer Sprache und bestimmten (im allgemeinen: außersprachlichen) Entitäten (Beispiele für solche Entitäten bei Carnap sind: Einzeldinge, Eigenschaften, Relationen, Sachverhalte usw.). Bei der Einführung einer Referenzrelation für eine noch uninterpretierte Sprache stellt sich u.a. die grundlegende Frage, welche Arten von Entitäten bestimmte Ausdrücke einer solchen Sprache bezeichnen.

In der modernen Sprachphilosophie ist weitgehend unbestritten, daß z.B. Eigennamen, Allgemeinnamen und Relationsausdrücke zu den Ausdrücken einer natürlichen Sprache zählen, welche etwas bezeichnen können. So bezeichnet ein Eigenname wie 'Hermann Maier' oder 'der Mount Everest' eine bestimmte Person oder einen bestimmten Berg, und ein Allgemeinname wie 'Olympiasieger' oder ein Relationsausdruck wie ‘höher als’ eine bestimmte Eigenschaft oder eine bestimmte Relation (bzw. eine Menge von Einzeldingen, die diese Eigenschaft haben, oder eine Menge von geordneten n-Tupeln von Einzeldingen, die in dieser Relation zueinander stehen). Nach Carnap bezeichnen Eigennamen Einzeldinge und Allgemeinnamen bzw. Relationsausdrücke Eigenschaften bzw. Relationen. Aber welche Art von Entität bezeichnet ein Aussagesatz wie etwa ‘Hermann Maier ist Olympiasieger’ oder ‘Der Mount Everest ist höher als der Großglockner’? Diese Frage wird in der modernen Sprachphilosophie weitaus kontroverser diskutiert als jene bezüglich der Teilausdrücke eines solchen Aussagesatzes. Sie wird in der vorliegenden Arbeit als *Ausgangsfrage* gestellt:

(1) Bezeichnet ein Aussagesatz überhaupt etwas, und – falls ja –, welche Art von Entität bezeichnet ein Aussagesatz?

a. Carnaps Antwort auf (1)

In der vorliegenden Arbeit wird von nun an statt dem Wort ‘Aussagesatz’ die kürzere Bezeichnung ‘Satz’ gewählt, um über die Aussagesätze einer gegebenen Sprache $\mathscr{L}$ zu sprechen. Bei der untersuchten Sprache $\mathscr{L}$ kann es sich dabei um eine natürliche oder eine formale Sprache handeln. Ich setze für eine solche Sprache $\mathscr{L}$ zunächst einmal nur voraus, daß sie mindestens drei Arten von syntaktisch korrekt gebildeten Ausdrücken enthält, und zwar *singuläre Ausdrücke* sowie n-stellige *Prädikate* und *Sätze*. Beispiele für solche singuläre Ausdrücke sind etwa die Eigennamen einer natürlichen Sprache und die singulären Terme einer formalen Sprache (Bei letzteren handelt es sich um Ausdrücke wie Individuenkonstanten, definite Deskriptionen, Mengenabstraktionsterme etc.).

Um Carnaps Antwort auf die Ausgangsfrage (1) zu formulieren, können wir von den folgenden zwei Postulaten ausgehen:

(P1) Zu jedem Satz S gibt es mindestens eine Entität e, so daß gilt: S bezeichnet e

und

(P2) Zu jedem Satz S gibt es höchstens eine Entität e, so daß gilt: S bezeichnet e.

Die Postulate (P1) und (P2) zusammen besagen: Zu jedem Satz S gibt es genau eine Entität e, so daß gilt: S bezeichnet e. Es wird also postuliert, daß jeder Satz von $\mathscr{L}$ etwas bezeichnet und daß dabei das Bezeichnen eindeutig ist.

Außerdem soll nach Carnap das folgende Zusammensetzungsprinzip für die von den Sätzen von $\mathscr{L}$ (eindeutig) bezeichneten Entitäten gelten:

(ZR) Für alle Sätze S gilt:
Die von S bezeichnete Entität ist aus den von den Teilausdrücken von S bezeichneten Entitäten zusammengesetzt, wobei die Art der Zusammensetzung durch die logische Form von S bestimmt ist.

Die von einem Satz bezeichnete Entität ist gemäß (ZR) auf bestimmte Weise aus dem zusammengesetzt, was seine Teilausdrücke bezeichnen. Die Art und Weise der Zusammensetzung wird dabei durch die logische Form des Satzes festgelegt.

Wenn sich nun zwei Sätze höchstens in einem deskriptiven (d.h. nicht-logischen) Teilausdruck voneinander unterscheiden (und sie damit ansonsten also gleich sind), dann unterscheiden sich die von den beiden Sätzen bezeichneten Entitäten höchstens in dem, was die beiden Teilausdrücke bezeichnen. Aus den beiden Postulaten (P1) sowie (P2) und der Zusammensetzungsthese (ZR) folgt demnach folgendes:

(UR) Für alle Sätze S_1, S_2 sowie alle deskriptiven Ausdrücke A_1, A_2 und alle Entitäten e_1, e_2, d_1, d_2 gilt:
Wenn sich S_2 von S_1 höchstens darin unterscheidet, daß S_2 mindestens ein Vorkommnis von A_2 hat, wo S_1 ein Vorkommnis von A_1 hat, und wenn A_1 d_1 bezeichnet und A_2 d_2 bezeichnet sowie weiters S_1 e_1 bezeichnet und S_2 e_2 bezeichnet, dann

unterscheidet sich e_2 von e_1 höchstens darin, daß e_2 an einer oder mehreren Stellen d_2 enthält, an denen e_1 d_1 enthält.

Unter der Annahme von (P1) sowie (P2) und (ZR) weisen dann die Teilausdrücke eines Satzes die Richtung, in der eine Antwort auf die Ausgangsfrage (1) zu suchen ist: Bestimmte Teilausdrücke eines Satzes bezeichnen etwas; da die Teilausdrücke unserer Beispielsätze Einzeldinge sowie ihre Eigenschaften und ihre Relationen zu anderen Einzeldingen bezeichnen, bezeichnen nach (ZR) die Beispielsätze Zusammensetzungen von Einzeldingen und Eigenschaften bzw. Relationen. Carnap nennt solche Zusammensetzungen *Sachverhalte*. Sätze bezeichnen nach Carnap also solche Sachverhalte. Das ist eine naheliegende Antwort. Sie hat die durchaus plausibel klingende Konsequenz, daß verschiedene Sätze im allgemeinen verschiedene Sachverhalte bezeichnen. So bezeichnen etwa unsere beiden Beispielsätze, obwohl sie beide wahr sind, verschiedene Sachverhalte. Denn der Sachverhalt, daß Hermann Maier Olympiasieger ist, ist – zumindest vom Alltagsverständnis her betrachtet – verschieden vom Sachverhalt, daß der Mount Everest höher als der Großglockner ist.

An eine solche Antwort anknüpfend, läßt sich eine ebenfalls intuitiv sehr plausible Antwort auf eine weitere Frage geben, nämlich auf die Frage: Was heißt es, daß ein Satz wahr ist? Der erste unserer Beispielsätze ist wahr, wenn der Ausdruck 'Hermann Maier' eine Person bezeichnet, welche eine bestimmte vom Ausdruck 'Olympiasieger' bezeichnete Eigenschaft hat, und falsch, wenn sie diese Eigenschaft nicht hat. Der zweite Satz ist wahr, wenn der Ausdruck 'der Mount Everest' ein Einzelding bezeichnet, welches in einer bestimmten Relation, die der Ausdruck 'höher als' bezeichnet, zu einem Einzelding steht, welches der Ausdruck 'der Großglockner' bezeichnet, und falsch, wenn das erste Einzelding nicht in dieser Relation zum zweiten Einzelding steht. Ein Satz ist also wahr, wenn er einen Sachverhalt bezeichnet, der besteht, d.h. wenn es sich in der Welt so und nicht anders verhält. Sachverhalte scheinen somit die von Sätzen bezeichneten Entitäten zu sein. Aufgrund dieser Sachverhalte, die Sätze bezeichnen, sind solche Sätze entweder wahr oder falsch.

Das Bestehen oder Nicht-Bestehen von Sachverhalten ist es, was – wie es in der philosophischen Fachsprache heißt – einen Satz wahr oder falsch "macht".

So hat Carnap in *Introduction to Semantics* die Ansicht vertreten, daß Eigennamen *Einzeldinge*, Prädikate – je nach ihrer Stelligkeit – *Eigenschaften* bzw. *Relationen* und Sätze *Sachverhalte* bezeichnen. Diese Annahmen sind bei Carnap grundlegend für die Einführung seiner frühen Referenzrelation, die ihrerseits als Grundlage für die Definition eines relativen Wahrheitsbegriffs und weiterer semantischer Begriffe wie z.B. des Folgerungsbegriffs in seiner frühen Semantik dient. Carnap ist später in *Meaning and Necessity* (^{2}1956) – nicht zuletzt unter dem Eindruck eines Arguments von Church – von einer solchen referenztheoretischen Semantik abgerückt und hat stattdessen seine Extensions-Intensions-Methode ausgearbeitet. So räumt er in *Meaning and Necessity* in einer Fußnote ein, daß einer der Auslöser für diesen Wandel ein Argument von Church war, welches ich weiter unten im Abschnitt 2 noch besprechen werde.[1]

b. Freges Antwort auf (1)

Ganz anders als Carnap hat fünfzig Jahre zuvor der Begründer der modernen Logik und Semantik, GOTTLOB FREGE, die Ausgangsfrage (1) beantwortet: Nach Frege bezeichnen Sätze *Wahrheitswerte*. Er versucht diese Antwort in seinem historisch sehr einflußreichen Aufsatz "Über Sinn und Bedeutung" (1892b) zu begründen. Frege unterscheidet in diesem Aufsatz zunächst zwischen dem Sinn und der

[1] Carnap hat in (Carnap 1942, S.9) seine Designationsrelation zweifelsohne als eine Referenzrelation eingeführt, was u.a. aus der folgenden Textstelle hervorgeht: "Thus we may distinguish three factors involved: the speaker, the expression, and what is referred to, which we shall call the **designatum** of the expression". Später in (Carnap ^{2}1956, S.166 Fn.14) räumt er allerdings ein, daß er irrtümlicherweise seiner Designationsrelation auch die Züge einer Intensionsrelation gegeben hat. Insofern aber seine Designationsrelation als eine Referenzrelation verstanden wird, erklärt er sich mit der Behauptung von Church einverstanden, daß die von Sätzen bezeichneten Entitäten nicht Sachverhalte (oder Propositionen), sondern Wahrheitswerte sind. Diese Behauptung ist aber die Konklusion jenes Arguments von Church, welches ich weiter unten besprechen werde.

Bedeutung eines Eigennamens, bevor er diese Unterscheidung auf die Sätze überträgt. Er führt dazu zwei semantische Relationen ein: nämlich die *Relation des Bezeichnens*, d.h. die Referenzrelation, und die *Relation des Ausdrückens*. Er schreibt[2]:

> Ein Eigenname (Wort, Zeichen, Zeichenverbindung, Ausdruck) drückt aus seinen Sinn, bedeutet oder bezeichnet seine Bedeutung. Wir drücken mit einem Zeichen dessen Sinn aus und bezeichnen mit ihm dessen Bedeutung. (Frege 1892b, S.46)

Was meint Frege damit? Wie bei jeder Relation so ist auch bei den Relationen des Bezeichnens und Ausdrückens zwischen der Relation selbst und ihren Relata zu unterscheiden. Diese beiden Relationen sind semantische Relationen, d.h. Relationen zwischen Ausdrücken und Entitäten (welcher Art auch immer). Ich fasse im folgenden die wichtigsten Positionen von Frege bezüglich der Relata dieser beiden Relationen zusammen: Was sind nach Frege die Bedeutungen$_{\mathrm{F}}$ und "Sinne" von (i) Eigennamen, (ii) Prädikaten und (iii) Sätzen?[3]

ad i) Eigennamen. Unter der Bedeutung$_{\mathrm{F}}$ eines Eigennamens versteht Frege ein *Einzelding* bzw. – in seiner Terminologie gesprochen – einen 'gesättigten Gegenstand'. Er meint mit 'ein Eigenname bezeichnet seine Bedeutung' eigentlich folgendes: Wenn ein Eigenname etwas bezeichnet, dann bezeichnet er ein Einzelding.[4]

Unter dem Sinn eines Eigennamens hingegen versteht er die Art und Weise, wie das durch einen Eigennamen bezeichnete Einzelding "gegeben" ist. Der Sinn eines Eigennamens wird von jedem erfaßt,

---

[2] Vgl. Frege 1892b, S.41–46. Da Frege auf diesen Seiten – abweichend vom üblichen Sprachgebrauch – das Wort 'bedeuten' für die Relation des Bezeichnens, d.h. für die Referenzrelation verwendet, werde ich in der vorliegenden Arbeit diese unübliche Gebrauchsweise Freges des Wortes 'bedeuten' bzw. des Nomens 'Bedeutung' besonders kenntlich machen: Wenn diese Wörter im Sinne Freges verwendet werden, dann versehe ich sie – Kutschera 1989 folgend – mit dem Index 'F' für 'Frege'.

[3] Das Wort 'Sinne' ist hier die Mehrzahlbildung des Wortes 'Sinn' in Freges Bedeutung dieses Wortes. Es sind damit nicht – wie im üblichen Sprachgebrauch – die Sinnesorgane gemeint.

[4] Nach Frege sollten alle Eigennamen einer idealen Wissenschaftssprache genau eine Entität bezeichnen.

der die Sprache beherrscht, welcher der Eigenname angehört. So ist etwa der Sinn des Eigennamens 'der Morgenstern' etwas wie: nichts anderes als das einzige Ding zu sein, welches ein hellster Stern (Planet) ist und am Morgen vor der Sonne aufgeht. Der Planet selbst ist hingegen das, was dieser Eigenname bezeichnet.[5] Ein Eigenname hat für Frege auch dann einen Sinn, wenn er nichts bezeichnet: Ein kompetenter Benützer der deutschen Sprache kann etwa den Sinn des Eigennamens 'der zweite Mond der Erde' verstehen, ohne daß dieser Eigenname einen Himmelskörper bezeichnet (nach dem heutigen Stand der Astronomie).

ad ii) Prädikate. Was bezeichnen nach Frege *n*-stellige Prädikate? Die Antwort hierauf findet man nicht im eben besprochenen Aufsatz, sondern in anderen Arbeiten Freges: In "Über Begriff und Gegenstand" (1892a) etwa vertritt er die Ansicht, daß einstellige Prädikate *Begriffe* bezeichnen sowie mehrstellige Prädikate *Beziehungen.* Was versteht nun Frege unter einem Begriff? Ein Fregescher Begriff ist so etwas wie der Begriffsumfang, wenn er auch nicht mit einem solchen gleichzusetzen ist. Frege gibt sprachliche Hinweise, wie er das Wort 'Begriff' verstehen will. So spricht er etwa vom 'Fallen eines Gegenstands (er meint: eines Einzeldings) unter einen Begriff'.[6] Es fällt z.B. die Venus (der Himmelskörper) unter den Begriff Planet. Frege hat eine extensionale Auffassung von 'Begriff', die durch das folgende Kriterium festgelegt ist: Es bezeichnen nämlich nach Frege zwei Begriffswörter dann und nur dann dasselbe, wenn die zugehörigen Begriffsumfänge zusammenfallen.[7] Er fordert dabei, daß solche Begriffe scharf begrenzt sind, d.h. daß für jedes Einzelding bestimmt ist, ob es unter einen solchen Begriff fällt oder nicht. Fällt nun ein Einzelding

[5] Gemäß Carnap ist die Intension eines Eigennamens ein Individualbegriff, der genau ein Individuum charakterisiert oder charakterisieren soll. Unter gewissen Kontextbedingungen (nämlich bei den sogenannten 'gewöhnlichen Kontexten') entspricht ein Fregescher Sinn einer Carnapschen Intension. Vgl. Carnap ^{2}1956, § 9, S.41 und § 29, S.126.

[6] Vgl. Frege 1892a, S.68 f.

[7] Anders gesagt, bezeichnen nach Frege zwei *n*-stellige Prädikate dann und nur dann dasselbe, wenn sie dieselbe Extension haben. Vgl. Frege 1895, S.31.

unter einen solchen Begriff, dann hat dieser Begriff für das betreffende Einzelding den Wahrheitswert Wahr als Wert, fällt es aber nicht darunter, den Wahrheitswert Falsch. Er definiert deshalb einen Begriff bzw. eine Beziehung (erster Stufe) als eine Funktion, die einem bzw. mehreren Argumenten (Einzeldingen) immer einen Wahrheitswert als Wert zuordnet.[8] Faßt man etwa den Begriff Planet als eine solche Funktion eines Arguments auf, dann ordnet sie z.B. dem Argument Venus den Wahrheitswert Wahr zu, und zwar weil die Venus tatsächlich unter den Begriff Planet fällt. Für Frege gehören solche Einzeldinge sowie solche Begriffe, Beziehungen und Wahrheitswerte ins Reich der Bedeutungen$_F$.[9]

ad iii) Sätze. Nach dieser kurzen Besprechung einiger anderer Arbeiten von Frege wende ich mich im folgenden wieder seinem Aufsatz "Über Sinn und Bedeutung" zu. Wie gesagt, unterscheidet er hier zunächst zwischen dem Sinn und der Bedeutung$_F$ eines Eigennamens. Anschließend führt er eine umfangreiche Argumentation, in der er auch Antworten auf die Fragen nach dem Sinn und der Bedeutung$_F$ eines Satzes sucht.[10]

Bezüglich der Frage nach der Bedeutung$_F$ eines Satzes versucht er zunächst einmal in einem ersten Schritt zu begründen, daß jeder Satz, in dem alle darin vorkommenden Eigennamen etwas bedeuten$_F$, mindestens eine Bedeutung$_F$ hat; d.h. er versucht zunächst einmal zu begründen, daß jeder Satz, in dem alle darin vorkommenden Eigennamen etwas bezeichnen, mindestens eine Entität bezeichnet. In einem darauf folgenden Schritt versucht er seine Antwort plausibel zu machen, daß der *Wahrheitswert* eines solchen Satzes als dessen Bedeutung$_F$ (d.h. als die von einem solchen Satz bezeichnete Entität) anzusehen ist. Die Argumentation von Frege zur Unterscheidung von Sinn und Bedeutung$_F$ bei Sätzen enthält somit als Teil ein Argument für seine Antwort. Er verbindet aber mit diesem Argument nicht einen Beweis-Anspruch, sondern lediglich einen Plausibilisierungs-

[8] Vgl. Frege 1891, S.31 und 1895, S.26 f.
[9] Vgl. Frege 1906, S.86.
[10] Vgl. Frege 1892b, S.46–51.

Anspruch: D.h. er erhebt nur den Anspruch, – ausgehend von seinen Voraussetzungen – plausibel machen zu können, daß Wahrheitswerte die Bedeutungen$_{\mathrm{F}}$ von solchen Sätzen sind bzw. daß solche Sätze Wahrheitswerte bezeichnen; er erhebt aber nicht den Anspruch, daß sich dies beweisen läßt. Da Frege nur zwei Wahrheitswerte annimmt – Wahr und Falsch – und er diese Wahrheitswerte auch 'das Wahre' und 'das Falsche' nennt, bezeichnet nach ihm jeder wahre Satz *das Wahre* und jeder falsche *das Falsche*, und zwar völlig unabhängig davon, wovon die Sätze handeln, was also ihr Inhalt ist. Sätze sind für Frege Eigennamen, die solche Wahrheitswerte bezeichnen. Wenn aber jeder wahre Satz das Wahre bezeichnet, dann hat dies zur Konsequenz, daß alle wahren Sätze dasselbe (nämlich das Wahre) bezeichnen. Eine analoge Konsequenz ergibt sich aus der Antwort von Frege auch für alle falschen Sätze.

Bezüglich der Frage nach dem Sinn eines Satzes versucht er zu begründen, daß der in einem Satz enthaltene Gedanke der Sinn eines solchen Satzes ist. Unter dem in einem Satz enthaltenen Gedanken versteht er den objektiven Inhalt des Denkens, der fähig ist, gemeinsames Eigentum von vielen zu sein. Ein Satz drückt nach Frege einen solchen Gedanken aus. Weiters drückt seines Erachtens jeder Eigenname, der etwas bezeichnet, die Art und Weise des Gegebenseins des von ihm bezeichneten Einzeldings aus. Für Frege sind Sätze solche Eigennamen, welche zudem Wahrheitswerte bezeichnen. Folglich drückt jeder solcher Satz die Art und Weise des Gegebenseins des von ihm bezeichneten Wahrheitswerts aus. Der Sinn eines Satzes – d.i. der von diesem Satz ausgedrückte Gedanke – ist also die Art und Weise des Gegebenseins des von einem solchen Satz bezeichneten Wahrheitswerts.

Nachdem ich die wichtigsten Antwort-Positionen von Frege auf die Frage nach den Relata der Referenz- und Sinnrelation kurz zusammengefaßt habe, wende ich mich einer für die vorliegende Arbeit besonders wichtigen Frage zu, nämlich der Frage: Aufgrund welcher Voraussetzungen versucht Frege seine Antwort, daß Sätze Wahrheitswerte bezeichnen, plausibel zu machen? Er setzt in seinem Plausibilisierungs-Versuch neben den Postulaten (P1) und (P2) ein historisch sehr einflußreiches Prinzip voraus, das die Hauptlast bei der Plausibilisierung seiner Antwort zu tragen hat. Frege formuliert dieses Prinzip, nämlich das Kompositionalitätsprinzip des Referenzobjekts[11], wie folgt:

> Nehmen wir einmal an, der Satz habe eine Bedeutung! Ersetzen wir nun in ihm ein Wort durch ein anderes von derselben Bedeutung, aber anderem Sinne, so kann dies auf die Bedeutung des Satzes keinen Einfluß haben. (Frege 1892b, S.46 f.)

Man kann das hier angesprochene Prinzip mittels einer gewissen Anpassung an die Terminologie der vorliegenden Arbeit wie folgt paraphrasieren:

(R*) Die Ersetzung eines Teilausdrucks eines Satzes durch einen anderen Ausdruck, der dasselbe bezeichnet, kann auf die von einem solchen Satz bezeichnete Entität keinen Einfluß haben.[12]

Die Fregesche Textstelle legt nahe, daß er in seinem Argument nicht nur das Postulat (P1), sondern auch das Postulat (P2) voraussetzt, denn sonst würde er nicht von *der* von einem solchen Satz bezeichneten Entität reden, sondern lediglich von *einer* von einem solchen Satz bezeichneten Entität.

Ich präzisiere im folgenden zunächst einmal den im Prinzip (R*) vorausgesetzten *Substitutionsbegriff*, bevor ich darauf zu sprechen komme, wie man Freges Redeweise ‘kann keinen Einfluß haben’ verstehen kann.

Seien A_1 und A_2 Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und seien weiters S_1 und S_2 Sätze von $\mathscr{L}$. Enthalte S_1 mindestens ein Vorkommnis von A_1. Unter der teilweisen Substitution – d.h. der zumindest teilweisen und eventuell auch totalen Substitution – von A_1 in S_1 durch A_2 wird die

[11] So wie sich für die Relation des Bezeichnens der Fachterminus ‘Referenzrelation’ eingebürgert hat, heißt die von einem Ausdruck bezeichnete Entität auch ‘das Referenzobjekt dieses Ausdrucks’.

[12] Vgl. Frege 1892b, S.47.

Ersetzung mindestens eines Vorkommnisses von A_1 in S_1 durch ein Vorkommnis von A_2 verstanden. Eine solche teilweise Substitution hat im allgemeinen kein eindeutiges Ergebnis, und zwar hat sie es dann nicht, wenn A_1 in S_1 mehr als einmal vorkommt: So ist z.B. 'Fab' ein Ergebnis der teilweisen Substitution von 'a' in 'Faa' durch 'b', aber auch 'Fba' und 'Fbb' sind solche Ergebnisse. Es sind weiters an eine solche teilweise Substitution Zulässigkeitsbedingungen zu stellen: So ist etwa die Ersetzung mindestens eines Vorkommnisses von A_1 in S_1 durch A_2 nicht zulässig, wenn dadurch in einem Ergebnis S_2 einer solchen Ersetzung ein ursprünglich in A_2 freies Vorkommnis einer Variable plötzlich gebunden wird. Es kommt mir hier aber nur auf eine grobe Skizzierung der grundlegenden Ideen an, die man durch solche Zulässigkeitsbedingungen noch verfeinern müßte. Wenn S_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in S_1 durch A_2 ist, dann schreibe ich dies durch '$Erg(S_2, S_1(A_1//A_2))$' an. Es wird dabei, durch die Verwendung dieser Notation vorausgesetzt, daß S_1 mindestens ein Vorkommnis von A_1 enthält, d.h. ein *Kontext* von A_1 ist.

Wie kann man weiters die Redeweise von Frege präzisieren, daß die betreffende Ersetzung keinen Einfluß auf die von einem solchen Satz bezeichnete Entität haben kann? Es ist damit wohl gemeint, daß der Satz, in dem Ausdrücke ersetzt werden, welche dasselbe bezeichnen, dasselbe bezeichnet wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse.

Nach diesen Vorbemerkungen kann nun das *Kompositionalitätsprinzip des Referenzobjekts* von Frege auf die folgende Weise präziser formuliert werden:

(R) Für alle Sätze S_1, S_2 und alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$Erg(S_2, S_1(A_1//A_2))$ & A_1 und A_2 bezeichnen dasselbe $\Rightarrow$
S_1 und S_2 bezeichnen dasselbe[13]

[13] Hier und im folgenden werden die Bindewörter 'und' sowie 'wenn, dann' durch die metasprachlichen Zeichen '&' sowie '⇒' symbolisiert, sofern erstere metasprachlich verwendet werden. Es gelte weiters die übliche Klammerkonvention, daß die Konjunktion stärker bindet als die Implikation. Eine Zusammenstellung der logischen Konstanten und metalinguistischen Variablen aus unserer

Man könnte bei der Formulierung von (R) auch auf die Bedingung, daß S_1 mindestens ein Vorkommnis von A_1 enthält, verzichten. Enthält S_1 gar kein Vorkommnis von A_1, dann wird in einem solchen Fall stipuliert, daß die teilweise Substitution von A_1 in S_1 durch A_2 sogar ein eindeutiges Ergebnis hat, nämlich den Satz S_1 selbst. Auch wenn man bei der Formulierung von (R) diesen Grenzfall problemlos berücksichtigen könnte, soll in der vorliegenden Arbeit die Bedingung, daß S_1 mindestens ein Vorkommnis von A_1 enthält – d.h. ein Kontext von A_1 ist –, aufrecht bleiben. Unter der totalen – im Gegensatz zur teilweisen – Substitution von A_1 in S_1 durch A_2 wird die Ersetzung jedes Vorkommnisses von A_1 in S_1 durch ein Vorkommnis von A_2 verstanden. Es wäre nun viel zu restriktiv, das Prinzip (R) mittels einer solchen totalen Substitution zu formulieren, denn man würde dadurch sehr viele interessante Fälle ausschließen: Enthält S_1 mehrere Vorkommnisse von A_1 und bezeichnet A_1 dasselbe wie A_2, dann will man natürlich offenlassen, welche Vorkommnisse von A_1 in S_1 durch A_2 ersetzt werden; man will weiters von jedem Ergebnis S_2 einer solchen teilweisen Substitution sagen können, daß S_1 dasselbe bezeichnet wie S_2. Die Ersetzung jedes Vorkommnisses von A_1 in S_1 durch ein Vorkommnis von A_2 ist vielmehr als ein weiterer Grenzfall einer solchen teilweisen Substitution anzusehen.

Im folgenden komme ich auf einen wichtigen Zusammenhang zwischen einem Ergebnis S_2 der teilweisen Substitution von A_1 in S_1 durch A_2 und dem ursprünglichen Satz S_1 selbst zu sprechen: Es unterscheidet sich nämlich jedes Ergebnis S_2 einer solchen teilweisen Substitution vom ursprünglichen S_1 höchstens darin, daß S_2 mindestens ein Vorkommnis von A_2 hat, wo S_1 ein Vorkommnis von A_1 hat. Man drückt diesen Zusammenhang gelegentlich auch so aus, daß jedes Ergebnis S_2 einer solchen teilweisen Substitution ein Satz ist, welcher so ist wie der Satz S_1, außer daß S_2 Vorkommnisse von A_2 hat, wo S_1 Vorkommnisse von A_1 hat. Ich halte diesen Zusammenhang durch die folgende Konvention fest:

Metasprache $\mathscr{M}$ von $\mathscr{L}$ findet man auf S.197 f.

(K1) Für alle Sätze S_1, S_2 und alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$Erg(S_2, S_1(A_1//A_2)) \Leftrightarrow$
S_2 unterscheidet sich vom ursprünglichen S_1 höchstens darin, daß S_2 mindestens ein Vorkommnis von A_2 hat, wo S_1 ein Vorkommnis von A_1 hat[14]

Akzeptiert man (K1), dann lautet eine mit (R) äquivalente Formulierung wie folgt:

(R′) Für alle Sätze S_1, S_2 und alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
S_2 unterscheidet sich von S_1 höchstens darin, daß S_2 mindestens ein Vorkommnis von A_2 hat, wo S_1 ein Vorkommnis von A_1 hat &
A_1 und A_2 bezeichnen dasselbe $\Rightarrow$
S_1 und S_2 bezeichnen dasselbe

Der Satz (R′) ist eine Folgerung aus dem Satz (UR) – nicht aber umgekehrt – und daher schwächer als (UR), und zwar aus folgendem Grund: Wenn der Teilausdruck A_1 dasselbe bezeichnet wie der Teilausdruck A_2, dann muß die von A_1 bezeichnete Entität d_1 identisch sein mit der von A_2 bezeichneten Entität d_2; in diesem Fall kann sich aufgrund von (UR) die von S_1 bezeichnete Entität e_1 nicht mehr von der von S_2 bezeichneten Entität e_2 unterscheiden, so daß – wie (R′) besagt – S_1 und S_2 dasselbe bezeichnen müssen. Carnap muß also das Prinzip (R′) und damit (R) ohne weiteres akzeptieren, sofern er (ZR) und (K1) – neben (P1) und (P2) – akzeptiert.

Der Satz (R) ist eine Präzisierung des Kompositionalitätsprinzips des Referenzobjekts von Frege als *Substitutionsthese*. Die folgende *Funktionalitätsthese* ist mit dieser Substitutionsthese (R) äquivalent: Die von einem Satz bezeichnete Entität ist eine Funktion der von seinen Teilausdrücken bezeichneten Entitäten und der syntaktischen Regeln, denen gemäß diese Teilausdrücke zusammengesetzt

[14] Hier und im folgenden wird die metasprachliche Verwendung von ‘genau dann, wenn’ durch das metasprachliche Zeichen ‘$\Leftrightarrow$’ symbolisiert.

werden.[15] Um die volle Allgemeinheit zu erreichen, müßte man allerdings diese Formulierungen von den Sätzen auf beliebige zusammengesetzte Ausdrücke ausdehnen.[16]

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß Carnap und Frege die Frage nach der Art der von Sätzen bezeichneten Entitäten völlig unterschiedlich beantworten: Während nach Carnap Sätze Sachverhalte bezeichnen, vertritt Frege die Ansicht, daß Sätze Wahrheitswerte bezeichnen. Beide Antworten haben jeweils unterschiedliche Konsequenzen: Während die Antwort von Carnap zuläßt, daß zwei Sätze, die beide wahr oder aber beide falsch sind, verschiedene Entitäten bezeichnen können, ist dies durch die Antwort von Frege ausgeschlossen.

Die Antwort von Frege wie auch die Konsequenz daraus scheinen kontraintuitiv zu sein. Frege faßt das, wovon man spricht (bzw. sprechen will), wenn man einen Eigennamen wie etwa 'die Venus' (in gewöhnlicher Weise) verwendet, als die von einem solchen Eigennamen

[15] Vgl. Partee/Meulen/Wall ²1993, S.316.

[16] Die Äquivalenz der Funktionalitätsthese mit der Substitutionsthese läßt sich mittels dem sogenannten 'Kongruenzrelationstheorem' aus der abstrakten Algebra wie folgt beweisen: Wenn die syntaktische Algebra $L = \langle X, f_1, \ldots, f_n \rangle$ von gleichem Typ ist wie die Algebra der Referenzobjekte $R = \langle Y, g_1, \ldots, g_n \rangle$, dann bestimmt jeder Homomorphismus von L in R eindeutig eine Kongruenzrelation auf L (und umgekehrt, d.h. auch jede Kongruenzrelation auf L bestimmt eindeutig einen Homomorphismus von L in R). Ein Homomorphismus von L in R ist eine Funktion h von X in Y, so daß gilt: $h(f_i(x_1, \ldots, x_m)) = g_i(h(x_1), \ldots, h(x_m))$ – d.i. die Funktionalitätsthese. Die durch den jeweiligen Homomorphismus h eindeutig bestimmte Kongruenzrelation $\equiv_h$ läßt sich wie folgt definieren:

(D1) $x_1 \equiv_h x_2 :\Leftrightarrow h(x_1) = h(x_2)$

Eine Kongruenzrelation $\equiv_h$ auf L ist eine Äquivalenzrelation, d.h. eine reflexive, symmetrische und transitive Relation, die die *Substitutionseigenschaft* für jede Formationsfunktion f_i aus L hat. Diese Substitutionseigenschaft für f_i besagt folgendes: Wenn $x_1 \equiv_h x'_1$ und ... und wenn $x_m \equiv_h x'_m$, dann $f_i(x_1, \ldots, x_m) \equiv_h f_i(x'_1, \ldots, x'_m)$ – d.i. die Substitutionsthese. Bei diesen Homomorphismen h und den jeweils durch sie eindeutig bestimmten Kongruenzrelationen $\equiv_h$ handelt es sich im vorliegenden Fall um die linkstotale und rechtseindeutige Relation "x bezeichnet y" (der intendierte Homomorphismus) sowie um die Äquivalenzrelation "x_1 bezeichnet dasselbe wie x_2" (die intendierte Kongruenzrelation). Vgl. hierzu Martin 1987, S.74 f. sowie § 9.

bezeichnete Entität auf.[17] Mit dem Eigennamen 'die Venus' spricht man vom Einzelding Venus. Dieser Eigenname bezeichnet also die Venus. Er versucht weiters – wie gesagt – zunächst zu begründen, daß Sätze überhaupt etwas bezeichnen. Wenn aber ein Satz wie

(2) Die Venus ist ein Planet

schon etwas bezeichnet, bezeichnet er dann wirklich einen Wahrheitswert oder wäre es nicht angemessener, anzunehmen, daß er eine Entität von anderer Art als Wahrheitswerte bezeichnet? Wenn ein solcher Satz schon etwas bezeichnet, ist es dann nicht naheliegender, Entitäten wie Sachverhalte als das, was von einem solchen Satz bezeichnet wird, anzunehmen? Man spricht doch, in einem intuitiven prä-semantischen Sinne verstanden, mit einem solchen Satz davon, daß die Welt sich so oder so verhält. Man spricht, so scheint es, mit einem solchen Satz von Einzeldingen und deren Eigenschaften und Relationen zu anderen Einzeldingen, aber doch nicht von Wahrheitswerten. Die Antwort von Frege und die Konsequenz daraus stehen – nach der Auffassung vieler – in einem Gegensatz zu dieser prä-semantischen Intuition.[18]

2 Beweisversuche

Während Frege lediglich den Anspruch erhebt, seine Antwort auf die Ausgangsfrage (1) plausibel machen zu können, haben spätere Autoren diese Antwort streng logisch zu beweisen versucht. Sie haben dabei meistens eine formale Sprache $\mathscr{L}$ betrachtet und sich überlegt, wie man für $\mathscr{L}$ eine Referenzrelation einführen kann.

So ist etwa Alonzo Church in seiner Besprechung "Carnap's *Introduction to Semantics*" (1943) von den Postulaten (P1) und (P2) sowie gewissen Prinzipien Carnaps für eine formale Sprache $\mathscr{L}$ wie etwa den folgenden ausgegangen:

[17] Vgl. Frege 1892b, S.43 und 1906, S.86.
[18] Vgl. Barwise/Perry 1987, S.27 f. sowie Martin 1987, S.329.

(L_R) Für alle Sätze S_1, S_2 gilt:
S_1 und S_2 sind logisch äquivalent (d.h. haben aus rein logischen Gründen – unabhängig davon, was in der Welt tatsächlich der Fall ist – immer denselben Wahrheitswert) $\Rightarrow$
S_1 und S_2 bezeichnen dasselbe

(C) Für alle Sätze S_1, S_2 und alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$Erg(S_2, S_1(A_1//A_2))$ & A_1 und A_2 bezeichnen dasselbe $\Rightarrow$
S_1 und S_2 haben denselben Wahrheitswert[19]

(CT) Für alle Sätze S_1, S_2 und alle singulären Terme t_1, t_2 gilt:
$Erg(S_2, S_1(t_1//t_2))$ & t_1 und t_2 bezeichnen dasselbe $\Rightarrow$
S_1 und S_2 haben denselben Wahrheitswert

(CT) ist eine Spezifikation und damit eine einfache logische Konsequenz von (C); in (C) ist nämlich von beliebigen Ausdrücken A_1 und A_2 von $\mathscr{L}$ die Rede, in (CT) werden diese jedoch auf eine besondere Art von Ausdrücken, nämlich auf singuläre Terme, eingeschränkt. In den logischen und semantischen Arbeiten der bedeutendsten Vertreter der analytischen Philosophie – z.B. von Gottlob Frege, Kurt Gödel, Willard Van Orman Quine, Donald Davidson u.a. – sind solche eine Referenzrelation betreffende Prinzipien bzw. ähnlich klingende, aber eine Extensionsrelation betreffende Prinzipien zu finden.

Aus der Annahme von (P1), (P2), (C), (L_R) sowie weiteren Voraussetzungen von Carnap versucht Church, die folgende Behauptung (FCG) – d.i. eine Abkürzung für 'Frege-Church-Gödel' – streng logisch zu beweisen:

(FCG) Für alle Sätze S_1, S_2, S_3, S_4 gilt:
(S_1 und S_2 sind beide wahr $\Rightarrow$ S_1 und S_2 bezeichnen dasselbe) &
(S_3 und S_4 sind beide falsch $\Rightarrow$ S_3 und S_4 bezeichnen dasselbe)

[19] Im konkreten Fall handelt es sich bei den Sätzen S_1 und S_2 um metasprachliche Sätze, welche Bestandteile von Carnaps rekursiver Definition einer Referenzrelation für $\mathscr{L}$ sind.

Church versucht also aufgrund der Voraussetzungen von Carnap zu beweisen, daß *alle wahren Sätze von $\mathscr{L}$ dasselbe bezeichnen, und ebenso alle falschen Sätze.*

Ich erörtere im folgenden einige Konsequenzen von (FCG). Zunächst einmal halte ich aber fest, daß ohne die Annahme des Postulats (P1) über (FCG) die Gefahr einer Trivialisierung schwebt: Denn alle wahren Sätze von $\mathscr{L}$ bezeichnen auch dann dasselbe, wenn sie gar nichts bezeichnen würden; wenn sie nämlich gar nichts bezeichnen, dann bezeichnen sie trivialerweise dasselbe, und zwar nichts.[20] Diese Trivialisierung ist jedoch schon durch die Annahme von (P1) ausgeschlossen worden. Nach (P1) bezeichnet nämlich jeder Satz von $\mathscr{L}$ etwas. Da weiters auch (P2) vorausgesetzt wird, bezeichnet somit jeder Satz von $\mathscr{L}$ genau eine Entität. Es bezeichnet folglich auch jeder wahre Satz von $\mathscr{L}$ genau eine Entität. Wegen (FCG) bezeichnen nun alle wahren Sätze von $\mathscr{L}$ sogar dieselbe Entität, und zwar weil sie dasselbe bezeichnen. Analog dazu bezeichnen wegen (FCG) auch alle falschen Sätze von $\mathscr{L}$ dieselbe Entität. Wenn aber alle wahren Sätze von $\mathscr{L}$ dieselbe Entität bezeichnen, dann enthält die Menge aller von den wahren Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten genau ein Element, nämlich jene Entität, die jeder wahre Satz von $\mathscr{L}$ bezeichnet. Analog dazu enthält auch die Menge aller von den falschen Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten genau ein Element, und zwar jene Entität, die jeder falsche Satz von $\mathscr{L}$ bezeichnet. Es kann, aber muß nun nicht die von jedem wahren Satz von $\mathscr{L}$ bezeichnete Entität identisch mit der von jedem falschen Satz von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entität sein. Die Menge aller von den wahren und falschen Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten enthält somit höchstens zwei verschiedene Entitäten. Dies ist eine Konsequenz von (P1) sowie (P2) und (FCG). Postuliert man weiters:

(P3) Für alle Sätze S gilt: S ist entweder wahr oder falsch,

dann folgt aus jener Konsequenz sowie (P3), daß die Menge aller von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten höchstens zwei verschie-

[20] Vgl. Gödel 1944, S.451.

dene Entitäten enthält. Muß es sich dabei aber um Wahrheitswerte handeln?

Nun, man kann das Wahrsein (und das Falschsein) eines Satzes S von $\mathscr{L}$ wie folgt verstehen: S ist wahr g.d.w. S den Wahrheitswert Wahr als Wahrheitswert hat; sowie S ist falsch g.d.w. S den Wahrheitswert Falsch als Wahrheitswert hat. Was sonst als eben ihren Wahrheitswert haben aber dann alle wahren sowie alle falschen Sätze von $\mathscr{L}$ in semantischer Hinsicht gemeinsam? Die Sätze von $\mathscr{L}$ bezeichnen also Wahrheitswerte.

Angenommen die Sätze von $\mathscr{L}$ bezeichnen – wie bei Carnap – Sachverhalte. Dann haben (P1)–(P3) sowie (FCG) zur Konsequenz, daß die Menge aller von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten höchstens zwei verschiedene Sachverhalte enthält. Die Sätze von $\mathscr{L}$ können somit höchstens zwei verschiedene Sachverhalte bezeichnen, aber keinesfalls irgendwelche weitere Sachverhalte. Man erwartet sich jedoch von der Annahme, daß Sätze Sachverhalte bezeichnen, daß sie mehr als höchstens zwei verschiedene Sachverhalte bezeichnen können. Denn man spricht – vom Alltagsverständnis her betrachtet – mit vielen verschiedenen Sätzen im allgemeinen von vielen verschiedenen Sachverhalten. Wegen (FCG) kann man aber mit Sätzen nicht mehr von vielen verschiedenen Sachverhalten sprechen, sondern nur noch von höchstens zwei verschiedenen. Der Sachverhaltsbegriff wird dadurch auf gewisse Weise trivialisiert. Die Behauptung (FCG) klingt für das Alltagsverständnis deshalb so unnatürlich, weil danach höchstens soviele verschiedene Entitäten von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichnet werden können, wie man verschiedene Wahrheitswerte für sie akzeptiert. Das hat für Carnaps frühe Semantik in *Introduction to Semantics* katastrophale Folgen: Das Argument von Church zeigt nämlich – sofern es logisch korrekt ist und alle Prämissen wahr sind –, daß jede Semantik, in der Sätze Sachverhalte bezeichnen *und* die von den weiteren Voraussetzungen Carnaps ausgeht, eine Trivialisierung des Sachverhaltsbegriffs zur Folge hat.

Kurt Gödel hat in "Russell's Mathematical Logic" (1944) ebenfalls gemeint, daß sich die Behauptung (FCG) streng logisch beweisen läßt. Er geht dabei in seinem Beweisversuch u.a. von den folgenden beiden Voraussetzungen (G*) und (RT) aus:

(G*) Für alle einstelligen Prädikate F sowie alle Individuenkonstanten c und alle Individuenvariablen v gilt:
$\ulcorner Fc \urcorner$ und $\ulcorner c = \iota v(Fv \wedge v = c)\urcorner$ bezeichnen dasselbe[21]

Zur Veranschaulichung von (G*) diene das folgende umgangssprachliche Beispiel: Der Satz 'Salzburg ist eine Stadt' bezeichnet demnach dasselbe wie der Satz 'Salzburg ist identisch mit demjenigen Ding, welches eine Stadt und identisch mit Salzburg ist'.

(RT) Für alle Sätze S_1, S_2 und alle singulären Terme t_1, t_2 gilt:
$Erg(S_2, S_1(t_1//t_2))$ & t_1 und t_2 bezeichnen dasselbe $\Rightarrow$
S_1 und S_2 bezeichnen dasselbe

(RT) ist eine Spezifikation und damit eine einfache logische Konsequenz von (R); in (R) ist nämlich von beliebigen Ausdrücken A_1 und A_2 von $\mathscr{L}$ die Rede, in (RT) werden diese jedoch auf eine besondere Art von Ausdrücken, nämlich auf singuläre Terme, eingeschränkt.[22]

Nach der Ansicht von Church und Gödel kann die Antwort von Frege auf die Ausgangsfrage (1) dadurch begründet werden, daß man den metatheoretischen Satz (FCG) aus den Voraussetzungen von ihren jeweiligen Argumenten ableitet. Während Gödel den Satz (FCG) für unplausibel hält und dafür plädiert, eine der Voraussetzungen, auf der er beruht, aufzugeben, hat Church an (FCG) nichts auszusetzen und erklärt sich mit den Konsequenzen daraus einverstanden. (FCG) hat aber – wie wir gesehen haben – mindestens die folgenden beiden Konsequenzen: So folgt aus der Annahme, daß die Sätze von $\mathscr{L}$ Sachverhalte bezeichnen, aufgrund von (FCG), daß alle wahren Sätze von

[21] Die objektsprachlichen Zeichen 'ι' sowie '$\wedge$' symbolisieren die objektsprachlich verwendeten Wörter 'dasjenige Ding, welches' sowie 'und'. Weiters erlauben es die "*corner quotes*" aus (Quine 1940), über alle Sätze zu sprechen, welche die beiden in (G*) angegebenen Formen haben.

[22] Meine Vorarbeiten zum Argument von Gödel findet man in (Leeb 1997a und 1997b).

$\mathscr{L}$ denselben Sachverhalt bezeichnen (und ebenso alle falschen Sätze von $\mathscr{L}$). Nimmt man weiters auch noch die Postulate (P1)–(P3) hinzu, so folgt aufgrund von (FCG) außerdem, daß die Sätze von $\mathscr{L}$ höchstens zwei verschiedene Sachverhalte bezeichnen können. Wegen dieser beiden Konsequenzen scheint aber die konkurrierende These, daß die Sätze von $\mathscr{L}$ Wahrheitswerte bezeichnen, viel angemessener zu sein. Denn einerseits erwartet man sich von der Annahme, daß die Sätze von $\mathscr{L}$ Sachverhalte bezeichnen, daß viele verschiedene Sätze im allgemeinen auch viele verschiedene Sachverhalte bezeichnen können. Man erwartet sich davon sicherlich auch noch, daß solche Sätze mehr als höchstens zwei verschiedene Sachverhalte bezeichnen können. Beide Erwartungen gehen jedoch wegen (FCG) nicht in Erfüllung. Andererseits haben aber alle wahren Sätze von $\mathscr{L}$ aufgrund obiger Erklärung des Wahrseins von Sätzen etwas in semantischer Hinsicht Relevantes gemeinsam, nämlich ihren Wahrheitswert Wahr (Analoges gilt auch für alle falschen Sätze von $\mathscr{L}$). Bezeichnen also Sätze, sofern sie überhaupt etwas bezeichnen, doch Wahrheitswerte und nicht Sachverhalte? Meines Erachtens ist es sehr fraglich, ob die Voraussetzungen der Argumente von Church und Gödel hinreichend sind, um die Art der von Sätzen bezeichneten Entitäten eindeutig zu determinieren. Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit werde ich diese Frage im Zusammenhang mit der Formalisierung des Arguments von Gödel erörtern.

3 Die "Slingshot-Argumente"

Ein interdisziplinäres Team von Logikern, Philosophen, Sprachwissenschaftlern, Computerwissenschaftlern und Psychologen um Jon Barwise und John Perry an der Stanford University hat Anfang der 80er Jahre nachzuweisen versucht, daß alle Beweisversuche von Frege, Church und Gödel unhaltbar sind und daß sich mit ihnen nicht die Behauptung (FCG) stützen läßt.[23] Wegen der Kürze dieser

[23] Vgl. Barwise/Perry 1981, S.375–381 und 1987, S.31–35. Barwise und Perry diskutieren in (Barwise/Perry 1981) Argumente von Frege, Church, Gödel, Quine

Beweisversuche und der dabei eingesetzten minimalen Mittel haben Barwise und Perry diese Beweisversuche als "Slingshot-Argumente", d.h. als "Steinschleuder-Argumente" verspottet. Seither hat sich der Name 'Slingshot-Argument' als Familienname für alle diese Beweisversuche eingebürgert.

> There is, however a very influential argument, virtually a priori, suggested no doubt by Frege's remarks, laid down explicitly by Church in his review of Carnap, and deployed in various forms with formal rigor and ruthless vigor by Quine, Davidson and others, which seems to rule out the very possibility of a nontrivial situation semantics. The argument is so small, seldom encompassing more than half a page, and employs such a minimum of ammunition – a theory of descriptions and a popular notion of logical equivalence – that we dub it *the slingshot*. [...]
>
> The term 'slingshot' was originally suggested to us by Donald Davidson's use of this piece of philosophical artillery in his wars against some of the giants of our industry. (Barwise/Perry 1981, S.375 und S.378)

Die von Barwise und Perry in *Situations and Attitudes* (1983) zu einer ersten Blüte gebrachte nicht-triviale Situationssemantik knüpft insofern an Carnaps Referenztheorie aus *Introduction to Semantics* an, als in dieser Situationen, welche Carnapschen Sachverhalten ähnlich sind, als Referenzobjekte (Designata) von Sätzen angenommen werden.[24] Für eine solche nicht-triviale Situationssemantik stellen jedoch die vorhin im Abschnitt 2 besprochenen "Slingshot-Argumente" von Church und Gödel eine Herausforderung dar: Sätze können – solange man an den Voraussetzungen von solchen "Slingshot-Argumenten" festhält – höchstens soviele verschiedene Situationen bezeichnen, wie man verschiedene Wahrheitswerte für Sätze akzeptiert. Es wird

und Davidson. Vgl. weiters Frege 1892b, S.46–51; Church 1943, S.299–301; Gödel 1944, S.450–452; Quine 1953, S.163–164 und 1995, S.90–91; Davidson 1967, S.93.

[24] Während die von einem Ausdruck bezeichnete Entität – wie gesagt – 'das Referenzobjekt dieses Ausdrucks' heißt, wird die von einem Ausdruck designierte Entität auch 'das Designatum dieses Ausdrucks' genannt.

somit in diesen Argumenten gezeigt – sofern sie logisch korrekt und alle ihre Prämissen wahr sind –, daß eine Carnapsche Referenztheorie und die These, daß viele verschiedene Sätze im allgemeinen viele verschiedene Sachverhalte (bzw. Situationen) bezeichnen, unvereinbar sind. Allerdings ist die Kritik von Barwise und Perry an diesen Beweisversuchen nicht unwidersprochen geblieben, und bis zum heutigen Tag dauern die Dispute über die komplizierten Fragestellungen an, welche die Beweisversuche aus der Familie der "Slingshot-Argumente" aufwerfen. Man braucht sich nur einige neuere Ausgaben der renommierten philosophischen Fachzeitschrift *Mind* anzusehen, um einen Eindruck davon zu gewinnen, wie kontrovers das Thema zur Zeit diskutiert wird.[25]

Die Kritik von Barwise und Perry ist gegen die folgenden beiden Prinzipien gerichtet, welche sie für unplausibel halten:

(L_R) Für alle Sätze S_1, S_2 gilt:
S_1 und S_2 sind logisch äquivalent $\Rightarrow$
S_1 und S_2 bezeichnen dasselbe

(RT) Für alle Sätze S_1, S_2 und alle singulären Terme t_1, t_2 gilt:
$Erg(S_2, S_1(t_1//t_2))$ & t_1 und t_2 bezeichnen dasselbe $\Rightarrow$
S_1 und S_2 bezeichnen dasselbe

Nach Barwise und Perry besteht die sogenannte *Standardform des "Slingshot-Arguments"* darin, daß aus den Prinzipien (L_R) und (RT) der (metatheoretische) Satz (FCG) prädikatenlogisch ableitbar ist. Diese Standardform ist den Argumenten von Church und Gödel ähnlich. Den Argumenten von Church und Gödel ist weiters gemeinsam, daß von ihren Urhebern die Ausgangsfrage (1) der vorliegenden Arbeit gestellt wird.[26]

[25] Als ein Beispiel für eine moderne Diskussion vgl. Neale 1995 und die Folgediskussion in *Mind*. Stephen Neale zählt in seinem Aufsatz ausführlich die umfangreiche Sekundärliteratur zu diesen Argumenten auf. Einzelne Argumente aus dieser Argumentfamilie wurden auch unter anderen Namen wie etwa 'Argument für die Wahrheitsfunktionalität', 'Extensionalitäts-Argument' oder 'collapsing argument' untersucht.

[26] Während der Satz (FCG) bei Church und Gödel nur die *Zwischenkonklusion* ist, ist er bei Frege eine *Konsequenz* aus seiner Konklusion, daß Sätze Wahrheits-

4 Das Extensionalitäts-Argument

Barwise und Perry betrachten nicht nur das Argument von Church und dasjenige von Gödel als ein "Slingshot-Argument", sondern auch dasjenige von WILLARD VAN ORMAN QUINE in "Three Grades of Modal Involvement" (1953).[27] Quine hat dieses Argument in *From Stimulus to Science* (1995) in einer neuen Fassung zur Diskussion gestellt.

Der auffallendste Unterschied zwischen den Argumenten von Quine einerseits und denjenigen von Frege, Church und Gödel andererseits ist, daß es ihm gar nicht mehr darum geht, die Behauptung (FCG) zu begründen. Bei Quine ist nämlich eine deutliche Veränderung der Ausgangsfrage zu beobachten: Er stellt nicht mehr – so wie Church und Gödel – die Frage nach der Art der von Sätzen bezeichneten Entitäten, sondern eine ganz andere Frage. Ich führe hierfür zunächst zwei Gründe an, bevor ich auf die Ausgangsfrage von Quine zu sprechen komme: So unterscheidet Quine (i) zwischen den semantischen Relationen des Bezeichnens (Benennens) und des Zutreffens-auf (Wahrseins-von); und er betont weiters (ii) die Vorrangigkeit der Relation des Zutreffens-auf gegenüber der Relation des Bezeichnens.

ad i) Während nach Quine ein singulärer Term vorgibt (*purports*) genau ein Einzelding zu bezeichnen, trifft ein einstelliges Prädikat (wie z.B. 'ist rot') auf jedes einzelne von beliebig vielen Einzeldingen zu bzw. ist auch von vielen solchen Einzeldingen (nämlich allen roten Einzeldingen) wahr. Er beschränkt seine Referenzrelation auf die singulären Terme. Nur solche singuläre Terme können etwas bezeichnen, n-stellige Prädikate hingegen nicht. Solche Prädikate zählen seiner Ansicht nach – so wie Sätze – gar nicht zu den Ausdrücken, die etwas bezeichnen können, bei denen es also Sinn macht zu fragen, welche Art von Entitäten sie bezeichnen. Solche Prädikate sind vielmehr – so wie Sätze – Ausdrücke, bei denen es lediglich Sinn macht

werte bezeichnen. Insofern unterscheiden sich die drei Argumente von Church, Gödel und Frege auch voneinander.

