Sachverhalte und Extensionalität in der freien Logik

Hans-Peter Leeb

13. September 2006

Verlagsseite 1

Verlagsseite 2

Verlagsseite 3

Verlagsseite 4

Inhalt

Vorwort 9
Einleitung 11

I. Extensionalität 15

1 Das Extensionalitätsproblem 17
1.1 Zulässigkeit von Entitäten als Extensionen 17
1.2 Existenzannahmen und logische Wahrheit 21
1.3 Das Non-Extensionalitäts-Argument (= NEA) 24
1.4 Kritik am NEA 33
1.5 Das *Slingshot*-Argument 35
2 Analyse des Extensionalitätsbegriffs 40
2.1 Extensionsfunktionen und Koextensionalität 41
2.2 Die Relationen der SE-Substituierbarkeit 43
2.3 SE-Extensionalität und Stärkediagramme 45
2.4 Neutrale versus nicht-neutrale Extensionalität 49
2.5 Auffassungen der SV-Extensionalität 50
2.6 Sicherstellung der SE-Extensionalität 52

II. Sachverhalte 55

3 Entwicklung von Sachverhaltssemantiken 57
4 *Inner-Outer-Domain*-Semantiken 60
4.1 Syntax von $\mathcal{L}_1$ 60
4.2 Wahrheitswertsemantik I 62
4.2.1 Modelle und Belegungen 62
4.2.2 Semantische Begriffe$_1$ 65
4.3 Sachverhaltssemantik I 68
4.3.1 Die Menge der Sachverhalte$_1$ 70
4.3.2 (Nicht-) Bestehen von Sachverhalten$_1$ 74
4.3.3 Extensionsfunktion 75
4.3.4 Allsätze und logische Attribute$_1$ 77
4.3.5 Semantische Begriffe$_2$ 88
4.3.6 Adäquatheitstheorem 89
4.4 Zusammenfassung 93

5 Antworten I auf das Extensionalitätsproblem **94**
5.1 Sachverhaltsbezogene Extensionalität 94
5.2 Extensionalitätstheorem 97
5.3 Schlußfolgerungen 103
6 Superbewertungs-Semantiken **106**
6.1 Syntax von $\mathcal{L}_2$ 106
6.2 Wahrheitswertsemantik II 107
6.2.1 Modelle und Belegungen 107
6.2.2 Semantische Begriffe$_3$ 110
6.3 Sachverhaltssemantik II 113
6.3.1 Die Menge der Sachverhalte$_2$ 113
6.3.2 (Nicht-) Bestehen von Sachverhalten$_2$ 116
6.3.3 Extensionsfunktionen 117
6.3.4 Allsätze und logische Attribute$_2$ 121
6.3.5 Ontologische und semantische Begriffe$_4$ 123
6.3.6 Adäquatheitstheorem 124
6.4 Zusammenfassung 130
7 Antworten II auf das Extensionalitätsproblem **133**
7.1 Koextensionalität 134
7.2 SE-Extensionalität und Stärkediagramme 138
7.3 Sachverhaltsbezogene Extensionalität 142
7.4 Erste Antwort 142
7.5 Zweite Antwort 146
7.6 Dritte Antwort und Analyse des NEA 147
7.7 Vierte Antwort 153
7.8 Fünfte Antwort 154
7.9 Schlußfolgerungen 156

Resümee **163**

Anhang 167

Relationen und Funktionen 169
Liste der Symbole 171
Literaturverzeichnis 173
Personenregister 179

Für Maristela und Rodrigo
in Liebe

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Fachbereich Philosophie an der Kultur- und Gesellschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Salzburg im Rahmen des vom österreichischen Fonds zur Förderung der Wissenschaftlichen Forschung, FWF, geförderten Projekts Nr. 17298-G04. Ich möchte dem FWF für seine großzügige finanzielle Unterstützung danken, wodurch diese Arbeit erst ermöglicht wurde. Besonderer Dank gebührt weiters dem Fachbereichsleiter, Edgar Morscher, für seine volle Unterstützung in jeglicher Hinsicht. Ferner sei Karel Lambert, dem Begründer der freien Logik gedankt, dessen Gedankenwelt mich in den letzten Jahren sehr beschäftigt hat und den ich persönlich als *teaching assistent* in Irvine erleben durfte. Meinen Kollegen vom Fachbereich möchte ich zudem für wertvolle Hinweise zum Thema danken. Darüber hinaus danke ich dem *Journal of Philosophical Logic* für die Annahme meiner Vorarbeiten zur Sachverhaltssemantik. Dem Philosophieinstitut der Universität Düsseldorf bin ich außerdem für die freundliche Einladung zu einem Vortrag über diese Sachverhaltssemantik und der anschließenden Diskussion zu Dank verpflichtet. Weiters sei den anonymen Gutachtern des FWF für wertvolle Rückmeldungen gedankt. Ich habe mich bemüht, diese Hinweise, so gut es mir halt möglich schien, zu berücksichtigen und in die vorliegende Arbeit einfließen zu lassen. Auch wenn LaTeX mittlerweile zu einem weithin akzeptierten Standard beim Drucksatz geworden ist, möchte ich nicht zuletzt Donald Knuth und Leslie Lamport dafür danken, daß sie dieses wunderbare Werkzeug der Forschergemeinde frei zur Verfügung gestellt haben.

H.-P. L.

Einleitung

Eine Sprache muß – so läßt sich argumentieren – mindestens zwei Anforderungen erfüllen, um für die Zwecke der Wissenschaften angemessen zu sein: Sie muß extensional im Substituierbarkeitssinn sein und weiters leere sprachliche Ausdrücke enthalten. So wird die Extensionalität von vielen (vor allem Quine) als ein Kriterium für die Adäquatheit einer Wissenschaftssprache angesehen. Ganz allgemein gesprochen, ist eine Sprache *extensional im Substituierbarkeitssinn* genau dann, wenn (= g.d.w.) in allen ihren Aussagesätzen (kurz: Sätzen) sprachliche Ausdrücke, welche von demselben sprechen, immer füreinander unbeschadet dessen, wovon diese Sätze sprechen, substituierbar sind. Die intuitive Basis der Extensionalität ist gleichermaßen einfach wie einleuchtend: Was immer wahr von einem Einzelding ist, ist es, völlig unabhängig von den sprachlichen Ausdrücken, welche von ihm sprechen; es wird nicht plötzlich unwahr, nur weil ein anderer Ausdruck ebenfalls von ihm sprechen kann. Es kommt etwa einem Einzelding, welches in einer bestimmten Menge liegt, dieses Enthaltensein nicht einfach dadurch "abhanden", daß man für jenes Einzelding und die betreffende Menge andere Ausdrücke wählen kann. Alles, worauf es hier nur ankommt, ist, daß die anderen Ausdrücke ebenfalls von unseren beiden Entitäten sprechen. Angenommen nun, ein Satz wie 'Die Erde ist ein Planet' spricht davon, daß ein bestimmtes Einzelding – nämlich die Erde – in einer bestimmten Menge – nämlich derjenigen der Planeten – liegt. Angenommen weiters, die ersetzenden Ausdrücke sprechen von demselben wie diejenigen, welche sie ersetzen. Es ändert sich dann das nicht, wovon unser Satz spricht. Die aus den betreffenden Ersetzungen resultierenden Sätze sprechen nämlich immer noch davon, daß jenes Einzelding in der Menge der Planeten liegt. Unser Satz ist demnach extensional im Substituierbarkeitssinn. Die erste Anforderung beinhaltet also, daß alle Sätze einer Wissenschaftssprache in diesem Sinn extensional sein müssen.

Weiters finden sich nicht nur im alltäglichen, sondern auch im wissenschaftlichen Sprachgebrauch zahlreiche Beispiele für Ausdrücke, welche nicht von etwas Existierendem sprechen, d.h. welche *leer* sind (Beispiele für ersteres sind 'der Chef der Nichtwähler' und für letzteres ‘Vulkan’ (der vermeintliche Planet, welcher die Störungen in der Umlaufbahn des Merkur verursachen soll), ‘der zweite Mond der Erde’, ‘1/0’ etc.). Aus der Praxis der Wissenschaften wissen wir nämlich, daß diese gelegentlich die Existenz von Entitäten postulieren und zudem Ausdrücke einführen müssen, um von diesen vermeintlich existierenden Entitäten sprechen zu können. Dabei kann man sich aber nicht immer sicher sein, ob diese Entitäten überhaupt existieren. Manchmal hat es sich sogar herausgestellt, daß einige dieser vermeintlich existierenden Entitäten gar nicht existieren und die für sie eingeführten sprachlichen Ausdrücke somit leer sind. Deshalb muß die Wissenschaftssprache nicht nur extensional im Substituierbarkeitssinn sein, sondern zur angemessenen Rekonstruktion und logischen Analyse des tatsächlichen wissenschaftlichen Sprachgebrauchs auch leere Ausdrücke enthalten.

Üblicherweise wird angenommen, daß Sätze von Wahrheitswerten sprechen. Von Lambert stammt nun ein Argument, daß unter dieser Annahme eine Sprache, welche solche leere Ausdrücke enthält, non-extensional im Substituierbarkeitssinn ist, eben weil sie diese Ausdrücke enthält. Unsere beiden Anforderungen an eine Wissenschaftssprache scheinen somit schnurstracks in ein Dilemma zu führen: Eine Wissenschaftssprache muß – nach Ansicht Quines und vieler, die ihm darin gefolgt sind – extensional sein. Damit aber mit ihr der tatsächliche wissenschaftliche Sprachgebrauch angemessen rekonstruiert werden kann, muß sie zudem leere Ausdrücke enthalten. Die Zulässigkeit von solchen leeren Ausdrücken macht jedoch – wie Lambert aufzeigt – die betroffene Sprache non-extensional. Das Problem ist also, ob und wie die Extensionalität im Substituierbarkeitssinn von einer Sprache, in der Sätze mit leeren Ausdrücken vorkommen, sichergestellt werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Lösung für dieses Extensionalitätsproblem vorgeschlagen. Dazu werden das Lambertsche Argument und der Extensionalitätsbegriff einer tiefgehenden Analyse unterzogen. Es zeigt sich dabei, daß die Extensionalität im Substituierbarkeitssinn weitaus mehr Facetten aufweist und bei weitem vielschichtiger ist, als Quine und Lambert gedacht haben. Im Mittelpunkt dieser Untersuchungen stehen vier Bedeutungen dessen, was es heißt, daß zwei Ausdrücke von demselben sprechen. Da jede Eigenschaft der

Extensionalität im Substituierbarkeitssinn durch eine dieser Relationen des Von-demselben-Sprechens definiert werden kann, lassen sich dementsprechend sowohl vier Bedeutungen der Extensionalität als auch der Non-Extensionalität voneinander unterscheiden. Der Witz dabei ist, daß ein Satz in einer dieser vier Bedeutungen von 'extensional' non-extensional sein kann, während er in einer anderen dieser vier Bedeutungen dennoch extensional ist. Weiters werden die Details von zwei neuen Semantiken für eine Sprache mit leeren Ausdrücken (d.i. eine Sprache der freien Logik) ausgearbeitet. In diesen Semantiken sprechen Sätze nicht von Wahrheitswerten, sondern von Sachverhalten (aber singuläre Terme bzw. n-stellige generelle Terme sprechen – wie üblich – von Einzeldingen bzw. Mengen von geordneten n-Tupel von solchen Einzeldingen). Die Berücksichtigung jener vier Bedeutungen der Extensionalität und solcher Sachverhalte erlaubt es dann, die Bedingungen anzugeben, unter denen die Extensionalität von Sätzen mit leeren Ausdrücken sichergestellt werden kann. Gelegentlich wird eingewendet, daß eine nicht-triviale Sachverhaltssemantik wegen des sogenannten *Slingshot-Arguments* unmöglich sei. Es wird sich jedoch herausstellen, daß dieses Argument kein Hindernis für die von mir vorgeschlagenen Sachverhaltssemantiken ist, und zwar weil in ihnen logisch äquivalente Sätze nicht immer von demselben sprechen (womit eine der beiden hauptsächlichen Annahmen dieses Arguments zurückgewiesen wird).

Ich schließe die Einleitung mit einem kurzen Wegweiser durch das Buch ab. In §1 findet man einen Aufriß des Extensionalitätsproblems in der freien Logik, nämlich was das für eine Problem ist, warum es sich stellt, wie man es lösen könnte usw. Hier findet man auch meine Rekonstruktion des sogenannten *Non-Extensionalitäts-Arguments* von Lambert. In §2 wird die Extensionalität im Substituierbarkeitssinn ausführlich analysiert. Dieses Kapitel ist die Grundlage für die späteren Antworten auf das Extensionalitätsproblem. Weiters werden in §3 zwei unterschiedliche Ansätze zur Entwicklung von Sachverhaltssemantiken kurz beschrieben, welche dann in §4 und §6 in allen Details ausgearbeitet werden: So enthält §4 die sogenannte *Inner-Outer-Domain-Sachverhaltssemantik* und §6 die sogenannte *Superbewertungs-Sachverhaltssemantik*. Je nachdem, welche der beiden Sachverhaltssemantiken man voraussetzt, ergeben sich auf der Basis meiner Analyse der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn unterschiedliche Antworten auf das Extensionalitätsproblem. So findet man in §5 die Antworten, welche sich im Rahmen der *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik darauf geben lassen, und in §7 diejenigen, welche im Rahmen der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik gegeben werden können. §7 enthält auch eine ausführliche Analyse von Lamberts Non-Extensionalitäts-Argument im Licht der zweiten Sachverhaltssemantik. Das Resümee nach §7 und vor dem Anhang gibt dem Leser, der einen ersten Überblick wünscht, eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Resultate der vorliegenden Arbeit an die Hand. Im Anhang findet man Erläuterungen zu Relationen sowie partiellen und totalen Funktionen und eine kurze Erklärung einiger in dieser Arbeit verwendeten Symbole.

I. Extensionalität

1 Das Extensionalitätsproblem

Wegen des Idealbilds von der Logik als eines Werkzeugs der philosophischen Analyse sollte sie frei von Existenzannahmen und unabhängig von den empirischen Fakten sein. Die freie Logik[1] zielt deshalb auf das Explizieren von Existenzannahmen ab. Sie befreit damit allerdings die Logik nicht nur von solchen versteckten Annahmen, sondern es ergeben sich dadurch auch neue Probleme. Eines davon ist das Extensionalitätsproblem, welches in der vorliegenden Arbeit untersucht wird. Das hauptsächliche Ziel dabei ist, jene Bedingungen anzugeben, unter denen die Extensionalität im Substituierbarkeitssinn von allen elementaren[2] Sätzen mit leeren singulären Termen sichergestellt werden kann. Dazu werde ich – wie gesagt – das Non-Extensionalitäts-Argument von Lambert sowie den Extensionalitätsbegriff genau analysieren und die Details von zwei Sachverhaltssemantiken für die sogenannte *positive freie Logik* ausarbeiten.

1.1 Zulässigkeit von Entitäten als Extensionen

In der vorliegenden Arbeit wird die Extensionalität im *Salva-Extensione*-Substituierbarkeitssinn (kurz: die SE-Extensionalität) als eine Eigenschaft aufgefaßt, welche Sätze entweder haben oder nicht haben können. Daß ein Satz *SE-extensional* ist, heißt hier soviel wie, daß darin koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar sind. Mit der *Koextensionalität* von zwei

[1] Eine *freie* Logik ist eine Logik, welche frei von Existenzannahmen hinsichtlich der singulären sowie generellen Terme ist und in der die Quantoren wie in der klassischen Prädikatenlogik verstanden werden (d.h. als 'alle existierenden Dinge' und 'einige existierende Dinge' gelesen werden). Für diese Definition vgl. Lambert 2003, S.124 sowie 2001, S.258 und 1997, S.41 und S.59 sowie weiters Morscher/Hieke 2001, S.2.

[2] Ich gehe in der vorliegenden Arbeit von folgenden Definitionen aus: Ein *singulärer Term* ist ein sprachlicher Ausdruck, welcher dazu dient, genau ein Einzelding zu bezeichnen. Ein *n-stelliger genereller Term* ist ein sprachlicher Ausdruck, welcher von allen geordneten n-Tupel von Einzeldingen aus einer gegebenen Klasse von Einzeldingen wahr ist; er ist *einfach* g.d.w. in ihm keine Junktoren und gebundenen Individuenvariablen vorkommen. Ein *Satz* ist ein sprachlicher Ausdruck, welcher wahr oder falsch sein kann; er ist *elementar* g.d.w. er keine Junktoren und Quantoren enthält.

sprachlichen Ausdrücken ist dabei gemeint, daß sie dieselbe Extension haben, und mit der *Substituierbarkeit unbeschadet der Extension* ist weiters die Relation der *Salva-Extensione*-Substituierbarkeit (kurz: die SE-Substituierbarkeit) gemeint. Die SE-Extensionalität hat demnach drei Bestimmungsmerkmale, nämlich: (i) den Extensionsbegriff, (ii) den Koextensionalitätsbegriff und (iii) den Begriff der SE-Substituierbarkeit. Ich werde in dieser Arbeit alle drei Bestimmungsmerkmale der SE-Extensionalität ausführlich erläutern. So erkläre ich zur Analyse des Extensionalitätsbegriffs im folgenden zunächst einmal, was unter der Extension eines sprachlichen Ausdrucks verstanden werden kann. Weiters gebe ich dazu eine notwendige und hinreichende Bedingung an, wann eine Entität überhaupt als die Extension eines Satzes zulässig ist. Zwischen der Zulässigkeit einer Entität als die Extension eines Satzes und seiner SE-Extensionalität läßt sich nämlich – wie wir sehen werden – ein ganz enger Zusammenhang herstellen, welcher durch das sogenannte *Kompositionalitätsprinzip* begründet wird.

Die *Extension* eines sprachlichen Ausdrucks ist nun das, wovon er spricht (bzw. im Fall der generellen Terme auch das, worauf er anwendbar ist). In der modernen Sprachphilosophie ist weitgehend unbestritten, daß die Extensionen von singulären Termen Einzeldinge sind und diejenigen von n-stelligen generellen Termen Mengen von geordneten n-Tupel von solchen Einzeldingen. Die folgende Frage wurde dagegen in der frühen Phase der modernen Sprachphilosophie völlig unterschiedlich beantwortet: Sofern Sätze von etwas sprechen, wovon sprechen sie dann? Während Frege meint, daß *Wahrheitswerte* solche Extensionen sind, handelt es sich hierbei in Carnaps früher Semantik um *Sachverhalte*.[3] Um entscheiden zu können, welche Antwort richtig ist, werden Prinzipien benötigt, die die Extensionen von Sätzen ganz allgemein betreffen, ohne dabei die Art von solchen Extensionen festzulegen. So spielt das oben erwähnte Kompositionalitätsprinzip (verstanden als eine *Substitutionsthese*) bei Frege die Rolle eines Prinzips, das die Suche nach den Extensionen von Sätzen anleitet: Wann im-

[3] Vgl. Frege 1892 und Carnap 1942. Die Phrase ‘sprechen von’ wird hier im Sinn von Frege 1892, S.43 verwendet, so wie er sie benutzt hat, um seine Referenzfunktion zu charakterisieren.

mer er in Zweifel über die Extension eines Satzes ist, leitet es seine Suche nach dieser Entität an. Es besagt folgendes:

(K) In allen Sätzen sind koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar.

Man beachte, daß hier klarerweise noch nicht festgelegt sein darf, welche Entitäten die Extensionen von Sätzen sind, denn sonst könnte (K) gar nicht die Suche nach solchen Extensionen anleiten.

Weiters kann man wie folgt vorgehen, wenn die Suche nach der Extension eines Satzes S_1 von dieser Substitutionsthese angeleitet wird: Nehme probeweise irgendeine Entität als die Extension von S_1 an (z.B. einen Wahrheitswert, einen Sachverhalt etc.). Betrachte weiters irgendeinen extensionsfähigen Teilausdruck A_1 von S_1 sowie alle Ausdrücke, welche koextensional mit A_1 sind. Ersetze nun der Reihe nach eines oder mehrere Vorkommen von A_1 in S_1 durch einen jener Ausdrücke, welche koextensional mit A_1 sind. Wiederhole diese Prozedur auch mit allen anderen Ausdrücken, welche ebenfalls koextensional mit A_1 sind. Betrachte weiters alle anderen extensionsfähigen Teilausdrücke von S_1 und ersetze auch diese – wie eben beschrieben – durch koextensionale Ausdrücke. Überprüfe schließlich, ob alle betreffenden Ersetzungsergebnisse die zuvor probeweise angenommene Entität zur Extension haben. Falls ja, dann sind in S_1 – wie von (K) verlangt – koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar, und diese Entität ist somit als die Extension von S_1 zulässig. Aufgrund von (K) sind daher alle und nur jene Entitäten als die Extension von S_1 zulässig, welche immer unter der Substitution von koextensionalen Ausdrücken in S_1 erhalten bleiben. Die Substitutionsthese (K) legt demnach die folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Zulässigkeit einer Entität als die Extension eines Satzes nahe:

(Df.ZE) Eine Entität en_1 ist als die Extension eines Satzes S_1 *zulässig* $:\Leftrightarrow$
en_1 bleibt immer unter der Substitution von koextensionalen Ausdrücken in S_1 erhalten[4]

[4] D.h. eine Entität en_1 ist als die Extension eines Satzes S_1 zulässig g.d.w. für

Demzufolge ist eine Entität als die Extension eines Satzes *unzulässig* g.d.w. sie nicht immer unter der Substitution von koextensionalen Ausdrücken in diesem Satz erhalten bleibt.

Ferner läßt sich ein enger Zusammenhang zwischen dieser Substitutionsthese (K) und der SE-Extensionalität wie folgt herstellen (es wird dabei nicht festgelegt, welche Entitäten die Extensionen von Sätzen sind):

(Df.SE) Ein Satz S_1 ist *SE-extensional* :⇔
in S_1 sind koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar[5]

Das Definiens von (Df.SE) ist eine Substitutionsinstanz von (K) und damit eine einfache logische Folgerung von (K). Demnach ist ein Satz *non-SE-extensional* g.d.w. darin koextensionale Ausdrücke nicht immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar sind. Wenn weiters in allen Sätzen einer Sprache koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar sind, dann ist diese Sprache SE-extensional. Die Substitutionsthese (K) drückt somit die volle SE-Extensionalität einer Sprache aus. In §2 werden wir sehen, daß es sich bei (Df.ZE) und (Df.SE) wegen der Mehrdeutigkeit des Koextensionalitätsbegriffs um Definitionsschemata handelt (hierbei ist ein *Definitionsschema* ein Schema zur Bildung mehrerer Definitionen, welche eine analoge Form haben).

---

alle Sätze S_2 und Ausdrücke A_1, A_2 gilt: wenn S_2 ein Ergebnis der Ersetzung eines oder mehrerer Vorkommen von A_1 in S_1 durch A_2 ist und A_1 koextensional mit A_2 ist und en_1 die Extension von S_1 ist, dann ist en_1 auch die Extension von S_2. Für eine ausführliche Analyse des hier involvierten Erhaltungsbegriffs vgl. weiters Leeb 2004, S.70–73. Lies ferner das metasprachliche Definitionszeichen ':⇔' als 'genau dann, wenn'. Für die Erläuterung von einigen anderen in der vorliegenden Arbeit verwendeten Symbole siehe die entsprechenden Bemerkungen im Anhang auf S.171.

[5] D.h. ein Satz S_1 ist SE-extensional g.d.w. für alle Sätze S_2 und Ausdrücke A_1, A_2 gilt: wenn S_2 ein Ergebnis der Ersetzung eines oder mehrerer Vorkommen von A_1 in S_1 durch A_2 ist und A_1 koextensional mit A_2 ist, dann ist S_1 koextensional mit S_2. Für eine ausführliche Analyse des Extensionalitätsbegriffs siehe §2.

Aufgrund der beiden Definitionsschemata (Df.ZE) und (Df.SE) kann also der hier relevante Zusammenhang zwischen der Zulässigkeit einer Entität als die Extension eines Satzes und seiner SE-Extensionalität wie folgt auf den Punkt gebracht werden: Wenn eine gegebene Entität als die Extension eines Satzes angenommen wird und sich dieser Satz deswegen als SE-extensional herausstellt, dann ist jene Entität als seine Extension zulässig. Wenn er sich andererseits deshalb als non-SE-extensional erweist, dann ist jene Entität als seine Extension unzulässig.

1.2 Existenzannahmen und logische Wahrheit

Das Extensionalitätsproblem stellt sich eigentlich nur deswegen, weil in der freien Logik leere singuläre Terme zugelassen werden. Für die Zulässigkeit von solchen Termen lassen sich aber mehrere gute Gründe anführen, von denen hier nur zwei genannt seien: Man braucht sie, um die Existenzannahmen hinsichtlich der singulären Terme explizieren zu können; weiters sind sie nötig, um den tatsächlichen wissenschaftlichen Sprachgebrauch angemessen rekonstruieren zu können. So findet man – wie gesagt – sogar im wissenschaftlichen Sprachgebrauch Sätze, in denen sprachliche Ausdrücke vorkommen, die nichts Existierendes bezeichnen. Bekannte Beispiele hierfür sind die beiden Sätze 'Vulkan rotiert' und '1/0 ist eine Zahl'. Sie enthalten die beiden singulären Terme 'Vulkan' und '1/0', welche kein existierendes Einzelding bezeichnen. So nahm man in der Astronomie eine Zeit lang an, daß Vulkan ein Planet ist, der die Unregelmäßigkeiten in der Umlaufbahn des Merkur verursacht, bis sich herausstellte, daß er gar nicht existiert.[6] Der singuläre Term 'Vulkan' ist demnach leer, weil er kein existierendes Einzelding bezeichnet. Man sagt auch, daß dieser Term keinen existentiellen Gehalt hat, und zwar weil der Planet Vulkan nicht existiert. Den Begriff des *existentiellen Gehalts* charakterisiert Lambert dabei wie folgt: "A singular term 't' has existential import just in case t exists (or, equivalently, there exists an object the same as t) and a general term (or predicate) 'G' has existential import just in case G exist (or, equivalently, there exists an object that

[6] Vgl. Lambert 1997, S.33.

is G)."[7] Da Lambert Anführungsnamen anstelle von metalinguistischen Variablen für singuläre Terme verwendet, kann es sich hier nur um eine Charakterisierung, aber nicht um eine explizite Definition des Begriffs des existentiellen Gehalts handeln. Er charakterisiert diesen Begriff ausschließlich mit Hilfe des Existenzbegriffs. Wegen des genannten formalen Problems modifiziere ich diese Charakterisierung, indem ich zusätzlich noch das Bezeichnen und das Zur-Extension-haben ins Spiel bringe. Ich werde deshalb im folgenden die Phrase 'ein singulärer Term a hat existentiellen Gehalt' so verstehen, daß damit ganz einfach gemeint ist, daß der singuläre Term a ein existierendes Einzelding bezeichnet. Demzufolge hat ein singulärer Term a existentiellen Gehalt g.d.w. a ein existierendes Einzelding bezeichnet. Und ein n-stelliger genereller Term G hat es g.d.w. G eine Menge von geordneten n-Tupel von existierenden Einzeldingen zur Extension hat.

Die klassische Logik ist nun insofern nicht frei von Existenzannahmen hinsichtlich der singulären und generellen Terme, als in ihr das logische Wahrsein eines Satzes verlangt, daß alle darin vorkommenden Terme existentiellen Gehalt haben. Anders gesagt, es gibt keinen logisch wahren Satz der klassischen Logik, in welchem ein leerer Term vorkommen darf. Zum Beispiel sind in ihr alle Einsetzungen in das Prinzip der Universellen Instanzierung

(UI) $\quad \forall x A \rightarrow A(a/x)$

logisch wahr.[8] Aber das ist nur deshalb so, weil in diesen Einsetzungen keine leeren Terme vorkommen dürfen. Wenn nämlich solche leere Terme darin vorkämen, würde etwa die folgende umgangssprachliche Einsetzung in (UI) mit einem leeren singulären Term sofort ein Gegenbeispiel zu (UI) ergeben:

[7] Vgl. Lambert 2001, S.258.

[8] (UI) ist ein Axiomenschema. Die Axiome, welche die in (UI) angegebene Form haben, nenne ich 'Einsetzungen in (UI)'. Von solchen Einsetzungen in Axiomenschemata sind aber all jene Formeln zu unterscheiden, welche aus einer Allformel durch das Weglassen des Quantors und die Ersetzung der betreffenden Individuenvariable durch einen singulären Term hervorgehen. Derartige Formeln nenne ich 'Substitutionsinstanzen einer Allformel'.

(1) Wenn alle existierenden Dinge existieren, dann existiert Vulkan.

Denn der Satz (1) ist nicht logisch wahr, sondern ganz offenkundig falsch, und zwar weil sein Antezedens wahr und sein Konsequens falsch ist: Wenn nämlich 'Vulkan' leer ist, dann bezeichnet 'Vulkan' kein existierendes Einzelding und folglich ist der Satz 'Vulkan existiert' falsch. Da aber in der klassischen Logik das Prinzip (UI) logisch wahr ist, dürfen in solchen Einsetzungen keine leeren singulären Terme vorkommen. Sie ist somit nicht frei von Existenzannahmen hinsichtlich der singulären Terme. Die klassische Logik versteckt sie einfach dadurch, daß sie leere singuläre Terme verbannt.

Aufgrund des schon erwähnten Idealbilds von der Logik als eines Werkzeugs der philosophischen Analyse sollte sie aber frei von Existenzannahmen sein. Die freie Logik will deshalb die Logik von solchen versteckten Existenzannahmen befreien, indem sie diese expliziert. Es werden dazu singuläre Terme zugelassen, die kein existierendes Einzelding bezeichnen, d.h. welche *leer* sind (z.B. 'Vulkan', '1/0'). Die in (UI) versteckte Existenzannahme kann dann expliziert werden, indem sie dem Antezedens von (UI) hinzugefügt wird:

(FUI) $\forall xA \wedge \mathrm{E!}a \rightarrow A(a/x)$

(wobei 'E!' für 'existiert' steht bzw. 'etwas ist identisch mit' abkürzt). Demzufolge lautet dann unser Beispiel wie folgt:

(2) Wenn alle existierenden Dinge existieren und Vulkan existiert, dann existiert Vulkan.

Der Satz (2) ist offenkundig logisch wahr, und zwar weil sein Antezedens falsch ist, wenn 'Vulkan' leer ist, bzw. sein Konsequens wahr ist, wenn 'Vulkan' nicht leer ist. Die freie Logik ist insofern frei von Existenzannahmen hinsichtlich der singulären und generellen Terme, als in ihr das logische Wahrsein eines Satzes nicht verlangt, daß alle darin vorkommenden Terme existentiellen Gehalt haben.[9] Anders gesagt, es gibt einen logisch wahren Satz der freien Logik, in welchem ein leerer Term vorkommen darf.

[9] Vgl. Lambert 2003, S.124 sowie 1997, S.59 und S.41.

Allerdings haben das Explizieren von Existenzannahmen hinsichtlich der singulären Terme und die damit verbundene Zulässigkeit von leeren singulären Termen auch ihren Preis. Man handelt sich Probleme ein, die sich so in der klassischen Logik gar nicht stellen. Eines davon ist das *Wahrheitswertproblem*: Welchen Wahrheitswert – wenn überhaupt – haben elementare Sätze mit leeren singulären Termen? Sind solche Sätze wahr, falsch oder wahrheitswertlos? Dieses Problem gilt bis heute als ungelöst. Die einzelnen Systeme der freien Logik lassen sich hinsichtlich der divergierenden Antworten darauf geradezu in positive, negative und neutrale freie Logiken einteilen.[10] Eine andere derartige Schwierigkeit ist das zentrale Problem der vorliegenden Arbeit, nämlich das *Extensionalitätsproblem*: Sind alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen SE-extensional (d.h. extensional im SE-Substituierbarkeitssinn)? D.i. aufgrund des Definitionsschemas (Df.SE) aus §1.1 nichts anderes als die folgende Frage: Sind in solchen Sätzen koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar? Das Wahrheitswertproblem wird hier aus folgendem Grund erwähnt: Weil letzteres Problem noch ungelöst ist, setzt Lambert sein Argument als eine Fallunterscheidung an.

1.3 Das Non-Extensionalitäts-Argument

Zur weiteren Untersuchung des Extensionalitätsproblems diskutiere ich im folgenden ein Argument von Lambert, wonach elementare Sätze mit leeren singulären Termen non-extensional im *Salva-Veritate*-Substituierbarkeitssinn (d.h. *non-SV-extensional*) sind. Ich gebrauche dazu einen Terminus, den Lambert selber in die Diskussion eingeführt hat, und spreche von diesem Argument als dem *Non-*

[10] Für diverse metasemantische Überlegungen, welche den Ausschlag zugunsten der einen oder anderen Antwort auf das Wahrheitswertproblem ergeben vgl. Leeb 2001b, S.234 f. Weiters ist eine freie Logik *positiv* g.d.w. in ihr mindestens ein elementarer Satz mit mindestens einem leeren singulären Term wahr ist. Dagegen ist sie *negativ* g.d.w. jeder elementare Satz mit mindestens einem leeren singulären Term falsch ist. Sie ist schließlich *neutral* g.d.w. alle elementaren Sätze mit mindestens einem leeren singulären Term wahrheitswertlos sind (mit der Ausnahme vielleicht von singulären Existenzsätzen mit einem leeren singulären Term – wie etwa 'Vulkan existiert' –, welche falsch sind). Für diese Definitionen vgl. Lambert 2001, S.260 sowie 1997, S.41 und S.59 sowie ferner Morscher/Hieke 2001, S.2 f.

Extensionalitäts-Argument (kurz: NEA).[11] Weiters geht seine eng an Quine angelehnte Auffassung der SV-Extensionalität etwa aus folgender Textstelle hervor: "[...] a statement is SV-Extensional according to the salva veritate substitution conception just in case singular terms co-referential with a statement's constituent singular terms, predicates co-extensive with the statement's constituent predicates, and statements co-valent with a statement's constituent statement(s), substitute in that statement salva veritate."[12] Diese Auffassung der SV-Extensionalität kann somit durch das folgende Definitionsschema festgehalten werden:

(Df.QL) Ein Satz S_1 ist SV-*extensional* :⇔
in S_1 sind koreferentielle singuläre Terme, koextensionale generelle Terme und kovalente Sätze immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts substituierbar

Die Quine/Lambertsche Auffassung der SV-Extensionalität hat aber m.E. mehrere Nachteile:

(i) Die Annahme, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, wird nicht expliziert. Diese Annahme ist aber ohnehin in ihre Auffassung der SV-Extensionalität eingebaut worden, jedoch auf eine Weise, daß sie gegenüber Abänderungen unzugänglich ist. Diese Auffassung wirkt dadurch sehr starr und unflexibel.

(ii) Weiters ist dieser Begriff der SV-Extensionalität zu eng gefaßt. Es läßt sich nämlich auf seiner Basis durchaus sehr Wichtiges, was von der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn ganz allgemein gesagt werden kann, gar nicht sagen, ohne (Df.QL) vorher entsprechend zu modifizieren.

Ich werde deshalb in §2 die Extensionalität im Substituierbarkeitssinn ausführlich analysieren und halte hier vorweg schon einmal fest, daß ich – wegen dieser Analyse – in meiner Diskussion von Lamberts NEA nicht vom Definitionsschema (Df.QL), sondern von folgender Auffassung der SV-Extensionalität ausgehe:

[11] Vgl. Lambert 1991, S.282.
[12] Vgl. Lambert 2003, S.107 sowie 2001, S.274 und Quine 1960, S.151.

(Df.QL′) Ein Satz S_1 ist *SV-extensional* :⇔
in S_1 sind koextensionale singuläre sowie generelle Terme und Sätze immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts *als Extension* substituierbar

Dies ist eine Auffassung der SV-Extensionalität, wo die Annahme, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, expliziert ist. Dadurch kann sie bei Bedarf durch andere Auffassungen über die Art der Extensionen von Sätzen ersetzt werden. Weiters läßt sich (Df.QL′), aber nicht Quines und Lamberts (Df.QL), sehr leicht zu einer umfassenden Sicht der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn verallgemeinern. Im Begriff der SV-Extensionalität im Sinn von (Df.QL′) "steckt" nämlich sowohl derjenige der SE-Extensionalität als auch die Annahme, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind. In §2 führe ich vor, wie dieser komplexe Begriff der SV-Extensionalität in seine beiden Komponenten, nämlich den Begriff der SE-Extensionalität und die Annahme, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, zerlegt werden kann. Aufgrund dieser Zerlegbarkeit der SV-Extensionalität lege ich meiner Rekonstruktion des NEA letztlich das Definitionsschema (Df.SE) für die SE-Extensionalität aus §1.1 zugrunde.

Ich verstehe weiters das NEA so, daß damit nicht nur gezeigt wird, daß elementare Sätze mit leeren singulären Termen non-SV-extensional sind, sondern auch, daß solche Sätze non-SE-extensional sind. Dieses Resultat läßt sich aufgrund der Explikation der Annahme erzielen, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind. Diese zweifelsohne bei Quine wie auch Lambert nachweisbare Ansicht führt also – zusammen mit den weiteren Annahmen dieses Arguments – zur Non-SE-Extensionalität von elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen. Solange deshalb die freie Logik von den weiteren Annahmen des NEA ausgeht, sind in ihr Wahrheitswerte als die Extensionen von Sätzen unzulässig (im Sinn von (Df.ZE) aus §1.1). Dagegen läßt sich – wie später gezeigt wird – plausibel machen, daß unter diesen weiteren Annahmen des NEA solche Sätze sehr wohl SE-extensional sind, wenn Sachverhalte als ihre Extensionen angenommen werden. Somit sind in der freien Logik Sachverhalte als die Extensionen von Sätzen selbst dann zulässig, wenn man von jenen weiteren Annahmen dieses Arguments ausgeht.

Nach diesen Vorbemerkungen kann ich nun dazu übergehen, Lamberts negative Antwort auf das Extensionalitätsproblem zu diskutieren. Bei meiner Darstellung seiner Thesen werde ich stets die unausgesprochene Annahme, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, in eckigen Klammern hinzufügen. Seine Hauptthese lautet dann in diesem Zusammenhang wie folgt:

(EP) *Explikationsthese*
Wenn man die Existenzannahmen der klassischen Prädikatenlogik hinsichtlich der konstanten singulären Terme expliziert, dann wird sie non-SV-extensional; d.h. dann sind in mindestens einem Satz koextensionale Ausdrücke nicht immer füreinander unbeschadet des *Wahrheitswerts* [als Extension] substituierbar.

Zur Stützung dieser These führt er zweierlei an:

(ID) *Identitätsthese*
Die freie Logik mit dem generellen Term 'E!' ist nichts anderes als die klassische Prädikatenlogik, deren Existenzannahmen hinsichtlich der konstanten singulären Terme allerdings expliziert sind.

Aber:

(NE) *Non-Extensionalitätsthese*
Die freie Logik mit dem generellen Term 'E!' ist non-SV-extensional. Insbesonders sind in elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen koextensionale generelle Terme nicht immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts [als Extension] substituierbar.[13]

[13] Als Belegstellen für diese Thesen vgl. Lambert 2003, S.109 und S.160 sowie 1997, S.153.

Wenn sich die Non-Extensionalitätsthese (NE) begründen läßt, dann hätte das vielfältige philosophische Auswirkungen:

(i) Es wäre dadurch unter Voraussetzung der Identitätsthese (ID) die Explikationsthese (EP) gestützt.

(ii) Es wäre davon weiters unmittelbar die SV-Extensionalität betroffen; eine Sprache, die z.B. das Prinzip verletzen würde, daß koextensionale generelle Terme immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts [als Extension] substituierbar sind, wäre non-SV-extensional.

(iii) Für viele (insbesonders Quine, wohl auch Frege) ist aber die SV-Extensionalität ein Kriterium für die Angemessenheit einer Sprache für die Zwecke der Wissenschaften. Infolge einer Verletzung eines SV-Substitutionsprinzips würde somit plötzlich eine reglementierte Wissenschaftssprache à la Quine, deren Existenzannahmen allerdings expliziert sind, das Adäquatheitskriterium der SV-Extensionalität nicht mehr erfüllen.

(iv) Die SV-Extensionalität ist außerdem ein grundlegender Bestandteil von Quines Prädikationstheorie aus *Word and Object*. Infolge einer solchen Verletzung würde somit ein grundlegender Bestandteil dieser Prädikationstheorie wegfallen.[14]

Gemeinhin gelten modale, epistemische, zeitlogische etc. Voraussetzungen als Quellen für die Non-SV-Extensionalität. Lambert[15] argumentiert – ohne Rückgriff auf derartige Voraussetzungen – auf einer *metasemantischen* Ebene für die Non-Extensionalitätsthese (NE). Er geht dazu – wie gesagt – vom Definitionsschema (Df.QL) aus, welches ich aber aus den vorhin genannten Gründen durch das Definitionsschema (Df.QL′) ersetze. Weiters zerlege ich den in (Df.QL′) eingeführten Begriff der SV-Extensionalität in seine beiden Komponenten, als da sind: die SE-Extensionalität und die nachfolgende Annahme (W). (NE) läßt sich dann durch die folgende These

[14] Als Belegstelle für die philosophischen Auswirkungen des NEA vgl. Lambert 2003, S.160.

[15] Vgl. Lambert 2003, S.95–97 und S.109 f. sowie 1991, S.278 f. und 1974, S.257–259.