[27] Vgl. Quine 1953, S.163–164.

zu fragen, welche Art von Entitäten sie *als Extensionen haben.*[28] Es können nämlich *n*-stellige Prädikate Mengen und Sätze Wahrheitswerte als Extensionen haben. Derartige Prädikate und Sätze können zwar solche Entitäten als Extensionen haben, aber sie können sie nicht bezeichnen (bzw. benennen).[29]

ad ii) Quine betont weiters die Vorrangigkeit der *n*-stelligen Prädikate gegenüber den singulären Termen. Er betont damit auch die Vorrangigkeit der Relation des *Zutreffens-auf* gegenüber der Relation des Bezeichnens. Bestimmte einstellige Prädikate treffen nämlich auf genau ein Einzelding zu. Wenn F ein solches einstelliges Prädikat ist, dann kann man mit Hilfe von F den komplexen singulären Term $\ulcorner \iota v F v \urcorner$ bilden. Das Prädikat F bezeichnet gar nichts, sondern lediglich der singuläre Term $\ulcorner \iota v F v \urcorner$, und auch das nur, weil F auf genau ein Einzelding zutrifft. Träfe F nicht auf genau ein Einzelding zu, so würde auch $\ulcorner \iota v F v \urcorner$ nichts bezeichnen. Er betrachtet $\ulcorner \iota v F v \urcorner$ als die allgemeine Form aller singulären Terme und schlägt ein Eliminierungsprogramm für solche singuläre Terme vor.[30]

Anstatt die Ausgangsfrage (1) der vorliegenden Arbeit zu stellen, untersucht Quine die folgende Frage: Angenommen in einem Kontext sind logisch äquivalente Sätze "salva veritate" (d.h. "unbeschadet des Wahrheitswerts") substituierbar, und angenommen weiters, für diesen Kontext gilt die Substituierbarkeit der Identität[31], d.h. der Terme eines wahren Identitätssatzes "salva veritate". Sind dann in diesem Kontext auch immer material äquivalente Sätze "salva veritate" substituierbar? Er beantwortet seine Frage positiv, d.h. die drei Prinzipien:

- der Substituierbarkeit von logisch äquivalenten Sätzen "salva veritate" sowie

[28] Diejenige Entität, welche ein sprachlicher Ausdruck als Extension hat, nennt man auch 'die Extension dieses Ausdrucks'.

[29] Vgl. Quine ^{2}1956, §§ 12, 17, 24, 34, v.a. S.65 f. sowie S.90 f., S.135 f. und S.205.

[30] Vgl. Quine ^{2}1956, §§ 36, 37, v.a. S.218 sowie S.224.

[31] "Substitutivity of identity"; vgl. Quine 1995, S.90 f.

- der Substituierbarkeit der Terme eines wahren Identitätssatzes "salva veritate" und
- der Substituierbarkeit von material äquivalenten Sätzen "salva veritate"

sind seines Erachtens untrennbar miteinander verbunden. Die beiden Fassungen seines Extensionalitäts-Arguments sollen das beweisen. Die Substituierbarkeit der Terme eines wahren Identitätssatzes "salva veritate" sowie diejenige von koextensionalen n-stelligen Prädikaten und von material äquivalenten Sätzen machen für Quine die "volle Extensionalität" desjenigen Kontexts aus, in dem ersetzt wird.[32] Ich werde im ersten Teil der vorliegenden Arbeit die hier angesprochenen Begriffe der "Salva-Veritate"-Substituierbarkeit und der "Extensionalität" noch näher untersuchen.

Ich halte für das Folgende fest, daß die drei Prinzipien nicht eine Referenzrelation betreffen, sondern eine *Extensionsrelation*[33], und zwar aus folgendem Grund: Die Kontexte, in denen die genannten Ausdrücke "salva veritate" substituierbar sein sollen, sind ganz offensichtlich die Sätze einer Sprache $\mathscr{L}$. Denn nur sie, und nicht andere sprachliche Ausdrücke haben Wahrheitswerte. Diese Wahrheitswerte sind aber laut Annahme die Extensionen (und nicht die Referenzobjekte) der Sätze von $\mathscr{L}$. Folglich betreffen die drei Prinzipien die Extensionen von Sätzen und damit auch eine Extensionsrelation.

Für Quines Unterscheidung einer Referenzrelation von einer Extensionsrelation gibt es ein wichtiges historisches Vorbild. So hebt Carnap in *Meaning and Necessity* seine Extensions-Intensions-Methode von der traditionellen Methode der Referenzrelation ab: Während nach dieser traditionellen Methode Sätze (im allgemeinen: außersprachliche) Entitäten bezeichnen können, können nun in der späteren Semantik von Carnap Sätze lediglich solche Entitäten als Extensionen haben (bzw. besitzen). Er betrachtet hier somit – so wie

[32] Vgl. Quine 1995, S.90.

[33] Eine Extensionsrelation ist eine mindestens zweistellige Relation zwischen bestimmten sprachlichen Ausdrücken und denjenigen Entitäten, welche solche Ausdrücke als Extensionen haben können.

Quine – nicht mehr eine Referenzrelation, sondern eine Extensionsrelation.[34]

Dieser Wechsel der semantischen Relationen ist im folgenden bei der Formulierung des *Kompositionalitätsprinzips der Extension* zu berücksichtigen. Dieses Prinzip betrifft nämlich nicht – so wie das Kompositionalitätsprinzip des Referenzobjekts – eine Referenzrelation, sondern eine Extensionsrelation. Seien A_1 und A_2 Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und seien S_1 und S_2 Sätze von $\mathscr{L}$:

(E) Für alle Sätze S_1, S_2 und alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$Erg(S_2, S_1(A_1//A_2))$ & A_1 und A_2 haben dieselbe Extension $\Rightarrow$
S_1 und S_2 haben dieselbe Extension

Das Kompositionalitätsprinzip der Extension wird hier somit als *Substitutionsthese* aufgefaßt. Die folgende *Funktionalitätsthese* ist mit der Substitutionsthese (E) äquivalent: Die Entität, welche ein Satz als Extension hat, d.h. die Extension eines Satzes, ist eine Funktion der Extensionen seiner Teilausdrücke und der syntaktischen Regeln, denen gemäß diese Teilausdrücke zusammengesetzt werden.

Wie wir gesehen haben, benötigt man zur Formulierung der beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips (als Substitutionsthese) nicht nur die Substitutionsrelation, sondern auch zwei weitere Relationen. Bei diesen beiden Relationen handelt es sich um die Relation "x_1 bezeichnet dasselbe wie x_2" und um die Relation "x_1 hat dieselbe Extension wie x_2". Die erste dieser beiden Relationen nennt man die 'Relation der Koreferenzialität', die zweite die 'Relation der Koextensionalität'. Ich werde im ersten Teil der vorliegenden Arbeit diese beiden Relationen definieren, um sie so zur weiteren Präzisierung der beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips einsetzen zu können. Bei beiden Relationen handelt es sich übrigens um Äquivalenzrelationen, d.h. um reflexive, symmetrische und transitive Relationen.

[34] Vgl. Carnap ^{2}1956, S.iii. Für ein mehr zeitgenössisches Beispiel zur Unterscheidung einer Referenzrelation von einer Extensionsrelation vgl. Føllesdal 1968. Føllesdal definiert hier seine Referenzrelation nur für die singulären Ausdrücke einer Sprache $\mathscr{L}$ und beschränkt seine Extensionsrelation auf die n-stelligen Prädikate und Sätze von $\mathscr{L}$.

I. Zwei Arten des Kompositionalitätsprinzips

In den zwei Kapiteln des ersten Teils werden die beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips weiter präzisiert und auf ihre Ähnlichkeiten und Unterschiede hin untersucht. Es werden weiters im ersten Kapitel die beiden referenztheoretischen Extensionalitätsbegriffe voneinander unterschieden und die Frage von Frege nach der Art der Referenzobjekte von Sätzen untersucht. Im zweiten Kapitel werden auch die beiden extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffe behandelt und weiters die Frage von Carnap nach der Art der Extensionen von Sätzen erörtert.

Es folgen zunächst einmal einige Vorbemerkungen. Es hat sich im Laufe der Entwicklung der modernen Logik und Semantik eine *Standardtechnik* für den Aufbau und die Interpretation einer Sprache herausgebildet, welche hauptsächlich auf Carnap zurückgeht. Wir werden in der vorliegenden Arbeit – dieser Tradition folgend – nur Sprachen betrachten, die gemäß dieser Standardtechnik aufgebaut und interpretiert sind. Deshalb wollen wir sie im folgenden kurz beschreiben. So unterscheidet Carnap in *Introduction to Semantics* – im Gegensatz zu Bertrand Russell und Gottlob Frege – systematisch zwischen der Syntax und der Semantik einer Sprache $\mathscr{L}$. Gemäß dieser Standardtechnik gibt man zunächst die Syntax von $\mathscr{L}$ in zwei Schritten an: Man legt nämlich in einem ersten Schritt das Alphabet von $\mathscr{L}$ fest, wodurch bestimmt ist, was die Zeichen von $\mathscr{L}$ sind. Ein solches Zeichen wird dabei als einfach (d.h. als nicht-zusammengesetzt) sowie als verschieden von den anderen Zeichen von $\mathscr{L}$ verstanden. Es wird dann weiters – meist durch eine Aufzählung – angegeben, was die deskriptiven und was die nicht-deskriptiven (d.h. logischen) Zeichen von $\mathscr{L}$ sind. Die Ausdrücke von $\mathscr{L}$ sind dann alle Zeichen von $\mathscr{L}$ sowie alle endlich langen Verkettungen von solchen Zeichen sowie beliebige Aufeinanderfolgen von solchen Zeichen und Zeichenketten. In einem zweiten Schritt legt man mit Hilfe der syntaktischen Regeln (d.s. die Formationsregeln) rekursiv fest, welche Ausdrücke von $\mathscr{L}$ syntaktisch korrekt gebildet (d.h. wohlgeformt) sind. Beispiele für solche wohlgeformten Ausdrücke (im folgenden kurz: 'wfA') von $\mathscr{L}$

sind etwa die singulären Ausdrücke sowie die n-stelligen Prädikate von $\mathscr{L}$ und die daraus gebildeten Sätze von $\mathscr{L}$.

Hat man einmal eine Sprache $\mathscr{L}$ auf diese Weise aufgebaut, dann bleibt da immer noch das Problem ihrer Interpretation. Die bislang uninterpretierte Sprache wird in der Semantik von $\mathscr{L}$ wie folgt interpretiert: Man führt in einem dritten Schritt eine Referenzrelation *Ref* für $\mathscr{L}$ ein. In einem vierten Schritt wird mit Hilfe der semantischen Regeln (d.s. die Interpretationsregeln) die notwendige und hinreichende Wahrheitsbedingung aller Sätze von $\mathscr{L}$ angegeben, indem man eine solche Referenzrelation *Ref* für $\mathscr{L}$ zugrunde legt. Ein derartiger Aufbau und eine derartige Interpretation von $\mathscr{L}$ gipfeln schlußendlich in der Definition eines relativen Wahrheitsbegriffs "S ist wahr relativ zu *Ref*" für alle Sätze S von $\mathscr{L}$. Dieser relative Wahrheitsbegriff läßt sich der Definition von weiteren semantischen Begriffen – wie z.B. des Folgerungsbegriffs – zugrunde legen. Er dient somit als Fundament für das ganze Gebäude der Semantik, welches darüber errichtet wird. Doch dieses Fundament stützt sich seinerseits auf dem Referenzbegriff, weil hier nämlich das Wahrsein durch das Bezeichnen definiert wird.

Bemerkenswert an einer gemäß dieser Standardtechnik aufgebauten und interpretierten Sprache $\mathscr{L}$ ist, daß man die Bedeutungen aller wfA von $\mathscr{L}$ in einer endlich langen Zeit erlernen kann. Ein kompetenter Benützer von $\mathscr{L}$ kann nämlich die Bedeutung eines beliebigen wfA von $\mathscr{L}$ verstehen, ohne sie zuvor gekannt, d.h. gesehen oder gehört zu haben. Üblicherweise wird diese endliche Erlernbarkeit einer Sprache mit der *Kompositionalität der Bedeutung* wie folgt erklärt: Angenommen man versteht die Bedeutungen einer endlichen Anzahl von wfA von $\mathscr{L}$. Angenommen weiters, man kennt die syntaktischen Regeln, wie aus solchen endlich vielen wfA von $\mathscr{L}$ potentiell unendlich viele weitere wfA von $\mathscr{L}$ gebildet werden können. Und angenommen schließlich, man kennt die zu jeder solchen syntaktischen Regel zugehörige semantische Regel. Man hat dann damit alle nötigen Ingredienzen in Händen, um die Bedeutungen von potentiell unendlich vielen weiteren wfA von $\mathscr{L}$ zu verstehen. Eine Sprache wie $\mathscr{L}$ ist deshalb in einer endlich langen Zeit erlernbar.

Viele Philosophen haben also diese Eigenschaft der endlichen Erlernbarkeit von $\mathscr{L}$ mit der Kompositionalität der Bedeutung zu erklären versucht. Demnach ist die Bedeutung eines zusammengesetzten wfA von $\mathscr{L}$ nur von seiner Form und den Bedeutungen seiner Teilausdrücke abhängig. Wie kann aber das hier angesprochene Abhängigkeitsverhältnis präzisiert werden? In der modernen Sprachphilosophie sind dazu mindestens zwei unterschiedliche Wege eingeschlagen worden. So kann das *Kompositionalitätsprinzip als Substitutionsthese* wie folgt präzisiert werden:

(B) Für alle Kontexte C_1, C_2 und alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ & A_1 und A_2 bedeuten dasselbe $\Rightarrow$
C_1 und C_2 bedeuten dasselbe

Das Kompositionalitätsprinzip kann aber auch noch auf mindestens eine andere Weise aufgefaßt werden, und zwar als *Funktionalitätsthese*, wie im folgenden dargestellt: Die Bedeutung eines zusammengesetzten wohlgeformten Ausdrucks C von $\mathscr{L}$ ist eine Funktion der Bedeutungen seiner Teilausdrücke A und der syntaktischen Regeln, denen gemäß diese Teilausdrücke zusammengesetzt werden.[1]

Es ist dabei allerdings – von Autor zu Autor abweichend – von völlig unterschiedlichen Bedeutungsbegriffen die Rede. Für Frege etwa gehört zur "vollständigen Bedeutung" eines wfA dessen Sinn ebenso wie dessen Färbung und Kraft.[2] Je nachdem, was mit 'bedeuten' bzw. mit 'Bedeutung' gemeint ist, entstehen aus (B) unterschiedliche Kompositionalitätsprinzipien: Versteht man etwa mit 'bedeuten' 'bezeichnen', so ergibt sich aus (B) das Kompositionalitätsprinzip des Referenzobjekts (R) (im folgenden kurz: 'R-Kompositionalitätsprinzip'); meint man aber damit 'hat als Extension', so geht aus (B) das Kompositionalitätsprinzip der Extension (E) hervor (im folgenden kurz: 'E-Kompositionalitätsprinzip'). In der Einleitung wurde

[1] Vgl. Partee/Meulen/Wall ^{2}1993, S.316.
[2] Vgl. Dummett ^{2}1981, S.83 f.

die Formulierung dieser beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips noch auf solche Kontexte C_1 und C_2 eingeschränkt, die Sätze sind. Diese Einschränkung sei jetzt aufgehoben.[3]

Der Bedeutungsbegriff von Carnap ist in seinem Diktum festgehalten: Die Bedeutung eines Satzes S von $\mathscr{L}$ zu verstehen, heißt, die notwendige und hinreichende Wahrheitsbedingung von S zu kennen.[4] Für diese Auffassungsweise von "Bedeutung" ist also die Kenntnis der Wahrheitsbedingung von S grundlegend für das Verständnis seiner Bedeutung. Die Kenntnis der Wahrheitsbedingung von S setzt aber voraus, daß man diese angeben kann; kann man sie nicht angeben, dann ist auch fraglich, ob man sie kennt. Für Carnap ist nun – wie gesagt – die Angabe der notwendigen und hinreichenden Wahrheitsbedingung eines Satzes S von $\mathscr{L}$ von der Einführung einer Referenzrelation für $\mathscr{L}$ abhängig.

Bei der Einführung einer Referenzrelation *Ref* für eine gemäß der Standardtechnik aufgebaute Sprache $\mathscr{L}$ hat man insbesonders die folgenden beiden Probleme bezüglich der beiden Relata einer solchen Relation zu lösen:

(i) Welche Ausdrücke von $\mathscr{L}$ können überhaupt etwas bezeichnen, d.h. was sind die referenzfähigen Ausdrücke von $\mathscr{L}$?

(ii) Von welcher Art sind die von den referenzfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten (d.h. deren Referenzobjekte)?

Die Einführung einer Referenzrelation *Ref* für eine solche Sprache $\mathscr{L}$ verlangt Antworten auf beide Probleme. Wir werden im folgenden je einen Antwortversuch darauf skizzieren.

ad i) Was sind die referenzfähigen Ausdrücke von $\mathscr{L}$? Einen Ausdruck von $\mathscr{L}$, der nicht wohlgeformt ist, wird man sicherlich nicht

[3] Bei (B) ist demnach der Kontextbegriff so weit gefaßt, daß darunter nicht nur Sätze gemeint sein können, sondern etwa auch komplexe singuläre Ausdrücke wie z.B. 'diejenige Person, welche *Waverley* geschrieben hat' oder komplexe n-stellige Prädikate wie etwa 'ist eine Person, welche *Waverley* geschrieben hat' oder 'sind zwei Dinge derart, daß das eine höher als das andere ist' etc.

[4] Vgl. Carnap 1942, S.22.

zu den referenzfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$ rechnen können. Wenn etwa $\mathscr{L}^{\mathrm{D}}$ ein gemäß der Standardtechnik aus dem lateinischen Alphabet aufgebautes Fragment des Deutschen ist, wird man den Ausdruck 'aCbx' von $\mathscr{L}^{\mathrm{D}}$ kaum als einen referenzfähigen Ausdruck von $\mathscr{L}^{\mathrm{D}}$ akzeptieren können, und zwar weil er nicht wohlgeformt ist; es handelt sich hierbei nämlich um eine völlig sinnlose Verkettung von Zeichen von $\mathscr{L}^{\mathrm{D}}$. Man wird also die Wohlgeformtheit als eine notwendige Bedingung für die Referenzfähigkeit erachten müssen. Die Wohlgeformtheit allein ist aber nicht hinreichend für die Referenzfähigkeit. Es fehlt eine weitere Bedingung wie etwa eine gewisse Eigenständigkeit: Eigennamen wie z.B.: 'Wien', 'Hermann' etc. haben eine solche Eigenständigkeit, d.h. Eigennamen können – für sich alleine stehend – etwas bezeichnen. Dagegen haben andere wohlgeformte Ausdrücke von $\mathscr{L}^{\mathrm{D}}$ kaum eine solche Eigenständigkeit: So macht es bei den Vorwörtern von $\mathscr{L}^{\mathrm{D}}$ wie etwa: 'zwischen', 'von' etc. oder auch bei den Bindewörtern von $\mathscr{L}^{\mathrm{D}}$ wie z.B.: 'und', 'oder' etc. kaum einen Sinn zu sagen, daß sie – für sich alleine stehend – etwas bezeichnen können. Solche Vor- und Bindewörter können wohl nur im Zusammenhang mit anderen Ausdrücken von $\mathscr{L}^{\mathrm{D}}$, welche diese Eigenständigkeit haben, etwas bezeichnen – wie etwa in den folgenden Kontexten: 'die Hauptstadt von Österreich' oder 'Hermann und Thomas sind Olympiasieger'. Man wird also eine gewisse Eigenständigkeit als eine weitere notwendige Bedingung für die Referenzfähigkeit ansehen müssen. Es ist allerdings keine einfache Aufgabe, zu bestimmen, was die Referenzfähigkeit eines Ausdrucks von $\mathscr{L}^{\mathrm{D}}$ ausmacht, es läßt sich wohl aber folgendes mit gutem Grund sagen: Wenn ein Ausdruck von $\mathscr{L}^{\mathrm{D}}$ referenzfähig ist, dann ist er wohlgeformt und hat eine gewisse Eigenständigkeit. Ich lasse an dieser Stelle aber offen, ob die notwendigen Bedingungen der Wohlgeformtheit und der Eigenständigkeit, zusammen genommen, auch hinreichend für die Referenzfähigkeit sind. Stattdessen postuliere ich für die vorliegende Arbeit, daß die singulären Ausdrücke sowie die n-stelligen Prädikate und Sätze einer gemäß der Standardtechnik aufgebauten Sprache $\mathscr{L}$ referenzfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$ sind.

ad ii) Von welcher Art sind die von den referenzfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten? Dieses zweite Problem wird an dieser Stelle nur im Zusammenhang mit den Sätzen von $\mathscr{L}$ beispielhaft erörtert (die betreffenden Bemerkungen lassen sich aber leicht auch auf die anderen Arten von Ausdrücken umlegen). Angenommen die Sätze von $\mathscr{L}$ sind solche referenzfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und angenommen weiters, S_1 ist ein Satz von $\mathscr{L}$, der etwas bezeichnet (aber es steht nicht zweifelsfrei fest, welche Entität das ist). Von welcher Art ist dann die von S_1 bezeichnete Entität? Frege läßt sich bei seiner Suche danach vom R-Kompositionalitätsprinzip leiten. Man kann – geleitet von (R) – wie folgt vorgehen: Nehme probeweise irgendeine Entität als die von S_1 bezeichnete Entität an (z.B. einen Wahrheitswert oder einen Sachverhalt etc.). Betrachte weiters irgendeinen referenzfähigen Teilausdruck A_1 von S_1 sowie alle Ausdrücke von $\mathscr{L}$, die dasselbe wie A_1 bezeichnen. Ersetze nun der Reihe nach eines oder mehrere Vorkommnisse von A_1 in S_1 durch je ein Vorkommnis von einem dieser Ausdrücke, die dasselbe wie A_1 bezeichnen. Wiederhole nun auch diese Prozedur der Reihe nach mit den anderen Ausdrücken, die dasselbe wie A_1 bezeichnen. Betrachte weiters auch alle anderen referenzfähigen Ausdrücke von S_1 und ersetze auch diese – wie eben beschrieben – durch andere Ausdrücke von $\mathscr{L}$, welche aber dasselbe bezeichnen. Sehe schließlich nach, ob alle betreffenden Ersetzungsergebnisse die zuvor probeweise angenommene Entität bezeichnen. Falls ja, dann kommt diese Entität als die von S_1 bezeichnete Entität in Frage: Denn es bezeichnet dann – wie von (R) verlangt – S_1 dasselbe wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse. Für Frege kommt somit aufgrund von (R) als die von S_1 bezeichnete Entität nur eine Entität in Frage, welche unter der teilweisen Substitution von seinen Teilausdrücken durch Ausdrücke, die dasselbe bezeichnen, erhalten bleibt. Das R-Kompositionalitätsprinzip spielt hier also die Rolle eines Leitprinzips bei der Suche nach der Art der Referenzobjekte von Sätzen. Wir werden diese Rolle des R-Kompositionalitätsprinzips im letzten Abschnitt des ersten Kapitels noch näher untersuchen.

Im folgenden Kapitel gilt neben der Untersuchung der Frage nach der Art der Referenzobjekte von Sätzen unsere besondere Aufmerksamkeit auch einer damit zusammenhängenden Fragestellung, und zwar der folgenden Fragestellung: Ist die Annahme des R-Kompositionalitätsprinzips alleine hinreichend, um die Art der von Sätzen bezeichneten Entitäten eindeutig zu determinieren? Wir werden sehen, daß ganz unterschiedliche Semantiken für sich beanspruchen können, mit dem R-Kompositionalitätsprinzip im Einklang zu stehen (d.h. eine kompositionale Semantik zu sein).

Es folgen noch, die Vorbemerkungen abschließend, einige begriffliche Erklärungen. So ist von der Referenzfähigkeit eines Ausdrucks – d.h. seiner Eigenschaft, etwas bezeichnen zu können – sein Referentiellsein – d.h. seine Eigenschaft, tatsächlich etwas zu bezeichnen – zu unterscheiden: Man zählt die Eigennamen einer natürlichen Sprache zu den Ausdrücken, die etwas bezeichnen können, die also referenzfähig sind; aber nicht jeder Eigenname, von dem man ernsthaft glaubt, daß er etwas bezeichnet, bezeichnet auch wirklich etwas. Beispiele für solche Eigennamen gibt es in der Wissenschaftsgeschichte viele – wie z.B.: 'Vulkan' oder 'der Planet, der die Störungen in der Umlaufbahn des Merkur verursacht'. Es haben sich somit manche Eigennamen, von denen man ernsthaft geglaubt hat, daß sie referentiell sind, als nicht-referentiell herausgestellt. Trotz solcher Fälle sind Eigennamen sicherlich als Prototyp für referenzfähige Ausdrücke anzusehen, d.h. als Prototyp für Ausdrücke anzusehen, welche etwas bezeichnen können, und bei denen es Sinn macht zu sagen, daß sie etwas bezeichnen. Auf den Punkt gebracht, gilt also, daß jeder referentielle Ausdruck ein referenzfähiger sein muß, aber nicht jeder referenzfähige Ausdruck muß auch unbedingt ein referentieller sein.

Was sind nun die Eigennamen einer natürlichen Sprache? Karel Lambert versteht – so wie Quine – unter Eigennamen sprachliche Ausdrücke, die vorgeben (*purport*), genau ein Einzelding zu bezeichnen.[5] Die Relation zwischen einem solchen Eigennamen und dem

[5] Vgl. Lambert 1997, S.33. Da es sich bei Eigennamen (einer natürlichen Sprache) ebenso wie bei singulären Termen (einer formalen Sprache) um singuläre

Einzelding, welches er benennt, d.h. die Relation zwischen einem Eigennamen und seinem Träger, ist die Namensrelation. Für Frege ist die Namensrelation der Prototyp einer Referenzrelation.[6]

Zusammenfassend läßt sich also folgendes sagen: Die Menge aller Ausdrücke einer Sprache $\mathscr{L}$, die gemäß der skizzierten Standardtechnik aufgebaut ist, ist im allgemeinen eine echte Obermenge der Menge aller wohlgeformten Ausdrücke von $\mathscr{L}$; letztere Menge wiederum ist eine Obermenge der Menge aller referenzfähigen Ausdrücke von $\mathscr{L}$, die ihrerseits eine Obermenge der Menge aller referentiellen Ausdrücke von $\mathscr{L}$ ist. Wie wir gesehen haben, stößt man bei natürlichen Sprachen auf referenzfähige Ausdrücke, welche nicht-referentiell sind. Dies ist v.a. für eine Wissenschaftssprache störend. Frege fordert deshalb von einer solchen Wissenschaftssprache, daß jeder referenzfähige Ausdruck referentiell ist. Da diese Forderung die philosophische Analyse erleichtert, wollen wir sie im folgenden auch an die von uns untersuchten Sprachen stellen: Es sind also die Syntax und Semantik einer Sprache $\mathscr{L}$ so zu konstruieren, daß alle referenzfähigen Ausdrücke von $\mathscr{L}$ genau eine Entität bezeichnen.

Ausdrücke handelt, kann man Lambert hier – Pars pro toto – wie folgt verstehen: Ein singulärer Ausdruck ist ein sprachlicher Ausdruck, der vorgibt, genau ein Einzelding zu bezeichnen. Allerdings ist ein singulärer Ausdruck, welcher tatsächlich etwas bezeichnet, wohl nicht ein Ausdruck, der sich bloß den Anschein gibt, etwas zu bezeichnen, es in Wirklichkeit aber gar nicht tut. Er ist vielmehr ein Ausdruck, welcher – laut Annahme – tatsächlich etwas bezeichnet. Bei den referentiellen singulären Ausdrücken hat die Vorgeben-Redeweise ungerechtfertigterweise etwas Abschwächendes an sich. Wir schlagen deshalb folgende Definition vor: Ein singulärer Ausdruck ist ein sprachlicher Ausdruck, der dazu dient, genau ein Einzelding zu bezeichnen. Diese Redeweise hat den Vorzug, daß sie bei den referentiellen singulären Ausdrücken nicht abschwächend wirkt, und bei den nicht-referentiellen singulären Ausdrücken kann man immer noch sagen: Na ja, manchmal verfehlt halt auch ein singulärer Ausdruck seinen Zweck, wofür er eigentlich gedacht ist, und in einem solchen Fall bezeichnet er dann halt nichts.

[6] Vgl. Dummett ^{2}1981, S.406.

1 Das R-Kompositionalitätsprinzip

1.1 Referenztheoretische Begriffe

In diesem Abschnitt werden u.a. jene referenztheoretische Begriffe definiert, welche man zur weiteren Präzisierung des R-Kompositionalitätsprinzips benötigt, d.s. der Begriff einer Referenzfunktion und derjenige der Koreferenzialität. Bislang wurde nämlich nur der im R-Kompositionalitätsprinzip vorausgesetzte Substitutionsbegriff geklärt. Es wurde jedoch nur wenig darüber gesagt, wie das Bezeichnen und v.a. das Dasselbe-Bezeichnen zu verstehen sind. Dies soll im folgenden geschehen.

Der *referenztheoretische Grundbegriff* ist dabei der (mindestens) zweistellige Begriff des Bezeichnens: "x bezeichnet y", wobei 'x' einen referenzfähigen Ausdruck vertritt und 'y' eine (im allgemeinen: außersprachliche) Entität. Man kann diesen Begriff des Bezeichnens als eine Relation oder aber auch als eine Funktion auffassen: Man faßt das Bezeichnen als eine Relation auf, wenn man annimmt, daß ein referenzfähiger Ausdruck mindestens eine oder sogar mehrere Entitäten bezeichnet; man versteht dagegen das Bezeichnen als eine Funktion, wenn man postuliert, daß jeder referenzfähige Ausdruck nicht nur mindestens eine, sondern auch höchstens eine, d.h. genau eine Entität bezeichnet. Sowohl der Begriff einer Relation als auch derjenige einer Funktion sind Begriffe, für die die Mengenlehre präzise Definitionen bereitstellt.[7] Im folgenden werden – in Anlehnung an diese mengentheoretischen Begriffe – die beiden eben angesprochenen Auffassungen des Bezeichnens näher vorgestellt. Davon ausgehend, können dann weitere referenztheoretische Begriffe wie z.B. der Begriff der Koreferenzialität definiert werden.

a. Bezeichnen als eine Relation

Ich definiere im folgenden in Anlehnung an den mengentheoretischen Relationsbegriff in einer allgemeinen Weise den Begriff einer Refe-

[7] Vgl. etwa Dalen/Doets/Swart 1978, S.37 und S.58.

renzrelation für eine Sprache $\mathscr{L}$. Demnach wird eine Referenzrelation *Ref* für $\mathscr{L}$ als eine Menge *Ref* von geordneten Paaren $\langle x, y\rangle$ aufgefaßt, deren erstes Element x ein referenzfähiger Ausdruck von $\mathscr{L}$ und deren zweites Element y eine referenzobjektfähige Entität ist (Eine referenzobjektfähige Entität ist dabei eine Entität, welche als Referenzobjekt eines beliebigen referenzfähigen Ausdrucks in Frage kommt). Wenn x in der Relation *Ref*, d.h. in der Relation des Bezeichnens zu y steht, dann wird damit gesagt, daß x y bezeichnet. Ich kürze im folgenden 'x ist ein referenzfähiger Ausdruck von $\mathscr{L}$' durch '$RfA(x, \mathscr{L})$' ab sowie 'y ist eine referenzobjektfähige Entität' durch '$ROfE(y)$'.

(D1) Sei $\mathscr{L}$ eine gemäß der Standardtechnik aufgebaute Sprache. *Ref* ist eine (zweistellige) Referenzrelation mit den Relatamengen X und Y für $\mathscr{L}$:⇔
$X \subseteq \{x \mid RfA(x, \mathscr{L})\}$ & $Y \subseteq \{y \mid ROfE(y)\}$ & $Ref \subseteq X \times Y$[8]

Analog zu der für Relationen im allgemeinen gebräuchlichen Notation können wir statt '$\langle x, y\rangle \in Ref$' auch einfach '$Ref(x, y)$' schreiben.

Es wird hier also das Bezeichnen als eine Relation aufgefaßt: Der Ausdruck 'x steht in der Relation *Ref* zu y' kann nämlich auch als 'x steht in der Relation des Bezeichnens zu y' verstanden werden bzw. – noch einfacher gesagt – als 'x bezeichnet y'. Man kann nun mittels der Mengen X und Y ganz verschiedene Teilmengen *Ref* des kartesischen Produkts von X und Y, d.h. ganz verschiedene Referenzrelationen *Ref* für $\mathscr{L}$ bilden. Gemäß dieser mengentheoretischen Herangehensweise an den Begriff des Bezeichnens ist somit das Symbol '*Ref*' als eine Variable für solche Referenzrelationen aufzufassen. Denn in der Definition (D1) ist nicht von einer bestimmten Teilmenge des kartesischen Produkts von X und Y die Rede, sondern von irgendeiner solchen Teilmenge.

[8] $X \times Y$ ist das kartesische Produkt von X und Y, welches wie folgt definiert wird: $X \times Y := \{\langle x, y\rangle \mid x \in X \text{ \& } y \in Y\}$.

Es läßt sich weiters der Definitionsbereich (bzw. *domain*) sowie der Wertebereich (bzw. *range*) einer Referenzrelation *Ref* wie folgt angeben:

(D2) Sei *Ref* eine (zweistellige) Referenzrelation mit den Relatamengen X und Y für $\mathscr{L}$.
a. $Dom(Ref) := \{x \mid (\exists y)(Ref(x,y))\}$
b. $Ran(Ref) := \{y \mid (\exists x)(Ref(x,y))\}$

Während zum Definitionsbereich einer Referenzrelation *Ref* somit alle Elemente $x \in X$ gehören, zu denen es mindestens ein $y \in Y$ gibt, so daß x in der Relation *Ref* zu y steht, gehören zum Wertebereich einer Referenzrelation *Ref* alle Elemente $y \in Y$, zu denen es mindestens ein $x \in X$ gibt, so daß x in der Relation *Ref* zu y steht.

b. Bezeichnen als eine Funktion

Ich definiere im folgenden in Anlehnung an den mengentheoretischen Funktionsbegriff auf allgemeine Weise auch den Begriff einer *Referenzfunktion* für eine Sprache $\mathscr{L}$. Eine Referenzfunktion *ref* für $\mathscr{L}$ wird demnach als eine linkstotale und rechtseindeutige Referenzrelation mit den Relatamengen X und Y definiert:

(D3) Sei $\mathscr{L}$ eine gemäß der Standardtechnik aufgebaute Sprache.
ref ist eine Referenzfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$:⇔
ref ist eine (zweistellige) Referenzrelation mit den Relatamengen X und Y für $\mathscr{L}$ &
$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists! y)(y \in Y \;\&\; \langle x,y\rangle \in ref))$[9]

Eine Referenzfunktion *ref* von X in Y für $\mathscr{L}$ ist somit eine Menge *ref* von geordneten Paaren $\langle x,y\rangle$, mit $x \in X$ und $y \in Y$, wobei es zu jedem referenzfähigen Ausdruck $x \in X$ genau eine referenzobjektfähige Entität $y \in Y$ gibt, so daß gilt: x bezeichnet y.

[9] Der Anzahlausdruck 'es gibt genau ein' (d.h. 'es gibt mindestens ein und höchstens ein') ist hier durch '∃!' symbolisiert worden.

Sei *ref* eine Referenzfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$. Es stehe dann '$ref(x)$' für das einzige $y \in Y$, so daß gilt: $\langle x, y \rangle \in ref$ (für alle $x \in X$). Es gilt somit für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$: $y = ref(x) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in ref$.

Es wird hier also das Bezeichnen als eine Funktion aufgefaßt: Der Ausdruck 'x steht in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ref* zu y' kann nämlich auch als 'x steht in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation des Bezeichnens zu y' verstanden werden bzw. – noch einfacher gesagt – als 'x bezeichnet (linkstotal und rechtseindeutig) y'. Analog zu vorhin kann man mittels der Mengen X und Y ganz verschiedene solche Funktionen *ref* bilden. Es ist somit auch das Symbol '*ref*' als eine Variable für solche Referenzfunktionen aufzufassen.

Es folgt ein Beispiel für derartige Referenzfunktionen: Angenommen jeder referenzfähige Ausdruck von $\mathscr{L}$ bezeichnet genau eine Entität. Welche Referenzfunktionen von allen überhaupt möglichen Referenzfunktionen für $\mathscr{L}$ betrachtet man dann? Man betrachtet all jene und nur jene Referenzfunktionen *ref*, für die gilt: $Dom(ref) = \{x \mid RfA(x, \mathscr{L})\}$.

Der *Begriff der Koreferenzialität* kann nun, indem man denjenigen einer Referenzfunktion zugrunde legt, wie folgt definiert werden (Dabei wird der Ausdruck 'x_1 ist relativ zu *ref* koreferentiell mit x_2' durch '$x_1 \equiv_{ref} x_2$' symbolisiert):

(D4) Seien x_1 und x_2 referenzfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und sei weiters *ref* eine Referenzfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$.
$x_1 \equiv_{ref} x_2 :\Leftrightarrow ref(x_1) = ref(x_2)$

Die so definierte Relation der Koreferenzialität erweist sich somit als eine Äquivalenzrelation, und zwar weil die Identitätsrelation eine solche Äquivalenzrelation ist. Da das Bezeichnen hier als eine Funktion aufgefaßt wird, kann der Ausdruck 'x_1 ist relativ zu *ref* koreferentiell mit x_2' als 'x_1 steht zu derselben Entität in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ref* wie x_2' verstanden werden. Dieser letzte Ausdruck wiederum kann auch als 'x_1 steht zu derselben Entität in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation des Bezeichnens wie x_2' verstanden werden bzw. – noch einfacher gesagt – auch als 'x_1 bezeichnet (linkstotal und rechtseindeutig) dasselbe wie x_2'.

Angenommen die singulären Ausdrücke [symbolisch: 'SgA'], n-stelligen Prädikate [symbolisch: '$Prä$'] und Sätze [symbolisch: '$Satz$'] von $\mathscr{L}$ gehören zu den referenzfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$. Es ergeben sich dann die folgenden Anwendungsfälle von (D4): Seien $s_1, s_2 \in \{x \,|\, SgA\,(x, \mathscr{L})\}$, seien weiters $F_1, F_2 \in \{x \,|\, Prä\,(x, \mathscr{L})\}$ und $S_1, S_2 \in \{x \,|\, Satz\,(x, \mathscr{L})\}$:

(1) $s_1 \equiv_{ref} s_2 \Leftrightarrow ref(s_1) = ref(s_2)$

(2) $F_1 \equiv_{ref} F_2 \Leftrightarrow ref(F_1) = ref(F_2)$

(3) $S_1 \equiv_{ref} S_2 \Leftrightarrow ref(S_1) = ref(S_2)$

Der allgemeine Anwendungsfall von (D4) lautet somit: Seien $A_1, A_2 \in \{x \,|\, RfA(x, \mathscr{L})\}$:

(4) $A_1 \equiv_{ref} A_2 \Leftrightarrow ref(A_1) = ref(A_2)$

D.h. ein referenzfähiger Ausdruck A_1 ist relativ zu ref koreferentiell mit einem referenzfähigen Ausdruck A_2 g.d.w. das Referenzobjekt von A_1 relativ zu ref identisch mit dem Referenzobjekt von A_2 relativ zu ref ist.[10]

c. Zusammenstellung der Notationen

Ich stelle hier die in den letzten beiden Abschnitten 1.1.a–b eingeführten Notationen übersichtlich zusammen. Auf der linken Seite der nachfolgenden Tabelle steht jener umgangsprachliche Ausdruck, welcher durch den auf der rechten Seite stehenden symbolisiert wird. Bei jenen Einträgen, wo man links mehr als nur einen umgangssprachlichen Ausdruck vorfindet, soll es sich um synonyme Formulierungen

[10] D.h. die zu A_1 in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation ref stehende Entität ist identisch mit der zu A_2 in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation ref stehenden Entität; bzw. die von A_1 (linkstotal und rechtseindeutig) bezeichnete Entität ist identisch mit der von A_2 (linkstotal und rechtseindeutig) bezeichneten Entität.

handeln, welche allesamt durch den rechts stehenden symbolisiert werden. Diese synonymen Formulierungen klingen, in absteigender Reihenfolge gelesen, immer einfacher. Sie werden schließlich auf eine Wortgruppe zurückgeführt, welche das Wort 'bezeichnen' enthält. Die Bezeichnen-Redeweise wurde in der Einleitung durchgängig verwendet. Sie verhilft zu einem besseren intuitiven Verständnis der in der vorliegenden Arbeit verwendeten "offiziellen" referenztheoretischen Terminologie (also von Fachtermini wie z.B.: 'koreferentiell', 'Referenzobjekt' etc.).

Umgangssprachlicher Ausdruck	*Symbolisierung*
x ist ein referenzfähiger Ausdruck von $\mathscr{L}$	$RfA(x, \mathscr{L})$
x ist ein singulärer Ausdruck von $\mathscr{L}$	$SgA(x, \mathscr{L})$
x ist ein n-stelliges Prädikat von $\mathscr{L}$	$Prä(x, \mathscr{L})$
x ist ein Satz von $\mathscr{L}$	$Satz(x, \mathscr{L})$
y ist eine referenzobjektfähige Entität	$ROfE(y)$
x steht in der Relation Ref zu y/ x steht in der Relation des Bezeichnens zu y/ x bezeichnet y	$Ref(x, y)$
der Definitionsbereich einer Referenzrelation Ref	$Dom(Ref)$
der Wertebereich einer Referenzrelation Ref	$Ran(Ref)$
x steht in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation ref zu y/ x steht in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation des Bezeichnens zu y/ x bezeichnet (linkstotal und rechtseindeutig) y	$ref(x, y)$
das Referenzobjekt von x relativ zu ref/ die zu x in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation ref stehende Entität/ die von x (linkstotal und rechtseindeutig) bezeichnete Entität	$ref(x)$

y ist das Referenzobjekt von x relativ zu *ref*/ y ist die zu x in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ref* stehende Entität/ y ist die von x (linkstotal und rechtseindeutig) bezeichnete Entität	$y = ref(x)$
x_1 ist relativ zu *ref* koreferentiell mit x_2/ x_1 steht zu derselben Entität in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ref* wie x_2/ x_1 steht zu derselben Entität in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation des Bezeichnens wie x_2/ x_1 bezeichnet (linkstotal und rechtseindeutig) dieselbe Entität wie x_2/ x_1 bezeichnet (linkstotal und rechtseindeutig) dasselbe wie x_2	$x_1 \equiv_{ref} x_2$

1.2 Referenztheoretische Prinzipien

Ganz allgemein gesagt, ist ein referenztheoretisches Prinzip ein Prinzip, welches eine Referenzrelation *Ref* für eine gemäß der Standardtechnik aufgebaute Sprache $\mathscr{L}$ betrifft. Da man das Bezeichnen als eine Relation auffassen kann, wird durch ein solches Prinzip der jeweilige Begriff des Bezeichnens (d.h. der jeweilige Referenzbegriff) charakterisiert. Demnach unterscheiden sich zwei unterschiedliche Referenzbegriffe in den jeweils für sie vorausgesetzten Prinzipien voneinander. Im folgenden wollen wir das Bezeichnen als eine linkstotale und rechtseindeutige Relation, d.h. als eine Funktion verstehen. Es werden folglich nur Prinzipien betrachtet, welche eine Referenzfunktion *ref* für $\mathscr{L}$ betreffen.[11]

Ein derartiges referenztheoretisches Prinzip kann nun, aus der Perspektive der Sätze betrachtet, auf zweierlei Weise formuliert werden,

[11] Wie man ganz allgemein Prinzipien bzw. Axiome philosophisch deuten kann, wurde in (Leeb 2002) untersucht.

und zwar neutral wie im folgenden in (i) oder nicht-neutral wie in (ii):

(i) Man läßt darin die Art der von Sätzen bezeichneten Entitäten offen (d.h. man legt darin nicht fest, von welcher Art ihre Referenzobjekte relativ zu *ref* sind).

(ii) Man läßt darin nicht die Art der von Sätzen bezeichneten Entitäten offen (sondern legt dies durch eine zusätzliche Annahme fest).

Auch das R-Kompositionalitätsprinzip kann als Substitutionsthese auf diese beiden unterschiedlichen Weisen formuliert werden. Formuliert man es, wie in (i) beschrieben (d.h. neutral), dann besagt es – aus der Sicht der Sätze – folgendes: In jedem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ ändert die Ersetzung von Ausdrücken, welche dasselbe bezeichnen, die von S_1 bezeichnete Entität insofern nicht, als S_1 und alle betreffenden Ersetzungsergebnisse dasselbe bezeichnen. Kurz gesprochen, besagt es dann, daß in jedem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ *koreferentielle Ausdrücke füreinander unbeschadet des Referenzobjekts* (d.h. *salva referentia*) *substituierbar* sind.

Formuliert man das R-Kompositionalitätsprinzip dagegen wie in (ii) beschrieben (d.h. nicht-neutral), dann legt man durch eine zusätzliche Annahme fest, von welcher Art die von Sätzen bezeichneten Entitäten sind (Man legt z.B. fest, daß es sich hierbei um Wahrheitswerte oder Sachverhalte etc. handelt). Mit dieser Ergänzung versehen, besagt das R-Kompositionalitätsprinzip – aus dem Blickwinkel der Sätze – aber folgendes: In jedem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ ändert die Ersetzung von Ausdrücken, welche dasselbe bezeichnen, den von S_1 bezeichneten Wahrheitswert (Sachverhalt etc.) insofern nicht, als S_1 und alle betreffenden Ersetzungsergebnisse dasselbe bezeichnen. Kurz gesprochen, besagt es dann wegen dieser Festlegung, daß in jedem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ *koreferentielle Ausdrücke füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts* (*Sachverhalts* etc.) *substituierbar* sind.

Es geht hier um folgenden Unterschied: Sei – wie bei (i) – offengelassen, von welcher Art die von Sätzen bezeichneten Entitäten sind. Angenommen weiters, ein Satz S_1, in dem koreferentielle Ausdrücke ersetzt werden, bezeichnet dasselbe wie ein betreffendes Ersetzungsergebnis S_2. Man kann nun daraus, daß S_1 und S_2 dasselbe bezeichnen, nichts darüber schließen, um welche Art von Entität es sich hierbei handelt; sondern was man lediglich aufgrund der Definition (D4) der Koreferenzialität daraus schließen kann, ist, daß S_1 und S_2 dieselbe Entität bezeichnen (deren Art allerdings offen bleibt).

Wenn aber – wie bei (ii) – die Art der von Sätzen bezeichneten Entitäten festgelegt ist, dann kann man aus der Annahme, daß zwei solche Sätze S_1 und S_2 dasselbe bezeichnen, wegen dieser Festlegung sehr wohl schließen, um welche Entität es sich dabei handelt. Hat man etwa festgelegt, daß Sätze Wahrheitswerte bezeichnen, dann bezeichnen S_1 und S_2 aufgrund von (D4) denselben Wahrheitswert. Hat man dagegen festgelegt, daß sie Sachverhalte bezeichnen, dann bezeichnen S_1 und S_2 aufgrund von (D4) denselben Sachverhalt – usw. je nach Festlegung.

Ich formuliere in diesem Abschnitt wichtige referenztheoretische Prinzipien auf beiderlei Weisen. Es folgt zunächst einmal die neutrale Formulierung des R-Kompositionalitätsprinzips.

a. Neutrale Formulierung

Wir haben nun die nötigen Vorbereitungen getroffen, um das R-Kompositionalitätsprinzip in der für die vorliegende Arbeit "offiziellen" Fassung zu präzisieren. Ich mache dazu einige Annahmen von sehr allgemeiner Natur: Zunächst einmal werden im folgenden – wie gesagt – nur solche Sprachen $\mathscr{L}$ betrachtet, die gemäß der Standardtechnik aufgebaut sind. Es wird weiters das Bezeichnen als eine Funktion aufgefaßt. Zudem wird offengelassen, von welcher Art die von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten sind. Man kann etwa geeignete mengentheoretische Entitäten als Stellvertreter für die von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten wählen und damit die Frage nach der Art der von Sätzen bezeichneten Entitäten momentan ausklammern.

Das *Kompositionalitätsprinzip des Referenzobjekts* läßt sich als Substitutionsthese auf die folgende Weise präzisieren (Dabei wird der Ausdruck 'x ist ein Kontext von $\mathscr{L}$' durch '$Kont(x, \mathscr{L})$' symbolisiert): Seien im folgenden der Wertebereich der gebundenen Variablen 'C_1', 'C_2' die Menge $\{x \mid Kont(x, \mathscr{L})\}$ sowie derjenige der gebundenen Variablen 'A_1', 'A_2' die Menge $\{x \mid RfA(x, \mathscr{L})\}$[12]:

(R) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \ \& \ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$

D.h.: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in einem Kontext C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 relativ zu *ref* koreferentiell mit A_2 ist, dann ist C_1 relativ zu *ref* koreferentiell mit C_2 (für alle Kontexte C_1, C_2 sowie referenzfähigen Ausdrücke A_1, A_2 von $\mathscr{L}$ und Referenzfunktionen *ref* für $\mathscr{L}$). Vereinfacht ausgedrückt, besagt dies: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in einem Kontext C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 dasselbe bezeichnet wie A_2, dann bezeichnet C_1 dasselbe wie C_2 (für alle C_1, C_2, A_1, A_2).

(R) besagt aus der Sicht der Sätze, daß in jedem Kontext (hier: Satz) C_1 von $\mathscr{L}$ Ausdrücke, welche dasselbe bezeichnen, füreinander unbeschadet der bezeichneten Entität ersetzbar sind. Kürzer gesprochen, heißt das, daß in jedem Kontext (Satz) C_1 von $\mathscr{L}$ koreferentielle Ausdrücke salva referentia substituierbar sind. Es wird somit in (R) ausgedrückt, daß jeder Kontext (Satz) C_1 von $\mathscr{L}$ eine ganz bestimmte Eigenschaft hat, nämlich die Eigenschaft, daß darin koreferentielle Ausdrücke salva referentia substituierbar sind. Wir werden im folgenden Abschnitt über die referenztheoretischen Extensionalitätsbegriffe noch definieren, was es heißt, daß ein Kontext diese Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken hat.

[12] In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Sorten von metalinguistischen Variablen (d.h. Metavariablen) für die verschiedenen Arten von wohlgeformten Ausdrücken von $\mathscr{L}$ verwendet; hier z.B.: 'C' (samt Indizes) für Kontexte und 'A' (samt Indizes) für referenzfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$.

Je nachdem, welche Arten von Ausdrücken man zu den referenzfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$ zählt, ergeben sich aus (R) eine Reihe von Spezifikationen. Angenommen die singulären Ausdrücke sowie n-stelligen Prädikate und Sätze von $\mathscr{L}$ sind solche referenzfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und angenommen weiters, die Kontexte, in denen ersetzt wird, sind die Sätze von $\mathscr{L}$. In den folgenden Spezifikationen von (R) werden dann zwei Spezifikationsschritte auf einmal vorgenommen: Zum einen werden jene Arten von Ausdrücken angegeben, welche in den Kontexten von $\mathscr{L}$ ersetzt werden (hier also: singuläre Ausdrücke, n-stellige Prädikate und Sätze); zum anderen werden die Sätze von $\mathscr{L}$ als jene Kontexte ausgezeichnet, in denen ersetzt wird (dieser zweite Spezifikationsschritt für die Sätze erfolgt dabei wegen der Frage nach der Art der Referenzobjekte).

Seien im folgenden der Wertebereich der Metavariablen 's_1', 's_2' die Menge $\{x \mid SgA\,(x, \mathscr{L})\}$ sowie derjenige von 'F_1', 'F_2' die Menge $\{x \mid Prä\,(x, \mathscr{L})\}$ und derjenige von 'S_1', 'S_2', 'T_1', 'T_2' die Menge $\{x \mid Satz\,(x, \mathscr{L})\}$:

- Spezifikation von (R) für singuläre Ausdrücke (Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-singulären-Ausdrücken):

$$\text{(RA)}\quad (\forall S_1, S_2, s_1, s_2, ref)\\ (Erg(S_2, S_1(s_1//s_2))\ \&\ s_1 \equiv_{ref} s_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref} S_2)$$

D.h.: Wenn S_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von einem singulären Ausdruck s_1 in einem Satz S_1 durch einen singulären Ausdruck s_2 ist und wenn s_1 relativ zu *ref* koreferentiell mit s_2 ist, dann ist S_1 relativ zu *ref* koreferentiell mit S_2 (für alle S_1, S_2, s_1, s_2, ref). Einfacher gesagt, heißt das: Wenn S_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von einem singulären Ausdruck s_1 in einem Satz S_1 durch einen singulären Ausdruck s_2 ist und wenn s_1 dasselbe bezeichnet wie s_2, dann bezeichnet S_1 dasselbe wie S_2 (für alle S_1, S_2, s_1, s_2).

- Spezifikation von (R) für Prädikate (Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Prädikaten):

  (RP) $(\forall S_1, S_2, F_1, F_2, ref)$
  $(Erg(S_2, S_1(F_1//F_2)) \mathbin{\&} F_1 \equiv_{ref} F_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref} S_2)$

- Spezifikation von (R) für Sätze (Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Sätzen):

  (RS) $(\forall S_1, S_2, T_1, T_2, ref)$
  $(Erg(S_2, S_1(T_1//T_2)) \mathbin{\&} T_1 \equiv_{ref} T_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref} S_2)$

Gemäß diesen Spezifikationen sind in jedem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ koreferentielle singuläre Ausdrücke sowie koreferentielle *n*-stellige Prädikate und Sätze salva referentia substituierbar.

Zusammenfassend kann man sagen, daß in der neutralen Formulierung des R-Kompositionalitätsprinzips offengelassen ist, von welcher Art die von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichnen Entitäten sind. Die mengentheoretischen Stellvertreter für die Referenzobjekte der Sätze von $\mathscr{L}$ werden noch nicht philosophisch interpretiert: Es wird nicht gesagt, ob sie etwa als Wahrheitswerte oder als Sachverhalte etc. zu verstehen sind. Aus der Annahme, daß zwei Sätze dasselbe bezeichnen, folgt deshalb auch mit Hilfe des neutralen R-Kompositionalitätsprinzips nichts darüber, um welche Art von Entität es sich dabei handelt.

Mittels der Methoden der abstrakten Algebra könnte man das neutrale R-Kompositionalitätsprinzip und seine Spezifikationen noch viel weitergehender präzisieren, als es für die Anliegen der vorliegenden Arbeit erforderlich ist. Da dieser algebraische Ansatz aber einen nützlichen Hinweis auf die logische Form der soeben besprochenen neutralen referenztheoretischen Prinzipien liefert, gehe ich im folgenden kurz darauf ein: So kann man – gemäß diesem Ansatz – sowohl die Syntax von $\mathscr{L}$ als auch die Theorie der Referenzobjekte für $\mathscr{L}$ in Form von Algebren, d.h. in Form von funktionalen Strukturen organisieren, welche von gleichem Typ sind. Angenommen es läßt sich zeigen, daß die Menge aller Referenzfunktionen *ref* von X in Y für $\mathscr{L}$

identisch ist mit der Menge aller Homomorphismen h von der syntaktischen Algebra $L = \langle X, f_1, \ldots, f_n \rangle$ in die Algebra der Referenzobjekte $R = \langle Y, g_1, \ldots, g_n \rangle$.[13] Man kann dann das Kongruenzrelationstheorem aus der abstrakten Algebra auf solche Referenzfunktionen *ref* für $\mathscr{L}$ anwenden. Aufgrund dieses Theorems folgt also, daß jeder Homomorphismus *ref* von L in R eine Kongruenzrelation $\equiv_{ref}$ auf L eindeutig bestimmt (und umgekehrt). Die durch den jeweiligen Homomorphismus *ref* eindeutig bestimmte Kongruenzrelation $\equiv_{ref}$ ist hier die Äquivalenzrelation der *Koreferenzialität*, welche wie in (D4) definiert werden kann: $x_1 \equiv_{ref} x_2 :\Leftrightarrow ref(x_1) = ref(x_2)$. Eine Kongruenzrelation ist eine Äquivalenzrelation, welche die *Substitutionseigenschaft* für jede Formationsfunktion f_i aus L hat. Diese Substitutionseigenschaft einer Äquivalenzrelation $\equiv_{ref}$ für eine solche Formationsfunktion f_i läßt sich wie folgt definieren[14]:

(D5) Sei f_i eine m-stellige Formationsfunktion aus einer syntaktischen Algebra $L = \langle X, f_1, \ldots, f_n \rangle$, und sei weiters $\equiv_{ref}$ eine Äquivalenzrelation auf X.
$\equiv_{ref}$ hat die Substitutionseigenschaft für f_i :⇔
$(\forall x_1, \ldots, x_m, x'_1, \ldots, x'_m)\,(x_1 \equiv_{ref} x'_1 \;\&\; \ldots \;\&\; x_m \equiv_{ref} x'_m \Rightarrow$
$f_i(x_1, \ldots, x_m) \equiv_{ref} f_i(x'_1, \ldots, x'_m))$

Ich habe die logische Form des R-Kompositionalitätsprinzips – und damit auch diejenige seiner Spezifikationen – so weit wie eben möglich dieser Definition der Substitutionseigenschaft einer Kongruenzrelation auf einer syntaktischen Algebra L angepaßt. Man könnte etwa (RA), eingeschränkt auf den Fall der Atomsätze von $\mathscr{L}$, wie folgt algebraisch formulieren: Sei F eine n-stellige Prädikatkonstante von $\mathscr{L}$, und seien weiters $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ Individuenkonstanten von $\mathscr{L}$ sowie f_{AS_n} eine Formationsfunktion aus L, die aus solchen n-stelligen Prädikatkonstanten sowie Individuenkonstanten von $\mathscr{L}$ Atomsätze von $\mathscr{L}$ bildet. Die Einschränkung des referenztheoretischen Prinzips (RA) auf solche Atomsätze lautet nun:

[13] Für die Homomorphismus-Definition vgl. Fn.16 auf S.22.
[14] Vgl. Martin 1987, S.74 f. sowie § 9.

(5) $(\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, ref)\,(a_1 \equiv_{ref} b_1 \;\&\; \ldots \;\&\; a_n \equiv_{ref} b_n \Rightarrow$
$f_{AS_n}(F, a_1, \ldots, a_n) \equiv_{ref} f_{AS_n}(F, b_1, \ldots, b_n))$

Zum Beispiel für $n = 1$: Wenn $a_1 \equiv_{ref} b_1$, dann $\ulcorner Fa_1 \urcorner \equiv_{ref} \ulcorner Fb_1 \urcorner$ (für alle a_1, b_1, ref). Wenn man jetzt noch die Substitutionsformel im Antezedens hinzufügt, dann erhält man in guter Annäherung jene logische Form der neutralen referenztheoretischen Prinzipien, welche in der vorliegenden Arbeit gewählt wurde.

Ich wende mich nun referenztheoretischen Prinzipien zu, in denen die Art der von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten nicht mehr offengelassen wird (d.s. die nicht-neutralen Formulierungen des R-Kompositionalitätsprinzips).

b. Wahrheitswerte als Referenzobjekte

Um die Richtigkeit seiner These, daß Wahrheitswerte die Referenzobjekte von Sätzen sind, zu überprüfen, schlägt Frege die folgende Testmethode vor, die vom R-Kompositionalitätsprinzip ausgeht:

> Wenn unsere Vermutung richtig ist, daß die Bedeutung eines Satzes sein Wahrheitswert ist, so muß dieser unverändert bleiben, wenn ein Satzteil durch einen Ausdruck von derselben Bedeutung, aber anderem Sinne ersetzt wird. Und das ist in der Tat der Fall. *Leibniz* erklärt geradezu: Eadum sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate [Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken].
> (Frege 1892b, S.49 f.)

Es sind hier also Sätze die Kontexte, in denen (relativ zu ref) koreferentielle Ausdrücke ersetzt werden. Frege nimmt dabei probeweise schon an, daß Wahrheitswerte die von solchen Sätzen bezeichneten Entitäten sind. Es liegt hier somit als die Grundlage seiner Testmethode nicht mehr das R-Kompositionalitätsprinzip in dessen ursprünglicher Form vor, sondern dieses Prinzip samt der zusätzlichen Annahme, daß Wahrheitswerte die von solchen Sätzen bezeichneten Entitäten sind. Frege spricht hier nämlich nicht nur von der

Eigenschaft eines Kontexts (Satzes), daß darin (relativ zu *ref*) koreferentielle Ausdrücke füreinander unbeschadet der bezeichneten Entität substituierbar sind. Er spricht vielmehr auch von der Eigenschaft, daß darin (relativ zu *ref*) koreferentielle Ausdrücke füreinander unbeschadet des bezeichneten Wahrheitswerts substituierbar sind. Für diese zweite Eigenschaft, die ein Kontext (Satz) haben kann, in dem koreferentielle Ausdrücke ersetzt werden, schlägt er den Terminus 'Salva-Veritate-Substituierbarkeit' vor. Wir prägen in der vorliegenden Arbeit für diese zweite Eigenschaft den Terminus 'Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken'.[15]

Die zu ersetzenden referenzfähigen Teilausdrücke sind aber zunächst noch keine Sätze. In der folgenden Textstelle weitet Frege seine Testmethode auch auf die Teilsätze von Sätzen aus:

> Es soll nun die Vermutung, daß der Wahrheitswert eines Satzes dessen Bedeutung ist, weiter geprüft werden. Wir haben gefunden, daß der Wahrheitswert eines Satzes unberührt bleibt, wenn wir darin einen Ausdruck durch einen gleichbedeutenden ersetzen: wir haben aber dabei den Fall noch nicht betrachtet, daß der zu ersetzende Ausdruck selber ein Satz ist [Ausweitung von Freges Testmethode auf die Teilsätze von Sätzen]. Wenn nun unsere Ansicht richtig ist, so muß der Wahrheitswert eines Satzes, der einen anderen als Teil enthält, unverändert bleiben, wenn wir für den Teilsatz einen anderen einsetzen, dessen Wahrheitswert derselbe ist [Idee der Wahrheitsfunktionalität]. Ausnahmen sind dann zu erwarten, wenn das Ganze oder der Teilsatz gerade oder ungerade Rede sind; denn wie wir gesehen haben, ist die Bedeutung der Worte dann nicht die gewöhnliche. Ein Satz bedeutet in der geraden Rede wieder einen Satz und in der ungeraden einen Gedanken. (Frege 1892b, S.50 f.)

[15] Die Indizierung erklärt sich daraus, daß wir in Kapitel 2 auch noch auf eine andere Eigenschaft der "Salva-Veritate"-Substituierbarkeit stoßen werden, und zwar auf die sogenannte 'Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken'. Wie wir noch sehen werden, ist der Unterschied zwischen diesen beiden Eigenschaften durch denjenigen zwischen einer Referenzfunktion und einer Extensionsfunktion begründet.

Neben einer Ausweitung seiner Testmethode auf die Teilsätze von Sätzen ist hier auch die Idee der Wahrheitsfunktionalität angesprochen: Sätze, die denselben Wahrheitswert bezeichnen, sind demnach in einem Kontext (Satz) füreinander substituierbar, ohne daß sich dabei der Wahrheitswert, den der Kontext (Satz) bezeichnet, ändert. Frege fügt aber präzisierend hinzu, daß sowohl an einen solchen Kontext (Satz), in dem ersetzt wird, als auch an den zu ersetzenden Teilsatz Bedingungen zu stellen sind: Der Kontext (Satz) und der zu ersetzende Teilsatz dürfen nicht in gerader oder ungerader Rede sein. Denn dann bezeichnet der Satz nicht einen Wahrheitswert, sondern im Falle der geraden Rede einen anderen Satz und im Falle der ungeraden Rede einen Gedanken (d.h. seinen "gewöhnlichen" Sinn). Trotz solcher Ausnahmen ist in der von Frege vorgeschlagenen Testmethode schon vorausgesetzt, daß Wahrheitswerte die von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten (d.h. deren "gewöhnliche" Referenzobjekte relativ zu *ref*) sind.

Es wird deshalb im folgenden durch eine zusätzliche Annahme angegeben, von welcher Art die von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten sind. Angenommen Wahrheitswerte sind die Referenzobjekte der Sätze von $\mathscr{L}$ relativ zu *ref*, d.h.:

$$(\mathrm{W}_1) \quad (\forall x, y, ref)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ref\,(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$$

Fügt man diese Annahme dem R-Kompositionalitätsprinzip hinzu – d.h. bildet man die Konjunktion von (R) und (W_1) –, so entsteht daraus das folgende *Wahrheitswert-als-Referenzobjekt-erhaltende-Kompositionalitätsprinzip*:

$$\begin{aligned}(\mathrm{WR})\quad & (\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)\\ & (Erg\,(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)\ \&\\ & (\forall x, y, ref)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ref\,(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))\end{aligned}$$

(WR) besagt aus der Sicht der Sätze, daß jeder Kontext (hier: Satz) C_1 von $\mathscr{L}$ die Eigenschaft der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken hat. Damit ist – wie gesagt – die Eigenschaft eines Satzes gemeint, daß darin koreferentielle Ausdrücke füreinander unbeschadet des bezeichneten Wahrheitswerts substituierbar sind.[16]

Man kann sich nun wie folgt überlegen, daß aus der Annahme, daß zwei Sätze dasselbe bezeichnen, aufgrund von (WR) und der Definition (D4) der Koreferenzialität folgt, daß die beiden Sätze auch denselben Wahrheitswert bezeichnen:

Angenommen (i) beim Kontext C_1, in dem koreferentielle Ausdrücke ersetzt werden, und einem betreffenden Ersetzungsergebnis C_2 handelt es sich um Sätze, und angenommen weiters, (ii) C_1 bezeichnet dasselbe wie C_2 ((i) und (ii) zusammen besagen, daß zwei Sätze dasselbe bezeichnen). Aus (ii) folgt dann aufgrund von (D4), daß die von C_1 bezeichnete Entität identisch ist mit der von C_2 bezeichneten Entität. Aus letzterem und (i) folgt weiters aufgrund von (W_1), daß der von C_1 bezeichnete Wahrheitswert identisch ist mit dem von C_2 bezeichneten Wahrheitswert. C_1 bezeichnet also denselben Wahrheitswert wie C_2. (W_1) ist aber eine einfache logische Konsequenz von (WR), und zwar folgt (W_1) aus (WR) aufgrund der Simplifikationsregel. Daher folgt aus der Annahme, daß zwei Sätze dasselbe bezeichnen, auch aufgrund von (WR) und (D4), daß sie denselben Wahrheitswert bezeichnen.

Ich führe hier von den sich aus (WR) – für die drei Arten von referenzfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$ – ergebenden Spezifikationen nur diejenige für Sätze explizit an (es werden dabei – wie vorhin bei (R) – zwei Spezifikationsschritte vorgenommen).

- Spezifikation von (WR) für Sätze (Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Sätzen):

(WRS) $$(\forall S_1, S_2, T_1, T_2, ref)$$
$$(Erg(S_2, S_1(T_1//T_2)) \;\&\; T_1 \equiv_{ref} T_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref} S_2) \;\&$$
$$(\forall x, y, ref)(Satz(x, \mathscr{L}) \;\&\; y = ref(x) \Rightarrow Wahrw(y))$$

Wie gesagt, folgt aus der Annahme, daß zwei Sätze dasselbe bezeichnen, aufgrund von (WR) und (D4), daß sie denselben Wahrheitswert

[16] Die Rolle, welche (WR) für die sogenannten *neutral free logics* spielt, habe ich in (Leeb 2001b) kurz behandelt.

bezeichnen. Man kann deshalb die Fregesche Formulierung (WRS) des Prinzips der Wahrheitsfunktionalität mittels der Relation "x_1 bezeichnet denselben Wahrheitswert wie x_2" wie folgt vereinfachen:

(6) $(\forall S_1, S_2, T_1, T_2)(Erg(S_2, S_1(T_1 // T_2))$ &
T_1 bezeichnet denselben Wahrheitswert wie $T_2 \Rightarrow$
S_1 bezeichnet denselben Wahrheitswert wie $S_2)$

Die Relation "x_1 bezeichnet dasselbe wie x_2" darf dabei aber nicht mit der Relation "x_1 bezeichnet denselben Wahrheitswert wie x_2" verwechselt werden: Diese beiden Relationen fallen nämlich – aus der Sicht der Sätze – nur dann miteinander zusammen, wenn man zusätzlich noch annimmt, daß Sätze Wahrheitswerte bezeichnen; ohne diese zusätzliche Annahme sind jedoch – wie wir gesehen haben – jene beiden Relationen voneinander zu unterscheiden.

c. Sachverhalte als Referenzobjekte

Wie in der Einleitung schon besprochen wurde, ist nach Carnap ein Sachverhalt aus Einzeldingen und Eigenschaften bzw. Relationen zusammengesetzt. Angenommen solche Sachverhalte sind die Referenzobjekte der Sätze von $\mathscr{L}$ relativ zu ref, d.h.:

(S) $(\forall x, y, ref)(Satz(x, \mathscr{L})$ & $y = ref(x) \Rightarrow Sachv(y))$

Es entsteht dann durch diese zusätzliche Annahme aus dem R-Kompositionalitätsprinzip das folgende *Sachverhalt-als-Referenzobjekt-erhaltende-Kompositionalitätsprinzip*:

(SR) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1 // A_2))$ & $A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$ &
$(\forall x, y, ref)(Satz(x, \mathscr{L})$ & $y = ref(x) \Rightarrow Sachv(y))$

Wie vorhin bei (WR) folgt aus der Annahme, daß zwei Sätze dasselbe bezeichnen, auch aufgrund von (SR) und (D4), daß sie denselben Sachverhalt bezeichnen. Es ergeben sich weiters aus (SR) – für die drei Arten von referenzfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$ – die üblichen Spezifikationen, welche ich hier aber nicht eigens anführe.

Zusammenfassend kann man also sagen, daß in den nicht-neutralen Kompositionalitätsprinzipien (WR) und (SR) nicht mehr offengelassen ist, von welcher Art die von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten sind. Die Art der Referenzobjekte der Sätze von $\mathscr{L}$ relativ zu *ref* wird vielmehr durch eine zusätzliche Annahme festgelegt. Die Auswirkungen dieser Verstärkung von (R) sind – aus der Perspektive der Sätze gesehen – gar nicht so unbeträchtlich: So wird nämlich im neutralen R-Kompositionalitätsprinzip nur gesagt, daß jeder Kontext (Satz) C_1, in dem koreferentielle Ausdrücke ersetzt werden, dasselbe bezeichnet wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse C_2 (weshalb die von solchen Sätzen bezeichneten Entitäten aufgrund von (D4) miteinander identisch sind; die Art der Entitäten bleibt dabei aber völlig offen).

Dagegen wird im Wahrheitswert-als-Referenzobjekt-erhaltenden-Kompositionalitätsprinzip (WR) darüber hinaus noch gesagt, daß jeder Kontext (Satz) C_1, in dem koreferentielle Ausdrücke ersetzt werden, denselben Wahrheitswert bezeichnet wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse C_2 (und analog dazu im Sachverhalt-als-Referenzobjekt-erhaltenden-Kompositionalitätsprinzip (SR): denselben Sachverhalt bezeichnet).

Wir sind somit in diesem Abschnitt u.a. auf zwei Eigenschaften von Kontexten (Sätzen) gestoßen, welche wir im folgenden Abschnitt im Zusammenhang mit den beiden referenztheoretischen Extensionalitätsbegriffen noch näher beleuchten werden. Sie sollen deshalb hier nochmals kurz angeführt werden: So ist in (R) von der Eigenschaft eines Kontexts (Satzes) die Rede, daß darin *koreferentielle Ausdrücke füreinander salva referentia substituierbar* sind. Dagegen ist in (WR) – aus der Sicht der Sätze – von einer anderen Eigenschaft die Rede, und zwar von der Eigenschaft eines Satzes, daß darin *koreferentielle Ausdrücke füreinander salva veritate*$_1$ *substituierbar* sind.

Die Unterschiedlichkeit dieser beiden Eigenschaften tritt besonders dann klar zu Tage, wenn man annimmt, daß Sätze andere Entitäten als Wahrheitswerte bezeichnen: Denn dann kann es immer noch wahr sein, daß ein Satz, in dem koreferentielle Ausdrücke ersetzt werden, dasselbe bezeichnet wie ein betreffendes Ersetzungsergebnis (etwa weil die beiden Sätze denselben Sachverhalt bezeichnen); es ist aber sicherlich falsch, daß zwei solche Sätze denselben Wahrheitswert bezeichnen (eben weil sie einen Sachverhalt und nicht einen Wahrheitswert bezeichnen). Zwei Sätze, welche dasselbe bezeichnen, können also die erste Eigenschaft haben und zugleich die zweite Eigenschaft nicht haben. Folglich sind die beiden Eigenschaften verschieden voneinander, wenn man annimmt, daß Sätze andere Entitäten als Wahrheitswerte bezeichnen.[17]

Wenn man aber annimmt, daß Sätze Wahrheitswerte bezeichnen, dann sind die beiden Eigenschaften immer noch verschieden voneinander (auch wenn die Unterschiedlichkeit vielleicht nicht mehr so deutlich zu Tage tritt wie zuvor): Denn ein Kontext – wie z.B. ein komplexes *n*-stelliges Prädikat oder ein komplexer singulärer Ausdruck – kann die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken haben, ohne zugleich diejenige der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken haben zu können (eben weil *n*-stellige Prädikate und singuläre Ausdrücke im allgemeinen keine Wahrheitswerte bezeichnen).

[17] Es gilt ganz allgemein, daß zwei Eigenschaften E_1, E_2 verschieden sind, wenn ein und dasselbe Einzelding d die eine Eigenschaft haben und die andere Eigenschaft nicht haben kann. Denn wären die beiden Eigenschaften identisch, dann würde daraus, daß d die eine Eigenschaft hat und die andere nicht hat, folgen, daß d ein und dieselbe Eigenschaft hat und zugleich nicht hat. Dies ist jedoch ein Widerspruch.

1.3 Referenztheoretische Extensionalitätsbegriffe

In diesem Abschnitt wird anhand einer einfachen Semantik der Unterschied zwischen der Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken sowie derjenigen der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken näher veranschaulicht. Wir werden weiters diese beiden Eigenschaften definieren und anschließend mit deren Hilfe die beiden referenztheoretischen Extensionalitätsbegriffe gewinnen können.

Man kann selbst in der klassischen zweiwertigen Semantik für die Aussagenlogik die beiden fraglichen Eigenschaften voneinander unterscheiden: So können zwei Sätze einer Sprache $\mathscr{L}^{\mathrm{AL}}$ für die Aussagenlogik dasselbe bezeichnen, ohne daß sie deshalb denselben Wahrheitswert bezeichnen müssen. Man braucht in einer solchen Semantik nur anzunehmen, daß jeder Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{AL}}$ genau eine *Zahl* aus der Menge $\{1, 0\}$ bezeichnet, ohne diese beiden Zahlen als mengentheoretische Stellvertreter für die beiden Wahrheitswerte Wahr und Falsch aufzufassen. Zwei Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{AL}}$ können dann dasselbe bezeichnen (nämlich 1 oder 0), ohne daß sie denselben Wahrheitswert bezeichnen müssen (eben weil sie Zahlen und keine Wahrheitswerte bezeichnen). Erst aufgrund der zusätzlichen Annahme, daß Sätze Wahrheitswerte bezeichnen, folgt aus der Annahme, daß zwei Sätze dasselbe bezeichnen, daß sie auch denselben Wahrheitswert bezeichnen. Jeder Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{AL}}$ kann deshalb die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken haben, ohne diejenige der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrükken haben zu müssen. Umgekehrt muß er die erste Eigenschaft haben, sobald er die zweite hat.

Üblicherweise heißen Kontexte, in denen koreferentielle Ausdrücke füreinander salva referentia substituierbar sind, 'extensionale Kontexte'. Eine Sprache wie $\mathscr{L}^{\mathrm{AL}}$ heißt 'extensional', weil alle Kontexte (hier: Sätze) von $\mathscr{L}^{\mathrm{AL}}$ "extensional" in diesem ersten Sinne sind.[18]

[18] Vgl. Martin 1987, S.296 f.

Es ergibt sich jedoch ein anderer Sinn von 'extensional', wenn man die mengentheoretischen Stellvertreter für die von den Sätzen von $\mathscr{L}^{\mathrm{AL}}$ bezeichneten Entitäten philosophisch interpretiert: So kann man sie etwa als Wahrheitswerte auffassen. Aus der Annahme, daß die Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{AL}}$ Wahrheitswerte bezeichnen, folgt aber aufgrund der Tatsache, daß sie die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken haben, daß sie auch diejenige der Salva - Veritate$_1$ - Substituierbarkeit - von - koreferentiellen-Ausdrücken haben müssen.

Ein Kontext (Satz), in dem koreferentielle Ausdrücke füreinander salva veritate$_1$ substituierbar sind, heiße nun 'extensional im zweiten Sinne'. Wenn Frege in seiner Testmethode von der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit - von - koreferentiellen - Ausdrücken spricht, dann meint er somit "extensional" in diesem zweiten Sinne. Unter der Annahme, daß Sätze Wahrheitswerte bezeichnen, ist eine Sprache wie $\mathscr{L}^{\mathrm{AL}}$ auch eine im zweiten Sinne "extensionale" Sprache, und zwar weil dann jeder Kontext (Satz) von $\mathscr{L}^{\mathrm{AL}}$ "extensional" im zweiten Sinne ist.

Durch diese kurze Analyse wird aufgezeigt, daß die grundlegendere der beiden Eigenschaften, diejenige der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken ist. Denn, wie wir gesehen haben, ergibt sich die andere Eigenschaft – nämlich diejenige der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken – einfach durch die zusätzliche Annahme, daß Sätze Wahrheitswerte bezeichnen.

Wie kann nun die Eigenschaft eines Kontexts, daß darin koreferentielle Ausdrücke füreinander salva referentia substituierbar sind, d.h. die "Extensionalität" eines Kontexts im ersten Sinne definiert werden?

Sei dazu im folgenden $\mathscr{L}$ eine Sprache, die gemäß der Standardtechnik aufgebaut ist, sei weiters *ref* eine Referenzfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$, und seien $A_1, A_2, C_1, C_2 \in X$. Sei weiters offengelassen, von welcher Art die von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten sind. Ich definiere zunächst die Relation der Salva-Referentia-Substituierbarkeit (Diese Relation sollte man nicht mit der Eigenschaft eines Kontexts verwechseln, daß darin koreferentielle Ausdrücke füreinander salva referentia substituierbar sind; denn diese Eigenschaft wird im folgenden durch jene Relation definiert):

(D6) A_1 ist in C_1 durch A_2 relativ zu *ref* salva referentia substituierbar :⇔
$(\forall C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$

Vereinfacht ausgedrückt, besagt dies: A_1 ist in einem Kontext C_1 durch A_2 genau dann salva referentia substituierbar, wenn für alle C_2 gilt: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 ist, dann bezeichnet C_1 dasselbe wie C_2; dann ist also die von C_1 bezeichnete Entität identisch mit der von C_2 bezeichneten Entität. Die so definierte Relation der Salva-Referentia-Substituierbarkeit basiert auf dem Begriff einer Referenzfunktion.

Diese Relation der Salva-Referentia-Substituierbarkeit zugrunde legend, kann die Eigenschaft eines Kontexts, daß darin koreferentielle Ausdrücke füreinander salva referentia substituierbar sind, wie folgt definiert werden:

(D7) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken :⇔
$(\forall A_1, A_2)\,(A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow A_1$ ist in C_1 durch A_2 relativ zu *ref* salva referentia substituierbar)[19]

[19] Die Eigenschaft der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken ergibt sich aus jener der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken durch die Hinzufügung der Annahme (W_1), daß Wahrheitswerte die Referenzobjekte der Sätze von $\mathscr{L}$ relativ zu *ref* sind:

(D8) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken :⇔
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken &
$(\forall x, y, ref)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ref(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$

Es folgt aus (D7) und (D6) unmittelbar die folgende Formel:

(7) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2)\,(A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow$
$(\forall C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2))$

Nun ist aber das rechte Bikonditionalglied von (7) logisch äquivalent mit:

(8) $(\forall A_1, A_2, C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$

Dies läßt sich aufgrund des Quantorenverschiebungsgesetzes:

(9) $(\mathrm{p} \rightarrow (\bigwedge \mathrm{x})\mathrm{Fx}) \leftrightarrow (\bigwedge \mathrm{x})(\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{Fx})$

sowie der Tautologie:

(10) $(\mathrm{p} \rightarrow (\mathrm{q} \rightarrow \mathrm{r})) \leftrightarrow (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q} \rightarrow \mathrm{r})$

und der Kommutativität der Konjunktion sowie der Ersetzbarkeit von logisch äquivalenten Ausdrücken nachweisen. Aus (7) und der logischen Äquivalenz von (8) mit dem rechten Bikonditionalglied von (7) folgt aufgrund der Ersetzungsregel auch das folgende Theorem:

(T1) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2, C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$

Einfacher gesagt, heißt dies: Ein Kontext C_1 hat dann und nur dann die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken, wenn für alle A_1 sowie A_2 und C_2 gilt: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 dasselbe bezeichnet wie A_2, dann bezeichnet C_1 dasselbe wie C_2.

Ich führe zur näheren Veranschaulichung der in (T1) festgehaltenen Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken ein umgangssprachliches Beispiel an:

Beispiel 1: Man betrachte den Satz

(11) Cicero ist Römer.

Dieser enthält zwei referenzfähige Ausdrücke, und zwar den Eigennamen 'Cicero' und das einstellige Prädikat 'ist Römer' (Die Kopula wird hier der Einfachheit halber dem Prädikat zugerechnet). Wenden wir nun (T1) auf (11) an. Es sind dann alle mit 'Cicero' koreferentiellen Ausdrücke sowie weiters alle mit 'ist Römer' koreferentiellen Ausdrücke zu betrachten. D.h.:

(12) Der Satz (11) hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken g.d.w.
für alle referenzfähigen Ausdrücke A_2 sowie alle Kontexte C_2 gilt: wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von 'Cicero' in (11) durch koreferentielle A_2 ist, dann ist (11) koreferentiell mit C_2, und weiters
für alle referenzfähigen Ausdrücke A_2 sowie alle Kontexte C_2 gilt: wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von 'ist Römer' in (11) durch koreferentielle A_2 ist, dann ist (11) koreferentiell mit C_2

So ist z.B. der Ausdruck 'Tullius' koreferentiell mit dem in (11) zu ersetzenden Ausdruck 'Cicero', und es ist weiters der Ausdruck 'ist ein Angehöriger des antiken Volkes, das um Christi Geburt Rom besiedelte' koreferentiell mit dem in (11) zu ersetzenden Ausdruck 'ist Römer'. Es ist nun zu begründen, daß (11) dasselbe bezeichnet wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse. Ich skizziere im folgenden zwei derartige Begründungsansätze.

Nach einem Ansatz bezeichnen Sätze Wahrheitswerte. So bezeichnet etwa der Satz (11) den Wahrheitswert Wahr, weil das Einzelding Cicero unter den Begriff Römer fällt. Faßt man nun – so wie Frege – Begriffe als Funktionen auf, dann bezeichnet der Satz (11) gemäß dieser Auffassung den Wahrheitswert Wahr, weil die einstellige Funktion Römer dem Argument Cicero den Wahrheitswert Wahr zuordnet. Betrachte nun alle Sätze, die aus (11) dadurch hervorgehen, daß man die Teilausdrücke von (11) durch Ausdrücke ersetzt, die dasselbe bezeichnen. Es müssen dann aber auch alle betreffenden Ersetzungsergebnisse den Wahrheitswert Wahr bezeichnen, und zwar aus dem folgenden Grund: Alle diese Sätze handeln – so wie (11) – von demselben Einzelding (nämlich: Cicero) und derselben Funktion (nämlich: Römer); und diese Funktion ordnet nun einmal jenem Einzelding den Wahrheitswert Wahr zu. Der Satz (11) bezeichnet also dasselbe wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse, nämlich den Wahrheitswert Wahr.

Nach einem anderen Ansatz bezeichnen Sätze zusammengesetzte Entitäten, welche aus dem zusammengesetzt sind, was ihre Teilausdrücke bezeichnen (wobei die Art der Zusammensetzung durch die logische Form der Sätze bestimmt ist). So bezeichnet etwa (11) eine Entität, welche aus dem zusammengesetzt ist, was die Teilausdrücke von (11) bezeichnen – etwa das Einzelding Cicero und die Eigenschaft Römer-zu-sein. Mit (11) spricht man gemäß diesem Ansatz davon, daß Cicero die Eigenschaft Römer-zu-sein hat. Betrachte nun wieder alle Sätze, die aus (11) dadurch entstehen, daß man die Teilausdrücke von (11) durch Ausdrücke ersetzt, welche dasselbe bezeichnen. Die jeweiligen Teilausdrücke dieser Sätze steuern den von diesen Sätzen bezeichneten Entitäten stets dieselbe Entität bei (nämlich das Einzelding Cicero und die Eigenschaft Römer-zu-sein), und zwar weil sie – laut Annahme – dasselbe bezeichnen wie jene Teilausdrücke von (11), welche sie ersetzen. Die betreffenden Ersetzungsergebnisse bezeichnen also Entitäten, welche aus denselben Entitäten zusammengesetzt sind, wie die von (11) bezeichnete Entität. Weiters ist auch die Art der Zusammensetzung immer dieselbe: Stets werden ein und dasselbe Einzelding (nämlich: Cicero) sowie ein und dieselbe Eigenschaft (nämlich: Römer-zu-sein) so zusammengesetzt wie in der von (11) bezeichneten Entität; denn man spricht mit diesen Sätzen – so wie mit (11) – davon, daß ein und dasselbe Einzelding ein und dieselbe Eigenschaft hat. Der Satz (11) bezeichnet also dasselbe wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse, nämlich eine aus Cicero und Römer-zu-sein zusammengesetzte Entität.

Beiden Ansätzen zufolge hat der Satz (11) die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken.

Die eben definierte Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken eines Kontexts basiert auf der Relation der Salva-Referentia-Substituierbarkeit und damit auf dem Begriff einer Referenzfunktion. Im folgenden wird mit dieser Eigenschaft die "Extensionalität" eines Kontexts im ersten Sinne definiert:

(D9) C_1 ist extensional$_1$ relativ zu *ref* $:\Leftrightarrow$
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken

Demnach ist ein Kontext extensional$_1$ g.d.w. darin Ausdrücke, welche dasselbe bezeichnen, füreinander unbeschadet der bezeichneten Entität substituierbar sind.[20]

Es läßt sich nun – ausgehend von diesem Begriff der Extensionalität$_1$ eines Kontexts – wie folgt definieren, was es heißt, daß eine Sprache $\mathscr{L}$ extensional$_1$ ist:

(D11) $\mathscr{L}$ ist extensional$_1$ $:\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, ref)\,(C_1$ ist extensional$_1$ relativ zu $ref)$[21]

[20] Die Extensionalität$_2$ eines Kontexts läßt sich ganz einfach wie folgt definieren:

(D10) C_1 ist extensional$_2$ relativ zu *ref* $:\Leftrightarrow$
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken

Gemäß diesem Schema lassen sich weitere unterschiedliche nicht-neutrale referenztheoretische Extensionalitätsbegriffe nach Belieben definieren. Man braucht dazu lediglich dem Definiens von (D7) die jeweilige Annahme hinzuzufügen, von welcher Art die von Sätzen bezeichneten Entitäten sind (z.B. Sachverhalte, Situationen etc.).

[21] Wegen der früheren Bemerkung, daß in der vorliegenden Arbeit verschiedene Sorten von Metavariablen für verschiedene Arten von wohlgeformten Ausdrücken

Es folgt aus (D11) sowie (D9) und (T1) unmittelbar die folgende Formel:

(13) $\mathscr{L}$ ist extensional$_1$ $\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, ref)(\forall A_1, A_2, C_2)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$

Vereinfacht ausgedrückt, besagt dies: Eine Sprache $\mathscr{L}$ ist somit dann und nur dann extensional$_1$, wenn für alle Kontexte C_1 von $\mathscr{L}$ sowie alle Referenzfunktionen *ref* gilt: Für alle A_1 sowie A_2 und C_2 gilt: wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 dasselbe bezeichnet wie A_2, dann bezeichnet C_1 dasselbe wie C_2. Extensionale$_1$ Sprachen sind somit Sprachen, in denen alle Kontexte C_1 die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken haben.

Da man in (13) die Reihenfolge der Quantoren umstellen darf, ergibt sich somit aus (13) das folgende Theorem:

(T2) $\mathscr{L}$ ist extensional$_1$ $\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2))$

Eine Sprache $\mathscr{L}$ ist somit dann und nur dann extensional$_1$, wenn für jeden Kontext C_1 von $\mathscr{L}$ das Kompositionalitätsprinzip des Referenzobjekts gilt. Sobald das R-Kompositionalitätsprinzip uneingeschränkt für eine Sprache $\mathscr{L}$ gilt, handelt es sich somit bei $\mathscr{L}$ um eine extensionale$_1$ Sprache.[22]

von $\mathscr{L}$ verwendet werden, kann hier die Antezedensbedingung, daß C_1 ein Kontext von $\mathscr{L}$ ist, entfallen.

Weiters kann man analog zu (D11) die Extensionalität$_2$ einer Sprache wie folgt definieren:

(D12) $\mathscr{L}$ ist extensional$_2$:$\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, ref)$ (C_1 ist extensional$_2$ relativ zu *ref*)

[22] Analog zu (T2) erhält man aufgrund von (D6) sowie (D7), (D8), (D10), (D12) und des Quantorenverschiebungsgesetzes:

Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen: Die Eigenschaft der Extensionalität$_1$, welche ein Kontext (Satz) von $\mathscr{L}$ haben kann, ist die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken. Bei letzterer Eigenschaft bleibt aber völlig offen, von welcher Art die von den Kontexten von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten sind. Legt man nun jedoch – so wie bei (WR) – fest, daß Wahrheitswerte die von den Kontexten (Sätzen) von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten sind, dann hat man nicht mehr diese Eigenschaft vor sich, sondern eine andere Eigenschaft, und zwar diejenige der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken. Kontexte (Sätze), welche letztere Eigenschaft haben, sind somit "extensionale" Kontexte (Sätze) in einem anderen als dem ersten Sinne von 'extensional'. Für die so verstandene "Extensionalität" eines Kontexts (Satzes) verwende ich den Terminus 'extensional$_2$'. Ich unterscheide also zumindest zwischen den folgenden beiden *referenztheoretischen Extensionalitätsbegriffen*:

- "Extensionale" Kontexte im *ersten Sinne* (d.h. extensionale$_1$ Kontexte) sind Kontexte, in denen Ausdrücke, welche dasselbe bezeichnen, füreinander unbeschadet der bezeichneten Entität substituierbar sind;
- "Extensionale" Kontexte im *zweiten Sinne* (d.h. extensionale$_2$ Kontexte) dagegegen sind Kontexte (Sätze), in denen Ausdrükke, welche dasselbe bezeichnen, füreinander unbeschadet des bezeichneten Wahrheitswerts substituierbar sind.

Im Zusammenhang mit der Extensionalität$_1$ kann man von der 'neutralen referenztheoretischen Extensionalität' reden, und zwar weil bei

(14) $(\bigwedge x)(Fx \wedge p) \leftrightarrow (\bigwedge x)(Fx) \wedge p$

auch das folgende Theorem:

(T3) $\mathscr{L}$ ist extensional$_2$ $\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2))\ \&$
$(\forall x, y, ref)(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ref(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$

der Fassung des vorliegenden Extensionalitätsbegriffs offen bleibt, von welcher Art die Referenzobjekte von Sätzen sind. Weiters kann man im Hinblick auf die Extensionalität$_2$ von einer Spielart der 'nicht-neutralen referenztheoretischen Extensionalität' sprechen, und zwar weil bei diesem Extensionalitätsbegriff eben nicht die Art der Referenzobjekte von Sätzen offen bleibt, sondern – im Zuge seiner definitorischen Entwicklung – vorausgesetzt wird, daß es sich hierbei um Wahrheitswerte handelt.[23]

Ich weise abschließend darauf hin, daß diese Unterscheidung weitere Kreise zieht, wenn man unter der "Intensionalität" eines Kontexts seine Non-"Extensionalität" versteht: Den beiden referenztheoretischen Extensionalitätsbegriffen entsprechend müßte man dann auch zwischen mindestens zwei Bedeutungen von 'intensional' unterscheiden.

1.4 Freges Frage

Wie gesagt, setzt Frege die beiden Postulate (P1) und (P2) bei der Suche nach den von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten voraus. D.h. er setzt dabei voraus, daß jeder Satz von $\mathscr{L}$ genau eine Entität – von welcher Art auch immer – bezeichnet. Aber von welcher Art ist die von einem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ bezeichnete Entität? Handelt es sich hierbei etwa – wie Frege vermutet – um einen Wahrheitswert oder – wie Carnap meint – um einen Sachverhalt, oder gar um etwas anderes?

Man muß von irgendwelchen referenztheoretischen Prinzipien ausgehen, um zwischen diesen konkurrierenden Thesen begründeterweise eine Entscheidung herbeiführen zu können, und zwar von solchen, in denen das Bezeichnen als eine Funktion aufgefaßt wird. Es gibt hierfür einen einfachen Grund: Frege fragt nämlich nach *der* von einem Satz bezeichneten Entität; folglich faßt er in seiner Frage – nach der Art der Referenzobjekte von Sätzen – das Bezeichnen als eine Funk-

[23] Für die hier angesprochenen referenztheoretischen Extensionalitätsbegriffe vgl. auch Leeb 2001a.

tion auf. Wir wollen Frege darin folgen und das Bezeichnen als eine solche Funktion auffassen, weil dadurch die philosophische Analyse deutlich vereinfacht wird.

Das R-Kompositionalitätsprinzip ist nun ein derartiges Prinzip, das eine Referenzfunktion betrifft. Es wird zudem von Frege als Leitprinzip bei der Suche nach den von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten eingesetzt: Sobald Zweifel darüber bestehen, von welcher Art die von einem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ bezeichnete Entität ist, bedient er sich der Substitutionsthese (R), um diese Entität ausfindig zu machen.[24] Wenn aber die betreffende Suche durch (R) angeleitet ist, dann muß man sich natürlich als Nächstes fragen, wann eine Entität aufgrund von (R) überhaupt als die von einem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ bezeichnete Entität in Frage kommt: Denn schließlich kann – solange für die Suche (R) maßgeblich ist – S_1 nur eine solche Entität bezeichnen, die auch aufgrund von (R) dafür in Frage kommt. Dieser zweiten Fragestellung, welche Freges Frage nach der Art der Referenzobjekte von Sätzen in gewisser Hinsicht vorgelagert ist, werden wir in diesem Abschnitt besondere Aufmerksamkeit schenken.

Angenommen der Satz S_1 ist ein Kontext, auf den (R) zutrifft, d.h. S_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken. Intuitiv gesehen, heißt das, daß S_1 dasselbe bezeichnet wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse S_2. Was immer also die von S_1 bezeichnete Entität ist, sie muß identisch sein mit den von den betreffenden Ersetzungsergebnissen S_2 bezeichneten Entitäten. Die fragliche Entität muß demnach unter der Substitution von koreferentiellen Ausdrücken in S_1 erhalten bleiben. Wegen (R) ist also an eine solche Entität eine Erhaltungsbedingung zu stellen: All jene und nur jene Entitäten, welche die betreffende Erhaltungsbedingung erfüllen, kommen demnach aufgrund von (R) als die von Sätzen bezeichneten Entitäten in Frage. Wir wollen im folgenden durch eine Analyse der Erhaltungsbegriffs aufzeigen, um welche Erhaltungsbedingung es sich hier genau handelt.

[24] Vgl. Barwise/Perry 1987, S.42.

Aus der folgenden Analyse des Erhaltungsbegriffs geht nämlich hervor, daß durch die nachstehende Formel

(15) $(\forall A_1, A_2, C_2)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2\ \&\ e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$

nicht bloß irgendeine, sondern tatsächlich auch eine notwendige und hinreichende Erhaltungsbedingung ausgedrückt wird.

Zum Nachweis dieser Behauptung wird zunächst einmal angegeben, was es heißt, daß eine Entität unter der Substitution eines Ausdrucks in einem Kontext durch einen anderen Ausdruck erhalten bleibt:

(D13) e bleibt relativ zu *ref* unter der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 erhalten $:\Leftrightarrow$
$(\forall C_2)(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$

Vereinfacht ausgedrückt, besagt dies: Eine Entität e bleibt genau dann unter der teilweisen Substitution von A_1 in einem Kontext C_1 durch A_2 erhalten, wenn für alle C_2 gilt: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 ist und wenn e die von C_1 bezeichnete Entität ist, dann ist e auch die von C_2 bezeichnete Entität.

Diese Relation zugrunde legend, können wir weiters definieren, was es heißt, daß eine Entität unter der Substitution von koreferentiellen Ausdrücken erhalten bleibt:

(D14) e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu *ref* koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten $:\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2)(A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow$ e bleibt relativ zu *ref* unter der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 erhalten)

Aus (D14) und (D13) folgt unmittelbar die folgende Formel:

(16) e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu *ref* koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2)(A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow$
$(\forall C_2)(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2)))$

Das rechte Bikonditionalglied von (16) ist nun logisch äquivalent mit (15), und zwar wegen einer ähnlichen Begründung wie zuvor schon beim rechten Bikonditionalglied von (7) und (8). Aus (16) und der logischen Äquivalenz von (15) mit dem rechten Bikonditionalglied von (16) folgt somit aufgrund der Ersetzungsregel auch das folgende Theorem:

(T4) e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu *ref* koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2, C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ &
$A_1 \equiv_{ref} A_2$ & $e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$

Einfacher ausgedrückt, besagt (T4): Eine Entität e bleibt dann und nur dann unter der teilweisen Substitution von koreferentiellen Ausdrücken in einem Kontext C_1 erhalten, wenn für alle A_1 sowie A_2 und C_2 gilt: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 dasselbe bezeichnet wie A_2 und wenn e die von C_1 bezeichnete Entität ist, dann ist e auch die von C_2 bezeichnete Entität.

Das rechte Bikonditionalglied des Theorems (T4) ist aber nichts anderes als die Formel (15). Wegen (T4) hat sich also herausgestellt, daß in (15) tatsächlich eine notwendige und hinreichende Erhaltungsbedingung vorliegt.

Ich führe im folgenden ein Beispiel an, um die in (T4) angesprochene Erhaltungsbedingung (15) an eine Entität unter der Substitution von koreferentiellen Ausdrücken zu veranschaulichen:

Beispiel 2: Betrachten wir wieder unseren Beispielsatz (11) und die Entität, welche er gemäß den beiden in Beispiel 1 skizzierten Ansätzen bezeichnet: Nach dem einen Ansatz bezeichnet (11) den Wahrheitswert Wahr, nach dem anderen aber eine aus dem Einzelding Cicero und der Eigenschaft Römer-zu-sein zusammengesetzte Entität. Unabhängig davon, welchen der beiden Ansätze man zugrunde legt, es bleibt stets die von (11) bezeichnete Entität unter der Substitution von koreferentiellen Ausdrücken in (11) erhalten. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß aufgrund der beiden Ansätze der Satz (11) dasselbe bezeichnet wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse: Wenn diese Sätze aber alle dasselbe bezeichnen wie (11) und e die von (11) bezeichnete Entität ist, dann ist e auch die von jedem einzelnen dieser Sätze bezeichnete Entität (und zwar nach dem ersten Ansatz der Wahrheitswert Wahr und gemäß dem zweiten eine aus Cicero und Römer-zu-sein zusammengesetzte Entität).

Es folgt nun weiters der Nachweis, daß sich diese Erhaltungsbedingung (15) leicht für beliebige Kontexte, also nicht nur für Sätze, aus der Substitutionsthese (R) ableiten läßt. So läßt sich aus (R) aufgrund der Definition (D4) der Koreferenzialität zunächst einmal die folgende *Erhaltungsthese* ableiten, in der direkt von denjenigen Entitäten die Rede ist, welche die Kontexte bezeichnen:

(17) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref, e)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \;\&\; A_1 \equiv_{ref} A_2 \;\&\; e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$

D.h.: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in einem Kontext C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 relativ zu *ref* koreferentiell mit A_2 ist und wenn e das Referenzobjekt von C_1 relativ zu *ref* ist, dann ist e auch das Referenzobjekt von C_2 relativ zu *ref* (für alle $C_1, C_2, A_1, A_2, ref, e$). Einfacher gesagt, heißt das: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in einem Kontext C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 dasselbe bezeichnet wie A_2 und wenn e die von C_1 bezeichnete Entität ist, dann ist e auch die von C_2 bezeichnete Entität (für alle C_1, C_2, A_1, A_2, e).

Aus (17) ist aber weiters durch dreimalige Universelle Instanzierung die Formel (15) ableitbar (wobei man die Reihenfolge der Allquantoren verändern darf). (15) ist also aufgrund von (D4) eine Konsequenz von (R) (via (17)).

In der Tat ist nicht nur die Erhaltungsthese (17) aus (R) aufgrund der Definition (D4) der Koreferenzialität ableitbar, sondern es ist auch umgekehrt die Substitutionsthese (R) aus (17) aufgrund von (D4) und der Definition (D3) einer Referenzfunktion ableitbar. Es handelt sich somit bei (R) und (17) um logisch äquivalente Formulierungen des R-Kompositionalitätsprinzips. Dies wird der Vollständigkeit halber im folgenden Theorem festgehalten und anschließend bewiesen:

(T5) $\vdash_{\mathrm{PL1}^=} (\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2) \Leftrightarrow$
$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref, e)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2\ \&\ e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$

Beweis von (T5)[25]:

$\Rightarrow$:

1.	$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$ $(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$	(R)
2.	$Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2\ \&\ e = ref(C_1)$	Ann. f. KB
3.	$Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2$	UI 1
4.	$C_1 \equiv_{ref} C_2$	AL 2, 3
5.	$ref(C_1) = ref(C_2)$	(D4) 4
6.	$e = ref(C_1)$	SIM 2
7.	$e = ref(C_2)$	ID 6, 5
8.	$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref, e)(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&$ $A_1 \equiv_{ref} A_2\ \&\ e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$	KB 2–7, UG[26]

$\Leftarrow$:

1.	$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref, e)(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&$ $A_1 \equiv_{ref} A_2\ \&\ e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$	(17)
2.	$Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2$	Ann. für KB

[25] Wir legen in der vorliegenden Arbeit den Formalisierungen von Beweisen einen Kalkül des Natürlichen Schließens zugrunde, und zwar den Identitätskalkül für die PL1$^=$ aus (Kalish/Montague/Mar ^{2}1980).

[26] Da aufgrund der Bemerkung auf S.46 '$y = ref(x)$' logisch äquivalent mit '$ref(x, y)$' ist, ergibt sich übrigens aus (17) aufgrund der Ersetzungsregel unmittelbar das folgende *Korollar*:

(Kr1) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref, e)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2\ \&\ ref(C_1, e) \Rightarrow ref(C_2, e))$

3.	$(\forall C_1)(\exists! e)\, e = ref(C_1)$	wegen (D3)
4.	$(\exists e)\, e = ref(C_1)$ & $(\forall e_1, e_2)\,(e_1 = ref(C_1)$ & $e_2 = ref(C_1) \Rightarrow e_1 = e_2)$	(D15)[27] UI 3
5.	$(\exists e)\, e = ref(C_1)$	SIM 4
6.	$e_3 = ref(C_1)$	EI 5 (e_3 neu)
7.	$Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ & $A_1 \equiv_{ref} A_2$ & $e_3 = ref(C_1) \Rightarrow e_3 = ref(C_2)$	UI 1
8.	$e_3 = ref(C_2)$	AL 2, 6, 7
9.	$ref(C_1) = ref(C_2)$	ID 6, 8
10.	$C_1 \equiv_{ref} C_2$	(D4) 9
11.	$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$ $(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ & $A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$	KB 2–10, UG

Die Substitutionsthese (R) und die Erhaltungsthese (17) sind somit in dem Sinne logisch äquivalent, als sie auseinander mit Hilfe von zwei Definitionen prädikatenlogisch ableitbar sind.

Das Folgende ist ein Korollar zu (T5). Es besagt die logische Äquivalenz von 'Ein Kontext C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken' mit 'Für alle Entitäten e gilt: e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu *ref* koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten':

(Kr2) $\vdash_{\mathrm{PL1}^=}$ $(\forall A_1, A_2, C_2)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ & $A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2) \Leftrightarrow$
$(\forall e, A_1, A_2, C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ &
$A_1 \equiv_{ref} A_2$ & $e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$

Demnach ergibt sich aus unserem Ansatz u.a. das folgende Theorem:

[27] Kontextuelle Definition des Anzahlquantors 'es gibt genau ein' aus Zeile 3:

(D15) $(\exists! v)\, \Phi_v :\Leftrightarrow$
$(\exists v)\, \Phi_v$ & $(\forall v_1, v_2)\,(\Phi_{v_1}$ & $\Phi_{v_2} \Rightarrow v_1 = v_2)$

(T6) C_1 ist extensional$_1$ relativ zu *ref* $\Leftrightarrow$
$(\forall e)$ (e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu *ref* koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten)

Beweis: (T6) gilt wegen (D9) sowie (T1), (Kr2), Ersetzungsregel und (T4).

Nach diesem kurzen Einschub, der dem Nachweis der logischen Äquivalenz der Substitutionsthese (R) mit der Erhaltungsthese (17) gedient hat, können wir nun jene Fragestellung beantworten, welche Freges Frage nach der Art der Referenzobjekte vorgelagert ist. Wir beantworten sie im folgenden nicht nur für Sätze, sondern auch für beliebige Kontexte C_1. Unseren bisherigen Ausführungen zufolge kommt nämlich aufgrund von (R) dann und nur dann eine Entität als die von einem Kontext C_1 bezeichnete Entität in Frage, wenn sie unter der Substitution von koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten bleibt. Denn dann bezeichnen C_1 und alle betreffenden Ersetzungsergebnisse – wie von (R) verlangt – dasselbe.

(D16) e kommt aufgrund von (R) als das Referenzobjekt von C_1 relativ zu *ref* in Frage $:\Leftrightarrow$
e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu *ref* koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten

Es folgt aus (D16) und (T4) unmittelbar das folgende Theorem:

(T7) e kommt aufgrund von (R) als das Referenzobjekt von C_1 relativ zu *ref* in Frage $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2, C_2)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2\ \&\ e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$

Einfacher gesagt, heißt dies: Eine Entität e kommt somit dann und nur dann aufgrund von (R) als die von einem Kontext C_1 bezeichnete Entität in Frage, wenn für alle A_1 sowie A_2 und C_2 gilt: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 dasselbe bezeichnet wie A_2 und wenn e die von C_1 bezeichnete Entität ist, dann ist e auch die von C_2 bezeichnete Entität.

Beispiel 3: Wegen des Beispiels 2 kommen aufgrund von (R) sowohl der Wahrheitswert Wahr als auch die aus dem Einzelding Cicero und der Eigenschaft Römer-zu-sein zusammengesetzte Entität als die von (11) bezeichnete Entität in Frage (letztere Entität kann man als einen Sachverhalt auffassen).

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß Freges Frage nach der Art der Referenzobjekte von Sätzen eine andere Fragestellung vorgelagert ist, und zwar die Fragestellung: Welche Entitäten kommen aufgrund von (R) überhaupt als die von den Sätzen von $\mathscr{L}$ bezeichneten Entitäten in Frage? Unserer Analyse zufolge kommt eine Entität dann und nur dann als die von einem Satz S_1 bezeichnete Entität in Frage, wenn sie unter der teilweisen Substitution von koreferentiellen Ausdrücke in S_1 erhalten bleibt. Wie dabei eine solche notwendige und hinreichende Erhaltungsbedingung auszusehen hat und wie diese mit der vorgelagerten Fragestellung zusammenhängt, wurde in (T4) und (T7) aufgezeigt. Demnach kommen aufgrund von (R) sowohl Wahrheitswerte als auch Sachverhalte als die Referenzobjekte von Sätzen wie 'Cicero ist Römer' in Frage (siehe unsere Beispiele). Daraus kann man aber nur den Schluß ziehen, daß das R-Kompositionalitätsprinzip alleine nicht hinreichend ist, um die Art der Referenzobjekte von Sätzen eindeutig zu determinieren.

Zur weiteren Untermauerung dieser Schlußfolgerung skizziere ich im folgenden eine kompositionale Semantik, in der Sätze Sachverhalte bezeichnen: So kann man etwa für eine aussagenlogische Sprache $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ mit Atomsätzen – d.s. Sätze, die aus einem n-stelligen Prädikat und n singulären Termen gebildet sind – eine solche kompositionale Semantik angeben. Man kann sich nämlich für die von den Atomsätzen von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ bezeichneten Sachverhalte mengentheoretische Stellvertreter überlegen. Die Grundidee dabei ist, sich solche Sachverhalte als geordnete m-Tupel vorzustellen, die aus den von den n-stelligen Prädikaten und singulären Termen bezeichneten Entitäten zusammengesetzt sind. Solche n-stellige Prädikate und singuläre Terme, welche dieselben Entitäten bezeichnen, stellen nun für jene Sachverhalte dieselben Elemente – etwa Carnapsche Attribute und Einzeldinge – bereit. Wenn sich aber zwei Atomsätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ höchstens in solchen Teilausdrücken unterscheiden, welche dasselbe bezeichnen – die also dieselben Sachverhaltselemente bereitstellen –, dann unterscheiden sich nach dem Unterscheidungsprinzip (UR) die von den beiden Atomsätzen bezeichneten Sachverhalte nicht mehr voneinander. Die beiden Atomsätze bezeichnen folglich – wie von (R) verlangt – dasselbe. Man könnte diese Grundidee nun weiter ausführen, indem man sich die Menge der Sachverhalte unter den logischen Operationen abgeschlossen denkt, d.h. indem man etwa auch Negationssachverhalte und Konjunktionssachverhalte einführt. Dies soll hier aber nicht geschehen, weil man an dieser Stelle schon erkennen kann, daß (R) alleine nicht hinreichend ist, um die Art der von Sätzen bezeichneten Entitäten eindeutig zu determinieren: Aufgrund von (R) können nämlich nicht nur Wahrheitswerte, sondern auch solche Sachverhalte die Referenzobjekte von Sätzen sein.

2 Das E-Kompositionalitätsprinzip

Dieses Kapitel ist in vielerlei Hinsicht analog zum vorigen Kapitel aufgebaut. Es geht uns nämlich im folgenden darum, die Ähnlichkeiten aber auch die Unterschiede zwischen dem R-Kompositionalitätsprinzip einerseits und dem E-Kompositionalitätsprinzip andererseits herauszuarbeiten. Das E-Kompositionalitätsprinzip entsteht – wie gesagt – aus dem Kompositionalitätsprinzip (B) dadurch, daß man mit 'bedeuten' 'hat als Extension' versteht. Das Prinzip (E) betrifft somit eine Extensionsrelation.