(W) Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen

sowie fünf weiteren Annahmen begründen. Es handelt sich hierbei zunächst einmal um das Definitionsschema (Df.SE) für die SE-Extensionalität aus §1.1 sowie um Quines Prädikationstheorie[16] aus *Word and Object*. Quines Auffassung der Prädikation ist eine semantische Sichtweise. So wie nach Kaplan die *logische Form* eines Satzes davon abhängt, wie sein Wahrheitswert bestimmt wird[17], hängt nach Quine die logische Form einer Prädikation davon ab, wie ihr Wahrheitswert bestimmt wird.

(Df.QP) Ein Satz S ist eine *Prädikation* $:\Leftrightarrow$
es gibt mindestens einen n-stelligen generellen Term G^n (mit $n = 1, 2 \dots$) und singuläre Terme $a_1, \dots, a_n$, so daß gilt:
G^n und $a_1, \dots, a_n$ werden zu S verknüpft &
S ist wahr oder falsch, je nachdem, ob G^n wahr oder falsch von dem n-Tupel von Einzeldingen ist – falls vorhanden –, welche $a_1, \dots, a_n$ bezeichnen[18]

Diese Definition läßt alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen als Prädikationen zu, ohne aber deren Wahrheitswert festzulegen. Weiters wird das *klassische Prinzip der Termabstraktion* angenommen. Letzteres Prinzip kann als Axiomenschema wie folgt formuliert werden:

(Δ) $(\Delta y A)a \leftrightarrow A(a/y)$

(lies dabei 'Δy' als 'Ding y, so daß', wobei die Kopula *nicht* im Δ-Operator enthalten ist, sondern durch die Verkettung des generellen Terms mit dem singulären Term angezeigt wird). Dieses Prinzip besagt, daß die beiden Sätze $(\Delta y A)a$ und $A(a/y)$ immer denselben Wahrheitswert haben. Es wird weiters für Prädikationen, welche nicht

[16] Vgl. Quine 1960, S.96, S.105 und S.175.
[17] Vgl. Kaplan 1970, S.283 und Lambert 2003, S.104.
[18] Vgl. Quine 1960, S.96. Für die Behandlung von relativen und komplexen generellen Termen im Rahmen seiner Prädikationstheorie siehe weiters Quine 1960, S.105 f. und S.175.

die Existenz ihres vermeintlichen Subjekts implizieren, als gültig angenommen.[19] Schließlich wird noch angenommen, daß generelle Terme komplex sein können und daß der Satz

(1) $\Delta y(y \text{ existiert})\text{Vulkan}$

falsch ist.

Ich rekonstruiere im folgenden Lamberts Argument. Gemäß Quines Prädikationstheorie kann der Satz

(2) $\Delta y(y \text{ rotiert})\text{Vulkan}$

entweder *wahr*, *falsch* oder *wahrheitswertlos* sein. Weiters sind die drei generellen Terme

$$\Delta y(y \text{ rotiert})$$

$$\Delta y(y \text{ rotiert} \wedge y \text{ existiert})$$

$$\Delta y(y \text{ existiert} \rightarrow y \text{ rotiert})$$

koextensional, und zwar weil sie von denselben existierenden Einzeldingen wahr sind, nämlich allem (aktualistisch verstanden), was rotiert. Es ist nun zu zeigen, daß sich der Wahrheitswert von (2) ändert, wenn man darin koextensionale generelle Terme füreinander ersetzt.

[19] Für die Unterscheidung zwischen Prädikationen, welche die Existenz ihres vermeintlichen Subjekts implizieren, und solchen, wo das nicht so ist, vgl. Lambert/Simons 1994, S.318 f. Im Gegensatz dazu lautet das Prinzip der Termabstraktion für Prädikationen, welche die Existenz ihres vermeintlichen Subjekts implizieren, wie folgt:

(λ) $(\lambda y A)a \leftrightarrow A(a/y) \wedge \text{E!}a$

In Lambert/Bencivenga 1986 wird eine Lösung des Extensionalitätsproblems vorgestellt, welche von (λ) ausgeht. Da aber diese Lösung gänzlich von (λ) abhängt, funktioniert sie nur für Prädikationen, welche die Existenz ihres vermeintlichen Subjekts implizieren, aber nicht für solche, welche das nicht tun – wie z.B. 'Sherlock Holmes ist ein Ding y, so daß y fiktiv ist'.

Beweis. Da das Wahrheitswertproblem ungelöst ist, muß man die folgenden drei Fälle unterscheiden:

(a) Erster Fall
Angenommen, daß der Satz (2) *wahr* ist. Ersetzt man den Term 'Δy(y rotiert)' in (2) durch den koextensionalen generellen Term 'Δy(y rotiert $\wedge$ y existiert)', dann erhält man den Satz

(3) Δy(y rotiert $\wedge$ y existiert)Vulkan

Der Wahrheitswert von (3) ist unbekannt, solange man nur (3) betrachtet, und zwar weil für solche Prädikationen mit leeren singulären Termen Quines Prädikationstheorie den Wahrheitswert nicht festlegt. Lambert behilft sich deshalb mit dem klassischen Prinzip der Termabstraktion. Wegen dieses Prinzips hat (3) immer denselben Wahrheitswert wie der Satz

(4) Δy(y rotiert)Vulkan $\wedge$ Δy(y existiert)Vulkan,

und (4) ist wegen des Falschseins von (1) und einer gängigen Auffassung der Konjunktion falsch – nämlich jener Auffassung, wonach eine Konjunktion falsch ist, wenn eines ihrer Glieder es ist. (3) ist daher falsch.

(b) Zweiter Fall
Angenommen weiters, daß der Satz (2) *falsch* ist. Ersetzt man den Term 'Δy(y rotiert)' in (2) durch den koextensionalen generellen Term 'Δy(y existiert $\rightarrow$ y rotiert)', dann erhält man den Satz

(5) Δy(y existiert $\rightarrow$ y rotiert)Vulkan

Der Wahrheitswert von (5) ist wiederum unbekannt, solange man nur (5) betrachtet, und zwar aus demselben Grund wie zuvor beim ersten Fall. Gemäß dem klassischen Prinzip der Termabstraktion hat (5) aber immer denselben Wahrheitswert wie der Satz

(6) Δy(y existiert)Vulkan $\rightarrow$ Δy(y rotiert)Vulkan,

und (6) ist wegen des Falschseins von (1) und einer gängigen Auffassung der Implikation wahr – nämlich jener Auffassung, wonach eine Implikation wahr ist, wenn ihr Antezedens falsch ist. Daher ist (5) wahr.

(c) Dritter Fall
Angenommen schließlich, daß der Satz (2) *wahrheitswertlos* ist, dann stellt sich das betreffende Ersetzungsergebnis (3) wiederum als falsch heraus. □

Demzufolge ändert die Ersetzung des generellen Terms

Δy(y rotiert)

im Satz (2) durch koextensionale generelle Terme zunächst einmal einfach nur den Wahrheitswert und in weiterer Folge – wegen der Annahme (W), wonach Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind – auch noch die Extension. Das ist hier der entscheidende Punkt: Eben weil angenommen wird, daß Wahrheitswerte solche Extensionen sind, ändert sich mit dem Wahrheitswert auch unweigerlich die Extension. In (2) sind daher koextensionale generelle Terme nicht immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar, d.h. (2) ist non-SV-extensional. Folglich sind in (2) solche Terme auch nicht immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar, was nichts anderes heißt, als daß (2) non-SE-extensional ist. Wenn Wahrheitswerte als die Extensionen von Sätzen angenommen werden, dann erweisen sich also – unter den weiteren Annahmen des NEA – manche Sätze einer Sprache für die freie Logik als non-SE-extensional. Aus diesem Grund sind Wahrheitswerte als ihre Extensionen unzulässig (im Sinn von (Df.ZE) aus §1.1). Letzteres scheint solange unausweichlich zu sein, als in der freien Logik die Suche nach den Extensionen von Sätzen durch zwei Überzeugungen geleitet wird, nämlich durch: (i) die Substitutionsthese (K) und (ii) die oben erwähnten fünf weiteren Annahmen von Lamberts NEA. Die zusätzliche Annahme von Wahrheitswerten als Extensionen von Sätzen führt dann unweigerlich zur Non-SE-Extensionalität von elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen.

Nachdem also anhand meiner Rekonstruktion von Lamberts NEA die Unzulässigkeit von Wahrheitswerten als Extensionen von solchen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen gezeigt worden ist, stellen sich die folgenden allgemeinen Fragen: Kann man – und falls ja, wie kann man – die SE-Extensionalität von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen sicherstellen? Und welche Entitäten sind als die Extensionen von solchen Sätzen zulässig? Die Untersuchung dieser Fragen läuft darauf hinaus, einen Weg anzugeben, wie das NEA erschüttert werden kann.[20] Im folgenden skizziere ich, wie dies geschehen kann.

1.4 Kritik am NEA

Der kritische Punkt im NEA scheint das Zusammenspiel zwischen der Annahme (W) und dem klassischen Prinzip der Termabstraktion zu sein: Gemäß letzterem Prinzip haben die beiden Sätze (3) und (4) immer denselben Wahrheitswert und dadurch – wegen (W) – auch dieselbe Extension; solange man also annimmt, daß die Sätze (3) und (4) von Wahrheitswerten sprechen, sprechen sie von derselben Entität, weil sie – wegen dieses Prinzips – entweder beide den Wahrheitswert Wahr oder aber beide den Wahrheitswert Falsch haben (und analog für (5) und (6)).

Aber sprechen die beiden Sätze (3) und (4) wirklich von derselben Entität, sofern sie von etwas sprechen? Man betrachte die beiden *wahren* Sätze

(7) $\Delta y(y \text{ rotiert} \wedge y \text{ existiert})\text{Mars}$

und

(8) $\Delta y(y \text{ rotiert})\text{Mars} \wedge \Delta y(y \text{ existiert})\text{Mars}$

Wohlgemerkt, die Sätze (7) und (8) sind beide wahr, aber sprechen sie deshalb schon von derselben Entität? Wenn man die Extensionen der in (7) vorkommenden singulären und generellen Terme betrachtet, scheint es doch plausibler zu sein, anzunehmen, daß (7) – anstatt vom Wahren – eher von Mars und von der Menge der rotierenden und existierenden Einzeldinge spricht, sowie davon spricht, daß Mars in

[20] Für die Wichtigkeit im allgemeinen einer solchen Untersuchung im Zusammenhang mit bestimmten Anwendungen der freien Logik in den Computerwissenschaften vgl. die Bemerkungen in Lambert 2003, S.111.

dieser Menge liegt. Und wenn man weiters auch die Extensionen der Teilsätze von (8) betrachtet, dann scheint es überzeugender zu sein, anzunehmen, daß (8) – anstatt vom Wahren – davon spricht, daß Mars in der Menge der rotierenden Einzeldinge liegt und daß Mars in der Menge der existierenden Einzeldinge liegt. Die beiden *wahren* Sätze (7) und (8) scheinen demnach von verschiedenen Entitäten zu sprechen: Während (7) davon spricht, daß Mars in einer bestimmten Menge liegt, spricht (8) davon, daß Mars in einer bestimmten Menge und auch noch in einer anderen Menge liegt. Völlig analog scheint es sich mit den beiden Sätzen (3) und (4) zu verhalten: Während (3) davon spricht, daß Vulkan in der Menge der rotierenden und existierenden Einzeldinge liegt, spricht (4) davon, daß Vulkan in der Menge der rotierenden Einzeldinge liegt und daß Vulkan in der Menge der existierenden Einzeldinge liegt. Wenn man also die Extensionen der deskriptiven Teilausdrücke der Sätze $(\Delta yA)a$ und $A(a/y)$ betrachtet, dann scheinen diese beiden Sätze im allgemeinen von verschiedenen Entitäten zu sprechen.

Man kann mit diesen Überlegungen fortfahren und sich fragen, wovon die beiden Sätze (2) und (3) sprechen. (2) spricht davon, daß Vulkan in der Menge der rotierenden Einzeldinge liegt. Und (3) spricht davon, daß Vulkan in der Menge der rotierenden und existierenden Einzeldinge liegt. Weiters ist – wegen der angenommenen Koextensionalität der beiden Terme '$\Delta y(y$ rotiert)' und '$\Delta y(y$ rotiert $\wedge$ y existiert)' – die Menge der rotierenden Einzeldinge identisch mit derjenigen der rotierenden und existierenden Einzeldinge. Die beiden Sätze sprechen demnach davon, daß Vulkan in Mengen liegt, welche identisch sind. Sie sprechen also von derselben Entität. Wenn aber die beiden Sätze von derselben Entität sprechen, dann sind im Satz (2) die beiden koextensionalen generellen Terme '$\Delta y(y$ rotiert)' und '$\Delta y(y$ rotiert $\wedge$ y existiert)' füreinander unbeschadet der Extension substituierbar. Und völlig analog verhält es sich mit allen anderen generellen Termen, welche mit '$\Delta y(y$ rotiert)' koextensional sind. Daher sind in (2) koextensionale generelle Terme immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar. (2) erweist sich also als SE-extensional, wenn man annimmt, daß (2) davon spricht, daß Vulkan in der Menge der rotierenden Einzeldinge liegt. Von welcher Art auch immer diese Entität ist, (2) erweist sich unter der Annahme, daß

(2) davon spricht, als SE-extensional. Folglich ist diese Entität als die Extension von (2) zulässig. Aus diesem Grund ist es *prima facie* nicht offensichtlich, daß die freie Logik ohne die Annahme auskommen muß, daß ihre Sätze Extensionen haben. Es ist lediglich erforderlich, die Annahme (W) aufzugeben, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, und sie durch die folgende *Zusammensetzungsthese* zu ersetzen:

(Z) Die Extension eines Satzes ist aus den Extensionen seiner singulären sowie generellen Terme und Teilsätze zusammengesetzt, wobei die Zusammensetzung von seiner logischen Form (in Kaplans Sinn[21]) abhängt, d.h. davon abhängt, wie sein Wahrheitswert bestimmt wird.

An dieser Stelle wird nur gesagt, daß die Extensionen von Sätzen zusammengesetzte Entitäten sind, welche eine innere Struktur aufweisen. Dadurch werden aber schon einmal Wahrheitswerte als solche Extensionen von Sätzen ausgeschlossen, weil sie nämlich keine derartige innere Struktur haben. Es ist aber damit noch nicht gesagt worden, um welche Entitäten genau es sich bei den Extensionen von Sätzen handelt. Man kann jedoch solche Komplexe als *abstrakte Sachverhalte* auffassen. Eine derartige philosophische Interpretation muß allerdings durch eine zusätzliche Annahme wie folgt festgelegt werden:

(S) Abstrakte Sachverhalte (welche gemäß (Z) konstruiert werden) sind die Extensionen von Sätzen.

1.5 Das *Slingshot*-Argument

Heutzutage werden Sachverhalte als eine unglückliche Wahl für die Extensionen von Sätzen angesehen. Dies ist hauptsächlich auf den Einfluß des *Slingshot*-Arguments zurückzuführen[22]: Jeder Schritt in

[21] Vgl. Kaplan 1970, S.283 und Lambert 2003, S.104.

[22] Vgl. Gödel 1944, S.450 f. sowie Church 1943, S.299 f. und Barwise/Perry 1987, S.32–34. Gödels *Slingshot*-Argument wird in Leeb 1997 und 2004 formalisiert.

Richtung einer solchen Sachverhaltssemantik hat zuerst mit den Herausforderungen dieses *metasemantischen* Arguments fertig zu werden. Neben der oben erwähnten Substitutionsthese (K) lautet die zweite hauptsächliche Annahme dieses Arguments wie folgt:

(L) Logisch äquivalente Sätze sind immer koextensional.

Aufgrund von diesen beiden Annahmen kann man beweisen, daß alle wahren Sätze koextensional sind (und ebenso alle falschen Sätze).

Die Grundidee dieses Arguments läßt sich dabei in der folgenden Beweisskizze zusammenfassen. Zu jedem Satz S wird ein singulärer Term t_S eingeführt, der folgende Kennzeichnung abkürzen soll:

> diejenige Zahl, welche gleich 1 ist, wenn S wahr ist, und die gleich 0 ist, wenn S falsch ist.

Diese Konstruktion garantiert, daß die Sätze S und '$t_S = 1$' immer denselben Wahrheitswert haben, d.h. *logisch äquivalent* sind. Wenn nämlich S wahr ist, dann ist t_S die Zahl 1 und somit ist der Satz '$t_S = 1$' ebenfalls wahr; wenn aber S falsch ist, dann ist t_S die Zahl 0 und der Satz '$t_S = 1$' ist daher auch falsch. Also sind die beiden Sätze S und '$t_S = 1$' logisch äquivalent, und folglich sind sie – wegen (L) – immer koextensional. Weiters bezeichnet der singuläre Term t_S die Zahl 1, wenn S wahr ist, und die Zahl 0, wenn S falsch ist. Zu zeigen ist nun, daß alle wahren Sätze unter der Annahme von (K) und (L) koextensional sind.

Beweis. Betrachte dazu zwei beliebige wahre Sätze P und Q und weise nach, daß sie unter den gegebenen Annahmen koextensional sind. Der wahre Satz

(1) P

ist aufgrund obiger Konstruktion logisch äquivalent mit dem Identitätssatz

(2) $t_P = 1$

Wegen (L) sind demnach (1) und (2) koextensional. Weil P und Q laut Annahme beide wahr sind, bezeichnen die beiden singulären

Terme t_P und t_Q die Zahl 1 und sind folglich koextensional. Damit ist der Satz

(3) $t_Q = 1$

ein Ergebnis der Ersetzung von t_P in (2) durch das koextensionale t_Q. Daher sind – wegen (K) – die beiden Sätze (2) und (3) koextensional. Weiters ist der wahre Satz

(4) Q

aufgrund obiger Konstruktion logisch äquivalent mit dem Identitätssatz (3). Wegen (L) sind somit auch (3) und (4) koextensional. Also ist (1) koextensional mit (2) und (2) koextensional mit (3) und (3) koextensional mit (4). Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Relation der Koextensionalität transitiv ist, folgt also, daß (1) koextensional mit (4) ist. Wegen konditionalen Beweises gilt daher: Wenn P und Q zwei beliebige wahre Sätze sind, dann sind sie koextensional (analog dazu sind auch zwei beliebige falsche Sätze koextensional). □

Solange deshalb eine Semantik von den Annahmen dieses Arguments ausgeht, können alle wahren und falschen Sätze zusammengenommen höchstens zwei verschiedene Entitäten zur Extension haben. Hierbei kann, aber muß es sich nicht um die beiden Wahrheitswerte Wahr und Falsch handeln.[23] Denn die Annahmen dieses Arguments determinieren nur die Anzahl der Extensionen von Sätzen, aber nicht deren Art.[24] Das Fazit von all dem für die Annahme (S) ist, daß alle wahren und falschen Sätze zusammengenommen, höchstens zwei verschiedene Sachverhalte als Extensionen haben können. Diese unerfreuliche Konsequenz aus dem *Slingshot*-Argument ist aber unverträglich mit jener prä-semantischen Intuition, wonach verschiedene wahre Sätze im allgemeinen von verschiedenen Entitäten sprechen (und ebenso die falschen Sätze).

[23] Vgl. Leeb 2004, S.175 und S.156.

[24] Vgl. Leeb 2004, S.156, wo ich dafür argumentiere, daß die Substitutionsthese (K) die Extensionen von Sätzen unterdeterminiert.

Im Hinblick auf die beiden hauptsächlichen Annahmen dieses Arguments möchte ich folgendes anmerken:

(i) Die Substitutionsthese (K) unterdeterminiert jede Antwort auf die Frage, welche Entitäten die Extensionen von Sätzen sind. Aufgrund dieses Prinzips ist jede Entität als die Extension eines Satzes zulässig, welche immer unter der Substitution von koextensionalen Ausdrücken in diesem Satz erhalten bleibt. Selbst unter der zusätzlichen Annahme von (L) determiniert (K) nur die Anzahl, aber nicht die Art der Extensionen von Sätzen.

(ii) Dieses Argument behindert außerdem nur solange eine nichttriviale Sachverhaltssemantik, als das Prinzip (L) beibehalten wird. Die beiden vorliegenden Sachverhaltssemantiken werden aber mit den Herausforderungen des *Slingshot*-Arguments leicht fertig, und zwar weil in ihnen das Prinzip (L) nicht gilt. Es kann nämlich anhand von vielen Beispielen demonstriert werden, daß in diesen beiden Sachverhaltssemantiken logisch äquivalente Sätze nicht immer koextensional sind: So sind z.B. die beiden Sätze $(\Delta y F y)a$ und $\neg(\Delta y \neg F y)a$ zwar logisch äquivalent, ihre Sachverhalte, welche sie zur Extension haben, sind jedoch verschieden. Auf diese Weise wird eine der beiden hauptsächlichen Annahmen des *Slingshot*-Arguments zurückgewiesen. Dies erlaubt es, die Substitutionsthese als Prinzip beizubehalten, welches die Suche nach den Extensionen von Sätzen anleitet.

Abschließend kann man sich noch wie folgt überlegen, daß in einer Sachverhaltssemantik, welche gemäß der Zusammensetzungsthese (Z) entwickelt wird, nicht alle wahren Sätze koextensional sein können. So wird der Wahrheitswert eines wahren Negations- bzw. Konjunktions- oder Allsatzes S auf eine andere Weise bestimmt als der Wahrheitswert eines wahren Identitätssatzes $t_S = 1$. Die beiden Sätze S und $t_S = 1$ haben also im allgemeinen verschiedene logische Formen. Die logische Form eines Satzes ist aber – wegen (Z) – maßgeblich dafür, wie seine Extension aus den Extensionen seiner deskriptiven Teilausdrücke zusammengesetzt wird. Gemäß (Z) werden also die Extensionen von S und $t_S = 1$ im allgemeinen auf verschiedene Weise aus den

Extensionen der deskriptiven Teilausdrücke von S bzw. $t_S = 1$ zusammengesetzt. Folglich sind die Extensionen von S bzw. $t_S = 1$ im allgemeinen verschieden, und es sind daher nicht alle wahren Sätze koextensional (analog verhält es sich bei den falschen Sätzen).

2 Analyse des Extensionalitätsbegriffs

Bevor ich die Details von zwei Sachverhaltssemantiken für die positive freie Logik ausarbeite, kommt zunächst meine Analyse der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn. Diese Analyse dient als Grundlage für die späteren Antworten auf das Extensionalitätsproblem im Licht der beiden Sachverhaltssemantiken. Mit der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn ist gemeint, daß Ausdrücke, welche von demselben sprechen (d.h. welche koextensional sind) immer füreinander unbeschadet dessen, wovon gesprochen wird (d.h. unbeschadet der Extension) substituierbar sind. Diese Charakterisierung der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn ist so allgemein gehalten, daß darunter nicht nur die Ersetzung von koextensionalen Ausdrücken in Sätzen fällt, sondern auch derartige Ersetzungen in beliebigen sprachlichen Kontexten. Aus Sicht der Sätze als den Kontexten, in denen ersetzt wird, ist nun die allgemeinste Auffassung der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn das, was ich früher schon die *SE-Extensionalität* genannt habe. Der Begriff der SE-Extensionalität hat viele Facetten und ist zudem systematisch mehrdeutig: Man kann verschieden starke Eigenschaften der SE-Extensionalität und damit auch der Non-SE-Extensionalität voneinander unterscheiden. Diese Mehrdeutigkeit rührt natürlich von den vielen Bedeutungen des Koextensionalitätsbegriffs her, durch den die SE-Extensionalität definiert werden kann. Je nachdem, welche Relation der Koextensionalität zugrunde gelegt wird, lassen sich nämlich unterschiedliche Eigenschaften der SE-Extensionalität definieren. So mag ein Satz in manchen Bedeutungen des Wortes 'SE-extensional' SE-extensional sein, während er es in anderen Bedeutungen dieses Wortes nicht ist. Es können somit die Antworten auf das Extensionalitätsproblem ganz davon abhängen, wie die Koextensionalität verstanden wird. Die weitere Untersuchung des Extensionalitätsproblems in der freien Logik verlangt deshalb eine gründliche Analyse des Extensionalitätsbegriffs und seiner Bestimmungsmerkmale. Wie gesagt, hat die SE-Extensionalität drei solche Bestimmungsmerkmale, nämlich (i) den Extensionsbegriff, (ii) die Koextensionalität und (iii) die Relation der SE-Substituierbarkeit. Ich führe hier das Definitionsschema (Df.SE) für die SE-Extensionalität aus §1.1 nochmals an:

(Df.SE) Ein Satz S_1 ist *SE-extensional* :⇔
in S_1 sind koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar

Es wurde schon in §1.1 geklärt, was unter der Extension eines sprachlichen Ausdrucks verstanden werden kann und wann eine Entität als die Extension eines Satzes zulässig ist. Im folgenden wende ich mich den anderen beiden Bestimmungsmerkmalen der SE-Extensionalität zu.

2.1 Extensionsfunktionen und Koextensionalität

Ganz allgemein gesagt, ist eine *Extensionsfunktion* eine Funktion ε von einer Menge von extensionsfähigen Ausdrücken in eine Menge von Entitäten, welche als die Extensionen von solchen Ausdrücken zulässig sind. Ein *extensionsfähiger* Ausdruck ist hierbei ein sprachlicher Ausdruck, der wohlgeformt und eigenständig ist (letzteres in dem Sinn, daß er, für sich alleine stehend, von etwas sprechen kann). Weiters ist – wie gesagt – als die *Extension* eines solchen extensionsfähigen Ausdrucks jede Entität zulässig, welche immer unter der Substitution von koextensionalen Ausdrücken erhalten bleibt (etwa passende *mengentheoretische Entitäten*, die sich nicht ändern, wenn koextensionale Ausdrücke ersetzt werden). Eine Extensionsfunktion kann nun auf zweierlei Weise eingeführt werden: (i) Man läßt dabei offen, wie die mengentheoretischen Stellvertreter für die Extensionen von Sätzen philosophisch interpretiert werden (etwa als Wahrheitswerte, Sachverhalte etc.), oder (ii) man legt dies durch eine zusätzliche Annahme fest. Im folgenden denke ich mir eine Extensionsfunktion ε wie in (i) eingeführt. Weiters schlage ich folgende Redeweise vor:

(Df.Ext$_1$) Eine Entität en_1 ist die Extension von einem Ausdruck A_1 bei einer Extensionsfunktion ε :⇔
$\varepsilon(A_1) = en_1$

(Df.Ext$_2$) Ein Ausdruck A_1 hat eine Extension bei einer Extensionsfunktion ε :⇔
es gibt eine Entität en_1, so daß gilt: $\varepsilon(A_1) = en_1$

Die Mehrdeutigkeit der Koextensionalität ist die Ursache für die Mehrdeutigkeit der SE-Extensionalität. So kann man zwei generelle Terme als koextensional auffassen, wenn sie hinsichtlich einer Extensionsfunktion von denselben Einzeldingen wahr sind oder aber wenn sie das hinsichtlich aller Extensionsfunktionen sind. Entsprechend kann man die relative Koextensionalität von der absoluten unterscheiden.

Die zweite Dimension der Koextensionalität ist die folgende Unterscheidung zwischen schwacher und starker Koextensionalität: Während bei der starken Koextensionalität relativ zu einer Extensionsfunktion ε verlangt wird, daß ε jedem extensionsfähigen Ausdruck tatsächlich eine Extension zuordnet, ist bei der schwachen Koextensionalität-relativ-zu-ε zugelassen, daß ε manchen extensionsfähigen Ausdrücken keine Extension zuordnet.

Angesichts dieser beiden Dimensionen des Koextensionalitätsbegriffs kann man die resultierenden vier Relationen der Koextensionalität zwischen zwei Ausdrücken A_1 und A_2 (desselben Typs) wie folgt definieren:

(Df.K$_1$) $A_1 \otimes_\varepsilon A_2$ (d.h. A_1 ist *schwach koextensional*$_1$ *relativ zu* ε mit A_2) :$\Leftrightarrow$
$(\bigwedge en_1, en_2)(\varepsilon(A_1) = en_1 \ \& \ \varepsilon(A_2) = en_2 \Rightarrow en_1 = en_2)$

D.h. zwei Ausdrücke sind schwach koextensional$_1$ relativ zu einer Extensionsfunktion g.d.w. was immer der eine Ausdruck zur Extension bei dieser Extensionsfunktion hat, ist auch die Extension des anderen Ausdrucks bei dieser Extensionsfunktion. Weiters:

(Df.K$_2$) $A_1 \otimes A_2$ (d.h. A_1 ist *schwach koextensional*$_2$ mit A_2) :$\Leftrightarrow$
$(\bigwedge \varepsilon)(A_1 \otimes_\varepsilon A_2)$

D.h. zwei Ausdrücke sind absolut schwach koextensional$_2$ g.d.w. sie schwach koextensional$_1$ relativ zu allen Extensionsfunktionen sind. Zudem:

(Df.K$_3$) $A_1 \diamondsuit_\varepsilon A_2$ (d.h. A_1 ist *stark koextensional*$_3$ *relativ zu* ε mit A_2) :$\Leftrightarrow$
$(\bigvee en_1)(\varepsilon(A_1) = en_1) \ \& \ (\bigvee en_2)(\varepsilon(A_2) = en_2) \ \& \ A_1 \otimes_\varepsilon A_2$

D.h. zwei Ausdrücke sind stark koextensional$_3$ relativ zu einer Extensionsfunktion g.d.w. die beiden Ausdrücke bei dieser Extensionsfunktion eine Extension haben und sie beide schwach koextensional$_1$ relativ zu dieser Extensionsfunktion sind. Schließlich:

(Df.K$_4$) $A_1 \diamondsuit A_2$ (d.h. A_1 ist *stark koextensional$_4$* mit A_2) $:\Leftrightarrow$ $(\bigwedge\varepsilon)(A_1 \diamondsuit_\varepsilon A_2)$[25]

D.h. zwei Ausdrücke sind absolut stark koextensional$_4$ g.d.w. sie stark koextensional$_3$ relativ zu allen Extensionsfunktionen sind.

Folglich implizieren die Relationen der absoluten Koextensionalität stets die entsprechenden Relationen der relativen Koextensionalität (aber nicht *vice versa*). Weiters implizieren die Relationen der starken Koextensionalität stets die entsprechenden Relationen der schwachen Koextensionalität (aber nicht *vice versa*). Wenn im folgenden das Wort 'koextensional' ohne Indizes verwendet wird, dann ist damit von allen vier Relationen der Koextensionalität die Rede. Wenn ich hingegen von einer bestimmten Relation der Koextensionalität reden möchte, dann gebrauche ich entweder dieses Wort mit dem entsprechenden Index oder aber die jeweilige Symbolisierung.

2.2 Die Relationen der SE-Substituierbarkeit

Das wesentliche Bestimmungsmerkmal der SE-Extensionalität sind die unterschiedlichen Relationen der SE-Substituierbarkeit. Letztere lassen sich mittels der vier Relationen der Koextensionalität aus §2.1 definieren und können durch das folgende Definitionsschema eingeführt werden:

(Df.UE) Ein Ausdruck A_1 ist in einem Satz S_1 durch einen Ausdruck A_2 *unbeschadet der Extension substituierbar* $:\Leftrightarrow$
für alle Sätze S_2 gilt:
$Erg(S_2, A_1, S_1, A_2) \Rightarrow S_1$ ist koextensional mit S_2[26]

[25] D.h. $A_1 \diamondsuit A_2 \Leftrightarrow (\bigwedge\varepsilon)((\bigvee en_1)(\varepsilon(A_1) = en_1)\ \&\ (\bigvee en_2)(\varepsilon(A_2) = en_2))\ \&\ A_1 \otimes A_2$

[26] Lies dabei '$Erg(S_2, A_1, S_1, A_2)$' als 'S_2 ist ein Ergebnis der Ersetzung von einem oder mehreren Vorkommen von A_1 in S_1 durch A_2' und '$\Rightarrow$' als das metasprachliche 'wenn, dann'.

(wobei mit 'koextensional' hier und im folgenden die vier Relationen der Koextensionalität gemeint sind). D.h. zwei Ausdrücke sind in einem Satz unbeschadet der Extension substituierbar g.d.w. dieser Satz dieselbe Extension hat wie alle betreffenden Ersetzungsergebnisse.

Es ist zu Referenzzwecken nötig, jene Definitionen für die vier Relationen der SE-Substituierbarkeit anzuführen, welche gemäß dem Definitionsschema (Df.UE) wie folgt gebildet werden können:

(Df.UE_1) Ein Ausdruck A_1 ist in einem Satz S_1 durch einen Ausdruck A_2 *unbeschadet*$_1$ *der Extension bei einer Extensionsfunktion* ε *substituierbar* :⇔
für alle Sätze S_2 gilt:
$\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2) \Rightarrow S_1 \otimes_\varepsilon S_2$

(Df.UE_2) Ein Ausdruck A_1 ist in einem Satz S_1 durch einen Ausdruck A_2 *unbeschadet*$_2$ *der Extension substituierbar* :⇔
für alle Sätze S_2 gilt:
$\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2) \Rightarrow S_1 \otimes S_2$

(Df.UE_3) Ein Ausdruck A_1 ist in einem Satz S_1 durch einen Ausdruck A_2 *unbeschadet*$_3$ *der Extension bei einer Extensionsfunktion* ε *substituierbar* :⇔
für alle Sätze S_2 gilt:
$\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2) \Rightarrow S_1 \diamondsuit_\varepsilon S_2$

(Df.UE_4) Ein Ausdruck A_1 ist in einem Satz S_1 durch einen Ausdruck A_2 *unbeschadet*$_4$ *der Extension substituierbar* :⇔
für alle Sätze S_2 gilt:
$\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2) \Rightarrow S_1 \diamondsuit S_2$

Wenn im folgenden die Indizes weggelassen werden, dann sind damit alle vier Relationen der SE-Substituierbarkeit gemeint.

2.3 SE-Extensionalität und Stärkediagramme

Weiters wird bei der SE-Extensionalität von jeder spezifischen Festlegung auf die Art der Extensionen von Sätzen abstrahiert: Es wird darin nämlich offengelassen, ob es sich bei den mengentheoretischen Stellvertretern für die Extensionen von Sätzen um Stellvertreter für Wahrheitswerte, Sachverhalte oder was auch immer handelt. Die SE-Extensionalität ist somit insofern *neutral*, als darin die Art der Extensionen von Sätzen nicht festgelegt ist.

Ich zeige im folgenden, daß die SE-Extensionalität sowohl durch das Definitionsschema (Df.SE), als auch mit Hilfe eines weiteren Definitionsschemas eingeführt werden kann. Zunächst einmal halte ich hierfür fest, daß die folgenden beiden Sätze logisch äquivalent sind (d.h. hier immer denselben Wahrheitswert haben):

(1) In S_1 sind koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar.

(2) Für alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt: wenn A_1 koextensional mit A_2 ist, dann ist A_1 in S_1 durch A_2 unbeschadet der Extension substituierbar.

Weiters ist (2) aufgrund von (Df.UE) mit folgendem Satz logisch äquivalent:

(3) Für alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt: wenn A_1 koextensional mit A_2 ist, dann gilt für alle Sätze S_2:
$\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2) \Rightarrow S_1$ ist koextensional mit S_2

Und (3) ist aufgrund einfacher logischer Umformungen mit folgendem Satz logisch äquivalent:

(4) Für alle Sätze S_2 und Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)$ & A_1 ist koextensional mit $A_2 \Rightarrow$
S_1 ist koextensional mit S_2

Die Sätze (1) und (4) sind daher logisch äquivalent und können gleichermaßen als Definentia in einer Definition für die SE-Extensionalität herangezogen werden. Damit ist gezeigt, daß sich die SE-Extensionalität nicht nur durch das Definitionsschema (Df.SE), sondern auch mittels des folgenden Definitionsschemas einführen läßt:

(Df.SE$'$) Ein Satz S_1 ist *SE-extensional* $:\Leftrightarrow$
für alle Sätze S_2 und Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)$ & A_1 ist koextensional mit $A_2 \Rightarrow$
S_1 ist koextensional mit S_2

Wegen der Ersetzbarkeit *salva veritate* von logisch äquivalenten Sätzen sind also die beiden Definitionsschemata (Df.SE) und (Df.SE$'$) deduktiv äquivalente Formulierungen der SE-Extensionalität.

Entsprechend den vier Bedeutungen des Wortes 'koextensional' kann man auch vier Eigenschaften der SE-Extensionalität voneinander unterscheiden. Gemäß dem Definitionsschema (Df.SE$'$) lassen sich somit die folgenden Definitionen für diese vier Eigenschaften der SE-Extensionalität bilden:

(Df.SE$'_1$) S_1 ist *SE-extensional*$_1$ $:\Leftrightarrow$
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2, \varepsilon)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)$ & $A_1 \otimes_\varepsilon A_2 \Rightarrow S_1 \otimes_\varepsilon S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_1$ g.d.w. für alle Extensionsfunktionen gilt: in diesem Satz sind relativ zu diesen Extensionsfunktionen schwach koextensionale$_1$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_1$ der Extension bei jenen Extensionsfunktionen substituierbar. Weiters:

(Df.SE$'_2$) S_1 ist *SE-extensional*$_2$ $:\Leftrightarrow$
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)$ & $A_1 \otimes A_2 \Rightarrow S_1 \otimes S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_2$ g.d.w. darin absolut schwach koextensionale$_2$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_2$ der Extension substituierbar sind. Außerdem:

(Df.SE$'_3$) S_1 ist *SE-extensional*$_3$ $:\Leftrightarrow$
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2, \varepsilon)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)$ & $A_1 \diamondsuit_\varepsilon A_2 \Rightarrow S_1 \diamondsuit_\varepsilon S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_3$ g.d.w. für alle Extensionsfunktionen gilt: in diesem Satz sind relativ zu diesen Extensionsfunktionen stark koextensionale$_3$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_3$ der Extension bei jenen Extensionsfunktionen substituierbar. Schließlich:

(Df.SE$'_4$) S_1 ist *SE-extensional*$_4$ $:\Leftrightarrow$
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)$ & $A_1 \diamondsuit A_2 \Rightarrow S_1 \diamondsuit S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_4$ g.d.w. darin absolut stark koextensionale$_4$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_4$ der Extension substituierbar sind.

Das Definiens von (Df.SE$'_1$) impliziert dasjenige von (Df.SE$'_2$) (aber nicht umgekehrt) und analog dazu impliziert das Definiens von (Df.SE$'_3$) dasjenige von (Df.SE$'_4$) (aber wiederum nicht umgekehrt). Weiters impliziert das Definiens von (Df.SE$'_3$) dasjenige von (Df.SE$'_1$) (aber wenn ε manchen extensionsfähigen Ausdrücken keine Extension zuordnet, dann nicht umgekehrt), und das Definiens von (Df.SE$'_4$) impliziert dasjenige von (Df.SE$'_2$) (aber wiederum wenn ε manchen extensionsfähigen Ausdrücken keine Extension zuordnet, dann nicht umgekehrt). Diese vier Eigenschaften der SE-Extensionalität sind also im allgemeinen nicht äquivalent. Aus diesem Grund ist der Begriff der SE-Extensionalität systematisch mehrdeutig. Seine Mehrdeutigkeit wird natürlich durch die verschiedenen Bedeutungen von 'koextensional' verursacht.

Je nachdem, ob ε manchen extensionsfähigen Ausdrücken keine oder aber allen solchen Ausdrücken eine Extension zuordnet, kann man die Stärkeverhältnisse zwischen diesen Eigenschaften der SE-Extensionalität wie folgt zusammenfassen (es zeigen dabei die Spitzen der Pfeile die jeweiligen logischen Folgerungen an)[27]:

[27] Eine *partielle Funktion* von X in Y ist eine rechtseindeutige Relation von X in Y, deren Vorbereich Teilmenge von X ist. Diese Definition läßt eine totale Funktion von X in Y, d.i. eine rechtseindeutige Relation von X in Y, deren Vorbereich identisch mit X ist, als Grenzfall einer partiellen Funktion von X in Y zu. Dieser Grenzfall liegt demnach vor, wenn der Vorbereich identisch mit X ist. Es ist dann anstelle des 1. Stärkediagramms das 2. Stärkediagramm heranzuziehen.

1. Stärkediagramm. ε ordnet manchen extensionsfähigen Ausdrükken keine Extension zu (ε ist also eine *partielle* Funktion):

$$\begin{tikzcd}
 & S_1 \text{ ist SE-extensional}_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S_1 \text{ ist SE-extensional}_1 \arrow[dr] & & S_1 \text{ ist SE-extensional}_4 \arrow[dl] \\
 & S_1 \text{ ist SE-extensional}_2 &
\end{tikzcd}$$

Wenn ε manchen extensionsfähigen Ausdrücken keine Extension zuordnet, dann sind somit die SE-Extensionalität$_3$ bzw. die Non-SE-Extensionalität$_2$ die stärksten aller Eigenschaften der SE-Extensionalität bzw. der Non-SE-Extensionalität, welche durch die Relationen der Koextensionalität und ε definierbar sind.

2. Stärkediagramm. ε ordnet allen extensionsfähigen Ausdrücken eine Extension zu (ε ist also eine *totale* Funktion):

$$\begin{tikzcd}
 & S_1 \text{ ist SE-extensional}_3 \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr] & \\
S_1 \text{ ist SE-extensional}_1 \arrow[dr] & & S_1 \text{ ist SE-extensional}_4 \\
 & S_1 \text{ ist SE-extensional}_2 \arrow[ur, leftrightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Wenn ε allen extensionsfähigen Ausdrücken eine Extension zuordnet, dann sind somit die SE-Extensionalität$_3$ sowie die SE-Extensionalität$_1$ die stärksten Eigenschaften der SE-Extensionalität, welche durch die Relationen der Koextensionalität und ε definierbar sind. Weiters sind dann die Non-SE-Extensionalität$_2$ sowie die Non-SE-Extensionalität$_4$ die stärksten Eigenschaften der Non-SE-Extensionalität so definierbar. Wenn im folgenden die Indizes weggelassen werden, dann ist dies erneut so zu verstehen, daß von allen vier Eigenschaften der SE-Extensionalität bzw. Non-SE-Extensionalität die Rede ist.