Bei der Einführung einer Extensionsrelation *Ext* für eine gemäß der Standardtechnik aufgebaute Sprache $\mathscr{L}$ hat man die analogen Probleme bezüglich der beiden Relata einer solchen Relation zu lösen, wie schon zuvor bei der Einführung einer Referenzrelation *Ref* für $\mathscr{L}$:

(i) Welche Ausdrücke von $\mathscr{L}$ können überhaupt eine Extension haben, d.h. was sind die extensionsfähigen Ausdrücke von $\mathscr{L}$?

(ii) Von welcher Art sind die Extensionen der extensionsfähigen Ausdrücke von $\mathscr{L}$?

Die Einführung einer Extensionsrelation *Ext* für eine solche Sprache $\mathscr{L}$ sieht sich mit diesen beiden Problemen konfrontiert. Ich fasse deshalb im folgenden je einen Antwortversuch darauf zusammen.

ad i) So wie zuvor die Wohlgeformtheit und die Eigenständigkeit notwendige Bedingungen für die Referenzfähigkeit eines Ausdrucks von $\mathscr{L}$ waren, so sind sie es jetzt auch für seine Extensionsfähigkeit, und zwar aus denselben Gründen. Analog zu vorhin wird für die vorliegende Arbeit postuliert, daß zumindest die singulären Ausdrücke sowie die n-stelligen Prädikate und Sätze von $\mathscr{L}$ zu den extensionsfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$ zu zählen sind (d.h. Ausdrücke sind, welche eine Extension haben können).

ad ii) Freges Suchstrategie nach der Art des Referenzobjekts eines Satzes S_1 von $\mathscr{L}$ läßt sich auch bei der Frage nach der Art seiner Extension einsetzen. Man geht dabei allerdings nicht mehr vom

R-Kompositionalitätsprinzip aus, sondern stattdessen vom E-Kompositionalitätsprinzip. Analog zu vorhin kommt somit aufgrund von (E) als die Extension eines Satzes S_1 von $\mathscr{L}$ nur eine Entität in Frage, welche unter der teilweisen Substitution von seinen extensionsfähigen Teilausdrücken durch Ausdrücke, die dieselbe Extension haben, erhalten bleibt. Wir werden die Rolle des E-Kompositionalitätsprinzips bei der Suche nach den Extensionen von Sätzen im letzten Abschnitt dieses Kapitels noch ausführlicher untersuchen.

Es folgen zunächst einige begriffliche und terminologische Vorbemerkungen, bevor ich mich der Frage widme, was eine Extensionsrelation eigentlich von einer Referenzrelation unterscheidet.

Man erinnere sich daran, daß man zuvor beim Bezeichnen zwischen zwei Eigenschaften eines Ausdrucks unterscheiden mußte, und zwar zwischen seiner Referenzfähigkeit und seinem Referentiellsein. Ebenso muß man jetzt auch zwischen der Extensionsfähigkeit eines Ausdrucks – d.h. seiner Eigenschaft mindestens eine Entität als Extension haben zu können – und seinem "Extensionellsein" – d.h. seiner Eigenschaft, tatsächlich mindestens eine Entität als Extension zu haben – unterscheiden. Der Terminus 'Extensionellsein' wird hier als Nomen zu 'extensionell' gebraucht, so wie schon zuvor der Terminus 'Referentiellsein' als Nomen zu 'referentiell' gebraucht wurde. Wir prägen hier deshalb die neuen Termini 'Extensionellsein' und 'extensionell', weil das Nomen 'Extensionalität' zu 'extensional' schon mit völlig anderen Bedeutungen in der philosophischen Fachsprache gebräuchlich ist (siehe z.B. die zwei Bedeutungen von 'Extensionalität eines Kontexts' aus Abschnitt 1.3). Weiters gilt analog zu vorhin, daß jeder extensionelle Ausdruck ein extensionsfähiger sein muß, aber nicht jeder extensionsfähige Ausdruck muß auch unbedingt ein extensioneller sein.

Während zuvor die Eigennamen einer natürlichen Sprache die Prototypen für referenzfähige Ausdrücke waren, sind nun n-stellige Prädikate als solche Prototypen für extensionsfähige Ausdrücke anzusehen. Solche Prädikate sind demzufolge das Musterbeispiel für Ausdrücke, welche eine Entität als Extension haben können, und bei denen es Sinn macht zu sagen, daß sie eine Entität als Extension haben. Aber was sind *n*-stellige Prädikate? Quine versteht unter einem einstelligen Prädikat (erster Stufe) einen sprachlichen Ausdruck, der mindestens eine Leerstelle für einen singulären Ausdruck hat (z.B. für eine Individuenkonstante einer formalen Sprache oder einen Eigennamen einer natürlichen Sprache). Ein *n*-stelliges Prädikat hat dabei *n* verschiedene solcher Leerstellen. Füllt man nun die Leerstellen eines solchen *n*-stelligen Prädikats durch *n* geschlossene singuläre Ausdrücke aus, dann entsteht dadurch ein Satz (Ein geschlossener singulärer Ausdruck ist dabei ein singulärer Ausdruck ohne freie Individuenvariablen – z.B. Individuenkonstanten – bzw. ohne Personalpronomina, indexikalische Ausdrücke etc. – z.B. Eigennamen). Solche Sätze sind wahrheitsfähig, d.h. können – für sich alleine stehend – wahr oder falsch sein (bzw. sie sind wahrheitswertfähig, d.h. können Wahrheitswerte haben). Weiters trifft ein einstelliges Prädikat auf jedes einzelne von beliebig vielen Einzeldingen zu: So trifft z.B. das einstellige Prädikat 'ist rot' auf jedes rote Einzelding zu, weil die Ausfüllung der einzigen Leerstelle in diesem Prädikat durch irgendeinen Eigennamen für ein rotes Einzelding einen Satz ergibt, welcher wahr ist. Quine sagt auch: Die Menge aller roten Einzeldinge ist die Extension des Prädikats 'ist rot', bzw. das Prädikat 'ist rot' hat die Menge aller roten Einzeldinge als Extension.[1] Schließlich ist die Relation zwischen einem einstelligen Prädikat (erster Stufe) und der jeweiligen Menge aller Einzeldinge, auf die ein solches Prädikat zutrifft – d.i. aber laut Annahme die jeweilige Extension eines solchen Prädikats – als Prototyp für eine Extensionsrelation anzusehen.

Welche *Unterschiede* bestehen nun zwischen einer Carnapschen *Extensionsrelation* und einer Fregeschen *Referenzrelation*? Carnap diskutiert zunächst mehrere Unterschiede zwischen der traditionellen Methode der Referenzrelation (bzw. Namensrelation) und seiner Extensions-Intensions-Methode. Aus dieser Diskussion zieht er dann Rückschlüsse hinsichtlich der Unterschiede, welche zwischen zwei sol-

[1] Vgl. die in der Einleitung in Fußnote 29 auf S.32 zitierten Belegstellen, insbesonders Quine ^{2}1956, § 24, S.135 f.

chen Relationen bestehen. Ich fasse im folgenden in (i) und (ii) zwei derartige Unterschiede zusammen und kommentiere sie anschließend.

(i) Während für eine Referenzrelation die drei unten angeführten Prinzipien uneingeschränkt gelten, ist dies für eine Extensionsrelation nicht der Fall.

So wird nach dem Carnapschen Verständnis dieser traditionellen Methode eine Referenzrelation durch die folgenden drei Prinzipien charakterisiert[2]:

(Ref 1) Das Prinzip der Univozität (univocality):
Jeder referenzfähige Ausdruck A (d.h. Eigenname, Allgemeinname, Satz etc.) bezeichnet genau eine Entität.

(Ref 2) Das Prinzip der Gegenständlichkeit (subject matter):
Jeder Satz S_1 handelt von denjenigen Entitäten, welche die in S_1 enthaltenen referenzfähigen Ausdrücke bezeichnen.

(Ref 3) Das Prinzip der Substituierbarkeit (substitutivity):
Für alle Sätze S_1, S_2 und alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$(Erg(S_2, S_1(A_1//A_2))$ & A_1 und A_2 bezeichnen dasselbe $\Rightarrow$
S_1 und S_2 bezeichnen dasselbe)[3]

Carnap betont, daß gemäß der traditionellen Methode der Referenzrelation diese drei Prinzipien uneingeschränkt als gültig angenommen werden. Insbesonders wird demzufolge das dritte Prinzip (Ref 3) uneingeschränkt für alle Kontexte (Sätze) S_1 von $\mathscr{L}$ als gültig angenommen.

Aus der Annahme der uneingeschränkten Gültigkeit von (Ref 3) ergibt sich aber ein viel diskutiertes Problem, welches ich im folgenden anhand eines Beispiels von Russell kurz diskutiere: Angenommen (i.1) der Kontext (Satz)

(1) George IV. wollte wissen, ob Scott der Autor von *Waverley* ist

[2] Vgl. Carnap ^{2}1956, § 24, S.98 f.

[3] (Ref 3) ist nichts anderes als das Prinzip (R) aus der Einleitung der vorliegenden Arbeit.

ist wahr, und angenommen weiters, (i.2) der Ausdruck 'der Autor von *Waverley*' bezeichnet dasselbe wie 'Scott'. Ersetzt man nun 'der Autor von *Waverley*' in (1) durch 'Scott', dann folgt aus (i.2) aufgrund von (Ref 3), daß die Sätze (1) und

(2) George IV. wollte wissen, ob Scott Scott ist

dasselbe bezeichnen müssen. Diese beiden Sätze haben aber nicht zwingend denselben Wahrheitswert, denn George IV. wollte vielleicht gar nicht wissen, ob Scott Scott ist. Das betreffende Ersetzungsergebnis (2) könnte also falsch sein, obwohl (1) – laut Annahme – wahr ist.[4] Andererseits müßten aber die beiden Sätze wegen (Ref 3) und (i.2) denselben Wahrheitswert bezeichnen, wenn Wahrheitswerte die von Sätzen bezeichneten Entitäten sind. Carnap nennt dieses Problem die 'Antinomie der Referenzrelation'. Diese ergibt sich – genau genommen – aber nur, wenn man neben (Ref 3) sowie (i.1) und (i.2) noch zweierlei annimmt, nämlich: (i.3) Sätze bezeichnen Wahrheitswerte, und (i.4) die Relation "x_1 hat denselben Wahrheitswert wie x_2" wird als die Relation "x_1 bezeichnet denselben Wahrheitswert wie x_2" aufgefaßt (bzw. unter der Identitätsformel 'y ist der Wahrheitswert von x' wird die Formel 'y ist der von x bezeichnete Wahrheitswert' verstanden).

Zur Vermeidung dieser Antinomie schlägt Carnap vor, (Ref 3) durch ein "schwächeres" Prinzip zu ersetzen. Dieses "schwächere" Prinzip lautet dabei wie folgt (wobei im folgenden der Ausdruck 'x ist ein extensionsfähiger Ausdruck' durch '$EfA\ (x, \mathscr{L})$' symbolisiert wird): Seien im folgenden der Wertebereich der gebundenen Variablen 'S_1', 'S_2' die Menge $\{x \,|\, Satz(x, \mathscr{L})\}$ sowie derjenige der gebundenen Variablen 'A_1', 'A_2' die Menge $\{x \,|\, EfA(x, \mathscr{L})\}$:

[4] Es wird hier vorausgesetzt, daß das Wahrsein (und das Falschsein) eines Satzes wie folgt zu verstehen sind: Ein Satz S_1 ist wahr g.d.w. S_1 den Wahrheitswert Wahr hat (analog dazu für das Falschsein: S_1 ist falsch g.d.w. S_1 den Wahrheitswert Falsch hat). Aus der Annahme (i.1) folgt dann aufgrund dieser Auffassung des Wahrseins eines Satzes, daß z.B. der Satz (1) den Wahrheitswert Wahr hat; der Satz (2) kann aber aufgrund des Umstands, daß Georg IV vielleicht gar nicht wissen wollte, ob Scott Scott ist, den Wahrheitswert Falsch haben. Deshalb haben die beiden Sätze nicht zwingend denselben Wahrheitswert.

(Ext 3) $(\forall S_1, S_2, A_1, A_2, ext)\,(S_1$ ist ein "extensionaler" Kontext & $Erg(S_2, S_1(A_1//A_2))$ & $A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ext} S_2)$[5]

Das Prinzip (Ext 3) wird somit nur für jene und all jene Kontexte (Sätze) S_1 von $\mathscr{L}$ als gültig angenommen, die "extensional" sind. Damit taucht aber die Antinomie der Referenzrelation im Zusammenhang mit einer Extensionsrelation gar nicht mehr auf, und zwar weil der Kontext (Satz) (1) kein "extensionaler" Kontext (Satz) ist: Selbst wenn man die Annahmen (i.2) sowie (i.3) und (i.4) dahingehend abändern würde, daß sinngemäß von einer Extensionsrelation die Rede wäre, müßten die beiden Sätze (1) und (2) nicht mehr dieselbe Extension haben und damit auch nicht mehr denselben Wahrheitswert als Extension haben. Natürlich würde es zur Vermeidung der Antinomie auch genügen, wenn man eine der beiden Annahmen (i.3) und (i.4) aufgibt (Man könnte dann (Ref 3) uneingeschränkt beibehalten).

Gemäß der traditionellen Methode der Referenzrelation ist die Annahme, daß die drei Prinzipien (Ref 1) bis (Ref 3) uneingeschränkt für eine semantische Relation gelten, eine notwendige Bedingung dafür, daß eine solche Relation eine Referenzrelation ist. Anders gesagt: Wenn eine semantische Relation eine Referenzrelation ist, dann gelten für eine solche Relation diese drei Prinzipien uneingeschränkt. Es folgt daraus aufgrund der Kontrapositionsregel: Wenn für eine semantische Relation diese drei Prinzipien nicht uneingeschränkt gelten, dann ist die betreffende Relation keine Referenzrelation. Carnaps Extensionsrelation ist daher keine Referenzrelation nach der traditionellen Methode, und zwar weil auf seine Extensionsrelation das Prinzip (Ref 3) nicht zutrifft. Das Prinzip (Ext 3) klingt zwar ähnlich wie (Ref 3), im Gegensatz zu (Ref 3) wird es aber nur für jene und all jene Kontexte (Sätze) S_1 von $\mathscr{L}$ als gültig angenommen, welche "extensional" sind.[6]

Nach Carnap ist aber Freges Relation des Bezeichnens eine semantische Relation, für die die drei Prinzipien (Ref 1) bis (Ref 3) unein-

---

[5] Ich werde in Abschnitt 2.1 die hier vorausgesetzte Relation der Koextensionalität ($\equiv_{ext}$) definieren.

[6] Vgl. Carnap ^{2}1956, § 24, S.96–100 und § 32 S.143.

geschränkt gelten. Freges Relation des Bezeichnens ist somit seines Erachtens eine Referenzrelation gemäß der traditionellen Methode.

(ii) Während (für Frege) das Referenzobjekt und der Sinn eines sprachlichen Ausdrucks kontextabhängig sind, ist dies (für Carnap) bei dessen Extension und Intension nicht der Fall.

Zunächst einmal bemüht sich Frege bezüglich der Fragen nach dem Sinn und dem Referenzobjekt eines Satzes darum, die folgenden beiden Resultate zu erzielen: Zum einen ist für ihn der "gewöhnliche" Sinn eines Satzes S_1 jener Gedanke, den S_1 – isoliert für sich alleine stehend – ausdrückt; zum anderen ist das "gewöhnliche" Referenzobjekt von S_1 jener Wahrheitswert, den S_1 – wiederum isoliert für sich alleine stehend – bezeichnet. Er versucht diese beiden Resultate zu erreichen, indem er sowohl von einer Version des Kompositionalitätsprinzips des Referenzobjekts ausgeht – nämlich (Ref 3) –, als auch das Kompositionalitätsprinzip des Sinns voraussetzt.

Für Frege ist – wie gesagt – das Referenzobjekt eines referenzfähigen Ausdrucks – und insbesonders dasjenige eines Satzes S_1 – kontextabhängig: In "ungeraden" Kontexten vorkommende referenzfähige Ausdrücke haben nämlich nicht ihr "gewöhnliches", sondern ihr "ungerades" Referenzobjekt. Für Frege ist dabei das "ungerade" Referenzobjekt eines referenzfähigen Ausdrucks nichts anderes als der "gewöhnliche" Sinn desselben. Insbesonders ist das "ungerade" Referenzobjekt eines Satzes nicht sein "gewöhnliches" Referenzobjekt (d.h. sein Wahrheitswert), sondern vielmehr sein "gewöhnlicher" Sinn (d.h. sein Gedanke). Je nachdem, in welchem Kontext ein solcher Satz S_1 vorkommt, bezeichnet er somit entweder einen Wahrheitswert oder einen Gedanken (aber natürlich nicht beides zugleich in ein und demselben Kontext): So bezeichnet S_1 einen Wahrheitswert, wenn S_1 in einem "gewöhnlichen" Kontext vorkommt; kommt S_1 hingegen in einem "ungeraden" Kontext vor, dann bezeichnet S_1 einen Gedanken.[7]

[7] Zwei referenzfähige Ausdrücke, welche in je einem "ungeraden" Kontext vorkommen, bezeichnen demnach dann und nur dann dasselbe, wenn sie dasselbe "ungerade" Referenzobjekt haben (d.h. denselben "gewöhnlichen" Sinn haben). Bei einem "ungeraden" Kontext (Satz) genügt es also nicht, daß der darin ersetz-

Im Gegensatz dazu hat nach der Extensions-Intensions-Methode ein Satz S_1 immer dieselbe Extension sowie dieselbe Intension, und zwar völlig unabhängig davon, in welchem Kontext er vorkommt. Carnap folgt Frege also nicht dahingehend, daß – auf entsprechende Weise gesagt – ein und derselbe Satz S_1 kontextabhängig einmal einen Wahrheitswert, das andere Mal einen Gedanken (bzw. einen anderen Satz) als Extension hätte. Er faßt deshalb seine Extensionsrelation

---

te Ausdruck und der diesen ersetzende Ausdruck dasselbe "gewöhnliche" Referenzobjekt haben, damit dieser Kontext (Satz) dasselbe bezeichnet wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse. Die beiden Ausdrücke müssen vielmehr darüber hinaus auch denselben "gewöhnlichen" Sinn haben.

Schließlich möchte ich noch anmerken, daß eine formale Umsetzung von Freges Mechanismus des ungeraden Bezeichnens sowohl die Definition einer Referenzfunktion und den darauf aufbauenden Koreferenzialitätsbegriff, als auch die Formulierung des R-Kompositionalitätsprinzips verkomplizieren würde: So kann man, um diesen Mechanismus formal umzusetzen, bei einer Referenzfunktion *ref* neben der bisher einzigen Argumentstelle für einen referenzfähigen Ausdruck auch noch eine weitere für Arten von Kontexten (z.B. für "gewöhnliche" Kontexte, "ungerade" Kontexte, "gerade" Kontexte etc.) hinzunehmen. Die Identitätsformel '$y = ref(x, z)$' könnte man dann wie folgt lesen: 'y ist in der Kontextart z das Referenzobjekt von x relativ *ref*'. Ein referenzfähiger Ausdruck hätte dann sein Referenzobjekt nicht nur relativ zu einer Referenzfunktion (wie bisher), sondern auch relativ zur Art des Kontexts, in dem er vorkommt. Dementsprechend müßte man aber auch die bisherige Definition der Koreferenzialität wie folgt abändern (wobei der Ausdruck 'x_1 ist in der Kontextart z relativ zu *ref* koreferentiell mit x_2' durch '$x_1 \equiv_{ref,z} x_2$' symbolisiert wird): $x_1 \equiv_{ref,z} x_2 :\Leftrightarrow ref(x_1, z) = ref(x_2, z)$. Weiters müßte man dann wegen dieser Änderungen das R-Kompositionalitätsprinzips wie folgt formulieren:

$$(\mathrm{R}^+) \quad (\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref, z)$$
$$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \ \& \ A_1 \equiv_{ref,z} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref,z} C_2)$$

Da es Frege jedoch in seiner Frage nach der Art der Referenzobjekte von Sätzen primär um deren "gewöhnliche" Referenzobjekte geht (und nur sekundär um deren "ungeraden" Referenzobjekte), können wir in der vorliegenden Arbeit auf eine derartige formale Umsetzung des Mechanismus des ungeraden Bezeichnens verzichten. Diese Vorrangigkeit der "gewöhnlichen" Referenzobjekte gegenüber den "ungeraden" Referenzobjekten von Sätzen heißt jedoch nicht, daß das R-Kompositionalitätsprinzip nicht für die "ungeraden" Kontexte gelten würde: Für Frege jedenfalls gilt es uneingeschränkt für alle Arten von Kontexten, in denen Sätze vorkommen können, also auch für solche "ungerade" Kontexte.

nicht als eine Referenzrelation nach der traditionellen Methode auf (und somit auch nicht als eine Fregesche Referenzrelation).[8]

Man kann also wegen den in (i) und (ii) angeführten Gründen zwischen einer Fregeschen Referenzrelation und einer Carnapschen Extensionsrelation unterscheiden. Damit ist aber die folgende Unterscheidung nicht bloß eine in den Worten gelegene, sondern in der Tat auch eine sachlich begründete Unterscheidung: Während nämlich referenzfähige Ausdrücke Entitäten bezeichnen können, können extensionsfähige Ausdrücke nicht Entitäten bezeichnen, sondern lediglich solche Entitäten als Extensionen haben (bzw. besitzen).

2.1 Extensionstheoretische Begriffe

Es werden im folgenden nun auch jene extensionstheoretische Begriffe definiert, welche zur weiteren Präzisierung des E-Kompositionalitätsprinzips erforderlich sind: d.s. der Begriff einer Extensionsfunktion und derjenige der Koextensionalität.

Der *extensionstheoretische Grundbegriff* ist dabei der (mindestens) zweistellige Begriff des Als-Extension-Habens: "x hat y als Extension", wobei 'x' einen extensionsfähigen Ausdruck vertritt und 'y' eine (im allgemeinen: außersprachliche) Entität. Man kann diesen Begriff des Als-Extension-Habens – wie schon zuvor beim Bezeichnen – als eine Relation oder aber auch als eine Funktion auffassen: Wenn man annimmt, daß ein extensionsfähiger Ausdruck mindestens eine oder sogar mehrere Entitäten als Extension hat, dann versteht man das Als-Extension-Haben als eine Relation; nimmt man hingegen an, daß jeder extensionsfähige Ausdruck genau eine Entität als Extension hat, dann faßt man das Als-Extension-Haben als eine Funktion auf. Ich stelle im folgenden das Als-Extension-Haben zunächst als eine Relation und anschließend als eine Funktion vor. Ausgehend von diesen beiden Auffassungsweisen des Als-Extension-Habens, können dann weitere extensionstheoretische Begriffe wie etwa der Begriff der Koextensionalität definiert werden.

[8] Vgl. Carnap ^{2}1956, § 28 f., S.118–129.

a. Als-Extension-Haben als eine Relation

Es wird zunächst in einer allgemeinen Weise der Begriff einer Extensionsrelation für eine Sprache $\mathscr{L}$ definiert. Demnach ist eine Extensionsrelation *Ext* für $\mathscr{L}$ eine Relation zwischen extensionsfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$ einerseits und extensionsfähigen Entitäten andererseits (Eine extensionsfähige Entität ist dabei eine Entität, welche als Extension von irgendeinem extensionsfähigen Ausdruck in Frage kommt). Ich kürze dazu 'x ist ein extensionsfähiger Ausdruck von $\mathscr{L}$' durch '$EfA(x, \mathscr{L})$' ab sowie 'y ist eine extensionsfähige Entität' durch '$EXfE(y)$'.

(D1) Sei $\mathscr{L}$ eine gemäß der Standardtechnik aufgebaute Sprache. *Ext* ist eine (zweistellige) Extensionsrelation mit den Relatamengen X und Y für $\mathscr{L}$:⇔
$X \subseteq \{x \,|\, EfA(x, \mathscr{L})\}$ & $Y \subseteq \{y \,|\, EXfE(y)\}$ & $Ext \subseteq X \times Y$

Wenn x in der Relation *Ext*, d.h. der Relation des Als-Extension-Habens zu y steht, dann wird damit gesagt, daß x y als Extension hat. Analog zu der für Relationen im allgemeinen gebräuchlichen Notation können wir nun an Stelle von '$\langle x, y\rangle \in Ext$' auch einfach '$Ext(x, y)$' schreiben.

Es wird hier also das Als-Extension-Haben als eine Relation verstanden: Der Ausdruck 'x steht in der Relation *Ext* zu y' kann nämlich auch als 'x steht in der Relation des Als-Extension-Habens zu y' aufgefaßt werden bzw. – noch einfacher gesagt – als 'x hat y als Extension'. Man kann nun – wie zuvor bei einer Referenzrelation – mittels der Mengen X und Y ganz verschiedene Teilmengen *Ext* des kartesischen Produkts von X und Y bilden. Gemäß der hier gewählten mengentheoretischen Herangehensweise an den Begriff des Als-Extension-Habens ist deshalb auch das Symbol '*Ext*' als eine Variable für solche Extensionsrelationen aufzufassen. Es ist nämlich in der Definition (D1) nicht von einer bestimmten Teilmenge des kartesischen Produkts von X und Y die Rede ist, sondern von irgendeiner solchen Teilmenge.

Weiters läßt sich der Definitions- sowie der Wertebereich einer Extensionsrelation *Ext* wie folgt angeben:

(D2) Sei *Ext* eine (zweistellige) Extensionsrelation mit den Relatamengen X und Y für $\mathscr{L}$.
a. $Dom\,(Ext) := \{x \mid (\exists y)\,(Ext\,(x,y))\}$
b. $Ran\,(Ext) := \{y \mid (\exists x)\,(Ext\,(x,y))\}$

b. Als-Extension-Haben als eine Funktion

Im folgenden wird nun auch auf allgemeine Weise der Begriff einer Extensionsfunktion für eine Sprache $\mathscr{L}$ definiert. Eine Extensionsfunktion *ext* für $\mathscr{L}$ wird demzufolge als eine linkstotale und rechtseindeutige Extensionsrelation mit den Relatamengen X und Y definiert:

(D3) Sei $\mathscr{L}$ eine gemäß der Standardtechnik aufgebaute Sprache.
ext ist eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$:$\Leftrightarrow$
ext ist eine (zweistellige) Extensionsrelation mit den Relatamengen X und Y für $\mathscr{L}$ &
$(\forall x)\,(x \in X \Rightarrow (\exists! y)\,(y \in Y \;\&\; \langle x,y\rangle \in ext))$

Sei *ext* eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$. Es stehe dann '$ext\,(x)$' für das einzige $y \in Y$, so daß gilt: $\langle x,y\rangle \in ext$ (für alle $x \in X$). Es gilt somit für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$: $y = ext\,(x) \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in ext$.

Es wird hier also – ähnlich wie vorhin bei einer Referenzfunktion – das Als-Extension-Haben als eine Funktion aufgefaßt: Der Ausdruck 'x steht in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ext* zu y' kann nämlich auch als 'x steht in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation des Als-Extension-Habens zu y' verstanden werden bzw. – noch einfacher gesagt – als 'x hat (linkstotal und rechtseindeutig) y als Extension'. Man kann nun mittels der Mengen X und Y ganz verschiedene solche Funktionen *ext* bilden. Es ist deshalb auch das Symbol '*ext*' als eine Variable für solche Extensionsfunktionen aufzufassen.

c. Zwei Fassungen der Koextensionalität

Nach dem Vorschlag von Carnap sind zwei sprachliche Ausdrücke koextensionell (d.h. haben dieselbe Extension) g.d.w. ein ganz bestimmter Satz, welcher aus diesen beiden Ausdrücken gebildet wird, wahr ist. Unserem Vorschlag zufolge sind sie jedoch koextensionell g.d.w. deren jeweiligen Extensionen miteinander identisch sind. Ich diskutiere im folgenden zunächst einmal Carnaps Fassung des Begriffs der Koextensionalität, bevor ich die unsrige vorstelle.

c.1 Carnaps Vorschlag. Carnaps Fassung des Begriffs der Koextensionalität läßt sich am besten anhand des Musterbeispiels für extensionsfähige Ausdrücke, nämlich anhand der *n*-stelligen Prädikate näher erläutern. Wie gesagt, ist nach Quine ein *n*-stelliges Prädikat (erster Stufe) ein sprachlicher Ausdruck, welcher *n* verschiedene Leerstellen für singuläre Ausdrücke mit sich bringt. Es stehen weiters solche Prädikate in der Relation des Zutreffens-Auf zu bestimmten (im allgemeinen: außersprachlichen) Entitäten. So trifft etwa ein einstelliges Prädikat auf jedes einzelne von beliebig vielen Einzeldingen zu: Füllt man nämlich die einzige Leerstelle eines solchen Prädikats durch einen singulären Ausdruck für eines dieser Einzeldinge aus, dann ergibt sich ein Satz, welcher wahr ist. Man kann nun zwischen dem Zutreffen von zwei *n*-stelligen Prädikaten auf dieselben geordneten *n*-Tupel von Einzeldingen und ihrer Koextensionalität einen direkten Zusammenhang herstellen, welcher sich vorausblickend wie folgt auf den Punkt bringen läßt: Wenn zwei *n*-stellige Prädikate auf dieselben geordneten *n*-Tupel von Einzeldingen zutreffen, dann ist ein ganz bestimmter aus diesen beiden Prädikaten gebildeter Satz wahr; und letzterer Satz ist wahr g.d.w. sie dieselbe Extension haben. Das diesen Zusammenhang stiftende Bindeglied ist – wie sich zeigen wird – ein relativer Wahrheitsbegriff, und zwar der Begriff "*x* ist wahr relativ zu *ext*".

Es sei für das Folgende vorausgesetzt, daß dieser relative Wahrheitsbegriff schon definiert wurde.[9] Man kann dann das Auf-Dasselbe-Zutreffen durch das Wahrsein wie folgt erklären: Wenn zwei einstel-

[9] Vgl. Carnap ^{2}1956, § 1, S.5 f. und S.3. Carnap setzt hier eigentlich den relativen Wahrheitsbegriff "*x* ist wahr relativ zu einem semantischen Sprachsystem *y*" als schon definiert voraus. Zum besseren Vergleich mit unserer Darstellung des R-Kompositionalitätsprinzips habe ich aber diesen Begriff abgeändert. Ich setze

lige Prädikate F_1 und F_2 relativ zu *ext* auf dieselben Einzeldinge zutreffen, dann ist der Satz

(3) $\ulcorner(\bigwedge \mathrm{x})(F_1\mathrm{x} \leftrightarrow F_2\mathrm{x})\urcorner$

wahr relativ zu *ext*. So treffen z.B. die beiden einstelligen Prädikate 'ist Römer' und 'ist ein Angehöriger des antiken Volkes, das um Christi Geburt Rom besiedelte' nur dann auf dieselben Einzeldinge zu, wenn der Satz

(4) Für alle x gilt: x ist Römer $\leftrightarrow$ x ist ein Angehöriger des antiken Volkes, das um Christi Geburt Rom besiedelte

wahr ist. Dies läßt sich für beliebige *n*-stellige Prädikate wie folgt verallgemeinern (Dabei werde ich im folgenden den Ausdruck '*x* ist wahr relativ zu *ext*' durch '*Wahr* (x, ext)' symbolisieren):

(5) Zwei *n*-stellige Prädikate F_1 und F_2 treffen relativ zu *ext* auf dieselben geordneten *n*-Tupel von Einzeldingen zu $\Rightarrow$
$\mathit{Wahr}(\ulcorner(\bigwedge \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n})(F_1\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n} \leftrightarrow F_2\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n})\urcorner, ext)$[10]

Das Zutreffen von zwei *n*-stelligen Prädikaten auf dieselben geordneten *n*-Tupel von Einzeldingen ist demnach eine hinreichende Bedingung für das Wahrsein desjenigen Satzes, welcher auf ganz bestimmte Weise aus diesen beiden Prädikaten gebildet wird.

Wann haben nun zwei solche *n*-stellige Prädikate dieselbe Extension? Wohl dann, wenn sie auf dieselben geordneten *n*-Tupel von Einzeldingen zutreffen. Man sagt nämlich auch, daß zwei *n*-stellige Prädikate dieselbe Extension haben, wenn sie auf dieselben geordneten *n*-Tupel von Einzeldingen zutreffen. Wohl mit dieser Auffassung vor Augen schlägt Carnap vor, die Koextensionalität von zwei

hier nämlich – im Gegensatz zu Carnap – die Definition einer Extensionsfunktion schon voraus und kann deshalb vom relativen Wahrheitsbegriff "*x* ist wahr relativ zu *ext*" ausgehen.

[10] Es wird bei dieser Verallgemeinerung vorausgesetzt, daß für alle Einzeldinge d gilt: $d = \langle d \rangle$.

solchen Prädikaten auf einen relativen Wahrheitsbegriff zurückzuführen.[11] Seine diesbezügliche Konvention gebe ich sinngemäß wie folgt wieder:

(K1) F_1 ist relativ zu *ext* koextensionell mit $F_2 \Leftrightarrow$
$\mathit{Wahr}\,(\ulcorner(\bigwedge \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n})\,(F_1\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n} \leftrightarrow F_2\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n})\urcorner, \mathit{ext})$

Es ergibt sich dann aufgrund von (5) und der Konvention (K1), daß das Auf-Dasselbe-Zutreffen von zwei n-stelligen Prädikaten eine hinreichende Bedingung für deren Koextensionalität ist:

(6) Zwei n-stellige Prädikate F_1 und F_2 treffen relativ zu *ext* auf dieselben geordneten n-Tupel von Einzeldingen zu $\Rightarrow$
F_1 ist relativ zu *ext* koextensionell mit F_2

Der relative Wahrheitsbegriff fungiert hier also als ein Bindeglied zwischen der Relation des Auf-Dasselbe-Zutreffens und der Relation der Koextensionalität.

Man kann weiters (6) zugrunde legen, um die folgende Frage zu beantworten: Welche Arten von Entitäten kann man als die Extensionen von n-stelligen Prädikaten wählen? Als derartige Extensionen kann man wegen (6) nur solche Entitäten wählen, welche n-stellige Prädikate, die auf dieselben geordneten n-Tupel von Einzeldingen zutreffen, gemeinsam haben[12]: Angenommen zwei n-stellige Prädikate F_1 und F_2 treffen auf dieselben geordneten n-Tupel von Einzeldingen zu. Wegen (6) haben dann diese beiden Prädikate dieselbe Extension. Sie haben folglich eine Entität gemeinsam. Aber um welche Entität handelt es sich hierbei? Nun, weil die beiden Prädikate auf dieselben geordneten n-Tupel von Einzeldingen zutreffen, sind die jeweiligen Mengen aller geordneten n-Tupel von Einzeldingen, auf die F_1 bzw. F_2 jeweils zutreffen, miteinander identisch. Jene beiden n-stelligen Prädikate haben somit diese Menge von geordneten n-Tupel von Einzeldingen gemeinsam. Man kann deshalb wegen (6)

[11] Vgl. Carnap ^{2}1956, § 4, S.18 f., insbesonders seine Konvention 4-12, und S.14 f., insbesonders seine Definition 3-5a.

[12] Vgl. Carnap ^{2}1956, § 3, S.19 und wiederum S.14 f.

Mengen von geordneten n-Tupel von Einzeldingen als die Extensionen von n-stelligen Prädikaten wählen.

Carnap macht weiters auf die Möglichkeit aufmerksam, Sätze als Grenzfälle von n-stelligen Prädikaten aufzufassen, und zwar als Prädikate ohne Leerstellen, d.h. als nullstellige Prädikate. Versteht man nun zwei Sätze S_1 und S_2 (mit $n = 0$) auf derartige Weise, dann sind wegen (K1) S_1 und S_2 relativ zu *ext* koextensionell g.d.w. der Satz $\ulcorner S_1 \leftrightarrow S_2 \urcorner$ relativ zu *ext* wahr ist.[13]

Carnap zeigt nun einen Weg auf, wie man seine Relation der Koextensionalität von zwei n-stelligen Prädikaten auf andere Arten von extensionsfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$ ausweiten kann: Denn nicht nur zwei n-stellige Prädikate von $\mathscr{L}$ können dieselbe Extension haben, sondern etwa auch zwei singuläre Ausdrücke von $\mathscr{L}$. Er geht dazu vom Begriff eines verallgemeinerten Äquivalenzsatzes aus.[14] Zwei extensionsfähige Ausdrücke sind dementsprechend relativ zu einer Extensionsfunktion *ext* koextensionell g.d.w. der verallgemeinerte Äquivalenzsatz, welcher aus diesen beiden Ausdrücken gebildet wird, relativ zu *ext* wahr ist.

Ein verallgemeinerter Äquivalenzsatz kann dabei wie folgt definiert werden: Seien $s_1, s_2 \in \{x \mid SgA\,(x, \mathscr{L})\}$, seien weiters $F_1, F_2 \in \{x \mid Prä(x, \mathscr{L})\}$ und $S_1, S_2 \in \{x \mid Satz(x, \mathscr{L})\}$:

[13] Vgl. Carnap ^{2}1956, § 6, S.26. Da weiters zwei Sätze S_1 und S_2 relativ zu *ext* material äquivalent sind g.d.w. der Satz $\ulcorner S_1 \leftrightarrow S_2 \urcorner$ relativ zu *ext* wahr ist, folgt also, daß zwei Sätze S_1 und S_2 relativ zu *ext* koextensionell sind g.d.w. S_1 und S_2 relativ zu *ext* material äquivalent sind.

Es ist also die Relation der materialen Äquivalenz nicht die Relation "x_1 hat denselben Wahrheitswert wie x_2", sondern vielmehr die Relation "x_1 hat dieselbe Extension wie x_2", eingeschränkt auf die Menge aller Sätze. Erst durch die zusätzliche Annahme, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, ergibt sich hieraus die Relation "x_1 hat denselben Wahrheitswert als Extension wie x_2". Ich betrachte deshalb in der vorliegenden Arbeit die Relation "x_1 hat denselben Wahrheitswert wie x_2" nicht als die Relation der materialen Äquivalenz. Erstere Relation unterliegt nämlich der Beschränkung, daß sie sich nicht auf singuläre Ausdrücke und n-stellige Prädikate ausdehnen läßt (und zwar weil letztere Ausdrücke im allgemeinen keine Wahrheitswerte haben).

[14] Vgl. Carnap ^{2}1956, § 3 und § 5, v.a. S.13 f. und S.23, insbesonders seine Definitionen in 3-5 und 5-1.

(D4) x ist ein verallgemeinerter Äquivalenzsatz von $\mathscr{L}$ $:\Leftrightarrow$
$$x \in \{x \,|\, Satz\,(x, \mathscr{L})\} \ \ \&$$
$$(\exists s_1, s_2, F_1, F_2, S_1, S_2)\,(x = \ulcorner s_1 = s_2 \urcorner \curlyvee$$
$$x = \ulcorner (\bigwedge \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n})\,(F_1\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n} \leftrightarrow F_2\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n})\urcorner \curlyvee$$
$$x = \ulcorner S_1 \leftrightarrow S_2 \urcorner)$$[15]

Wenn A_1 und A_2 zwei extensionsfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$ sind und wenn weiters x ein verallgemeinerter Äquivalenzsatz von $\mathscr{L}$ ist (d.h. ein Satz von $\mathscr{L}$ ist, der aufgrund von (D4) aus A_1 und A_2 gebildet wird), dann schreibe ich x auch durch '$[A_1 \equiv A_2]$' an.[16]

Die Verallgemeinerung des Begriffs der Koextensionalität von zwei n-stelligen Prädikaten, nämlich *Carnaps Relation der Koextensionalität*, kann nun aufgrund von (D4) wie folgt definiert werden (Dabei wird der Ausdruck 'x_1 ist relativ zu *ext* koextensionell mit x_2' durch '$x_1 \equiv_{ext} x_2$' symbolisiert):

(D5) Seien x_1 und x_2 zwei extensionsfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und sei weiters $[x_1 \equiv x_2]$ ein verallgemeinerter Äquivalenzsatz von $\mathscr{L}$, und sei *ext* eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$.
$$x_1 \equiv_{ext} x_2 :\Leftrightarrow Wahr\,([x_1 \equiv x_2], ext)$$

Carnaps Konvention bezüglich der Koextensionalität von zwei n-stelligen Prädikaten erweist sich somit als ein Spezialfall dieser Definition. Dieser Begriff der Koextensionalität basiert auf einem relativen Wahrheitsbegriff, welcher seinerseits auf dem Begriff einer Extensionsfunktion beruht.

Carnaps Vorschlag unterliegt der Beschränkung, daß er nur für solche extensionsfähige Ausdrücke tragfähig ist, welche entweder selber singuläre Ausdrücke bzw. n-stellige Prädikate oder Sätze sind oder sich auf solche Ausdrücke zurückführen lassen. Diese Beschränkung kommt allerdings nur bei all jenen extensionsfähigen Ausdrücken zur Geltung, aus denen sich kein verallgemeinerter Äquivalenzsatz bilden

[15] Hier und im folgenden wird das metasprachlich verwendete 'oder' durch das metasprachliche Zeichen '$\curlyvee$' symbolisiert.

[16] Vgl. Carnap ^{2}1956, § 3, S.13–16.

läßt (falls es derartige extensionsfähige Ausdrücke in $\mathscr{L}$ überhaupt gibt). Unser Vorschlag wird insofern allgemeiner sein als derjenige von Carnap, als er keiner solchen theoretischen Beschränkung unterliegt und bei allen extensionsfähigen Ausdrücken überhaupt funktioniert.

c.2 Unser Vorschlag. Ich definiere im folgenden den Begriff der Koextensionalität auf eine andere Weise als Carnap in *Meaning and Necessity*. Zum besseren Vergleich mit unserer Darlegung des R-Kompositionalitätsprinzips kehre ich dazu sein Verfahren um: Anstatt wie Carnap zunächst den Begriff der Koextensionalität durch einen relativen Wahrheitsbegriff zu definieren und dann erst eine Extensionsfunktion *ext* einzuführen, gehe ich sofort von einer solchen Extensionsfunktion aus und definiere durch diese den Begriff der Koextensionalität. Man kann nämlich diesen Begriff auch direkt durch denjenigen einer Extensionsfunktion definieren. Es geht mir hier also nicht – so wie Carnap – um die Einführung des Begriffs der Extension – denn dieser wurde schon eingeführt –, sondern um die Einführung des Begriffs der Koextensionalität.

Der *Begriff der Koextensionalität* wird deshalb in der vorliegenden Arbeit wie folgt definiert:

(D6) Seien x_1 und x_2 zwei extensionsfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und sei weiters *ext* eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$.
$x_1 \equiv_{ext} x_2 :\Leftrightarrow ext(x_1) = ext(x_2)$

Es ist somit auch die Relation der Koextensionalität eine Äquivalenzrelation, und zwar weil die Identitätsrelation eine solche Äquivalenzrelation ist. Da das Als-Extension-Haben hier als eine Funktion verstanden wird, kann der Ausdruck 'x_1 ist relativ zu *ext* koextensionell mit x_2' als 'x_1 steht zu derselben Entität in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ext* wie x_2' aufgefaßt werden. Dieser letzte Ausdruck wiederum kann auch als 'x_1 steht zu derselben Entität in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation des Als-Extension-Habens wie x_2' aufgefaßt werden bzw. – noch einfacher gesagt – auch als 'x_1 hat (linkstotal und rechtseindeutig) dieselbe Extension wie x_2'.

Angenommen die singulären Ausdrücke, n-stelligen Prädikate und Sätze von $\mathscr{L}$ gehören zu den extensionsfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$. Es ergeben sich dann die folgenden Anwendungsfälle von (D6): Seien $s_1, s_2 \in \{x \mid SgA\ (x, \mathscr{L})\}$, seien weiters $F_1, F_2 \in \{x \mid Prä\ (x, \mathscr{L})\}$ und $S_1, S_2 \in \{x \mid Satz\,(x, \mathscr{L})\}$:

(7) $s_1 \equiv_{ext} s_2 \Leftrightarrow ext\,(s_1) = ext\,(s_2)$

(8) $F_1 \equiv_{ext} F_2 \Leftrightarrow ext\,(F_1) = ext\,(F_2)$

(9) $S_1 \equiv_{ext} S_2 \Leftrightarrow ext\,(S_1) = ext\,(S_2)$

Der allgemeine Anwendungsfall von (D6) lautet also: Seien $A_1, A_2 \in \{x \mid EfA(x, \mathscr{L})\}$:

(10) $A_1 \equiv_{ext} A_2 \Leftrightarrow ext\,(A_1) = ext\,(A_2)$

D.h. ein extensionsfähiger Ausdruck A_1 ist relativ zu *ext* koextensionell mit einem extensionsfähigen Ausdruck A_2 g.d.w. die Extension von A_1 relativ zu *ext* identisch ist mit der Extension von A_2 relativ zu *ext*.[17]

Es läßt sich durch die folgende Konvention ein Zusammenhang zwischen Carnaps Definition der Koextensionalität und unserer Definition dieses Begriffs herstellen:

(K2) Seien x_1 und x_2 zwei extensionsfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und sei weiters $[x_1 \equiv x_2]$ ein verallgemeinerter Äquivalenzsatz von $\mathscr{L}$, und sei *ext* eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$.
$Wahr\,([x_1 \equiv x_2], ext) \Leftrightarrow ext\,(x_1) = ext\,(x_2)$

Es folgt dann aus (D6) und (K2) unmittelbar das folgende Theorem:

[17] D.h. die zu A_1 in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ext* stehende Entität ist identisch mit der zu A_2 in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ext* stehenden Entität; bzw. die Entität, die A_1 (linkstotal und rechtseindeutig) als Extension hat, ist identisch mit derjenigen Entität, die A_2 (linkstotal und rechtseindeutig) als Extension hat.

(T1) Seien x_1 und x_2 zwei extensionsfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und sei weiters $[x_1 \equiv x_2]$ ein verallgemeinerter Äquivalenzsatz von $\mathscr{L}$, und sei *ext* eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$.
$x_1 \equiv_{ext} x_2 \Leftrightarrow Wahr([x_1 \equiv x_2], ext)$

Carnaps Definitionsvorschlag für den Begriff der Koextensionalität erweist sich somit aufgrund der Konvention (K2) als ein Theorem von unserem Alternativvorschlag.

d. Zusammenstellung der Notationen

Es werden hier die in den beiden Abschnitten 2.1.a–b eingeführten Notationen übersichtlich zusammengestellt. Auf der linken Seite der nachfolgenden Tabelle steht jener umgangssprachliche Ausdruck, der durch den auf der rechten Seite stehenden symbolisiert wird. Bei jenen Einträgen, wo man links mehrere umgangssprachliche Ausdrücke vorfindet, soll es sich wieder um synonyme Formulierungen handeln, welche allesamt durch den rechts stehenden Ausdruck symbolisiert werden. Diese synonymen Wendungen klingen, in absteigender Reihenfolge gelesen, zunehmend einfacher. Sie werden schließlich auf eine Wortgruppe zurückgeführt, die die Wendung '(als) Extension haben' enthält. Die Als-Extension-Haben-Redeweise dient dem besseren intuitiven Verständnis der in der vorliegenden Arbeit benützten "offiziellen" extensionstheoretischen Terminologie (also von Fachtermini wie z.B.: 'koextensionell', 'Extension' etc.).

Umgangssprachlicher Ausdruck	*Symbolisierung*
x ist ein singulärer Ausdruck von $\mathscr{L}$	$SgA(x, \mathscr{L})$
x ist ein extensionsfähiger Ausdruck von $\mathscr{L}$	$EfA(x, \mathscr{L})$
x ist ein n-stelliges Prädikat von $\mathscr{L}$	$Prä(x, \mathscr{L})$
x ist ein Satz von $\mathscr{L}$	$Satz(x, \mathscr{L})$
y ist eine extensionsfähige Entität	$EXfE(y)$

x steht in der Relation *ext* zu y/ x steht in der Relation des Als-Extension-Habens zu y/ x hat y als Extension	$Ext\,(x,y)$
der Definitionsbereich einer Extensionsrelation *Ext*	$Dom\,(Ext)$
der Wertebereich einer Extensionsrelation *Ext*	$Ran\,(Ext)$
x steht in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ext* zu y/ x steht in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation des Als-Extension-Habens zu y/ x hat (linkstotal und rechtseindeutig) y als Extension	$ext\,(x,y)$
die Extension von x relativ zu *ext*/ die zu x in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ext* stehende Entität/ die Entität, die x (linkstotal und rechtseindeutig) als Extension hat	$ext\,(x)$
y ist die Extension von x relativ zu *ext*/ y ist die zu x in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ext* stehende Entität/ y ist die Entität, die x (linkstotal und rechtseindeutig) als Extension hat	$y = ext\,(x)$
x_1 ist relativ zu *ext* koextensionell mit x_2/ x_1 steht zu derselben Entität in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation *ext* wie x_2/ x_1 steht zu derselben Entität in der linkstotalen und rechtseindeutigen Relation des Als-Extension-Habens wie x_2/ x_1 hat (linkstotal und rechtseindeutig) dieselbe Entität als Extension wie x_2/ x_1 hat (linkstotal und rechtseindeutig) dieselbe Extension wie x_2	$x_1 \equiv_{ext} x_2$

2.2 Extensionstheoretische Prinzipien

Auf ganz allgemeine Weise gesprochen, ist ein extensionstheoretisches Prinzip ein Prinzip, welches eine Extensionsrelation *Ext* für eine Sprache $\mathscr{L}$ betrifft und dadurch den jeweiligen Begriff des Als-Extension-Habens (d.h. den jeweiligen Extensionsbegriff) charakterisiert. Im folgenden wollen wir auch das Als-Extension-Haben – so wie zuvor schon das Bezeichnen – als eine linkstotale und rechtseindeutige Relation, d.h. als eine Funktion verstehen. Wir werden dementsprechend nur Prinzipien betrachten, welche eine Extensionsfunktion *ext* für eine gemäß der Standardtechnik aufgebaute Sprache $\mathscr{L}$ betreffen.

Nicht nur ein referenztheoretisches, sondern auch ein solches extensionstheoretisches Prinzip läßt sich, aus dem Blickwinkel der Sätze betrachtet, auf zweierlei Weise formulieren:

(i) Man läßt darin offen, von welcher Art jene Entitäten sind, welche die Sätze von $\mathscr{L}$ als Extensionen haben (d.h. von welcher Art deren Extensionen relativ zu *ext* sind).

(ii) Man läßt darin nicht offen, von welcher Art jene Entitäten sind, welche die Sätze von $\mathscr{L}$ als Extensionen haben (sondern legt dies durch eine zusätzliche Annahme fest).

Während ich extensionstheoretische Prinzipien, welche wie in (i) formuliert sind, wieder 'neutral' nenne, nenne ich solche, welche wie in (ii) formuliert sind, 'nicht-neutral'.

So wie das R-Kompositionalitätsprinzip kann auch das E-Kompositionalitätsprinzip als Substitutionsthese auf diese beiden unterschiedlichen Weisen formuliert werden. Wenn man es, wie in (i) beschrieben, d.h. neutral formuliert, dann besagt es – aus der Perspektive der Sätze – folgendes: In jedem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ ändert die Ersetzung von Ausdrücken, welche dieselbe Extension haben, diejenige von S_1 insofern nicht, als S_1 und alle betreffenden Ersetzungsergebnisse dieselbe Extension haben. Kurz gesprochen, besagt es dann, daß in jedem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ *koextensionelle Ausdrücke füreinander unbeschadet der Extension* (d.h. *salva extensione*) *substituierbar* sind.

Wenn man das E-Kompositionalitätsprinzip aber, wie in (ii) beschrieben, d.h. nicht-neutral formuliert, dann legt man durch eine zusätzliche Annahme fest, von welcher Art die Extensionen von Sätzen sind (Man legt z.B. fest, daß es sich dabei um Wahrheitswerte oder um Äquivalenzklassen von Sätzen etc. handelt). Mit dieser Ergänzung versehen, besagt das E-Kompositionalitätsprinzip – aus der Sicht der Sätze – folgendes: In jedem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ ändert die Ersetzung von Ausdrücken, welche dieselbe Extension haben, jenen Wahrheitswert (bzw. jene Äquivalenzklasse etc.), welcher (bzw. welche) die Extension von S_1 ist, insofern nicht, als S_1 und alle betreffenden Ersetzungsergebnisse dieselbe Extension haben. Kurz gesprochen, besagt es dann wegen dieser Festlegung, daß in jedem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ *koextensionelle Ausdrücke füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts* (*der Äquivalenzklasse* etc.) *substituierbar* sind.

Die soeben diskutierten unterschiedlichen Formulierungsweisen bewirken einen analogen Unterschied wie auch schon zuvor bei den referenztheoretischen Prinzipien: Während man nämlich bei (i) aus der Annahme, daß ein Satz S_1, in dem koextensionelle Ausdrücke ersetzt werden, dieselbe Extension hat wie ein betreffendes Ersetzungsergebnis S_2, nichts darüber schließen kann, um welche Entität es sich hierbei handelt, kann man das bei (ii) schon: So kann man bei (ii) wegen der Festlegung und aufgrund der Definition (D6) der Koextensionalität sehr wohl schließen, daß es sich hierbei um einen Wahrheitswert (oder: eine Äquivalenzklasse von Sätzen usw.) handelt.

Ich formuliere in diesem Abschnitt wichtige extensionstheoretische Prinzipien auf beiderlei Weisen. Es folgen zunächst einmal zwei neutrale Formulierungen des E-Kompositionalitätsprinzips.

a. Neutrale Formulierungen

Damit sind die erforderlichen Vorbereitungen getroffen worden, um das E-Kompositionalitätsprinzip in der für die vorliegende Arbeit "offiziellen" Fassung zu präzisieren. Ich führe dazu wieder einige Annahmen von eher allgemeinerer Natur an: Zunächst einmal werden im folgenden – wie gesagt – nur solche Sprachen $\mathscr{L}$ betrachtet, die gemäß der Standardtechnik aufgebaut sind. Es wird weiters das Als-Extension-Haben als eine Funktion aufgefaßt. Zudem wird offengelassen, von welcher Art jene Entitäten sind, welche die Sätze von $\mathscr{L}$ als Extensionen haben. Man kann etwa wieder geeignete mengentheoretische Entitäten als Stellvertreter für die Extensionen der Sätze von $\mathscr{L}$ wählen und damit die Frage nach der Art von deren Extensionen momentan hintanstellen.

Das *Kompositionalitätsprinzip der Extension* kann man als Substitutionsthese auf die folgende Weise präzisieren (Dabei wird wieder der Ausdruck 'x ist ein Kontext von $\mathscr{L}$' durch '$Kont(x, \mathscr{L})$' symbolisiert): Seien im folgenden der Wertebereich der gebundenen Variablen 'C_1', 'C_2' die Menge $\{x \mid Kont(x, \mathscr{L})\}$ sowie derjenige der gebundenen Variablen 'A_1', 'A_2' die Menge $\{x \mid EfA(x, \mathscr{L})\}$:

(E) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$
$$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \;\&\; A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2)$$

D.h.: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in einem Kontext C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 relativ zu *ext* koextensionell mit A_2 ist, dann ist C_1 relativ zu *ext* koextensionell mit C_2 (für alle C_1, C_2, A_1, A_2, ext). Vereinfacht ausgedrückt, besagt dies: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in einem Kontext C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 dieselbe Extension hat wie A_2, dann hat C_1 dieselbe Extension wie C_2 (für alle C_1, C_2, A_1, A_2).

Analog zu (R) besagt (E) aus der Sicht der Sätze, daß jeder Kontext (hier: Satz) C_1 von $\mathscr{L}$ die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken hat. Damit ist die Eigenschaft eines Satzes gemeint, daß darin koextensionelle Ausdrücke füreinander unbeschadet der Extension substituierbar sind. Wir werden auch diese Eigenschaft noch definieren, und zwar im nachfolgenden Abschnitt über die extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffe.