2.4 Neutrale versus nicht-neutrale Extensionalität

Während bei den unterschiedlichen Eigenschaften der *neutralen Extensionalität* die Art der Extensionen von Sätzen offen bleibt, wird das bei den unterschiedlichen Eigenschaften der *nicht-neutralen Extensionalität* durch eine zusätzliche Annahme festgelegt.

So ist etwa im Begriff der SV-Extensionalität nicht nur derjenige der SE-Extensionalität enthalten, sondern es wird auch angenommen, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind:

(Df.SV$_n$) Ein Satz S_1 ist *SV-extensional*$_n$:⇔
S_1 ist SE-extensional$_n$ &
Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen

(wobei $n = 1, \ldots, 4$). Wenn ich im folgenden die Indizes weglasse, dann sind hiermit alle vier Eigenschaften der SV-Extensionalität gemeint. Entsprechend den vier Eigenschaften der SE-Extensionalität lassen sich auch hier vier Eigenschaften der SV-Extensionalität voneinander unterscheiden. Demnach ist ein Satz SV-extensional$_n$ g.d.w. darin koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_n$ des *Wahrheitswerts* als Extension substituierbar sind.

Ebenso ist im Begriff der sachverhaltsbezogenen Extensionalität (kurz: SS-Extensionalität) nicht nur derjenige der SE-Extensionalität enthalten, sondern es wird darüber hinaus auch angenommen, daß Sachverhalte die Extensionen von Sätzen sind.

(Df.SS$_n$) Ein Satz S_1 ist *SS-extensional*$_n$:⇔
S_1 ist SE-extensional$_n$ &
Sachverhalte sind die Extensionen von Sätzen

(wobei $n = 1, \ldots, 4$). Wenn ich wie vorhin die Indizes weglasse, dann ist von allen vier Eigenschaften der SS-Extensionalität die Rede. Wiederum können entsprechend den vier Eigenschaften der SE-Extensionalität vier Eigenschaften der SS-Extensionalität voneinander unterschieden werden. Demnach ist ein Satz SS-extensional$_n$ g.d.w. darin koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_n$ des *Sachverhalts* als Extension substituierbar sind.

2.5 Auffassungen der SV-Extensionalität

Im folgenden vergleiche ich die Quine/Lambertsche Auffassung der SV-Extensionalität mit meiner Auffassung derselben, welche – kurz gesagt – eine Modifikation jener ersten Auffassung zum Zweck der Verallgemeinerung ist. Erstere kann – wie gesagt – durch folgendes Definitionsschema festgehalten werden:

(Df.QL) Ein Satz S_1 ist *SV-extensional* :$\Leftrightarrow$
in S_1 sind koreferentielle singuläre Terme, koextensionale generelle Terme und kovalente Sätze immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts substituierbar

Mein Ansatz modifiziert nun (Df.QL) in dreierlei Hinsicht:

(i) Die Koreferenzialität und die Kovalenz werden mit der Koextensionalität gleichgesetzt. Demgemäß wird die Koextensionalität so erweitert, daß sie neben den generellen Termen auch die singulären Terme und Sätze umfaßt.
(ii) Weiters wird in die Formulierung der SV-Extensionalität der Extensionsbegriff eingebaut.
(iii) Ferner wird die Annahme (W), daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, expliziert.

Der Punkt (i) dehnt die jeweilige Relation der Koextensionalität auch auf singuläre Terme und Sätze aus, wodurch man sich die Definitionen für die Relationen der Koreferenzialität und der Kovalanz erspart. Weiters erlaubt der Punkt (ii), von jeder spezifischen Festlegung auf die Art der Extensionen von Sätzen zu abstrahieren. Erst dadurch kann diese Formulierung der SV-Extensionalität zu einer ganz allgemeinen Auffassung der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn erweitert werden. Schließlich gestattet die Explikation der Annahme (W) gemäß Punkt (iii), diese Annahme durch andere Auffassungen über die Art der Extensionen von Sätzen zu ersetzen. Unter Berücksichtigung der Punkte (i)–(iii) erhalten wir somit folgendes Definitionsschema:

(Df.QL′) Ein Satz S_1 ist *SV-extensional* :⇔
in S_1 sind koextensionale singuläre sowie generelle Terme und Sätze immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar

Weiters *zerlege* ich in einem nächsten Schritt diesen Begriff der SV-Extensionalität in seine beiden Komponenten, nämlich in die SE-Extensionalität und die Annahme (W), daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind. Betrachte dazu das Definiens von (Df.QL′), d.i. der folgende Satz:

(1) In einem Satz S_1 sind koextensionale singuläre sowie generelle Terme und Sätze immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar.

Der Satz (1) ist synonym mit folgendem Satz:

(2) In einem Satz S_1 sind koextensionale singuläre sowie generelle Terme und Sätze immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar &
Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen

Selbst wenn man die beiden Sätze (1) und (2) nicht als synonym ansieht, so sind sie zumindest in dem Sinn logisch äquivalent, als sie immer denselben Wahrheitswert haben: Wenn nämlich in einem Satz S_1 koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar sind, dann sind sie es auch immer unbeschadet der Extension und außerdem hat man sich ja schon darauf festgelegt, daß Wahrheitswerte solche Extensionen von Sätzen sind. Wenn aber andererseits in einem Satz S_1 koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar sind und weiters Wahrheitswerte solche Extensionen von Sätzen sind, dann sind in diesem Satz koextensionale Ausdrücke auch immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar. (1) ist also logisch äquivalent mit (2). Aufgrund der Ersetzbarkeit *salva veritate* von logisch äquivalenten Sätzen in (Df.QL′) gilt somit folgendes Theoremschema:

(T1) Ein Satz S_1 ist SV-*extensional* :⇔
in S_1 sind koextensionale singuläre sowie generelle Terme und Sätze immer füreinander unbeschadet der Extension substituierbar &
Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen

Wegen (T1) gilt aufgrund von (Df.SE) auch folgendes Theoremschema:

(T2) Ein Satz S_1 ist SV-*extensional* :⇔
S_1 ist SE-extensional &
Wahrheitswerte sind die Extensionen von Sätzen

(T2) ist aber nichts anderes als das frühere Definitionsschema (Df.SV$_n$), nur daß (T2) hier halt aus (Df.QL′) als ein Theoremschema gewonnen wurde. Die beiden Definitionsschemata (Df.QL′) und (Df.SV$_n$) sind also deduktiv äquivalente Formulierungen meiner Auffassung der SV-Extensionalität. Demnach ist ein Satz *non-SV-extensional* g.d.w. er non-SE-extensional ist oder Wahrheitswerte nicht die Extensionen von Sätzen sind (d.h. g.d.w. darin koextensionale Ausdrücke nicht immer füreinander unbeschadet des Wahrheitswerts als Extension substituierbar sind).

2.6 Sicherstellung der SE-Extensionalität

Gemäß dem NEA sind in elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen koextensionale generelle Terme nicht immer füreinander unbeschadet ihres Wahrheitswerts als Extension substituierbar. Solche Sätze erweisen sich demnach als non-SV-extensional, und zwar weil sie ein SV-Substitutionsprinzip verletzen, nämlich dasjenige für koextensionale generelle Terme. Gemäß (Df.SV$_n$) kann nun ihre Non-SV-Extensionalität zwei Quellen haben: Entweder sind sie non-SE-extensional oder Wahrheitswerte sind nicht die Extensionen von Sätzen.

Wenn sie non-SE-extensional sind, dann sind sie auch non-extensional in jeder nicht-neutralen Bedeutung von 'extensional im Substituierbarkeitssinn', was auch immer als die Extension eines Satzes angenommen wird. Wenn aber Wahrheitswerte nicht die Extensionen von Sätzen sind, dann sind in keinem Satz koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet des *Wahrheitswerts* als Extension substituierbar, eben weil Wahrheitswerte nicht solche Extensionen sind. In einem solchen Fall verletzen also alle Sätze trivialerweise alle SV-Substitutionsprinzipien und sind deshalb non-SV-extensional. Aber laut Annahme (W) ist im NEA die zweite Quelle für die Non-SV-Extensionalität schon ausgeschlossen worden, es sind nämlich wegen dieser Annahme Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen. Also sind elementare Sätze mit leeren singulären Termen zwingend non-SE-extensional, wenn sie non-SV-extensional sind und Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind. Aber müssen denn Wahrheitswerte wirklich die Extensionen von Sätzen sein? Kann man die SE-Extensionalität von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen nicht ganz einfach dadurch sicherstellen, daß als die Extension eines Satzes etwas anderes als ein Wahrheitswert angenommen wird? Denn Wahrheitswerte könnten nicht die Extensionen von Sätzen sein, weshalb solche Sätze non-SV-extensional wären, aber die Frage, ob sie SE-extensional sind, bliebe dann noch völlig offen. Solche Sätze könnten ja SS-extensional sein und folglich – wegen (Df.SS$_n$) – auch SE-extensional. Es stellt sich hier also das Problem, ob die Non-SV-Extensionalität von solchen Sätzen auch dann zwingend deren Non-SE-Extensionalität nach sich zieht, wenn Wahrheitswerte *nicht* die Extensionen von Sätzen sind. Wenn nämlich andere Entitäten als Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, dann sind sie trivialerweise non-SV-extensional, ohne deshalb schon zwingenderweise non-SE-extensional sein zu müssen. So stellt sich also weiters die folgende Frage: Sind in allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen koextensionale Ausdrücke immer füreinander unbeschadet der *Extension* substituierbar, auch wenn in solchen Sätzen koextensionale Ausdrücke vielleicht nicht immer füreinander unbeschadet des *Wahrheitswerts* als Extension substituierbar sind?

Die grundlegende Intuition zur Sicherstellung der SS-Extensionalität und damit auch der SE-Extensionalität von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen lautet nun wie folgt: Betrachte die drei im NEA involvierten Prädikationen. Die drei koextensionalen generellen Terme aus diesen drei Prädikationen steuern den Extensionen von diesen drei Prädikationen stets dieselbe Menge von existierenden Einzeldingen bei (nämlich die Menge aller existierenden rotierenden Einzeldinge). Da aber diese drei Prädikationen sich nur in jenen drei generellen Termen voneinander unterscheiden und ansonsten die restlichen Teile derselben alle gleich sind, steuern letztere Teile ebenfalls dieselben Sachverhaltselemente – falls vorhanden – den Extensionen der drei Prädikationen bei. Schließlich sind die betreffenden Sachverhaltselemente stets auf die gleiche Weise zusammengesetzt, und zwar weil bei allen Prädikationen der Wahrheitswert – falls vorhanden – auf dieselbe Weise bestimmt wird (d.h. weil bei allen Prädikationen die logische Form à la Kaplan identisch ist). Die drei Prädikationen haben somit denselben Sachverhalt als Extension, und zwar weil sie auf dieselbe Weise aus denselben Bestandteilen zusammengesetzt sind. Demnach ist die ursprüngliche Prädikation '$\Delta y(y$ rotiert)Vulkan' SS-extensional und folglich SE-extensional, obwohl sie non-SV-extensional ist.

Ich werde im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit beweisen, daß die SS-Extensionalität$_n$ (mit $n = 1, \ldots, 4$) und damit auch die entsprechende Eigenschaft der SE-Extensionalität$_n$ von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen sichergestellt werden kann, wenn man die Annahme (W) durch die Annahmen (Z) und (S) ersetzt (siehe §5.2). Insofern also als die SE-Extensionalität$_n$ eine wünschenswerte Eigenschaft einer Wissenschaftssprache ist, können Sachverhalte als eine verläßliche Wahl für die Extensionen von Sätzen angesehen werden. Die Annahme, daß Sachverhalte (im Sinn von (S)) die Extensionen von Sätzen sind, garantiert somit nicht nur die SS-Extensionalität$_n$, sondern auch die entsprechende Eigenschaft der SE-Extensionalität$_n$ von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen. D.i. eine der hauptsächlichen Thesen der vorliegenden Arbeit. Solche Sachverhalte sind demnach als die Extensionen von Sätzen zulässig (im Sinn von (Df.ZE) aus §1.1).

II. Sachverhalte

3 Entwicklung von Sachverhalts-semantiken

Im folgenden arbeite ich die Details von zwei Sachverhaltssemantiken für die positive freie Logik aus. Es handelt sich hierbei um formale Semantiken, die sich von den üblichen Wahrheitswertsemantiken für die freie Logik dadurch unterscheiden, daß in ihnen die Extensionen von Sätzen Sachverhalte (und nicht Wahrheitswerte) sind. Das Ziel bei der Entwicklung dieser neuen Semantiken ist dabei folgendes: Es soll damit eine materiale Grundlage geschaffen werden, von der aus mit Hilfe der Analyse der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn aus §2 das Extensionalitätsproblem in der freien Logik gelöst werden kann. Aufgrund dieser materialen Grundlage und jener Analyse der Extensionalität können – wie sich zeigen läßt – die Bedingungen angegeben werden, unter denen die SS-Extensionalität (und folglich auch die SE-Extensionalität) von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen sichergestellt ist.

Während die erste dieser Semantiken auf den sogenannten *Inner-Outer-Domain-Modellen* der freien Logik basiert, beruht die zweite auf den sogenannten *Einzel-Domain-Modellen* der freien Logik und bedient sich zudem der Methode der Superbewertungen. Deshalb nenne ich die erste Semantik *Inner-Outer-Domain-Sachverhaltssemantik* und die zweite *Superbewertungs-Sachverhaltssemantik*.[28] Eine solche Sachverhaltssemantik kann auf mindestens zweierlei Weise entwickelt werden, und egal, welchen Ansatz man wählt, es kommen dabei dieselben Sätze als logisch wahr heraus.

So sind nach dem ersten Ansatz Sätze wahr oder falsch, weil sie einen Sachverhalt zur Extension haben, der entweder besteht oder nicht besteht. Denn das Bestehen oder Nicht-Bestehen eines Sachverhalts ist es, was einen Satz wahr oder falsch macht.[29] Demnach ist in einer solchen Semantik ein Satz *wahr*, wenn er einen Sachverhalt zur Extension hat, der besteht; und er ist falsch, wenn er einen Sachverhalt zur Extension hat, der nicht besteht. Intuitiv gesprochen, *besteht* ein Sachverhalt, wenn die Dinge sich so und nicht anders ver-

[28] Meine Vorarbeiten zur Sachverhaltssemantik für die positive freie Logik sind in Leeb 2006 erschienen.

[29] Vgl. van Fraassen 1969, S.479 f.

halten, und er *besteht nicht*, wenn sich die Dinge nicht so oder eben anders verhalten. Wie sich die Dinge so und nicht anders verhalten, wird dabei durch ein Modell (eine Welt) festgehalten. Das logische Wahrsein eines Satzes kann dann durch sein Wahrsein in allen Modellen definiert werden.

Nach dem zweiten Ansatz wird zunächst das Bestehen und Nicht-Bestehen eines Sachverhalts definiert. Dann kann der ontologische Begriff des logischen Bestehens eines Sachverhalts durch sein Bestehen in allen Modellen erklärt werden. Damit kann der semantische Begriff des logischen Wahrseins eines Satzes durch das logische Bestehen jenes Sachverhalts definiert werden, welchen er zur Extension hat. Man kann im Rahmen dieses Ansatzes – wenn man will – einen Wahrheitsbegriff einführen, zur Definition des logischen Wahrseins ist dies aber gar nicht nötig.

Die *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik werde ich gemäß dem ersten Ansatz entwickeln und die *Superbewertungs*-Sachverhaltssemantik – einfach nur, um die Dinge etwas abwechslungsreicher zu gestalten – gemäß dem zweiten Ansatz. Während sich im Rahmen der *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen als SS-extensional und folglich SE-extensional herausstellen, fallen die Antworten auf das Extensionalitätsproblem im Licht der *Superbewertungs*-Sachverhaltssemantik sehr viel differenzierter aus. Hier hängen die unterschiedlichen Antworten auf dieses Problem ganz davon ab, welche Relation der Koextensionalität zugrunde gelegt wird.

Von einer voll ausgearbeiteten Sachverhaltssemantik ist weiters zu erwarten, daß dazu ein entsprechender Kalkül gefunden werden kann, zu dem diese Semantik "paßt"; d.h. es ist zu erwarten, daß ein Kalkül angegeben werden kann, welcher zumindest schwach adäquat hinsichtlich einer solchen Semantik ist. Und dies ist tatsächlich der Fall: Lamberts PFL-System ist ein solcher Kalkül. Ich werde beweisen, daß Lamberts PFL-System für die positive freie Logik im folgenden Sinn adäquat hinsichtlich der ersten Sachverhaltssemantik ist: Ein Satz ist logisch wahr g.d.w. seine eindeutige Übersetzung in die Sprache von PFL ein mit den Postulaten von PFL beweisbarer Satz (d.h. ein Theorem von PFL) ist. Weiters läßt sich zeigen, daß jedes System der positiven freien Logik, welches schwach adäquat hinsichtlich der herkömmlichen Wahrheitswertsemantik ist, es auch hinsichtlich der beiden Sachverhaltssemantiken ist. Außerdem werde ich nachweisen, daß die beiden Sachverhaltssemantiken mit den Herausforderungen des Slingshot-Arguments spielend leicht fertig werden. Diese beiden Sachverhaltssemantiken sind somit interessante Alternativen zu den herkömmlichen Wahrheitswertsemantiken für PFL. Ein entscheidender Vorteil einer solchen Sachverhaltssemantik gegenüber der herkömmlichen Wahrheitswertsemantik ist, daß in ersterer verschiedene wahre (bzw. logisch wahre) Sätze im allgemeinen verschiedene Extensionen haben können, während sie das in letzterer nicht haben können. Damit genügt nur eine solche Sachverhaltssemantik, aber nicht eine Wahrheitswertsemantik, der eingangs erwähnten präsemantischen Intuition, wonach verschiedene wahre Sätze im allgemeinen von verschiedenen Entitäten sprechen können.

4 *Inner-Outer-Domain*-Semantiken

Im folgenden werden die Details einer *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik für die positive freie Logik gemäß dem ersten Ansatz aus §3 ausgearbeitet. Ich verfolge dabei drei Ziele:

(i) Es soll die Adäquatheit des PFL-Systems[30] hinsichtlich dieser Semantik bewiesen werden.

(ii) Es soll weiters gezeigt werden, daß in dieser Semantik logisch äquivalente Sätze nicht immer koextensional sind (womit eine der beiden hauptsächlichen Annahmen des *Slingshot*-Arguments zurückgewiesen wird).

(iii) Und schließlich soll nachgewiesen werden, daß darin alle Sätze einer bestimmten Sprache für PFL SS-extensional und somit SE-extensional sind (infolgedessen ist auch die SE-Extensionalität von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen durch eine solche Sachverhaltssemantik sichergestellt).

4.1 Syntax von $\mathcal{L}_1$

Da die von mir gewählte Syntax zur Erreichung dieser Ziele etwas unüblich ist, werde ich zunächst das Alphabet und die Formationsregeln der Sprache $\mathcal{L}_1$ angeben. Die Sprache $\mathcal{L}_1$ enthält singuläre Terme, die leer sein können, sowie komplexe n-stellige generelle Terme. Solche komplexe n-stellige generelle Terme werden zur Analyse von Lamberts NEA benötigt. Weiters kommen diese singulären sowie komplexen n-stelligen generellen Terme in den Sätzen von $\mathcal{L}_1$ vor – als da sind: Prädikationen, Negations- und Konjunktionssätze sowie Allsätze. $\mathcal{L}_1$ ist eine Sprache für die positive freie Logik.

Das *Alphabet* von $\mathcal{L}_1$ enthalte als *deskriptive* Zeichen unendlich viele singuläre Terme $a, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ und für jedes n (mit $n = 1, 2 \ldots$) unendlich viele einfache n-stellige generelle Terme. Als *logische* Zeichen enthalte es die Junktoren $\neg$, $\wedge$, den Allquantor $\forall$, unendlich viele Individuenvariablen $x, x_1, \ldots, x_n, \ldots, y, y_1, \ldots, y_m, \ldots$, das Existenzzeichen E!, das Identitätszeichen $=$, den Termabstraktor Δ (lies

[30] Für das PFL-System vgl. Lambert 1997, S.39 f., S.65 f. und S.114 f. sowie 2001, S.265 und Morscher/Hieke 2001, S.8 f.

'Ding, so daß') und die Hilfszeichen (,). Die *Individuenausdrücke* sind die singulären Terme und Individuenvariablen.

Die *Formationsregeln* von $\mathcal{L}_1$ lauten wie folgt:

(1) Wenn F^n ein einfacher n-stelliger genereller Term ist und y, $y_1, \dots, y_n$ Individuenvariablen sind, dann sind $F^n y_1 \dots y_n$, E!y und $y_1 = y_2$ Formeln.

(2) Wenn $O_{y_1 \dots y_n}$ eine homogene[31] Formel ist mit $y_1, \dots, y_n$ als den einzigen Individuenvariablen, aber ohne Quantoren, singuläre Terme und Δ-Operatoren, dann ist $\Delta y_1 \dots \Delta y_n O_{y_1 \dots y_n}$ ein komplexer n-stelliger genereller Term.

(3) Wenn G^n ein komplexer n-stelliger genereller Term ist und $t_1, \dots, t_n$ Individuenausdrücke sind, dann ist $G^n t_1 \dots t_n$ eine Formel.[32]

(4) Wenn A, B Formeln sind, dann sind $\neg A$ und $(A \wedge B)$ Formeln.

(5) Wenn A eine Formel in pränexer Normalform[33] ist (die m komplexe n-stellige generelle Terme $G_1, \dots, G_m$ – mit variablem n – enthält, welche nicht verschieden voneinander sein müssen) und x_i eine freie Individuenvariable in A ist (mit $i, m = 1, 2 \dots$), dann ist $\forall x_i A[G_1, \dots, G_m]$ eine Formel.

(6) Nichts sonst ist ein komplexer n-stelliger genereller Term oder eine Formel.

[31] Eine *homogene* Formel ist eine Formel, deren einfachen generellen Terme alle dieselbe Anzahl von Stellen für Individuenausdrücke haben (E! wird hier den einfachen einstelligen und = den einfachen zweistelligen generellen Termen zugeschlagen).

[32] Die Formeln $G^n t_1 \dots t_n$ sind die *komplexen Prädikationen* von $\mathcal{L}_1$. Eine *Prädikation* ist ein sprachlicher Ausdruck, in welchem ein n-stelliger genereller Term und n Individuenausdrücke durch die Kopula zu einer Formel verknüpft werden; sie ist *komplex* g.d.w. ihr genereller Term komplex (d.h. nicht einfach ist); und sie ist *geschlossen* g.d.w. in ihr keine freien Individuenvariablen vorkommen.

[33] Eine Formel in *pränexer Normalform* ist eine Formel, deren Quantoren – falls vorhanden – alle vorangestellt sind. Bekanntlich kann jede Formel in eine deduktiv äquivalente Formel umgeformt werden, welche in pränexer Normalform ist (vgl. Kalish *et al.* 1980, S.225 und S.427 ff.). Es werden hierzu lediglich die in Kalish *et al.* 1980, S.428 aufgelisteten Gesetze der Quantorennegation und Verschiebungsgesetze benötigt, welche allesamt Theoreme von PFL sind. Demnach können die Axiome und Theoreme eines Systems der positiven freien Logik in $\mathcal{L}_1$ durch ihre deduktiv äquivalenten Normalformen ausgedrückt werden.

Weitere Junktoren und der Existenzquantor können bei Bedarf wie üblich eingeführt werden. Die *Sätze* von $\mathcal{L}_1$ sind die geschlossenen Formeln von $\mathcal{L}_1$.

Im folgenden wird der komplexe n-stellige generelle Term $\Delta y_1 \ldots \Delta y_n O_{y_1 \ldots y_n}$ durch $G^n_{\Delta y}$ abgekürzt und der Allsatz $\forall x_i A[G_1, \ldots, G_m]$ durch $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$. Weiters gelte noch die folgende *Abkürzungskonvention*:

$$(\Delta^-) \quad C[O_{y_1 \ldots y_n}(t_1/y_1, \ldots, t_n/y_n)] :\leftrightarrow C[\Delta y_1 \ldots \Delta y_n O_{y_1 \ldots y_n} t_1 \ldots t_n],$$

wobei C ein Kontext ist und $O_{y_1 \ldots y_n}(t_1/y_1, \ldots, t_n/y_n)$ das Resultat der simultanen Ersetzung aller Vorkommen von $y_1, \ldots, y_n$ in $O_{y_1 \ldots y_n}$ durch $t_1, \ldots, t_n$ ist.

Letztere Konvention stellt das vertraute Bild einer prädikatenlogischen Sprache erster Stufe mit leeren singulären Termen wieder her, deren Formeln nur einfache n-stellige generelle Terme enthalten. Komplexe n-stellige generelle Terme werden – wie gesagt – für die Analyse von Lamberts NEA benötigt.

4.2 Wahrheitswertsemantik I

Im folgenden fasse ich ganz kurz die herkömmliche *Inner-Outer-Domain*-Wahrheitswertsemantik für $\mathcal{L}_1$ zusammen, um so eine Basis für die Entwicklung der ersten Sachverhaltssemantik zu erlangen.

4.2.1 Modelle und Belegungen

Ganz allgemein, wird – wie gesagt – in Modellen festgehalten, wie sich die Dinge so und nicht anders verhalten, so auch in *Inner-Outer-Domain*-Modellen. Der *Domain* eines solchen Modells zerfällt in zwei Teilbereiche, nämlich den *inneren Domain* und den *äußeren Domain.* Intuitiv betrachtet, ist der innere *Domain* eine Menge von existierenden Einzeldingen und der äußere *Domain* eine Menge von nichtexistierenden Einzeldingen. Weiters ordnet – intuitiv betrachtet – die Interpretationsfunktion eines solchen Modells jedem singulären sowie einfachen n-stelligen generellen Term das zu, wovon er in einem solchen Modell spricht.

Ein *Inner-Outer-Domain-Modell* ist ein geordnetes Tripel $\langle D_I, D_O, f\rangle$, welches folgende Bedingungen erfüllt:

(1) D_I und D_O sind Mengen (möglicherweise leer)

(2) $D_I \cap D_O = \varnothing$

(3) $D_I \cup D_O \neq \varnothing$ und f ist eine totale Funktion (Interpretationsfunktion), welche folgende Bedingungen (4)–(6) erfüllt:

(4) für alle singulären Terme a gilt: $f(a) \in D_I \cup D_O$

(5) für alle einfachen n-stelligen generellen Terme F^n gilt: $f(F^n)$ ist eine Menge von geordneten n-Tupel von Elementen aus $D_I \cup D_O$

(6) zu jedem $d \in D_I \cup D_O$ gibt es genau einen singulären Term a, so daß gilt: $f(a) = d$

(7) es gibt genau ein D (*Domain*), so daß gilt: $D = D_I \cup D_O$

Den singulären sowie einfachen n-stelligen generellen Termen werden also durch ein solches Modell bestimmte mengentheoretische Entitäten zugeordnet, nämlich den singulären Termen Elemente aus D (d.h. Einzeldinge[34]) und den einfachen n-stelligen generellen Termen Mengen von geordneten n-Tupel von solchen Einzeldingen.

Die komplexen n-stelligen generellen Terme $G^n_{\Delta y}$ enthalten als Teilausdrücke die offenen Formeln $O_{y_1 \ldots y_n}$. Jenen offenen Formeln können auf eine systematische Weise Mengen von geordneten n-Tupel von Einzeldingen zugeordnet werden. So ist eine *Termoperandenbelegung* hinsichtlich eines *Inner-Outer-Domain*-Modells $\langle D_I, D_O, f\rangle$ eine Funktion g, die jeder homogenen Formel $O_{y_1 \ldots y_n}$ mit $y_1, \ldots, y_n$ als den einzigen Individuenvariablen, aber ohne Quantoren, singuläre Terme und Δ-Operatoren, genau eine Menge von geordneten n-Tupel von Elementen aus D zuordnet (diese offenen Formeln heißen *Termoperanden* und werden sozusagen mit Mengen *belegt*). Wenn $O'_{y_1 \ldots y_n}$ sowie $O''_{y_1 \ldots y_n}$ Termoperanden sind, dann wird g wie folgt definiert:

[34] Einzeldinge werden hier wie folgt aufgefaßt: d ist ein *Einzelding* relativ zu einem *Domain* $D = D_I \cup D_O :\Leftrightarrow d \in D$. Weiters: d ist ein *existierendes* Einzelding relativ zu $D = D_I \cup D_O :\Leftrightarrow d$ ist ein Einzelding relativ zu D und $d \in D_I$. Demnach ist d ein *nicht-existierendes* Einzelding relativ zu $D = D_I \cup D_O$ g.d.w. d ein Einzelding relativ zu D ist und $d \in D_O$.

(1) $g(F^n y_1 \dots y_n) = f(F^n)$
(2) $g(\mathrm{E!}y) = D_I$
(3) $g(y_1 = y_2) = \{\langle d_1, d_2\rangle \in D^2 |\ d_1 = d_2\}$[35]
(4) $g(\neg O'_{y_1 \dots y_n}) = D^n \backslash g(O'_{y_1 \dots y_n})$[36]
(5) $g(O'_{y_1 \dots y_n} \wedge O''_{y_1 \dots y_n}) = g(O'_{y_1 \dots y_n}) \cap g(O''_{y_1 \dots y_n})$

Im folgenden wird ein *Inner-Outer-Domain*-Modell samt seiner zugehörigen Termoperandenbelegung (kurz: IODMB) $\langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle$ durch 'M' abgekürzt.

Es folgt ein einfaches Beispiel dafür, wie sich die Dinge so und nicht anders verhalten und wie das durch ein Modell festgehalten wird. So ist ein Element aus D ein Element aus einer Menge von solchen Elementen (oder es ist es nicht). Die hier zugrundeliegende mengentheoretische Elementbeziehung zwischen einem Element aus D und einer Menge von solchen Elementen kann wie folgt verallgemeinert werden: Ein geordnetes n-Tupel von Elementen aus D ist ein Element aus einer Menge von geordneten n-Tupel von solchen Elementen (oder es ist es nicht). Dies ist eine Weise, wie sich die Dinge so und nicht anders verhalten. Und diese Verhaltensweise von Dingen wird hier mit den Mitteln des Modells festgehalten, nämlich durch die besagte mengentheoretische Elementbeziehung und deren vom Modell beigesteuerten Relata, als da sind: geordnete n-Tupel von Elementen aus D und Mengen von solchen geordneten n-Tupel. Die Elementbeziehung kann nun zwischen derartigen mengentheoretischen Entitäten gelten oder nicht gelten. Es bleibt hier weiters völlig offen, wie jene Entitäten, welche den singulären sowie generellen Termen zugeordnet werden, philosophisch zu interpretieren sind. Der entscheidende Punkt dabei ist nun, daß das Wahr- oder Falschsein einer Prädikation durch diese mengentheoretisch beschreibbare Verhaltensweise von Dingen definiert werden kann.

[35] $D^2 = D \times D = \{\langle d_1, d_2\rangle |\ d_1 \in D \ \&\ d_2 \in D\}$
[36] D^n ist das n-fache kartesische Produkt von D mit sich selbst.

4.2.2 Semantische Begriffe$_1$

Zunächst einmal wird das Wahr- oder Falschsein einer geschlossenen Prädikation durch die vorhin genannte mengentheoretisch beschreibbare Verhaltensweise von Dingen definiert. In dieser Beschreibung ordnet die Interpretationsfunktion den singulären Termen einer solchen Prädikation bestimmte Elemente aus D zu. Weiters ordnet darin die Termoperandenbelegung jener offenen Formel, welche im komplexen n-stelligen generellen Term einer Prädikation vorkommt, eine bestimmte Menge von n-Tupel von Elementen aus D zu. Im einfachsten Fall ist somit ein bestimmtes Element aus D ein Element aus einer bestimmten Menge von solchen Elementen (oder es ist es nicht). Demgemäß ist eine solche Prädikation wahr g.d.w. das betreffende Element aus D ein Element aus der betreffenden Menge ist. Und sie ist falsch g.d.w. das betreffende Element aus D ein Non-Element aus der betreffenden Menge ist. Ganz allgemein gesagt, ist demnach eine Prädikation wahr g.d.w. jenes geordnete n-Tupel von Elementen aus D, welche ihren singulären Termen zugeordnet sind, ein Element aus jener Menge von geordneten n-Tupel von solchen Elementen ist, die dem betreffenden Termoperanden zugeordnet ist. Das Wahrsein einer Prädikation in einem IODMB M läßt sich also durch die Elementbeziehung definieren und ihr Falschsein in M durch die Non-Elementbeziehung. Weiters kann dann das Wahr- oder Falschsein aller anderen Sätze rekursiv wie folgt definiert werden: Ein Negationssatz ist wahr in M g.d.w. der negierte Satz es nicht ist. Weiters ist ein Konjunktionssatz wahr in M g.d.w. seine beiden Glieder es sind. Schließlich ist – gemäß der substitutionellen Interpretation – ein Allsatz wahr in M g.d.w. alle seine Substitutionsinstanzen mit singulären Termen, welche existentiellen Gehalt haben, es sind.

Gemäß der herkömmlichen *Inner-Outer-Domain*-Wahrheitswertsemantik läßt sich demnach ein Wahrheitsbegriff für $\mathcal{L}_1$ wie folgt einführen (lies dabei: '$\models^1_M$ S' als 'ein Satz S ist $wahr_1$ in einem IODMB M'):

(1) $\models^1_M G^n_{\Delta y} a_1 \dots a_n \Leftrightarrow \langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle \in g(O_{y_1 \dots y_n})$
(2) $\models^1_M \neg A \Leftrightarrow$ nicht $\models^1_M A$
(3) $\models^1_M A \wedge B \Leftrightarrow \models^1_M A$ und $\models^1_M B$
(4) $\models^1_M \forall x_i A[G_{\overline{m}}] \Leftrightarrow$ für alle singulären Terme a_i gilt
(wenn $f(a_i) \in D_I$, dann $\models^1_M A[G_{\overline{m}}](a_i/x_i)$)

Im Rahmen einer solchen Wahrheitswertsemantik kann man die Extension eines Satzes S in M (kurz: '$e_M(S)$') durch das Wahrsein$_1$ von S in M wie folgt definieren:

$$e_M(S) = 1 :\Leftrightarrow \models^1_M S$$

und

$$e_M(S) = 0 :\Leftrightarrow \text{nicht } \models^1_M S$$

Weiters kann man (gemäß (W) aus §1.3) annehmen, daß 1 den Wahrheitswert Wahr vertritt und 0 den Wahrheitswert Falsch. Zur Definition des logischen Wahrseins ist die Einführung einer solchen Extensionsfunktion aber nicht erforderlich.

Ein Satz ist nämlich logisch wahr$_1$ g.d.w. er in allen IODMB M wahr$_1$ ist:

(Df.LW$_1$) $\models_1 S$ (d.h. ein Satz S ist *logisch wahr*$_1$) $:\Leftrightarrow$
für alle IODMB M gilt: $\models^1_M S$

(Df.LÄ$_1$) Zwei Sätze S_1, S_2 sind *logisch äquivalent*$_1$ $:\Leftrightarrow$
$\models_1 S_1 \leftrightarrow S_2$[37]

Es läßt sich nun das folgende Lemma beweisen:

(L1) Lamberts PFL-System ist in dem Sinn *schwach adäquat* hinsichtlich der herkömmlichen Wahrheitswertsemantik, als für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ folgendes gilt:
$\models_1 S \Leftrightarrow \tau(S)$ ist ein Theorem von PFL

[37] (D$\leftrightarrow$) $(A \leftrightarrow B) :\leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A))$

Beweis. Ich skizziere im folgenden nur die wichtigsten Schritte, ohne alle Details auszuführen:

Sei $\mathcal{L}_0$ eine Sprache, deren Prädikationen nicht mittels komplexen n-stelligen generellen Termen, sondern aus einfachen n-stelligen generellen Termen gebildet werden. $\mathcal{L}_0$ kann aus $\mathcal{L}_1$ durch einen bestimmten Transformationsvorgang gewonnen werden. Als Grundlage für diesen Vorgang dient eine rechtseindeutige Transformationsrelation, welche anhand der obigen Abkürzungskonvention (Δ^-) wie folgt definiert werden kann ((Δ^-) ist dabei eine Verallgemeinerung des klassischen Prinzips der Termabstraktion):

(Df.T) Ein Satz S wird in einen Satz T transformiert $:\Leftrightarrow$
es gibt einen Kontext C, Individuenvariablen $y_1, \ldots, y_n$, offene Formeln $O_{y_1 \ldots y_n}$ und Individuenausdrücke $t_1, \ldots, t_n$, so daß gilt:
S hat die Form $C[\Delta y_1 \ldots \Delta y_n O_{y_1 \ldots y_n} t_1 \ldots t_n]$ und
T hat die Form $C[O_{y_1 \ldots y_n}(t_1/y_1, \ldots, t_n/y_n)]$

Man kann sich dann überlegen, daß folgendes gilt: Zu jedem Satz S von $\mathcal{L}_1$ gibt es genau einen Satz T, so daß gilt: S wird in T transformiert. Dies erlaubt es dann, die Transformationsfunktion τ einzuführen. Sei dazu τ eine Funktion, die jedem Satz S von $\mathcal{L}_1$ jenen Satz T zuordnet, so daß gilt: S wird in T transformiert. Es gilt dann für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ und alle Sätze T: S wird in T transformiert $\Leftrightarrow \tau(S) = T$. Man kann nun die Sprache $\mathcal{L}_1$ wie folgt in die Sprache $\mathcal{L}_0$ transformieren: $\mathcal{L}_0 = \{T|$ es gibt einen Satz S von $\mathcal{L}_1$, so daß gilt: $T = \tau(S)\}$. Demnach gilt dann folgendes: Zu jedem Satz S von $\mathcal{L}_1$ gibt es genau einen Satz T von $\mathcal{L}_0$, so daß gilt: $T = \tau(S)$. Damit ist $\mathcal{L}_0$ eine Sprache, deren Sätze alle in pränexer Normalform sind und deren Prädikationen mittels einfachen n-stelligen generellen Termen gebildet werden. $\mathcal{L}_0$ ist weiters in dem Sinn eine Teilsprache von Lamberts Sprache für das PFL-System, als jeder Satz von $\mathcal{L}_0$ auch ein Satz von jener Sprache ist. $\mathcal{L}_0$ ist zudem reichhaltig genug, um jedes Axiom und jedes Theorem von PFL durch seine deduktiv äquivalente Normalform in $\mathcal{L}_0$ ausdrücken zu können. Seien weiters die semantischen Klauseln (1)–(4) von S.66 so umformuliert, daß sie sich nicht auf die Sprache $\mathcal{L}_1$, sondern auf die Sprache

$\mathcal{L}_0$ beziehen. Damit kann dann analog zur Definition des logischen Wahrseins$_1$ für die Sätze S von $\mathcal{L}_1$ das logische Wahrsein$_0$ für die Sätze T von $\mathcal{L}_0$ definiert werden. Es gilt nun nach Lambert und Leblanc/Thomason[38] folgendes Adäquatheitsresultat:

(1) Für alle Sätze T von $\mathcal{L}_0$ gilt:
T ist logisch wahr$_0$ $\Leftrightarrow$ T ist ein Theorem von PFL

Anders gesagt, gilt folgendes:

(2) Für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ gilt:
$\tau(S)$ ist logisch wahr$_0$ $\Leftrightarrow$ $\tau(S)$ ist eine Theorem von PFL

Man kann sich nun weiters überlegen, daß folgendes gilt:

(3) Für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ gilt:
S ist logisch wahr$_1$ $\Leftrightarrow$ $\tau(S)$ ist logisch wahr$_0$

Aus (1)–(3) folgt also:

(4) Für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ gilt:
S ist logisch wahr$_1$ $\Leftrightarrow$ $\tau(S)$ ist eine Theorem von PFL

Es gilt also (L1). □

4.3 Sachverhaltssemantik I

Im folgenden werden auf der Basis der in §4.2.1 vorgestellen Modelle und Termoperandenbelegungen die Details einer *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik für $\mathcal{L}_1$ ausgearbeitet. Ich gehe dabei gemäß dem ersten Ansatz zur Entwicklung einer Sachverhaltssemantik vor und erläutere deshalb zunächst seine wichtigsten Schritte.

Zuerst einmal wird mit den Mitteln eines IODMB M eine Menge von Sachverhalten$_1$ eingeführt.[39] Gemäß den Thesen (Z) und (S) (aus §1.4) sind solche Sachverhalte$_1$ aus den Extensionen der singulären sowie komplexen n-stelligen generellen Terme und Teilsätze

[38] Vgl. Lambert 1997, S.65 f. und S.114 f. sowie Leblanc/Thomason 1968.

[39] In §6 wird noch eine zweite Menge von Sachverhalten eingeführt. Die Indizes dienen zur besseren Unterscheidung dieser beiden Mengen von Sachverhalten.

zusammengesetzt, welche in den Sätzen vorkommen. Und die Zusammensetzung selbst hängt davon ab, wie der Wahrheitswert des Satzes bestimmt wird. Den vier Arten von Sätzen entsprechen dabei vier Arten von Sachverhalten$_1$. Im folgenden greife ich exemplarisch je einen Satz aus diesen vier Arten von Sätzen heraus und erläutere woraus und wie die diesen vier Sätzen entsprechenden Sachverhalte$_1$ zusammengesetzt sind.

So werden bei den *geschlossenen Prädikationen* ein komplexer n-stelliger genereller Term und n singuläre Terme durch die Kopula miteinander zu einem Satz verknüpft. Der Wahrheitswert einer solchen Prädikation wird dadurch bestimmt, daß man feststellt, ob das geordnete n-Tupel der Extensionen der n singulären Terme ein Element aus der Extension des betreffenden generellen Terms ist (oder es nicht ist). Der entsprechende Sachverhalt$_1$ wird somit aus diesem geordneten n-Tupel der Extensionen der n singulären Terme und der Extension des betreffenden generellen Terms zusammengesetzt. Die Art der Zusammensetzung wird dabei durch die Elementbeziehung (welche der Kopula entspricht) angezeigt.

Weiters kommen in den *Allsätzen* in pränexer Normalform m komplexe n-stellige generelle Terme vor. Die logische Struktur eines solchen Allsatzes läßt sich in einem sogenannten *logischen Attribut*$_1$ zusammenfassen.[40] Sein Wahrheitswert wird dadurch bestimmt, daß man feststellt, ob das geordnete m-Tupel, welches aus den Extensionen der m komplexen n-stelligen generellen Terme gebildet wird, das betreffende logische Attribut$_1$ hat (oder es nicht hat). Die entsprechenden Sachverhalte$_1$ werden daher aus dem geordneten m-Tupel der Extensionen dieser m komplexen n-stelligen generellen Terme zusammengesetzt. Die Art der Zusammensetzung wird hier durch das betreffende logische Attribut$_1$ angezeigt.

Weiters kommen in *Negationssätzen* die negierten Teilsätze vor. Der Wahrheitswert eines Negationssatzes wird dadurch bestimmt, daß man feststellt, welchen entgegengesetzten Wahrheitswert der negierte Teilsatz hat. Der entsprechende Sachverhalt$_1$ wird somit aus dem Sachverhalt$_1$ zusammengesetzt, welcher die Extension des negierten

[40] In §6 wird außerdem eine zweite Art von logischen Attributen eingeführt. Die Indizes dienen wiederum zur besseren Unterscheidung dieser beiden Arten von logischen Attributen.

Satzes ist. Die Art der Zusammensetzung wird hierbei durch die Wahrheitsfunktion der Negation angezeigt.

Schließlich kommen in *Konjunktionssätzen* die beiden Konjunktionsglieder vor. Der Wahrheitswert eines Konjunktionssatzes wird dadurch bestimmt, daß man feststellt, ob die beiden Konjunktionsglieder beide den Wahrheitswert Wahr haben (oder ihn nicht haben). Der entsprechende Sachverhalt$_1$ wird daher aus den beiden Sachverhalten$_1$ zusammengesetzt, welche die Extensionen der beiden Konjunktionsglieder sind, wobei deren Reihenfolge gleichgültig sein soll. Die Art der Zusammensetzung wird dabei durch die Wahrheitsfunktion der Konjunktion angezeigt.

Dann muß erklärt werden, was es heißt, daß ein solcher Sachverhalt$_1$ in einem IODMB M besteht oder nicht besteht. Außerdem muß angegeben werden, welchen Sachverhalt$_1$ ein Satz zur Extension bei jener Extensionsfunktion hat, welche durch ein solches IODMB M bestimmt wird. Dazu muß erklärt werden, welche logische Attribute$_1$ welchen logischen Strukturen von Allsätzen in pränexer Normalform entsprechen. Erst wenn all dies angegeben wurde, kann das Wahrsein eines Satzes durch das Bestehen seiner Extension (d.i. eines Sachverhaltes$_1$) definiert werden. Ein Satz ist demnach wahr in M g.d.w. er einen in M bestehenden Sachverhalt$_1$ zur Extension hat; und er ist falsch in M g.d.w. er einen in M nicht-bestehenden Sachverhalt$_1$ zur Extension hat. Und schließlich kann das logische Wahrsein eines Satzes durch sein Wahrsein in allen IODMB M definiert werden. Damit sind die wichtigsten Schritte zur Entwicklung der ersten Sachverhaltssemantik skizziert worden. Im folgenden gehe ich zur Ausarbeitung der Details entsprechend den eben beschriebenen Schritten über.

4.3.1 Die Menge der Sachverhalte$_1$

Es folgen zunächst einige Überlegungen zu den mengentheoretischen Komplexen, welche (gemäß (Z) aus §1.4) aus den Extensionen derjenigen singulären sowie generellen Terme und Sätze zusammengesetzt sind, die in einem Satz vorkommen. Als Grundbegriffe werden dabei der *Domain* D eines IODMB M und die mengentheoretische $\in$-Relation angenommen. In der vorliegenden Semantik werden zudem drei weitere Begriffe benötigt, nämlich die Wahrheitsfunktionen der Negation NICHT sowie der Konjunktion UND und der Begriff des k-ten m-stelligen logischen Attributs$_1$.

Die Extensionen von *geschlossenen Prädikationen* werden dann aus der mengentheoretischen Elementrelation, einem geordneten n-Tupel von Einzeldingen und einer Menge von geordneten n-Tupel von solchen Einzeldingen zusammengesetzt. Der Sachverhalt$_1$, so daß gilt: das geordnete n-Tupel von Einzeldingen $\langle d_1, \ldots, d_n \rangle$ liegt in der Menge X^n, wird als der Komplex

$$\langle \in, \langle d_1, \ldots, d_n \rangle, X^n \rangle$$

aufgefaßt.[41] So wird hier z.B. der Sachverhalt$_1$, so daß gilt: Merkur ist ein Ding, so daß es rotiert, als ein geordnetes Tripel aufgefaßt, das aus der Elementrelation, dem Einzelding Merkur und der Menge der rotierenden Einzeldinge zusammengesetzt ist. Dementsprechend wird der Sachverhalt$_1$, so daß gilt: Vulkan ist ein Ding, so daß es rotiert, aus der Elementrelation, dem nicht-existierenden Einzelding Vulkan und der Menge der rotierenden Einzeldinge zusammengesetzt.

Weiters sind die Extensionen von *Allsätzen* in pränexer Normalform Sachverhalte$_1$, welche aus einem geordneten m-Tupel von Mengen von geordneten n-Tupel von Einzeldingen sowie einem logischen Attribut$_1$ von solchen geordneten m-Tupel zusammengesetzt sind. Der Sachverhalt$_1$, so daß gilt: das geordnete m-Tupel von Mengen $\langle X_1, \ldots, X_m \rangle$ hat das k-te m-stellige logische Attribut$_1$ R_k^m, wird als der Komplex

$$\langle R_k^m, \langle X_1, \ldots, X_m \rangle \rangle$$

aufgefaßt. Ein Beispiel für ein solches logische Attribut$_1$ ist die Alle-existierenden - Einzeldinge - sind - so - daß - sie - darin - liegen - Eigenschaft$_1$, welche wie folgt eingeführt werden kann:

[41] X^n ist das n-fache kartesische Produkt von X mit sich selbst. Hier und im folgenden gilt die übliche Konvention, daß ein geordnetes Ein-Tupel identisch mit seinem einzigen Element ist. Demnach gilt also: $\langle d_1 \rangle = d_1$.

(R_1^1) Eine Menge X hat die R_1^1-Eigenschaft$_1$ (d.h. hat die Alle-existierenden-Einzeldinge-sind-so-daß-sie-darin-liegen-Eigenschaft$_1$ $\Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a gilt (wenn die Extension von a ein existierendes Einzelding ist, dann liegt es in X)

Jene logischen Attribute$_1$ werden eigentlich erst weiter unten rekursiv definiert, seien hier aber der Systematik halber schon vorweg angeführt. Die Idee dabei ist, die gesamte logische Struktur eines Allsatzes in pränexer Normalform in einem einzigen solchen Attribut zu erfassen, welches dann vom geordneten m-Tupel der Extensionen der im betreffenden Allsatz vorkommenden komplexen n-stelligen generellen Terme entweder gilt oder nicht gilt.

Die Menge der Sachverhalte$_1$ sei schließlich unter den Operationen der Negation und Konjunktion abgeschlossen. Die Operation der Negation ordnet hierbei jedem Sachverhalt$_1$ s_1 das geordnete Paar $\langle \textsc{nicht}, s_1 \rangle$ zu, wobei NICHT die Wahrheitsfunktion der Negation ist. Der Sachverhalt$_1$, so daß gilt: s_1 ist nicht der Fall, wird somit als der Komplex

$$\langle \textsc{nicht}, s_1 \rangle$$

aufgefaßt. Weiters ordnet die Operation der Konjunktion zwei Sachverhalten$_1$ s_1 und s_2 das geordnete Paar $\langle \textsc{und}, \{s_1, s_2\} \rangle$ zu, wobei UND die Wahrheitsfunktion der Konjunktion ist. Demnach wird der Sachverhalt$_1$, so daß gilt: s_1 und s_2 (bzw. s_2 und s_1) sind der Fall, als der Komplex

$$\langle \textsc{und}, \{s_1, s_2\} \rangle$$

aufgefaßt. Die Gleichgültigkeit der Reihenfolge der beiden Sachverhalte$_1$ s_1 und s_2 wird hier durch die Bildung der Menge $\{s_1, s_2\}$ erreicht. Deshalb ist es nicht von vorne herein ausgeschlossen, daß der Sachverhalt$_1$, so daß gilt: Maria geht in die Schule und Fritz bleibt zu Hause, identisch ist mit dem Sachverhalt$_1$, so daß gilt: Fritz bleibt zu Hause und Maria geht in die Schule. Ohne eine derartige Mengenbildung müßte man aber diese beiden Sachverhalte$_1$ nach dem Identitätskriterium für geordnete n-Tupel als verschieden voneinander betrachten.

Demgemäß läßt sich die Menge der Sachverhalte$_1$ wie folgt rekursiv definieren. Wenn $M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle$ ein IODMB ist, dann:

(1) Wenn $\in$ die Elementrelation ist und $d_1, \ldots, d_n \in D$ und X^n eine Menge von geordneten n-Tupel von Elementen aus D ist, dann ist $\langle \in, \langle d_1, \ldots, d_n\rangle, X^n\rangle$ ein Sachverhalt$_1$.

(2) Wenn R_k^m das k-te m-stellige logische Attribut$_1$ ist und $X_1, \ldots,$ X_m Mengen von geordneten n-Tupel von Elementen aus D sind (mit variablem n), dann ist $\langle R_k^m, \langle X_1, \ldots, X_m\rangle\rangle$ ein Sachverhalt$_1$.

(3) Wenn NICHT die Wahrheitsfunktion der Negation ist und s_1 ein Sachverhalt$_1$ ist, dann ist $\langle \text{NICHT}, s_1\rangle$ ein Sachverhalt$_1$.

(4) Wenn UND die Wahrheitsfunktion der Konjunktion ist und s_1, s_2 Sachverhalte$_1$ sind, dann ist $\langle \text{UND}, \{s_1, s_2\}\rangle$ ein Sachverhalt$_1$.

(5) Nichts sonst ist ein Sachverhalt$_1$.

Es werden also in der vorliegenden Arbeit Sachverhalte$_1$ ebenso wie Einzeldinge, Mengen von geordneten n-Tupel von Einzeldingen und Wahrheitswerte als Relata einer Extensionsfunktion und somit als *extensionale* Entitäten verstanden.[42] Weiters werden hier Sachverhalte$_1$ so aufgefaßt, daß sie bestimmten abstrakten Entitäten entsprechen. Man kann sie nämlich mit jenen mengentheoretischen Komplexen identifizieren, welche (gemäß den rekursiven Klauseln (1)–(5)) aus den Extensionen der Teilausdrücke eines Satzes zusammengesetzt sind. Nach dieser Auffassung können Sachverhalte$_1$ als wohldefinierte Entitäten eingeführt werden, so wie es die Semantik von der Extension eines Satzes verlangt. Die Identifikation von Sachverhalten$_1$ mit jenen mengentheoretischen Komplexen erlaubt es dann, als Identitätskriterium für Sachverhalte$_1$ dasjenige für geordnete n-Tupel anzunehmen: Demnach sind zwei Sachverhalte$_1$ identisch g.d.w. die mengentheoretischen Komplexe, mit denen sie identifiziert werden, identisch sind (was nichts anderes heißt, als daß diese Sachverhalte$_1$ auf dieselbe Weise aus denselben Bestandteilen zusammengesetzt sind[43]).

[42] Für Meixner 2004, S.102 sind Sachverhalte zusammengesetzte Entitäten. Er nimmt sie aber – im Unterschied zu meiner Auffassung – als Relata einer Intensionsfunktion an und versteht sie somit als *intensionale* Entitäten.

[43] Für letzteres Identitätskriterium vgl. Armstrong 1997, S.132.

Die Identifikation von Sachverhalten$_1$ mit bestimmten mengentheoretischen Komplexen gestattet es also, wichtige strukturelle Merkmale von gängigen Sachverhaltstheorien nachzubilden.

4.3.2 (Nicht-) Bestehen von Sachverhalten$_1$

Im folgenden definiere ich, was es heißt, daß ein Sachverhalt$_1$ in einem IODMB M *besteht*, d.h. daß sich die Dinge so und nicht anders verhalten, bzw. was es heißt, daß ein Sachverhalt$_1$ *nicht* in einem IODMB M *besteht*, d.h. daß sich die Dinge nicht so oder eben anders verhalten.

Wenn $M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle$ ein IODMB ist, $d_1, \ldots, d_n$ Einzeldinge sind, $X^n, X_1, \ldots, X_m$ Mengen sind, R_k^m das k-te m-stellige logische Attribut$_1$ (mit $k, m, n = 1, 2\ldots$) ist und s_1, s_2 Sachverhalte$_1$ sind, dann:

(1) $\langle\in, \langle d_1, \ldots, d_n\rangle, X^n\rangle$ besteht (bzw. besteht nicht) in $M \Leftrightarrow$
$\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \in X^n$ (bzw. $\langle d_1, \ldots, d_n\rangle \notin X^n$)

(2) $\langle R_k^m, \langle X_1, \ldots, X_m\rangle\rangle$ besteht (bzw. besteht nicht) in $M \Leftrightarrow$
$\langle X_1, \ldots, X_m\rangle$ hat (bzw. hat nicht) das R_k^m-Attribut$_1$ in M

(3) $\langle\text{NICHT}, s_1\rangle$ besteht (bzw. besteht nicht) in $M \Leftrightarrow$
s_1 besteht nicht (bzw. besteht) in M

(4) $\langle\text{UND}, \{s_1, s_2\}\rangle$ besteht (bzw. besteht nicht) in $M \Leftrightarrow$
s_1 und s_2 bestehen beide (bzw. mindestens eines von s_1 und s_2 besteht nicht) in M

Die ersten Elemente von solchen Sachverhalten$_1$ – d.s. $\in$, R_k^m, NICHT, UND – zeigen dabei die notwendige und hinreichende Bedingung des Bestehens bzw. Nicht-Bestehens des betreffenden Sachverhalts$_1$ an. Daran erkennt man, wie ein Sachverhalt$_1$ aus den Extensionen der Teilausdrücke des entsprechenden Satzes zusammengesetzt ist. Um diesen Gedankengang etwas auszuführen, schlage ich die folgende Konvention vor:

(1) Das erste Element eines Sachverhalts$_1$ zeigt die notwendige und hinreichende Bedingung für sein Bestehen bzw. Nicht-Bestehen an.

Dies ist so, weil das jeweilige erste Element eines solchen Sachverhalts$_1$ maßgeblich in der Formulierung der Bedingung seines Bestehens bzw. Nicht-Bestehens involviert ist. Weiters geht aus der Bestehensdefinition und der eingangs von §4.3 erwähnten Charakterisierung der logischen Form eines Satzes (d.i. die Art, wie sein Wahrheitswert bestimmt wird) folgendes hervor:

(2) Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen bzw. Nicht-Bestehen eines Sachverhalts$_1$ ist nichts anderes als die logische Form des entsprechenden Satzes (d.i. die Art, wie der Wahrheitswert desjenigen Satzes bestimmt wird, welcher diesen Sachverhalt$_1$ zur Extension hat).

Aus (1) und (2) folgt also:

(3) Das erste Element eines Sachverhalts$_1$ zeigt die logische Form des entsprechenden Satzes an.

Weiters gilt wegen der Zusammensetzungsthese (Z) aus §1.4 folgendes:

(4) Die Art der Zusammensetzung eines Sachverhalts$_1$ hängt von der logischen Form des entsprechenden Satzes ab.

Es zeigt also (wegen (3)) das erste Element eines Sachverhalts$_1$ die logische Form des entsprechenden Satzes an, welche ihrerseits (wegen (4)) die Art der Zusammensetzung jenes Sachverhalts$_1$ festlegt. Demnach gilt also auch folgendes:

(5) Das erste Element eines Sachverhalts$_1$ zeigt die Art seiner Zusammensetzung an.

4.3.3 Extensionsfunktion

Gegeben ein IODMB M, wird dadurch eine Extensionsfunktion e eindeutig bestimmt. Im folgenden wird definiert, welchen Sachverhalt$_1$ ein Satz zur Extension bei diesem e hat. Es werden dazu folgenden Arten von Ausdrücken in primitiver Notation *Extensionen bei e* zugeordnet: singulären sowie komplexen n-stelligen generellen Termen und Sätzen in pränexer Normalform.

(1) $e(a) = f(a)$
(2) $e(G^n_{\Delta y}) = g(O_{y_1 \ldots y_n})$
(3) $e(G^n_{\Delta y} a_1 \ldots a_n) = \langle \in, \langle e(a_1), \ldots, e(a_n) \rangle, e(G^n_{\Delta y}) \rangle$
(4) $e(\neg A) = \langle \text{NICHT}, e(A) \rangle$
(5) $e(A \wedge B) = \langle \text{UND}, \{e(A), e(B)\} \rangle$
(6) $e(\forall x_i A[G_{\overline{m}}]) = \langle R^m_k, \langle e(G_1), \ldots, e(G_m) \rangle \rangle$

Die Extension bei e von einem singulären Term a ist demnach das Element $f(a)$ aus D. Weiters ist die Extension bei e von einem komplexen n-stelligen generellen Term jene Menge von geordneten n-Tupel von Elementen aus D, welche dem betreffenden Termoperanden zugeordnet ist. Zudem ist die Extension bei e von einer geschlossenen Prädikation jenes geordnete Tripel, welches aus der Elementrelation sowie dem geordneten n-Tupel der Extensionen bei e von den n singulären Termen dieser Prädikation und der Extension bei e von ihrem komplexen n-stelligen generellen Term zusammengesetzt ist. Weiters ist die Extension bei e von einem Negationssatz jenes geordnete Paar, welches aus der Wahrheitsfunktion der Negation und der Extension bei e von seinem negierten Teilsatz zusammengesetzt ist. Außerdem ist die Extension bei e von einem Konjunktionssatz jenes geordnete Paar, welches aus der Wahrheitsfunktion der Konjunktion und der Menge der Extensionen bei e von den beiden Konjunktionsgliedern zusammengesetzt ist. Schließlich ist die Extension bei e von einem Allsatz in pränexer Normalform jenes geordnete Paar, welches aus dem k-ten m-stelligen logischen Attribut$_1$ R^m_k und dem geordneten m-Tupel der Extensionen bei e von seinen m komplexen n-stelligen generellen Termen (mit variablem n) zusammengesetzt ist.

Es wurde also definiert, welchen Sachverhalt$_1$ ein Satz zur Extension bei jener Extensionsfunktion hat, die durch ein gegebenes IODMB M eindeutig bestimmt wird. Weiters wurde definiert, was es heißt, daß ein Sachverhalt$_1$ in M besteht (bzw. nicht besteht in M). Diese beiden rekursiven Definitionen habe ich wegen der linearen Ordnung der deutschen Schriftsprache nacheinander vorgebracht. Die beiden Begriffe des Bestehens eines Sachverhalts$_1$ und der Extension eines sprachlichen Ausdrucks sind aber in dem Sinn *simultan rekursiv* definiert, als z.B. die Extensionen der Allsätze mit nur einem Quantor vom Bestehen der Extensionen (d.s. Sachverhalte$_1$) all ihrer quantorenfreien Substitutionsinstanzen, wo die singulären Terme existentiellen Gehalt haben, abhängen (vgl. S.81).

4.3.4 Allsätze und logische Attribute$_1$

In einem logischen Attribut$_1$ wird die gesamte logische Struktur eines Allsatzes in pränexer Normalform erfaßt. Im folgenden werde ich zwei Verfahren angeben, wie zu jedem Allsatz in pränexer Normalform jenes logische Attribut$_1$ konstruiert werden kann, welches seine gesamte logische Struktur erfaßt. Ich erläutere diese beiden Verfahren zunächst einmal anhand eines einfachen Beispiels. Betrachte dazu die Extensionen zweier Allsätze mit nur einem Quantor und einem komplexen einstelligen generellen Term:

$$e(\forall x Gx) = \langle R_1^1, e(G) \rangle$$

und

$$e(\forall x \neg Gx) = \langle R_2^1, e(G) \rangle$$

Sei R_1^1 dasjenige einstellige logische Attribut$_1$, welches die logische Struktur des ersten Allsatzes $\forall x Gx$ erfaßt; und sei weiters R_2^1 dasjenige einstellige logische Attribut$_1$, welches diejenige des zweiten Allsatzes $\forall x \neg Gx$ erfaßt.

a. Das erste Verfahren. Dieses besteht darin, zu erklären, was es heißt, daß eine Menge von geordneten n-Tupel von Einzeldingen ein logisches Attribut$_1$ hat. Hinsichtlich des ersten Allsatzes $\forall x Gx$ läßt sich das wie folgt erläutern: Eine solche Menge hat das

> Alle-existierenden-Einzeldinge-sind-so-daß-sie-darin-liegen-Attribut$_1$

(d.i. das erste einstellige logische Attribut$_1$ R_1^1) g.d.w. alle Extensionen der Substitutionsinstanzen Ga, wo die singulären Terme a existentiellen Gehalt haben, bestehen. D.h.:

(1) Die Menge $e(G)$ hat das logische Attribut$_1$ R^1_1 in $M \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a gilt $(e(a) \in D_I \Rightarrow$
$e(Ga)$ besteht in $M)$

Da wegen der Definition von e gilt: $e(Ga) = \langle \in, e(a), e(G) \rangle$, gilt auch:

(2) $e(Ga)$ besteht in $M \Leftrightarrow \langle \in, e(a), e(G) \rangle$ besteht in M

Da weiters wegen der Definition des Bestehens eines Sachverhalts$_1$ gilt:

(3) $\langle \in, e(a), e(G) \rangle$ besteht in $M \Leftrightarrow e(a) \in e(G)$,

folgt somit aus (1)–(3):

(4) Die Menge $e(G)$ hat das logische Attribut$_1$ R^1_1 in $M \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a gilt $(e(a) \in D_I \Rightarrow e(a) \in e(G))$

Aufgrund von (4) gilt also:

(5) Die Menge $e(G)$ hat das logische Attribut$_1$ R^1_1 in $M \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a mit existentiellem Gehalt gilt:
$e(a)$ liegt in $e(G)$; d.h. g.d.w. alle relativ zu D existierenden Einzeldinge in $e(G)$ liegen

Hinsichtlich des zweiten Allsatzes $\forall x \neg Gx$ lautet die Erklärung, was es heißt, daß eine Menge von geordneten n-Tupel von Einzeldingen das logische Attribut$_1$ R^1_2 hat, wie folgt: Eine solche Menge hat das

> Alle-existierenden-Einzeldinge-sind-so-daß-sie-nicht-darin-liegen-Attribut$_1$

(d.i. das zweite einstellige logische Attribut$_1$ R^1_2) g.d.w. alle Extensionen der Substitutionsinstanzen $\neg Ga$, wo die singulären Terme a existentiellen Gehalt haben, bestehen. D.h.:

(1) Die Menge $e(G)$ hat das logische Attribut$_1$ R^1_2 in $M \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a gilt $(e(a) \in D_I \Rightarrow$
$e(\neg Ga)$ besteht in $M)$

Da wegen der Definition von e gilt: $e(\neg Ga) = \langle \textsc{nicht}, \langle \in, e(a), e(G)\rangle\rangle$, gilt auch:

(2) $e(\neg Ga)$ besteht in $M \Leftrightarrow \langle \textsc{nicht}, \langle \in, e(a), e(G)\rangle\rangle$ besteht in M

Da weiters wegen der Definition des Bestehens eines Sachverhalts$_1$ gilt:

(3) $\langle \textsc{nicht}, \langle \in, e(a), e(G)\rangle\rangle$ besteht in $M \Leftrightarrow$
$\langle \in, e(a), e(G)\rangle$ besteht nicht in $M \Leftrightarrow$
$e(a) \notin e(G)$,

folgt somit aus (1)–(3):

(4) Die Menge $e(G)$ hat das logische Attribut$_1$ R^1_2 in $M \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a gilt $(e(a) \in D_I \Rightarrow e(a) \notin e(G))$

Aufgrund von (4) gilt also:

(5) Die Menge $e(G)$ hat das logische Attribut$_1$ R^1_2 in $M \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a mit existentiellem Gehalt gilt:
$e(a)$ liegt nicht in $e(G)$; d.h. g.d.w. alle relativ zu D existierenden Einzeldinge nicht in $e(G)$ liegen

b. Das zweite Verfahren. Dagegen besteht das zweite Verfahren darin, anzugeben, welche Menge zweiter Stufe ein logisches Attribut$_1$ ist. So können die beiden logischen Attribute$_1$ R^1_1 und R^1_2 wie folgt als bestimmte Mengen von Teilmengen X des *Domains* D von einem IODMB M verstanden werden:

R^1_1 = die Menge aller Teilmengen von D, welche die Extensionen von allen singulären Termen mit existentiellem Gehalt enthalten (d.i. nichts anderes als die Menge aller Teilmengen von D, welche Obermenge des inneren *Domains* sind)

D.h.:

$$R^1_1 = \{X |\ X \subseteq D \ \& \text{ für alle singulären Terme } a \text{ gilt } (e(a) \in D_I \Rightarrow e(a) \in X)\} = \{X |\ X \subseteq D \ \& \ X \supseteq D_I\}$$

Weiters:

$R_2^1 =$ die Menge aller Teilmengen von D, welche die Extensionen von allen singulären Termen mit existentiellem Gehalt nicht enthalten (d.i. nichts anderes als die Menge aller Teilmengen von D, welche Untermenge des äußeren *Domains* sind)

D.h.:

$R_2^1 = \{X \mid X \subseteq D$ & für alle singulären Terme a gilt $(e(a) \in D_I \Rightarrow e(a) \notin X)\} = \{X \mid X \subseteq D \;\&\; X \subseteq D_O\}$

Beide Verfahren, die hier ja nur hinsichtlich der beiden einfachen Allsätze $\forall x Gx$ und $\forall x \neg Gx$ erläutert wurden, werden im folgenden für alle Allsätze in pränexer Normalform verallgemeinert (siehe die beiden nachstehenden Abschnitte).

c. Das Haben von logischen Attributen$_1$. Im folgenden wird die Extension von $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$ bei e, d.i. der Sachverhalt$_1$

(1) $\langle R_k^m, \langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle\rangle$,

rekursiv definiert. Dazu schlage ich ein Verfahren vor, wodurch man zu jedem *Allsatz* $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$ das entsprechende k-te m-stellige logische Attribut$_1$ R_k^m konstruieren kann (mit $i, k, m = 1, 2 \ldots$). Es wird dabei angenommen, daß dieser Allsatz in primitiver Notation ist (also in pränexer Normalform ist) und daß weiters darin m komplexe n-stellige generelle Terme (nicht notwendigerweise verschieden voneinander und mit variablem n) vorkommen. Da

(2) $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$

in pränexer Normalform ist, kann (2) wie folgt angeschrieben werden:

(3) $\forall x_i(\neg)\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1 A^-[G_{\overline{m}}]$

Das eingeklammerte Negationszeichen zeigt null oder ein Vorkommen[44] desselben an, und weiters ist

[44] *Vereinfachungskonvention*: Wenn die Anzahl von Negationszeichen, welche zwischen zwei Allquantoren vorkommen, gerade ist, dann wird sie auf null reduziert, und wenn sie ungerade ist, dann auf eins.

(4) $\quad A^{-}[G_{\overline{m}}]$

die verbleibende offene Formel ohne Quantoren (mit zumindest x_i als freier Individuenvariable und höchstens i verschiedenen Individuenvariablen). Ersetze nun simultan die voneinander verschiedenen Individuenvariablen $x_1, x_2, \ldots, x_i$ aus der offenen Formel $A^{-}[G_{\overline{m}}]$ durch die untereinander verschiedenen singulären Terme $a_1, a_2, \ldots, a_i$. Letztere müssen außerdem alle verschieden von etwaigen singulären Termen aus $A^{-}[G_{\overline{m}}]$ sein. D.h. bilde den quantorenfreien *Satz*

(5) $\quad A^{-}[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, a_2/x_2, \ldots, a_i/x_i) = A^{\circ}$,

so daß diese Bedingungen erfüllt sind. Der Satz A° kann dann nur eine der folgenden Formen haben:

(i) A° hat die Form $G^n_{\Delta y} a_1 \ldots a_n$ (d.i. eine geschlossene Prädikation) oder
(ii) A° hat die Form $\neg B$ (d.i. ein Negationssatz) oder
(iii) A° hat die Form $B \wedge C$ (d.i. ein Konjunktionssatz)

Dann ist $e(A^{\circ})$ – wegen §4.3.3(1)–(5) – bereits wie folgt definiert:

ad (i) Wenn A° die Form $G^n_{\Delta y} a_1 \ldots a_n$ hat, dann gilt wegen der Klausel §4.3.3(3) und der Tatsache, daß in $G^n_{\Delta y}$ keine Quantoren vorkommen, daß:
$e(A^{\circ}) = \langle \in, \langle e(a_1), \ldots, e(a_n) \rangle, e(G^n_{\Delta y}) \rangle$

ad (ii) Wenn A° die Form $\neg B$ hat, dann gilt wegen der Klausel §4.3.3(4) und der Tatsache, daß in A° keine Quantoren vorkommen, daß:
$e(A^{\circ}) = \langle \text{NICHT}, e(B) \rangle$

ad (iii) Wenn A° die Form $B \wedge C$ hat, dann gilt wegen der Klausel §4.3.3(5) und nochmals wegen der Tatsache, daß in A° keine Quantoren vorkommen, daß:
$e(A^{\circ}) = \langle \text{UND}, \{e(A), e(B)\} \rangle$

Die einfachsten logischen Attribute$_1$ sind jene Attribute, welche in den Extensionen der Allsätze mit nur einem Quantor enthalten sind. Sie können durch die schon definierten Extensionen der *quantorenfreien* Sätze $A^{-}[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)$ wie folgt definiert werden:

($\mathrm{R}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{j}}$) Das geordnete m-Tupel von Mengen $\langle e(G_1), \dots, e(G_m)\rangle$ hat das R^m_j-Attribut$_1$ in $M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle \Leftrightarrow$ für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$ $e(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1))$ besteht in $M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle)$

Die Extensionen der Allsätze mit nur einem Quantor sind demnach:

(6) Wenn $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$ die Form $\forall x_1(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)(x_1/a_1))$ hat, dann $e(\forall x_i A[G_{\overline{m}}]) = \langle R^m_j, \langle e(G_1), \dots, e(G_m)\rangle\rangle$ (mit $j = 1, 2, \dots$)

Ein illustratives *Beispiel* mag hilfreich sein. Wegen der Definitionen (i) des Bestehens eines Sachverhalts$_1$ sowie (ii) einer Extensionsfunktion und weiters (iii) der Klausel ($\mathrm{R}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{j}}$) gilt folgendes: für alle singulären Terme a_2 gilt:

(7) $e(\forall x_1(G_1x_1 \wedge G_2a_2))$ besteht in $M \Leftrightarrow_{\text{(ii)}}$
$\langle R^2_1, \langle e(G_1), e(G_2)\rangle\rangle$ besteht in $M \Leftrightarrow_{\text{(i)}}$
das geordnete Paar von Mengen $\langle e(G_1), e(G_2)\rangle$
hat das R^2_1-Attribut$_1$ in $M \Leftrightarrow_{\text{(iii)}}$
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(G_1a_1 \wedge G_2a_2)$ besteht in $M) \Leftrightarrow_{\text{(i),(ii)}}$
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(a_1) \in e(G_1)$ und $e(a_2) \in e(G_2))$

Wegen (7) gilt folgendes: für alle singulären Terme a_2 gilt:

(8) $e(\forall x_1(G_1x_1 \wedge G_2a_2))$ besteht in $M \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(a_1) \in e(G_1)$ und $e(a_2) \in e(G_2))$

Schließlich wird im nachstehenden *Konstruktionsschema* für das k-te m-stellige logische Attribut$_1$ R^m_k der objektsprachliche Satz

(9) $\forall x_i(\neg)\forall x_{i-1}(\neg)\dots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \dots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \dots, x_i/a_i))$

durch folgenden metasprachlichen Ausdruck übersetzt:

(10) Für alle singulären Terme a_i gilt $(e(a_i) \in D_I \Rightarrow$
(nicht)[45] $e(\forall x_{i-1}(\neg) \ldots (\neg)\forall x_1$
$(A^{-}[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_{i-1}/a_{i-1})))$
besteht in $M)$

Also:

($\mathrm{R}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}}$) Das geordnete m-Tupel von Mengen $\langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle$
hat das R_k^m-Attribut$_1$ in $M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a_i gilt $(e(a_i) \in D_I \Rightarrow$
(nicht) $e(\forall x_{i-1}(\neg) \ldots (\neg)\forall x_1$
$(A^{-}[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_{i-1}/a_{i-1})))$
besteht in $M)$

Die Extension eines Allsatzes mit i Quantoren ist demnach:

(11) Wenn $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$ die Form
$\forall x_i(\neg)\forall x_{i-1}(\neg) \ldots (\neg)\forall x_1$
$(A^{-}[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_i/a_i))$ hat, dann
$e(\forall x_i A[G_{\overline{m}}]) = \langle R_k^m, \langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle\rangle$

Wiederum mag ein illustrierendes *Beispiel* hilfreich sein. Wegen der Definitionen (i) des Bestehens eines Sachverhalts$_1$ sowie (ii) einer Extensionsfunktion und weiters (iii) der Klausel ($\mathrm{R}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}}$) gilt folgendes: für alle singulären Terme a_2 gilt:

(12) $e(\forall x_2 \forall x_1(G_1 x_1 \wedge G_2 x_2))$ besteht in $M \Leftrightarrow_{\text{(ii)}}$
$\langle R_2^2, \langle e(G_1), e(G_2)\rangle\rangle$ besteht in $M \Leftrightarrow_{\text{(i)}}$
das geordnete Paar von Mengen $\langle e(G_1), e(G_2)\rangle$
hat das R_2^2-Attribut$_1$ in $M \Leftrightarrow_{\text{(iii)}}$
für alle singulären Terme a_2 gilt $(e(a_2) \in D_I \Rightarrow$
$e(\forall x_1(G_1 x_1 \wedge G_2 a_2))$ besteht in $M) \Leftrightarrow_{(8)}$
für alle singulären Terme a_2 gilt $(e(a_2) \in D_I \Rightarrow$
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(a_1) \in e(G_1)$ und $e(a_2) \in e(G_2)))$

[45] Die eingeklammerten Vorkommen von ‘nicht’ zeigen hier, je nachdem, ob der objektsprachliche Allsatz in primitiver Notation (also in pränexer Normalform) an den entsprechenden Stellen null oder ein Vorkommen des Negationszeichens hat, null oder ein Vorkommen desselben an.

d. Logische Attribute$_1$ als Mengen zweiter Stufe. Weiters können gemäß einer mengentheoretischen Sichtweise logische Attribute$_1$ als bestimmte Mengen *zweiter Stufe* verstanden werden. So werden etwa die beiden einstelligen logischen Attribute$_1$ R_1^1 und R_2^1, welche in den Extensionen

(1) $\langle R_1^1, e(G_{\Delta y}^1)\rangle$

und

(2) $\langle R_2^1, e(G_{\Delta y}^1)\rangle$

der beiden Allsätze

(3) $\forall x_1 G_{\Delta y}^1 x_1$

und

(4) $\forall x_1 \neg G_{\Delta y}^1 x_1$

der Form $\forall x_1(A^-[G_{\bar{1}}](a_1/x_1)(x_1/a_1))$ enthalten sind, hier wie folgt aufgefaßt:

(R_1^1) Die Menge $e(G_{\Delta y}^1)$ hat das R_1^1-Attribut$_1$ in
$M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(G_{\Delta y}^1 a_1)$ besteht in $M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle)$;
d.h. g.d.w.
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(a_1) \in e(G_{\Delta y}^1))$

Und

(R_2^1) Die Menge $e(G_{\Delta y}^1)$ hat das R_2^1-Attribut$_1$ in
$M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(\neg G_{\Delta y}^1 a_1)$ besteht in $M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle)$;
d.h. g.d.w.
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(a_1) \notin e(G_{\Delta y}^1))$

Demnach können die beiden logischen Attribute$_1$ R^1_1 und R^1_2 wie folgt als bestimmte Mengen von Teilmengen X des *Domains* D von einem IODMB M verstanden werden:

(5) $R^1_1 = \{X|\ X \subseteq D\ \&$ für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow e(a_1) \in X)\} = \{X|\ X \subseteq D\ \&\ X \supseteq D_I\}$

und

(6) $R^1_2 = \{X|\ X \subseteq D\ \&$ für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow e(a_1) \notin X)\} = \{X|\ X \subseteq D\ \&\ X \subseteq D_O\}$

Es gilt dann folgendes:

(7) $e(G^1_{\Delta y})$ hat das R^1_1-Attribut$_1$ in $M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle \Leftrightarrow$
$e(G^1_{\Delta y}) \in R^1_1$ (d.h. $e(G^1_{\Delta y}) \supseteq D_I$)

(8) $e(G^1_{\Delta y})$ hat das R^1_2-Attribut$_1$ in $M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle \Leftrightarrow$
$e(G^1_{\Delta y}) \in R^1_2$ (d.h. $e(G^1_{\Delta y}) \subseteq D_O$)[46]

Diese Sichtweise von logischen Attributen$_1$ als bestimmte Mengen zweiter Stufe kann leicht für das k-te m-stellige logische Attribut$_1$ R^m_k verallgemeinert werden. Betrachte dazu einen objektsprachlichen Allsatz

(9) $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$

der Form

(10) $\forall x_i(\neg)\forall x_{i-1}(\neg)\dots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\dots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\dots,x_i/a_i))$

Dieser Allsatz kann wie folgt in unsere Metasprache übersetzt werden:

[46] Demnach können alle einstelligen logischen Attribute$_1$ von den Extensionen der komplexen einstelligen generellen Terme auf diese beiden Mengen zweiter Stufe R^1_1 und R^1_2 reduziert werden.

(11) Für alle singulären Terme a_i gilt $(e(a_i) \in D_I \Rightarrow$
(nicht) für alle singulären Terme a_{i-1} gilt $(e(a_{i-1}) \in D_I \Rightarrow$
(nicht) ... (nicht)
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i))$ besteht in
$M = \langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle) \ldots))$

Der quantorenfreie (objektsprachliche) Satz

(12) $A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)$

aus (11) wird nun umgeformt, indem jede Prädikation der Form

(13) $G^n_{\Delta y} a_1 \ldots a_n$

sowie jede außen-negierte Prädikation der Form

(14) $\neg G^n_{\Delta y} a_1 \ldots a_n$

aus (12) durch Ausdrücke der folgenden Formen ersetzt werden:

(15) $\langle e(a_1), \ldots, e(a_n)\rangle \in X^n$

(16) $\langle e(a_1), \ldots, e(a_n)\rangle \notin X^n$,

wobei $X^n \subseteq D^n$. Weiters werden die in (12) verbliebenen Junktoren $\neg$ bzw. $\wedge$ durch 'nicht' bzw. 'und' übersetzt. Ich bezeichne dann das Resultat dieser Ersetzungen durch:

(17) $A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)\ /\ X_1, \ldots, X_m$,

wobei für alle l mit $1 \leq l \leq m$ und alle $n = 1, 2 \ldots$ folgendes gelten soll:

(18) $X_l \subseteq D^n \Leftrightarrow e(G_l) \subseteq D^n$

Man kann dann das k-te m-stellige logische Attribut$_1$ wie folgt als Menge zweiter Stufe definieren:

(19) $R_k^m = \{\langle X_1, \ldots, X_m \rangle |\ X_1 \subseteq D^{n_1}\ \& \ldots \&\ X_m \subseteq D^{n_m}\ \&$
für alle singulären Terme a_i gilt
$(e(a_i) \in D_I \Rightarrow$
(nicht) für alle singulären Terme a_{i-1} gilt
$(e(a_{i-1}) \in D_I \Rightarrow$
(nicht) ... (nicht) für alle singulären Terme a_1 gilt
$(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)\ /\ X_1, \ldots, X_m) \ldots))\}$

Auf diese Weise kann die Formulierung 'das geordnete m-Tupel von Mengen $\langle e(G_1), \ldots, e(G_m) \rangle$ hat das R_k^m-Attribut$_1$ in $M = \langle\langle D_I, D_O, f \rangle, g \rangle$' als eine *Prädikation zweiter Stufe* wie folgt verstanden werden:

(20) Das geordnete m-Tupel von Mengen $\langle e(G_1), \ldots, e(G_m) \rangle$
hat das R_k^m-Attribut$_1$ in $M = \langle\langle D_I, D_O, f \rangle, g \rangle \Leftrightarrow$
$\langle e(G_1), \ldots, e(G_m) \rangle \in R_k^m$

Demnach erweisen sich unsere Beispiele (7) und (8) als Spezialfälle dieser allgemeinen Konstruktion von logischen Attributen$_1$.