Man kann mit Hilfe des Theorems (T1) die Substitutionsthese (E) auf eine äquivalente Weise formulieren, indem man nicht – so wie bei (E) – den Begriff der Koextensionalität zugrunde legt, sondern einen auf einer Extensionsfunktion beruhenden relativen Wahrheitsbegriff. Gemäß (T1) sind nämlich zwei extensionsfähige Ausdrücke – wie etwa zwei singuläre Ausdrücke, *n*-stellige Prädikate, Sätze – dann und nur dann koextensionell, wenn der aus zwei solchen Ausdrücken gebildete verallgemeinerte Äquivalenzsatz wahr ist. Demnach lautet die aufgrund von (T1) mit (E) äquivalente Formulierung des Kompositionalitätsprinzips der Extension wie folgt:

(E′) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \ \& \ Wahr([A_1 \equiv A_2], ext) \Rightarrow$
$Wahr([C_1 \equiv C_2], ext))$

D.h.: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in einem Kontext C_1 durch A_2 ist und wenn der verallgemeinerte Äquivalenzsatz $[A_1 \equiv A_2]$ relativ zu *ext* wahr ist, dann ist der verallgemeinerte Äquivalenzsatz $[C_1 \equiv C_2]$ relativ zu *ext* wahr (für alle C_1, C_2, A_1, A_2, ext).

Unserem Postulat über die extensionsfähigen Ausdrücke von $\mathscr{L}$ entsprechend ergeben sich aus (E) sowie (E′) eine Reihe von Spezifikationen. Angenommen die singulären Ausdrücke, *n*-stelligen Prädikate und Sätze von $\mathscr{L}$ sind solche extensionsfähigen Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und angenommen weiters, die Kontexte, in denen ersetzt wird, sind die Sätze von $\mathscr{L}$. Es ergeben sich dann aus (E) sowie (E′) – wie beim R-Kompositionalitätsprinzip – Spezifikationen für die singulären Ausdrücke, *n*-stelligen Prädikate und Sätze von $\mathscr{L}$. Dazu werden wir wieder zwei solche Spezifikationsschritte vornehmen (Der zweite für die Sätze erfolgt dabei wegen der Frage nach der Art der Extensionen). Der Kürze halber werden wir aber im folgenden von diesen Spezifikationen nur diejenigen von (E) und (E′) für singuläre Ausdrücke explizit anführen (Diejenigen für *n*-stellige Prädikate und Sätze kann man sich anhand der beiden angeführten Spezifikationen leicht selber nachbilden).

Seien im folgenden der Wertebereich der Metavariablen 's_1', 's_2' die Menge $\{x \mid SgA\,(x, \mathscr{L})\}$ sowie derjenige von 'S_1', 'S_2' die Menge $\{x \mid Satz(x, \mathscr{L})\}$:

- Spezifikation von (E) für singuläre Ausdrücke (Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-singulären-Ausdrücken):

(EA) $(\forall S_1, S_2, s_1, s_2, ext)$
$(Erg(S_2, S_1(s_1 // s_2))\ \&\ s_1 \equiv_{ext} s_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ext} S_2)$

Einfacher gesagt, heißt dies: Wenn S_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von einem singulären Ausdruck s_1 in einem Satz S_1 durch einen singulären Ausdruck s_2 ist und wenn s_1 dieselbe Extension hat wie s_2, dann hat S_1 dieselbe Extension wie S_2 (für alle S_1, S_2, s_1, s_2).

- Spezifikation von (E′) für singuläre Ausdrücke (Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-singulären-Ausdrücken):

(EA′) $(\forall S_1, S_2, s_1, s_2, ext)$
$(Erg(S_2, S_1(s_1 // s_2))\ \&\ Wahr\,([s_1 \equiv s_2], ext) \Rightarrow$
$Wahr\,([S_1 \equiv S_2], ext))$

Vereinfacht ausgedrückt, besagt dies: Wenn S_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von einem singulären Ausdruck s_1 in einem Satz S_1 durch einen singulären Ausdruck s_2 ist und wenn der Satz $\ulcorner s_1 = s_2 \urcorner$ relativ zu *ext* wahr ist, dann ist der Satz $\ulcorner S_1 \leftrightarrow S_2 \urcorner$ relativ zu *ext* wahr (für alle S_1, S_2, s_1, s_2, ext).

Gemäß diesen Spezifikationen sind in jedem Satz S_1 von $\mathscr{L}$ koextensionelle singuläre Ausdrücke sowie koextensionelle *n*-stellige Prädikate und Sätze salva extensione substituierbar. Die Sätze (EA) sowie (EA′) entsprechen übrigens Quineschen Formulierungen des Prinzips der Substituierbarkeit der Identität.[18]

[18] Quine formuliert zwar in (Quine 1978) das Prinzip der Substituierbarkeit der Identität zunächst wie folgt: $\ulcorner(\alpha = \beta \wedge F\alpha) \rightarrow F\beta\urcorner$. Er bezeichnet aber gleich anschließend: $\ulcorner\alpha = \beta \rightarrow (F\alpha \leftrightarrow F\beta)\urcorner$ als nützlichere Variante dieses Prinzips; vgl. Quine 1978, § 6, S.31 f. Weiters formuliert er in (Quine 1940) das Prinzip der

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß in diesen neutralen Formulierungen des E-Kompositionalitätsprinzips – ähnlich wie schon zuvor bei den neutralen referenztheoretischen Prinzipien – offengelassen ist, von welcher Art die Extensionen der Sätze von $\mathscr{L}$ relativ zu *ext* sind. Die mengentheoretischen Stellvertreter für die Extensionen der Sätze von $\mathscr{L}$ werden wieder nicht philosophisch gedeutet: Es wird nicht gesagt, ob sie etwa als Wahrheitswerte oder als Äquivalenzklassen von Sätzen usw. zu verstehen sind. Aus der Annahme, daß zwei extensionsfähige Ausdrücke – wie etwa zwei Sätze – dieselbe Extension haben, folgt deswegen nichts darüber, um welche Art von Entität es sich hierbei handelt.

Ich widme mich nun im folgenden extensionstheoretischen Prinzipien, in denen die Art der Extensionen der Sätze von $\mathscr{L}$ nicht mehr offengelassen wird (d.s. die nicht-neutralen Formulierungen des E-Kompositionalitätsprinzips).

b. Wahrheitswerte als Extensionen

Es wird im folgenden durch eine zusätzliche Annahme angegeben, von welcher Art die Extensionen der Sätze von $\mathscr{L}$ relativ zu *ext* sind. Angenommen Wahrheitswerte sind solche Extensionen, d.h.:

$$(\mathrm{W}_2) \quad (\forall x, y, ext)\,(Satz(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ext(x) \Rightarrow Wahrw(y))$$

Ergänzt man die beiden äquivalenten Formulierungen des Kompositionalitätsprinzips der Extension um diese Annahme – d.h. bildet man die Konjunktion von (E) und (W_2) bzw. von (E′) und (W_2) –, so erhält man die beiden äquivalenten Formulierungen des *Wahrheitswert-als-Extension-erhaltenden Kompositionalitätsprinzips*. Beide Formulierungen besagen – aus der Sicht der Sätze –, daß jeder

Substituierbarkeit der Identität wie folgt: "If ϕ' is like ϕ except for containing free occurences of α' in place of some free occurences of α, then $\vdash \ulcorner \alpha = \alpha' \rightarrow (\phi \leftrightarrow \phi')\urcorner$"; vgl. Quine 1940, § 29, S.160. Bei (EA) und (EA′) handelt es sich somit um extensionstheoretische Formulierungen der nützlicheren Variante des Prinzips der Substituierbarkeit der Identität.

Kontext (hier: Satz) C_1 von $\mathscr{L}$ die Eigenschaft der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken hat (Damit ist die Eigenschaft eines Satzes gemeint, daß darin koextensionelle Ausdrücke füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar sind):

(WE) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2)\ \&$
$(\forall x, y, ext)\,(Satz(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ext\,(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$

Man kann sich nun so wie schon zuvor bei (WR) überlegen, daß aus der Annahme, daß zwei Sätze dieselbe Extension haben, aufgrund von (WE) und der Definition (D6) der Koextensionalität folgt, daß die beiden Sätze auch denselben Wahrheitswert als Extension haben. Die Begründung ist völlig analog zu vorhin und braucht deshalb hier nicht eigens angeführt zu werden.

Die aufgrund von (T1) mit (WE) äquivalente Formulierung des Wahrheitswert - als - Extension - erhaltenden Kompositionalitätsprinzips lautet:

(WE′) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ Wahr\,([A_1 \equiv A_2], ext) \Rightarrow$
$Wahr\,([C_1 \equiv C_2], ext))\ \&$
$(\forall x, y, ext)\,(Satz(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ext\,(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$

Es werden im folgenden von den sich aus (WE) sowie (WE′) ergebenden Spezifikationen – für die drei Arten von extensionsfähigen Ausdrücken von $\mathscr{L}$ – nur diejenige von (WE) für Sätze explizit angegeben (Dabei werden wieder wie bisher zwei Spezifikationsschritte vorgenommen):

- Spezifikation von (WE) für Sätze (Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Sätzen):

  (WES) $(\forall S_1, S_2, T_1, T_2, ext)$
  $(Erg(S_2, S_1(T_1//T_2))\ \&\ T_1 \equiv_{ext} T_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ext} S_2)\ \&$
  $(\forall x, y, ext)\,(Satz(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ext\,(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$

Wie gesagt, folgt aus der Annahme, daß zwei Sätze dieselbe Extension haben, aufgrund von (WE) und (D6), daß sie denselben Wahrheitswert als Extension haben. Man kann deshalb die Quinesche Formulierung (WES) des Prinzips der Wahrheitsfunktionalität mit Hilfe der Relation “x_1 hat denselben Wahrheitswert als Extension wie x_2” wie folgt vereinfachen:

(11) $(\forall S_1, S_2, T_1, T_2)\,(Erg(S_2, S_1(T_1//T_2))$ &
T_1 hat denselben Wahrheitswert als Extension wie $T_2 \Rightarrow$
S_1 hat denselben Wahrheitswert als Extension wie $S_2)$

Die Ausführungen zusammenfassend, kann man also sagen, daß in den nicht-neutralen extensionstheoretischen Prinzipien (WE) bzw. (WE′) nicht mehr offengelassen ist, von welcher Art die Extensionen der Sätze von $\mathscr{L}$ sind. Deren Art wird vielmehr durch eine zusätzliche Annahme festgelegt. Die Auswirkungen dieser Verstärkung von (E) bzw. (E′) sind – aus dem Blickwinkel der Sätze betrachtet – gar nicht so unbedeutsam: So wird nämlich in den beiden neutralen Formulierungen (E) bzw. (E′) des E-Kompositionalitätsprinzips nur gesagt, daß jeder Kontext (hier: Satz) C_1, in dem koextensionelle Ausdrücke ersetzt werden, dieselbe Extension hat wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse C_2 (weshalb die Extensionen von solchen Sätzen aufgrund von (D6) miteinander identisch sind; deren Art bleibt dabei aber wieder offen).

Im Gegensatz dazu wird in den beiden äquivalenten Formulierungen (WE) bzw. (WE′) des Wahrheitswert-als-Extension-erhaltenden Kompositionalitätsprinzips darüber hinaus noch gesagt, daß jeder Kontext (hier: Satz) C_1, in dem koextensionelle Ausdrücke ersetzt werden, denselben Wahrheitswert als Extension hat wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse C_2.

So wie schon zuvor bei den referenztheoretischen Prinzipien haben wir auch bei den extensionstheoretischen Prinzipien zwei Eigenschaften von Kontexten (Sätzen) angetroffen. Da wir diese beiden Eigenschaften im folgenden bei der Untersuchung der beiden extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffe noch benötigen werden, seien sie hier nochmals kurz erwähnt: So ist in (E) – bzw. (E′) – von der Eigenschaft eines Kontexts (Satzes) die Rede, daß darin *koextensionelle Ausdrücke füreinander salva extensione substituierbar* sind. Im Gegensatz dazu ist in (WE) – bzw. in (WE′) – von einer anderen Eigenschaft die Rede, nämlich von der Eigenschaft eines Satzes, daß darin *koextensionelle Ausdrücke füreinander salva veritate*$_2$ *substituierbar* sind.

Die Unterschiedlichkeit dieser beiden Eigenschaften kommt besonders dann wieder klar zum Vorschein, wenn man annimmt, daß Sätze andere Entitäten als Wahrheitswerte als Extensionen haben: Denn dann kann es immer noch wahr sein, daß ein Satz, in dem koextensionelle Ausdrücke ersetzt werden, dieselbe Extension hat wie ein betreffendes Ersetzungsergebnis (etwa weil die beiden Sätze dieselbe Äquivalenzklasse von Sätzen als Extension haben); es ist aber sicherlich falsch, daß zwei solche Sätze denselben Wahrheitswert als Extension haben (eben weil sie eine solche Äquivalenzklasse und nicht einen Wahrheitswert als Extension haben). Zwei Sätze, welche dieselbe Extension haben, können deshalb die erste Eigenschaft haben und zugleich die zweite Eigenschaft nicht haben. Daher sind die beiden Eigenschaften verschieden voneinander, wenn man annimmt, daß Sätze andere Entitäten als Wahrheitswerte als Extensionen haben.[19]

Wenn man aber annimmt, daß Sätze Wahrheitswerte als Extensionen haben, dann sind die beiden Eigenschaften immer noch verschieden voneinander (auch wenn die Unterschiedlichkeit vielleicht nicht mehr so deutlich zum Vorschein kommt wie eben noch): Denn ein Kontext – wie z.B. ein komplexes n-stelliges Prädikat oder ein komplexer singulärer Ausdruck – kann die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken haben, ohne zugleich diejenige der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken haben zu können (eben weil n-stellige Prädikate und singuläre Ausdrücke im allgemeinen keine Wahrheitswerte, sondern andere Entitäten als Extensionen haben).

[19] Für eine ausführlichere Begründung der Verschiedenheit der beiden Eigenschaften siehe die Fußnote 17 auf S.63.

Die Diskussion über die vier Kompositionalitätsprinzipien zusammenfassend, kann man festhalten, daß wir in (R) und (WR) sowie in (E) und (WE) auf insgesamt vier unterschiedliche Eigenschaften von Kontexten gestoßen sind. Der besseren Übersichtlichkeit halber stelle ich diese vier Prinzipien – vertreten durch ihre jeweiligen Bezeichnungen – sowie die jeweils darin angesprochenen Eigenschaften im folgenden Bild zusammen und bespreche anschließend die Unterschiede:

(R) Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken	(E) Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken
(WR) Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken	(WE) Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken

Angenommen die vier in diesem Bild genannten Kompositionalitätsprinzipien werden aus der Perspektive der Sätze betrachtet (d.h. Sätze sind die Kontexte, in denen ersetzt wird). In einfachen Worten ausgedrückt, besagen dann alle diese Prinzipien, daß jeder Satz S_1 von $\mathscr{L}$ die betreffende – unterhalb der Bezeichnung des jeweiligen Prinzips aufgelistete – Eigenschaft hat: So besagt z.B. (R), daß jeder Satz S_1 von $\mathscr{L}$ die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken hat.

Wie wir gesehen haben, sind die vier in diesen Prinzipien angesprochenen Eigenschaften verschieden voneinander.[20] Aber worin unter-

[20] Ein weiterer Hinweis für die Verschiedenheit dieser vier Eigenschaften sei noch erwähnt: Da keines dieser vier Prinzipien logisch äquivalent mit einem der anderen ist, sind die vier darin angesprochenen Eigenschaften verschieden von-

scheiden sie sich nun genau genommen voneinander? Zur Erläuterung der Unterschiede, welche zwischen diesen vier Eigenschaften bestehen, führe ich zunächst einmal eine abkürzende Redeweise ein: Statt 'die in einem Prinzip (X) angesprochene Eigenschaft so und so' (wobei X eines der vier Prinzipien ist) sage ich kürzer 'die X-Eigenschaft'; z.B.: statt 'die im Prinzip (R) angesprochene Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken' sage ich kürzer 'die R-Eigenschaft' usw. Es läßt sich dann der intuitive Gehalt dessen, was es heißt, daß ein Satz S_1 von $\mathscr{L}$ – in dem koreferentielle bzw. koextensionelle Ausdrücke ersetzt werden – eine dieser vier Eigenschaften hat, in Form von Äquivalenzsätzen wie folgt erläutern:

- S_1 hat die R-Eigenschaft $\Leftrightarrow$ S_1 bezeichnet dasselbe wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse S_2

- S_1 hat die WR-Eigenschaft $\Leftrightarrow$ S_1 bezeichnet denselben Wahrheitswert wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse S_2

- S_1 hat die E-Eigenschaft $\Leftrightarrow$ S_1 hat dieselbe Extension wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse S_2

- S_1 hat die WE-Eigenschaft $\Leftrightarrow$ S_1 hat denselben Wahrheitswert als Extension wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse S_2

Letztlich können wir die Unterschiede zwischen den vier Eigenschaften (und damit auch zwischen den vier Kompositionalitätsprinzipien) – wie im folgenden in (i)–(iii) dargestellt – genau bestimmen:

(i) Die R-Eigenschaft unterscheidet sich von der WR-Eigenschaft in der logischen Stärke (ebenso verhält es sich bei der E-Eigenschaft und WE-Eigenschaft): Es folgt nämlich das Prinzip (R) aus dem Prinzip (WR), aber nicht umgekehrt (WR) aus (R); ebenso folgt (E) aus (WE), aber wiederum nicht umgekehrt (WE) aus (E). Die

einander (Die logische Äquivalenz zweier Prinzipien wird hier als notwendige Bedingung für die Identität der jeweils darin angesprochenen Eigenschaften vorausgesetzt).

WR-Eigenschaft ist demnach echt logisch stärker als die R-Eigenschaft (und völlig analog dazu ist die WE-Eigenschaft echt logisch stärker als die E-Eigenschaft).

(ii) Weiters ist der Unterschied zwischen der R-Eigenschaft und der E-Eigenschaft durch den Unterschied zwischen einer Referenzfunktion und einer Extensionsfunktion begründet (sowie den auf diesen Funktionen jeweils aufbauenden Äquivalenzrelationen der Koreferenzialität und Koextensionalität). Während nämlich im Prinzip (R) nur eine Referenzfunktion (und nicht eine Extensionsfunktion) mit angesprochen ist, ist im Prinzip (E) stattdessen von einer Extensionsfunktion die Rede (aber nicht von einer Referenzfunktion). Völlig analog verhält es sich bei der WR-Eigenschaft und der WE-Eigenschaft.

(iii) Angenommen schließlich, daß sich die Prinzipien (R) und (E) – bzw. (WR) und (WE) – in gewisser Weise entsprechen (aber natürlich nicht im Sinne des Identischseins). Es unterscheiden sich dann die R-Eigenschaft und die WE-Eigenschaft sowohl in der logischen Stärke als auch durch die jeweils zugrunde liegende Funktion voneinander: So folgt nämlich die Entsprechung des Prinzips (R) – d.i. (E) – aus dem Prinzip (WE), aber nicht umgekehrt ((WE) ist also in einem gewissen Sinne logisch stärker als (R)); während aber in (R) eine Referenzfunktion mit angesprochen ist, ist in (WE) stattdessen von einer Extensionsfunktion die Rede (Es liegt also der R-Eigenschaft eine Referenzfunktion und der WE-Eigenschaft eine Extensionsfunktion zugrunde). Ganz ähnlich verhält es sich bei der E-Eigenschaft und WR-Eigenschaft.

2.3 Extensionstheoretische Extensionalitätsbegriffe

Dem Unterschied zwischen einer Referenzfunktion und einer Extensionsfunktion entsprechend kann man den Extensionalitätsbegriff sowohl von einer referenztheoretischen als auch von einer extensionstheoretischen Seite her verstehen: Wenn man der Definition dieses

Begriffs nicht eine Referenzfunktion zugrunde legt, sondern eine Extensionsfunktion, dann versteht man ihn von einer extensionstheoretischen Seite her.

In diesem Abschnitt wird zunächst die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken sowie diejenige der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken definiert. Anschließend werden mittels dieser beiden Eigenschaften die beiden extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffe gewonnen. Der Aufbau der Begriffe ist dabei völlig analog zu demjenigen im Abschnitt 1.3 über die referenztheoretischen Extensionalitätsbegriffe. Ich kann mich deshalb im folgenden kürzer fassen und auf die wichtigsten Punkte beschränken.

Die grundlegendere der beiden eben genannten Eigenschaften ist diejenige der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken (Die andere ergibt sich einfach aufgrund der zusätzlichen Annahme, daß Sätze Wahrheitswerte als Extensionen haben). Man kann – ausgehend von einer Extensionsfunktion *ext* – zunächst die Relation der Salva-Extensione-Substituierbarkeit definieren. Diese Relation zugrunde legend, läßt sich besagte Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken gewinnen. Mit Hilfe letzterer Eigenschaft aber kann man dann den Begriff der "Extensionalität" eines Kontexts im dritten Sinne definieren.

Sei im folgenden $\mathscr{L}$ eine Sprache, die gemäß der Standardtechnik aufgebaut ist, sei weiters *ext* eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$, und seien $A_1, A_2, C_1, C_2 \in X$. Sei weiters offengelassen, von welcher Art die Extensionen der Sätze von $\mathscr{L}$ sind.

Ich definiere zunächst die Relation der Salva-Extensione-Substituierbarkeit:

(D7) A_1 ist in C_1 durch A_2 relativ zu *ext* salva extensione substituierbar :⇔
$$(\forall C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2)$$

Einfacher gesagt, heißt dies: A_1 ist in einem Kontext C_1 durch A_2 genau dann salva extensione substituierbar, wenn für alle C_2 gilt: Wenn

C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 ist, dann hat C_1 dieselbe Extension wie C_2; dann ist also die Extension von C_1 identisch mit derjenigen von C_2. Die so definierte Relation der Salva-Extensione-Substituierbarkeit basiert auf dem Begriff einer Extensionsfunktion.

Ausgehend von dieser Relation der Salva-Extensione-Substituierbarkeit, kann die Eigenschaft eines Kontexts, daß darin koextensionelle Ausdrücke füreinander salva extensione substituierbar sind, wie folgt definiert werden:

(D8) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken :⇔
$(\forall A_1, A_2)\,(A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow A_1$ ist in C_1 durch A_2 relativ zu *ext* salva extensione substituierbar$)$[21]

Es folgt aus (D8) und (D7) das folgende Theorem (wobei die Begründung analog zu derjenigen für das Theorem (TI.1.1) auf S.67 ist):

(T2) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken ⇔
$(\forall A_1, A_2, C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2)$

Vereinfacht ausgedrückt, besagt dies: Ein Kontext C_1 hat dann und nur dann die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken, wenn für alle A_1 sowie A_2 und C_2

[21] Auch die Eigenschaft der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken ergibt sich aus jener der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken durch die Hinzufügung der Annahme (W_2), daß Wahrheitswerte die Extensionen der Sätze von $\mathscr{L}$ relativ zu *ext* sind:

(D9) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken :⇔
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken &
$(\forall x, y, ext)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ext(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$

gilt: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 dieselbe Extension hat wie A_2, dann hat C_1 dieselbe Extension wie C_2.

Die eben definierte Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken eines Kontexts basiert auf der Relation der Salva-Extensione-Substituierbarkeit und damit auf dem Begriff einer Extensionsfunktion. Im folgenden wird mit dieser Eigenschaft die "Extensionalität" eines Kontexts im dritten Sinne gewonnen:

(D10) C_1 ist extensional$_3$ relativ zu *ext* $:\Leftrightarrow$
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken

Demzufolge ist ein Kontext extensional$_3$ g.d.w. darin Ausdrücke, welche dieselbe Extension haben, füreinander unbeschadet der Extension substituierbar sind.[22]

Man kann nun – ausgehend von diesem Begriff der Extensionalität$_3$ eines Kontexts – definieren, was es heißt, daß eine Sprache $\mathscr{L}$ extensional$_3$ ist:

(D12) $\mathscr{L}$ ist extensional$_3$ $:\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, ext)\,(C_1$ ist extensional$_3$ relativ zu $ext)$

[22] Die Extensionalität$_4$ eines Kontexts läßt sich ganz einfach wie folgt definieren:

(D11) C_1 ist extensional$_4$ relativ zu *ext* $:\Leftrightarrow$
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken

Gemäß diesem Schema lassen sich weitere unterschiedliche nicht-neutrale extensionstheoretische Extensionalitätsbegriffe nach Belieben definieren. Man braucht dazu bloß dem Definiens von (D8) die jeweilige Annahme hinzuzufügen, von welcher Art die Extensionen von Sätzen sind (z.B. Äquivalenzklassen von Sätzen etc.).

Extensionale$_3$ Sprachen sind demnach Sprachen, in denen alle Kontexte C_1 die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken haben.[23]

Es folgt aus (D12) sowie (D10) und (T2) das folgende Theorem (wobei die Begründung analog zu der für das Theorem (TI.1.2) ist):

(T3) $\mathscr{L}$ ist extensional$_3$ $\Leftrightarrow$
$$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$$
$$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \mathbin{\&} A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2)$$

Eine Sprache $\mathscr{L}$ ist somit dann und nur dann extensional$_3$, wenn für jeden Kontext C_1 von $\mathscr{L}$ das Kompositionalitätsprinzip der Extension gilt. Sobald das E-Kompositionalitätsprinzip uneingeschränkt für eine Sprache $\mathscr{L}$ gilt, handelt es sich somit bei $\mathscr{L}$ um eine extensionale$_3$ Sprache.[24]

Zusammengefaßt kann man demnach folgendes festhalten: Die Eigenschaft der Extensionalität$_3$, welche ein Kontext (Satz) von $\mathscr{L}$ haben kann, ist die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken. Es bleibt dabei wieder völlig offen, von welcher Art die Extensionen der Kontexte von $\mathscr{L}$ sind. Legt man nun aber – so wie bei (WE) – fest, daß Wahrheitswerte solche

---

[23] Wegen der früheren Bemerkung, daß in der vorliegenden Arbeit verschiedene Sorten von Metavariablen für verschiedene Arten von wohlgeformten Ausdrücken von $\mathscr{L}$ verwendet werden, kann auch hier die Antezedensbedingung, daß C_1 ein Kontext von $\mathscr{L}$ ist, entfallen.

Weiters kann man analog zu (D12) die Extensionalität$_4$ einer Sprache wie folgt definieren:

(D13) $\mathscr{L}$ ist extensional$_4$:$\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, ext)$ (C_1 ist extensional$_4$ relativ zu ext)

[24] Analog zu (T3) erhält man aufgrund von (D7) sowie (D8), (D9), (D11), (D13) und der Quantorenverschiebungsgesetze auch das folgende Theorem:

(T4) $\mathscr{L}$ ist extensional$_4$ $\Leftrightarrow$
$$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$$
$$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \mathbin{\&} A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2) \mathbin{\&}$$
$$(\forall x, y, ext)(Satz(x, \mathscr{L}) \mathbin{\&} y = ext(x) \Rightarrow Wahrw(y))$$

Extensionen sind, dann hat man nicht mehr diese Eigenschaft vor sich liegen, sondern eine andere Eigenschaft, und zwar diejenige der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken. Kontexte (Sätze), welche letztere Eigenschaft haben, sind somit "extensionale" Kontexte (Sätze) in einem anderen als dem dritten Sinne von 'extensional'. Für die so verstandene "Extensionalität" eines Kontexts (Satzes) gebrauche ich den Terminus 'extensional$_4$'. Ich unterscheide also zumindest zwischen den folgenden beiden *extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffen*:

- "Extensionale" Kontexte im *dritten Sinne* (d.h. extensionale$_3$ Kontexte) sind Kontexte, in denen Ausdrücke, welche dieselbe Extension haben, füreinander unbeschadet der Extension substituierbar sind;

- "Extensionale" Kontexte im *vierten Sinne* (d.h. extensionale$_4$ Kontexte) hingegegen sind Kontexte (Sätze), in denen Ausdrücke, welche dieselbe Extension haben, füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar sind.

Man kann im Zusammenhang mit der Extensionalität$_3$ von der 'neutralen extensionstheoretischen Extensionalität' sprechen, weil hier nicht vorausgesetzt ist, von welcher Art die Extensionen von Sätzen sind. Bei der Extensionalität$_4$ dagegen hat man eine Spielart der nicht-neutralen Extensionalität vor sich liegen, weil hier vorausgesetzt ist, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind.

Auch an dieser Stelle trifft die Bemerkung zu, daß die vorliegende Unterscheidung weitere Kreise zieht, wenn man unter der "Intensionalität" eines Kontexts seine Non-"Extensionalität" versteht: Den beiden extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffen entsprechend müßte man dann auch zwischen mindestens zwei zusätzlichen Bedeutungen von 'intensional' unterscheiden.

2.4 Carnaps Frage

Angenommen jeder Satz von $\mathscr{L}$ hat genau eine Entität als Extension. Von welcher Art ist dann die Extension eines Satzes von $\mathscr{L}$? Handelt es sich hierbei etwa um einen Wahrheitswert oder um eine Äquivalenzklasse von Sätzen, oder gar um etwa anderes?

Im folgenden wird Freges Suchstrategie im Zusammenhang mit der Frage nach der Art des Referenzobjekts eines Satzes auch auf die Suche nach der Art seiner Extension übertragen: Wenn Zweifel darüber bestehen, von welcher Art die Extension eines Satzes ist, kann man sich bei der Suche danach von der Substitutionsthese (E) leiten lassen. Wenn aber die betreffende Suche durch (E) angeleitet ist, dann muß man sich natürlich als Nächstes fragen, wann eine Entität aufgrund von (E) überhaupt als die Extension eines Satzes in Frage kommt: Denn schließlich kann – solange für die Suche (E) maßgeblich ist – ein Satz nur eine solche Entität als Extension haben, die auch aufgrund von (E) dafür in Frage kommt. Der Frage nach den Extensionen ist somit die folgende Fragestellung vorgelagert: Welche Entitäten kommen aufgrund von (E) als die Extensionen von Sätzen in Frage?

Diese vorgelagerte Fragestellung läßt sich in völliger Analogie zu Abschnitt 1.4 über Freges Frage wie folgt beantworten (wobei wieder auf beliebige Kontexte verallgemeinert wird):

(D14) e kommt aufgrund von (E) als die Extension von C_1 relativ zu *ext* in Frage $:\Leftrightarrow$
e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu *ext* koextensionellen Ausdrücken in C_1 erhalten

Es läßt sich weiters anhand einer Analyse des Erhaltungsbegriffs, welche wiederum völlig analog zu derjenigen in Abschnitt 1.4 ist – weshalb ich sie hier nicht eigens anführe –, das folgende Theorem gewinnen:

(T5) e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu *ext* koextensionellen Ausdrücken in C_1 erhalten $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2, C_2)\,(Erg\,(C_2, C_1(A_1//A_2))$ &
$A_1 \equiv_{ext} A_2$ & $e = ext\,(C_1) \Rightarrow e = ext\,(C_2))$

Das rechte Bikonditionalglied von (T5) drückt die im vorliegenden Zusammenhang notwendige und hinreichende Erhaltungsbedingung aus. Weiters folgt dann aus (D14) und (T5) unmittelbar das folgende Theorem:

(T6) e kommt aufgrund von (E) als die Extension von C_1 relativ zu *ext* in Frage $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2, C_2)\,(Erg\,(C_2, C_1(A_1//A_2))$ &
$A_1 \equiv_{ext} A_2$ & $e = ext\,(C_1) \Rightarrow e = ext\,(C_2))$

Einfacher ausgedrückt, heißt dies: Eine Entität e kommt somit dann und nur dann aufgrund von (E) als die Extension eines Kontexts C_1 in Frage, wenn für alle A_1 sowie A_2 und C_2 gilt: Wenn C_2 ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 ist und wenn A_1 dieselbe Extension hat wie A_2 und wenn e die Extension von C_1 ist, dann ist e auch die Extension von C_2.

Wie aus der eben skizzierten Analyse hervorgeht, läßt sich die vorgelagerte Fragestellung wie folgt beantworten: Jede Entität e, welche die im rechten Bikonditionalglied von (T6) ausgedrückte Erhaltungsbedingung erfüllt, kommt aufgrund von (E) als die Extension eines Satzes von $\mathscr{L}$ in Frage.

Zwischen Freges Frage nach den Referenzobjekten von Sätzen und Carnaps Frage nach deren Extensionen besteht ein wichtiger Unterschied, auf den ich im folgenden zu sprechen komme. Carnap geht nämlich bei seiner Frage nach der Art der Extensionen von Sätzen nicht uneingeschränkt von der Substitutionsthese (E) aus: So ist sein Prinzip (Ext 3) eine Einschränkung von (E) auf extensionale$_3$ Sätze, d.h. er nimmt (E) nicht für alle Sätze von $\mathscr{L}$ als gültig an, sondern nur für extensionale$_3$ Sätze von $\mathscr{L}$. Demnach sind für seine Frage nach der Art der Extensionen von Sätzen nur extensionale$_3$ Sätze maßgeblich. Infolgedessen ist Carnaps Frage nach den Extensionen nicht die bisherige, sondern eine leicht abgeänderte Fragestellung vorgelagert, und zwar die folgende: Welche Entitäten kommen aufgrund besagter Einschränkung von (E) als die Extensionen von Sätzen in Frage? Er vertritt die Auffassung, daß Wahrheitswerte Entitäten sind, welche – unter dieser Einschränkung von (E) – die Erhaltungsbedingung aus (T6) erfüllen. Deshalb kommen seines Erachtens Wahrheitswerte aufgrund besagter Einschränkung als die Extensionen von Sätzen in Frage.

Im Gegensatz dazu ist Freges Frage nach der Art der Referenzobjekte von Sätzen die Frage vorgelagert, welche Entitäten aufgrund der Substitutionsthese (R) als die Referenzobjekte von Sätzen in Frage kommen. Er schränkt aber die zu untersuchenden Sätze nicht auf extensionale$_1$ Sätze ein. Denn (R) entspricht – wenn die untersuchten Kontexte Sätze sind – voll und ganz (Ref 3) und wird von ihm für alle Sätze von $\mathscr{L}$ als gültig angenommen. Etwaige problematische Fälle versucht er stattdessen durch die Annahme in den Griff zu bekommen, daß das Referenzobjekt eines Satzes kontextabhängig variiert.

Der Unterschied zwischen Freges Frage nach den Referenzobjekten von Sätzen und Carnaps Frage nach deren Extensionen läßt sich also wie folgt auf den Punkt bringen: Während Frege alle Sätze von $\mathscr{L}$ als relevant für die Frage nach deren Referenzobjekte ansieht, betrachtet Carnap bei seiner Frage nach deren Extensionen nur eine Teilmenge der Menge aller Sätze von $\mathscr{L}$ (Er betrachtet nämlich nur extensionale$_3$ Sätze).

Sowohl Freges Suchstrategie im Zusammenhang mit der Frage nach den Referenzobjekten von Sätzen, als auch die Übertragung dieser Strategie auf die Suche nach deren Extensionen sind allerdings mit dem folgenden Problem behaftet: So wie das R-Kompositionalitätsprinzip alleine nicht hinreichend ist, um die Art der Referenzobjekte von Sätzen eindeutig zu determinieren, reicht auch das E-Kompositionalitätsprinzip alleine nicht aus, um die Art von deren Extensionen eindeutig zu bestimmen. So könnte man – statt Wahrheitswerten – etwa Äquivalenzklassen von Sätzen als solche Extensionen wählen.

Es kommt nämlich die Äquivalenzklasse aller Sätze, welche mit einem Satz S_1 koextensionell sind – d.i. $\{x \mid x \equiv_{ext} S_1\}$ –, aufgrund von (E) als die Extension von S_1 in Frage. Man kann sich dies wie folgt überlegen: Angenommen S_2 ist ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in S_1 durch A_2, und angenommen weiters, A_1 ist koextensionell mit A_2. Nach (E) sind dann S_1 und S_2 koextensionell. Wenn aber S_1 und S_2 koextensionell sind, dann gilt auch:

(12) $\{x \mid x \equiv_{ext} S_1\} = \{x \mid x \equiv_{ext} S_2\}$

(und zwar gilt (12) wegen eines bekannten Theorems aus der Theorie der Äquivalenzrelationen, wobei die fragliche Äquivalenzrelation diejenige der Koextensionalität ist).[25] Wenn nun die Äquivalenzklasse aller Sätze, welche mit S_1 koextensionell sind, die Extension von S_1 ist, dann ist somit diese Äquivalenzklasse wegen (12) und der Koextensionalität von S_1 mit S_2 – so wie in (T6) verlangt wird – auch die Extension von S_2. Äquivalenzklassen von Sätzen kommen somit aufgrund von (E) als die Extensionen von Sätzen in Frage. Da sowohl Wahrheitswerte als auch Äquivalenzklassen von Sätzen aufgrund von (E) als die Extensionen von Sätzen in Frage kommen, ist folglich die Substitutionsthese (E) alleine nicht hinreichend, um die Art der Extensionen von Sätzen eindeutig zu determinieren.

2.5 Zusammenfassung

In den letzten beiden Kapiteln wurden die beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips präzisiert und auf ihre Ähnlichkeiten und Unterschiede hin untersucht. Ich fasse diese Ähnlichkeiten und Unterschiede im folgenden kurz zusammen.

Die beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips sind miteinander *ähnlich*, weil es sich bei beiden um Substitutionsthesen handelt, welche eine ähnliche logische Form haben: So wie nämlich beim R-Kompositionalitätsprinzip die Äquivalenzrelation der Koreferen-

[25] Vgl. Dalen/Doets/Swart 1978, S.42.

zialität eine zentrale Rolle spielt, spielt beim E-Kompositionalitätsprinzip diejenige der Koextensionalität eine entsprechende Rolle.

Der grundlegende *Unterschied* zwischen diesen beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips ist in folgendem zu sehen: Während das R-Kompositionalitätsprinzip eine Referenzfunktion betrifft, betrifft das E-Kompositionalitätsprinzip eine Extensionsfunktion. Wie wir gesehen haben, kann man aber zwischen einer Fregeschen Referenzfunktion und einer Carnapschen Extensionsfunktion unterscheiden, und zwar aus den folgenden beiden Gründen: (i) Während bei Frege (R) für alle Sätze von $\mathscr{L}$ gilt, gilt bei Carnap (E) nur für extensionale$_3$ Sätze; (ii) weiters ist bei Frege das Referenzobjekt eines Satzes kontextabhängig, bei Carnap dagegen ist seine Extension kontextunabhängig. Bei Frege können referenzfähige Ausdrücke Entitäten bezeichnen, bei Carnap hingegen können extensionsfähige Ausdrücke lediglich solche Entitäten als Extensionen haben (bzw. besitzen). Während singuläre Ausdrücke als Prototyp für referenzfähige Ausdrücke anzusehen sind, sind *n*-stellige Prädikate als Prototyp für extensionsfähige Ausdrücke zu betrachten. Bei Referenzfunktionen werden im Fall der Sätze typischerweise Entitäten wie Wahrheitswerte oder Sachverhalte als die Funktionswerte einer solchen Funktion angenommen. Bei Extensionsfunktionen hingegen nimmt man in diesem Fall als solche Funktionswerte nicht Sachverhalte an, sondern Wahrheitswerte oder Äquivalenzklassen von Sätzen.

So wie man eine Referenzfunktion von einer Extensionsfunktion unterscheiden kann, kann man auch die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken von derjenigen der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken unterscheiden. Mit der ersten Eigenschaft ist nämlich die Eigenschaft eines Kontexts gemeint, daß darin Ausdrücke, welche dasselbe bezeichnen, füreinander unbeschadet der bezeichneten Entität substituierbar sind. Mit der zweiten Eigenschaft ist dagegen die Eigenschaft gemeint, daß darin Ausdrücke, welche dieselbe Extension haben, füreinander unbeschadet der Extension substituierbar sind. Während aber die erste Eigenschaft auf dem Begriff einer Referenzfunktion basiert, basiert die zweite auf demjenigen einer Extensionsfunktion.

Diesem Unterschied entsprechend können auch die beiden referenztheoretischen Extensionalitätsbegriffe von den beiden extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffen unterschieden werden: Während nämlich die beiden referenztheoretischen Extensionalitätsbegriffe auf der Relation der Salva-Referentia-Substituierbarkeit beruhen, beruhen die beiden extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffe auf derjenigen der Salva-Extensione-Substituierbarkeit. Mit der ersten Relation ist aber die Relation gemeint, daß x_1 in x_2 durch x_3 unbeschadet der bezeichneten Entität substituierbar ist. Mit der zweiten Relation hingegen ist die Relation gemeint, daß x_1 in x_2 durch x_3 unbeschadet der Extension substituierbar ist (x_1 und x_3 sind hier Ausdrücke und x_2 ein Kontext). Während sich aber die erste Relation auf den Begriff einer Referenzfunktion stützt, stützt sich die zweite auf denjenigen einer Extensionsfunktion.

Zusammengefaßt und auf den Punkt gebracht, sind meines Erachtens also zumindest die folgenden *vier Extensionalitätsbegriffe* zu unterscheiden:

(i) Extensionale$_1$ Kontexte sind Kontexte, in denen Ausdrücke, welche dasselbe bezeichnen, füreinander unbeschadet der bezeichneten Entität substituierbar sind;

(ii) Extensionale$_2$ Kontexte sind Kontexte (Sätze), in denen Ausdrücke, welche dasselbe bezeichnen, füreinander unbeschadet des bezeichneten Wahrheitswerts substituierbar sind;

(iii) Extensionale$_3$ Kontexte sind Kontexte, in denen Ausdrücke, welche dieselbe Extension haben, füreinander unbeschadet der Extension substituierbar sind;

(iv) Extensionale$_4$ Kontexte sind Kontexte (Sätze), in denen Ausdrücke, welche dieselbe Extension haben, füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar sind.

Während Frege, wenn er von der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken spricht, die Extensionalität$_2$ eines

Satzes meint, meint Quine mit der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken dessen Extensionalität$_4$.

Auf S.112 haben wir die vier Kompositionalitätsprinzipien (R) sowie (WR), (E) und (WE) sowie die darin jeweils angesprochenen Eigenschaften übersichtlich in einem Bild zusammengestellt. In der vorliegenden Arbeit werden die vier soeben in (i)–(iv) angesprochenen Extensionalitätsbegriffe durch jene vier Eigenschaften definiert. Demnach können wir besagtes Bild durch die Einfügung der vier entsprechenden Extensionalitätsbegriffe wie folgt ergänzen:

(R) Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken Extensionalität$_1$	(E) Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken Extensionalität$_3$
(WR) Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken Extensionalität$_2$	(WE) Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Ausdrücken Extensionalität$_4$

Wie schon erwähnt, besagt (R) – aus der Sicht der Sätze –, daß jeder Satz von $\mathscr{L}$ die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Ausdrücken hat, d.h. extensional$_1$ ist (und analog sind die anderen Einträge des Bildes zu verstehen).

Welche logischen Zusammenhänge bestehen zwischen diesen Extensionalitätsbegriffen? Angenommen, daß es sich bei den Kontexten in (i) und (iii) um Sätze handelt. Die Extensionalität$_2$ ist dann echt stärker als Extensionalität$_1$, weil aus dem Prinzip (WR) das Prinzip (R) folgt, aber andererseits aus dem Prinzip (R) das Prinzip (WR) nicht folgt. Man kann sich das auch wie folgt überlegen: Wenn sich – so wie bei (ii) – der Wahrheitswert, welchen ein Satz S bezeichnet, unter der Substitution von koreferentiellen Ausdrücken nicht ändert, dann ändert sich – so wie (i) besagt – damit auch nicht die Entität, welche S bezeichnet. Andererseits: Wenn sich aber – so wie bei (i) – die Entität, welche ein Satz S bezeichnet, unter der Substitution von koreferentiellen Ausdrücken nicht ändert, dann heißt das noch lange nicht, daß sich – wie (ii) verlangen würde – damit der Wahrheitswert nicht ändert, welchen S bezeichnet. Denn Sätze könnten ganz andere Entitäten als Wahrheitswerte bezeichnen. Analog verhält es sich bei (iii) und (iv): Auch die Extensionalität$_4$ ist echt stärker als die Extensionalität$_3$, und zwar aus einem analogen Grund.

Wir werden im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit im Zusammenhang mit der Untersuchung der beiden "Slingshot-Argumente" sehen, wie aus den beiden Annahmen, daß in einem Kontext logisch äquivalente Sätze sowie koextensionelle singuläre Ausdrücke füreinander salva extensione substituierbar sind, folgt, daß darin auch koextensionelle Sätze füreinander salva extensione substituierbar sind. Wir werden dort weiters sehen, wie sich aufgrund dieses deduktiven Zusammenhangs eine direkte Querverbindung zwischen dem "Slingshot-Argument" von Quine und den beiden soeben besprochenen extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffen herstellen läßt.

Abschließend fasse ich einige unterschiedliche Positionen zusammen, welche hinsichtlich der in der vorliegenden Arbeit besprochenen referenztheoretischen und extensionstheoretischen Prinzipien eingenommen wurden. So kann man solche extensionstheoretische Prinzipien (für Sätze) akzeptieren, (i) ohne daß man irgendeine Entscheidung getroffen hat, ob Sätze überhaupt etwas bezeichnen können; und (ii) wenn man schon meint, daß Sätze etwas bezeichnen können, kann man immer noch unterschiedliche Entscheidungen treffen, um welche Art von Entitäten es sich dabei handelt. So kann man solche extensionstheoretische Prinzipien (für Sätze) akzeptieren, wenn man nicht nur nicht unentschieden ist, sondern überhaupt ablehnt, daß Sätze etwas bezeichnen können (Quines Position). Weiters kann jemand solche extensionstheoretische Prinzipien (für Sätze) akzeptieren, ohne daß er meint, daß Sätze Wahrheitswerte bezeichnen, weil er etwa annimmt, daß Sätze nicht Wahrheitswerte, sondern Sachverhalte bezeichnen (Carnaps Position). Natürlich kann man auch solche extensionstheoretische Prinzipien (für Sätze) akzeptieren und zugleich meinen, daß Sätze Wahrheitswerte bezeichnen (Freges Position). Es sind also hinsichtlich (i) und (ii) eine Reihe von unterschiedlichen Positionen vertreten worden.

II. Die “Slingshot-Argumente”

In den folgenden beiden Kapiteln werden das “Slingshot-Argument” von Gödel (1944) und dasjenige von Quine (1953) als Anwendungsbeispiele für die beiden Arten des Kompositionalitätsprinzips vorgestellt und im sprachlichen Rahmen eines Kalküls der $PL1^=$ (d.h. der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität) formalisiert.

Wie wir früher festgestellt haben, sind singuläre Ausdrücke und n-stellige Prädikate Prototypen, und zwar sind es erstere für referenzfähige und letztere für extensionsfähige Ausdrücke. (Aussage)Sätze sind nun als Prototyp für wahrheitsfähige Ausdrücke anzusehen, d.h. als Prototyp für Ausdrücke, welche wahr oder falsch sein können und bei denen es Sinn macht zu sagen, daß sie wahr oder falsch sind. Nicht jeder Satz, der wahr oder falsch sein kann, ist es auch ohne jegliche Zweifel. Frege steuert diesbezüglich ein Beispiel aus der Umgangssprache bei, und zwar den folgenden Satz[1]:

(1) Odysseus wurde tief schlafend in Ithaka ans Land gesetzt.

Es ist fragwürdig, ob der Eigenname ‘Odysseus’ etwas bezeichnet. Wenn man nun die Leerstelle des einstelligen Prädikats ‘wurde tief schlafend in Ithaka ans Land gesetzt’ durch ‘Odysseus’ ausfüllt, dann ist es somit auch fraglich, ob das Prädikat in diesem Fall überhaupt einem Einzelding zugeschrieben wird und von diesem Einzelding wahr oder falsch ist. Wenn es aber fraglich ist, ob dieses Prädikat von einem Einzelding wahr oder falsch ist, dann ist es auch zweifelhaft, ob unser Satz, der dieses Prädikat enthält, wahr oder falsch ist. Wenn also ein Satz einen Eigennamen enthält, bei dem es fragwürdig ist, ob er etwas bezeichnet, dann ist es somit auch zweifelhaft, ob ein solcher Satz wahr oder falsch ist. Bei Sätzen, wo alle darin vorkommenden Eigennamen etwas bezeichnen, werden diese Zweifel schon geringer. Bezeichnen darüber hinaus überhaupt alle darin vorkommenden referenzfähigen Ausdrücke etwas, dann ist ein solcher Satz wahr oder falsch. In diesem Fall kann nämlich das Wahrsein ebenso wie das Falschsein ganz einfach durch das Bezeichnen definiert werden.

[1] Vgl. Frege 1892b, S.47.

Aber wie können diese Eigenschaften des Wahrseins und des Falschseins von Sätzen definiert werden? Zur Untersuchung dieser Frage verwende ich im folgenden die neutrale Formulierung 'x hat y als semantischen Wert', wenn offen bleiben soll, ob von der Relation des Bezeichnens oder derjenigen des Als-Extension-Habens die Rede ist. Es ist also mit der Relation "x hat y als semantischen Wert" entweder die Relation "x bezeichnet y" oder die Relation "x hat y als Extension" gemeint. Es kann nun das Wahrsein (und damit auch das Falschsein) eines Satzes definiert werden, ohne daß ein solcher Satz in einer der genannten Relationen zu den Wahrheitswerten Wahr oder Falsch stehen muß. Oder anders gesagt, man kann, aber man muß nicht einem Satz einen Wahrheitswert als semantischen Wert zuordnen – sei es als Referenzobjekt, sei es als Extension –, nur um das Wahrsein (und das Falschsein) eines solchen Satzes zu definieren. Es kann demnach die Eigenschaft des Wahrseins (und Falschseins) solcher Sätze von der Relation "x hat y als semantischen Wert" – wo x einen Satz vertritt und y einen der beiden Wahrheitswerte – unterschieden werden.

Ich erläutere im folgenden den soeben angesprochenen Punkt anhand einer aussagenlogischen Sprache $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$. Die Atomsätze einer solchen Sprache haben die Form $\ulcorner Fa_1 \ldots a_n \urcorner$, wo F ein n-stelliges Prädikat von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ ist und $a_1, \ldots, a_n$ Individuenkonstanten von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ sind (Die Atomsätze sind also aus solchen n-stelligen Prädikaten und Individuenkonstanten zusammengesetzt). Angenommen Individuenkonstanten haben Einzeldinge und n-stellige Prädikate Mengen von geordneten n-Tupeln von solchen Einzeldingen als semantische Werte, und angenommen weiters, die Relation "x hat y als semantischen Wert" wird als linkstotal und rechtseindeutig, d.h. als Funktion aufgefaßt. Die hier zu untersuchende Frage lautet dann: Wie können die Eigenschaften des Wahrseins (und Falschseins) aller Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ definiert werden? In der modernen Logik wird aufgezeigt, daß dies auf mindestens zweierlei Weise erfolgen kann:

(W1) Den Sätzen von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ werden dabei nicht semantische Werte zugeordnet.

(W2) Den Sätzen von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ werden dabei semantische Werte zugeordnet.

Bei (W2) kann man je nachdem, von welcher Art die zugeordneten semantischen Werte sind, zwei Fälle unterscheiden:

(W2a) Die semantischen Werte der Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ sind Referenzobjekte.

(W2b) Die semantischen Werte der Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ sind Extensionen.

ad W1) Nach dem ersten Antwortvorschlag ist ein Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ der Form $\ulcorner Fa_1 \ldots a_n \urcorner$ wahr g.d.w. das geordnete n-Tupel der semantischen Werte von $a_1, \ldots, a_n$ ein Element jener Menge ist, die der semantische Wert von F ist; weiters ist ein Satz der Form $\ulcorner \neg S \urcorner$ wahr g.d.w. S nicht wahr (d.h. falsch) ist; weiters ist ein Satz der Form $\ulcorner (S_1 \wedge S_2) \urcorner$ wahr g.d.w. S_1 und S_2 wahr sind; usw. für die anderen aussagenlogischen Junktoren.

Gemäß diesem bekannten rekursiven Verfahren wird zunächst das Wahrsein (und das Falschsein) aller Atomsätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ nur in Abhängigkeit von ihrer Form und den semantischen Werten jener deskriptiven Konstanten erklärt, aus denen sie zusammengesetzt sind (Es wird dabei vorausgesetzt, daß jede solche Konstante genau einen semantischen Wert hat). Durch die üblichen semantischen Klauseln für die aussagenlogischen Junktoren kann man dann auch das Wahrsein (und das Falschsein) aller aus solchen Atomsätzen zusammengesetzten Sätze nur in Abhängigkeit von deren Form und dem Wahrsein (und dem Falschsein) jener Atomsätze erklären, aus denen sie zusammengesetzt sind. Nach diesem rekursiven Verfahren haben somit ausschließlich die deskriptiven Konstanten von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ semantische Werte (Die x-Stelle der Funktion "x hat y als semantischen Wert" wird demnach auf die Individuenkonstanten und n-stelligen Prädikate von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ beschränkt). Bei diesen semantischen Werten handelt es sich – wie gesagt – entweder um Referenzobjekte oder um Extensionen.

ad W2) Nach der zweiten Antwortmöglichkeit ist ein Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ der Form $\ulcorner Fa_1 \ldots a_n \urcorner$ wahr g.d.w. $\ulcorner Fa_1 \ldots a_n \urcorner$ (den Wahrheitswert) 1 als semantischen Wert hat. Man muß aber dann erklären, was es heißt, daß $\ulcorner Fa_1 \ldots a_n \urcorner$ 1 als semantischen Wert hat. So hat $\ulcorner Fa_1 \ldots a_n \urcorner$ 1 als semantischen Wert g.d.w. das geordnete n-Tupel der semantischen Werte von $a_1, \ldots, a_n$ ein Element jener Menge ist, die der semantische Wert von F ist. Weiters hat ein Satz der Form $\ulcorner \neg S \urcorner$ 1 als semantischen Wert g.d.w. S 1 nicht als semantischen Wert hat (d.h. (den Wahrheitswert) 0 als semantischen Wert hat); weiters hat ein Satz der Form $\ulcorner (S_1 \wedge S_2) \urcorner$ 1 als semantischen Wert g.d.w. S_1 und S_2 1 als semantischen Wert haben; usw. für die anderen aussagenlogischen Junktoren.

Gemäß diesem ebenfalls bekannten rekursiven Verfahren wird die Funktion "x hat y als semantischen Wert" – die bei (W1) noch auf die Individuenkonstanten und n-stelligen Prädikate von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ beschränkt war – nun auch auf alle Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ *fortgesetzt*. Dies kann dadurch geschehen, daß man zunächst diese Funktion von den deskriptiven Konstanten auf alle Atomsätze fortsetzt. Man definiert dementsprechend zunächst die Funktion "x hat (den Wahrheitswert) y als semantischen Wert" (mit $y \in \{1, 0\}$) für alle Atomsätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ nur in Abhängigkeit von ihrer Form und den semantischen Werten ihrer deskriptiven Konstanten. Durch die üblichen semantischen Klauseln für die aussagenlogischen Junktoren kann man dann diese Funktion von den Atomsätzen auch auf alle aus Atomsätzen zusammengesetzten Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ weiter eindeutig fortsetzen. Hat man einmal diese Funktion für alle Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ definiert, dann läßt sich das Wahrsein (und das Falschsein) eines Satzes S von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ wie folgt erklären: S ist wahr g.d.w. S (den Wahrheitswert) 1 als semantischen Wert hat (bzw. S ist falsch g.d.w. S (den Wahrheitswert) 0 als semantischen Wert hat). Nach diesem rekursiven Verfahren hat nicht nur jede deskriptive Konstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$ genau einen semantischen Wert, sondern auch jeder Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{ALA}}$, und zwar den Wahrheitswert 1 oder 0 (Die Funktion "x hat y als semantischen Wert" ist demnach nicht auf die Individuenkonstanten und n-stelligen Prädikate von $\mathscr{L}^{\text{ALA}}$ beschränkt, sondern wird auf alle Sätze von $\mathscr{L}^{\text{ALA}}$ fortgesetzt). Bei diesen semantischen Werten handelt es sich wiederum entweder um Referenzobjekte oder um Extensionen.