Als ein weiteres Beispiel sei hier noch die Allzukommens-Relation der assertorischen Syllogistik angeführt, wie man sie in der kategorischen Satzform 'G_2 kommt allen G_1 zu' vorfindet. Diese Relation erfaßt die gesamte logische Struktur einer solchen Satzform und kann im Rahmen der vorliegenden Theorie der logischen Attribute$_1$ wie folgt definiert werden: Das geordnete Paar von Mengen $\langle e(G_1), e(G_2) \rangle$ hat das Allzukommens-Attribut$_1$ g.d.w. $\langle e(G_1), e(G_2) \rangle \in \{\langle X_1, X_2 \rangle |$ $X_1, X_2 \subseteq D$ & für alle singulären Terme a_1 gilt (wenn $e(a_1) \in D_I$, dann ist es nicht der Fall, daß $e(a_1) \in X_1$ und $e(a_1) \notin X_2)\}$. Intuitiv gesprochen, hat also das geordnete Paar, welches aus den Extensionen der beiden einstelligen generellen Terme G_1, G_2 gebildet wird, das Allzukommens-Attribut$_1$ g.d.w. es nicht der Fall ist, daß die Extensionen aller singulären Terme mit existentiellem Gehalt zwar in der Extension des ersten generellen Terms G_1 liegen, aber nicht in der Extension des zweiten generellen Terms G_2 liegen. Ich verstehe deshalb die vier Zukommens-Relationen der assertorischen Syllogistik so, daß es sich hierbei um ganz bestimmte Mengen zweiter Stufe handelt. Diese Auffassung bildet die intuitive Grundlage meiner Theorie der logischen Attribute$_1$, in der nicht nur jene vier Zukommens-Relationen als solche Mengen zweiter Stufe definiert werden können, sondern überhaupt *alle* logischen Attribute$_1$, welche die gesamte logische Struktur von Allsätzen in pränexer Normalform erfassen.

Die folgenden drei *Identitätskriterien* für logische Attribute$_1$, welche sich auf objektsprachliche Allsätze in primitiver Notation beziehen, erleichtern dabei im Einzelfall die Überprüfung auf Identität:

(IKA$_1$) Wenn sich die beiden metasprachlichen Übersetzungen von zwei objektsprachlichen Allsätzen mit i Quantoren und m komplexen n-stelligen generellen Termen nur in zwei singulären Termen s_1 und s_2 für *identische* Sachverhalte$_1$ voneinander unterscheiden, dann sind die beiden durch jene Übersetzungen definierten logischen Attribute$_1$ identisch.

(IKA$_2$) Wenn zwei metasprachliche Übersetzungen von zwei objektsprachlichen Allsätzen mit i Quantoren und m komplexen n-stelligen generellen Termen *deduktiv äquivalent* sind, dann sind die beiden durch jene Übersetzungen definierten logischen Attribute$_1$ identisch.

(IKA$_3$) Wenn zwei objektsprachliche Allsätze mit i Quantoren und m komplexen n-stelligen generellen Termen dieselbe *syntaktische Struktur* haben (d.h. dieselbe Abfolge von Quantoren, Junktoren, Individuenvariablen, singulären Termen, komplexen n-stelligen generellen Termen und Klammern haben), dann sind die beiden durch ihre metasprachlichen Übersetzungen definierten logischen Attribute$_1$ identisch.

4.3.5 Semantische Begriffe$_2$

Nun ist die erste Sachverhaltssemantik soweit aufgebaut, daß man darin einen Wahrheitsbegriff und weitere semantische Begriffe einführen kann:

(Df.W$_2$) $\models^2_M S$ (d.h. ein Satz S ist *wahr*$_2$ in einem IODMB M)
:$\Leftrightarrow$
es gibt einen Sachverhalt$_1$ s, so daß gilt:
$e(S) = s$ und s besteht in M

(Df.LW$_2$) $\models_2 S$ (d.h. ein Satz S ist *logisch wahr*$_2$) $:\Leftrightarrow$
für alle IODMB M gilt: $\models^2_M S$

(Df.LÄ$_2$) Zwei Sätze S_1, S_2 sind *logisch äquivalent*$_2$ $:\Leftrightarrow$
$\models_2 S_1 \leftrightarrow S_2$

4.3.6 Adäquatheitstheorem

Ich werde nun einige metalogische Resultate bezüglich der Adäquatheit beweisen.

(T3) Jedes System der positiven freien Logik, welches schwach adäquat hinsichtlich der herkömmlichen *Inner-Outer-Domain*-Wahrheitswertsemantik ist, ist auch *schwach adäquat* hinsichtlich der *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik (z.B. das PFL-System).

Das Theorem (T3) läßt sich mittels des folgenden Lemmas beweisen:

(L2) Für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ gilt: $\models_1 S \Leftrightarrow \models_2 S$

Beweis. Das Lemma (L2) wird bewiesen, indem gezeigt wird, daß folgendes für alle IODMB M und alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ gilt:

(1) $\models^1_M S \Leftrightarrow \models^2_M S$

Letzteres gilt, weil man folgendes für alle IODMB M und alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ nachweisen kann:

(2) $e(S)$ besteht in $M \Leftrightarrow \models^1_M S$

Aus (2) folgt nämlich, daß

(3) $\models^1_M S \Rightarrow e(S)$ besteht in M

Da weiters folgendes gilt:

(4) $e(S)$ besteht in $M \Rightarrow \models^2_M S$,

folgt aus (3) und (4):

(5) $\models^1_M S \Rightarrow \models^2_M S$

Außerdem folgt aus (2):

(6) $e(S)$ besteht in $M \Rightarrow \models^1_M S$

Da zudem gilt:

(7) $\models^2_M S \Rightarrow e(S)$ besteht in M,

folgt aus (7) und (6):

(8) $\models^2_M S \Rightarrow \models^1_M S$

Daher gilt (1), wenn (2) gilt (für alle M, S).

Die Behauptung (2) wird im folgenden durch Induktion über den Aufbau eines Satzes S von $\mathcal{L}_1$ bewiesen:

(a) Prädikationen

(9) $e(G^n_{\Delta y}a_1 \ldots a_n)$ besteht in $M \Leftrightarrow$
$(\langle e(a_1), \ldots, e(a_n)\rangle =)\ \langle f(a_1), \ldots, f(a_n)\rangle \in g(O_{y_1 \ldots y_n})$
$(= e(G^n_{\Delta y})) \Leftrightarrow$
$\models^1_M G^n_{\Delta y}a_1 \ldots a_n$

(b) Negationssätze
Die Induktionshypothese lautet hier:

(IH) $e(A)$ besteht in $M \Leftrightarrow \models^1_M A$

(10) $e(\neg A)$ besteht in $M \Leftrightarrow e(A)$ besteht nicht in $M \Leftrightarrow_{(\mathrm{IH})}$
nicht $\models^1_M A \Leftrightarrow \models^1_M \neg A$

(c) Konjunktionssätze
Die Induktionshypothese hier ist:

(IH) $e(A)$ und $e(B)$ bestehen in $M \Leftrightarrow \models^1_M A$ und $\models^1_M B$

(11) $e(A \wedge B)$ besteht in $M \Leftrightarrow e(A)$ und $e(B)$ bestehen in M
$\Leftrightarrow_{(\mathrm{IH})} \models^1_M A$ und $\models^1_M B \Leftrightarrow \models^1_M A \wedge B$

(d) Allsätze I
Wenn $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$ die Form

(12) $\quad \forall x_1(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)(x_1/a_1))$

hat, dann gilt wegen (9)–(11) folgendes: für alle singulären Terme a_1 gilt:

(13) $\quad e(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1))$ besteht in $M \Leftrightarrow\ \models^1_M A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)$

Dann gilt folgendes:

(14) $\quad e(\forall x_i A[G_{\overline{m}}])$ besteht in $M \Leftrightarrow$
$\langle R^m_j, \langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle\rangle$ besteht in $M \Leftrightarrow$
$\langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle$ hat das R^m_j-Attribut$_1$ in $M \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1))$ besteht in $M) \Leftrightarrow_{(13)}$
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$\models^1_M A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)) \Leftrightarrow$
$\models^1_M \forall x_i A[G_{\overline{m}}]$

(e) Allsätze II
Wenn $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$ die Form

(15) $\quad \forall x_i(\neg)\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_i/a_i))$

hat, dann lautet die Induktionshypothese hier: für alle singulären Terme a_i gilt:

(IH) $\quad e(\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_{i-1}/a_{i-1})))$
besteht in $M \Leftrightarrow$
$\models^1_M \forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_{i-1}/a_{i-1}))$

Dann gilt folgendes:

(16) $e(\forall x_i A[G_{\overline{m}}])$ besteht in $M \Leftrightarrow$
$\langle R^m_k, \langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle\rangle$ besteht in $M \Leftrightarrow$
$\langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle$ hat das R^m_k-Attribut$_1$ in $M \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a_i gilt $(e(a_i) \in D_I \Rightarrow$
(nicht) $e(\forall x_{i-1}(\neg) \ldots (\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_{i-1}/a_{i-1})))$
besteht in $M) \Leftrightarrow_{(\mathrm{IH})}$
für alle singulären Terme a_i gilt $(e(a_i) \in D_I \Rightarrow$
(nicht) $\models^1_M \forall x_{i-1}(\neg) \ldots (\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_{i-1}/a_{i-1}))) \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a_i gilt $(e(a_i) \in D_I \Rightarrow$
$\models^1_M (\neg)\forall x_{i-1}(\neg) \ldots (\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_{i-1}/a_{i-1}))) \Leftrightarrow$
$\models^1_M \forall x_i(\neg)\forall x_{i-1}(\neg) \ldots (\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_i/a_i)) \Leftrightarrow$
$\models^1_M \forall x_i A[G_{\overline{m}}]$

Wegen der Fälle (a)–(e) gilt für alle IODMB M und Sätze S von $\mathcal{L}_1$:

(17) $e(S)$ besteht in $M \Leftrightarrow \models^1_M S$

Somit folgt wegen (2)–(8), daß für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ gilt: $\models_1 S \Leftrightarrow \models_2 S$. Da schon wegen des Lemmas (L1) für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ gilt, daß: $\models_1 S \Leftrightarrow \tau(S)$ ist ein Theorem von PFL, folgt also für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$, daß: $\models_2 S \Leftrightarrow \tau(S)$ ist ein Theorem von PFL. Angenommen weiters, es gilt für irgendein System PFL$_1$ der positiven freien Logik folgendes: Für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ gilt, daß: $\models_1 S \Leftrightarrow S$ ist ein Theorem von PFL$_1$. Da ja außerdem für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ schon gilt, daß: $\models_1 S \Leftrightarrow \models_2 S$, folgt somit, daß für alle Sätze S von $\mathcal{L}_1$ gilt, daß: $\models_2 S \Leftrightarrow S$ ist ein Theorem von PFL$_1$. Deshalb gilt (T3). $\square$[47]

[47] Die vorliegende Semantik kann leicht zu einer Sachverhaltssemantik adaptiert werden, hinsichtlich derer die klassische Prädikatenlogik als schwach adäquat nachgewiesen werden kann, indem man die entsprechenden minimalen Abänderungen in der Modelldefinition vornimmt und die Existenzprämissen aus dem letzten Beweis streicht. Nach diesen Abänderungen läßt sich weiters für die klassische Prädikatenlogik ein Resultat erzielen, welches analog zum Extensionalitätstheorem von §5.2 ist.

4.4 Zusammenfassung

Es wurden zwei Semantiken für die Sprache $\mathcal{L}_1$, das ist eine volle prädikatenlogische Sprache mit leeren singulären Termen und komplexen n-stelligen generellen Termen, angegeben, nämlich eine Wahrheitswertsemantik und eine Sachverhaltssemantik. Beide Semantiken basieren auf den *Inner-Outer-Domain*-Modellen der freien Logik. Während in der Wahrheitswertsemantik die Extensionen von Sätzen offengelassen sind bzw. bei Bedarf als Wahrheitswerte verstanden werden können, sind in der Sachverhaltssemantik Sachverhalte$_1$ solche Extensionen. Es wurde weiters bewiesen, daß Lamberts PFL-System schwach adäquat hinsichtlich der *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik ist. Von den eingangs erwähnten drei Zielen sind somit noch die folgenden beiden Ziele offengeblieben:

(ii) zu zeigen, daß in dieser Semantik logisch äquivalente$_2$ Sätze nicht immer koextensional sind (womit eine der beiden hauptsächlichen Annahmen des *Slingshot*-Arguments zurückgewiesen wird),

(iii) und weiters zu beweisen, daß darin alle Sätze von $\mathcal{L}_1$ SS-extensional und somit SE-extensional sind (infolgedessen ist auch die SE-Extensionalität von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen im Rahmen einer solchen Sachverhaltssemantik sichergestellt).

Ich werde diese beiden Ziele im folgenden Kapitel ansteuern.

5 Antworten I auf das Extensionalitätsproblem

Im folgenden wird im Rahmen der ersten Sachverhaltssemantik und mit Hilfe meiner Analyse der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn eine Lösung für das Extensionalitätsproblem vorgeschlagen. Es läßt sich beweisen, daß alle Sätze von $\mathcal{L}_1$ SE-extensional$_3$ sind und deshalb auch SE-extensional$_n$ (mit $n = 1, \ldots, 4$) sind (siehe das erste Stärkediagramm aus §2.3). Folglich sind auch alle elementaren Sätze von $\mathcal{L}_1$ mit leeren singulären Termen SE-extensional$_n$.

5.1 Sachverhaltsbezogene Extensionalität

Die starke Koextensionalität$_3$-relativ-zu-e kann im Rahmen der *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik wie folgt definiert werden:

(Df.K$'_3$) $A_1 \equiv_e A_2$ (d.h. ein Ausdruck A_1 ist *stark koextensional*$_3$ *relativ zu einer Extensionsfunktion* e mit einem Ausdruck A_2) :⇔
$(\bigvee en_1)(e(A_1) = en_1)$ & $(\bigvee en_2)(e(A_2) = en_2)$ &
$(\bigwedge en_1, en_2)(e(A_1) = en_1$ & $e(A_2) = en_2 \Rightarrow en_1 = en_2)$

D.h. zwei Ausdrücke sind stark koextensional$_3$ relativ zu e g.d.w. die beiden Ausdrücke eine Extension bei e haben und was immer der eine Ausdruck zur Extension bei e hat, ist auch die Extension bei e des anderen Ausdrucks. An dieser Stelle bleibt noch offen, ob die Komplexe, welche nach (Z) (siehe §1.4) aus den Extensionen der Teilausdrücke eines Satzes zusammengesetzt sind, als abstrakte Sachverhalte philosophisch interpretiert werden. Alles, was bislang in (Df.K$'_3$) und (Z) von den Extensionen von Sätzen gesagt wurde, ist nur, daß sie eine innere Struktur haben.

Weiters fällt bei der schwachen Koextensionalität$_1$-relativ-zu-e die Bedingung weg, daß die beiden Ausdrücke eine Extension bei e haben. Beide Relationen fallen aber im Rahmen der vorliegenden Semantik zusammen, weil darin die Extensionfunktion e jedem extensionsfähigen Ausdruck eine Extension bei e zuordnet (und e somit eine totale Funktion ist). Es gilt daher hinsichtlich dieser Relation der *starken Koextensionalität*$_3$-relativ-zu-e folgendes für alle Ausdrücke A_1 und A_2 von $\mathcal{L}_1$:

(T4) $A_1 \equiv_e A_2 \Leftrightarrow e(A_1) = e(A_2)$

Beweis. Der Beweis für (T4) macht wesentlich davon Gebrauch, daß e jedem extensionsfähigen Ausdruck genau eine Entität als seine Extension zuordnet, und kann wie folgt skizziert werden:

$\Rightarrow$ Angenommen, es gilt: $A_1 \equiv_e A_2$, d.h. – wegen (Df.K$'_3$) – es gilt: $(\bigvee en_1)(e(A_1) = en_1)$ & $(\bigvee en_2)(e(A_2) = en_2)$ & $(\bigwedge en_1, en_2)(e(A_1) = en_1 \;\&\; e(A_2) = en_2 \Rightarrow en_1 = en_2)$. Es ist zu zeigen, daß: $e(A_1) = e(A_2)$. Wegen (EI) gilt nun: $e(A_1) = en'$ und $e(A_2) = en''$. Wegen (UI) gilt weiters: $e(A_1) = en' \;\&\; e(A_2) = en'' \Rightarrow en' = en''$. Wegen (MP) gilt daher: $en' = en''$. Wegen der Identitätsgesetze gilt also: $e(A_1) = e(A_2)$.

$\Leftarrow$ Angenommen, es gilt: $e(A_1) = e(A_2)$. Es ist zu zeigen, daß: $A_1 \equiv_e A_2$. Weil e total ist, gilt nun für alle extensionsfähigen Ausdrücke A_1, A_2: $(\bigvee en')(e(A_1) = en')$ und $(\bigvee en'')(e(A_2) = en'')$. Wegen (EI) gilt daher: $e(A_1) = en_1$ und $e(A_2) = en_2$. Also gilt: $en_1 = en_2$. Wegen (KB) und (UG) gilt daher: $(\bigwedge en_1, en_2)(e(A_1) = en_1 \;\&\; e(A_2) = en_2 \Rightarrow en_1 = en_2)$. Also gilt wegen (Df.K$'_3$): $A_1 \equiv_e A_2$. □

Wegen (T4) ist die schwache Koextensionalität$_1$-relativ-zu-e ebenso wie die starke Koextensionalität$_3$-relativ-zu-e eine Äquivalenzrelation.

Weiters gilt aufgrund meiner Analyse der SE-Extensionalität folgendes Theorem[48]:

(T5) Ein Satz S_1 ist SE-extensional$_3$ $\Leftrightarrow$
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2, e)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2) \;\&\; A_1 \equiv_e A_2 \Rightarrow S_1 \equiv_e S_2)$[49]

[48] Vgl. auch Leeb 2004, S.104–108.

[49] D.h. ein Satz S_1 ist SE-extensional$_3$ g.d.w. für alle Extensionsfunktionen e gilt: in S_1 sind Ausdrücke, welche relativ zu e stark koextensional$_3$ sind, immer füreinander unbeschadet$_3$ der Extension bei e substituierbar.

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_3$ g.d.w. darin koextensionale$_3$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_3$ der Extension substituierbar sind. Es werden hier die mengentheoretischen Entitäten, welche als Stellvertreter für die Extensionen von Sätzen fungieren, noch nicht philosophisch interpretiert; es wird z.B. noch nicht gesagt, ob es sich hierbei um abstrakte Sachverhalte handelt.

Wegen meiner Analyse der SV-Extensionalität gilt ferner:

(T6) Ein Satz S_1 ist non-SV-extensional$_3$ $\Leftrightarrow$
S_1 ist non-SE-extensional$_3$ oder
Wahrheitswerte sind nicht die Extensionen von Sätzen

Die Non-SV-Extensionalität$_3$ kann somit verschiedene Quellen haben: koextensionale$_3$ Ausdrücke sind nicht immer füreinander unbeschadet$_3$ der Extension substituierbar oder die mengentheoretischen Stellvertreter für die Extensionen von Sätzen werden nicht als Wahrheitswerte aufgefaßt.

Weiters kann ein sachverhaltsbezogener Extensionalitätsbegriff wie folgt definiert werden[50]:

(Df.SS$'_3$) Ein Satz S_1 ist *SS-extensional*$_3$:$\Leftrightarrow$
S_1 ist SE-extensional$_3$ &
Sachverhalte$_1$ sind die Extensionen von Sätzen

D.h. ein Satz ist SS-extensional$_3$ g.d.w. darin koextensionale$_3$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_3$ des Sachverhalts$_1$ als Extension substituierbar sind. Im Gegensatz zu (T5) wird hier festgelegt, wie die mengentheoretischen Stellvertreter für die Extensionen von Sätzen verstanden werden sollen, nämlich als abstrakte Sachverhalte$_1$ (gemäß (S) aus §1.4).

Die vorliegende Sachverhaltssemantik widersteht nun den Herausforderungen des *Slingshot*-Arguments, weil in ihr das Prinzip nicht gilt, daß logisch äquivalente$_2$ Sätze immer stark koextensional$_3$ (bzw. schwach koextensional$_1$) sind. Dies kann man durch viele Beispiele belegen, so etwa auch am Unterschied zwischen der *inneren* und *äußeren Negation*:

[50] Vgl. auch Leeb 2004, S.57 und 2006, S.200.

(i) $e(\Delta y F^1 y)$ ist die Menge aller $d \in D$, die in $f(F^1)$ liegen; $e((\Delta y F^1 y)a)$ ist somit der Sachverhalt$_1$, daß das Einzelding $f(a)$ in $f(F^1)$ liegt.

(ii) $e(\Delta y \neg F^1 y)$ ist die Menge aller $d \in D$, die in der Differenzmenge $D \backslash f(F^1)$ liegen; $e((\Delta y \neg F^1 y)a)$ ist somit der Sachverhalt$_1$, daß das Einzelding $f(a)$ in der Differenzmenge $D \backslash f(F^1)$ liegt. Aus diesem Grund sind die beiden Sätze $(\Delta y F^1 y)a$ und $(\Delta y \neg F^1 y)a$ *affirmativ*.

(iii) Die äußere Negation $\neg(\Delta y F^1 y)a$ hat den Sachverhalt$_1$ zur Extension, daß das Einzelding $f(a)$ *nicht* in $f(F^1)$ liegt.

(iv) Die äußere Negation $\neg(\Delta y \neg F^1 y)a$ hat dagegen den Sachverhalt$_1$ zur Extension, daß das Einzelding $f(a)$ *nicht* in der Differenzmenge $D \backslash f(F^1)$ liegt. Demnach sind die beiden Sätze $\neg(\Delta y F^1 y)a$ und $\neg(\Delta y \neg F^1 y)a$ *negativ*.

Da für alle $d \in D$ gilt: $d \in f(F^1) \Leftrightarrow d \notin D \backslash f(F^1)$, bestehen die Sachverhalte$_1$ als Extensionen der Sätze in (i) und (iv) in denselben IODMB. Sie sind folglich logisch äquivalent$_2$, obwohl sie nach dem Identitätskriterium für n-Tupel verschieden voneinander sind. (Analog verhält es sich mit den Sätzen in (ii) und (iii)).

5.2 Extensionalitätstheorem

Im folgenden wird nachgewiesen, daß alle Sätze der Sprache $\mathcal{L}_1$ sowohl SS-extensional$_3$ als auch SE-extensional$_3$ sind. Die aussagenlogischen Fälle sind dabei ziemlich einfach. Für die quantorenlogischen Fälle ist allerdings – wie sich noch zeigen wird – eines der oben genannten Identitätskriterien für logische Attribute$_1$ nützlich. Ich werde IKA$_1$ wählen, obwohl man auch IKA$_3$ nehmen könnte. Es kann dann das folgende *Extensionalitätstheorem* bewiesen werden:

(T7) In der *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik sind alle Sätze von $\mathcal{L}_1$ – trotz gestörter SV-Extensionalität$_3$ – SS-extensional$_3$ und folglich SE-extensional$_3$.

Beweis. Wegen der Annahme, daß Sachverhalte$_1$ (gemäß (S)) die Extensionen von Sätzen sind, und dem Theorem (T6) sind alle Sätze von $\mathcal{L}_1$ non-SV-extensional$_3$. Im folgenden wird durch Induktion über den Formelaufbau gezeigt, daß in jedem Satz S_1 von $\mathcal{L}_1$ Ausdrücke, welche relativ zu e stark koextensional$_3$ sind, immer füreinander unbeschadet$_3$ des Sachverhalts$_1$ als Extension bei e substituierbar sind (d.h. SS-extensional$_3$ sind). Da die Beweisidee bei den einzelnen Fällen ähnlich ist, fasse ich sie in zwei Gruppen zusammen.

(a)–(c) Prädikationen, Negations- und Konjunktionssätze
Die Induktionshypothesen für Negations- und Konjunktionssätze lauten:

(IH1) Im negierten Teilsatz eines Negationssatzes sind relativ zu e stark koextensionale$_3$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_3$ des Sachverhalts$_1$ als Extension bei e substituierbar.

(IH2) In den beiden Teilsätzen eines Konjunktionssatzes sind relativ zu e stark koextensionale$_3$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_3$ des Sachverhalts$_1$ als Extension bei e substituierbar.

Betrachte weiters die Sätze

(1) $G^n_{\Delta y} a_1 \dots a_n$

(2) $\neg A$

(3) $A_1 \wedge A_2$

und die Sachverhalte$_1$, welche (1)–(3) bei einer Extensionsfunktion e zur Extension haben:

(4) $s_1 = \langle \in, \langle e(a_1), \dots, e(a_n) \rangle, e(G^n_{\Delta y}) \rangle$

(5) $s_3 = \langle \text{NICHT}, e(A) \rangle$

(6) $s_5 = \langle \text{UND}, \{e(A_1), e(A_2)\} \rangle$

Ersetze nun einige Teilausdrücke von (1) sowie von A in (2) und von A_1 und A_2 in (3) durch relativ zu e stark koextensionale$_3$ Ausdrücke. Weiters bezeichne ich die betreffenden Ersetzungsergebnisse durch folgende Ausdrücke:

(7) $H^n_{\Delta y} b_1 \dots b_n$
(8) $\neg B$
(9) $B_1 \wedge B_2$

Betrachte weiters die Sachverhalte$_1$, welche (7)–(9) zur Extension bei e haben:

(10) $s_2 = \langle \in, \langle e(b_1), \dots, e(b_n) \rangle, e(H^n_{\Delta y}) \rangle$
(11) $s_4 = \langle \text{NICHT}, e(B) \rangle$
(12) $s_6 = \langle \text{UND}, \{e(B_1), e(B_2)\} \rangle$

Da in der vorliegenden Semantik die Relation der Koextensionalität$_3$ $\equiv_e$ eine Äquivalenzrelation ist sowie wegen (T4), (IH1), (IH2) und den obigen Koextensionalitätsannahmen gilt folgendes:

(13) $e(G^n_{\Delta y}) = e(H^n_{\Delta y})$ & $e(a_1) = e(b_1)$ & … & $e(a_n) = e(b_n)$
(14) $e(A) = e(B)$
(15) $e(A_1) = e(B_1)$ & $e(A_2) = e(B_2)$

Demnach sind die Sachverhalte$_1$ s_1, s_2 sowie s_3, s_4 und s_5, s_6 aus identischen Bestandteilen zusammengesetzt. Da es sich weiters bei (1) und (7) um Prädikationen handelt sowie bei (2) und (8) um Negationssätze und bei (3) und (9) um Konjunktionssätze, wird der Wahrheitswert der betreffenden Paare von Sätzen auf dieselbe Weise bestimmt (d.h. haben die betreffenden Paare von Sätzen dieselbe logische Form). Es werden also jene identischen Bestandteile in den Sachverhalten$_1$ s_1, s_2 sowie s_3, s_4 und s_5, s_6 auf identische Weise (gemäß (S)) zusammengesetzt. Jene geordneten n-Tupel sind demnach aus denselben Elementen aufgebaut, welche auf dieselbe Weise angeordnet sind. Folglich sind sie nach dem Identitätskriterium für solche geordnete n-Tupel identisch:

(16) $s_1 = s_2$
(17) $s_3 = s_4$
(18) $s_5 = s_6$

Wegen (T4) gilt somit folgendes:

(19) $G^n_{\Delta y} a_1 \dots a_n \equiv_e H^n_{\Delta y} b_1 \dots b_n$
(20) $\neg A \equiv_e \neg B$
(21) $A_1 \wedge A_2 \equiv_e B_1 \wedge B_2$

Wegen der Fälle (a)–(c) gilt daher, daß in Prädikationen sowie Negations- und Konjunktionssätzen relativ zu e stark koextensionale$_3$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_3$ des Sachverhalts$_1$ als Extension bei e substituierbar sind.

(d)–(e) Allsätze I und II
Die Induktionshypothese für die Allsätze II lautet:

(IH) In Allsätzen II mit $i - 1$ Quantoren und m komplexen n-stelligen generellen Termen sind relativ zu e stark koextensionale$_3$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_3$ des Sachverhalts$_1$ als Extension bei e substituierbar.

$\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$ ist entweder ein Allsatz I, d.h. hat die Form:

(22) $\forall x_1 (A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)(x_1/a_1))$,

oder ein Allsatz II, d.h. hat die Form:

(23) $\forall x_i (\neg) \forall x_{i-1} (\neg) \dots (\neg) \forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \dots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \dots, x_i/a_i))$

Betrachte weiters die Sachverhalte$_1$, welche (22) bzw. (23) bei e zur Extension haben:

(24) $s_7 = \langle R^m_j, \langle e(G_1), \dots, e(G_m) \rangle \rangle$
(25) $s_9 = \langle R^m_k, \langle e(G_1), \dots, e(G_m) \rangle \rangle$

Weiters gilt folgendes:

(26) Das geordnete m-Tupel von Mengen $\langle e(G_1), \dots, e(G_m) \rangle$ hat das R^m_j-Attribut$_1$ in $M \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$
$e(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1))$ besteht in $M)$

Und außerdem gilt folgendes:

(27) Das geordnete m-Tupel von Mengen $\langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle$ hat das R_k^m-Attribut$_1$ in $M \Leftrightarrow$ für alle singulären Terme a_i gilt $(e(a_i) \in D_I \Rightarrow$ (nicht) $e(\forall x_{i-1}(\neg) \ldots (\neg)\forall x_1$ $(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_{i-1}/a_{i-1})))$ besteht in $M)$

Ersetze nun einige Teilausdrücke von (22) bzw. (23) durch relativ zu e stark koextensionale$_3$ Ausdrücke. Weiters bezeichne ich die Resultate $\forall x_i B[H_{\overline{m}}]$ dieser Ersetzungen durch die folgenden Ausdrücke, nämlich, wenn $\forall x_i B[H_{\overline{m}}]$ ein Allsatz I ist, durch:

(28) $\forall x_1(B^-[H_{\overline{m}}](a_1/x_1)(x_1/a_1))$,

und wenn $\forall x_i B[H_{\overline{m}}]$ ein Allsatz II ist, durch:

(29) $\forall x_i(\neg)\forall x_{i-1}(\neg) \ldots (\neg)\forall x_1$ $(B^-[H_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_i/a_i))$

Betrachte weiters die Sachverhalte$_1$, welche (28) bzw. (29) bei e zur Extension haben:

(30) $s_8 = \langle R_j^{m\prime}, \langle e(H_1), \ldots, e(H_m)\rangle\rangle$

(31) $s_{10} = \langle R_k^{m\prime}, \langle e(H_1), \ldots, e(H_m)\rangle\rangle$

Weiters gilt folgendes:

(32) Das geordnete m-Tupel von Mengen $\langle e(H_1), \ldots, e(H_m)\rangle$ hat das $R_j^{m\prime}$-Attribut$_1$ in $M \Leftrightarrow$ für alle singulären Terme a_1 gilt $(e(a_1) \in D_I \Rightarrow$ $e(B^-[H_{\overline{m}}](a_1/x_1))$ besteht in $M)$

Und zudem gilt:

(33) Das geordnete m-Tupel von Mengen $\langle e(H_1), \ldots, e(H_m)\rangle$ hat das $R_k^{m\prime}$-Attribut$_1$ in $M \Leftrightarrow$ für alle singulären Terme a_i gilt $(e(a_i) \in D_I \Rightarrow$ (nicht) $e(\forall x_{i-1}(\neg) \ldots (\neg)\forall x_1$ $(B^-[H_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_{i-1}/a_{i-1})))$ besteht in $M)$

Wegen (T4) folgt aus den obigen Koextensionalitätsannahmen:

(34) $e(G_1) = e(H_1)$ & ... & $e(G_m) = e(H_m)$

Da sich, wenn $\forall x_i B[H_{\overline{m}}]$ ein Allsatz I ist, die *quantorenfreien* Sätze

(35) $A^{-}[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)$

und

(36) $B^{-}[H_{\overline{m}}](a_1/x_1)$

nur in relativ zu e stark koextensionalen$_3$ Ausdrücken voneinander unterscheiden, gilt folgendes wegen der Fälle (a)–(c): für alle singulären Terme a_1 gilt:

(37) $e(A^{-}[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)) = e(B^{-}[H_{\overline{m}}](a_1/x_1))$

Weiters, wenn $\forall x_i B[H_{\overline{m}}]$ ein Allsatz II, folgt wegen (T4) und (IH) aus den obigen Koextensionalitätsannahmen, daß für alle singulären Terme a_i gilt:

(38) $e(\forall x_{i-1}(\neg)\dots(\neg)\forall x_1$
$(A^{-}[G_{\overline{m}}](a_1/x_1\dots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\dots,x_{i-1}/a_{i-1}))) =$
$e(\forall x_{i-1}(\neg)\dots(\neg)\forall x_1$
$(B^{-}[H_{\overline{m}}](a_1/x_1,\dots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\dots,x_{i-1}/a_{i-1})))$

D.h. in beiden Fällen erweisen sich die Sachverhalte$_1$ in (37) bzw. (38) als identisch. Es folgt somit aus (26), (32) und (37) wegen des Identitätskriteriums (IKA$_1$), daß:

(39) $R^m_j = R^{m\prime}_j$

Weiters folgt aus (27), (33) und (38) wegen (IKA$_1$), daß:

(40) $R^m_k = R^{m\prime}_k$

Wegen (39) und (34) – sowie (40) und (34) – sind die Sachverhalte$_1$ s_7 und s_8 – sowie s_9 und s_{10} – aus identischen Bestandteilen zusammengesetzt. Da (22) und (28) Allsätze I mit einem Quantor sind – sowie (23) und (29) Allsätze II mit i Quantoren sind – haben (22) und (28) – sowie (23) und (29) – dieselbe logische Form. Es werden daher jene identischen Bestandteile in den Sachverhalten$_1$ s_7, s_8 und s_9, s_{10} auf identische Weise (gemäß (S)) zusammengesetzt. Jene geordneten n-Tupel sind demzufolge aus denselben Elementen aufgebaut, welche auf dieselbe Weise angeordnet sind. Aufgrund des Identitätskriteriums für geordnete n-Tupel folgt also:

(41) $s_7 = s_8$

(42) $s_9 = s_{10}$

Es folgt also wegen (T4):

(43) $\forall x_i A[G_{\overline{m}}] \equiv_e \forall x_i B[H_{\overline{m}}]$

Wegen der Fälle (a)–(e) sind in allen Sätzen S_1 von $\mathcal{L}_1$ relativ zu e stark koextensionale$_3$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_3$ des Sachverhalts$_1$ als Extension bei e substituierbar (für alle Extensionsfunktionen e). Deshalb sind alle Sätze S_1 von $\mathcal{L}_1$ SS-extensional$_3$ und folglich wegen (Df.SS$'_3$) auch SE-extensional$_3$. Es gilt also das Theorem (T7). □

Da gemäß dem ersten Stärkediagramm (siehe §2.3) die SE-Extensionalität$_3$ die stärkste aller Eigenschaften der SE-Extensionalität ist, haben also alle Sätze von $\mathcal{L}_1$ auch alle schwächeren Eigenschaften der SE-Extensionalität$_n$ (mit $n = 1, \ldots, 4$).

5.3 Schlußfolgerungen

Unter welchen Bedingungen ist – im Rahmen der ersten Sachverhaltssemantik und meiner Analyse der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn – die SE-Extensionalität$_3$ von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen sichergestellt worden? Eine grundlegende Annahme dieser Semantik ist, daß leere singuläre Terme eine Extension haben, nämlich ein Element aus dem äußeren *Domain*, d.i. ein relativ zum *Domain* nicht-existierendes Einzelding. Die Extensionsfunktion e, welche durch ein IODMB M eindeutig bestimmt wird, schließt deshalb alle Extensionslücken. Sie ist nämlich eine totale Funktion, welche jedem extensionsfähigen Ausdruck auch tatsächlich eine Extension zuordnet. Diese Extensionsfunktion ordnet (gemäß

(Z) aus §1.4) jedem Satz eine mengentheoretische Entität zu, welche aus den Extensionen seiner Teilausdrücke zusammengesetzt ist. Nach (S) werden diese strukturierten mengentheoretischen Entitäten als abstrakte Sachverhalte$_1$ aufgefaßt. Da die Extensionsfunktion e eine totale Funktion ist, fallen die schwache Koextensionalität$_1$-relativ-zu-e und die starke Koextensionalität$_3$-relativ-zu-e zusammen und die schwache Koextensionalität$_1$ ist ebenso wie die starke Koextensionalität$_3$ eine Äquivalenzrelation. Eben weil die Koextensionalität$_3$ hier eine solche Äquivalenzrelation ist, läßt sich im obigen Induktionsbeweis sehr geradlinig zeigen, daß in jedem Satz relativ zu e stark koextensionale$_3$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_3$ des Sachverhalts$_1$ als Extension bei e substituierbar sind. Alle Sätze von $\mathcal{L}_1$ sind somit SS-extensional$_3$ und folglich – wegen (Df.SS$'_3$) – auch SE-extensional$_3$. Also sind auch alle elementaren Sätze von $\mathcal{L}_1$ mit leeren singulären Termen SE-extensional$_3$. Damit kann man die Bedingungen, unter denen hier die SE-Extensionalität$_3$ von allen Sätzen von $\mathcal{L}_1$ sichergestellt ist, wie folgt angeben:

(i) Leere singuläre Terme haben (in der *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik) eine Extension, nämlich ein Element aus dem äußeren *Domain*, d.i. ein relativ zum *Domain* nicht-existierendes Einzelding.

(ii) Die Extensionsfunktion e ist total, wodurch Extensionslücken geschlossen werden.

(iii) Die Relation der starken Koextensionalität$_3$-relativ-zu-e wird vorausgesetzt.

(iv) Das Theorem (T4) erweist diese Relation als eine Äquivalenzrelation.

(v) Die Zusammensetzungsthese (Z) und die These (S), wonach Sachverhalte$_1$ die Extensionen von Sätzen sind, werden statt der These (W), wonach Wahrheitswerte solche Extensionen sind, angenommen.

(vi) Die Definitionen (Df.SS$'_3$) der SS-Extensionalität$_3$ sowie (Df.SE$'_3$) der SE-Extensionalität$_3$ werden vorausgesetzt.

Weiters haben wir gesehen, daß es mehrere Quellen nicht nur für die Non-SV-Extensionalität$_3$, sondern auch für die SE-Extensionalität$_3$ gibt: Ein elementarer Satz mit leeren singulären Termen kann SE-extensional$_3$ sein dank seiner SS-Extensionalität$_3$ oder dank seiner SV-Extensionalität$_3$. Weiters schließt seine Non-SV-Extensionalität$_3$ nicht zwingend seine SE-Extensionalität$_3$ aus, solange man beweisen kann, daß er SS-extensional$_3$ ist. Die freie Logik mag also angesichts von Lamberts NEA im Sinn von (T6) non-SV-extensional$_3$ sein, aber sie ist, was ich in diesem Kapitel zeigen wollte, dennoch SE-extensional$_3$. Im Rahmen der vorliegenden Sachverhaltssemantik sind nämlich Sachverhalte$_1$ als die Extensionen von allen Sätzen von $\mathcal{L}_1$ zulässig (im Sinn von (Df.ZE) aus §1.1), und zwar weil sie sich wegen der Annahme, daß Sachverhalte$_1$ ihre Extensionen sind, als SS-extensional$_3$ und damit auch als SE-extensional$_3$ erweisen.

Es ist allerdings noch die Aufgabe offengeblieben, die SE-Extensionalität auch im Rahmen einer Einzel-*Domain*-Sachverhaltssemantik wie etwa der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik aus §6.3 zu untersuchen. Es wird sich in §7 zeigen, daß die Antworten auf das Extensionalitätsproblem in einer solchen Semantik sehr viel differenzierter ausfallen.

6 Superbewertungs-Semantiken

Im folgenden arbeite ich die Details einer Superbewertungs-Sachverhaltssemantik für die positive freie Logik aus, welche gemäß dem zweiten Ansatz zur Entwicklung von Sachverhaltssemantiken entworfen wird (siehe §3). Ich ziele dabei mit der Entwicklung einer solchen Sachverhaltssemantik auf die Erfüllung von mehreren Aufgaben ab:

(i) Zunächst einmal ist sie so zu gestalten, daß logisch äquivalente Sätze nicht immer koextensional sind (was die Bedrohung durch das *Slingshot*-Argument abwendet).

(ii) Weiters werde ich sie so konzipieren, daß das klassische Prinzip der Termabstraktion nicht gültig ist (was dem NEA von Lambert seine Schlagkraft nimmt).

(iii) Ferner werde ich beweisen, daß jedes System für die positive freie Logik, welches schwach adäquat hinsichtlich der herkömmlichen Superbewertungs-Wahrheitswertsemantik ist, es auch hinsichtlich dieser Sachverhaltssemantik ist.

(iv) Schließlich soll damit eine materiale Grundlage für eine weitere Lösung des Extensionalitätsproblems sowie die Analyse des NEA geschaffen werden.

Das Kapitel 6 ähnelt in vielerlei Hinsicht dem früheren Kapitel 4, weshalb ich mich hier kürzer halten kann und besonders auf die Abweichungen und Unterschiede konzentrieren werde.

6.1 Syntax von $\mathcal{L}_2$

Im folgenden gebe ich zunächst das Alphabet und die Formationsregeln der Teilsprache $\mathcal{L}_2$ von $\mathcal{L}_1$ für die positive freie Logik an. $\mathcal{L}_2$ unterscheidet sich von $\mathcal{L}_1$ hauptsächlich darin, daß $\mathcal{L}_2$ weniger komplexe n-stellige generelle Terme enthält als $\mathcal{L}_1$.

Das *Alphabet* von $\mathcal{L}_2$ ist identisch mit demjenigen von $\mathcal{L}_1$. Die *Individuenausdrücke* sind wieder die singulären Terme und die Individuenvariablen. Die *Formationsregeln* von $\mathcal{L}_2$ sind dieselben wie diejenigen von $\mathcal{L}_1$, allerdings mit einer Ausnahme. Die bisherige Klausel (2) wird durch die folgende Klausel ersetzt:

(2′) Wenn $O_{y_1 \dots y_n}$ eine homogene Formel ist mit $y_1, \dots, y_n$ als den einzigen Individuenvariablen, aber ohne Quantoren, singuläre Terme und Δ-Operatoren, jedoch mit höchstens einem Vorkommen von E! bzw. =, dann ist $\Delta y_1 \dots \Delta y_n O_{y_1 \dots y_n}$ ein komplexer n-stelliger genereller Term.

Im folgenden wird der komplexe n-stellige generelle Term $\Delta y_1 \dots \Delta y_n O_{y_1 \dots y_n}$ wieder durch $G^n_{\Delta y}$ abgekürzt und der Allsatz $\forall x_i A[G_1, \dots, G_m]$ durch $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$. Weitere Junktoren und der Existenzquantor können bei Bedarf wieder wie üblich eingeführt werden. Die *Sätze* von $\mathcal{L}_2$ sind die geschlossenen Formeln von $\mathcal{L}_2$.

Da das klassische Prinzip der Termabstraktion weder in der Superbewertungs-Wahrheitswertsemantik noch in der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik aus §6 gültig ist, muß hier die zu (Δ^-) analoge Abkürzungskonvention entfallen.

6.2 Wahrheitswertsemantik II

Im folgenden fasse ich zunächst die herkömmliche Superbewertungs-Wahrheitswertsemantik für $\mathcal{L}_2$ zusammen, um damit – ähnlich wie zuvor – eine Basis für die Entwicklung der zweiten Sachverhaltssemantik zu gewinnen.

6.2.1 Modelle und Belegungen

Wie sich die Dinge so und nicht anders verhalten, wird auch hier wieder in Modellen festgehalten, und zwar in Einzel-*Domain*-Modellen und deren klassischen Vervollständigungen.

Ein *Einzel-Domain-Modell* ist dabei ein geordnetes Paar $\langle D, f \rangle$, so daß folgendes gilt:

(1) D ist eine Menge (möglicherweise leer) und f ist eine partielle Funktion (Interpretationsfunktion), so daß folgendes gilt:

(2) für alle singulären Terme a gilt: wenn $f(a) \downarrow$ ist, dann $f(a) \in D$[51]

[51] Im folgenden kürzt '$\downarrow$' den Ausdruck 'definiert' ab und '$\uparrow$' kürzt weiters 'undefiniert' ab (wie in Antonelli 2000). Dabei heißt '$f(a)$ ist definiert' so viel wie 'f ordnet a etwas zu'. Demnach heißt dann '$f(a)$ ist undefiniert' so viel wie 'f ordnet a nichts zu'.

(3) für alle einfachen n-stelligen generellen Terme F^n gilt: $f(F^n)$ ist eine Menge von geordneten n-Tupel von Elementen aus D

(4) zu jedem $d \in D$ gibt es einen singulären Term a, so daß gilt: $f(a) = d$

Den singulären sowie einfachen n-stelligen generellen Termen werden auch hier wieder bestimmte mengentheoretische Entitäten durch solche Modelle zugeordnet, allerdings mit dem Unterschied, daß jetzt manchen singulären Termen überhaupt nichts zugeordnet werden kann.

Weiters werden den Operanden der Δ-Operatoren zur Bildung von komplexen n-stelligen generellen Termen erneut auf eine systematische Weise Mengen von geordneten n-Tupel von Einzeldingen[52] zugeordnet. So ist eine *Termoperandenbelegung* hinsichtlich eines Einzel-*Domain*-Modells $\langle D, f\rangle$ eine Funktion g, welche jeder homogenen Formel $O_{y_1 \ldots y_n}$ mit $y_1, \ldots, y_n$ als den einzigen Individuenvariablen, aber ohne Quantoren, singulären Termen und Δ-Operatoren, jedoch mit höchstens einem Vorkommen von E! bzw. = genau eine Menge von geordneten n-Tupel von Elementen aus D zuordnet (diese offenen Formeln heißen *Termoperanden* und werden mit solchen Mengen *belegt*). Wenn $O'_{y_1 \ldots y_n}$ und $O''_{y_1 \ldots y_n}$ Termoperanden mit zusammen höchstens einem Vorkommen von E! bzw. = sind, dann:

(1) $g(F^n y_1 \ldots y_n) = f(F^n)$

(2) $g(\mathrm{E!}y) = D$

(3) $g(y_1 = y_2) = \{\langle d_1, d_2\rangle \in D^2 |\ d_1 = d_2\} = I$[53]

(4) $g(\neg O'_{y_1 \ldots y_n}) = D^n \backslash g(O'_{y_1 \ldots y_n})$

(5) $g(O'_{y_1 \ldots y_n} \wedge O''_{y_1 \ldots y_n}) = g(O'_{y_1 \ldots y_n}) \cap g(O''_{y_1 \ldots y_n})$

Im folgenden wird ein Einzel-*Domain*-Modell samt seiner Termoperandenbelegung (kurz: EDMB) $\langle\langle D, f\rangle, g\rangle$ durch 'M' abgekürzt.

[52] Ein *Einzelding* zu sein, heißt hier, ein Element aus einem *Domain* D zu sein, wobei allerdings *alle* Elemente aus D als relativ zu D *existierend* verstanden werden und kein Element aus D – so wie vorhin die Elemente aus dem äußeren *Domain* – als relativ zu D nicht-existierend aufgefaßt wird.

[53] I ist die Diagonalmenge von D^2.

Ferner ist ein *klassisches Modell* ein geordnetes Paar $\langle D^*, f^*\rangle$, so daß folgendes gilt:

(1) D^* ist eine nicht-leere Menge und f^* ist eine totale Funktion (Interpretationsfunktion), so daß folgendes gilt:
(2) für alle singulären Terme a gilt: $f^*(a) \in D^*$
(3) für alle einfachen n-stelligen generellen Terme F^n gilt: $f^*(F^n)$ ist eine Menge von geordneten n-Tupel von Elementen aus D^*
(4) zu jedem $d \in D^*$ gibt es einen singulären Term a, so daß gilt: $f^*(a) = d$

Weiters ist eine *Termoperandenbelegung* hinsichtlich eines klassischen Modells $\langle D^*, f^*\rangle$ eine Funktion g^*, welche jedem $O_{y_1 \ldots y_n}$ genau eine Menge von geordneten n-Tupel von Elementen aus D^* zuordnet. Wenn $O'_{y_1 \ldots y_n}$ und $O''_{y_1 \ldots y_n}$ Termoperanden sind, so daß beide zusammen höchstens ein Vorkommen von E! bzw. = haben, dann:

(1) $g^*(F^n y_1 \ldots y_n) = f^*(F^n)$
(2) $g^*(\mathrm{E!}y) = D^*$
(3) $g^*(y_1 = y_2) = \{\langle d_1, d_2\rangle \in D^{*2} |\ d_1 = d_2\} = I^*$[54]
(4) $g^*(\neg O'_{y_1 \ldots y_n}) = D^{*n} \backslash g^*(O'_{y_1 \ldots y_n})$
(5) $g^*(O'_{y_1 \ldots y_n} \wedge O''_{y_1 \ldots y_n}) = g^*(O'_{y_1 \ldots y_n}) \cap g^*(O''_{y_1 \ldots y_n})$

Im folgenden wird ein klassisches Modell samt seiner Termoperandenbelegung (kurz: KMB) $\langle\langle D^*, f^*\rangle, g^*\rangle$ durch 'M^*' abgekürzt.

Schließlich wird eine *Vervollständigung* eines EDMB M durch ein KMB M^* wie folgt definiert:

(Df.V) M^*/M (d.h. $M^* = \langle\langle D^*, f^*\rangle, g^*\rangle$ ist *vollständig über* $M = \langle\langle D, f\rangle, g\rangle$) $:\Leftrightarrow$
$\varnothing \neq D^* \supseteq D$ und
für alle singulären Terme a gilt: $f^*(a) \in D^*$ und
für alle singulären Terme a gilt: wenn $f(a) \downarrow$ ist,
dann $f^*(a) = f(a)$ und

[54] I^* ist die Diagonalmenge von D^{*2}.

für alle einfachen n-stelligen generellen Terme F^n gilt:
$f^*(F^n) \supseteq f(F^n)$ und
für alle Termoperanden $O_{y_1 \ldots y_n}$ gilt:
$g^*(O_{y_1 \ldots y_n}) \supseteq g(O_{y_1 \ldots y_n})$

Die Interpretationsfunktion einer solchen klassischen Vervollständigung M^* eines EDMB M übernimmt also die Werte für jene singulären Terme, welchen durch das zugrundeliegende EDMB M schon etwas zugeordnet wurde. Sie ordnet weiters all jenen singulären Termen, welchen durch M noch nichts zugeordnet wurde, Elemente aus einer nicht-leeren Erweiterung des ursprünglichen *Domains* von M zu. Ferner wird denjenigen Mengen von geordneten n-Tupel von Elementen aus dem ursprünglichen *Domain* von M, welchen den einfachen n-stelligen generellen Termen schon zugeordnet wurden, nichts weggenommen, sondern höchstens weitere n-Tupel von Elementen aus dem erweiterten *Domain* hinzugefügt.

6.2.2 Semantische Begriffe$_3$

In einer Superbewertungssemantik durchlaufen die Sätze drei Phasen der Bewertung. Ich definiere im folgenden jene Wahrheitsbegriffe, welche diesen drei Phasen entsprechen.

a. Faktische Wahrheit. Im folgenden definiere ich, was es heißt, daß eine *geschlossene Prädikation S faktisch wahr* bzw. *faktisch falsch* in einem EDMB $M = \langle\langle D, f\rangle, g\rangle$ ist (kurz: $\models^f_M S$ bzw. $=\!\mid^f_M S$):

(1) Wenn $A = G^n_{\Delta y} a_1 \ldots a_n$ (ausschließlich den Fällen, welche in den nachfolgenden Klauseln (2) und (3) behandelt werden), dann:
   (i) wenn für alle i (mit $1 \leq i \leq n$) $f(a_i) \downarrow$ ist, dann:
   $\models^f_M A \Leftrightarrow \langle f(a_1), \ldots, f(a_n)\rangle \in g(O_{y_1 \ldots y_n})$ und
   $=\!\mid^f_M A \Leftrightarrow \langle f(a_1), \ldots, f(a_n)\rangle \notin g(O_{y_1 \ldots y_n})$
   (ii) wenn für einige i (mit $1 \leq i \leq n$) $f(a_i) \uparrow$ ist, dann:
   weder $\models^f_M A$ noch $=\!\mid^f_M A$

(2) Wenn $A = (\Delta y \mathrm{E!}y)a$ und $B = (\Delta y \neg \mathrm{E!}y)a$, dann[55]:
  (i) $\models^f_M A \Leftrightarrow f(a)$ ist $\downarrow$ (d.h. a ist *referentiell* bei f) und
  $=\!\mid^f_M A \Leftrightarrow f(a)$ ist $\uparrow$ (d.h. a ist *irreferentiell* bei f)[56]
  (ii) $\models^f_M B \Leftrightarrow f(a)$ ist $\uparrow$ und
  $=\!\mid^f_M B \Leftrightarrow f(a)$ ist $\downarrow$

(3) Wenn $A = (\Delta y_1 \Delta y_2 y_1 = y_2)ab$ und
$B = (\Delta y_1 \Delta y_2 \neg y_1 = y_2)ab$, dann:
  (i) wenn $f(a)$ und $f(b)$ $\downarrow$ sind, dann:
  $\models^f_M A \Leftrightarrow f(a) = f(b)$,
  $=\!\mid^f_M A \Leftrightarrow f(a) \neq f(b)$,
  $\models^f_M B \Leftrightarrow f(a) \neq f(b)$ und
  $=\!\mid^f_M B \Leftrightarrow f(a) = f(b)$
  (ii) wenn $f(a) \uparrow$ ist und $f(b) \downarrow$ ist (oder $f(a) \downarrow$ ist und $f(b) \uparrow$ ist), dann:
  $=\!\mid^f_M A$ und $\models^f_M B$[57]
  (iii) wenn $f(a)$ und $f(b)$ $\uparrow$ sind, dann:
  weder $\models^f_M A$ noch $=\!\mid^f_M A$ und
  weder $\models^f_M B$ noch $=\!\mid^f_M B$

b. Klassische Wahrheit. Weiters definiere ich, was es heißt, daß ein *Satz S wahr* bzw. *falsch in einer klassischen Vervollständigung* M^*/M ist (d.h. $\models_{M^*/M} S$ bzw. $=\!\mid_{M^*/M} S$):

(4) Wenn A eine geschlossene Prädikation ist, dann:
  (i) wenn entweder $\models^f_M A$ oder $=\!\mid^f_M A$, dann:
  $\models_{M^*/M} A \Leftrightarrow \models^f_M A$ und
  $=\!\mid_{M^*/M} A \Leftrightarrow =\!\mid^f_M A$

---

[55] *Vereinfachungskonvention* für die innere Negation: Wenn G^n ein komplexer n-stelliger genereller Term wie $\Delta y \mathrm{E!}y$ und $\Delta y_1 \Delta y_2 y_1 = y_2$ ist, dann stipuliere ich folgendes: Wenn die Anzahl der Negationszeichen, welche zwischen dem äußerst rechten Δ-Term und dem Termoperanden vorkommen, gerade ist, dann wird sie auf null reduziert, und wenn sie ungerade ist, dann auf eins.

[56] In jeder Einzel-*Domain*-Semantik für die freie Logik fallen die leeren singulären Terme mit den irreferentiellen singulären Termen zusammen.

[57] Wegen (3)(ii) und der Tautologie $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ gilt folgendes: Wenn $f(a) \uparrow$ ist und $f(b) \downarrow$ ist, dann $\models^f_M B \Leftrightarrow f(a)$ ist $\uparrow$ und $f(b)$ ist $\downarrow$.

(ii) wenn weder $\models^f_M A$ noch $\dashv^f_M A$, dann:
$\models_{M^*/M} A \Leftrightarrow \models_{M^*} A$ und
$\dashv_{M^*/M} A \Leftrightarrow \dashv_{M^*} A$

(5) $\models_{M^*/M} \neg A \Leftrightarrow \dashv_{M^*/M} A$

(6) $\models_{M^*/M} A \wedge B \Leftrightarrow \models_{M^*/M} A$ und $\models_{M^*/M} B$

(7) $\models_{M^*/M} \forall x_i A[G_{\overline{m}}] \Leftrightarrow$ für alle singulären Terme a_i gilt
$(\models_{M^*/M} (\Delta y \mathrm{E}!y)a_i \Rightarrow \models_{M^*/M} A[G_{\overline{m}}](a_i/x_i))$

(8) Für alle Sätze S gilt: $\dashv_{M^*/M} S \Leftrightarrow$ nicht $\models_{M^*/M} S$[58]

c. Superwahrheit. Ferner definiere ich, was es heißt, daß ein *Satz S superwahr*, *superfalsch* und *superwahrheitswertlos* in einem EDMB M ist:

(Df.SW) $\models^3_M S$ (d.h. ein Satz S ist *superwahr* in M) :$\Leftrightarrow$
für alle M^* über M gilt: $\models_{M^*/M} S$

(Df.SF) $\dashv^3_M S$ (d.h. ein Satz S ist *superfalsch* in M) :$\Leftrightarrow$
für alle M^* über M gilt: $\dashv_{M^*/M} S$

(Df.SWL) Ein Satz S ist *superwahrheitswertlos* in M :$\Leftrightarrow$
es gibt ein M^* über M, so daß gilt: $\models_{M^*/M} S$, und
es gibt ein anderes M^* über M, so daß gilt: $\dashv_{M^*/M} S$

(Df.LW$_3$) $\models_3 S$ (d.h. ein Satz S ist *logisch wahr*$_3$) :$\Leftrightarrow$
für alle M gilt: $\models^3_M S$

(Df.LÄ$_3$) Zwei Sätze S_1, S_2 sind *logisch äquivalent*$_3$:$\Leftrightarrow$
$\models_3 S_1 \leftrightarrow S_2$

Die Verallgemeinerung (Δ^-) des klassischen Prinzips der Termabstraktion aus §4 ist in der vorliegenden Semantik ungültig. So ist zwar der Satz $Fa \wedge \mathrm{E}!a \leftrightarrow Fa \wedge \mathrm{E}!a$ eine aussagenlogische Tautologie (und damit ein Theorem von PFL), der Satz $(\Delta y Fy \wedge \mathrm{E}!y)a \leftrightarrow$

[58] Im Rahmen dieser Wahrheitswertsemantik kann man (gemäß (W) aus §1.3) die *Extension* eines *Satzes S* in M^*/M wie folgt definieren:

$e_{M^*/M}(S) = 1 :\Leftrightarrow \models_{M^*/M} S$; und $e_{M^*/M}(S) = 0 :\Leftrightarrow \dashv_{M^*/M} S$

Zur Einführung eines Wahrheitsbegriffs ist hier allerdings die Definition einer solchen Extensionsfunktion nicht erforderlich.

$(\Delta yFy)a \wedge (\Delta y\mathrm{E}!y)a$ von $\mathcal{L}_2$ ist jedoch nicht logisch wahr$_3$, wenn $f(a) \uparrow$ ist. Deshalb gilt hier auch nicht für alle Sätze S von $\mathcal{L}_2$ folgendes: $\models_3 S \Leftrightarrow \tau(S)$ ist ein Theorem von PFL.

6.3 Sachverhaltssemantik II

Die Superbewertungs-Sachverhaltssemantik (und Ontologie) für $\mathcal{L}_2$, welche ich hier vorschlage, basiert auf den Modellen und Termoperandenbelegungen aus §6.2.1. Es ergibt sich dadurch eine neue Menge von Sachverhalten, welche ich im folgenden einführen werde. Für das Weitere ist zu beachten, daß in jeder Einzel-*Domain*-Semantik für die freie Logik die leeren singulären Terme nicht so wie in einer *Inner-Outer-Domain* Semantik ein nicht-existierendes Einzelding bezeichnen (und somit referentiell sind, weil sie etwas bezeichnen), sondern mit den irreferentiellen singulären Termen zusammenfallen (also nichts bezeichnen).

6.3.1 Die Menge der Sachverhalte$_2$

Ich werde nun etwas zu den mengentheoretischen Komplexen sagen, welche (gemäß (Z) aus §1.4) aus den Extensionen der Teilausdrücke eines Satzes zusammengesetzt sind. Als Grundbegriffe dienen dabei der *Domain* D von einem EDMB M und die mengentheoretische $\in$-Relation. In der vorliegenden Semantik werden drei weitere Begriffe benötigt, nämlich die Non-Elementrelation $\notin$ sowie die Wahrheitsfunktion der Negation NICHT und der Konjunktion UND.

Je nachdem, ob alle in einer Prädikation vorkommenden singulären Terme referentiell sind oder nicht, gibt es zwei Möglichkeiten, die Sachverhalte$_2$ zusammenzusetzen, welche die *geschlossenen Prädikationen* in der ersten Phase der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik zur Extension haben, nämlich:

(i) Wenn alle diese singulären Terme referentiell sind, dann sind jene Extensionen aus der mengentheoretischen Elementrelation, einem geordneten n-Tupel von existierenden Einzeldingen und einer Menge von geordneten n-Tupel von solchen existierenden Einzeldingen zusammengesetzt.

(ii) Wenn aber einige singuläre Terme irreferentiell sind, dann fehlen einige existierende Einzeldinge und jene Extensionen werden einfach als undefiniert aufgefaßt. Wegen der Besonderheiten einer Superbewertungs-Semantik gibt es jedoch Ausnahmen von dieser allgemeinen Regel: Wenn a ein irreferentieller und b ein referentieller singulärer Term ist, dann sind die Extensionen der geschlossenen Prädikationen

$(\Delta y \mathrm{E!}y)a$, $(\Delta y \neg \mathrm{E!}y)a$, $(\Delta y_1 \Delta y_2 y_1 = y_2)ab$ und
$(\Delta y_1 \Delta y_2 \neg y_1 = y_2)ab$

die folgenden Komplexe:

$$\langle \in, o, D \rangle,\ \langle \notin, o, \varnothing \rangle,\ \langle \in, \langle o, d \rangle, I \rangle \text{ und } \langle \in, \langle o, d \rangle, D^2 \backslash I \rangle,$$

wo $\varnothing$ die leere Menge ist und weiters folgendes gilt: $d \in D$ (also ist d ein existierendes Einzelding relativ zu D), $o \notin D$ (also ist o ein nicht-existierendes Einzelding relativ zu D)[59] und I ist die Diagonalmenge von D^2.[60]

Weiters sind die Sachverhalte$_2$, welche *Allsätze* in pränexer Normalform zur Extension haben, Komplexe, die aus einem geordneten

[59] Die benötigten Begriffe können hier wie folgt definiert werden: d ist ein *Einzelding* :$\Leftrightarrow$ es gibt einen *Domain* D', so daß gilt: $d \in D'$. Weiters: d ist ein *existierendes* Einzelding relativ zu einem *Domain* D :$\Leftrightarrow$ d ist ein Einzelding und $d \in D$. Demnach ist o ein *nicht-existierendes* Einzelding relativ zu D g.d.w. o ein Einzelding ist und $o \notin D$. Das relativ zu D nicht-existierende Einzelding o ist nicht die *Outer-Domain*-ähnliche Extension eines irreferentiellen singulären Terms, sondern spielt eine völlig andere Rolle wie die Bemerkungen in §6.3.3a klar machen werden.

[60] Neben der Elementrelation $\in$ muß auch die Non-Elementrelation $\notin$ eingeführt werden, weil es sonst zu einer unerwünschten Kollision im Zusammenhang mit der Klausel (5)(ii) aus §6.3.3a im folgenden Sinn kommen würde: Wenn $D = \varnothing$ (womit jeder singuläre Term a irreferentiell ist), dann wäre der Komplex $\langle \in, o, D \rangle$ die Extension in M von $(\Delta y \mathrm{E!}y)a$ ebenso wie von $(\Delta y \neg \mathrm{E!}y)a$. Während aber der Komplex $\langle \in, o, D \rangle$ als Extension von $(\Delta y \mathrm{E!}y)a$ nicht in M bestehen soll, soll der Komplex $\langle \in, o, \varnothing \rangle$ als Extension von $(\Delta y \neg \mathrm{E!}y)a$ in M sehr wohl bestehen, obwohl beide Komplexe identisch sind, wenn $D = \varnothing$. Demnach ist ein Merkmal einzuführen, welches zwischen diesen Extensionen unterscheidet, wenn $D = \varnothing$. Eine analoge Stipulation ist im Fall der Komplexe $\langle \in, \langle o, d \rangle, I \rangle$ und $\langle \in, \langle o, d \rangle, D^2 \backslash I \rangle$ nicht nötig, weil das existierende Einzelding d ein Element dieser Komplexe ist, was bedeutet, daß $D \neq \varnothing$ und folglich $I \neq D^2 \backslash I$.

m-Tupel von Mengen von geordneten n-Tupel von existierenden Einzeldingen sowie einem sogenannten *logischen Attribut*$_2$ von solchen geordneten m-Tupel zusammengesetzt sind. Ein Beispiel für ein logisches Attribut$_2$ ist die Alles-Existierende-ist-so-daß-es-darin-liegt-Eigenschaft$_2$, welche hier aber auf eine etwas andere Weise eingeführt werden muß:

(R_1^1) Eine Menge X hat die R_1^1-Eigenschaft$_2$ (d.h. die Alles-Existierende-ist-so-daß-es-darin-liegt-Eigenschaft$_2$) $\Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a gilt (wenn a referentiell ist, dann liegt die Extension von a in X)

Diese logischen Attribute$_2$ können wieder als bestimmte Mengen zweiter Stufe aufgefaßt werden, welche hier aber durch den *Domain* D eines EDMB $M = \langle\langle D, f\rangle, g\rangle$ definiert werden (siehe §6.3.4).

Schließlich ist die Menge der Sachverhalte$_2$ unter den Operationen der Negation und Konjunktion abgeschlossen.

Demnach läßt sich hier die Menge der Sachverhalte$_2$ wie folgt rekursiv definieren. Wenn $M = \langle\langle D, f\rangle, g\rangle$ ein EDMB ist und $M^* = \langle\langle D^*, f^*\rangle, g^*\rangle$ ein KMB ist, dann:

(1) Wenn $\in$ die Elementrelation ist und $d_1, \ldots, d_n \in D$ und X^n eine Menge von geordneten n-Tupel von Elementen aus D ist, dann ist $\langle\in, \langle d_1, \ldots, d_n\rangle, X^n\rangle$ ein Sachverhalt$_2$.

(2) Wenn $\in$ die Elementrelation ist und $\notin$ die Non-Elementrelation ist und $\varnothing$ die leere Menge ist und $o \notin D$, dann sind $\langle\in, o, D\rangle$ und $\langle\notin, o, \varnothing\rangle$ Sachverhalte$_2$.

(3) Wenn $\in$ die Elementrelation ist und I die Diagonalmenge von D^2 ist und $d \in D$ sowie $o \notin D$ sind, dann sind $\langle\in, \langle o, d\rangle, I\rangle$, $\langle\in, \langle d, o\rangle, I\rangle$, $\langle\in, \langle o, d\rangle, D^2\backslash I\rangle$ und $\langle\in, \langle d, o\rangle, D^2\backslash I\rangle$ Sachverhalte$_2$.

(4) Wenn R_k^m das k-te m-stellige logische Attribut$_2$ ist und $X_1, \ldots, X_m$ Mengen von geordneten n-Tupel von Elementen aus D sind (mit variablem n), dann ist $\langle R_k^m, \langle X_1, \ldots, X_m\rangle\rangle$ ein Sachverhalt$_2$.

(5) Wenn NICHT die Wahrheitsfunktion der Negation ist und s_1 ein Sachverhalt$_2$ ist, dann ist $\langle\text{NICHT}, s_1\rangle$ ein Sachverhalt$_2$.

(6) Wenn UND die Wahrheitsfunktion der Konjunktion ist und s_1, s_2 Sachverhalte$_2$ sind, dann ist $\langle \text{UND}, \{s_1, s_2\}\rangle$ ein Sachverhalt$_2$.
(7) Nichts sonst ist ein Sachverhalt$_2$.

6.3.2 (Nicht-) Bestehen von Sachverhalten$_2$

Im folgenden definiere ich mittels simultaner Rekursion, was es heißt, daß ein Sachverhalt$_2$ s in einem EDMB M *faktisch besteht* bzw. *faktisch nicht besteht* (kurz: $\models^f_M s$ bzw. $\dashv^f_M s$), und weiters, was es heißt, daß s *in einer klassischen Vervollständigung* M^* über M *besteht* bzw. *nicht besteht* (kurz: $\models_{M^*/M} s$ bzw. $\dashv_{M^*/M} s$), und schließlich, welche Extensionsfunktion durch ein EDMB M bzw. eine klassische Vervollständigung M^* über M bestimmt wird.

a. (Nicht-) Bestehen eines Sachverhalts$_2$ in M. Zunächst folgt die Definition des faktischen Bestehens:

(1) Wenn $s = \langle \in, \langle d_1, \ldots, d_n\rangle, X^n\rangle$, $X^n \subseteq D^n$ und für alle i (mit $1 \leq i \leq n$) $d_i \in D$, dann:
$\models^f_M s \Leftrightarrow \langle d_1, \ldots, d_n\rangle \in X^n$
(2) Wenn $s_1 = \langle \in, o, D\rangle$ und $s_2 = \langle \notin, o, \varnothing\rangle$, dann:
wenn $o \notin D$, dann:
$\dashv^f_M s_1$ und $\models^f_M s_2$[61]
(3) Wenn $s_1 = \langle \in, \langle o, d\rangle, I\rangle$, $s_2 = \langle \in, \langle d, o\rangle, I\rangle$, $s_3 = \langle \in, \langle o, d\rangle, D^2\backslash I\rangle$ und $s_4 = \langle \in, \langle d, o\rangle, D^2\backslash I\rangle$, dann:
wenn $o \notin D$ und $d \in D$, dann:
$\dashv^f_M s_1$, $\dashv^f_M s_2$, $\models^f_M s_3$[62] und $\models^f_M s_4$
(4) $\models^f_M \langle \text{NICHT}, s_1\rangle \Leftrightarrow \dashv^f_M s_1$
(5) $\models^f_M \langle \text{UND}, \{s_1, s_2\}\rangle \Leftrightarrow \models^f_M s_1$ und $\models^f_M s_2$
(6) Wenn $X_1 \subseteq D^{n_1}$ & … & $X_m \subseteq D^{n_m}$ und R^m_k das k-te m-stellige logische Attribut$_2$ ist, dann:
$\models^f_M \langle R^m_k, \langle X_1, \ldots, X_m\rangle\rangle \Leftrightarrow \langle X_1, \ldots, X_m\rangle \in R^m_k$

[61] Wegen (2) und der Tautologie $p \to (q \to p)$ gilt folgendes: Wenn $o \notin D$, dann $\models^f_M s_2 \Leftrightarrow o \notin D$.
[62] Wegen (3) und der Tautologie $p \to (q \to p)$ gilt folgendes: Wenn $o \notin D$ und $d \in D$, dann $\models^f_M s_3 \Leftrightarrow o \notin D$ und $d \in D$.

(7) Für alle Sachverhalte$_2$ s im Sinn von (1)–(6) gilt:
$\succ\!\mid^f_M s \Leftrightarrow$ nicht $\mid\!\prec^f_M s$

b. (Nicht-) Bestehen eines Sachverhalts$_2$ in M^*/M. Und nun kommt die Definition des Bestehens eines Sachverhalts$_2$ in einer klassischen Vervollständigung M^*/M:

(8) Wenn $s = \langle \in, \langle d_1, \dots, d_n \rangle, X^n \rangle$, $X^n \subseteq D^{*n}$ und für alle i (mit $1 \leq i \leq n$) $d_i \in D^*$, dann:
$\mid\!\prec_{M^*/M} s \Leftrightarrow \langle d_1, \dots, d_n \rangle \in X^n$

(9) Wenn s ein Sachverhalt$_2$ im Sinn von (2)–(3) ist, dann:
$\mid\!\prec_{M^*/M} s \Leftrightarrow \mid\!\prec^f_M s$ und
$\succ\!\mid_{M^*/M} s \Leftrightarrow \succ\!\mid^f_M s$

(10) $\mid\!\prec_{M^*/M} \langle \text{NICHT}, s_1 \rangle \Leftrightarrow \succ\!\mid_{M^*/M} s_1$

(11) $\mid\!\prec_{M^*/M} \langle \text{UND}, \{s_1, s_2\} \rangle \Leftrightarrow \mid\!\prec_{M^*/M} s_1$ und $\mid\!\prec_{M^*/M} s_2$

(12) Wenn $X_1 \subseteq D^{n_1}$ & … & $X_m \subseteq D^{n_m}$ und
R^m_k das k-te m-stellige logische Attribut$_2$ ist, dann:
$\mid\!\prec_{M^*/M} \langle R^m_k, \langle X_1, \dots, X_m \rangle \rangle \Leftrightarrow \langle X_1, \dots, X_m \rangle \in R^m_k$

(13) Für alle Sachverhalte$_2$ s im Sinn von (8)–(12) gilt:
$\succ\!\mid_{M^*/M} s \Leftrightarrow$ nicht $\mid\!\prec_{M^*/M} s$

Die ersten Elemente von solchen Sachverhalten$_2$ zeigen wieder die Bedingungen ihres Bestehens bzw. Nicht-Bestehens – und damit auch die Art ihrer Zusammensetzung – an. Zudem wird hier erneut das Identitätskriterium für geordnete n-Tupel als Identitätskriterium für Sachverhalte$_2$ übernommen. Zwei Sachverhalte$_2$ sind deshalb identisch g.d.w. sie auf dieselbe Weise aus denselben Bestandteilen zusammengesetzt sind.

6.3.3 Extensionsfunktionen

Ich definiere im folgenden, welchen Sachverhalt$_2$ ein Satz zur Extension in einem EDMB M sowie in einer Vervollständigung M^*/M hat. Dabei werden den folgenden Arten von Ausdrücken in *primitiver* Notation *Extensionen in M* zugeordnet: referentiellen singulären sowie komplexen n-stelligen generellen Termen und Sätzen in pränexer Normalform. Darüber hinaus werden allen singulären sowie komplexen

n-stelligen generellen Termen und Sätzen in pränexer Normalform auch *Extensionen in* M^*/M zugeordnet. Dagegen werden einfachen generellen Termen, Individuenvariablen und offenen Formeln keine solchen Extensionen in M^*/M zugeordnet (erstere werden aber durch die Interpretationsfunktionen interpretiert und letztere durch die Termoperandenbelegungen, insofern sie homogen sind und die weiteren Bedingungen der Klausel $(2')$ aus §6.1 erfüllen). Einfachen generellen Termen werden deshalb keine Extensionen in M^*/M zugeordnet, weil sie in den Sätzen von $\mathcal{L}_2$ nur als Teile von Termoperanden vorkommen und somit in gewisser Weise als nicht-eigenständige Ausdrücke gelten können.[63]

a. Extensionen von Sätzen in M**.** Wenn $M = \langle\langle D, f\rangle, g\rangle$ ein EDMB ist, dann gehe ich von einem mengentheoretischen Rahmen aus, wonach es zu jedem *Domain* D eines solchen Modells eine Menge Y gibt, so daß es ein o gibt mit $o \in Y$ und $o \notin D$ (z.B. könnte Y die Menge $\{D, \wp(D), \wp\wp(D), \ldots\}$ sein). Dann ist ∞ eine Funktion, welche jedem *metalinguistischen* Ausdruck der Form $f(a)$, mit $f(a)$ ist $\uparrow$ in D, ein o zuordnet, so daß gilt: $o \in Y$ und $o \notin D$. Ich bezeichne jenes Non-Element o von D, welches ∞ einem undefinierten Funktionsausdruck der Form $f(a)$ zuordnet, durch '$f(a)^\infty$' (d.h. $o = f(a)^\infty$). Demnach gilt für alle undefinierten Funktionsausdrücke der Form $f(a)$ und allen *Domains* D: $f(a)$ ist $\uparrow$ in $D \Leftrightarrow f(a)^\infty \notin D$. Die relativ zu D nicht-existierenden Einzeldinge $f(a)^\infty$ sind nicht *Outer-Domain*-ähnliche Extensionen von bei f irreferentiellen singulären Termen a, sondern spielen nur die Rolle, die "Löcher" in jenen Komplexen zu markieren, wo ein relativ zu D existierendes Einzelding – wegen eines bei f *irreferentiellen* a – fehlt. D.h. die Argumente der Funktion ∞ sind nicht die bei f irreferentiellen singularen Terme a, sondern die leeren Funktionsausdrücke $f(a)$, wo a irreferentiell bei f ist. Weiters ist im folgenden e jene Funktion, welche durch ein gegebenes EDMB $M = \langle\langle D, f\rangle, g\rangle$ eindeutig bestimmt ist:

[63] Diese Auffassung erleichtert jedenfalls die Entwicklung einer Sachverhaltssemantik für $\mathcal{L}_2$.

(1) Wenn $f(a)\downarrow$ ist (d.h. a ist referentiell bei f), dann $e(a) = f(a)$

(2) Wenn $f(a)\uparrow$ ist (d.h. a ist irreferentiell bei f), dann ist $e(a)\uparrow$ (d.h. a hat keine Extension bei e)

(3) $e(G^n_{\Delta y}) = g(O_{y_1\ldots y_n})$

(4) Wenn $A = G^n_{\Delta y}a_1\ldots a_n$ (ausschließlich den Fällen, welche in den nachfolgenden Klauseln (5) und (6) geregelt sind), dann:
   (i) wenn für alle i (mit $1 \leq i \leq n$) $f(a_i)\downarrow$ ist, dann:
   $e(A) = \langle\in, \langle e(a_1), \ldots, e(a_n)\rangle, e(G^n_{\Delta y})\rangle$
   (ii) wenn für einige i (mit $1 \leq i \leq n$) $f(a_i)\uparrow$ ist, dann:
   $e(A)$ ist $\uparrow$ (d.h. A hat keine Extension bei e)

(5) Wenn $A = (\Delta y\mathrm{E}!y)a$ und $B = (\Delta y\neg\mathrm{E}!y)a$, dann:
   (i) wenn $f(a)\downarrow$ ist, dann:
   $e(A) = \langle\in, e(a), e(\Delta y\mathrm{E}!y)\rangle$ und
   $e(B) = \langle\in, e(a), e(\Delta y\neg\mathrm{E}!y)\rangle$
   (ii) wenn $f(a)\uparrow$ ist, dann:
   $e(A) = \langle\in, f(a)^\infty, e(\Delta y\mathrm{E}!y)\rangle$ und
   $e(B) = \langle\notin, f(a)^\infty, e(\Delta y\neg\mathrm{E}!y)\rangle$

(6) Wenn $A = (\Delta y_1\Delta y_2 y_1 = y_2)ab$ und $B = (\Delta y_1\Delta y_2\neg y_1 = y_2)ab$, dann:
   (i) wenn $f(a)$ und $f(b)\downarrow$ sind, dann:
   $e(A) = \langle\in, \langle e(a), e(b)\rangle, e(\Delta y_1\Delta y_2 y_1 = y_2)\rangle$ und
   $e(B) = \langle\in, \langle e(a), e(b)\rangle, e(\Delta y_1\Delta y_2\neg y_1 = y_2)\rangle$
   (ii) wenn $f(a)\uparrow$ ist und $f(b)\downarrow$ ist, dann:
   $e(A) = \langle\in, \langle f(a)^\infty, e(b)\rangle, e(\Delta y_1\Delta y_2 y_1 = y_2)\rangle$ und
   $e(B) = \langle\in, \langle f(a)^\infty, e(b)\rangle, e(\Delta y_1\Delta y_2\neg y_1 = y_2)\rangle$
   (iii) wenn $f(a)\downarrow$ ist und $f(b)\uparrow$ ist, dann:
   $e(A) = \langle\in, \langle e(a), f(b)^\infty\rangle, e(\Delta y_1\Delta y_2 y_1 = y_2)\rangle$ und
   $e(B) = \langle\in, \langle e(a), f(b)^\infty\rangle, e(\Delta y_1\Delta y_2\neg y_1 = y_2)\rangle$
   (iv) wenn $f(a)$ und $f(b)\uparrow$ sind, dann:
   $e(A)$ und $e(B)$ sind $\uparrow$

(7) Wenn $e(A)\downarrow$ ist, dann:
   $e(\neg A) = \langle\textsc{nicht}, e(A)\rangle$; andernfalls $e(\neg A)$ ist $\uparrow$

(8) Wenn $e(A)$ und $e(B)\downarrow$ sind, dann:
   $e(A \wedge B) = \langle\textsc{und}, \{e(A), e(B)\}\rangle$; andernfalls $e(A \wedge B)$ ist $\uparrow$

(9) $e(\forall x_i A[G_{\overline{m}}]) = \langle R^m_k, \langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle\rangle$
   (für R^m_k siehe die Klausel (16) aus §6.3.3b)

b. Extensionen von allen Sätzen in M^*/M. Im folgenden ist $\bar{e}$ die Extensionsfunktion, welche durch eine gegebene klassische Vervollständigung $M^* = \langle\langle D^*, f^*\rangle, g^*\rangle$ über M eindeutig bestimmt ist, und weiters ist e^* jene Extensionsfunktion, welche durch ein gegebenes KMB M^* eindeutig bestimmt ist:

(10) Wenn $f(a)\downarrow$ ist, dann $\bar{e}(a) = e(a) = f(a)$

(11) Wenn $f(a)\uparrow$ ist, dann $\bar{e}(a) = f^*(a)$

(12) $\bar{e}(G^n_{\Delta y}) = g^*(O_{y_1\ldots y_n})$

(13) Wenn A eine geschlossene Prädikation ist (siehe (4)–(6)), dann:
- (i) wenn $e(A)\downarrow$ ist, dann: $\bar{e}(A) = e(A)$
- (ii) wenn $e(A)\uparrow$ ist (siehe (4)(ii) und (6)(iv)), dann: $\bar{e}(A) = e^*(A)$[64]

(14) $\bar{e}(\neg A) = \langle \textsc{nicht}, \bar{e}(A)\rangle$

(15) $\bar{e}(A \wedge B) = \langle \textsc{und}, \{\bar{e}(A), \bar{e}(B)\}\rangle$

(16) $\bar{e}(\forall x_i A[G_{\overline{m}}]) = e(\forall x_i A[G_{\overline{m}}])$ und
$R^m_k = \{\langle X_1, \ldots, X_m\rangle |$ für alle singulären Terme a_i gilt
$(\models_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_i) \Rightarrow$
(nicht) für alle singulären Terme a_{i-1} gilt
$(\models_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_{i-1}) \Rightarrow$
(nicht) ... (nicht) für alle singulären Terme a_1 gilt
$(\models_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_1) \Rightarrow$
$A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)\ /\ X_1 \subseteq D^{n_1}, \ldots,$
$X_m \subseteq D^{n_m}) \ldots))\}$[65]

---

[64] D.h. es gilt: $e^*(G^n_{\Delta y}a_1 \ldots a_n) = \langle\in, \langle f^*(a_1), \ldots, f^*(a_n)\rangle, g^*(O_{y_1\ldots y_n})\rangle$, $e^*((\Delta y_1\Delta y_2 y_1 = y_2)ab) = \langle\in, \langle f^*(a), f^*(b)\rangle, I^*\rangle$ und $e^*((\Delta y_1\Delta y_2\neg y_1 = y_2)ab) = \langle\in, \langle f^*(a), f^*(b)\rangle, D^{*2}\backslash I^*\rangle$.