Die Antwortvorschläge (W1)–(W2) funktionieren – so wie sie hier skizziert wurden – problemlos bei einer aussagenlogischen Sprache wie etwa $\mathscr{L}^{\text{ALA}}$. Bei einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe hingegen müßten sie noch weiter verfeinert werden, wenn man die referentielle Interpretationsweise der Quantoren zugrunde legt. Nach dieser Interpretationsweise ist die Sache nämlich viel komplizierter, als ich sie hier auf eine sehr einfache Weise anhand von $\mathscr{L}^{\text{ALA}}$ erläutert habe. So muß man bei der referentiellen Interpretationsweise der Quantoren auch allen freien Individuenvariablen und offenen Formeln einer solchen prädikatenlogischen Sprache genau einen semantischen Wert zuordnen. Der Punkt, auf den es mir hier aber im Zusammenhang mit dem "Slingshot-Argument" von Gödel ankommt, läßt sich im folgenden auch anhand der viel ausdrucksärmeren Sprache $\mathscr{L}^{\text{ALA}}$ sowie anhand eines nicht-relativierten Wahrheitsbegriffs erläutern.

1 Gödels "Slingshot-Argument"

Gödel geht in seinem Argument beim Fall der wahren singulären Sätze von der Annahme für Konditionalen Beweis aus, daß zwei singuläre Sätze σ_1 und σ_2 beide wahr sind (Ein singulärer Satz ist dabei ein Satz, der mindestens eine Individuenkonstante enthält). Er versucht aufgrund dieser Annahme (und seinen weiteren Voraussetzungen – wie etwa der Annahme, daß das Bezeichnen eine Funktion ist –) zu begründen, daß dann σ_1 und σ_2 dasselbe bezeichnen müssen. Er sagt aber nichts darüber, wie das Wahrsein (und Falschsein) eines Satzes im allgemeinen und eines singulären Satzes im besonderen zu definieren sind. Würde er dies nun wie in (W2a) erklären, dann wären neben seiner Annahme für Konditionalen Beweis und der Annahme einer Referenzfunktion irgendwelche weitere Voraussetzungen völlig überflüssig. Es folgt nämlich bei der Variante (W2a) aus der bloßen Tatsache, daß σ_1 und σ_2 beide wahr sind, unmittelbar aufgrund der Symmetrie und der Transitivität der Identität alleine, daß σ_1 und σ_2 dasselbe bezeichnen müssen.

So ist nach (W2a) σ_1 wahr g.d.w. σ_1 (den Wahrheitswert) 1 bezeichnet; analog ist σ_2 wahr g.d.w. σ_2 (den Wahrheitswert) 1 bezeichnet. Da – laut Annahme – das Bezeichnen als eine Funktion aufgefaßt wird, ist der Ausdruck 'σ_1 bezeichnet (den Wahrheitswert) 1' logisch äquivalent mit '$1 =$ der von σ_1 bezeichnete Wahrheitswert'; Analoges gilt auch für σ_2. Es ergibt sich somit aufgrund der Identitätsgesetze alleine folgendes: der von σ_1 bezeichnete Wahrheitswert $=$ der von σ_2 bezeichnete Wahrheitswert. D.h. σ_1 und σ_2 bezeichnen dasselbe (und zwar den Wahrheitswert 1). Wenn man also wie in (W2a) vorgeht, sind neben der Annahme für Konditionalen Beweis und der Zugrundelegung einer Referenzfunktion keine weiteren Voraussetzungen nötig.

Das Fazit dieser Überlegungen lautet: Im Sinne des Arguments von Gödel sollte die Frage, wie das Wahrsein (und Falschsein) eines Satzes zu definieren ist, nicht wie in (W2a) beantwortet werden, weil sonst sein Argument trivial wird. Diesen Punkt gilt es im folgenden zu beachten.

1.1 Referenztheoretische Modelle

Für die Formalisierung des "Slingshot-Arguments" von Gödel ist – als untersuchte Sprache – eine Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität und einem primitiven Deskriptionsoperator ($= \mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$) erforderlich. Weiters benötigt man dazu eine Semantik für eine solche Sprache. Ich definiere deshalb im folgenden zunächst einmal die Sprache $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$. Anschließend werden die referenztheoretischen Modelle für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ und die zugehörigen referenztheoretischen Klauseln angegeben.

Das Alphabet von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ enthalte als deskriptive (d.h. nicht-logische) Zeichen abzählbar unendlich viele Individuenkonstanten sowie n-stellige Prädikatkonstanten (für jedes $n \geq 1$). Es enthalte weiters als logische Zeichen abzählbar unendlich viele Individuenvariablen sowie den Allquantor '$\bigwedge$', den Existenzquantor '$\bigvee$', den Deskriptionsoperator 'ι', die üblichen Junktoren '$\neg$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$' und '$\leftrightarrow$' und das Identitätszeichen '$=$'. Schließlich enthalte es als Hilfszeichen noch die linke und rechte runde Klammer '(', ')'.

Im folgenden wird eine simultan-rekursive Definition der Formeln und singulären Terme von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ angegeben[2]:

(D1) Die Formeln und singulären Terme von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ (simultan-rekursive Definition):

a. c ist eine Individuenkonstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota} \Rightarrow$
c ist ein singulärer Term von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$

b. v ist eine Individuenvariable von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota} \Rightarrow$
v ist ein singulärer Term von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$

c. v ist eine Individuenvariable von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ &
ϕ ist eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ & v kommt in ϕ frei vor $\Rightarrow$
$\ulcorner \iota v \phi \urcorner$ ist ein singulärer Term von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$

[2] Vgl. Gamut 1991, S.159 f. und Kalish/Montague/Mar ^{2}1980, S.308 f.

d. t_1, t_2 sind singuläre Terme von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota} \Rightarrow$
$\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner$ ist eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$

e. F ist eine n-stellige Prädikatkonstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ &
$t_1, \ldots, t_n$ sind singuläre Terme von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota} \Rightarrow$
$\ulcorner Ft_1 \ldots t_n \urcorner$ ist eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$

f. ϕ, ψ sind Formeln von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota} \Rightarrow \ulcorner \neg\phi \urcorner, \ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner,$
$\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner, \ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner, \ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$ sind Formeln von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$

g. v ist eine Individuenvariable von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ &
ϕ ist eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ & v kommt in ϕ frei vor $\Rightarrow$
$\ulcorner(\bigwedge v)\phi\urcorner, \ulcorner(\bigvee v)\phi\urcorner$ sind Formeln von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$

h. Nichts sonst ist eine Formel oder singulärer Term
von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$

Die Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ sind diejenigen Formeln von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, in denen keine Individuenvariablen frei vorkommen (d.s. die geschlossenen Formeln). Weiters schreibe ich im folgenden für die Menge der Individuenkonstanten '$\mathrm{IK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$' sowie für die der Individuenvariablen '$\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$', für die der definiten Deskriptionen '$\mathrm{DD}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$', für die der singulären Terme '$\mathrm{ST}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$', für die der n-stelligen Prädikatkonstanten '$\mathrm{PK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$' und schließlich für die der Formeln '$\mathrm{FM}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$'. Es gilt dann aufgrund von (D1) für die Menge der singulären Terme:

(2) $\mathrm{ST}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}} = \mathrm{IK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}} \cup \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}} \cup \mathrm{DD}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$

Wir legen nun weiters fest, was die referenzfähigen Ausdrücke im eigentlichen sowie uneigentlichen Sinne von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ sind:

(D2) x ist ein referenzfähiger Ausdruck von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota} :\Leftrightarrow$
$x \in \mathrm{ST}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}} \vee x \in \mathrm{PK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}} \vee x \in \mathrm{FM}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$

(D3) x ist ein referenzfähiger Ausdruck im eigentlichen Sinne von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota} :\Leftrightarrow$
x ist ein referenzfähiger Ausdruck von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ &
$\sim(\exists v)\,(v \in \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$ & v kommt in x frei vor)

(D4) x ist ein referenzfähiger Ausdruck im uneigentlichen Sinne von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$:$\Leftrightarrow$
x ist ein referenzfähiger Ausdruck von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ &
$(\exists v)\,(v \in \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$ & v kommt in x frei vor)

Für die folgende Definition wird der Ausdruck 'x ist ein primitiver referenzfähiger Ausdruck im eigentlichen Sinne von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$' durch '$\mathit{PRfAe}\,(x, \mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota})$' symbolisiert:

(D5) $\mathit{PRfAe}\,(x, \mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}) :\Leftrightarrow x \in \mathrm{IK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}} \vee x \in \mathrm{PK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$

Für die vorliegende formale Sprache gilt also: Die referenzfähigen Ausdrücke im eigentlichen Sinne sind referenzfähige Ausdrücke, die geschlossen sind (d.s. Ausdrücke, in denen keine Individuenvariablen frei vorkommen). Es sind somit definite Deskriptionen ohne freie Individuenvariablen referenzfähige Ausdrücke im eigentlichen Sinne, und zwar Ausdrücke, die nicht-primitiv (d.h. zusammengesetzt) sind. Die referenzfähigen Ausdrücke im uneigentlichen Sinne sind hingegen referenzfähige Ausdrücke, die offen sind (d.s. Ausdrücke, in denen mindestens eine Individuenvariable frei vorkommt). Die Individuenvariablen sind zwar auch primitive referenzfähige Ausdrücke, aber im uneigentlichen Sinne. Es handelt sich nämlich bei solchen Individuenvariablen um offene Ausdrücke, für deren Interpretation Variablenbelegungen zuständig sind. Weiters sind die geschlossenen singulären Ausdrücke von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ – und zwar weil es hier um eine formale Sprache geht – nichts anderes als die geschlossenen singulären Terme von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$: Das sind also in der vorliegenden formalen Sprache die Individuenkonstanten und die definiten Deskriptionen ohne freie Individuenvariablen. Solche geschlossene singuläre Terme gehören – neben den n-stelligen Prädikatkonstanten und Sätzen – zu den referenzfähigen Ausdrücken im eigentlichen Sinne.

In Kapitel I.1 wurde völlig unrelativiert von der Menge aller referenzobjektfähigen Entitäten gesprochen. Diese eher problematische Redeweise wird im folgenden durch eine unproblematischere Redeweise ersetzt. In der modernen *modelltheoretischen Semantik* geht man nämlich vom Begriff des Domains als einem Grundbegriff aus. Unter einem Domain D kann man eine Menge von Einzeldingen verstehen (Es wird somit in der vorliegenden Arbeit darunter nicht eine Menge von Individualbegriffen verstanden). Man kann nun definieren, was eine Entität relativ zu einem solchen Domain ist (Dabei wird der Ausdruck 'y ist eine Entität relativ zu D' durch '$Ent(y, D)$' symbolisiert, und stehe weiters '$\emptyset$' für die leere Menge):

(D6) Sei D eine Menge von Einzeldingen.
$Ent(y, D) :\Leftrightarrow D \neq \emptyset \ \&\ y \in D \cup \mathbb{P}(D^n)$

In (D5) und (D6) wurden somit die beiden Relatamengen einer Referenzfunktion für die deskriptiven Konstanten – d.s. die primitiven referenzfähigen Ausdrücke im eigentlichen Sinne – von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ festgelegt. Es sind dabei die Elemente aus der Potenzmenge $\mathbb{P}$ von D^n als die Referenzobjekte von n-stelligen Prädikatkonstanten gedacht.

Es läßt sich nun eine Referenzfunktion *ref* für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$, die ausschließlich für solche deskriptive Konstanten von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ definiert ist, wie folgt einführen:

(D7) Seien X und Y Mengen, und sei D eine nicht-leere Menge von Einzeldingen.
ref ist eine Referenzfunktion von X in Y für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ relativ zu $D :\Leftrightarrow$
ref ist eine Referenzrelation mit den Relatamengen X und Y für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ relativ zu D – d.h. $X \subseteq \{x \mid PRfAe(x, \mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}})\}\ \&$
$Y \subseteq \{y \mid Ent(y, D)\}\ \&\ ref \subseteq X \times Y$ – &
$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists! y)(y \in Y\ \&\ \langle x, y\rangle \in ref))\ \&$
$(\forall x)(x \in X\ \&\ x \in \mathrm{IK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}} \Rightarrow ref(x) \in D)\ \&$
$(\forall x)(x \in X\ \&\ x \in \mathrm{PK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}} \Rightarrow ref(x) \in \mathbb{P}(D^n))$

Es ist somit das Referenzobjekt einer Individuenkonstante bzw. einer n-stelligen Prädikatkonstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ relativ zu *ref* ein Einzelding aus dem Domain bzw. eine Menge von geordneten n-Tupeln von solchen Einzeldingen.

Für die Interpretation der Individuenvariablen von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ sind nicht solche Referenzfunktionen zuständig, sondern Variablenbelegungen. Im folgenden werden eine Variablenbelegung sowie ihre $[v|d]$-Varianten definiert:

(D8) Sei D eine nicht-leere Menge von Einzeldingen.
g ist eine Variablenbelegung von $\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}}$ in $D :\Leftrightarrow$
g ist eine Funktion von $\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}}$ in D

(D9) Sei g eine Variablenbelegung von $\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}}$ in D, und seien weiters $v \in \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}}$ und $d \in D$.
g' ist eine $[v|d]$-Variante von $g :\Leftrightarrow$
$g' = g[v|d]$ & $g[v|d] = (g \setminus \{\langle v, g(v)\rangle\}) \cup \{\langle v, d\rangle\}$

Eine $[v|d]$-Variante von g ist demnach eine Funktion g', welche sich von g höchstens im Wert d für v unterscheidet (und somit allen von v verschiedenen Individuenvariablen denselben Wert wie g zuordnet). Es gibt also soviele $[v|d]$-Varianten einer Variablenbelegung wie es Einzeldinge im Domain gibt. Jede solche $[v|d]$-Variante einer Variablenbelegung ist selber eine Variablenbelegung von $\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}}$ in D. Es gilt weiters für jedes $v \in \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}}$ sowie jedes $d \in D$: $g[v|d](v) = d$. Man benötigt solche Variablenbelegungen und ihre $[v|d]$-Varianten für die Interpretation der offenen Formeln sowie der Quantorenformeln und definiten Deskriptionen von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$.

Die Definition eines referenztheoretischen Modells für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ lautet nun:

(D10) Ein referenztheoretisches Modell M für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ ist ein Tripel $\langle D, ref, d^\circ\rangle$, so daß gilt:
D ist eine Menge von Einzeldingen &
$(\exists X, Y)$ (ref ist eine Referenzfunktion von X in Y für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ relativ zu D) &
$d^\circ \in D$ ist das ausgezeichnete Nullindividuum[3]

[3] Aufgrund der dritten Bedingung ist D nicht-leer, weshalb man bei der ersten Bedingung diesen Zusatz weglassen kann.

Derartige referenztheoretische Modelle sind durch die zugehörigen referenztheoretischen Klauseln zu ergänzen. Im folgenden werden solche Klauseln gemäß den Varianten (W2a) und (W1) formuliert. Es ergeben sich dadurch zwei alternative Semantiken für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, welche auf der Methode des ausgezeichneten Nullindividuums beruhen.[4] Der Formalisierung des "Slingshot-Arguments" von Gödel wird aber nicht die erste, sondern die zweite Semantik zugrunde gelegt (Die erste wird jedoch an späterer Stelle zu Vergleichszwecken benötigt).

a. Referenztheoretische Klauseln gemäß (W2a)

Die Referenzfunktion *ref* aus einem referenztheoretischen Modell M für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ ist nur für die deskriptiven Konstanten von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ definiert worden. Es wird nun mittels einer simultan-rekursiven Definition eine solche Referenzfunktion *ref* zu einer Referenzfunktion $ref_{M,g}$ für alle referenzfähigen Ausdrücke von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ fortgesetzt. In einer derartigen simultan-rekursiven Definition einer Fortsetzung $ref_{M,g}$ von *ref* werden zunächst einmal den deskriptiven Konstanten von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ jene Entitäten als Referenzobjekte relativ zu $ref_{M,g}$ zugeordnet, die sie zuvor schon von der Referenzfunktion *ref* erhalten haben.

Seien im folgenden $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{ST}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$, seien weiters $F \in \mathrm{PK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$ sowie $\phi, \psi \in \mathrm{FM}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$, und sei $v \in \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$ eine Individuenvariable, welche in ϕ frei vorkommt:

(D11) Sei $M = \langle D, ref, d^{\circ}\rangle$ ein referenztheoretisches Modell für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, und sei weiters g eine Variablenbelegung von $\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$ in D, und sei $g[v|d]$ eine $[v|d]$-Variante von g.

a. $t \in \mathrm{IK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}} \Rightarrow ref_{M,g}(t) := ref(t)$

b. $t \in \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}} \Rightarrow ref_{M,g}(t) := g(t)$

c. $ref_{M,g}(F) := ref(F)$

Es ist somit das Referenzobjekt einer deskriptiven Konstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ relativ zu $ref_{M,g}$ jene Entität relativ zu D, welche ihr schon durch die Referenzfunktion *ref* aus M zugeordnet worden ist. Weiters

[4] Vgl. hierzu die Methode IIIb in (Carnap ^{2}1956, § 8, S.35 ff.).

ist das Referenzobjekt einer Individuenvariable von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ relativ zu $ref_{M,g}$ jene Entität aus D, mit der sie bereits durch die Variablenbelegung g belegt wurde.

Es wird nun das Referenzobjekt einer definiten Deskription von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ relativ zu $ref_{M,g}$ wie folgt definiert[5]:

(D11) d. $(\exists! d)\,(d \in D \;\&\; ref_{M,g[v|d]}(\phi) = 1 \;\&\; d = e) \Rightarrow$
$ref_{M,g}(\ulcorner \iota v \phi \urcorner) = e$
andernfalls $ref_{M,g}(\ulcorner \iota v \phi \urcorner) = d^{\circ}$

Das Referenzobjekt einer definiten Deskription von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ relativ zu $ref_{M,g}$ ist somit von derselben Art wie dasjenige einer Individuenkonstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$, nämlich ein Einzelding d aus D. Wenn es genau ein Einzelding d aus D gibt, so daß gilt: $ref_{M,g[v|d]}(\phi) = 1$ und $d = e$, dann ist e das Referenzobjekt einer solchen definiten Deskription relativ zu $ref_{M,g}$; wenn es nicht genau ein derartiges Einzelding gibt, dann ist ihr Referenzobjekt relativ zu $ref_{M,g}$ das ausgezeichnete Nullindividuum d°.

Man kann nun auch noch das Referenzobjekt einer Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ relativ zu $ref_{M,g}$ – entsprechend ihrer Form – wie folgt definieren:

(D11) e. $ref_{M,g}(\ulcorner Ft_1 \ldots t_n \urcorner) = 1 \Leftrightarrow$
$\langle ref_{M,g}(t_1), \ldots, ref_{M,g}(t_n)\rangle \in ref_{M,g}(F)$[6]
f. $ref_{M,g}(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) = 1 \Leftrightarrow ref_{M,g}(t_1) = ref_{M,g}(t_2)$
g. $ref_{M,g}(\ulcorner \neg\phi \urcorner) = 1 \Leftrightarrow ref_{M,g}(\phi) = 0$
h. $ref_{M,g}(\ulcorner (\phi \wedge \psi) \urcorner) = 1 \Leftrightarrow ref_{M,g}(\phi) = ref_{M,g}(\psi) = 1$
i. $ref_{M,g}(\ulcorner (\phi \vee \psi) \urcorner) = 1 \Leftrightarrow ref_{M,g}(\phi) = 1 \vee ref_{M,g}(\psi) = 1$
j. $ref_{M,g}(\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \urcorner) = 1 \Leftrightarrow ref_{M,g}(\phi) = 0 \vee ref_{M,g}(\psi) = 1$
k. $ref_{M,g}(\ulcorner (\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner) = 1 \Leftrightarrow ref_{M,g}(\phi) = ref_{M,g}(\psi)$
l. $ref_{M,g}(\ulcorner (\bigwedge v)\phi \urcorner) = 1 \Leftrightarrow (\forall d)\,(d \in D \Rightarrow ref_{M,g[v|d]}(\phi) = 1)$
m. $ref_{M,g}(\ulcorner (\bigvee v)\phi \urcorner) = 1 \Leftrightarrow (\exists d)\,(d \in D \;\&\; ref_{M,g[v|d]}(\phi) = 1)$

[5] Für die folgende Klausel vgl. Scott 1967, S.32 oder Gamut 1991, S.161.
[6] Es gelte für jedes $d \in D$ die übliche Konvention, daß $\langle d \rangle = d$.

Damit ist die simultan-rekursive Definition einer Fortsetzung $ref_{M,g}$ von ref auf alle referenzfähigen Ausdrücke von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ abgeschlossen.

Man kann weiters einen relativen Wahrheitsbegriff, der auf einer solchen Referenzfunktion $ref_{M,g}$ beruht, wie folgt einführen (Dabei wird der Ausdruck 'x ist wahr relativ zu $ref_{M,g}$' durch '$Wahr\,(x, ref_{M,g})$' symbolisiert):

(D12) Sei x eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, und sei weiters $M = \langle D, ref, d^{\circ}\rangle$ ein referenztheoretisches Modell für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, und sei g eine Variablenbelegung von $\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$ in D.
$Wahr\,(x, ref_{M,g}) :\Leftrightarrow ref_{M,g}(x) = 1$

Diese erste auf der Methode des ausgezeichneten Nullindividuums beruhende Semantik für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ wurde gemäß der Variante (W2a) entwickelt. Man könnte nun auch weitere semantische Begriffe wie etwa diejenigen der logischen Wahrheit sowie der logischen Äquivalenz definieren. Es wird dieser Weg aber nicht weiter verfolgt, weil dadurch das Argument von Gödel trivial werden würde. So folgt nämlich schon aus der bloßen Annahme alleine, daß zwei Sätze beide wahr relativ zu $ref_{M,g}$ sind, aufgrund von (D11) und (D12), daß sie dasselbe bezeichnen müssen. Ich definiere stattdessen im folgenden diese semantischen Begriffe gemäß der Variante (W1).

b. Referenztheoretische Klauseln gemäß (W1)

Es wird nun eine ebenfalls auf der Methode des ausgezeichneten Nullindividuums beruhende Semantik für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ vorgestellt, welche aber gemäß der Variante (W1) konzipiert wird. Dazu wird im folgenden eine Referenzfunktion ref eingeführt, die ausschließlich für die deskriptiven Konstanten – d.s. die Individuenkonstanten und n-stelligen Prädikatkonstanten – von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ definiert ist. Die semantischen Werte der deskriptiven Konstanten werden demnach als Referenzobjekte aufgefaßt. Es wird weiters in der folgenden simultan-rekursiven Definition das Wahrsein (und Falschsein) aller Formeln (und damit auch aller Sätze) von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ erklärt, ohne solchen Formeln Referenzobjekte relativ zu $ref_{M,g}$ zuzuordnen. Auf diese Weise läßt sich die zuvor besprochene Trivialisierung des Arguments von Gödel vermeiden.

Seien im folgenden wieder $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{ST}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$, seien weiters $F \in \mathrm{PK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$ sowie $\phi, \psi \in \mathrm{FM}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$, und sei $v \in \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$ eine Individuenvariable, welche in ϕ frei vorkommt:

(D13) Sei $M = \langle D, ref, d^\circ \rangle$ ein referenztheoretisches Modell für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, und sei weiters g eine Variablenbelegung von $\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$ in D, und sei $g[v|d]$ eine $[v|d]$-Variante von g.

a. $t \in \mathrm{IK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}} \Rightarrow ref_{M,g}(t) := ref(t)$
b. $t \in \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}} \Rightarrow ref_{M,g}(t) := g(t)$
c. $ref_{M,g}(F) := ref(F)$
d. $(\exists! d)(d \in D \;\&\; Wahr(\phi, ref_{M,g[v|d]}) \;\&\; d = e) \Rightarrow$
$ref_{M,g}(\ulcorner \iota v \phi \urcorner) = e$
andernfalls $ref_{M,g}(\ulcorner \iota v \phi \urcorner) = d^\circ$
e. $Wahr(\ulcorner F t_1 \ldots t_n \urcorner, ref_{M,g}) \Leftrightarrow$
$\langle ref_{M,g}(t_1), \ldots, ref_{M,g}(t_n) \rangle \in ref_{M,g}(F)$
f. $Wahr(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner, ref_{M,g}) \Leftrightarrow ref_{M,g}(t_1) = ref_{M,g}(t_2)$
g. $Wahr(\ulcorner \neg\phi \urcorner, ref_{M,g}) \Leftrightarrow {\sim} Wahr(\phi, ref_{M,g})$
(d.h. $Falsch(\phi, ref_{M,g})$)
h. $Wahr(\ulcorner (\phi \wedge \psi) \urcorner, ref_{M,g}) \Leftrightarrow Wahr(\phi, ref_{M,g}) \;\&\; Wahr(\psi, ref_{M,g})$
i. $Wahr(\ulcorner (\phi \vee \psi) \urcorner, ref_{M,g}) \Leftrightarrow Wahr(\phi, ref_{M,g}) \vee Wahr(\psi, ref_{M,g})$
j. $Wahr(\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \urcorner, ref_{M,g}) \Leftrightarrow$
$Falsch(\phi, ref_{M,g}) \vee Wahr(\psi, ref_{M,g})$
k. $Wahr(\ulcorner (\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner, ref_{M,g}) \Leftrightarrow$
$(Wahr(\phi, ref_{M,g}) \;\&\; Wahr(\psi, ref_{M,g})) \vee$
$(Falsch(\phi, ref_{M,g}) \;\&\; Falsch(\psi, ref_{M,g}))$
l. $Wahr(\ulcorner (\bigwedge v)\phi \urcorner, ref_{M,g}) \Leftrightarrow (\forall d)(d \in D \Rightarrow Wahr(\phi, ref_{M,g[v|d]}))$
m. $Wahr(\ulcorner (\bigvee v)\phi \urcorner, ref_{M,g}) \Leftrightarrow (\exists d)(d \in D \;\&\; Wahr(\phi, ref_{M,g[v|d]}))$

Die Grundannahme einer *referentiellen Deskriptionstheorie* für eine formale Sprache, d.i. die folgende Annahme:

(A) Definite Deskriptionen ohne freie Individuenvariablen bezeichnen so wie Individuenkonstanten Einzeldinge, hat in der Klausel (D13d) unmittelbar Eingang gefunden. Da nach (D1c) definite Deskriptionen singuläre Terme sind, “steckt” (A) nicht nur in der Klausel (D13d), sondern auch in den Klauseln (D13e) und (D13f). Diese drei Klauseln betreffen nämlich unmittelbar singuläre Terme und damit auch definite Deskriptionen: Wenn es sich in (D13e) und (D13f) etwa bei t_1 um eine definite Deskription handelt, dann ist $ref_{M,g}(t_1)$ gerade wegen der Klausel (D13d) definiert. Gödel geht es in seinem Argument um die Widerlegung von (A), d.h. er möchte nachweisen, daß (A) zu absurden Konsequenzen führt. Ich habe deshalb für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ eine Semantik gewählt, welche von (A) ausgeht.

Einen solchen relativen Wahrheitsbegriff zugrunde legend, können nun die semantischen Begriffe der logischen Wahrheit [symbolisch: ‘$LWahr(x)$’], der logischen Äquivalenz [symbolisch: ‘$L\ddot{A}(x_1, x_2)$’] sowie der Erfüllbarkeit [symbolisch: ‘$Erf\ddot{u}llbar(x)$’] wie folgt definiert werden:

(D14) Sei x eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$.
$LWahr(x) :\Leftrightarrow (\forall ref, M, g)\, Wahr(x, ref_{M,g})$

(D15) Seien x_1 und x_2 Formeln von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$.
$L\ddot{A}(x_1, x_2) :\Leftrightarrow LWahr(\ulcorner x_1 \leftrightarrow x_2 \urcorner)$[7]

(D16) Sei x eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$.
$Erf\ddot{u}llbar(x) :\Leftrightarrow (\exists ref, M, g)\, Wahr(x, ref_{M,g})$

Diese zweite auf der Methode des ausgezeichneten Nullindividuums beruhende Semantik für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ wurde gemäß der Variante (W1) entwickelt. Sie wird im folgenden der Formalisierung des “Slingshot-Arguments” von Gödel zugrunde gelegt.

[7] Es gilt in der vorliegenden Arbeit die Konvention, daß bei einer Formel das äußerste Klammerpaar auch weggelassen werden kann.

1.2 Metatheoreme und Lemmata

Ich definiere im folgenden zunächst, was ein singulärer Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ ist, und beweise anschließend zwei Metatheoreme für solche singuläre Sätze. Diese beiden Metatheoreme werden sich als nützlich für die Formalisierung des "Slingshot-Arguments" von Gödel erweisen. Die Voraussetzungen des Gödelschen Arguments lassen sich nämlich in zwei Gruppen einteilen, und zwar in:

(i) Voraussetzungen, die allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbar sind (d.s. die beiden Metatheoreme und das erste Lemma)

und in

(ii) Voraussetzungen, die nicht allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbar sind und die deshalb als gültig postuliert werden müssen (d.s. die Postulate bzw. Prinzipien).

In diesem Abschnitt arbeite ich die Voraussetzungen der ersten Gruppe sowie gewisse Voraussetzungen der zweiten Gruppe heraus.

Ein *singulärer Satz* von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ ist ein Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, der mindestens eine Individuenkonstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ enthält. Wenn σ ein singulärer Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ ist und wenn c eine Individuenkonstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ ist, welche in σ enthalten ist, dann schreibe ich einen solchen singulären Satz auch durch '$\sigma[c]$' an. Sei $\sigma[c]$ ein singulärer Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ und v eine Individuenvariable von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, die in $\sigma[c]$ nicht enthalten ist. Ersetzt man nun alle Vorkommnisse von c in $\sigma[c]$ durch Vorkommnisse von v, dann entsteht dadurch eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, die ich durch '$\sigma[c/v]$' anschreibe.

a. Das erste Metatheorem

Dieses Theorem ist allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbar. Seien im folgenden $M = \langle D, ref, d^{\circ}\rangle$ ein referenztheoretisches Modell für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ sowie g eine Variablenbelegung von $\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}}$ in

D, und seien weiters σ ein singulärer Satz von $\mathscr{L}^{PL1^{=}\iota}$, welcher eine Individuenkonstante c von $IV_{\mathscr{L}^{PL1^{=}\iota}}$ enthält, sowie v eine Individuenvariable von $\mathscr{L}^{PL1^{=}\iota}$, die in $\sigma[c]$ nicht enthalten ist. Das erste Metatheorem für solche singuläre Sätze lautet dann wie folgt:

(T1) $\vdash_{PL1^{=}} (\forall \sigma, c, v, ref, M, g)$
$(Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow Wahr\,(\ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g}))$

Zur Veranschaulichung diene ein umgangssprachliches Beispiel: Wenn der Satz 'Salzburg ist eine Stadt' wahr ist, dann ist es auch der Satz 'Salzburg ist dasjenige Ding, welches eine Stadt und identisch mit Salzburg ist'.

Beweis für (T1):
Seien σ, c, ref, M und g beliebig gewählt, und sei v eine Individuenvariable, welche in $\sigma[c]$ nicht enthalten ist. Angenommen, KB:

(1) $Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g})$

Aus (1) folgt:

(2) $(\exists g)\,Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g})$

Da $\sigma[c]$ ein singulärer Satz ist, enthält $\sigma[c]$ keine freien Vorkommnisse von Individuenvariablen. Das Wahrsein von $\sigma[c]$ relativ zu $ref_{M,g}$ ist deshalb von der Variablenbelegung g unabhängig. Es gilt nämlich für alle Sätze, also auch für solche singuläre Sätze[8]:

(3) $(\exists g)\,Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Leftrightarrow (\forall g)\,Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g})$

Es folgt somit aus (2) aufgrund von (3):

(4) $(\forall g)\,Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g})$

Nun ist $g[v|ref(c)]$ nach (D9) eine Variablenbelegung von $IV_{\mathscr{L}^{PL1^{=}\iota}}$ in D. Es folgt somit daraus aufgrund von (4):

[8] Vgl. Gamut 1991, S.97 f.

(5) $\quad Wahr(\sigma[c], ref_{M,g[v|ref(c)]})$

Zeige zunächst, daß es (6) mindestens ein und (7) höchstens ein $d \in D$ gibt, so daß gilt: $Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d]})$, wobei $d = ref(c)$.

ad 6) Es gilt folgendes:

(6.1) $\quad ref_{M,g[v|ref(c)]}(v) =_{(\mathrm{D13b})} g[v|ref(c)](v) =_{(\mathrm{D9})} ref(c) =_{(\mathrm{D13a})}$
$ref_{M,g}(c) = ref_{M,g[v|ref(c)]}(c)$

($ref_{M,g}(c)$ ist deshalb identisch mit $ref_{M,g[v|ref(c)]}(c)$, weil c keine freien Individuenvariablen enthält; es gilt nämlich für jedes g, g^*: $ref_{M,g}(c) = ref_{M,g^*}(c)$). Es folgt also aus (6.1):

(6.2) $\quad ref_{M,g[v|ref(c)]}(v) = ref_{M,g[v|ref(c)]}(c)$

Aus (6.2) folgt aufgrund von (D13f):

(6.3) $\quad Wahr(\ulcorner v = c\urcorner, ref_{M,g[v|ref(c)]})$

Die Formel $\sigma[c/v]$ ist das Ergebnis der Ersetzung aller Vorkommnisse von c in $\sigma[c]$ durch Vorkommnisse von v (Dabei ist v eine Individuenvariable, welche in $\sigma[c]$ nicht enthalten ist). Die Formel $\sigma[c/v]$ unterscheidet sich somit von $\sigma[c]$ nur darin, daß $\sigma[c/v]$ ausschließlich freie Vorkommnisse von v hat, wo $\sigma[c]$ Vorkommnisse von c hat. Da aber gemäß (6.3) gilt: $Wahr(\ulcorner v = c\urcorner, ref_{M,g[v|ref(c)]})$ und da weiters gemäß (5) gilt: $Wahr(\sigma[c], ref_{M,g[v|ref(c)]})$, folgt somit aufgrund des Leibnizschen Gesetzes und semantischen Aufstiegs folgendes:

(6.4) $\quad Wahr(\sigma[c/v], ref_{M,g[v|ref(c)]})$

Aus (6.4) und (6.3) folgt somit aufgrund von (D13h):

(6.5) $\quad Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|ref(c)]})$ & $ref(c) = ref(c)$

Aus (6.5) folgt aufgrund von EG:

(6.6) $\quad (\exists d)(d \in D$ & $Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d]})$ & $d = ref(c))$

D.h. es gibt mindestens ein $d \in D$, so daß gilt: $Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d]})$, wobei $d = ref(c)$.

ad 7) Es ist weiters zu zeigen, daß für alle $d', d'' \in D$ gilt: Wenn $Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d']})$ und wenn $Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d'']})$, dann $d' = d''$. Angenommen, KB:

(7.1) $Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d']})$ &
$Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d'']})$

Aus (7.1) folgen somit:

(7.2) $Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d']})$

(7.3) $Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d'']})$

Aus (7.2) und (7.3) folgen aufgrund von (D13h) und (D13f):

(7.4) $ref_{M,g[v|d']}(v) = ref_{M,g[v|d']}(c)$

(7.5) $ref_{M,g[v|d'']}(v) = ref_{M,g[v|d'']}(c)$

Es gilt weiters:

(7.6) $d' =_{(\mathrm{D9})} g[v|d'](v) =_{(\mathrm{D13b})} ref_{M,g[v|d']}(v) =_{(7.4)} ref_{M,g[v|d']}(c) =$
$ref_{M,g}(c) =_{(\mathrm{D13a})} ref(c) =_{(\mathrm{D13a})} ref_{M,g}(c) = ref_{M,g[v|d'']}(c) =_{(7.5)}$
$ref_{M,g[v|d'']}(v) =_{(\mathrm{D13b})} g[v|d''](v) =_{(\mathrm{D9})} d''$

(Es gilt wieder für jedes g, g^*: $ref_{M,g}(c) = ref_{M,g^*}(c)$). Es folgt also:

(7.7) $d' = d''$

Aus (7.1) bis (7.7) folgt somit aufgrund von KB und UG:

(7.8) $(\forall d', d'')(d', d'' \in D$ & $Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d']})$ &
$Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d'']}) \Rightarrow d' = d'')$

D.h. es gibt höchstens ein $d \in D$, so daß gilt: $Wahr(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d]})$. Aus (6.6) und (7.8) folgt daher:

(8) $(\exists! d)\,(d \in D \;\&\; Wahr\,(\ulcorner\sigma[c/v] \wedge v = c\urcorner, ref_{M,g[v|d]}) \;\&\; d = ref(c))$

Aus (8) folgt aufgrund von (D13d):

(9) $ref_{M,g}(\ulcorner\iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner) = ref(c) =_{\text{(D13a)}} ref_{M,g}(c)$

Aus (9) folgt somit aufgrund der Symmetrie der Identität und (D13f):

(10) $Wahr\,(\ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g})$

Es folgt also nach (1) bis (10) aufgrund von KB:

(11) $Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow Wahr\,(\ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g})$

Durch UG erhalten wir aus (11) das Theorem (T1).

b. Das erste Lemma

Das folgende Lemma läßt sich aufgrund des Theorems (T1) sowie der referenztheoretischen Klausel für die Identität (vgl. (D13f)) beweisen. Es gehört deshalb in die Gruppe der allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbaren Voraussetzungen (d.i. die erste Gruppe).

(L1) $\vdash_{\mathrm{PL1}^=} (\forall\sigma, c, v, ref, M, g)$
$(Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow c \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner\iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$

Beweis: (L1) gilt aufgrund von (D13f) sowie (DI.1.4) und (T1).

Zur Veranschaulichung diene wieder ein umgangssprachliches Beispiel: Wenn der Satz ‘Salzburg ist eine Stadt’ wahr ist, dann bezeichnen der Eigenname ‘Salzburg’ und die definite Deskription ‘dasjenige Ding, welches eine Stadt und identisch mit Salzburg ist’ dasselbe.

Durch dieses Lemma kann man später die Formalisierung des Gödelschen Arguments abkürzen. Es besagt folgendes: Wenn der singuläre Satz $\sigma[c]$ wahr ist, dann bezeichnet die Individuenkonstante c dasselbe wie die definite Deskription $\ulcorner\iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$, nämlich ein Einzelding. Weil v eine Individuenvariable ist, welche im singulären Satz $\sigma[c]$ nicht enthalten ist, kommt keine Individuenvariable von

$\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ in $\ulcorner \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$ frei vor. Vereinfacht ausgedrückt, besagt somit (L1) folgendes: Wenn ein bestimmter singulärer Satz wahr ist, dann bezeichnet eine bestimmte Individuenkonstante dasselbe wie eine bestimmte definite Deskription ohne freie Individuenvariablen. Es handelt sich deshalb bei (L1) in gewisser Weise um eine formale Entsprechung von (A). Gödel möchte demnach in seinem Argument nachweisen, daß nicht nur (A), sondern auch dessen formale Entsprechung – d.i. (L1) – zu absurden Konsequenzen führt. Deshalb ist seines Erachtens (L1) und damit auch (A) aufzugeben. Da es sich bei (L1) um einen allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbaren metatheoretischen Satz handelt, welcher absurde Konsequenzen aufweist, ist somit sein Argument in weiterer Folge auch gegen eine solche Semantik gerichtet.

c. Das zweite Metatheorem

Aufgrund von (T1) läßt sich weiters das folgende Metatheorem für singuläre Sätze ganz einfach beweisen:

(T2) $\vdash_{\mathrm{PL1}^=} (\forall \sigma, c, v, ref, M, g)\,(Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow$
$Wahr\,(\ulcorner \sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g}))$

Umgangssprachliches Beispiel: Wenn der Satz 'Salzburg ist eine Stadt' wahr ist, dann ist es auch der Satz 'Salzburg ist eine Stadt g.d.w. Salzburg dasjenige Ding ist, welches eine Stadt und identisch mit Salzburg ist'.

Beweis für (T2):
Seien σ, c, ref, M und g beliebig gewählt, und sei v eine Individuenvariable, die in $\sigma[c]$ nicht enthalten ist. Angenommen, KB:

(1) $Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g})$

Aus (T1) folgt nun:

(2) $Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow Wahr\,(\ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g})$

Aus (1) und (2) folgt weiters aufgrund der Aussagenlogik:

(3) $(\mathit{Wahr}(\sigma[c], \mathit{ref}_{M,g}) \;\&\; \mathit{Wahr}(\ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, \mathit{ref}_{M,g})) \vee$
$(\mathit{Falsch}(\sigma[c], \mathit{ref}_{M,g}) \;\&\; \mathit{Falsch}(\ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, \mathit{ref}_{M,g}))$

Aus (3) folgt aber aufgrund der Definition (D13k):

(4) $\mathit{Wahr}(\ulcorner \sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, \mathit{ref}_{M,g})$

Es gilt somit nach (1) bis (4) aufgrund von KB:

(5) $\mathit{Wahr}(\sigma[c], \mathit{ref}_{M,g}) \Rightarrow$
$\mathit{Wahr}(\ulcorner \sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, \mathit{ref}_{M,g})$

Durch UG erhalten wir aus (5) das Theorem (T2).

d. Das zweite Lemma

Man kann aufgrund des Theorems (T2) sowie einem Prinzip aus der Gruppe der nicht-beweisbaren Voraussetzungen ein weiteres Lemma beweisen, das sich bei der Formalisierung des Gödelschen Arguments als nützlich erweisen wird. Da dieses zweite Lemma von einer nicht allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbaren Voraussetzung abhängt, gehört es in die zweite Gruppe. Es erlaubt aber – ebenso wie das Lemma (L1) – die Formalisierung abzukürzen, weshalb es hier schon vorgezogen wird.

Beim fraglichen Prinzip handelt es sich um das referenztheoretische Prinzip, daß logisch äquivalente Sätze S_1 und S_2 von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ dasselbe bezeichnen:

($\mathrm{L_R}$) $(\forall S_1, S_2, \mathit{ref}, M, g)(L\ddot{A}(S_1, S_2) \Rightarrow S_1 \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} S_2)$

Carnap hat dieses Prinzip in *Introduction to Semantics* vertreten, und Church hat es als eine Voraussetzung seines "Slingshot-Arguments" von Carnap übernommen. Selbiges sowie das Theorem (T2) erlauben – wie wir noch sehen werden – einen ganz bestimmten

Beweisschritt im Gödelschen Argument. Es wurde jedoch vielfach kritisiert. So haben etwa Barwise und Perry in ihrer Kritik an den Voraussetzungen von "Slingshot-Argumenten" vor allem dieses Prinzip als unhaltbar zurückgewiesen.[9] Die *Standardform des "Slingshot-Arguments"* besteht nach Barwise und Perry darin, daß aus (L_R) sowie (RT) die (FCG)-These, daß alle wahren Sätze dasselbe bezeichnen (und ebenso alle falschen Sätze), ableitbar ist.

Das aufgrund von (L_R) sowie (T2), (D14), (D15) und einem PL1-Theorem beweisbare Lemma lautet nun wie folgt:

(L2) $\{(L_R)\} \vdash_{PL1^=} (\forall \sigma, c, v, ref, M, g)$
$(LWahr(\sigma[c]) \Rightarrow \sigma[c] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$

Umgangssprachliches Beispiel: Wenn der Satz 'Salzburg ist oder ist nicht eine Stadt' logisch wahr ist, dann bezeichnen die beiden Sätze 'Salzburg ist oder ist nicht eine Stadt' und 'Salzburg ist dasjenige Ding, welches (eine Stadt ist oder nicht ist) und identisch mit Salzburg ist' dasselbe.

Beweis für (L2):

1.	$(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)(Wahr(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow$ $Wahr(\ulcorner \sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g}))$	(T2)
2.	$(\forall S_1, S_2, ref, M, g)(L\ddot{A}(S_1, S_2) \Rightarrow S_1 \equiv_{ref_{M,g}} S_2)$	(L_R)
3.	$LWahr(\sigma[c])$	Ann. f. KB
4.	$(\forall ref, M, g)\, Wahr(\sigma[c], ref_{M,g})$	(D14) 3
5.	$(\forall ref, M, g)(Wahr(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow$ $Wahr(\ulcorner \sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g}))$	UI 1
6.	$(\forall ref, M, g)(Wahr(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow$ $Wahr(\ulcorner \sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g})) \Rightarrow$ $((\forall ref, M, g)\, Wahr(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow (\forall ref, M, g)$ $Wahr(\ulcorner \sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g}))$	PL1-Theorem

[9] Vgl. Barwise/Perry 1981, S.378.

7. $(\forall ref, M, g)\, Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow (\forall ref, M, g)$ MP 5, 6
$Wahr\,(\ulcorner\sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g})$

8. $(\forall ref, M, g)$ MP 4, 7
$Wahr\,(\ulcorner\sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g})$

9. $LWahr\,(\ulcorner\sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$ (D14) 8

10. $L\ddot{A}\,(\sigma[c], \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$ (D15) 9

11. $\sigma[c] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$ MP 10, UI 2

12. $LWahr\,(\sigma[c]) \Rightarrow \sigma[c] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$ KB 3–11

13. $(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)\,(LWahr\,(\sigma[c]) \Rightarrow$ UG 12
$\sigma[c] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$

Das folgende ist ein Korollar zu (T2):

(Kr3) $\vdash_{\mathrm{PL1}^=} (\forall \sigma, c, v)$
$(LWahr\,(\sigma[c]) \Rightarrow LWahr\,(\ulcorner\sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner))$

Für den Beweis siehe die Zeilen 3–9 des vorigen Beweises.

e. Ein weiteres Lemma

Aufgrund von (T2) läßt sich ein weiteres Lemma für singuläre Sätze beweisen, das aber nicht für die Formalisierung des Gödelschen Arguments benötigt wird. Ich führe es hier nur deshalb an, weil man damit – zusammen mit dem Korollar (Kr3) zum vorigen Theorem (T2) – einen interessanten und für dieses Argument wichtigen Punkt diskutieren kann.

Das weitere aufgrund von (T2) beweisbare Lemma lautet wie folgt:

(L3) $\vdash_{\mathrm{PL1}^=} (\forall \sigma, c, v)$
$(Erf\ddot{u}llbar\,(\sigma[c]) \Rightarrow Erf\ddot{u}llbar\,(\ulcorner\sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner))$

Beweis: (L3) gilt aufgrund von (T2) sowie (D16) und dem PL-Theorem '$(\bigwedge \mathtt{x})\,(\mathtt{Fx} \rightarrow \mathtt{Gx}) \rightarrow ((\bigvee \mathtt{x})\,\mathtt{Fx} \rightarrow (\bigvee \mathtt{x})\,\mathtt{Gx})$'.

Nach dem Korollar (Kr3) zum vorigen Lemma (L2) ist nun

(3) $\mathit{LWahr}\,(\sigma[c])$

eine hinreichende Bedingung für

(4) $\mathit{LWahr}\,(\ulcorner \sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$

und damit wegen (D15) auch eine hinreichende Bedingung für

(5) $\mathit{L\ddot{A}}\,(\sigma[c], \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$

Mit der Voraussetzung ($\mathrm{L_R}$) folgt also aus (5), daß

(6) $\sigma[c] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$,

wenn (3) der Fall ist. Weiters ist nach (L3)

(7) $\mathit{Erfüllbar}\,(\sigma[c])$

eine hinreichende Bedingung für

(8) $\mathit{Erfüllbar}\,(\ulcorner \sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$

Die Frage, welche ich im folgenden untersuche, lautet nun: Ist die Annahme von

(9) $\mathit{Wahr}\,(\sigma[c], \mathit{ref}_{M,g})$,

woraus (7) folgt, hinreichend für (4) und damit wegen (D15) auch hinreichend für (5)? Falls ja, dann könnte man aufgrund von ($\mathrm{L_R}$) aus (5) folgern, daß (6), wenn (9) der Fall ist. Gödel könnte dann – solange er ($\mathrm{L_R}$) voraussetzt – auf seine Behauptung (G) verzichten, daß $\sigma[c] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$ (für alle $\sigma, c, v, \mathit{ref}, M, g$) ohne jede Bedingung gilt. Diese Behauptung Gödels läßt sich nämlich – so wie ($\mathrm{L_R}$) übrigens auch – in der vorliegenden Semantik nicht beweisen, sondern muß als gültig postuliert werden.

Ich weise im folgenden jedoch nach, daß (7) nicht hinreichend für (4) ist. Man kommt deshalb bei der Formalisierung des Gödelschen

Arguments an einer ganz bestimmten Stelle nicht ohne jene zusätzliche Behauptung Gödels aus.

Ich beweise nun, daß der folgende metatheoretische Satz im Rahmen der vorliegenden Semantik falsch und damit widerlegbar ist:

(NT) $(\forall\sigma, c, v)$
$(\mathit{Erfüllbar}\,\sigma[c] \Rightarrow \mathit{LWahr}\,(\ulcorner\sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$

Dazu ist es völlig ausreichend, anhand eines einzigen singulären Satzes, welcher die Individuenvariable v nicht enthält, nachzuweisen, daß das folgende falsch ist – wie etwa anhand des Atomsatzes (und damit singulären Satzes) $\ulcorner Fc\urcorner$:

(INT) $\mathit{Erfüllbar}\,(\ulcorner Fc\urcorner) \Rightarrow \mathit{LWahr}\,(\ulcorner Fc \leftrightarrow c = \iota v(Fv \wedge v = c)\urcorner)$

(INT) ist nämlich eine Instanzierung und damit eine einfache logische Konsequenz von (NT). Wenn aber eine solche einfache logische Konsequenz von (NT) falsch ist, dann ist es auch (NT).

Angenommen es gilt:

(1) $\mathit{Erfüllbar}\,(\ulcorner Fc\urcorner)$,

d.h. es gibt mindestens ein ref' sowie ein M' und g', so daß

(2) $\mathit{Wahr}\,(\ulcorner Fc\urcorner, \mathit{ref}'_{M',g'})$

Zeige, daß

(3) $\sim\mathit{LWahr}\,(\ulcorner Fc \leftrightarrow c = \iota v(Fv \wedge v = c)\urcorner)$

Es ist nun der Atomsatz $\ulcorner Fc\urcorner$ nicht logisch wahr, d.h. es gibt mindestens ein weiteres ref sowie M und g, so daß gilt:

(4) $\mathit{Falsch}\,(\ulcorner Fc\urcorner, \mathit{ref}_{M,g})$,

wie etwa beim folgenden referenztheoretischen Modell für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ (wobei das metasprachliche Zeichen '$\emptyset$' für die leere Menge steht):

(5) $M'' = \langle\{0\}, ref'', 0\rangle$,
mit $d^\circ = 0$ & $ref''(c) = 0$ & $ref''(F) = \emptyset$

Dies kann wie folgt begründet werden: Aus

(6) $ref''_{M'',g''}(F) = ref''(F) = \emptyset$

und

(7) $ref''_{M'',g''}(c) = ref''(c) = 0$

folgt aufgrund von (D13e):

(8) $Falsch(\ulcorner Fc \urcorner, ref''_{M'',g''})$,

und zwar weil $\langle ref''_{M'',g''}(c)\rangle \notin ref''_{M'',g''}(F)$. Andererseits gibt es nicht mindestens ein, und deshalb auch nicht genau ein $d \in D$, so daß $Wahr(\ulcorner Fv \wedge v = c \urcorner, ref''_{M'',g''[v|d]})$, und zwar wegen (6). Deshalb gilt wegen (D13d):

(9) $ref''_{M'',g''}(\ulcorner \iota v(Fv \wedge v = c)\urcorner) = 0$

Aus (7) und (9) folgt somit aufgrund der Identitätsgesetze:

(10) $ref''_{M'',g''}(c) = ref''_{M'',g''}(\ulcorner \iota v(Fv \wedge v = c)\urcorner)$

Daraus folgt aufgrund von (D13f):

(11) $Wahr(\ulcorner c = \iota v(Fv \wedge v = c)\urcorner, ref''_{M'',g''})$

Aus (8) und (11) folgt aber aufgrund von (D13k):

(12) $Falsch(\ulcorner Fc \leftrightarrow c = \iota v(Fv \wedge v = c)\urcorner, ref''_{M'',g''})$

Daher ist $\ulcorner Fc \leftrightarrow c = \iota v(Fv \wedge v = c)\urcorner$ nicht logisch wahr (und folglich sind auch die beiden Bikonditionalglieder nicht miteinander logisch äquivalent). Der metatheoretische Satz (INT) erweist sich also als falsch, und somit ist auch (NT) falsch und damit widerlegbar.

Die Annahme der Erfüllbarkeit von $\ulcorner Fc \urcorner$ ist also nicht hinreichend für die logische Wahrheit von $\ulcorner Fc \leftrightarrow c = \iota v\,(Fv \wedge v = c)\urcorner$ und damit auch nicht hinreichend für die logische Äquivalenz von $\ulcorner Fc \urcorner$ mit $\ulcorner c = \iota v\,(Fv \wedge v = c)\urcorner$. Anders gesagt, unter der logischen Äquivalenz zweier Sätze versteht man, daß die beiden Sätze relativ zu denselben Referenzfunktionen sowie Modellen und Variablenbelegungen beide wahr oder aber beide falsch sind. Es mag nun sein, daß unsere beiden Sätze relativ zu denselben Referenzfunktionen sowie Modellen und Variablenbelegungen beide wahr sind. Aber es sind da immer noch jene Referenzfunktionen sowie Modelle und Variablenbelegungen zu beachten, relativ zu denen $\ulcorner Fc \urcorner$ falsch, $\ulcorner c = \iota v(Fv \wedge v = c)\urcorner$ aber wahr ist (siehe z.B. das Modell in (5)). Damit ist die Bedingung der Erfüllbarkeit von $\ulcorner Fc \urcorner$ zu schwach, um $(\mathrm{L_R})$ auf die beiden Sätze anwenden zu können. Es läßt sich deshalb nicht durch (INT) sowie (D15) und das Prinzip $(\mathrm{L_R})$ rechtfertigen, daß $\ulcorner Fc \urcorner$ und $\ulcorner c = \iota v(Fv \wedge v = c)\urcorner$ dasselbe bezeichnen, wenn $\ulcorner Fc \urcorner$ erfüllbar ist. Und damit läßt sich auch nicht durch (NT) sowie (D15) und $(\mathrm{L_R})$ rechtfertigen, daß für alle σ sowie c und v gilt, daß $\sigma[c]$ und $\ulcorner c = \iota v\,(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$ dasselbe bezeichnen, wenn $\sigma[c]$ erfüllbar ist.

Andererseits nützt im Zusammenhang mit dem Argument von Gödel die Annahme der logischen Wahrheit von $\sigma[c]$ nichts. Gödel will ja nicht die These ableiten, daß alle logisch wahren singulären Sätze dasselbe bezeichnen, sondern vielmehr die These ableiten, daß alle wahren – und damit auch alle kontingent wahren – singulären Sätze dasselbe bezeichnen.