[65] Wegen der Definition von e und $\bar{e}$ gilt für alle singulären Terme a sowie Extensionsfunktionen e und zugehörigen $\bar{e}$ folgendes: $e((\Delta y\mathrm{E}!y)a) = \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a)$. Demnach gilt für alle a: $\models^f_M e((\Delta y\mathrm{E}!y)a) \Leftrightarrow\ \models_{M^*/M} \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a)$.

6.3.4 Allsätze und logische Attribute$_2$

Die eingeklammerten Vorkommen von 'nicht' zeigen hier null oder ein Vorkommen desselben an, und zwar je nachdem, ob der objektsprachliche Allsatz in primitiver Notation (also in pränexer Normalform)

(1) $\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$

an den entsprechenden Positionen null oder ein Vorkommen des Negationszeichens hat. Wenn man weiters das Quantorenpräfix in (1) wegläßt, dann ist

(2) $A^-[G_{\overline{m}}]$

die verbleibende offene Formel ohne Quantoren (mit zumindest x_i als freier Individuenvariable und höchstens i verschiedenen Individuenvariablen). Weiters ist der Satz

(3) $A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)$

das Ergebnis der simultanen Ersetzung der Individuenvariablen x_1, $x_2, \ldots, x_i$, welche voneinander verschieden sind und die in der offenen Formel (2) vorkommen, durch die referentiellen singulären Terme $a_1, a_2, \ldots, a_i$, welche ebenfalls voneinander verschieden sind. Letztere müssen außerdem alle von etwaigen singulären Termen in (2) verschieden sein. Weiters bezeichnet

(4) $A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i) \ / \ X_1 \subseteq D^{n_1}, \ldots, X_m \subseteq D^{n_m}$

das Resultat der Ersetzung von jeder Prädikation in (3) der Form

(5) $G^n_{\Delta y} a_1 \ldots a_n$

sowie von jeder außen-negierten Prädikation in (3) der Form

(6) $\neg G^n_{\Delta y} a_1 \ldots a_n$

durch Ausdrücke, welche die folgenden Formen haben:

(7) $\langle e(a_1), \ldots, e(a_n) \rangle \in X^n \subseteq D^n$

(8) $\langle e(a_1), \ldots, e(a_n)\rangle \notin X^n \subseteq D^n$

Hierbei wird angenommen, daß für alle l mit $1 \leq l \leq m$ und alle $n = 1, 2 \ldots$ folgendes gilt:

(9) $X_l \subseteq D^n \Leftrightarrow e(G_l) \subseteq D^n$

Weiters werden die in (3) verbliebenen Junktoren $\neg$ bzw. $\wedge$ durch ‘nicht’ bzw. ‘und’ übersetzt. Demnach gilt folgendes: für alle singulären Terme $a_1, \ldots, a_i$ gilt: wenn $\models_{M^*/M}$ $\bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_1)$ und … und $\models_{M^*/M}$ $\bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_i)$, dann:

(10) $A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i) \ / \ e(G_1) \subseteq D^{n_1}, \ldots, e(G_m) \subseteq D^{n_m}$
$\Leftrightarrow$
$\models_{M^*/M}$ $\bar{e}(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i))$[66]

Und schließlich sind die folgenden beiden Übersetzungen des objektsprachlichen Allsatzes (1), d.h. des Satzes

(11) $\forall x_i(\neg)\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_i/a_i))$,

in unsere Metasprache von $\mathcal{L}_2$ äquivalent:

(12) Für alle singulären Terme a_i gilt
$(\models_{M^*/M}$ $\bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_i) \Rightarrow$
(nicht) für alle singulären Terme a_{i-1} gilt
$(\models_{M^*/M}$ $\bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_{i-1}) \Rightarrow$
(nicht) … (nicht) für alle singulären Terme a_1 gilt
$(\models_{M^*/M}$ $\bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_1) \Rightarrow$
$\models_{M^*/M}$ $\bar{e}(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)))\ldots)) \Leftrightarrow$
für alle singulären Terme a_i gilt
$(\models_{M^*/M}$ $\bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_i) \Rightarrow$
(nicht) $\models_{M^*/M}$ $\bar{e}(\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1, \ldots, a_i/x_i)(x_1/a_1, \ldots, x_{i-1}/a_{i-1}))))$

[66] D.h. die linke Seite des Bikonditionals (10) ist – wegen der eben beschriebenen Konstruktion – nichts anderes als die Angabe der notwendigen und hinreichenden Bedingung für das Bestehen in M^* über M der Extension in M^* über M vom quantorenfreien Satz (3).

6.3.5 Ontologische und semantische Begriffe$_4$

Ich definiere nun, was es heißt, daß ein Sachverhalt$_2$ in einem EDMB M *super-besteht*, *super-nicht-besteht* und *weder super-besteht noch super-nicht-besteht*.

(Df.B) $\Join_M s$ (d.h. ein Sachverhalt$_2$ s *super-besteht* in M) :⇔
für alle M^* über M gilt: $\Join_{M^*/M}\ s$

(Df.NB) $\rtimes_M s$ (d.h. ein Sachverhalt$_2$ s *super-nicht-besteht* in M) :⇔
für alle M^* über M gilt: $\rtimes_{M^*/M}\ s$

(Df.BWL) Ein Sachverhalt$_2$ s ist *super-bestehenswertlos* in M :⇔
es gibt ein M^* über M, so daß gilt: $\Join_{M^*/M}\ s$ und
es gibt ein anderes M^* über M, so daß gilt: $\rtimes_{M^*/M}\ s$

(Df.BL) $\Join s$ (d.h. ein Sachverhalt$_2$ s *besteht logisch*) :⇔
für alle M gilt: $\Join_M s$

Im Rahmen der vorliegenden Sachverhaltssemantik (und Ontologie) können ein sachverhaltsbezogener Begriff der logischen Wahrheit und weitere semantische Begriffe wie folgt definiert werden:

(Df.LW$_4$) $\models_4 S$ (d.h. ein Satz S ist *logisch wahr$_4$*) :⇔
$\Join \bar{e}(S)$
(d.h. für alle M und alle M^* über M gilt: $\Join_{M^*/M}\ \bar{e}(S)$)[67]

Demzufolge ist ein Satz S logisch wahr$_4$ g.d.w. der Sachverhalt$_2$ $\bar{e}(S)$ logisch besteht (d.h. g.d.w. der Sachverhalt$_2$ $\bar{e}(S)$ in allen EDMB M super-besteht).

(Df.LÄ$_4$) Zwei Sätze S_1, S_2 sind *logisch äquivalent$_4$* :⇔
$\models_4 S_1 \leftrightarrow S_2$

[67] Ein Wahrheitsbegriff könnte wie folgt eingeführt werden:

$\models^2_{M^*/M} S$:⇔
es gibt einen Sachverhalt$_2$ s, so daß gilt: $\bar{e}(S) = s$ und $\Join_{M^*/M}\ s$

Zur Definition der logischen Wahrheit$_4$ ist aber hier ein solcher Wahrheitsbegriff nicht erforderlich.

6.3.6 Adäquatheitstheorem

Ich beweise nun einige metalogische Resultate im Zusammenhang mit der Adäquatheit.

(T8) Jedes System der positiven freien Logik, welches schwach adäquat hinsichtlich der herkömmlichen Superbewertungs-Wahrheitswertsemantik ist, ist auch *schwach adäquat* hinsichtlich der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik.

Das Theorem (T8) wird mit Hilfe des folgenden Lemmas bewiesen:

(L3) Für alle Sätze S von $\mathcal{L}_2$ gilt ($\models_3 S \Leftrightarrow\ \models_4 S$),
d.h. für alle Sätze S von $\mathcal{L}_2$ gilt
(für alle EDMB M und alle klassischen Vervollständigungen M^* über M gilt: $\models_{M^*/M} S \Leftrightarrow$
für alle EDMB M und alle klassischen Vervollständigungen M^* über M gilt: $\ltimes_{M^*/M}\ \bar{e}(S)$)

Beweis. Das Lemma (L3) wird bewiesen, indem gezeigt wird, daß folgendes gilt: für alle EDMB M sowie alle klassischen Vervollständigungen M^* über M und alle Sätze S von $\mathcal{L}_2$ gilt:

(1) $\ltimes_{M^*/M}\ \bar{e}(S) \Leftrightarrow\ \models_{M^*/M} S$

Der Satz (1) impliziert das Lemma (L3), und seine Wahrheit kann wie folgt durch Induktion über den Aufbau eines Satzes S von $\mathcal{L}_2$ gezeigt werden:

(a) Geschlossene Prädikationen

(2) Wenn $S = G^n_{\Delta y} a_1 \dots a_n$,
$s_1 = \langle \in, \langle f(a_1), \dots, f(a_n)\rangle, g(O_{y_1 \dots y_n})\rangle$ und
$s_2 = \langle \in, \langle f^*(a_1), \dots, f^*(a_{i-1}), f^*(a_i), f^*(a_{i+1}), \dots, f^*(a_n)\rangle, g^*(O_{y_1 \dots y_n})\rangle$, dann:
(i) wenn für alle i (mit $1 \leq i \leq n$) $f(a_i) \downarrow$ ist, dann:
$\bar{e}(S) = s_1$ und
$\ltimes_{M^*/M}\ \bar{e}(S) \Leftrightarrow\ \ltimes_{M^*/M}\ s_1 \Leftrightarrow$
$\langle f(a_1), \dots, f(a_n)\rangle \in g(O_{y_1 \dots y_n}) \Leftrightarrow$
$\models^f_M S \Leftrightarrow\ \models_{M^*/M} S$

(ii) wenn für einige i (mit $1 \leq i \leq n$) $f(a_i) \uparrow$ ist, dann:
$\bar{e}(S) = s_2$ und
$\models\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}(S) \Leftrightarrow\ \models\!\!\!<_{M^*/M}\ s_2 \Leftrightarrow$
$\langle f^*(a_1), \ldots, f^*(a_{i-1}), f^*(a_i), f^*(a_{i+1}), \ldots, f^*(a_n)\rangle \in$
$g^*(O_{y_1 \ldots y_n}) \Leftrightarrow$
$\models_{M^*} S \Leftrightarrow\ \models_{M^*/M} S$

(3) Wenn $S = (\Delta y \mathrm{E}!y)a$, $f(a) \downarrow$ ist und
$s = \langle \in, f(a), D\rangle$, dann:
$\bar{e}(S) = s$ und
$\models\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}(S) \Leftrightarrow\ \models\!\!\!<_{M^*/M}\ s \Leftrightarrow$
$f(a) \in D \Leftrightarrow f(a)$ ist $\downarrow \Leftrightarrow$
$\models^f_M S \Leftrightarrow\ \models_{M^*/M} S$

(4) Wenn $S = (\Delta y \neg \mathrm{E}!y)a$, $f(a) \uparrow$ ist,
$s = \langle \notin, f(a)^\infty, \varnothing\rangle$ und $f(a)^\infty \notin D$, dann:
$\bar{e}(S) = s$ und
$\models\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}(S) \Leftrightarrow\ \models\!\!\!<_{M^*/M}\ s \Leftrightarrow\ \models\!\!\!<^f_M\ s \Leftrightarrow$
$f(a)^\infty \notin D \Leftrightarrow f(a)$ ist $\uparrow \Leftrightarrow$
$\models^f_M S \Leftrightarrow\ \models_{M^*/M} S$

(5) Wenn $S = (\Delta y_1 \Delta y_2 y_1 = y_2)ab$,
$s_1 = \langle \in, \langle f(a), f(b)\rangle, I\rangle$ und
$s_2 = \langle \in, \langle f^*(a), f^*(b)\rangle, I^*\rangle$, dann:
(i) wenn $f(a)$ und $f(b) \downarrow$ sind, dann:
$\bar{e}(S) = s_1$ und
$\models\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}(S) \Leftrightarrow\ \models\!\!\!<_{M^*/M}\ s_1 \Leftrightarrow$
$\langle f(a), f(b)\rangle \in I \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow$
$\models^f_M S \Leftrightarrow\ \models_{M^*/M} S$
(ii) wenn $f(a)$ und $f(b) \uparrow$ sind, dann:
$\bar{e}(S) = s_2$ und
$\models\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}(S) \Leftrightarrow\ \models\!\!\!<_{M^*/M}\ s_2 \Leftrightarrow$
$\langle f^*(a), f^*(b)\rangle \in I^* \Leftrightarrow f^*(a) = f^*(b) \Leftrightarrow$
$\models_{M^*} S \Leftrightarrow\ \models_{M^*/M} S$

(6) Wenn $S = (\Delta y_1 \Delta y_2 \neg y_1 = y_2)ab$,
$s_1 = \langle \in, \langle f(a), f(b)\rangle, D^2 \backslash I\rangle$,
$s_2 = \langle \in, \langle f(a)^\infty, f(b)\rangle, D^2 \backslash I\rangle$, $f(a)^\infty \notin D$, $f(b) \in D$ und
$s_3 = \langle \in, \langle f^*(a), f^*(b)\rangle, D^{*2} \backslash I^*\rangle$, dann:

(i) wenn $f(a)$ und $f(b) \downarrow$ sind, dann:
$\bar{e}(S) = s_1$ und
$\models\!\!\!<_{M^*/M} \bar{e}(S) \Leftrightarrow \models\!\!\!<_{M^*/M} s_1 \Leftrightarrow$
$\langle f(a), f(b)\rangle \in D^2 \backslash I \Leftrightarrow f(a) \neq f(b) \Leftrightarrow$
$\models^f_M S \Leftrightarrow \models_{M^*/M} S$

(ii) wenn $f(a) \uparrow$ ist und $f(b) \downarrow$ ist, dann:
$\bar{e}(S) = s_2$ und
$\models\!\!\!<_{M^*/M} \bar{e}(S) \Leftrightarrow \models\!\!\!<_{M^*/M} s_2 \Leftrightarrow \models\!\!\!<^f_M s_2 \Leftrightarrow$
$f(a)^\infty \notin D$ und $f(b) \in D \Leftrightarrow f(a)$ ist $\uparrow$ und $f(b)$ ist $\downarrow$
$\Leftrightarrow \models^f_M S \Leftrightarrow \models_{M^*/M} S$
(und analog für die anderen Fälle)

(iii) wenn $f(a)$ und $f(b) \uparrow$ sind, dann:
$\bar{e}(S) = s_3$ und
$\models\!\!\!<_{M^*/M} \bar{e}(S) \Leftrightarrow \models\!\!\!<_{M^*/M} s_3 \Leftrightarrow$
$\langle f^*(a), f^*(b)\rangle \in D^{*2} \backslash I^* \Leftrightarrow f^*(a) \neq f^*(b) \Leftrightarrow$
$\models_{M^*} S \Leftrightarrow \models_{M^*/M} S$

(b) Negationssätze
Wenn $S = \neg A$, $s = \langle \text{NICHT}, \bar{e}(A)\rangle$ und $\bar{e}(S) = s$, dann lautet hier die Induktionshypothese:

(IH) $\models\!\!\!<_{M^*/M} \bar{e}(A) \Leftrightarrow \models_{M^*/M} A$

(7) $\models\!\!\!<_{M^*/M} \bar{e}(S) \Leftrightarrow \models\!\!\!<_{M^*/M} s \Leftrightarrow >\!\!\!\dashv_{M^*/M} \bar{e}(A) \Leftrightarrow_{(\text{IH})}$
$=\!\!\!|_{M^*/M} A \Leftrightarrow \models_{M^*/M} S$

(c) Konjunktionssätze
Wenn $S = A \wedge B$, $s = \langle \text{UND}, \{\bar{e}(A), \bar{e}(B)\}\rangle$ und $\bar{e}(S) = s$, dann lautet hier die Induktionshypothese:

(IH) $\models\!\!\!<_{M^*/M} \bar{e}(A)$ und $\models\!\!\!<_{M^*/M} \bar{e}(B) \Leftrightarrow$
$\models_{M^*/M} A$ und $\models_{M^*/M} B$

(8) $\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}(S) \Leftrightarrow\ \mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ s \Leftrightarrow$
$\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}(A)$ und $\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}(B) \Leftrightarrow_{(\mathrm{IH})}$
$\models_{M^*/M} A$ und $\models_{M^*/M} B \Leftrightarrow$
$\models_{M^*/M} S$

(d) Allsätze I
Folgendes gilt wegen (2)–(8): für alle singulären Terme a_1 gilt:

(9) $\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E!}y)a_1) \Leftrightarrow\ \models_{M^*/M} (\Delta y\mathrm{E!}y)a_1$ und
$\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)) \Leftrightarrow\ \models_{M^*/M} A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)$

Weiters gilt wegen der Definition des Bestehens der Extensionen von quantorenfreien Sätze das Bikonditional (10) aus §6.3.4. Demnach gilt für alle singulären Terme a_1: wenn $\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E!}y)a_1)$, dann:

(10) $\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)) \Leftrightarrow$
$A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)\ /\ e(G_1) \subseteq D^{n_1}, \ldots, e(G_m) \subseteq D^{n_m}$

Weiters gilt wegen der Definition der logischen Attribute$_2$ (siehe (16) aus §6.3.3) folgendes:

(11) $R_j^m = \{\langle X_1, \ldots, X_m\rangle |$ für alle singulären Terme a_1 gilt
$(\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E!}y)a_1) \Rightarrow$
$A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)\ /\ X_1 \subseteq D^{n_1}, \ldots, X_m \subseteq D^{n_m})\}$

Also, wenn $S = \forall x_1(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)(x_1/a_1))$,
$s = \langle R_j^m, \langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle\rangle$ und $\bar{e}(S) = s$, dann:

(12) $\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}(S) \Leftrightarrow\ \mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ s \Leftrightarrow$
$\langle e(G_1), \ldots, e(G_m)\rangle \in R_j^m \Leftrightarrow_{(11)}$
für alle singulären Terme a_1 gilt
$(\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E!}y)a_1) \Rightarrow$
$A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)\ /\ e(G_1) \subseteq D^{n_1}, \ldots, e(G_m) \subseteq D^{n_m}) \Leftrightarrow_{(10)}$
für alle singulären Terme a_1 gilt
$(\mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E!}y)a_1) \Rightarrow\ \mid\!\!\!\prec_{M^*/M}\ \bar{e}(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1))) \Leftrightarrow_{(9)}$
für alle singulären Terme a_1 gilt
$(\models_{M^*/M} (\Delta y\mathrm{E!}y)a_1 \Rightarrow\ \models_{M^*/M} A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1)) \Leftrightarrow$
$\models_{M^*/M} S$

(e) Allsätze II

Die Induktionshypothese lautet hier wie folgt: für alle singulären Terme a_i gilt:

(IH) $\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}(\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\ldots,x_{i-1}/a_{i-1}))) \Leftrightarrow$
$\models_{M^*/M}\ \forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\ldots,x_{i-1}/a_{i-1}))$

Weiters gilt wegen der Definition des Bestehens der Extensionen von quantorenfreien Sätzen das Bikonditional (10) aus §6.3.4. D.h. es gilt für alle singulären Terme $a_1,\ldots,a_i$, daß:
wenn $\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y \mathrm{E}!y)a_1)$ & … & $\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y \mathrm{E}!y)a_i)$, dann:

(13) $\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)) \Leftrightarrow$
$A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)\ /\ e(G_1)\subseteq D^{n_1},\ldots,e(G_m)\subseteq D^{n_m}$

Weiters gilt wegen der Definition der logischen Attribute$_2$ (siehe (16) aus §6.3.3):

(14) $R^m_k = \{\langle X_1,\ldots,X_m\rangle|$ für alle singulären Terme a_i gilt
($\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y \mathrm{E}!y)a_i) \Rightarrow$
(nicht) für alle singulären Terme a_{i-1} gilt
($\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y \mathrm{E}!y)a_{i-1}) \Rightarrow$
(nicht) … (nicht) für alle singulären Terme a_1 gilt
($\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y \mathrm{E}!y)a_1) \Rightarrow$
$A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)\ /\ X_1\subseteq D^{n_1},\ldots,$
$X_m\subseteq D^{n_m})\ldots))\}$

Weiters gilt wegen (12) aus §6.3.4 folgendes:

(15) Für alle singulären Terme a_i gilt
($\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y \mathrm{E}!y)a_i) \Rightarrow$
(nicht) für alle singulären Terme a_{i-1} gilt
($\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y \mathrm{E}!y)a_{i-1}) \Rightarrow$
(nicht) … (nicht) für alle singulären Terme a_1 gilt
($\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y \mathrm{E}!y)a_1) \Rightarrow$
$\mid\!\!\!\!<_{M^*/M}\ \bar{e}(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)))\ldots)) \Leftrightarrow$

für alle singulären Terme a_i gilt
$(\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_i) \Rightarrow$
(nicht) $\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}(\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\ldots,x_{i-1}/a_{i-1}))))$

Also, wenn $S = \forall x_i(\neg)\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\ldots,x_i/a_i))$,
$s = \langle R_k^m, \langle e(G_1),\ldots,e(G_m)\rangle\rangle$ und $\bar{e}(S) = s$, dann:

(16) $\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}(S) \Leftrightarrow\ \mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ s \Leftrightarrow$
$\langle e(G_1),\ldots,e(G_m)\rangle \in R_k^m \Leftrightarrow_{(14)}$
für alle singulären Terme a_i gilt
$(\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_i) \Rightarrow$
(nicht) für alle singulären Terme a_{i-1} gilt
$(\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_{i-1}) \Rightarrow$
(nicht) ... (nicht) für alle singulären Terme a_1 gilt
$(\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_1) \Rightarrow$
$A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)\ /\ e(G_1) \subseteq D^{n_1},\ldots,$
$e(G_m) \subseteq D^{n_m})\ldots)) \Leftrightarrow_{(13)}$
für alle singulären Terme a_i gilt
$(\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_i) \Rightarrow$
(nicht) für alle singulären Terme a_{i-1} gilt
$(\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_{i-1}) \Rightarrow$
(nicht) ... (nicht) für alle singulären Terme a_1 gilt
$(\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_1) \Rightarrow$
$\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)))\ldots)) \Leftrightarrow_{(15)}$
für alle singulären Terme a_i gilt
$(\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}((\Delta y\mathrm{E}!y)a_i) \Rightarrow$
(nicht) $\mathrel{|\!\!\!<}_{M^*/M}\ \bar{e}(\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\ldots,x_{i-1}/a_{i-1}))))$
$\Leftrightarrow_{(9),(\mathrm{IH})}$
für alle singulären Terme a_i gilt
$(\models_{M^*/M}\ (\Delta y\mathrm{E}!y)a_i \Rightarrow$
(nicht) $\models_{M^*/M}\ \forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\ldots,x_{i-1}/a_{i-1}))) \Leftrightarrow$

für alle singulären Terme a_i gilt
$(\models_{M^*/M} (\Delta y \mathrm{E}!y)a_i \Rightarrow$
$\models_{M^*/M} (\neg)\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\ldots,x_{i-1}/a_{i-1}))) \Leftrightarrow$
$\models_{M^*/M} \forall x_i(\neg)\forall x_{i-1}(\neg)\ldots(\neg)\forall x_1$
$(A^-[G_{\overline{m}}](a_1/x_1,\ldots,a_i/x_i)(x_1/a_1,\ldots,x_i/a_i)) \Leftrightarrow$
$\models_{M^*/M} S$

Daher gilt (1). Folglich gilt auch (L3), d.h. es gilt für alle Sätze S von $\mathcal{L}_2$, daß: $\models_3 S \Leftrightarrow \models_4 S$. Sei PFL_2 irgendein System der positiven freien Logik. Angenommen, es gilt bereits für alle Sätze S von $\mathcal{L}_2$, daß S ein Theorem von PFL_2 ist $\Leftrightarrow \models_3 S$. Es folgt dann für alle Sätze S von $\mathcal{L}_2$, daß S ein Theorem von PFL_2 ist $\Leftrightarrow \models_4 S$. Dies beweist (T8). □

6.4 Zusammenfassung

Jetzt, wo beide Sachverhaltssemantiken detailliert ausgearbeitet sind, lohnt es sich, zurückzublicken und sie kurz miteinander zu vergleichen. Bei ihrer Ausarbeitung wurden zwei unterschiedliche Ansätze zur Entwicklung von Sachverhaltssemantiken gewählt, welche schon in §3 beschrieben worden sind. Es sei hier nochmals der hauptsächliche Unterschied zwischen diesen beiden Entwicklungsansätzen erwähnt: Während nach dem ersten Ansatz das logische Wahrsein über den Wahrheitsbegriff einer Sachverhaltssemantik definiert wird, geschieht dies nach dem zweiten Ansatz über den Begriff des logischen Bestehens eines Sachverhalts.

Grundsätzlich sind in der freien Logik zwei Arten von Modellen bekannt: Während die erste Sachverhaltssemantik auf den *Inner-Outer-Domain*-Modellen basiert, beruht die zweite Sachverhaltssemantik auf den Einzel-*Domain*-Modellen und bedient sich zudem der Methode der Superbewertungen. Die Unterschiede zwischen diesen beiden Arten von Modellen bedingen naturgemäß die weiteren Unterschiede zwischen den beiden Sachverhaltssemantiken und insbesonders zwischen den beiden Theorien von logischen Attributen sowie den beiden Mengen von Sachverhalten, welche in §4 und §6 eingeführt wurden.

Nach beiden Theorien werden logische Attribute als bestimmte Mengen zweiter Stufe aufgefaßt, welche auf eine analoge Weise rekursiv definiert werden können. Allerdings gibt es dabei auch einen wichtigen Unterschied. Dieser zeigt sich darin, wie die Bedingung, daß bei der substitutionellen Interpretation der Quantifikation die ersetzenden singulären Terme existentiellen Gehalt haben müssen, formuliert wird. Im §1.2 habe ich dazu gesagt, daß ein singulärer Term existentiellen Gehalt hat g.d.w. er ein existierendes Einzelding bezeichnet. Diese Definition des Begriffs des existentiellen Gehalts wird nun in beiden Theorien auf eine unterschiedliche Weise formal umgesetzt: So wird in der ersten Theorie verlangt, daß die Extensionen von solchen ersetzenden singulären Termen Elemente des inneren *Domains* sind (d.h. relativ zum *Domain* existierende Einzeldinge sind); dagegen fordert die zweite Theorie, daß die Extensionen derjenigen singulären Existenzsätze, welche mit solchen ersetzenden singulären Termen gebildet werden, bestehen. Dieser Unterschied läßt sich anhand eines Beispiels wie folgt erläutern: Während nach der ersten Theorie der singuläre Term 'Vulkan' existentiellen Gehalt hat g.d.w. 'Vulkan' von einem existierenden Einzelding spricht, hat er es nach der zweiten Theorie g.d.w. es sich so verhält wie das, wovon der Satz 'Vulkan existiert' spricht (bzw. – nach Satz (1) aus §6.3.6 – g.d.w. der Satz 'Vulkan existiert' wahr ist). Unter der Voraussetzung, daß es sich hier um formale Umsetzungen ein und desselben Begriffs des existentiellen Gehalts handelt, gilt also: Es verhält sich so wie das, wovon der Satz 'Vulkan existiert' spricht (bzw. der Satz 'Vulkan existiert' ist wahr) g.d.w. der Term 'Vulkan' von einem existierenden Einzelding spricht. Die unterschiedliche formale Umsetzung von obiger Charakterisierung des Begriffs des existentiellen Gehalts wirkt sich also nicht so aus, daß man dadurch zu einer völlig widersinnigen Bestimmung des Bestehens desjenigen Sachverhalts, welchen ein singulärer Existenzsatz zur Extension hat, (bzw. des Wahrseins eines singulären Existenzsatzes) gelangen würde. Ganz im Gegenteil, es handelt sich bei der vorliegenden Bestimmung des Wahrseins eines singulären Existenzsatzes um eine ebenso vertretbare Auffassung wie jene, wonach ein Satz wie 'Vulkan existiert' wahr ist g.d.w. Vulkan existiert.

Auch die beiden Mengen von Sachverhalten werden auf eine analoge Weise rekursiv definiert. Die ersten Elemente von solchen Sachverhalten zeigen dabei die Art der Zusammensetzung an. Sieht man davon ab, daß die Sachverhalte der zweiten Art an ihrer ersten Stelle die Non-Elementrelation enthalten können, was bei den Sachverhalten der ersten Art nicht so sein kann, dann scheinen sich die beiden Arten von Sachverhalten gar nicht so stark voneinander zu unterscheiden. So enthalten etwa beide Arten von Sachverhalten relativ zum *Domain* nicht-existierende Einzeldinge. Doch dieser Schein trügt. Einmal sind diese nicht-existierenden Einzeldinge in der ersten Sachverhaltssemantik Elemente des äußeren *Domains* und somit auch des gegebenen *Domains*. Dagegen sind sie in der zweiten Sachverhaltssemantik keinesfalls Elemente des gegebenen *Domains*. Weiters spielen die nicht-existierenden Einzeldinge durchaus unterschiedliche Rollen: Während sie bei den Sachverhalten der ersten Art die Extensionen von leeren singulären Termen sind, sind sie bei den Sachverhalten der zweiten Art keinesfalls solche Extensionen. Sie haben hier vielmehr die Aufgabe, die Löcher in all jenen Sachverhalten zu markieren, wo ein Einzelding aufgrund eines irreferentiellen singulären Terms fehlt. Sie werden nämlich nicht den irreferentiellen singulären Termen als deren Extensionen zugeordnet, sondern vielmehr den leeren Funktionsausdrücken der zweiten Sachverhaltssemantik zugeordnet.

7 Antworten II auf das Extensionalitätsproblem

Im folgenden wird im Rahmen der zweiten Sachverhaltssemantik und mittels der Analyse der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn aus §3 eine weitere Lösung für das Extensionalitätsproblem vorgeschlagen. So kann anhand dieser Semantik bewiesen werden, daß alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen unter manchen Bedeutungen des Wortes 'SE-extensional' SE-extensional sind (es aber unter anderen Bedeutungen nicht sind). Weiters setzt das NEA von Lambert die Einzel-*Domain*-Modelle der freien Logik voraus.[68] Da die vorliegende Sachverhaltssemantik auf solchen Modellen basiert, kann demnach in dessen Rahmen das NEA einer gründlichen Analyse unterzogen werden. Ich zeige dabei auf, wieso dieses Argument aus dem Blickwinkel einer solchen Semantik nicht funktionieren kann. Dies liegt daran, daß im Licht dieser Sachverhaltssemantik das klassische Prinzip der Termabstraktion (aus §1.3) sowohl völlig unplausibel als auch gar nicht gültig in dieser Semantik ist. Letzteres Prinzip spielt aber im NEA eine wichtige Rolle, weil es die Gleichsetzung des Wahrheitswerts von Sätzen der Form $(\Delta yA)a$ mit demjenigen von Sätzen der Form $A(a/y)$ erlaubt. Unter der zusätzlichen Annahme, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, ergibt sich dann, daß Sätze der Form $(\Delta yA)a$ immer dieselbe Extension haben wie Sätze der Form $A(a/y)$. Nach der vorliegenden Sachverhaltssemantik haben jedoch unsere Sätze im allgemeinen verschiedene logische Formen, und zwar weil die Art der Bestimmung des Wahrheitswerts von solchen Sätzen im allgemeinen verschieden ist. Da aber hier die logische Form eines Satzes bestimmt, wie der Sachverhalt$_2$, welchen er zur Extension hat, zusammengesetzt ist, haben unsere Sätze im allgemeinen verschiedene Sachverhalte$_2$ zur Extension und damit auch verschiedene Extensionen. Und all dies gilt natürlich auch dann, wenn leere singuläre Terme im Spiel sind. In der folgenden Diskussion muß ferner beachtet werden, daß in jeder Einzel-*Domain*-Semantik für die freie Logik die leeren singulären Terme mit den irreferentiellen singulären Termen zusammenfallen (also nichts bezeichnen).

[68] Vgl. Lambert 2003, S.111.

7.1 Koextensionalität

Bevor ich die Antworten auf das Extensionalitätsproblem, welche sich im Rahmen der vorliegenden Superbewertungs-Sachverhaltssemantik ergeben, formulieren kann, müssen zunächst einmal jene Begriffe der Koextensionalität, der SE-Extensionalität und der SS-Extensionalität vorgestellt werden, welche in diesem Rahmen definiert werden können. So habe ich in §6.3.3 zwei Extensionsfunktionen eingeführt, nämlich e und $\bar{e}$. Mittels dieser beiden Extensionsfunktionen lassen sich aufgrund der Definitionen (Df.K$_1$)–(Df.K$_4$) aus §2.1 insgesamt acht Relationen der Koextensionalität einführen, wenn ε durch e bzw. $\bar{e}$ ersetzt wird. Es soll dabei wieder offen bleiben, wie die mengentheoretischen Stellvertreter für die Extensionen von Sätzen philosophisch interpretiert werden. Wir erhalten demnach die folgenden Definitionen für diese acht Relationen:

(Df.K$_{\mathrm{I}}$) $A_1 \circ_e A_2$ (d.h. A_1 ist *schwach koextensional*$_{\mathrm{I}}$ *relativ zu e* mit A_2) :$\Leftrightarrow$
$(\bigwedge en_1, en_2)(e(A_1) = en_1 \ \& \ e(A_2) = en_2 \Rightarrow en_1 = en_2)$

D.h. zwei Ausdrücke sind schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu einer Extensionsfunktion e g.d.w. was immer der eine Ausdruck als Extension bei e hat, ist auch die Extension des anderen Ausdrucks bei e. Weiters:

(Df.K$_{\mathrm{II}}$) $A_1 \circ A_2$ (d.h. A_1 ist *schwach koextensional*$_{\mathrm{II}}$ mit A_2) :$\Leftrightarrow$
$(\bigwedge e)(A_1 \circ_e A_2)$

D.h. zwei Ausdrücke sind absolut schwach koextensional$_{\mathrm{II}}$ g.d.w. sie schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu allen Extensionsfunktionen e sind. Zudem:

(Df.K$_{\mathrm{III}}$) $A_1 \nabla_e A_2$ (d.h. A_1 ist *stark koextensional*$_{\mathrm{III}}$ *relativ zu e* mit A_2) :$\Leftrightarrow$
$(\bigvee en_1)(e(A_1) = en_1) \ \& \ (\bigvee en_2)(e(A_2) = en_2) \ \& \ A_1 \circ_e A_2$

D.h. zwei Ausdrücke sind stark koextensional$_{\mathrm{III}}$ relativ zu einer Extensionsfunktion e g.d.w. die beiden Ausdrücke eine Extension bei e haben und sie beide schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu dieser Extensionsfunktion e sind. Ferner:

(Df.K_{IV}) $A_1 \triangledown A_2$ (d.h. A_1 ist *stark koextensional*$_{IV}$ mit A_2) $:\Leftrightarrow$ $(\bigwedge e)(A_1 \triangledown_e A_2)$[69]

D.h. zwei Ausdrücke sind absolut stark koextensional$_{IV}$ g.d.w. sie stark koextensional$_{III}$ relativ zu allen Extensionsfunktionen e sind. Außerdem:

(Df.K_V) $A_1 \cong_{\bar{e}} A_2$ (d.h. A_1 ist *schwach koextensional*$_V$ *relativ zu* $\bar{e}$ mit A_2) $:\Leftrightarrow$
$(\bigwedge en_1, en_2)(\bar{e}(A_1) = en_1 \ \& \ \bar{e}(A_2) = en_2 \Rightarrow en_1 = en_2)$

D.h. zwei Ausdrücke sind schwach koextensional$_V$ relativ zu einer Extensionsfunktion $\bar{e}$ g.d.w. was immer der eine Ausdruck zur Extension bei $\bar{e}$ hat, ist auch die Extension des anderen Ausdrucks bei $\bar{e}$. Weiters:

(Df.K_{VI}) $A_1 \cong A_2$ (d.h. A_1 ist *schwach koextensional*$_{VI}$ mit A_2) $:\Leftrightarrow$ $(\bigwedge \bar{e})(A_1 \cong_{\bar{e}} A_2)$

D.h. zwei Ausdrücke sind absolut schwach koextensional$_{VI}$ g.d.w. sie schwach koextensional$_V$ relativ zu allen Extensionsfunktionen $\bar{e}$ sind. Zudem:

(Df.K_{VII}) $A_1 \equiv_{\bar{e}} A_2$ (d.h. A_1 ist *stark koextensional*$_{VII}$ *relativ zu* $\bar{e}$ mit A_2) $:\Leftrightarrow$
$(\bigvee en_1)(\bar{e}(A_1) = en_1) \ \& \ (\bigvee en_2)(\bar{e}(A_2) = en_2) \ \&$
$A_1 \cong_{\bar{e}} A_2$

D.h. zwei Ausdrücke sind stark koextensional$_{VII}$ relativ zu einer Extensionsfunktion $\bar{e}$ g.d.w. die beiden Ausdrücke eine Extension bei $\bar{e}$ haben und sie beide schwach koextensional$_V$ relativ zu dieser Extensionsfunktion $\bar{e}$ sind. Schließlich:

(Df.K_{VIII}) $A_1 \equiv A_2$ (d.h. A_1 ist *stark koextensional*$_{VIII}$ mit A_2) $:\Leftrightarrow$ $(\bigwedge \bar{e})(A_1 \equiv_{\bar{e}} A_2)$[70]

[69] D.h. $A_1 \triangledown A_2 \Leftrightarrow (\bigwedge e)((\bigvee en_1)(e(A_1) = en_1) \ \& \ (\bigvee en_2)(e(A_2) = en_2)) \ \& \ A_1 \circ A_2$

[70] D.h. $A_1 \equiv A_2 \Leftrightarrow (\bigwedge \bar{e})((\bigvee en_1)(\bar{e}(A_1) = en_1) \ \& \ (\bigvee en_2)(\bar{e}(A_2) = en_2)) \ \& \ A_1 \cong A_2$

D.h. zwei Ausdrücke sind absolut stark koextensional$_{\text{VIII}}$ g.d.w. sie stark koextensional$_{\text{VII}}$ relativ zu allen Extensionsfunktionen $\bar{e}$ sind.

Aufgrund dieser Definitionen können einige Theoreme von diesen Relationen der Koextensionalität bewiesen werden, welche für die Diskussion von Lamberts NEA relevant sind.

Da die Extensionsfunktion e jedem komplexen n-stelligen generellen Term genau eine Extension zuordnet (e ist also total auf der Menge der komplexen n-stelligen generellen Terme definiert), fällt hier die schwache Koextensionalität$_{\text{I}}$-relativ-zu-e mit der starken Koextensionalität$_{\text{III}}$-relativ-zu-e zusammen. Es gilt deshalb für alle komplexen n-stelligen generellen Terme G_1, G_2, daß:

(T9) $\quad G_1 \circ_e G_2 \Leftrightarrow e(G_1) = e(G_2) \Leftrightarrow G_1 \triangledown_e G_2$

Der Beweis ist analog zu dem für das Theorem (T4). Die schwache Koextensionalität$_{\text{I}}$-relativ-zu-e erweist sich also ebenso als eine Äquivalenzrelation zwischen solchen Termen wie die starke Koextensionalität$_{\text{III}}$-relativ-zu-e.

Weiters gilt – wegen (Df.K$_{\text{I}}$) – für alle Ausdrücke A_1, A_2, daß: $A_1 \circ_e A_2 \Leftrightarrow (\bigwedge en_1, en_2)\ (e(A_1) = en_1\ \&\ e(A_2) = en_2 \Rightarrow en_1 = en_2)$. Wenn aber mindestens eines von $e(A_1)$ und $e(A_2)$ $\uparrow$ ist, dann ist das Antezedens der universellen Implikation auf der rechten Seite dieses Bikonditionals falsch und folglich die universelle Implikation wahr. Demnach ist $A_1 \circ_e A_2$ dann auch wahr.[71] Ferner ist dann die starke Koextensionalität$_{\text{III}}$-relativ-zu-e zwischen singulären Termen und Sätzen *nicht reflexiv* (aber sie ist symmetrisch und transitiv).[72] Es gilt also folgendes:

[71] Das hat natürlich die überraschende Konsequenz, daß z.B. 'Vulkan' und 'Mars' bzw. 'Vulkan rotiert' und 'Mars rotiert' schwach koextensional$_1$ relativ zu e sind, wenn e eine Funktion ist, welche den Ausdrücken Extensionen so zuordnet, wie es sich in unserer aktualen Welt verhält.

[72] Die Non-Reflexivität von $\triangledown_e$ ist offensichtlich, wenn man irreferentielle singuläre Terme und elementare Sätze mit solchen irreferentiellen Termen betrachtet. Denn solche Ausdrücke haben keine Extension bei e, weshalb die erste Bedingung einer jeden Auffassung der starken Koextensionalität (nämlich, daß die betreffenden Ausdrücke eine Extension haben) verletzt ist.