1.3 Formalisierung des "Slingshot-Arguments" von Gödel (1944)

Gemäß der Variante (W1), welche wir der Formalisierung zugrunde legen wollen, wird offengelassen, von welcher Art die Referenzobjekte der Sätze sind. Wenn aber jeder Satz genau ein Referenzobjekt haben soll, dann stellt sich das folgende Problem: Wie kann man eine – wie in (W1) – nur für die deskriptiven Konstanten von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ definierte

Referenzfunktion *ref* zu einer Referenzfunktion $ref_{M,g}$ für alle Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ *fortsetzen*. Was sagt uns das "Slingshot-Argument" von Gödel über die Möglichkeiten der Definition einer solchen Fortsetzung $ref_{M,g}$ von *ref* auf die Sätze (und Formeln) von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$?

Gödel versucht anhand seiner Voraussetzungen im Sinne Freges zu begründen, daß alle wahren Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ dasselbe bezeichnen (und ebenso alle falschen Sätze). Was sonst als ihren Wahrheitswert haben aber alle wahren sowie alle falschen Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ in semantischer Hinsicht gemeinsam? Er versucht demnach in weiterer Folge zu begründen, daß Wahrheitswerte und nicht Sachverhalte die Referenzobjekte der Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ sind. Solange man also an den Voraussetzungen Gödels festhält, muß man seines Erachtens eine Referenzfunktion *ref* von den deskriptiven Konstanten so auf die Sätze (und auch Formeln) fortsetzen, daß deren Referenzobjekte Wahrheitswerte und nicht Sachverhalte sind (d.h. wie in (D11)).

Die Frage, welche uns in diesem Zusammenhang beschäftigen wird, lautet nun wie folgt: Sind die Voraussetzungen von Gödel ausreichend, um die Art der von den Sätzen von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ bezeichneten Entitäten eindeutig zu determinieren? Wir haben schon gesehen, daß das R-Kompositionalitätsprinzip alleine hierzu nicht ausreicht.

Wie gesagt, nimmt Gödel gemäß der Grundannahme (A) einer referentiellen Deskriptionstheorie an, daß definite Deskriptionen ohne freie Individuenvariablen so wie Individuenkonstanten Einzeldinge bezeichnen. Wie wir weiters gesehen haben, ist das Lemma (L1) in gewisser Weise eine formale Entsprechung von (A). Denn (L1) besagt – vereinfacht ausgedrückt – folgendes:

(10) Wenn ein bestimmter singulärer Satz wahr ist, dann bezeichnen eine bestimmte Individuenkonstante und eine bestimmte definite Deskription ohne freie Individuenvariablen dasselbe, und zwar ein Einzelding aus dem Domain.

Er selbst versteht aber sein Argument als eine Reductio-ad-Absurdum von (A), d.h. er selbst meint, daß diese Annahme im Verbund mit dem R-Kompositionalitätsprinzip absurde Konsequenzen hat. Seines

Erachtens ist sie aus diesem Grund zu verwerfen. Da weiteres (L1) eine formale Entsprechung von (A) ist, müßte man demnach auch (L1) verwerfen und damit die ganze Semantik, aufgrund derer dieses Lemma beweisbar ist.

Ich werde im folgenden die Argumentskizze von Gödel vervollständigen und im sprachlichen Rahmen eines Kalküls der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität formalisieren. Das Argument von Gödel wird dabei zunächst für die singulären Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ untersucht. Anschließend wird das erzielte Resultat auf beliebige Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ verallgemeinert.

a. Die Voraussetzungen des Gödelschen Arguments

Was sind die Voraussetzungen des "Slingshot-Arguments" von Gödel? Wie gesagt, teile ich diese Voraussetzungen in zwei Gruppen ein, und zwar (i) in die Gruppe der allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbaren Voraussetzungen und (ii) in die Gruppe der nicht allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbaren Voraussetzungen (d.s. die Postulate bzw. Prinzipien).

Seien im folgenden t_1 und t_2 geschlossene singuläre Terme von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ (d.h. Individuenkonstanten oder definite Deskriptionen ohne freie Individuenvariablen), und seien weiters a und b Individuenkonstanten von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ sowie $\sigma[c]$ ein singulärer Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, welcher eine Individuenkonstante c von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ enthält, und sei v eine Individuenvariable von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$, die in $\sigma[c]$ nicht enthalten ist, und seien S_1, S_2, T_1, T_2 Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$:

ad i) Allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbare Voraussetzungen:

- Formale Entsprechung der Grundannahme (A) einer referentiellen Deskriptionstheorie

(L1) $(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)$
$$(Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow c \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$$

(L1) ist eine formale Entsprechung von (A) und folglich jener metatheoretische Satz, welchen Gödel widerlegen möchte. Wie gesagt, läßt sich (L1) aufgrund von (T1) und der referenztheoretischen Klausel für die Identität beweisen.

- Folgerung aus der referenztheoretischen Klausel für die Negation

(N) $(\forall \sigma, c, ref, M, g)$
$(Falsch\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow Wahr\,(\ulcorner \neg\sigma[c]\urcorner, ref_{M,g}))$

ad ii) Nicht allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbare Voraussetzungen:

- Logisch äquivalente Sätze bezeichnen dasselbe

(L_R) $(\forall S_1, S_2, ref, M, g)\,(L\ddot{A}\,(S_1, S_2) \Rightarrow S_1 \equiv_{ref_{M,g}} S_2)$

- Spezifikation von (R) für geschlossene singuläre Terme

(RT) $(\forall S_1, S_2, t_1, t_2, ref, M, g)$
$(Erg(S_2, S_1(t_1//t_2))\ \&\ t_1 \equiv_{ref_{M,g}} t_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref_{M,g}} S_2)$

- Spezifikation von (R) für Sätze

(RS) $(\forall S_1, S_2, T_1, T_2, ref, M, g)$
$(Erg(S_2, S_1(T_1//T_2))\ \&\ T_1 \equiv_{ref_{M,g}} T_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref_{M,g}} S_2)$

- Behauptung Gödels

(G) $(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)$
$\sigma[c] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$

Man könnte im Rahmen der vorliegenden Deskriptionstheorie diese Behauptung durch das unnatürlich klingende Postulat rechtfertigen, daß keine Individuenkonstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ das ausgezeichnete Nullindividuum bezeichnet. Es wären dann $\sigma[c]$ und $\ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge$

$v = c))^\urcorner$ logisch äquivalent und würden deshalb nach (L_R) dasselbe bezeichnen.[10]

Das Postulat (G) hat eine Konsequenz – nämlich (L2) –, die aufgrund des Theorems (T2) und dem Prinzip (L_R) bewiesen werden kann. Ich führe im folgenden trotzdem die Voraussetzung (L2) eigens an, weil man damit den ersten Schritt des Beweises für das spätere Theorem (T3) rechtfertigen kann, ohne daß man dabei auf das Postulat (G) selbst zurückgreifen muß.

- Logisch wahre singuläre Sätze bezeichnen dasselbe wie bestimmte Identitätssätze

(L2) $(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)$
$(LWahr(\sigma[c]) \Rightarrow \sigma[c] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)^\urcorner)$

Wegen dieses Lemmas – das aufgrund des Theorems (T2) und dem Prinzip (L_R) beweisbar ist – läßt sich der erste Schritt im Beweis für das folgende Theorem rechtfertigen:

- Das Theorem für die wahren singulären Sätze

(T3) $(\forall \sigma_1, \sigma_2, a, b, ref, M, g)$
$(Wahr(\sigma_1[a], ref_{M,g})\ \&\ Wahr(\sigma_2[b], ref_{M,g}) \Rightarrow$
$\sigma_1[a] \equiv_{ref_{M,g}} \sigma_2[b])$

Dieses Theorem wird im folgenden Abschnitt aufgrund von (L1) sowie (L2), (RT) und (G) bewiesen und ist eine Voraussetzung für den Fall der falschen singulären Sätze.

Bei der Formalisierung des "Slingshot-Arguments" von Gödel für die singulären Sätze unterscheide ich im folgenden zwei Fälle, und zwar: b. den Fall der wahren singulären Sätze und c. den Fall der falschen singulären Sätze.

[10] Ohne ein derartiges Postulat sind aber in der vorliegenden Semantik $\sigma[c]$ und $\ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c))^\urcorner$ nicht miteinander logisch äquivalent, wie in Abschnitt 1.2.e aufgezeigt wurde.

b. Der Fall der wahren singulären Sätze

Neben den Voraussetzungen: (L1) sowie (L2), (RT) und (G) sind außerdem die folgenden beiden empirischen Prämissen über die Zusammensetzung bestimmter Formeln von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ für den Beweis des Theorems (T3) erforderlich:

(Pr1) $Erg(\ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner, \ulcorner a = \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner$
$(\ulcorner \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner // \ulcorner \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner))$

(Pr2) $Erg(\ulcorner b = \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner, \ulcorner b = \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner$
$(\ulcorner \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner // \ulcorner \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner))$

Seien im folgenden σ_1 und σ_2 beliebige singuläre Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$, und seien weiters a eine beliebige Individuenkonstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$, welche in σ_1 enthalten ist, sowie b eine beliebige Individuenkonstante von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$, die in σ_2 enthalten ist. Das "Slingshot-Argument" von Gödel (1944) für den Fall der wahren singulären Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ lautet dann wie folgt:

(T3) $\{(\mathrm{L1}), (\mathrm{L2}), (\mathrm{RT}), (\mathrm{G}), (\mathrm{Pr1}), (\mathrm{Pr2})\} \vdash_{\mathrm{PL1}^{=}}$
$(\forall \sigma_1, \sigma_2, a, b, ref, M, g)$
$(Wahr(\sigma_1[a], ref_{M,g})\ \&\ Wahr(\sigma_2[b], ref_{M,g}) \Rightarrow \sigma_1[a] \equiv_{ref_{M,g}} \sigma_2[b])$

Aufgrund von (DI.1.4) ist die Relation $\equiv_{ref_{M,g}}$ eine Äquivalenzrelation, d.h. eine reflexive, symmetrische und transitive Relation (siehe S.47 f.). Wenn A_1 und A_2 zwei referenzfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ sind, dann lautet – wie gesagt – der allgemeine Anwendungsfall von (DI.1.4) wie folgt:

(11) $A_1 \equiv_{ref_{M,g}} A_2 \Leftrightarrow ref_{M,g}(A_1) = ref_{M,g}(A_2)$

Es überträgt sich somit die Reflexivität sowie die Symmetrie und die Transitivität der Identität auf die Relation $\equiv_{ref_{M,g}}$. Es gelten also:

(Rf) $(\forall A_1)\, A_1 \equiv_{ref_{M,g}} A_1$

(Sy) $(\forall A_1, A_2)\,(A_1 \equiv_{ref_{M,g}} A_2 \Rightarrow A_2 \equiv_{ref_{M,g}} A_1)$

(Tr) $(\forall A_1, A_2, A_3)\,(A_1 \equiv_{ref_{M,g}} A_2 \;\&\; A_2 \equiv_{ref_{M,g}} A_3 \Rightarrow A_1 \equiv_{ref_{M,g}} A_3)$

Der Beweis für das Theorem (T3) wird mit Hilfe einer solchen Äquivalenzrelation $\equiv_{ref_{M,g}}$ durchgeführt.

Ich skizziere zunächst die Beweisidee für dieses Theorem, das mittels Konditionalem Beweis und anschließender Universeller Generalisierung in den folgenden drei Schritten bewiesen wird:

Schritt 1
Die Annahme für Konditionalen Beweis lautet:

(1) $Wahr\,(\sigma_1[a], ref_{M,g}) \;\&\; Wahr\,(\sigma_2[b], ref_{M,g})$

Da folgendes gilt:

(2) $LWahr\,(\ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner)$,

folgt aus (2) aufgrund von (D14):

(3) $(\forall ref, M, g)\, Wahr\,(\ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner, ref_{M,g})$

Es folgen weiters aus (2) aufgrund von (L2):

(4) $\ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a) \urcorner$

und

(5) $\ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner b = \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b) \urcorner$

(Der singuläre Satz $\ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner$ enthält zwei Individuenkonstanten, nämlich a und b. Man kann deshalb diesen Satz in unserer Notation für singuläre Sätze auf zweierlei Weise anschreiben, und zwar durch '$\sigma[a]$' oder durch '$\sigma[b]$'. Bei der ersten Folgerung (4) ist $\sigma[a]$ somit der singuläre Satz $\ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner$, weshalb $\sigma[a/v]$ die Formel $\ulcorner v = b \vee v \neq b \urcorner$ ist. Bei der zweiten Folgerung (5) ist $\sigma[b]$ ebenfalls der singuläre Satz $\ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner$, weshalb $\sigma[b/v]$ hier die Formel

$\ulcorner a = v \vee a \neq v \urcorner$ ist). Diese beiden Folgerungen lassen sich schematisch wie folgt anschreiben:

$$\begin{array}{ccc} & \ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner & \\ \equiv_{ref_{M,g}} & & \equiv_{ref_{M,g}} \\ \ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a) \urcorner & & \ulcorner b = \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b) \urcorner \end{array}$$

Dieser erste Schritt läßt sich durch (L2) – in dessen Beweis ($\mathrm{L_R}$) eingegangen ist – rechtfertigen. Obwohl (L2) eine Folgerung von (G) ist, ist es an dieser Stelle keineswegs erforderlich, auf das Postulat (G) selbst zurückzugreifen. Man kann hier stattdessen das nicht allein aufgrund der vorliegenden Semantik beweisbare Lemma (L2) zur Rechtfertigung dieses Schrittes verwenden.

Schritt 2
Da weiters wegen (1) und (3) gelten:

(6) $\quad Wahr\,(\sigma_1[a], ref_{M,g})$

und

(7) $\quad Wahr\,(\ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner, ref_{M,g})$,

folgen aus (6) und (7) aufgrund von (L1):

(8) $\quad a \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a) \urcorner$

und

(9) $\quad a \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a) \urcorner$

Aus (8) und (9) folgt somit mit Hilfe der Symmetrie und Transitivität von $\equiv_{ref_{M,g}}$:

(10) $\quad \ulcorner \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a) \urcorner \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a) \urcorner$

Weiters ist der Identitätssatz

(11) $\ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner$

von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ ein Ergebnis der teilweisen Substitution von

(12) $\ulcorner \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner$

in

(13) $\ulcorner a = \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner$

durch

(14) $\ulcorner \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner$

Da zudem wegen (10) schon gilt, daß

(15) $\ulcorner \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner$,

folgt somit aus (11)–(15) aufgrund von (RT):

(16) $\ulcorner a = \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner$

Anderseits gelten wegen (1) und (3) auch:

(17) $\mathit{Wahr}\,(\sigma_2[b], \mathit{ref}_{M,g})$

und

(18) $\mathit{Wahr}\,(\ulcorner a = b \vee a \neq b\urcorner, \mathit{ref}_{M,g})$

Analog zu (6)–(16) folgt aus (17) und (18) aufgrund von (L1) und (RT) auch:

(19) $\ulcorner b = \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner b = \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner$

Das Schema läßt sich somit wie folgt fortsetzen:

$$\ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner$$

$$\equiv_{ref_{M,g}} \qquad\qquad \equiv_{ref_{M,g}}$$

$$\ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner \qquad \ulcorner b = \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner$$

$$\equiv_{ref_{M,g}} \qquad\qquad \equiv_{ref_{M,g}}$$

$$\ulcorner a = \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner \qquad \ulcorner b = \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner$$

Dieser zweite Schritt wird durch (L1) – das aufgrund von (T1) und der referenztheoretischen Klausel für die Identität beweisbar ist – und (RT) gerechtfertigt. An dieser Stelle geht also die kritische Annahme (A) ein, weil (L1) eine formale Entsprechung von (A) ist. Weiters erfolgt hier eine Anwendung des R-Kompositionalitätsprinzips, und zwar eine Anwendung der Spezifikation (RT) von (R) für geschlossene singuläre Terme.

Schritt 3
Es gelten aufgrund von (G) weiters:

(20) $\sigma_1[a] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner a = \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner$

und

(21) $\sigma_2[b] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner b = \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner$

Es folgt also aus (4), (16) und (20) sowie (5), (19) und (21) aufgrund der Transitivität von $\equiv_{ref_{M,g}}$:

(22) $\sigma_1[a] \equiv_{ref_{M,g}} \sigma_2[b]$,

womit der Konditionale Beweis abgeschlossen ist. UG.
Dieser dritte Schritt läßt sich nicht durch die Annahme, daß $\sigma_1[a]$ und $\sigma_2[b]$ beide wahr relativ zu $ref_{M,g}$ sind – woraus die Erfüllbarkeit von $\sigma_1[a]$ und $\sigma_2[b]$ folgt – sowie durch (NT), (D15) und (L_R) rechtfertigen, und zwar aus den in Abschnitt 1.2.e angeführten Gründen. Es ist nämlich (NT) im Rahmen der vorliegenden Semantik widerlegbar, weshalb an dieser Stelle das Postulat (G) unverzichtbar ist.

Zusammenfassung
Diese drei Schritte lassen sich bildhaft wie folgt zusammenfassen:

$$\ulcorner a = b \vee a \neq b \urcorner$$

$$\equiv_{ref_{M,g}} \qquad\qquad \equiv_{ref_{M,g}}$$

$$\ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner \qquad \ulcorner b = \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner$$

$$\equiv_{ref_{M,g}} \qquad\qquad \equiv_{ref_{M,g}}$$

$$\ulcorner a = \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner \qquad \ulcorner b = \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner$$

$$\equiv_{ref_{M,g}} \qquad\qquad \equiv_{ref_{M,g}}$$

$$\sigma_1[a] \equiv_{ref_{M,g}} \sigma_2[b]$$

Beweis für (T3):

1.	$(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)\,(Wahr\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow$ $c \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner \iota v\,(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$	(L1)
2.	$(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)\,(LWahr\,(\sigma[c]) \Rightarrow$ $\sigma[c] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$	(L2)
3.	$(\forall S_1, S_2, t_1, t_2, ref, M, g)$ $(Erg(S_2, S_1(t_1//t_2))$ & $t_1 \equiv_{ref_{M,g}} t_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref_{M,g}} S_2)$	(RT)
4.	$(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)$ $\sigma[c] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$	(G)
5.	$LWahr\,(\ulcorner a = b \vee a \neq b\urcorner)$	Metatheorem
6.	$(\forall ref, M, g)\; Wahr\,(\ulcorner a = b \vee a \neq b\urcorner, ref_{M,g})$	(D14) 5
7.	$Erg(\ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner,$ $\ulcorner a = \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner\,(\ulcorner \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner//$ $\ulcorner \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner))$	(Pr1)
8.	$Erg(\ulcorner b = \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner,$ $\ulcorner b = \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner\,(\ulcorner \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner//$ $\ulcorner \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner))$	(Pr2)
9.	$Wahr\,(\sigma_1[a], ref_{M,g})$ & $Wahr\,(\sigma_2[b], ref_{M,g})$	Ann. f. KB
10.	$Wahr\,(\sigma_1[a], ref_{M,g})$	SIM 9

11.	$\mathit{Wahr}\,(\sigma_2[b], \mathit{ref}_{M,g})$	SIM 9
12.	$\sigma_1[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner a = \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner$	UI 4
13.	$\sigma_2[b] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner b = \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner$	UI 4
14.	$a \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner$	MP 10, UI 1
15.	$b \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner$	MP 11, UI 1
16.	$\mathit{Wahr}\,(\ulcorner a = b \vee a \neq b\urcorner, \mathit{ref}_{M,g})$	UI 6
17.	$\ulcorner a = b \vee a \neq b\urcorner \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}}$ $\ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner$	MP 5, UI 2
18.	$a \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner$	MP 16, UI 1
19.	$\ulcorner \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}}$ $\ulcorner \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner$	(Tr) (Sy) 14, 18
20.	$\ulcorner a = \iota v(\sigma_1[a/v] \wedge v = a)\urcorner \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}}$ $\ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner$	MP ADJ 7, 19, UI 3
21.	$\sigma_1[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner a = \iota v((v = b \vee v \neq b) \wedge v = a)\urcorner$	(Tr) 12, 20
22.	$\sigma_1[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner a = b \vee a \neq b\urcorner$	(Tr) 21, (Sy) 17
23.	$\ulcorner a = b \vee a \neq b\urcorner \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}}$ $\ulcorner b = \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner$	MP 5, UI 2
24.	$b \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner$	MP 16, UI 1
25.	$\ulcorner \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}}$ $\ulcorner \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner$	(Tr) (Sy) 15, 24
26.	$\ulcorner b = \iota v(\sigma_2[b/v] \wedge v = b)\urcorner \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}}$ $\ulcorner b = \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner$	MP ADJ 8, 25, UI 3
27.	$\sigma_2[b] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner b = \iota v((a = v \vee a \neq v) \wedge v = b)\urcorner$	(Tr) 13, 26
28.	$\sigma_2[b] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner a = b \vee a \neq b\urcorner$	(Tr) 27, (Sy) 23
29.	$\sigma_1[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \sigma_2[b]$	(Tr) 22, (Sy) 28
30.	$\mathit{Wahr}\,(\sigma_1[a], \mathit{ref}_{M,g})$ & $\mathit{Wahr}\,(\sigma_2[b], \mathit{ref}_{M,g}) \Rightarrow$ $\sigma_1[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \sigma_2[b]$	KB 9–29
31.	$(\forall \sigma_1, \sigma_2, a, b, \mathit{ref}, M, g)$ $(\mathit{Wahr}\,(\sigma_1[a], \mathit{ref}_{M,g})$ & $\mathit{Wahr}\,(\sigma_2[b], \mathit{ref}_{M,g}) \Rightarrow$ $\sigma_1[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \sigma_2[b])$	UG 30

Aus den Voraussetzungen: (L1) sowie (L2), (RT), (G), (Pr1) und (Pr2) folgt also, daß alle wahren singulären Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ dasselbe bezeichnen.

c. Der Fall der falschen singulären Sätze

Für den Fall der falschen singulären Sätze benötigt man neben den Voraussetzungen: ($\mathrm{L_R}$) sowie (T3), (N) und (RS) außerdem die folgende empirische Prämisse für den Beweis des nachfolgenden Theorems:

(Pr3) $\mathit{Erg}(\ulcorner\neg\neg\sigma_4[b]\urcorner, \ulcorner\neg\neg\sigma_3[a]\urcorner(\ulcorner\neg\sigma_3[a]\urcorner//\ulcorner\neg\sigma_4[b]\urcorner))$

Das "Slingshot-Argument" von Gödel (1944) für den Fall der falschen singulären Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ lautet nun wie folgt:

(T4) $\{(\mathrm{L_R}), (\mathrm{T3}), (\mathrm{N}), (\mathrm{RS}), (\mathrm{Pr3})\} \vdash_{\mathrm{PL1}^{=}}$
$(\forall\sigma_3, \sigma_4, a, b, \mathit{ref}, M, g)(\mathit{Falsch}(\sigma_3[a], \mathit{ref}_{M,g})$ &
$\mathit{Falsch}(\sigma_4[b], \mathit{ref}_{M,g}) \Rightarrow \sigma_3[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \sigma_4[b])$

Der Beweis für das Theorem (T4) wird ebenfalls mit der Äquivalenzrelation $\equiv_{\mathit{ref}_{M,g}}$ durchgeführt.

Beweis für (T4):

1. $(\forall S_1, S_2, \mathit{ref}, M, g)(\mathit{LÄ}(S_1, S_2) \Rightarrow S_1 \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} S_2)$ ($\mathrm{L_R}$)
2. $(\forall\sigma_1, \sigma_2, a, b, \mathit{ref}, M, g)$ (T3)
   $(\mathit{Wahr}(\sigma_1[a], \mathit{ref}_{M,g})$ & $\mathit{Wahr}(\sigma_2[b], \mathit{ref}_{M,g}) \Rightarrow$
   $\sigma_1[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \sigma_2[b])$
3. $(\forall\sigma, c, \mathit{ref}, M, g)$ (N)
   $(\mathit{Falsch}(\sigma[c], \mathit{ref}_{M,g}) \Rightarrow \mathit{Wahr}(\ulcorner\neg\sigma[c]\urcorner, \mathit{ref}_{M,g})$
4. $(\forall S_1, S_2, T_1, T_2, \mathit{ref}, M, g)$ (RS)
   $(\mathit{Erg}(S_2, S_1(T_1//T_2))$ & $T_1 \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} T_2 \Rightarrow$
   $S_1 \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} S_2)$
5. $\mathit{Erg}(\ulcorner\neg\neg\sigma_4[b]\urcorner, \ulcorner\neg\neg\sigma_3[a]\urcorner(\ulcorner\neg\sigma_3[a]\urcorner//\ulcorner\neg\sigma_4[b]\urcorner))$ (Pr3)
6. $\mathit{Falsch}(\sigma_3[a], \mathit{ref}_{M,g})$ & $\mathit{Falsch}(\sigma_4[b], \mathit{ref}_{M,g})$ Ann. f. KB

7.	$\mathit{Falsch}\,(\sigma_3[a], \mathit{ref}_{M,g})$	SIM 6
8.	$\mathit{Falsch}\,(\sigma_4[b], \mathit{ref}_{M,g})$	SIM 6
9.	$\mathit{Wahr}\,(\ulcorner\neg\sigma_3[a]\urcorner, \mathit{ref}_{M,g})$	MP 7, UI 3
10.	$\mathit{Wahr}\,(\ulcorner\neg\sigma_4[b]\urcorner, \mathit{ref}_{M,g})$	MP 8, UI 3
11.	$\ulcorner\neg\sigma_3[a]\urcorner \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner\neg\sigma_4[b]\urcorner$	MP ADJ 9, 10, UI 2
12.	$\ulcorner\neg\neg\sigma_3[a]\urcorner \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \ulcorner\neg\neg\sigma_4[b]\urcorner$	MP ADJ 5, 11, UI 4
13.	$L\ddot{A}\,(\ulcorner\neg\neg\sigma_3[a]\urcorner, \sigma_3[a])$	Metatheorem
14.	$\ulcorner\neg\neg\sigma_3[a]\urcorner \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \sigma_3[a]$	MP 13, UI 1
15.	$L\ddot{A}\,(\ulcorner\neg\neg\sigma_4[b]\urcorner, \sigma_4[b])$	Metatheorem
16.	$\ulcorner\neg\neg\sigma_4[b]\urcorner \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \sigma_4[b]$	MP 15, UI 1
17.	$\sigma_3[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \sigma_4[b]$	(Tr) (Sy) 14, 12, 16
18.	$\mathit{Falsch}\,(\sigma_3[a], \mathit{ref}_{M,g})$ & $\mathit{Falsch}\,(\sigma_4[b], \mathit{ref}_{M,g}) \Rightarrow \sigma_3[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \sigma_4[b]$	KB 6–17
19.	$(\forall \sigma_3, \sigma_4, a, b, \mathit{ref}, M, g)$ $(\mathit{Falsch}\,(\sigma_3[a], \mathit{ref}_{M,g})$ & $\mathit{Falsch}\,(\sigma_4[b], \mathit{ref}_{M,g}) \Rightarrow \sigma_3[a] \equiv_{\mathit{ref}_{M,g}} \sigma_4[b])$	UG 18

Aus den Voraussetzungen: (L_R) sowie (T3), (N), (RS) und (Pr3) folgt also, daß alle falschen singulären Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ dasselbe bezeichnen. Es bezeichnen daher gemäß den Theoremen (T3) und (T4) alle wahren singulären Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ dasselbe, und ebenso alle falschen singulären Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$.

d. Verallgemeinerung des Resultats

Es wird im folgenden das in den beiden Theoremen (T3) und (T4) für die singulären Sätze erzielte Resultat auf alle Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ verallgemeinert: Es gilt nämlich, daß jeder nicht-singuläre Satz S von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ mit einem singulären Satz σ von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ logisch äquivalent ist, und zwar z.B. mit $\ulcorner S \wedge c = c \urcorner$. Daraus folgt aber aufgrund von $(\mathrm{L_R})$ – wonach logisch äquivalente Sätze dasselbe bezeichnen –, daß jeder nicht-singuläre Satz S dasselbe bezeichnet wie ein mit ihm logisch äquivalenter singulärer Satz σ. Demnach bezeichnen auch je zwei wahre nicht-singuläre Sätze S_1 und S_2 dasselbe wie je zwei mit ihnen logisch äquivalente singuläre Sätze σ_1 und σ_2. Diese beiden singulären Sätze σ_1 und σ_2 sind aber beide wahr, und zwar weil sie mit jenen beiden wahren nicht-singulären Sätzen S_1 und S_2 logisch äquivalent sind. Wegen (T3) bezeichnen somit σ_1 und σ_2 dasselbe. Da außerdem die beiden wahren nicht-singulären Sätze S_1 und S_2 dasselbe bezeichnen wie σ_1 und σ_2 und letztere dasselbe bezeichnen, bezeichnen auch S_1 und S_2 dasselbe. Folglich bezeichnen alle wahren nicht-singulären Sätze dasselbe. Völlig analog dazu bezeichnen auch alle falschen nicht-singulären Sätze dasselbe. Aufgrund der Theoreme (T3) und (T4) wissen wir aber bereits, daß alle wahren singulären Sätze dasselbe bezeichnen und ebenso alle falschen singulären Sätze. Die wahren singulären sowie wahren nicht-singulären Sätze zusammengenommen sind aber nichts anderes als die wahren Sätze (und Analoges gilt für die falschen Sätze). Es folgt also, daß alle wahren Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ dasselbe bezeichnen, und ebenso alle falschen Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ (d.i. die (FCG)-These).

Die Voraussetzungen des "Slingshot-Arguments" von Gödel sind somit hinreichend, um – wie in der Einleitung besprochen –, die Menge aller von den Sätzen von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ bezeichneten Entitäten auf eine Menge mit höchstens zwei verschiedenen Elementen "zusammenschrumpfen" zu lassen. Allerdings ist nicht ersichtlich, wie anhand dieser Voraussetzungen aus der (FCG)-These, die Behauptung (W_1), daß Wahrheitswerte die Referenzobjekte von Sätzen sind, abgeleitet werden soll. Aus dem Gödelschen Argument folgt somit nichts darüber, um welche Art von Entitäten es sich dabei handelt. Die Elemente einer jeden Menge, welche höchstens zwei verschiedene Elemente enthält, kommen aufgrund der Voraussetzungen von Gödel als die Referenzobjekte der Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$ relativ zu $\mathit{ref}_{M,g}$ in Frage. Das Fazit unserer bisherigen Überlegungen ist demnach, daß die Voraussetzungen des "Slingshot-Arguments" von Gödel lediglich Rückschlüsse über die Anzahl der Referenzobjekte erlauben, aber nicht hinreichen, um deren Art eindeutig zu determinieren.

1.4 Das Ziel des Gödelschen Arguments

Das Ziel des Gödelschen "Slingshot-Arguments" geht aus den folgenden beiden Textstellen hervor:

> [...] The problem is: what do the so-called descriptive phrases (i.e., phrases as, e.g. 'the author of *Waverley*' or 'the king of England') denote or signify [in der Fußnote erklärt er, daß er mit 'denote' bzw. 'signify' Freges 'bedeuten$_{F}$' d.h. die Relation des Bezeichnens meint] and what is the meaning [Bedeutung$_{F}$, d.h. Referenzobjekt] of sentences in which they occur? The apparently obvious answer that, e.g., 'the author of *Waverley*' signifies Walter Scott [d.i. die Grundannahme (A) einer referentiellen Deskriptionstheorie], leads to unexpected difficulties. For, if we admit the further apparently obvious axiom, that the signification of a composite expression, containing constituents which have themselves a signification, depends only on the signification of these constituents (not on the manner in which this signification is expressed) [d.i. das Prinzip (R)], then it follows that the sentence 'Scott is the author of *Waverley*' signifies the same thing as 'Scott is Scott'; and this again leads almost inevitably to the conclusion that all true sentences have the same signification (as well as all false ones). Frege actually drew this conclusion; [...] 'The True' being the name he uses for the common signification of all true propositions [...]. (Gödel 1944, S.451)

Auf unsere formale Sprache $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ umgelegt, nimmt Gödel also zunächst an, daß definite Deskriptionen ohne freie Individuenvariablen so wie Individuenkonstanten Einzeldinge bezeichnen (d.i. die Grundannahme (A) einer referentiellen Deskriptionstheorie für formale Sprachen). Er schreibt aber gleich zu Anfang, daß diese Annahme seiner Meinung nach zu "unerwarteten Schwierigkeiten" führt, wenn man weiters noch das R-Kompositionalitätsprinzip annimmt. Er meint mit diesen Schwierigkeiten die (FCG)-These, daß alle wahren Sätze dasselbe bezeichnen und ebenso alle falschen Sätze. Für Gödel handelt es sich allerdings bei dieser Konklusion des "Slingshot-Arguments" nur um eine Zwischenkonklusion, die er selbst gar nicht behaupten, sondern – weil er sie selbst für "rätselhaft" bzw. absurd hielt – zur Widerlegung einer Voraussetzung, auf der sie beruht, verwenden wollte:

> [...] According to Russell's terminology and views, true sentences 'indicate' facts and, correspondingly, false ones indicate nothing [mit 'indicate' ist nach Gödel wieder die Relation des Bezeichnens gemeint]. Hence Frege's theory would in a sense apply to false sentences, since they all indicate the same thing, namely nothing. But different true sentences may indicate different things. Therefore this view concerning sentences makes it necessary either to drop the above-mentioned principle about the signification (i.e., in Russell's terminology the corresponding one about the denotation and indication) of composite expressions or to deny *that a descriptive phrase denotes the object described* [d.i. die Grundannahme (A) einer referentiellen Deskriptionstheorie; die Kursivsetzung stammt von mir]. Russell did the latter [...]. I cannot help feeling that the problem raised by Frege's puzzling conclusion has only been evaded by Russell's theory of descriptions and that there is something behind it which is not yet completely understood. (Gödel 1944, S.451)

Gödel hält die (FCG)-These für "rätselhaft" und damit für absurd. Es ist wegen dieser Absurdität der Konklusion des "Slingshot-Arguments" notwendig, eine der Voraussetzungen aufzugeben. Man könnte nun das R-Kompositionalitätsprinzip oder aber (A) aufgeben. Er plädiert jedoch im Sinne Russells dafür, jene Annahme aufzugeben, die seiner Ansicht nach zu den "unerwarteten Schwierigkeiten" führt, d.i. aber (A). Man kann deshalb meine Erachtens das Gödelsche Argument als eine Reductio-ad-Absurdum von (A) verstehen. Nach Gödel läßt sich nämlich mit einer non-referentiellen Deskriptionstheorie –

wie etwa der Russellschen Deskriptionstheorie – die "rätselhafte" bzw. absurde Konklusion Freges vermeiden. Er betont allerdings auch, daß die Vermeidung der Fregeschen Konklusion durch die Annahme der Russellschen Deskriptionstheorie ein Problem verdecke, welches noch nicht "voll verstanden" ist.

2 Quines "Slingshot-Argument" (1953)

Im "Slingshot-Argument" von Quine spielen nicht mehr referenztheoretische, sondern extensionstheoretische Prinzipien – d.h. Prinzipien, welche eine Extensionsrelation betreffen – eine zentrale Rolle. Es geht ihm weder um die Frage nach der Art der Referenzobjekte von Sätzen noch um die entsprechende Frage nach deren Extensionen. Er ist stattdessen an ganz bestimmten Folgerungsbeziehungen zwischen derartigen extensionstheoretischen Prinzipien interessiert. So behauptet er etwa in "Three Grades of Modal Involvement" (1953), daß aus dem Prinzip der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-logisch-äquivalenten-Sätzen und demjenigen der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-der-Identität ein drittes Prinzip, nämlich dasjenige der Wahrheitsfunktionalität (WES), folgt. Letzteres besagt, daß in jedem Satz koextensionelle Sätze (d.s. material äquivalente Sätze) füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar sind. Das Prinzip der Wahrheitsfunktionalität (WES) – d.i. die Konjunktion von (ES) und (W$_2$) – ist somit die Konklusion seines "Slingshot-Arguments" (1953) (Während (ES) besagt, daß in jedem Kontext (Satz) koextensionelle Sätze füreinander salva extensione substituierbar sind, ist (W$_2$) dabei die Annahme, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind).

2.1 Extensionstheoretische Modelle

Für die Formalisierung des "Slingshot-Arguments" von Quine ist eine prädikatenlogische Sprache mit Mengenabstraktionstermen ('die Menge aller x, so daß gilt: ... x ...') erforderlich. Sei deshalb für das Folgende eine simultan-rekursive Definition der Formeln und singulären Terme einer prädikatenlogischen Sprache $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ erster Stufe mit Identität und einem primitiven Mengenabstraktionsoperator vorausgesetzt. Die weiters hierfür benötigte Semantik läßt sich wie die in Abschnitt 1.1.b besprochene Semantik für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\iota}}$ formulieren. Ich kann mich deswegen hier auf eine kurze Skizzierung der Grundzüge einer solchen Semantik für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ beschränken.

Es wird dazu im folgenden nicht von einer Referenzfunktion, sondern von einer Extensionsfunktion ausgegangen, welche für die primitiven extensionsfähigen Ausdrücke im eigentlichen Sinne von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ definiert ist. In der folgenden Definition werden die Individuenkonstanten und n-stelligen Prädikatkonstanten von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ als solche primitiven extensionsfähigen Ausdrücke im eigentlichen Sinne von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ ausgezeichnet (wobei der Ausdruck 'x ist ein primitiver extensionsfähiger Ausdruck im eigentlichen Sinne' durch '*PEfAe*' symbolisiert wird):

(D1) $\quad PEfAe(x, \mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}) :\Leftrightarrow x \in \mathrm{IK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}} \vee x \in \mathrm{PK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}}$

Man kann dann eine Extensionsfunktion für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ wie folgt definieren (Dabei wird der Ausdruck 'y ist eine Entität relativ zu D' wieder durch '$Ent(y, D)$' symbolisiert):

(D2) Seien X und Y Mengen, und sei D eine nicht-leere Menge von Einzeldingen.
ext ist eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ relativ zu $D :\Leftrightarrow$
ext ist eine Extensionsrelation mit den Relatamengen X und Y für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ relativ zu D – d.h. $X \subseteq \{x \mid PEfAe(x, \mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}})\}$ & $Y \subseteq \{y \mid Ent(y, D)\}$ & $ext \subseteq X \times Y$ – &
$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists! y)(y \in Y \;\&\; \langle x, y\rangle \in ext))$ &
$(\forall x)(x \in X \;\&\; x \in \mathrm{IK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}} \Rightarrow ext(x) \in D)$ &
$(\forall x)(x \in X \;\&\; x \in \mathrm{PK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}} \Rightarrow ext(x) \in \mathbb{P}(D^n))$

Die Extensionen von Individuenkonstanten bzw. n-stelligen Prädikatkonstanten sind demnach Einzeldinge aus dem Domain D bzw. Mengen von geordneten n-Tupeln von solchen Einzeldingen (d.h. Elemente aus der Potenzmenge von D^n).

Die extensionstheoretischen Modelle für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ können nun wie folgt definiert werden:

(D3) Ein extensionstheoretisches Modell M^* für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ ist ein Paar $\langle D, ext\rangle$, so daß gilt:
D ist eine nicht-leere Menge von Einzeldingen &
$(\exists X, Y)$ (ext ist eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$ relativ zu D)

Die zugehörigen extensionstheoretischen Klauseln lauten dann gemäß der Variante (W1) wie folgt:

Seien im folgenden wieder $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{ST}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}}$, seien weiters $F \in \mathrm{PK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}}$ sowie $\phi, \psi \in \mathrm{FM}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}}$, und sei $v \in \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}}$ eine Individuenvariable, welche in ϕ frei vorkommt:

(D4) Sei $M^* = \langle D, ext\rangle$ ein extensionstheoretisches Modell für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$, und sei weiters g eine Variablenbelegung von $\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}}$ in D, und sei $g[v|d]$ eine $[v|d]$-Variante von g.

a. $t \in \mathrm{IK}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}} \Rightarrow ext_{M^*,g}(t) := ext(t)$

b. $t \in \mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}} \Rightarrow ext_{M^*,g}(t) := g(t)$

c. $ext_{M^*,g}(F) := ext(F)$

d. $ext_{M^*,g}(\ulcorner \lambda v \phi \urcorner) = \{d \in D \mid Wahr(\phi, ext_{M^*,g[v|d]})\}$

e. $Wahr(\ulcorner F t_1 \ldots t_n \urcorner, ext_{M^*,g}) \Leftrightarrow$
$\langle ext_{M^*,g}(t_1), \ldots, ext_{M^*,g}(t_n)\rangle \in ext_{M^*,g}(F)$

f. $Wahr(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner, ext_{M^*,g}) \Leftrightarrow ext_{M^*,g}(t_1) = ext_{M^*,g}(t_2)$

g. $Wahr(\ulcorner \neg\phi \urcorner, ext_{M^*,g}) \Leftrightarrow {\sim} Wahr(\phi, ext_{M^*,g})$
(d.h. $Falsch(\phi, ext_{M^*,g})$)

h. $Wahr(\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner, ext_{M^*,g}) \Leftrightarrow$
$Wahr(\phi, ext_{M^*,g})$ & $Wahr(\psi, ext_{M^*,g})$

i. $Wahr(\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner, ext_{M^*,g}) \Leftrightarrow$
$Wahr(\phi, ext_{M^*,g}) \curlyvee Wahr(\psi, ext_{M^*,g})$

j. $Wahr(\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner, ext_{M^*,g}) \Leftrightarrow$
$Falsch(\phi, ext_{M^*,g}) \curlyvee Wahr(\psi, ext_{M^*,g})$

k. $Wahr(\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner, ext_{M^*,g}) \Leftrightarrow$
$(Wahr(\phi, ext_{M^*,g})$ & $Wahr(\psi, ext_{M^*,g})) \curlyvee$
$(Falsch(\phi, ext_{M^*,g})$ & $Falsch(\psi, ext_{M^*,g}))$

l. $Wahr(\ulcorner(\bigwedge v)\phi\urcorner, ext_{M^*,g}) \Leftrightarrow$
$(\forall d)(d \in D \Rightarrow Wahr(\phi, ext_{M^*,g[v|d]}))$

m. $Wahr\,(\ulcorner(\bigvee v)\,\phi\urcorner, ext_{M^*,g}) \Leftrightarrow$
$(\exists d)\,(d \in D\ \&\ Wahr\,(\phi, ext_{M^*,g[v|d]}))$

Die für die folgende Formalisierung benötigten Begriffe der logischen Wahrheit [symbolisch: '$LWahr^*(x)$'] und logischen Äquivalenz [symbolisch: '$L\ddot{A}^*(x_1, x_2)$'] kann man nach diesen Vorbereitungen wie folgt definieren:

(D5) Sei x eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$.
$LWahr^*(x) :\Leftrightarrow (\forall ext, M^*, g)\ Wahr\,(x, ext_{M^*,g})$

(D6) Seien x_1 und x_2 Formeln von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}$.
$L\ddot{A}^*(x_1, x_2) :\Leftrightarrow LWahr^*(\ulcorner x_1 \leftrightarrow x_2\urcorner)$

2.2 Formalisierung des "Slingshot-Arguments" von Quine (1953)

Im folgenden wird die Argumentskizze von Quine vervollständigt und sein Argument im sprachlichen Rahmen eines Kalküls der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität formalisiert. Es ist dazu eine Verfeinerung der bisherigen Notation für die teilweise Substitution erforderlich. Ich habe als grundsätzliche Voraussetzung für die teilweise Substitution von A_1 in C durch A_2 die Bedingung gestellt, daß C mindestens ein Vorkommnis von A_1 hat, d.h. ein Kontext von A_1 ist. Diese Bedingung kann auf die folgende Weise explizit gemacht werden: Enthält C mindestens ein Vorkommnis von A_1, d.h. ist C ein Kontext von A_1, dann schreibt man das durch '$C[A_1]$' an. Es drücke weiters im folgenden die Notation '$Erg\ (C[A_2], C[A_1]\ (A_1//A_2))$' aus, daß $C[A_2]$ ein Ergebnis der teilweisen Substitution von A_1 in $C[A_1]$ durch A_2 ist.

Mit Hilfe dieser verfeinerten Substitutionsnotation lassen sich die im "Slingshot-Argument" von Quine (1953) vorausgesetzten extensionstheoretischen Prinzipien wie folgt formulieren:

Seien im folgenden t_1 und t_2 geschlossene singuläre Terme (d.h. Individuenkonstanten oder Mengenabstraktionsterme ohne freie Individuenvariablen) von $\mathscr{L}^{\text{PL1}^=\lambda}$, und seien weiters T_1 und T_2 Sätze von $\mathscr{L}^{\text{PL1}^=\lambda}$ sowie C ein Kontext von $\mathscr{L}^{\text{PL1}^=\lambda}$:

- Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen

(W$_2$) $(\forall x, y, ext, M^*, g)$
$(Satz\,(x, \mathscr{L}^{\text{PL1}^=\lambda})\ \&\ y = ext_{M^*,g}(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$

- Logisch äquivalente Sätze sind salva extensione substituierbar

(LE) $(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))\ \&\ L\ddot{A}^*(T_1, T_2) \Rightarrow$
$C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2])$

- Spezifikation von (E) für geschlossene singuläre Terme

(ET) $(\forall C, t_1, t_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[t_2], C[t_1](t_1//t_2))\ \&\ t_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} t_2 \Rightarrow$
$C[t_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[t_2])$

Während die Konjunktion von (LE) und (W$_2$) – d.i. (WLE) – die Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-logisch-äquivalenten-Sätzen besagt, besagt die Konjunktion von (ET) und (W$_2$) – d.i. (WET) – die Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-geschlossenen-singulären-Termen.

Neben diesen drei extensionstheoretischen Prinzipien sind für den Beweis des nachfolgenden Theorems darüber hinaus die folgenden beiden Prämissen erforderlich (wobei '∅' das objektsprachliche Zeichen für die leere Menge sein soll):

(Pr4) $(\forall T_1)\, L\ddot{A}^*(T_1, \ulcorner \lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner)$

(Pr5) $(\forall T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2 \Rightarrow \ulcorner \lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1)\urcorner \equiv_{ext_{M^*,g}} \ulcorner \lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2)\urcorner)$

Wie können diese beiden Prämissen begründet werden?

Quine begründet die Prämisse (Pr4) wie folgt: Sei T_1 beliebig gewählt und $ext_{M^*,g}$ irgendeine Extensionsfunktion für $\mathscr{L}^{\text{PL1}^=\lambda}$. Wenn T_1 wahr relativ zu $ext_{M^*,g}$ ist, dann ist die Konjunktion

(1) $\ulcorner \mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1 \urcorner$

von einem und nur einem Einzelding d aus D relativ zu $ext_{M^*,g[\mathbf{x}|d]}$ wahr, nämlich von $ext(\varnothing)$[1]; ist hingegen T_1 falsch relativ zu $ext_{M^*,g}$, dann ist die Konjunktion (1) von überhaupt keinem Einzelding d aus D relativ zu $ext_{M^*,g[\mathbf{x}|d]}$ wahr. Wenn T_1 wahr relativ zu $ext_{M^*,g}$ ist, dann hat somit der Mengenabstraktionsterm

(2) $\ulcorner \lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) \urcorner$

relativ zu $ext_{M^*,g}$ die Einermenge von $ext(\varnothing)$ als Extension und der Identitätssatz

(3) $\ulcorner \lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\} \urcorner$

ist (ebenso wie T_1) wahr relativ zu $ext_{M^*,g}$ (für alle T_1, ext, M^*, g). Ist aber T_1 falsch relativ zu $ext_{M^*,g}$, dann hat der Mengenabstraktionsterm (2) relativ zu $ext_{M^*,g}$ die leere Menge als Extension und der Identitätssatz (3) ist (ebenso wie T_1) falsch relativ zu $ext_{M^*,g}$ (für alle T_1, ext, M^*, g). Es gilt daher für jedes T_1:

(4) $L\ddot{A}^*(T_1, \ulcorner \lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\} \urcorner)$

Außerdem halte ich fest, daß die Relation der logischen Äquivalenz $L\ddot{A}^*$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Weiters kann man die Prämisse (Pr5) wie folgt begründen: Seien T_1, T_2, ext, M^* und g beliebig gewählt. Da folgendes gilt:

(1) $Erg(\ulcorner \lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) \urcorner, \ulcorner \lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) \urcorner (T_1 // T_2))$

und da weiters laut Annahme für Konditionalen Beweis gilt:

(2) $T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2$

[1] Unter der intendierten Interpretation von '$\varnothing$' soll $ext(\varnothing)$ die leere Menge sein. Genausogut könnte es sich hierbei aber auch um ein anderes Element aus D handeln.

folgt aus (1) und (2) aufgrund des E-Kompositionalitätsprinzips:

(3) $\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1)\urcorner \equiv_{ext_{M^*,g}} \ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2)\urcorner$

Es folgt also aus (2) und (3) mit Konditionalem Beweis und Universeller Generalisierung (Pr5).

Schließlich benötigt man für den Beweis noch die folgenden drei empirischen Prämissen, welche die teilweise Substitution betreffen:

(Pr6) $Erg(C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner],$
$C[T_1](T_1 // \ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner))$

(Pr7) $Erg(C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner],$
$C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner](\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1)\urcorner // \ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2)\urcorner))$

(Pr8) $Erg(C[T_2],$
$C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner](\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner // T_2))$

Aufgrund von (DI.2.6) ist die Relation $\equiv_{ext_{M^*,g}}$ eine Äquivalenzrelation. Wenn A_1 und A_2 zwei extensionsfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\lambda}$ sind, dann lautet – wie gesagt – der allgemeine Anwendungsfall von (DI.2.6) wie folgt:

(1) $A_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} A_2 \Leftrightarrow ext_{M^*,g}(A_1) = ext_{M^*,g}(A_2)$

Es überträgt sich somit die Reflexivität, die Symmetrie und die Transitivität der Identität auf die Relation $\equiv_{ext_{M^*,g}}$. Es gelten also:

(Rf′) $(\forall A_1)\, A_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} A_1$

(Sy′) $(\forall A_1, A_2)\,(A_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} A_2 \Rightarrow A_2 \equiv_{ext_{M^*,g}} A_1)$

(Tr′) $(\forall A_1, A_2, A_3)\,((A_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} A_2)\ \&\ (A_2 \equiv_{ext_{M^*,g}} A_3) \Rightarrow A_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} A_3)$

Der Beweis für das nachfolgende Theorem (T1) wird mit einer solchen Äquivalenzrelation $\equiv_{ext_{M^*,g}}$ durchgeführt.

Seien im folgenden $M^* = \langle D, ext \rangle$ ein beliebiges extensionstheoretisches Modell für $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\lambda}$ sowie g eine beliebige Variablenbelegung von $\mathrm{IV}_{\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\lambda}}$ in D, und seien weiters T_1 und T_2 beliebige Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\lambda}$, und sei C ein beliebiger Kontext von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\lambda}$. Das "Slingshot-Argument" von Quine (1953) lautet dann wie folgt:

(T1) $\{(\mathrm{W}_2), (\mathrm{LE}), (\mathrm{ET}), (\mathrm{Pr4}), (\mathrm{Pr5}), (\mathrm{Pr6}), (\mathrm{Pr7}), (\mathrm{Pr8})\} \vdash_{\mathrm{PL1}^{=}}$
$(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))\ \&\ T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2 \Rightarrow$
$C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2])$

Ich skizziere im folgenden die Beweisidee für dieses Theorem (T1), das mittels Konditionalem Beweis und anschließender Universeller Generalisierung bewiesen wird. Die Annahme für Konditionalen Beweis lautet dabei:

(1) $Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))\ \&\ T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2$

Nach der Prämisse (Pr6) gilt nun:

(2) $Erg(C[\ulcorner\lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner],$
$C[T_1](T_1//\ulcorner\lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner))$

Wegen der Prämisse (Pr4) gilt weiters:

(3) $L\ddot{A}^*(T_1, \ulcorner\lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner)$

Aus (2) und (3) folgt aufgrund von (LE):

(4) $C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[\ulcorner\lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner]$

Da weiters wegen (1) gilt:

(5) $T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2$

folgt aus (5) mit der Prämisse (Pr5) folgendes:

(6) $\ulcorner\lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1)\urcorner \equiv_{ext_{M^*,g}} \ulcorner\lambda \mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2)\urcorner$

Nach der Prämisse (Pr7) gilt weiters:

(7) $Erg(C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner],$
$C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner](\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1)\urcorner//\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2)\urcorner))$

Aus (7) und (6) folgt aufgrund von (ET) folgendes:

(8) $C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner]$

Nach der Prämisse (Pr8) gilt außerdem:

(9) $Erg(C[T_2],$
$C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner](\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner//T_2))$

Weiters gilt wegen der Prämisse (Pr4):

(10) $L\ddot{A}^*(\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner, T_2)$

Aus (9) und (10) folgt somit aufgrund von (LE):

(11) $C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2]$

Es folgt somit aus (4), (8) und (11) aufgrund der Transitivität von $\equiv_{ext_{M^*,g}}$:

(12) $C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2]$,

womit der Konditionale Beweis abgeschlossen ist. UG.

Zusammengefaßt, erhalten wir also das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
C[T_1] & \equiv_{ext_{M^*,g}} & C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner] \\
\equiv_{ext_{M^*,g}} & & \equiv_{ext_{M^*,g}} \\
C[T_2] & \equiv_{ext_{M^*,g}} & C[\ulcorner\lambda\mathbf{x}(\mathbf{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner]
\end{array}$$

Beweis für (T1):

1.	$(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$ $(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))$ & $L\ddot{A}^*(T_1, T_2) \Rightarrow$ $C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2])$	(LE)
2.	$(\forall C, t_1, t_2, ext, M^*, g)$ $(Erg(C[t_2], C[t_1](t_1//t_2))$ & $t_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} t_2 \Rightarrow$ $C[t_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[t_2])$	(ET)
3.	$(\forall T_1)\, L\ddot{A}^*(T_1, \ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner)$	(Pr4)
4.	$(\forall T_1, T_2, ext, M^*, g)$ $(T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2 \Rightarrow$ $\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1)\urcorner \equiv_{ext_{M^*,g}} \ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_2)\urcorner)$	(Pr5)
5.	$(\forall x, y, ext, M^*, g)$ $(Satz\,(x, \mathscr{L}^{\mathtt{PL1}^{=\lambda}})$ & $y = ext_{M^*,g}(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$	(W_2)
6.	$Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))$ & $T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2$	Ann. f. KB
7.	$Erg(C[\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner],$ $C[T_1](T_1//\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner))$	(Pr6)
8.	$L\ddot{A}^*(T_1, \ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner)$	UI 3
9.	$Erg(C[\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner],$ $C[T_1](T_1//\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner))$ & $L\ddot{A}^*(T_1, \ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner) \Rightarrow$ $C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner]$	UI 1
10.	$C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner]$	MP ADJ 7, 8, 9
11.	$T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2 \Rightarrow$ $\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1)\urcorner \equiv_{ext_{M^*,g}} \ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_2)\urcorner$	UI 4
12.	$\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1)\urcorner \equiv_{ext_{M^*,g}} \ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_2)\urcorner$	MP SIM 6, 11
13.	$Erg(C[\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner],$ $C[\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner](\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_1)\urcorner//$ $\ulcorner \lambda \mathtt{x}(\mathtt{x} = \varnothing \wedge T_2)\urcorner))$	(Pr7)

14.	$Erg(C[\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner],$ $C[\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner](\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_1)\urcorner//$ $\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2)\urcorner))\ \&$ $\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_1)\urcorner \equiv_{ext_{M^*,g}} \ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2)\urcorner \Rightarrow$ $C[\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner] \equiv_{ext_{M^*,g}}$ $C[\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner]$	UI 2
15.	$C[\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_1) = \{\varnothing\}\urcorner] \equiv_{ext_{M^*,g}}$ $C[\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner]$	MP ADJ 13, 12, 14
16.	$Erg(C[T_2], C[\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner]$ $(\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner//T_2))$	(Pr8)
17.	$L\ddot{A}^*(\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner, T_2)$	UI 3, Sym $L\ddot{A}^*$
18.	$Erg(C[T_2], C[\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner]$ $(\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner//T_2))\ \&$ $L\ddot{A}^*(\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner, T_2) \Rightarrow$ $C[\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2]$	UI 1
19.	$C[\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2) = \{\varnothing\}\urcorner] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2]$	MP ADJ 16, 17, 18
20.	$C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2]$	(Tr′) 10, 15, 19
21.	$Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))\ \&\ T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2 \Rightarrow$ $C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2]$	KB 6–20
22.	$(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$ $(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))\ \&\ T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2 \Rightarrow$ $C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2])$	UG 21

Es folgt somit aus den Voraussetzungen: (LE) sowie (ET), (Pr4), (Pr5), (Pr6), (Pr7) und (Pr8) das folgende neutrale extensionstheoretische Prinzip:

(ES) $(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))\ \&\ T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2 \Rightarrow$
$C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2])$

(ES) besagt aus der Sicht der Sätze, daß in jedem Satz koextensionelle Sätze füreinander salva extensione substituierbar sind (d.h. daß jeder Satz die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Sätzen hat). Da laut Annahme auch (ET) gilt, hat man bereits zwei Bestimmungsstücke für die Extensionalität$_3$ in Händen: Es sind nämlich sowohl koextensionelle Sätze als auch koextensionelle geschlossene singuläre Terme in allen Sätzen füreinander salva extensione substituierbar. Für den Nachweis der "vollen" Extensionalität$_3$ einer Sprache wäre aus der Sicht der Sätze lediglich noch aufzuzeigen, daß auch koextensionelle n-stellige Prädikate in allen Sätzen füreinander salva extensione substituierbar sind.[2]

Weiters folgt aus (ES) sowie der Annahme (W_2), daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, aufgrund der Konjunktionsregel folgendes:

(WES) $$\begin{aligned}&(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)\\ &(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2)) \;\&\; T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2 \Rightarrow\\ &C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2]) \;\&\\ &(\forall x, y, ext, M^*, g)\\ &(Satz(x, \mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}}) \;\&\; y = ext_{M^*,g}(x) \Rightarrow Wahrw(y))\end{aligned}$$

(WES) – d.i. die Konjunktion von (ES) und (W_2) – besagt aus der Sicht der Sätze, daß in jedem Satz koextensionelle Sätze (d.h. material äquivalente Sätze) füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar sind. D.h. es besagt, daß jeder Satz die Eigenschaft der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-Sätzen hat. Da – laut Annahme – jeder Satz auch die Eigenschaft der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-koextensionellen-geschlossenen-singulären-Termen hat, hat man bereits zwei Bestimmungsstücke für die Extensionalität$_4$ in Händen: Sowohl koextensionelle Sätze als auch koextensionelle geschlossene singuläre Terme sind nämlich in allen Sätzen füreinander salva veritate$_2$ substituierbar. Für den Nachweis der "vollen" Extensionalität$_4$ einer Sprache

[2] In (Salmon 1982, S.51) findet man ein dem "Slingshot-Argument" von Quine sehr ähnliches Argument, mit dem aufgezeigt werden soll, daß auch koextensionelle n-stellige Prädikate in allen Sätzen füreinander salva extensione substituierbar sind.

wäre nur noch aufzuzeigen, daß auch koextensionelle n-stellige Prädikate in allen Sätzen salva veritate$_2$ substituierbar sind.

2.3 Wahrheitstheoretische Fassung des Arguments

In Kapitel I.2 habe ich auf die äquivalenten Formulierungen (E) und (E′) des E-Kompositionalitätsprinzips hingewiesen. Man kann deshalb anstatt von (E) auch von (E′) ausgehen. In der verfeinerten Substitutionsnotation lauten dann die im "Slingshot-Argument" von Quine involvierten Prinzipien wie folgt:

(W$_2$) $(\forall x, y, ext, M^*, g)$
$(Satz\,(x, \mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=\lambda}})\ \&\ y = ext_{M^*,g}(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$

(LE′) $(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))\ \&\ L\ddot{A}^*(T_1, T_2) \Rightarrow$
$Wahr\,([C[T_1] \equiv C[T_2]], ext_{M^*,g}))$

(ET′) $(\forall C, t_1, t_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[t_2], C[t_1](t_1//t_2))\ \&\ Wahr\,([t_1 \equiv t_2], ext_{M^*,g}) \Rightarrow$
$Wahr\,([C[t_1] \equiv C[t_2]], ext_{M^*,g}))$

(ES′) $(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))\ \&\ Wahr\,([T_1 \equiv T_2], ext_{M^*,g}) \Rightarrow$
$Wahr\,([C[T_1] \equiv C[T_2]], ext_{M^*,g}))$

Zwischen diesen Prinzipien besteht ein zum Theorem (T1) analoger Folgerungszusammenhang. Die wahrheitstheoretische Version des "Slingshot-Arguments" von Quine (1953) lautet demnach wie folgt[3]:

(T2) $\{(\mathrm{W}_2), (\mathrm{LE}'), (\mathrm{ET}'), (\mathrm{Pr4}), (\mathrm{Pr5}'), (\mathrm{Pr6}), (\mathrm{Pr7}), (\mathrm{Pr8})\} \vdash_{\mathrm{PL1}^=}$ (ES′)

[3] Die Prämisse (Pr5′) lautet dabei wie folgt: $(\forall T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Wahr\,([T_1 \equiv T_2], ext_{M^*,g}) \Rightarrow Wahr\,([\ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_1)\urcorner \equiv \ulcorner\lambda x(x = \varnothing \wedge T_2)\urcorner], ext_{M^*,g}))$

Wenn A_1 und A_2 zwei geschlossene singuläre Terme (d.h. Individuenkonstanten oder Mengenabstraktionsterme ohne freie Individuenvariablen) von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\lambda}$ sind, bzw. auch zwei n-stellige Prädikatkonstanten oder zwei Sätze von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\lambda}$ sind, dann gilt aufgrund von (TI.2.1):

(2) $A_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} A_2 \Leftrightarrow Wahr([A_1 \equiv A_2], ext_{M^*,g})$

Sei A ein geschlossener singulärer Term bzw. eine n-stellige Prädikatkonstante oder ein Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\lambda}$. Wenn es sich beim Kontext C von A ebenfalls um einen geschlossenen singulären Term bzw. eine n-stellige Prädikatkonstante oder einen Satz von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\lambda}$ handelt, dann ist das Theorem (T2) eine äquivalente Umformulierung des Theorems (T1).

Es gilt weiters aufgrund von (KI.2.2):

(3) $Wahr([A_1 \equiv A_2], ext_{M^*,g}) \Leftrightarrow ext_{M^*,g}(A_1) = ext_{M^*,g}(A_2)$

Es haben deshalb die verallgemeinerten Äquivalenzsätze die folgenden Eigenschaften:

(VÄ1) $(\forall A_1)\, Wahr([A_1 \equiv A_1], ext_{M^*,g})$

(VÄ2) $(\forall A_1, A_2)\,(Wahr([A_1 \equiv A_2], ext_{M^*,g}) \Rightarrow Wahr([A_2 \equiv A_1], ext_{M^*,g}))$

(VÄ3) $(\forall A_1, A_2, A_3)$
$(Wahr([A_1 \equiv A_2], ext_{M^*,g})\ \&\ Wahr([A_2 \equiv A_3], ext_{M^*,g}) \Rightarrow$
$Wahr([A_1 \equiv A_3], ext_{M^*,g}))$

Der Beweis für (T2) kann dann mit diesen Eigenschaften von verallgemeinerten Äquivalenzsätzen durchgeführt werden und ist völlig analog zum Beweis für (T1).

3 Schlußbemerkung

Es wurden somit in den letzten beiden Kapiteln das "Slingshot-Argument" von Gödel (1944) und dasjenige von Quine (1953) im sprachlichen Rahmen eines Kalküls der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität formalisiert. Während bestimmte Spezifikationen des R-Kompositionalitätsprinzips zu den Voraussetzungen des Arguments von Gödel gehören, befindet sich eine bestimmte Spezifikation des E-Kompositionalitätsprinzips unter den Voraussetzungen des Arguments von Quine. Bei letzterem Argument hat sich weiters herausgestellt, daß man zur Begründung einer seiner Prämissen – und zwar von (Pr5) – das E-Kompositionalitätsprinzip benötigt. Es konnte weiters ein direkter Zusammenhang zwischen dem Argument von Quine und den beiden extensionstheoretischen Extensionalitätsbegriffen hergestellt werden. Im folgenden werden die Ergebnisse der beiden Formalisierungen kurz zusammengefaßt und miteinander verglichen.

3.1 Das Argument von Gödel

In der Prämissenmenge des Arguments von Gödel sind u.a. die folgenden Voraussetzungen enthalten:

(A) Definite Deskriptionen ohne freie Individuenvariablen bezeichnen so wie Individuenkonstanten Einzeldinge.

(L_R) Logisch äquivalente Sätze bezeichnen dasselbe.

(RT) In jedem Kontext sind koreferentielle geschlossene singuläre Terme füreinander salva referentia substituierbar.

(RS) In jedem Kontext sind koreferentielle Sätze füreinander salva referentia substituierbar.

Bei den Voraussetzungen (L_R) sowie (RT) und (RS) handelt es sich um neutrale referenztheoretische Prinzipien, weil in ihnen offengelassen ist, von welcher Art die Referenzobjekte von Sätzen sind.

Die Prämissenmenge seines Arguments enthält jedoch nicht die folgenden nicht-neutralen referenztheoretischen Prinzipien:

(W_1) Wahrheitswerte sind die Referenzobjekte von Sätzen.

(WRT) In jedem Satz sind koreferentielle geschlossene singuläre Terme füreinander salva referentia substituierbar, und Wahrheitswerte sind die Referenzobjekte von Sätzen (D.i. die Konjunktion von (RT) und (W_1)).

(WRS) In jedem Satz sind koreferentielle Sätze füreinander salva referentia substituierbar, und Wahrheitswerte sind die Referenzobjekte von Sätzen (D.i. die Konjunktion von (RS) und (W_1)).

Dies muß so sein, denn sonst wäre sein Argument sofort trivial. So würde etwa aus (WRT) offensichtlicherweise sofort folgen, daß Wahrheitswerte die Referenzobjekte von Sätzen sind. Eine derartige Trivialisierung kann aber nicht in Gödels Absicht liegen.

Gödel geht es vielmehr zunächst darum – ausgehend von (L_R) sowie (RT), (RS) und seinen weiteren Voraussetzungen – die folgende These zu begründen:

(FCG) Alle wahren Sätze bezeichnen dasselbe, und ebenso alle falschen Sätze (D.i. die Frege-Church-Gödel-These).

Mit der (FCG)-These soll dann weiters die These von Frege, daß Wahrheitswerte die Referenzobjekte von Sätzen sind – d.i. (W_1) – gestützt werden. Allerdings kann man (W_1) nicht aufgrund von (FCG) streng logisch beweisen. Wir haben nämlich gesehen, daß die Voraussetzungen seines Arguments nicht ausreichend sind, um die Art der Referenzobjekte von Sätzen eindeutig zu determinieren: Die Elemente einer jeden Menge mit höchstens zwei verschiedenen Elementen kommen aufgrund dieser Voraussetzungen als die Referenzobjekte von Sätzen in Frage. Es kann, aber muß sich dabei nicht um die beiden Wahrheitswerte Wahr und Falsch handeln.

Gödel hält die (FCG)-These für absurd, weil sie ausschließt, daß im allgemeinen verschiedene wahre Sätze verschiedenes bezeichnen. Seines Erachtens muß man eine der Voraussetzungen, auf der sie beruht, aufgeben. Er schlägt deshalb vor, die Grundannahme (A) einer referentiellen Deskriptionstheorie aufzugeben, daß definite Deskriptionen ohne freie Individuenvariablen so wie Individuenkonstanten Einzeldinge bezeichnen. Es ist somit seines Erachtens unter Beibehaltung des R-Kompositionalitätsprinzips eine non-referentielle Deskriptionstheorie – wie etwa die Russellsche – anzunehmen.

3.2 Das Argument von Quine

Beim Argument von Quine stellt sich die folgende grundsätzliche Frage: Ist dieses Argument überhaupt im selben Sinne ein "Slingshot-Argument" wie dasjenige von Gödel? Unseres Erachtens lautet die Antwort darauf: Nein! Denn in der Prämissenmenge des Arguments von Quine sind gemäß unserer Formalisierung u.a. die folgenden Voraussetzungen enthalten:

(W_2) Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen.

(LE) In jedem Kontext sind logisch äquivalente Sätze füreinander salva extensione substituierbar.

(ET) In jedem Kontext sind koextensionelle geschlossene singuläre Terme füreinander salva extensione substituierbar.

Es geht Quine aber gar nicht darum, die zu (W_1) analoge These (W_2) zu begründen, denn er setzt sie schon voraus. Es geht ihm vielmehr darum, die folgende nicht-neutrale extensionstheoretische Fassung des Prinzips der Wahrheitsfunktionalität zu begründen:

(WES) In jedem Kontext (Satz) sind koextensionelle Sätze (d.h. material äquivalente Sätze) füreinander salva extensione substituierbar, und Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen.

Kurz gesagt, heißt dies, daß in jedem Satz koextensionelle Sätze füreinander salva veritate$_2$ substituierbar sind (vgl. Abschnitt I.2.3). Quine geht dabei in seiner Begründung von den folgenden beiden nicht-neutralen extensionstheoretischen Prinzipien aus, welche ganz einfach Konjunktionen von (ET) und (W_2) bzw. (LE) und (W_2) sind:

(WET) In jedem Kontext (Satz) sind koextensionelle geschlossene singuläre Terme füreinander salva extensione substituierbar, und Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen.

und

(WLE) In jedem Kontext (Satz) sind logisch äquivalente Sätze füreinander salva extensione substituierbar, und Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen.

Während (WET) – einfacher ausgedrückt – aus der Sicht der Sätze besagt, daß in jedem Satz koextensionelle geschlossene singuläre Terme füreinander salva veritate_2 substituierbar sind, besagt (WLE), daß dies auch für logisch äquivalente Sätze gilt. Da es sich aber bei (WET) und (WLE) um Konjunktionssätze handelt, habe ich nur ihre drei Konjunktionsglieder, aber nicht die beiden Sätze selbst den Voraussetzungen aus der Prämissenmenge hinzugefügt.

Wir konnten demnach zeigen, daß aus den neutralen extensionstheoretischen Prinzipien (LE) sowie (ET) und den weiteren Prämissen von Quines Argument – ohne die Annahme von (W_2) – das folgende neutrale extensionstheoretische Prinzip (ES) folgt:

(ES) In jedem Kontext sind koextensionelle Sätze füreinander salva extensione substituierbar.

Da (W_2) schon in der Prämissenmenge enthalten ist, läßt sich aus (ES) und (W_2) aufgrund der Konjunktionsregel ganz einfach (WES) ableiten. Dieses Enthaltensein der Annahme (W_2) in den Prämissen macht jedoch Quines Argument nicht trivial, weil es ihm ja gar nicht darum geht, (W_2) zu begründen. Im Gegensatz dazu wird das Argument von Gödel sofort trivial, wenn man dessen Prämissenmenge die entsprechende Annahme (W_1) hinzufügen würde, daß Wahrheitswerte die Referenzobjekte von Sätzen sind.

Aufgrund dieses Unterschieds zwischen den beiden Argumenten handelt es sich somit meines Erachtens beim Argument von Quine sicherlich nicht im selben Sinne um ein "Slingshot-Argument" wie beim Argument von Gödel. Ich halte deshalb den in der heutigen Diskussion etablierten Terminus 'Slingshot-Argument' für problematisch, weil damit völlig unterschiedliche Argumente gemeint sind: So ist etwa das Argument von Gödel eine Reductio-ad-Absurdum der Annahme, daß definite Deskriptionen ohne freie Individuenvariablen so wie Individuenkonstanten Einzeldinge bezeichnen, während das Argument von Quine ein direkter Beweis für das Prinzip der Wahrheitsfunktionalität ist. Trotz gewisser Ähnlichkeiten zwischen diesen beiden Argumenten sind aber deren Konklusionen so unterschiedlich, daß man jene Argumente wohl nicht als verwandt auffassen sollte: Wenn man das Argument von Gödel als ein "Slingshot-Argument" betrachtet, dann ist dasjenige von Quine treffender als Extensionalitäts-Argument bzw. Argument für die Wahrheitsfunktionalität aufzufassen, jedoch nicht als "Slingshot-Argument"; betrachtet man andererseits das Argument von Quine als ein "Slingshot-Argument", dann sollte man dasjenige von Gödel nicht als ein solches verstehen.

Beim Argument von Quine ist die Annahme von (W_2) deshalb erforderlich, weil sonst aus den Prinzipien (LE) und (ET) allenfalls (ES) folgt, jedoch keineswegs (WES).[4] Da Quine aber die Wahrheitsfunk-

[4] Dies kann man sich wie folgt überlegen: So haben wir beim Argument von Gödel festgestellt, daß aus (L_R) sowie (RT) und (RS) sogar zuzüglich den weiteren Prämissen von Gödels Argument die These (W_1) keinesfalls folgt. Es gilt also auch, daß aus den drei Annahmen (L_R) sowie (RT) und (RS) alleine die These (W_1) nicht folgt. Aus (L_R) und (RS) folgt aber nun das folgende referenztheoretische Prinzip:

(LR) In jedem Satz sind logisch äquivalente Sätze füreinander salva referentia substituierbar.
Oder formal ausgedrückt:
$(\forall S_1, S_2, T_1, T_2, ref, M, g)\,(Erg(S_2, S_1(T_1//T_2))\ \&\ L\ddot{A}(T_1, T_2) \Rightarrow S_1 \equiv_{ref_{M,g}} S_2)$

Es gilt also, daß auch aus (LR) sowie (RT) und (RS) die These (W_1) nicht folgt, denn man hat lediglich eine Konsequenz aus den bisherigen drei Annahmen den letzten beiden von diesen drei Annahmen hinzugefügt. Analog dazu gilt also auch, daß aus den entsprechenden Annahmen (LE) sowie (ET) (und sogar (ES)) die tionalitäts-These (WES) begründen möchte, muß er (W_2) annehmen. Nähme er (W_2) nicht zusätzlich an, so würde sein Argument "nur" zeigen, daß aus (LE) sowie (ET) das Prinzip (ES) folgt. Es wäre dann also damit "nur" gezeigt, daß Sätze, für die (LE) und (ET) uneingeschränkt gelten, auch Sätze sind, für die (ES) uneingeschränkt gilt.[5]

Wie wir gesehen haben, hat man aber mit (ET) und (ES) bereits zwei Bestimmungstücke der Extensionalität$_3$ in Händen: In jedem Satz sind dann nämlich nicht nur koextensionelle geschlossene singuläre Terme, sondern auch koextensionale Sätze füreinander salva extensione substituierbar. Für die "volle" Extensionalität$_3$ müßte man aus der Sicht der Sätze lediglich noch nachweisen, daß in jedem Satz auch koextensionelle *n*-stellige Prädikate füreinander salva extensione substituierbar sind.

Völlig analog verhält es sich übrigens auch hinsichtlich der Extensionalität$_4$: Setzt man nämlich (LE) und (ET) voraus, dann folgt daraus (ES). Nimmt man weiters (W_2) an, dann folgen damit aus (ET) und (ES) zwei Bestimmungsstücke der Extensionalität$_4$, und zwar (WET) und (WES). Es wäre somit für die "volle" Extensionalität$_4$ nur noch nachzuweisen, daß in jedem Satz auch koextensionelle *n*-stellige Prädikate füreinander salva veritate$_2$ substituierbar sind.

---

der These (W_1) entsprechende These (W_2) keineswegs folgt; und demnach folgt daraus auch nicht die Konjunktion von (W_2) und (ES), d.h. (WES).

[5] Analog dazu gilt übrigens auch, daß aus dem Prinzip der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-logisch-äquivalenten-Sätzen – d.i. (LR) – sowie demjenigen der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-geschlossenen-singulären-Termen – d.i. (RT) – das Prinzip der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-koreferentiellen-Sätzen – d.i. (RS) – folgt.

Übersicht der wichtigsten Konventionen, Definitionen, Prinzipien und Theoreme

Im folgenden findet man – nach einigen voranstehenden Konventionen – auch die wichtigsten Definitionen, Prinzipien (Axiome) und Theoreme der vorliegenden Arbeit zu Referenzzwecken zusammengestellt. Letztere sind in vier Gruppen eingeteilt, und zwar je nachdem, ob sie aus der Bedeutungstheorie, der Referenztheorie, der Extensionstheorie oder der Wahrheitstheorie von einer untersuchten Sprache $\mathscr{L}$ entstammen. Der Einteilung in diese Gruppen liegen demnach vier Begriffe zugrunde, und zwar das *Bedeuten*, das *Bezeichnen*, das *Als-Extension-Haben* und das *Wahrsein*. Wenn in einem Satz aus unserer Metasprache $\mathscr{M}$ von $\mathscr{L}$[1] einer dieser Begriffe hauptsächlich angesprochen ist, wird der betreffende Satz in die entsprechende Gruppe eingeordnet: Geht es z.B. darin hauptsächlich um das Bezeichnen, so wird er der Referenztheorie zugeordnet. Gelegentlich sind allerdings auch Mehrfachzuordnungen möglich: Wenn etwa ein solcher Satz sowohl vom Bezeichnen als auch vom Wahrsein handelt, kann er nicht nur der Referenztheorie, sondern auch der Wahrheitstheorie zugerechnet werden. In einem derartigen Fall ist für seine Einteilung die Stellung ausschlaggebend, welche er im systematischen Zusammenhang dieser Arbeit innehat.

Konventionen

Sei $\mathscr{M}$ die deutsche Umgangssprache, versehen mit einer Reihe von zusätzlichen Zeichen aus der Logik und Mathematik. Bei den *logischen Konstanten* aus $\mathscr{M}$ handle es sich um die nachfolgend angeführten Zeichen, als da sind: die beiden Quantorenzeichen, die fünf Junktorenzeichen und das Identitätszeichen:

(1) $\forall, \exists, \sim, \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, =$

[1] Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß alle Ausdrücke von $\mathscr{L}$ auch Ausdrücke von $\mathscr{M}$ sind.

Diese Konstanten sind der Reihe nach wie folgt zu lesen:

(2) für alle; es gibt mindestens ein; nicht; und; oder; wenn, dann; genau dann, wenn; ist identisch mit

Weiters verwenden wir für verschiedene Arten von Ausdrücken aus $\mathscr{L}$ verschiedene Sorten von *Metavariablen* aus $\mathscr{M}$, und zwar:

(3) für wohlgeformte Ausdrücke (von $\mathscr{L}$): A, A_1, A_2, A_3
für singuläre Ausdrücke: s, s_1, s_2
für singuläre Terme: $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$
für Individuenkonstanten: $a, a_1, \ldots, a_n, b, c$
für Individuenvariablen: v, v_1, v_2
für n-stellige Prädikate: F, F_1, F_2
für (Aussage)Sätze: $S, S_1, S_2, S_3, S_4, T, T_1, T_2$
für singuläre Sätze: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$
für Formeln: ϕ, ψ
für Kontexte: C, C_1, C_2

(sofern derartige Ausdrücke in $\mathscr{L}$ überhaupt vorhanden sind).

Im Hinblick auf die Nummerierung der Definitionen, Theoreme, Lemmata etc. gelte folgendes als vereinbart: Die römische Ziffer gleich rechts nach dem Buchstaben 'D' (für eine Definition), 'T' (für ein Theorem), 'L' (für ein Lemma) etc. beziehe sich auf den jeweiligen Teil der vorliegenden Arbeit, und zwar 'I' auf den ersten und 'II' auf den zweiten Teil. Die nachfolgende arabische Ziffer benenne das jeweilige Kapitel aus diesem Teil. Der letzte Zahlausdruck in arabischen Ziffern gebe schließlich an, um die wievielte Definition, das wievielte Theorem, Lemma etc. aus jenem Kapitel es sich handelt: So bezeichnet z.B. '(DI.1.4)' die 4. Definition aus dem 1. Kapitel des I. Teils der vorliegenden Arbeit.

Weiters wird die jeweilige Seite, auf der man die folgenden metatheoretischen Sätze mindestens einmal in diesem Buch sonst noch finden kann, am Ende des betreffenden Satzes in runden Klammern angegeben.

Bedeutungstheorie

(B) Für alle Kontexte C_1, C_2 und alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ & A_1 und A_2 bedeuten dasselbe $\Rightarrow$
C_1 und C_2 bedeuten dasselbe (38)

Referenztheorie

Definitionen

(DI.1.4) Seien x_1 und x_2 referenzfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und sei weiters *ref* eine Referenzfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$.
$x_1 \equiv_{ref} x_2 :\Leftrightarrow ref(x_1) = ref(x_2)$ (47)

(DI.1.6) A_1 ist in C_1 durch A_2 relativ zu *ref* salva referentia substituierbar :⇔
$(\forall C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2)) \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$ (66)

(DI.1.7) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken
:⇔
$(\forall A_1, A_2)\,(A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow A_1$ ist in C_1 durch A_2 relativ zu *ref* salva referentia substituierbar) (66)

(DI.1.8) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken :⇔
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken &
$(\forall x, y, ref)\,(Satz(x, \mathscr{L})$ & $y = ref(x) \Rightarrow Wahrw(y))$ (66)

(DI.1.9) C_1 ist extensional$_1$ relativ zu *ref* :⇔
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken (70)

(DI.1.10) C_1 ist extensional$_2$ relativ zu *ref* :⇔
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Veritate$_1$-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken (70)

(DI.1.11) $\mathscr{L}$ ist extensional$_1$:$\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, \mathit{ref})\,(C_1$ ist extensional$_1$ relativ zu $\mathit{ref})$ (70)

(DI.1.12) $\mathscr{L}$ ist extensional$_2$:$\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, \mathit{ref})\,(C_1$ ist extensional$_2$ relativ zu $\mathit{ref})$ (71)

(DI.1.13) e bleibt relativ zu ref unter der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 erhalten :$\Leftrightarrow$
$(\forall C_2)\,(\mathit{Erg}\,(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ e = \mathit{ref}\,(C_1) \Rightarrow e = \mathit{ref}\,(C_2))$ (75)

(DI.1.14) e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu ref koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten :$\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2)\,(A_1 \equiv_{\mathit{ref}} A_2 \Rightarrow e$ bleibt relativ zu ref unter der teilweisen Substitution von A_1 in C_1 durch A_2 erhalten) (75)

(DI.1.16) e kommt aufgrund von (R) als das Referenzobjekt von C_1 relativ zu ref in Frage :$\Leftrightarrow$
e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu ref koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten (80)

(DII.1.14) Sei x eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$.
$\mathit{LWahr}\,(x)$:$\Leftrightarrow$ $(\forall \mathit{ref}, M, g)\,\mathit{Wahr}\,(x, \mathit{ref}_{M,g})$ (145)

(DII.1.15) Seien x_1 und x_2 Formeln von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1}^{=}\iota}$.
$\mathit{L\ddot{A}}\,(x_1, x_2)$:$\Leftrightarrow$ $\mathit{LWahr}\,(\ulcorner x_1 \leftrightarrow x_2 \urcorner)$ (145)

Neutrale referenztheoretische Prinzipien

(ZR) Für alle Sätze S gilt:
Die von S bezeichnete Entität ist aus den von den Teilausdrücken von S bezeichneten Entitäten zusammengesetzt, wobei die Art der Zusammensetzung durch die logische Form von S bestimmt ist. (11)

(UR) Für alle Sätze S_1, S_2 sowie alle deskriptiven Ausdrücke A_1, A_2 und alle Entitäten e_1, e_2, d_1, d_2 gilt:
Wenn sich S_2 von S_1 höchstens darin unterscheidet, daß S_2 mindestens ein Vorkommnis von A_2 hat, wo S_1 ein

Vorkommnis von A_1 hat, und wenn A_1 d_1 bezeichnet und A_2 d_2 bezeichnet sowie weiters S_1 e_1 bezeichnet und S_2 e_2 bezeichnet, dann unterscheidet sich e_2 von e_1 höchstens darin, daß e_2 an einer oder mehreren Stellen d_2 enthält, an denen e_1 d_1 enthält. (11)

(Ref 3) Für alle Sätze S_1, S_2 und alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$(Erg(S_2, S_1(A_1//A_2))$ & A_1 und A_2 bezeichnen dasselbe $\Rightarrow$ S_1 und S_2 bezeichnen dasselbe) (86)

(R) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ & $A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$
D.h. in jedem Kontext C_1 sind koreferentielle Ausdrücke füreinander salva referentia substituierbar (53)

(RA) $(\forall S_1, S_2, s_1, s_2, ref)$
$(Erg(S_2, S_1(s_1//s_2))$ & $s_1 \equiv_{ref} s_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref} S_2)$ (54)

(RP) $(\forall S_1, S_2, F_1, F_2, ref)$
$(Erg(S_2, S_1(F_1//F_2))$ & $F_1 \equiv_{ref} F_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref} S_2)$ (55)

(RT) $(\forall S_1, S_2, t_1, t_2, ref, M, g)$
$(Erg(S_2, S_1(t_1//t_2))$ & $t_1 \equiv_{ref_{M,g}} t_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref_{M,g}} S_2)$ (161)

(RS) $(\forall S_1, S_2, T_1, T_2, ref, M, g)$
$(Erg(S_2, S_1(T_1//T_2))$ & $T_1 \equiv_{ref_{M,g}} T_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref_{M,g}} S_2)$ (161)

($\mathrm{L_R}$) $(\forall S_1, S_2, ref, M, g)(L\ddot{A}(S_1, S_2) \Rightarrow S_1 \equiv_{ref_{M,g}} S_2)$ (152)

(LR) $(\forall S_1, S_2, T_1, T_2, ref, M, g)$
$(Erg(S_2, S_1(T_1//T_2))$ & $L\ddot{A}(T_1, T_2) \Rightarrow S_1 \equiv_{ref_{M,g}} S_2)$ (194)

(G) $(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)$
$\sigma[c] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner$ (161)

(FCG) Für alle Sätze S_1, S_2, S_3, S_4 gilt:
(S_1 und S_2 sind beide wahr $\Rightarrow$ S_1 und S_2 bezeichnen dasselbe) &
(S_3 und S_4 sind beide falsch $\Rightarrow$ S_3 und S_4 bezeichnen dasselbe) (24)

Nicht-neutrale referenztheoretische Prinzipien

(A) Definite Deskriptionen ohne freie Individuenvariablen bezeichnen so wie Individuenkonstanten (d.s. logische Eigennamen) Einzeldinge. (144)

(W_1) $(\forall x, y, ref)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ref\,(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$ (59)

(WR) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$ &
$(\forall x, y, ref)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ref\,(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$
D.h. aus der Sicht der Sätze: In jedem Kontext (Satz) C_1 sind koreferentielle Ausdrücke füreinander salva veritate$_1$ substituierbar (59)

(WRT) In jedem Satz sind koreferentielle geschlossene singuläre Terme füreinander salva referentia substituierbar, und Wahrheitswerte sind die Referenzobjekte von Sätzen. (191)

(WRS) $(\forall S_1, S_2, T_1, T_2, ref)$
$(Erg(S_2, S_1(T_1//T_2))\ \&\ T_1 \equiv_{ref} T_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ref} S_2)$ &
$(\forall x, y, ref)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ref\,(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$ (60)

(S) $(\forall x, y, ref)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ref\,(x) \Rightarrow Sachv\,(y))$ (61)

(SR) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$ &
$(\forall x, y, ref)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ref\,(x) \Rightarrow Sachv\,(y))$
D.h. aus der Sicht der Sätze: In jedem Kontext (Satz) C_1 sind koreferentielle Ausdrücke füreinander unbeschadet des Sachverhalts als Referenzobjekt substituierbar (61)

Theoreme und Lemmata

(TI.1.1) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Referentia-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ref*-koreferentiellen-Ausdrücken $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2, C_2)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2)$ (67)

(TI.1.2) $\mathscr{L}$ ist extensional$_1$ $\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2))$ (71)

(TI.1.3) $\mathscr{L}$ ist extensional$_2$ $\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2))\ \&$
$(\forall x, y, ref)\,(Satz(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ref(x) \Rightarrow Wahrw(y))$ (72)

(TI.1.4) e bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu ref koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2, C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&$
$A_1 \equiv_{ref} A_2\ \&\ e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$ (76)

(TI.1.5) $\vdash_{\mathrm{PL1}^=}$ $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ref} C_2) \Leftrightarrow$
$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ref, e)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ref} A_2\ \&\ e = ref(C_1) \Rightarrow$
$e = ref(C_2))$ (78)

(TI.1.6) C_1 ist extensional$_1$ relativ zu ref $\Leftrightarrow$
$(\forall e)\,(e$ bleibt unter der teilweisen Substitution von relativ zu ref koreferentiellen Ausdrücken in C_1 erhalten) (80)

(TI.1.7) e kommt aufgrund von (R) als das Referenzobjekt von C_1 relativ zu ref in Frage $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2, C_2)\,(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&$
$A_1 \equiv_{ref} A_2\ \&\ e = ref(C_1) \Rightarrow e = ref(C_2))$ (80)

(TII.1.1) $\vdash_{\mathrm{PL1}^=}$ $(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)$
$(Wahr(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow$
$Wahr(\ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g}))$ (147)

(LII.1.1) $\vdash_{\mathrm{PL1}^=}$ $(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)$
$(Wahr(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow c \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$ (150)

(TII.1.2) $\vdash_{\mathrm{PL1}^=}$ $(\forall \sigma, c, v, ref, M, g)\,(Wahr(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow$
$Wahr(\ulcorner \sigma[c] \leftrightarrow c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner, ref_{M,g}))$ (151)

(LII.1.2) $\{(\mathrm{L_R})\} \vdash_{\mathrm{PL1}^=} (\forall \sigma, c, v, ref, M, g)$
$(LWahr\,(\sigma[c]) \Rightarrow \sigma[c] \equiv_{ref_{M,g}} \ulcorner c = \iota v(\sigma[c/v] \wedge v = c)\urcorner)$ (153)

(N) $(\forall \sigma, c, ref, M, g)$
$(Falsch\,(\sigma[c], ref_{M,g}) \Rightarrow Wahr\,(\ulcorner\neg\sigma[c]\urcorner, ref_{M,g}))$ (161)

(TII.1.3) Das *Slingshot-Argument* von Gödel – Fall 1:
{(LII.1.1), (LII.1.2), (RT), (G), (Pr1), (Pr2)} $\vdash_{\mathrm{PL1}^=}$
$(\forall \sigma_1, \sigma_2, a, b, ref, M, g)$
$(Wahr\,(\sigma_1[a], ref_{M,g})\ \&\ Wahr\,(\sigma_2[b], ref_{M,g}) \Rightarrow$
$\sigma_1[a] \equiv_{ref_{M,g}} \sigma_2[b])$
D.h. alle wahren singulären Sätze bezeichnen dasselbe (163)

(TII.1.4) Das *Slingshot-Argument* von Gödel – Fall 2:
{($\mathrm{L_R}$), (TII.1.3), (N), (RS), (Pr3)} $\vdash_{\mathrm{PL1}^=}$
$(\forall \sigma_3, \sigma_4, a, b, ref, M, g)$
$(Falsch\,(\sigma_3[a], ref_{M,g})\ \&\ Falsch\,(\sigma_4[b], ref_{M,g}) \Rightarrow$
$\sigma_3[a] \equiv_{ref_{M,g}} \sigma_4[b])$
D.h. alle falschen singulären Sätze bezeichnen dasselbe (170)

Extensionstheorie

Definitionen

(DI.2.6) Seien x_1 und x_2 zwei extensionsfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und sei weiters *ext* eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$.
$x_1 \equiv_{ext} x_2 :\Leftrightarrow ext\,(x_1) = ext\,(x_2)$ (99)

(DI.2.7) A_1 ist in C_1 durch A_2 relativ zu *ext* salva extensione substituierbar :⇔
$(\forall C_2)\,(Erg\,(C_2, C_1(A_1//A_2)) \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2)$ (115)

(DI.2.8) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken :⇔
$(\forall A_1, A_2)\,(A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow A_1$ ist in C_1 durch A_2 relativ zu *ext* salva extensione substituierbar) (116)

(DI.2.9) C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken :⇔
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken &
$(\forall x, y, ext)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ext(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$ (116)

(DI.2.10) C_1 ist extensional$_3$ relativ zu *ext* :⇔
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Extensione-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken (117)

(DI.2.11) C_1 ist extensional$_4$ relativ zu *ext* :⇔
C_1 hat die Eigenschaft der Salva-Veritate$_2$-Substituierbarkeit-von-relativ-zu-*ext*-koextensionellen-Ausdrücken (117)

(DI.2.12) $\mathscr{L}$ ist extensional$_3$:⇔
$(\forall C_1, ext)\,(C_1$ ist extensional$_3$ relativ zu *ext*) (117)

(DI.2.13) $\mathscr{L}$ ist extensional$_4$:⇔
$(\forall C_1, ext)\,(C_1$ ist extensional$_4$ relativ zu *ext*) (118)

(DII.2.5) Sei x eine Formel von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1^{=}\lambda}}$.
$LWahr^*(x) :\Leftrightarrow (\forall ext, M^*, g)\, Wahr\,(x, ext_{M^*,g})$ (179)

(DII.2.6) Seien x_1 und x_2 Formeln von $\mathscr{L}^{\mathrm{PL1^{=}\lambda}}$.
$L\ddot{A}^*(x_1, x_2) :\Leftrightarrow LWahr^*(\ulcorner x_1 \leftrightarrow x_2 \urcorner)$ (179)

Neutrale extensionstheoretische Prinzipien

(Ext 3) $(\forall S_1, S_2, A_1, A_2, ext)\,(S_1$ ist ein “extensionaler” Kontext & $Erg\,(S_2, S_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ext} S_2)$ (88)

(E) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2)$

D.h. in jedem Kontext C_1 sind koextensionelle Ausdrücke salva extensione substituierbar (105)

(EA) $(\forall S_1, S_2, s_1, s_2, ext)$
$(Erg(S_2, S_1(s_1//s_2))$ & $s_1 \equiv_{ext} s_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ext} S_2)$ (107)

(ET) $(\forall C, t_1, t_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[t_2], C[t_1](t_1//t_2))$ & $t_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} t_2 \Rightarrow$
$C[t_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[t_2])$ (180)

(ES) $(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))$ & $T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2 \Rightarrow$
$C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2])$ (186)

(LE) $(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))$ & $LÄ^*(T_1, T_2) \Rightarrow$
$C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2])$ (180)

Nicht-neutrale extensionstheoretische Prinzipien

(W_2) $(\forall x, y, ext)(Satz(x, \mathscr{L})$ & $y = ext(x) \Rightarrow Wahrw(y))$ (108)

(WE) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ & $A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2)$ &
$(\forall x, y, ext)(Satz(x, \mathscr{L})$ & $y = ext(x) \Rightarrow Wahrw(y))$
D.h. aus der Sicht der Sätze: In jedem Kontext (Satz) C_1 sind koextensionelle Ausdrücke füreinander salva veritate$_2$ substituierbar (109)

(WET) In jedem Kontext (Satz) sind koextensionelle geschlossene singuläre Terme füreinander salva extensione substituierbar, und Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen. (193)

(WES) $(\forall S_1, S_2, T_1, T_2, ext)$
$(Erg(S_2, S_1(T_1//T_2))$ & $T_1 \equiv_{ext} T_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{ext} S_2)$ &
$(\forall x, y, ext)(Satz(x, \mathscr{L})$ & $y = ext(x) \Rightarrow Wahrw(y))$ (109)

(WLE) In jedem Kontext (Satz) sind logisch äquivalente Sätze füreinander salva extensione substituierbar, und Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen. (193)

Theoreme

(TI.2.3) $\mathscr{L}$ ist extensional$_3$ $\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2)$ (118)

(TI.2.4) $\mathscr{L}$ ist extensional$_4$ $\Leftrightarrow$
$(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&\ A_1 \equiv_{ext} A_2 \Rightarrow C_1 \equiv_{ext} C_2)\ \&$
$(\forall x, y, ext)\,(Satz\,(x, \mathscr{L})\ \&\ y = ext(x) \Rightarrow Wahrw\,(y))$ (118)

(TI.2.6) e kommt aufgrund von (E) als die Extension von C_1 relativ zu ext in Frage $\Leftrightarrow$
$(\forall A_1, A_2, C_2)\,(Erg\,(C_2, C_1(A_1//A_2))\ \&$
$A_1 \equiv_{ext} A_2\ \&\ e = ext\,(C_1) \Rightarrow e = ext\,(C_2))$ (121)

(TII.2.1) *Extensionalitäts-Argument* von Quine – Fassung 1:
$\{(W_2), (LE), (ET), (Pr4), (Pr5), (Pr6), (Pr7), (Pr8)\}$
$\vdash_{PL1^{=}}\ (\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))\ \&\ T_1 \equiv_{ext_{M^*,g}} T_2 \Rightarrow$
$C[T_1] \equiv_{ext_{M^*,g}} C[T_2])$
D.h. in jedem Kontext C sind koextensionelle Sätze salva extensione substituierbar (183)

Wahrheitstheorie

Konventionen

(KI.2.2) Seien x_1 und x_2 zwei extensionsfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und sei weiters $[x_1 \equiv x_2]$ ein verallgemeinerter Äquivalenzsatz von $\mathscr{L}$, und sei ext eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$.
$Wahr\,([x_1 \equiv x_2], ext) \Leftrightarrow ext\,(x_1) = ext\,(x_2)$ (100)

Wahrheitstheoretische Prinzipien

(E′) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ & $Wahr([A_1 \equiv A_2], ext) \Rightarrow$
$Wahr([C_1 \equiv C_2], ext))$ (106)

(EA′) $(\forall S_1, S_2, s_1, s_2, ext)$
$(Erg(S_2, S_1(s_1//s_2))$ & $Wahr([s_1 \equiv s_2], ext) \Rightarrow$
$Wahr([S_1 \equiv S_2], ext))$ (107)

(ET′) $(\forall C, t_1, t_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[t_2], C[t_1](t_1//t_2))$ & $Wahr([t_1 \equiv t_2], ext_{M^*,g}) \Rightarrow$
$Wahr([C[t_1] \equiv C[t_2]], ext_{M^*,g}))$ (188)

(ES′) $(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))$ & $Wahr([T_1 \equiv T_2], ext_{M^*,g}) \Rightarrow$
$Wahr([C[T_1] \equiv C[T_2]], ext_{M^*,g}))$ (188)

(LE′) $(\forall C, T_1, T_2, ext, M^*, g)$
$(Erg(C[T_2], C[T_1](T_1//T_2))$ & $L\ddot{A}^*(T_1, T_2) \Rightarrow$
$Wahr([C[T_1] \equiv C[T_2]], ext_{M^*,g}))$ (188)

(WE′) $(\forall C_1, C_2, A_1, A_2, ext)$
$(Erg(C_2, C_1(A_1//A_2))$ & $Wahr([A_1 \equiv A_2], ext) \Rightarrow$
$Wahr([C_1 \equiv C_2], ext))$ &
$(\forall x, y, ext)(Satz(x, \mathscr{L})$ & $y = ext(x) \Rightarrow Wahrw(y))$ (109)

Theoreme

(TI.2.1) Seien x_1 und x_2 zwei extensionsfähige Ausdrücke von $\mathscr{L}$, und sei weiters $[x_1 \equiv x_2]$ ein verallgemeinerter Äquivalenzsatz von $\mathscr{L}$, und sei *ext* eine Extensionsfunktion von X in Y für $\mathscr{L}$.
$x_1 \equiv_{ext} x_2 \Leftrightarrow Wahr([x_1 \equiv x_2], ext)$ (101)

(TII.2.2) *Extensionalitäts-Argument* von Quine – Fassung 2:
$\{(W_2)$, (LE′), (ET′), (Pr4), (Pr5′), (Pr6), (Pr7), $(Pr8)\}$
$\vdash_{PL1^=}$ (ES′) (188)

Brückenprinzipien

Ein Brückenprinzip ist ein Prinzip, das eine Verbindung zwischen zwei Begriffen herstellt, welche aus unterschiedlichen metatheoretischen Bereichen von $\mathscr{L}$ – wie etwa der Referenztheorie oder der Wahrheitstheorie – entstammen. Durch ein solches Prinzip wird somit eine "Brücke" zwischen zwei derartigen Bereichen geschlagen. Ich betrachte hier nur drei Arten von derartigen Brückenprinzipien, und zwar solche, in denen eine Verbindung zwischen:

(i) der Koreferenzialität und dem Wahrheitsbegriff, oder

(ii) der Koextensionalität und dem Wahrheitsbegriff, oder

(iii) der Koreferenzialität und der Koextensionalität hergestellt wird.

Es werden weiters für (i) und (iii) historische Belege angegeben.

ad i) Referenz-/wahrheitstheoretische Brückenprinzipien

Die folgenden Brückenprinzipien stellen eine Verbindung zwischen der Koreferenzialität zweier Ausdrücke und dem Wahrsein eines verallgemeinerten Äquivalenzsatzes her, welcher aus diesen beiden Ausdrücken gebildet wird (Es sei dabei angenommen, daß jeder referenzfähige Ausdruck A von $\mathscr{L}$ genau eine Entität bezeichnet):

(RWB) $(\forall A_1, A_2, \mathit{ref})\,(A_1 \equiv_{\mathit{ref}} A_2 \Leftrightarrow \mathit{Wahr}\,([A_1 \equiv A_2], \mathit{ref}))$

Für die drei Arten referenzfähiger Ausdrücke von $\mathscr{L}$ ergeben sich dann die folgenden Spezifikationen:

(RWBA) $(\forall s_1, s_2, \mathit{ref})\,(s_1 \equiv_{\mathit{ref}} s_2 \Leftrightarrow \mathit{Wahr}\,([s_1 \equiv s_2], \mathit{ref}))$

(RWBP) $(\forall F_1, F_2, \mathit{ref})\,(F_1 \equiv_{\mathit{ref}} F_2 \Leftrightarrow \mathit{Wahr}\,([F_1 \equiv F_2], \mathit{ref}))$

(RWBS) $(\forall T_1, T_2, \mathit{ref})\,(T_1 \equiv_{\mathit{ref}} T_2 \Leftrightarrow \mathit{Wahr}\,([T_1 \equiv T_2], \mathit{ref}))$

Weiters lautet die referenztheoretische Klausel für das Bikonditional wie folgt:

(R$_\leftrightarrow$) $\mathit{Wahr}([T_1 \equiv T_2], \mathit{ref}) \Leftrightarrow (\mathit{Wahr}(T_1, \mathit{ref}) \;\&\; \mathit{Wahr}(T_2, \mathit{ref})) \vee (\mathit{Falsch}(T_1, \mathit{ref}) \;\&\; \mathit{Falsch}(T_2, \mathit{ref}))$

Es folgt somit aus (RWBS) und (R$_\leftrightarrow$) unmittelbar das folgende Theorem:

(T1) $(\forall T_1, T_2, \mathit{ref})((T_1 \equiv_{\mathit{ref}} T_2 \Leftrightarrow (\mathit{Wahr}(T_1, \mathit{ref}) \;\&\; \mathit{Wahr}(T_2, \mathit{ref})) \vee (\mathit{Falsch}(T_1, \mathit{ref}) \;\&\; \mathit{Falsch}(T_2, \mathit{ref})))$

D.h.: zwei Sätze T_1 und T_2 bezeichnen dasselbe g.d.w. T_1 und T_2 beide wahr (relativ zu *ref*) oder aber beide falsch (relativ zu *ref*) sind (für alle T_1, T_2, ref).

Die Rechts-Nach-Links-Richtung des Theorems (T1) entspricht somit der Frege-Church-Gödel-These und damit der Konklusion des "Slingshot-Arguments" von Gödel. Die (FCG)-These stellt demnach eine Verbindung zwischen der Koreferenzialität und einem relativen – auf einer Referenzfunktion basierenden – Wahrheitsbegriff her.

ad ii) Extensions-/wahrheitstheoretische Brückenprinzipien

Analog zu (i) stellen die nachfolgenden Brückenprinzipien eine Verbindung zwischen der Koextensionalität zweier Ausdrücke und dem Wahrsein eines verallgemeinerten Äquivalenzsatzes her, der aus diesen beiden Ausdrücken gebildet wird (Es sei dazu ebenso angenommen, daß jeder extensionsfähige Ausdruck A von $\mathscr{L}$ genau eine Entität als Extension hat):

(EWB) $(\forall A_1, A_2, \mathit{ext})(A_1 \equiv_{\mathit{ext}} A_2 \Leftrightarrow \mathit{Wahr}([A_1 \equiv A_2], \mathit{ext}))$

Für die drei Arten extensionsfähiger Ausdrücke von $\mathscr{L}$ ergeben sich dann wieder die üblichen Spezifikationen, welche hier aber nicht eigens angeführt werden.

ad iii) Referenz-/extensionstheoretische Brückenprinzipien

In den folgenden Brückenprinzipien wird eine Verbindung zwischen der Koreferenzialität und der Koextensionalität zweier Ausdrücke hergestellt: Sei $\{x \mid RfA(x, \mathscr{L})\} = \{x \mid EfA(x, \mathscr{L})\}$:

(REB) $(\forall A_1, A_2, ref, ext)\,(A_1 \equiv_{ref} A_2 \Leftrightarrow A_1 \equiv_{ext} A_2)$

Es entfällt auch hier wieder die Angabe der üblichen Spezifikationen. Auch für derartige Brückenprinzipien lassen sich historische Beispiele anführen: So bezeichnen etwa nach Frege zwei Begriffswörter (d.h. zwei *n*-stellige Prädikate) dasselbe g.d.w. die zugehörigen Begriffsumfänge (d.h. Extensionen) zusammenfallen. Es bezeichnen also zwei *n*-stellige Prädikate dasselbe g.d.w. sie dieselbe Extension haben.[2]

[2] Vgl. Frege 1895, S.31.

Literaturverzeichnis

Barwise, Jon / Perry, John

(1981) "Semantic Innocence and Uncompromising Situations", in: Martinich [3]1996, S.369–381.

(1987) *Situationen und Einstellungen. Grundlagen der Situationssemantik*, Berlin.

Benacerraf, Paul / Putnam, Hilary (Hrsg.)

(1983) *Philosophy of Mathematics*, Cambridge.

Born, Rainer / Neumaier, Otto (Hrsg.)

(2001) *Philosophie, Wissenschaft, Wirtschaft*, Wien.

Carnap, Rudolf

(1942) *Introduction to Semantics*, Cambridge [5]1961.

([2]1956) *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*, Midway Reprint, Chicago 1988.

Church, Alonzo

(1943) "Carnap's *Introduction to Semantics*", *The Philosophical Review* 52 (3), S.298–304.

Dalen, Dirk van / Doets, Kees / Swart, Henriëtte de

(1978) *Sets: Naive, Axiomatic and Applied*, Oxford.

Davidson, Donald

(1967) "Truth and Meaning", in: Martinich [3]1996, S.92–103.

Davidson, Donald / Hintikka, Jaakko (Hrsg.)

(1968) *Words and Objections: Essays in Honor of W.V. Quine*, Dordrecht.

Dummett, Michael

([2]1981) *Frege. Philosophy of Language*, London.

Føllesdal, Dagfinn

(1968) "Quine on Modality", in: Davidson/Hintikka 1968, S.147–157.

Frege, Gottlob

(1891) "Funktion und Begriff", in: Patzig [6]1986, S.17–39.

(1892a) "Über Begriff und Gegenstand", in: Patzig [6]1986, S.66–80.

(1892b) "Über Sinn und Bedeutung", in: Patzig [6]1986, S.40–65.

(1895) "Ausführungen über Sinn und Bedeutung" (1892–1895), in: Gabriel [3]1990, S.25–34.

(1906) "Einleitung in die Logik", in: Gabriel [3]1990, S.74–91.

Gabriel, Gottfried (Hrsg.)

([3]1990) *Gottlob Frege. Schriften zur Logik und Sprachphilosophie*, Hamburg.

Gamut, L.T.F.

(1991) *Logic, Language, and Meaning, Vol. 1. Introduction to Logic*, Chicago.

Gödel, Kurt

(1944) "Russell's Mathematical Logic", in: Benacerraf/Putnam 1983, S.447–469.

Goossens, Michel / Mittelbach, Frank / Samarin, Alexander

(2002) *Der LaTeX-Begleiter*, München.

Kalish, Donald / Montague, Richard / Mar, Gary

([2]1980) *Logic. Techniques of Formal Reasoning*, San Diego.

Kopka, Helmut

(2002) *LaTeX*, 3 Bände, München.

Kutschera, Franz von

(1989) *Gottlob Frege. Eine Einführung in sein Werk*, Berlin.

Lambert, Karel

(1997) *Free Logics: Their Foundations, Character and Some Applications Thereof*, Sankt Augustin.

Lambert, Karel (Hrsg.)

(1991) *Philosophical Applications of Free Logic*, Oxford.

Leeb, Hans-Peter

(1997a) "Formalisierung von Gödels 'Slingshot'-Argument und die Referenzrelation", in: Weingartner/Schurz/Dorn 1997, S.532–538.

(1997b) "Beruht Gödels 'Slingshot'-Argument auf einem Äquivokationsfehler?", Vortrag am III. Internationalen Kongreß der Gesellschaft für analytische Philosophie (GAP III), Sektion Logik, München 1997.

(2001a) "Was sind extensionale Sprachen?", in: Born/Neumaier 2001, S.185–190.

(2001b) "Essay Review: Free Logics", *History and Philosophy of Logic* 22 (4), S.233–236.

(2002) "Zur Deutung von Axiomensystemen bei Popper", in: Morscher 2002, S.133–159.

Martin, John N.

(1987) *Elements of Formal Semantics. An Introduction to Logic for Students of Language*, San Diego.

Martinich, Aloysius (Hrsg.)

(³1996) *The Philosophy of Language*, Oxford.

Morscher, Edgar (Hrsg.)

(2002) *Was wir Karl R. Popper und seiner Philosophie verdanken*, Sankt Augustin.

Neale, Stephen

(1995) "The Philosophical Significance of Gödel's Slingshot", *Mind* 104 (416), S.761–825.

Partee, Barbara / Meulen, Alice ter / Wall, Robert

(²1993) *Mathematical Methods in Linguistics*, Dordrecht.

Patzig, Günther (Hrsg.)

(⁶1986) *Gottlob Frege. Funktion, Begriff, Bedeutung*, Göttingen.

Quine, Willard Van Orman

(1940) *Mathematical Logic*, Revised Edition, Cambridge ¹²1994.

(1953) "Three Grades of Modal Involvement", in: Quine ⁶1994, S.158 bis 176.

(²1956) *Methods of Logic*, Revised Edition, London 1970.

(1978) *Mengenlehre und ihre Logik*, Frankfurt.

(⁶1994) *The Ways of Paradox and Other Essays*, Revised and Enlarged Edition, Cambridge.

(1995) *From Stimulus to Science*, Cambridge.

Salmon, Nathan U.

(1982) *Reference and Essence*, Oxford.

Scott, Dana

(1967) "Existence and Description in Formal Logic", in: Lambert 1991, S.28–48.

Weingartner, Paul / Schurz, Gerhard / Dorn, Georg (Hrsg.)

(1997) *The Role of Pragmatics in Contemporary Philosophy. Papers of the 20th International Wittgenstein Symposium. Vol. 2*, Kirchberg am Wechsel.

Personenregister