(T10) Für alle singulären Terme und Sätze A_1, A_2 (desselben Typs) gilt:
wenn mindestens eines von $e(A_1)$ und $e(A_2) \uparrow$ ist, dann
$A_1 \circ_e A_2$ & nicht $A_1 \triangledown_e A_2$

Da weiters die Extensionsfunktion e erlaubt, daß singuläre Terme und Sätze keine Extension haben (e ist also partiell auf den Mengen der singulären Terme und Sätze definiert), ist die schwache Koextensionalität$_{\mathrm{I}}$-relativ-zu-e zwischen solchen Ausdrücken *nicht transitiv* (aber sie ist reflexiv und symmetrisch).[73] Die ersten vier Relationen der Koextensionalität sind somit im allgemeinen keine Äquivalenzrelationen.

Da im Gegensatz dazu die Extensionsfunktion $\bar{e}$ total auf den Mengen der singulären sowie komplexen n-stelligen generellen Terme und Sätze definiert ist, ist die schwache Koextensionalität$_{\mathrm{V}}$-relativ-zu-$\bar{e}$ identisch mit der starken Koextensionalität$_{\mathrm{VII}}$-relativ-zu-$\bar{e}$. Es gilt deshalb folgendes:

(T11) Für alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$A_1 \cong_{\bar{e}} A_2 \Leftrightarrow \bar{e}(A_1) = \bar{e}(A_2) \Leftrightarrow A_1 \equiv_{\bar{e}} A_2$

Der Beweis ist wieder analog zu dem für das Theorem (T4). Wegen (T11) gilt also auch folgendes Theorem:

(T12) Für alle Ausdrücke A_1, A_2 gilt:
$A_1 \cong A_2 \Leftrightarrow (\bigwedge \bar{e})(\bar{e}(A_1) = \bar{e}(A_2)) \Leftrightarrow A_1 \equiv A_2$

Die letzten vier Relationen der Koextensionalität sind somit Äquivalenzrelationen.

[73] Wie gesagt, wird im *Slingshot*-Argument vorausgesetzt, daß die Relation der Koextensionalität transitiv ist. Die Annahme der schwachen Koextensionalität$_{\mathrm{I}}$-relativ-zu-e ist somit ein effektiver Weg, um dieses Argument zu blockieren. Weiters kann die Non-Transitivität von $\circ_e$ leicht wie folgt gezeigt werden: Betrachte ein e, welches den Ausdrücken Extensionen so zuordnet, wie es sich in unserer aktualen Welt verhält. Es ist dann – wegen (T10) – wahr, daß 'Mars' $\circ_e$ 'Vulkan' und 'Vulkan' $\circ_e$ 'Venus', aber es gilt dann nicht, daß 'Mars' $\circ_e$ 'Venus', und zwar weil Mars und Venus in unserer aktualen Welt verschiedene Planeten sind.

7.2 SE-Extensionalität und Stärkediagramme

Weiters können gemäß §2.3 die entsprechenden Eigenschaften der SE-Extensionalität wie folgt definiert werden:

(Df.SE$'_{\mathrm{I}}$) S_1 ist *SE-extensional*$_{\mathrm{I}}$ $:\Leftrightarrow$
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2, e)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)\ \&\ A_1 \circ_e A_2 \Rightarrow S_1 \circ_e S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_{\mathrm{I}}$ g.d.w. für alle Extensionsfunktionen e gilt: in diesem Satz sind relativ zu jenen Extensionsfunktionen e schwach koextensionale$_{\mathrm{I}}$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_{\mathrm{I}}$ der Extension bei e substituierbar. Weiters:

(Df.SE$'_{\mathrm{II}}$) S_1 ist *SE-extensional*$_{\mathrm{II}}$ $:\Leftrightarrow$
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)\ \&\ A_1 \circ A_2 \Rightarrow S_1 \circ S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_{\mathrm{II}}$ g.d.w. darin absolut schwach koextensionale$_{\mathrm{II}}$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_{\mathrm{II}}$ der Extension substituierbar sind. Zudem:

(Df.SE$'_{\mathrm{III}}$) S_1 ist *SE-extensional*$_{\mathrm{III}}$ $:\Leftrightarrow$
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2, e)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)\ \&\ A_1 \triangledown_e A_2 \Rightarrow S_1 \triangledown_e S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_{\mathrm{III}}$ g.d.w. für alle Extensionsfunktionen e gilt: in diesem Satz sind relativ zu jenen Extensionsfunktionen e stark koextensionale$_{\mathrm{III}}$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_{\mathrm{III}}$ der Extension bei e substituierbar. Ferner:

(Df.SE$'_{\mathrm{IV}}$) S_1 ist *SE-extensional*$_{\mathrm{IV}}$ $:\Leftrightarrow$
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)\ \&\ A_1 \triangledown A_2 \Rightarrow S_1 \triangledown S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_{\mathrm{IV}}$ g.d.w. darin absolut stark koextensionale$_{\mathrm{IV}}$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_{\mathrm{IV}}$ der Extension substituierbar sind. Außerdem:

(Df.SE$'_{\mathrm{V}}$) S_1 ist *SE-extensional*$_{\mathrm{V}}$:⇔
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2, \bar{e})$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)\ \&\ A_1 \cong_{\bar{e}} A_2 \Rightarrow S_1 \cong_{\bar{e}} S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_{\mathrm{V}}$ g.d.w. für alle Extensionsfunktionen $\bar{e}$ gilt: in diesem Satz sind relativ zu jenen Extensionsfunktionen $\bar{e}$ schwach koextensionale$_{\mathrm{V}}$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_{\mathrm{V}}$ der Extension bei $\bar{e}$ substituierbar. Weiters:

(Df.SE$'_{\mathrm{VI}}$) S_1 ist *SE-extensional*$_{\mathrm{VI}}$:⇔
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)\ \&\ A_1 \cong A_2 \Rightarrow S_1 \cong S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_{\mathrm{VI}}$ g.d.w. darin absolut schwach koextensionale$_{\mathrm{VI}}$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_{\mathrm{VI}}$ der Extension substituierbar sind. Zudem:

(Df.SE$'_{\mathrm{VII}}$) S_1 ist *SE-extensional*$_{\mathrm{VII}}$:⇔
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2, \bar{e})$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)\ \&\ A_1 \equiv_{\bar{e}} A_2 \Rightarrow S_1 \equiv_{\bar{e}} S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_{\mathrm{VII}}$ g.d.w. für alle Extensionsfunktionen $\bar{e}$ gilt: in diesem Satz sind relativ zu jenen Extensionsfunktionen $\bar{e}$ stark koextensionale$_{\mathrm{VII}}$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_{\mathrm{VII}}$ der Extension bei $\bar{e}$ substituierbar. Schließlich:

(Df.SE$'_{\mathrm{VIII}}$) S_1 ist *SE-extensional*$_{\mathrm{VIII}}$:⇔
$(\bigwedge S_2, A_1, A_2)$
$(\mathit{Erg}(S_2, A_1, S_1, A_2)\ \&\ A_1 \equiv A_2 \Rightarrow S_1 \equiv S_2)$

D.h. ein Satz ist SE-extensional$_{\mathrm{VIII}}$ g.d.w. darin absolut stark koextensionale$_{\mathrm{VIII}}$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_{\mathrm{VIII}}$ der Extension substituierbar sind.

Gemäß §2.3 kann man die Stärkeverhältnisse zwischen diesen Eigenschaften der SE-Extensionalität wie folgt zusammenfassen (es zeigen dabei wieder die Spitzen der Pfeile die jeweiligen logischen Folgerungen an):

3. Stärkediagramm. e ordnet manchen extensionsfähigen Ausdrükken keine Extension zu (e ist also eine *partielle* Funktion):

$$\begin{tikzcd}
 & S_1 \text{ ist SE-extensional}_{\mathrm{III}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S_1 \text{ ist SE-extensional}_{\mathrm{I}} \arrow[dr] & & S_1 \text{ ist SE-extensional}_{\mathrm{IV}} \arrow[dl] \\
 & S_1 \text{ ist SE-extensional}_{\mathrm{II}} &
\end{tikzcd}$$

Da e manchen extensionsfähigen Ausdrücken keine Extension zuordnet, sind somit die SE-Extensionalität$_{\mathrm{III}}$ bzw. die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{II}}$ die stärksten aller Eigenschaften der SE-Extensionalität bzw. der Non-SE-Extensionalität, welche durch die ersten vier Relationen der Koextensionalität und e definierbar sind.[74]

4. Stärkediagramm. $\bar{e}$ ordnet allen extensionsfähigen Ausdrücken eine Extension zu ($\bar{e}$ ist also eine *totale* Funktion):

$$\begin{tikzcd}
 & S_1 \text{ ist SE-extensional}_{\mathrm{VII}} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr] & \\
S_1 \text{ ist SE-extensional}_{\mathrm{V}} \arrow[dr] & & S_1 \text{ ist SE-extensional}_{\mathrm{VIII}} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
 & S_1 \text{ ist SE-extensional}_{\mathrm{VI}} &
\end{tikzcd}$$

Da $\bar{e}$ allen extensionsfähigen Ausdrücken eine Extension zuordnet, sind somit die SE-Extensionalität$_{\mathrm{VII}}$ sowie die SE-Extensionalität$_{\mathrm{V}}$

[74] Beachte hier die entsprechende Bemerkung in der Fußnote 27 auf S.47.

die stärksten Eigenschaften der SE-Extensionalität, welche durch die letzten vier Relationen der Koextensionalität und $\bar{e}$ definierbar sind. Weiters sind dann die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VI}}$ sowie die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ die stärksten Eigenschaften der Non-SE-Extensionalität so definierbar.

Ich fasse im folgenden zu Referenzzwecken diese acht Relationen der Koextensionalität, ihre Symbolisierungen sowie die entsprechenden Eigenschaften der SE-Extensionalität zusammen.

Erste Phase der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik mit der partiellen Extensionsfunktion e

Df.	*Koextensionalität*	*Symbol*	*Extensionalität*	Df.
K_{I}	schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu e	$\circ_e$	SE-extensional$_{\mathrm{I}}$	$\mathrm{SE}'_{\mathrm{I}}$
K_{II}	schwach koextensional$_{\mathrm{II}}$	$\circ$	SE-extensional$_{\mathrm{II}}$	$\mathrm{SE}'_{\mathrm{II}}$
$\mathrm{K}_{\mathrm{III}}$	stark koextensional$_{\mathrm{III}}$ relativ zu e	$\triangledown_e$	SE-extensional$_{\mathrm{III}}$	$\mathrm{SE}'_{\mathrm{III}}$
K_{IV}	stark koextensional$_{\mathrm{IV}}$	$\triangledown$	SE-extensional$_{\mathrm{IV}}$	$\mathrm{SE}'_{\mathrm{IV}}$

Zweite Phase der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik mit der totalen Extensionsfunktion $\bar{e}$

Df.	*Koextensionalität*	*Symbol*	*Extensionalität*	Df.
K_{V}	schwach koextensional$_{\mathrm{V}}$ relativ zu $\bar{e}$	$\cong_{\bar{e}}$	SE-extensional$_{\mathrm{V}}$	$\mathrm{SE}'_{\mathrm{V}}$
K_{VI}	schwach koextensional$_{\mathrm{VI}}$	$\cong$	SE-extensional$_{\mathrm{VI}}$	$\mathrm{SE}'_{\mathrm{VI}}$
$\mathrm{K}_{\mathrm{VII}}$	stark koextensional$_{\mathrm{VII}}$ relativ zu $\bar{e}$	$\equiv_{\bar{e}}$	SE-extensional$_{\mathrm{VII}}$	$\mathrm{SE}'_{\mathrm{VII}}$
$\mathrm{K}_{\mathrm{VIII}}$	stark koextensional$_{\mathrm{VIII}}$	$\equiv$	SE-extensional$_{\mathrm{VIII}}$	$\mathrm{SE}'_{\mathrm{VIII}}$

7.3 Sachverhaltsbezogene Extensionalität

Wie schon in §2.4 gesagt, ist im Begriff der SS-Extensionalität nicht nur derjenige der SE-Extensionalität enthalten, sondern es wird darüber hinaus auch angenommen, daß die mengentheoretischen Stellvertreter für die Extensionen von Sätzen als abstrakte Sachverhalte im Sinn von (S) aus §1.4 zu verstehen sind. Entsprechend den acht Eigenschaften der SE-Extensionalität kann man demnach die folgenden acht Eigenschaften der SS-Extensionalität voneinander unterscheiden:

(Df.SS$''_n$) Ein Satz S_1 ist *SS-extensional*$_n$:⇔
S_1 ist SE-extensional$_n$ &
Sachverhalte sind die Extensionen von Sätzen

(wobei $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{VIII}$). D.h. ein Satz ist *SS-extensional*$_n$ g.d.w. darin koextensionale$_n$ Ausdrücke immer füreinander unbeschadet$_n$ des Sachverhalts als Extension substituierbar sind.

7.4 Erste Antwort

Im Rahmen der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik und meiner Analyse der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn lautet die erste Antwort auf das Extensionalitätsproblem wie folgt:

(T13) Bis auf zwei Sonderfälle sind alle elementaren Sätze (d.s. Sätze ohne Junktoren und Quantoren) mit leeren (d.h. hier: irreferentiellen) singulären Termen SE-extensional$_{\mathrm{I}}$. Bei diesen beiden Sonderfällen handelt es sich um singuläre Existenzsätze der Form $(\Delta y \mathrm{E!}y)a$ und um Identitätssätze der Form $(\Delta y_1 \Delta y_2 y_1 = y_2)ab$, wenn sie genau einen irreferentiellen singulären Term enthalten. Solche elementare Sätze sind dann nämlich non-SE-extensional$_{\mathrm{I}}$. Diese beiden Sonderfälle sind aber SE-extensional$_{\mathrm{II}}$, womit überhaupt alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen SE-extensional$_{\mathrm{II}}$ sind.

Beweis. Zunächst einmal zeige ich, daß bis auf die beiden Sonderfälle alle elementaren Sätze der Form $(\Delta y_1 \ldots \Delta y_n F^n y_1 \ldots y_n)$ $a_1 \ldots a_n$[75] mit leeren singulären Termen SE-extensional$_{\mathrm{I}}$ sind:

Denn alle singulären Terme a, welchen e keine Extension zuordnet (d.h. wo $e(a) \uparrow$ ist), sind – wegen (T10) – untereinander schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu diesem e, und ebenso sind es alle Sätze ohne Extension bei e. Weiters sind – wiederum wegen (T10) – alle singulären Terme, welchen e keine Extension zuordnet, schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu diesem e mit allen singulären Termen a, welchen e eine Extension zuordnet (d.h. wo $e(a) \downarrow$ ist), und ebenso sind es alle Sätze ohne Extension bei e mit Sätzen mit Extension bei e. Ferner haben bis auf die beiden Sonderfälle alle elementaren Sätze der Form $(\Delta y_1 \ldots \Delta y_n F^n y_1 \ldots y_n)a_1 \ldots a_n$ mit singulären Termen, welchen e keine Extension zuordnet, selber keine Extension bei e. Wenn man nun in einem solchen elementaren Satz mit leeren singulären Termen Ausdrücke füreinander ersetzt, welche schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu e sind, dann resultiert entweder ein Satz ohne Extension bei e oder aber einer mit Extension bei e. In beiden Fällen ist jedoch der ursprüngliche Satz mit leeren singulären Termen, welcher selber ja bei e keine Extension hat, – wegen (T10) – schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu e mit dem jeweiligen Ersetzungsergebnis (für alle e, wo $e((\Delta y_1 \ldots \Delta y_n F^n y_1 \ldots y_n)a_1 \ldots a_n) \uparrow$ ist). Also sind bis auf die beiden Sonderfälle alle elementaren Sätze der Form $(\Delta y_1 \ldots \Delta y_n F^n y_1 \ldots y_n)a_1 \ldots a_n$ mit leeren singulären Termen SE-extensional$_{\mathrm{I}}$ und folglich auch SE-extensional$_{\mathrm{II}}$ (siehe das dritte Stärkediagramm).

Weiters stellen singuläre Existenzsätze der Form $(\Delta y \mathrm{E}!y)a$ und Identitätssätze der Form $(\Delta y_1 \Delta y_2 y_1 = y_2)ab$ Sonderfälle dar, wenn sie genau einen irreferentiellen singulären Term enthalten. Sie sind dann nämlich non-SE-extensional$_{\mathrm{I}}$. Dies kann exemplarisch anhand des singulären Existenzsatzes '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$Vulkan' wie folgt gezeigt werden: Betrachte ein e, welches den Ausdrücken Extensionen so

[75] Hier und im folgenden sind bei den Sätzen der Form $(\Delta y_1 \ldots \Delta y_n F^n y_1 \ldots y_n)a_1 \ldots a_n$ *nicht* die singulären Existenzsätze der Form $(\Delta y \mathrm{E}!y)a$ sowie die Identitätssätze der Form $(\Delta y_1 \Delta y_2 y_1 = y_2)ab$ mitgemeint. Denn letztere, aber nicht erstere haben eine Extension bei e, wenn sie genau einen irreferentiellen singulären Term enthalten. Stattdessen werden solche Existenz- und Identitätssätze als eigene Fälle behandelt.

zuordnet, wie es sich in unserer aktualen Welt verhält. Es gilt dann zwar – wegen (T10) – folgendes: 'Vulkan' $\circ_e$ 'Mars', aber es gilt nicht folgendes: '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$Vulkan' $\circ_e$ '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$Mars', und zwar weil der Sachverhalt$_2$, welchen der erste Satz zur Extension bei e hat, verschieden von jenem Sachverhalt$_2$ ist, welchen der zweite Satz zur Extension bei e hat (so ist der erste Sachverhalt$_2$ faktisch nicht bestehend in unserer Welt, der zweite ist dagegen schon darin faktisch bestehend). Analog verläuft der Beweis für Identitätssätze mit genau einem irreferentiellen singulären Term. Damit ist der erste Teil von (T13) bewiesen.

Für den zweiten Teil ist zu zeigen, daß die beiden Sonderfälle SE-extensional$_{\mathrm{II}}$ sind. Ich zeige dies exemplarisch anhand eines singulären Existenzsatzes wie etwa des folgenden Satzes: '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$Vulkan'. Die beiden Teilausdrücke 'Vulkan' und $\Delta y \mathrm{E}!y$ von '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$ Vulkan' können entweder durch identische oder aber durch von ihnen verschiedene Ausdrücke ersetzt werden. Angenommen, man ersetzt sie durch identische Ausdrücke, dann sind die Ersetzungsergebnisse identisch mit '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$Vulkan'. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß $(\Delta y \mathrm{E}!y) \circ (\Delta y \mathrm{E}!y)$ und 'Vulkan' $\circ$ 'Vulkan' sowie '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$Vulkan' $\circ$ '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$Vulkan' gelten. Daher ist in diesen Fällen '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$Vulkan' SE-extensional$_{\mathrm{II}}$. Angenommen weiters, man ersetzt die Teilausdrücke von '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$Vulkan' durch davon verschiedene Ausdrücke. Dann gibt es keinen singulären Term a, so daß für alle von a verschiedenen singulären Terme b gilt: $a \circ b$. Man kann nämlich immer ein e finden, so daß für alle von a verschiedenen singulären Terme b gilt: $e(a) \in D$, aber $e(a) \neq e(b)$. Dies trifft natürlich auch für einen singulären Term wie 'Vulkan' zu, welcher in unserer aktualen Welt irreferentiell ist. Es gibt nämlich ein e, so daß für alle von 'Vulkan' verschiedenen singulären Terme b gilt: $e(\text{Vulkan}) \in D$, aber $e(\text{Vulkan}) \neq e(b)$. Damit ist jedoch auch folgendes für alle von 'Vulkan' verschiedenen singulären Terme b falsch: 'Vulkan' $\circ$ b. Ganz analog dazu ist weiters folgendes für alle von $\Delta y \mathrm{E}!y$ verschiedenen komplexen einstelligen generellen Terme *ohne* Junktoren G falsch: $\Delta y \mathrm{E}!y \circ G$. Es gilt also, daß es keine von 'Vulkan' verschiedenen singulären Terme bzw. von $\Delta y \mathrm{E}!y$ verschiedenen komplexen einstelligen generellen Terme ohne Junktoren gibt, welche mit 'Vulkan' bzw. $\Delta y \mathrm{E}!y$ absolut schwach koextensional$_{\mathrm{II}}$ sind. Deswegen ist das Antezedens der universellen Implikation aus dem Definiens von (Df.SE$'_{\mathrm{II}}$) falsch, und daher ist dieses Definiens wahr. Folglich ist in den genannten Fällen '(ΔyE!y)Vulkan' SE-extensional$_{\mathrm{II}}$. Es muß schließlich nur noch der Fall betrachtet werden, wo ΔyE!y durch einen davon verschiedenen komplexen einstelligen generellen Term *mit* Junktoren ersetzt wird, welcher mit ΔyE!y absolut schwach koextensional$_{\mathrm{II}}$ ist, wie etwa $\Delta y\neg(Fy \wedge \neg Fy)$. Doch dann ist '($\Delta y$E!$y$)Vulkan' $\circ$ '$(\Delta y\neg(Fy \wedge \neg Fy))$Vulkan', und zwar wegen der folgenden beiden Fälle: Wenn 'Vulkan' referentiell ist, dann haben die beiden Sätze ein und denselben Sachverhalt$_2$ zur Extension bei e (für alle e, wo e(Vulkan) $\downarrow$ ist) – also sind dann die beiden Sätze schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu allen e, wo e(Vulkan) $\downarrow$ ist; wenn aber 'Vulkan' irreferentiell ist, dann hat zwar der erste Satz eine Extension bei e, der zweite aber keine Extension bei e (für alle e, wo e(Vulkan) $\uparrow$ ist) – wegen (T10) sind dann also die beiden Sätze schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu allen e, wo e(Vulkan) $\uparrow$ ist. Folglich ist '(ΔyE!y)Vulkan' auch in den zuletzt genannten Fällen SE-extensional$_{\mathrm{II}}$. Analog dazu läßt sich auch die SE-Extensionalität$_{\mathrm{II}}$ für Identitätssätze mit genau einem irreferentiellen singulären Term nachweisen. $\Box$

Man kann die mengentheoretischen Komplexe, welche e den Sätzen zuordnet, als abstrakte Sachverhalte$_2$ im Sinn von (S) auffassen (aber natürlich nicht als Wahrheitswerte, weil letztere keine innere Struktur haben). Unter dieser zusätzlichen Annahme erweisen sich dann – wegen (T13) – bis auf die beiden Sonderfälle alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen als SS-extensional$_{\mathrm{I}}$ sowie überhaupt alle solchen elementaren Sätze als SS-extensional$_{\mathrm{II}}$. Demnach sind in der ersten Phase der vorliegenden Semantik Sachverhalte$_2$ als Extensionen von solchen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen zulässig (gemäß (Df.ZE) aus §1.1) – auch wenn sie, abgesehen von den beiden Sonderfällen, natürlich keine Extensionen bei e haben.

7.5 Zweite Antwort

Die zweite Antwort auf das Extensionalitätsproblem lautet im besagten Rahmen folgendermaßen:

(T14) Alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen und komplexen einstelligen generellen Termen (inklusive singulären Existenzsätzen und Identitätssätzen mit genau einem irreferentiellen singulären Term) sind sowohl non-SE-extensional$_{\text{III}}$ als auch non-SE-extensional$_{\text{IV}}$.

Beweis. Man kann nämlich ganz leicht feststellen, daß die drei komplexen einstelligen generellen Terme

$\Delta y F y$

$\Delta y F y \wedge \mathrm{E}!y$

$\Delta y \mathrm{E}!y \rightarrow F y$,

welche im NEA involviert sind, koextensional in jedem vorhin definierten Sinn sind. Sie sind demnach auch stark koextensional$_{\text{III}}$ relativ zu e und stark koextensional$_{\text{IV}}$. Wenn aber $f(a) \uparrow$ ist (womit auch $e(a) \uparrow$ ist), dann sind in der ersten Phase der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik die Extensionen der drei Sätze

(1) $(\Delta y F y)a$

(2) $(\Delta y F y \wedge \mathrm{E}!y)a$

(3) $(\Delta y \mathrm{E}!y \rightarrow F y)a$

ebenfalls undefiniert bei e (für alle e, wo $e(a) \uparrow$ ist). Demnach verletzen hier diese drei Sätze die erste Bedingung einer jeden Auffassung der starken Koextensionalität: Sie haben nämlich keine Extension bei e (für alle e, wo $e(a) \uparrow$ ist). Also sind sie untereinander weder stark koextensional$_{\text{III}}$ relativ zu e noch stark koextensional$_{\text{IV}}$. Folglich ist der elementare Satz (1) sowohl non-SE-extensional$_{\text{III}}$ als auch non-SE-extensional$_{\text{IV}}$, wenn $f(a) \uparrow$ ist. Die Non-SE-Extensionalität$_{\text{IV}}$ von singulären Existenzsätzen wird hier exemplarisch anhand des Satzes '$(\Delta y \mathrm{E}!y)$Vulkan' bewiesen.

So gilt zwar folgendes: $\Delta y \text{E!} y \triangledown \Delta y \neg(Fy \wedge \neg Fy)$, jedoch nicht folgendes: '$(\Delta y \text{E!} y)$Vulkan' $\triangledown$ '$(\Delta y \neg(Fy \wedge \neg Fy))$Vulkan'. Es hat nämlich nur der erste, aber nicht der zweite Satz eine Extension bei allen e, wo $e(\text{Vulkan}) \uparrow$ ist. Damit ist auch hier wieder die erste Bedingung einer jeden Auffassung der starken Koextensionalität verletzt. '$(\Delta y \text{E!} y)$Vulkan' ist deshalb non-SE-extensional$_{\text{IV}}$ und folglich auch non-SE-extensional$_{\text{III}}$ (siehe das dritte Stärkediagramm). Analog verläuft der Beweis für die Non-SE-Extensionalität$_{\text{IV}}$ von Identitätssätzen, wenn sie genau einen irreferentiellen singulären Term enthalten. □

Allerdings, und das ist mein Punkt, wird im NEA angenommen, daß die beiden Ersetzungsergebnisse (2) und (3) eine Extension haben: Gemäß diesem Argument hat nämlich jeder Satz, welcher aus der Ersetzung von koextensionalen komplexen einstelligen generellen Termen in (1) resultiert, einen Wahrheitswert zur Extension und daher eine Extension. Um es zusammenzufassen, während (1) sowohl non-SE-extensional$_{\text{III}}$ als auch non-SE-extensional$_{\text{IV}}$ ist, eben weil (2) und (3) *keine* Extension haben, wird jedoch in diesem Argument angenommen, daß (2) und (3) *eine* Extension haben. Deshalb kann dieses Argument weder die Non-SE-Extensionalität$_{\text{III}}$ noch die Non-SE-Extensionalität$_{\text{IV}}$ von (1) nachweisen.

7.6 Dritte Antwort und Analyse des NEA

Die dritte Antwort auf das Extensionalitätsproblem lautet im vorliegenden Rahmen wie folgt:

(T15) Alle elementaren Sätze der Form $(\Delta y Fy)a$ mit leeren singulären Termen (exklusive singulären Existenzsätzen mit einem irreferentiellen singulären Term) sind SE-extensional$_{\text{VIII}}$ und damit auch SE-extensional$_{\text{VI}}$.

Beweis. Um dies zu zeigen, betrachte irgendein EDMB $M = \langle\langle D, f\rangle, g\rangle$, wo $f(a) \uparrow$ ist, und irgendeine klassische Vervollständigung $\langle\langle D^*, f^*\rangle, g^*\rangle$ von M:
Selbst wenn $f(a) \uparrow$ ist, gilt *per definitionem* für alle $\bar{e}$, daß:
$\bar{e}(a) \in D^* \supseteq D$, und weiters gilt dann für alle $\bar{e}$ folgendes:

(4) $\bar{e}((\Delta yFy)a) = \langle \in, \bar{e}(a), \bar{e}(\Delta yFy) \rangle$

(5) $\bar{e}((\Delta yFy \wedge \mathrm{E}!y)a) = \langle \in, \bar{e}(a), \bar{e}(\Delta yFy \wedge \mathrm{E}!y) \rangle$

Da zudem für alle $\bar{e}$ gilt, daß:

$$\bar{e}(\Delta yFy) = \bar{e}(\Delta yFy \wedge \mathrm{E}!y)$$

(d.h. die beiden generellen Terme sind – wegen (T12) – stark koextensional$_{\mathrm{VIII}}$), folgt aus (4) und (5) für alle $\bar{e}$, daß:

(6) $\bar{e}((\Delta yFy)a) = \bar{e}((\Delta yFy \wedge \mathrm{E}!y)a)$

Die Sätze (1) und (2) sind somit – wegen (T12) – stark koextensional$_{\mathrm{VIII}}$, wenn $f(a) \uparrow$ ist (und ebenso, wenn $f(a) \downarrow$ ist). Deshalb sind (1) und (2) stark koextensional$_{\mathrm{VIII}}$ (und ebenso (1) und (3)). Die voranstehende Überlegung läßt sich für beliebige generelle Terme, welche mit ΔyFy stark koextensional$_{\mathrm{VIII}}$ sind, wiederholen. Weiters braucht man hier und im folgenden nicht die Ersetzung des irreferentiellen singulären Terms a zu betrachten, weil nämlich kein singulärer Term mit einem irreferentiellen singulären Term in irgendeiner Bedeutung der starken Koextensionalität koextensional sein kann. Folglich sind alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen, welche die Form in

(7) $(\Delta yFy)a$

haben (exklusive singulären Existenzsätzen mit einem irreferentiellen singulären Term), SE-extensional$_{\mathrm{VIII}}$ und deshalb auch SE-extensional$_{\mathrm{VI}}$ (siehe das vierte Stärkediagramm). □

Man kann wieder die mengentheoretischen Komplexe, welche $\bar{e}$ den Sätzen zuordnet, als abstrakte Sachverhalte$_2$ im Sinn von (S) verstehen. Es erweisen sich dann (bis auf singuläre Existenzsätze mit einem irreferentiellen singulären Term) alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen, welche die Form in (7) haben, wegen (T15) als SS-extensional$_{\mathrm{VIII}}$ und deshalb auch als SS-extensional$_{\mathrm{VI}}$. Demnach sind in der zweiten Phase der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik

Sachverhalte$_2$ als die Extensionen von solchen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen zulässig.

Betrachte nun zur weiteren Analyse des NEA den Satz, der aufgrund des klassischen Prinzips der Termabstraktion immer denselben Wahrheitswert hat wie (2), d.i. der Satz:

(8) $(\Delta y F y)a \wedge (\Delta y \mathrm{E!}y)a$

Wenn $f(a)\uparrow$ ist, dann gilt für alle $\bar{e}$:

(9) $\bar{e}((\Delta y F y)a \wedge (\Delta y \mathrm{E!}y)a) =$
$\langle \textsc{und}, \{\bar{e}((\Delta y F y)a), \bar{e}((\Delta y \mathrm{E!}y)a)\}\rangle =$
$\langle \textsc{und}, \{\langle \in, \bar{e}(a), \bar{e}(\Delta y F y)\rangle, \langle \in, f(a)^{\infty}, D\rangle\}\rangle$

Da aber dann für alle $\bar{e}$ gilt:

(10) $\bar{e}((\Delta y F y \wedge \mathrm{E!}y)a) = \langle \in, \bar{e}(a), \bar{e}(\Delta y F y \wedge \mathrm{E!}y)\rangle \neq$
$\bar{e}((\Delta y F y)a \wedge (\Delta y \mathrm{E!}y)a) =$
$\langle \textsc{und}, \{\langle \in, \bar{e}(a), \bar{e}(\Delta y F y)\rangle, \langle \in, f(a)^{\infty}, D\rangle\}\rangle,$

ist der Satz (8) – wegen (T12) – nicht stark koextensional$_{\mathrm{VIII}}$ mit den Sätzen (2) und (1), wenn $f(a)\uparrow$ ist.

Wir können uns nun im folgenden erneut dem NEA zuwenden. Da das Wahrheitswertproblem (siehe §1.2) ungelöst ist, ist damit auch unklar, welchen Wahrheitswert – falls vorhanden – der elementare Satz (1) mit einem leeren (bzw. irreferentiellen) singulären Term hat. Angenommen weiters, die beiden Prädikationen (2) und (3) haben eine Extension, obwohl sie einen leeren (bzw. irreferentiellen) singulären Term enthalten. Angenommen ferner, Wahrheitswerte sind – wegen (W) – die Extensionen von Sätzen. Welche Wahrheitswerte haben dann die beiden Ersetzungsergebnisse (2) und (3) zur Extension? Nun, Quines Prädikationstheorie legt den Wahrheitswert von einer solchen Prädikation einfach nicht fest. Wenn aber nicht feststeht, welchen Wahrheitswert eine solche Prädikation hat, und wenn weiters Wahrheitswerte als Extensionen von Sätzen angenommen werden und wenn ferner solche Prädikationen eine Extension haben, dann ist damit auch unklar, welche Extension eine solche Prädikation hat. Die Ungelöstheit des Wahrheitswertproblems sowie die Unbestimmtheit von Quines Prädikationstheorie hinsichtlich der Prädikationen

(2) und (3) führen also dazu, daß nicht feststeht, welche Wahrheitswerte die drei Prädikationen (1)–(3) zur Extension haben, wenn sie einen leeren (bzw. irreferentiellen) singulären Term enthalten. Folglich weiß man dann auch nicht, welche Extensionen diese drei Sätze haben. Das NEA versucht deswegen mittels zweier Manöver Klarheit zu schaffen: Zum einen wird durch eine Fallunterscheidung festgelegt, welchen Wahrheitswert – falls vorhanden – die Prädikation (1) hat, und zum anderen werden durch das klassische Prinzip der Termabstraktion die Extensionen der Ersetzungsergebnisse (2) und (3) mit den Extensionen von Sätzen gleichgesetzt, welche gar keine Prädikationen, sondern eine Konjunktion bzw. eine Implikation sind (deren Wahrheitswerte dafür aber als klar erscheinen).

Gemäß der Fallunterscheidung hat dann die Prädikation (1) entweder einen der beiden Wahrheitswerte oder aber keinen Wahrheitswert. In den drei Fällen des NEA wird dann weiters aufgezeigt, daß sich der jeweils für die Prädikation (1) angenommene Wahrheitswert ändert, wenn man darin komplexe einstellige generelle Terme füreinander ersetzt, welche dieselbe Extension haben: So zeigen die ersten beiden Fälle, daß die Wahrheitswerte der Ersetzungsergebnisse (2) und (3) verschieden von dem jeweils für den Ausgangssatz (1) angenommenen Wahrheitswert sind; und nach dem dritten Fall hat (2) einen Wahrheitswert, während (1) gar keinen Wahrheitswert hat. In allen drei Fällen sind somit die Wahrheitswerte der Ersetzungsergebnisse (2) und (3) verschieden von dem jeweils für die Prädikation (1) angenommenen Wahrheitswert. Daher sind die Extensionen der Prädikationen (2) und (3) – wegen (W) – in allen drei Fällen verschieden von der jeweils für die Prädikation (1) angenommenen Extension. Letzteres wird im NEA hauptsächlich dadurch erreicht, daß wegen des klassischen Prinzips der Termabstraktion die Prädikation (2) und die Konjunktion (8) immer denselben Wahrheitswert und damit – wegen (W) – auch immer dieselbe Extension haben (und analog dazu haben die Prädikation (3) und die betreffende Implikation immer dieselbe Extension). Die Extensionen von (8) und der betreffenden Implikation sind aber verschieden von der jeweils für (1) angenommenen Extension. Es wird also im ersten und dritten Fall des NEA die Extension der Prädikation (2) mit derjenigen der Konjunktion (8) gleichgesetzt, um sie so als verschieden von der jeweils für die Prädikation (1) angenommenen Extension ansehen zu können (analog dazu wird im zweiten Fall des NEA die Extension der Prädikation (3) mit derjenigen einer Implikation gleichgesetzt, um so das Verschiedensein von der in diesem Fall angenommenen Extension der Prädikation (1) erreichen zu können).

Daß im NEA die Extensionen der Prädikationen (1) und (2) (bzw. (1) und (3)) als voneinander verschieden angesehen werden, erscheint jedoch im Licht einer Sachverhaltssemantik aus mehreren Gründen als sehr fragwürdig: Denn einmal haben die drei komplexen einstelligen generellen Terme, welche in diesen Prädikationen vorkommen, identische Mengen zur Extension; sie haben also ein und dieselbe Menge zur Extension. Deshalb leisten diese Terme keinen unterschiedlichen Beitrag zur Bestimmung der Extension jener drei Prädikationen. Weiters ist ein und derselbe singuläre Term, welcher in diesen Prädikationen enthalten ist, irreferentiell. Er leistet somit ebenfalls keinen unterschiedlichen Beitrag bei der Bestimmung der Extension von jenen drei Prädikationen. Schließlich werden jene drei komplexen einstelligen generellen Terme und jener irreferentielle singuläre Term auf dieselbe Weise – dank der Kopula – zu einem Satz verknüpft. Dies führt dazu, daß der Wahrheitswert – falls vorhanden – von jenen drei Prädikationen auf dieselbe Weise bestimmt wird: Man fragt nämlich, ob jene komplexen einstelligen generellen Terme von jenem Einzelding – falls vorhanden – wahr (oder falsch) sind, welches der singuläre Term bezeichnet. Dies läuft auf nichts anderes als auf die folgende Frage hinaus: Ist ein bestimmtes Einzelding – falls vorhanden – ein Element (oder Non-Element) aus ein und derselben Menge, welche die Extension jener drei komplexen einstelligen generellen Terme ist. All dies sind Hinweise darauf, daß jene drei Prädikationen eine identische Extension haben müssen, sofern sie überhaupt eine haben.

Nach der vorliegenden Superbewertungs-Sachverhaltssemantik haben nun die beiden Prädikationen (1) und (2) *identische* Sachverhalte$_2$ zur Extension bei $\bar{e}$ (siehe (6)) (und ebenso die beiden Prädikationen (1) und (3)). Weiters haben ihrzufolge die Prädikation (2) und die Konjunktion (8) *verschiedene* Extensionen bei $\bar{e}$ (siehe (10)). Aus dem Blickwinkel dieser Sachverhaltssemantik kann somit die für die Prädikation (1) jeweils angenommene Extension nur dann als verschieden von derjenigen der Prädikation (2) angesehen werden, wenn letztere zunächst nicht feststeht und deshalb einfach mit der Extension der Konjunktion (8) gleichgesetzt werden kann. Es ist genau das, was im NEA geschieht. Um die jeweils angenommene Extension der Prädikation (1) als verschieden von derjenigen der Prädikation (2) ansehen zu können, wird letztere Extension als vorläufig nicht feststehend betrachtet. Es wird dann weiters diese Extension der Prädikation (2) mit derjenigen der Konjunktion (8) gleichgesetzt, so als ob der Wahrheitswert einer Prädikation auf die gleiche Weise bestimmt wird wie der Wahrheitswert einer Konjunktion. Die Wahrheitswerte der beiden Sätze (2) und (8) werden aber auf verschiedene Weise bestimmt: Während nämlich zur Bestimmung des Wahrheitswerts der Prädikation (2) gefragt wird, ob ein komplexer einstelliger genereller Term von jenem Einzelding – falls vorhanden – wahr ist, welches der singuläre Term bezeichnet, schaut man sich dazu bei der Konjunktion (8) die Wahrheitswerte – falls vorhanden – der beiden Teilsätze an. Deshalb haben diese beiden Sätze verschiedene logische Formen. Die logische Form eines Satzes bestimmt aber – wegen (Z) aus §1.4 – wie der Sachverhalt$_2$, welchen er zur Extension bei $\bar{e}$ hat, zusammengesetzt ist. Die beiden Sachverhalte$_2$, welche die beiden Sätze (2) und (8) zur Extension bei $\bar{e}$ haben, sind demnach auf verschiedene Weise zusammengesetzt. Sie sind zudem aus verschiedenen Bestandteilen zusammengefügt. Daher sind jene beiden Sachverhalte$_2$ auf verschiedene Weise aus verschiedenen Bestandteilen zusammengesetzt. Die beiden Sätze (2) und (8) haben also verschiedene Sachverhalte$_2$ zur Extension bei $\bar{e}$, und folglich haben sie auch verschiedene Extensionen bei $\bar{e}$. Wir können also sehen, daß in der vorliegenden Sachverhaltssemantik besagte Gleichsetzung ebenso wie das klassische Prinzip der Termabstraktion zurückgewiesen werden (letzteres in dem Sinn, daß dieses Prinzip in dieser Semantik sowohl völlig unplausibel als auch gar nicht gültig ist).

7.7 Vierte Antwort

Die vierte Antwort auf das Extensionalitätsproblem lautet im besagten Rahmen folgendermaßen:

(T16) Alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen und komplexen einstelligen generellen Termen (inklusive singulären Existenzsätzen und Identitätssätzen mit genau einem irreferentiellen singulären Term) sind non-SE-extensional$_{\mathrm{V}}$ und damit auch non-SE-extensional$_{\mathrm{VII}}$.

Beweis. Um dies zu zeigen, betrachte irgendein EDMB $M = \langle\langle D, f\rangle, g\rangle$, wo $f(a) \uparrow$ ist sowie $D \neq \varnothing$:
Dann gibt es eine klassische Vervollständigung $M^* = \langle\langle D^*, f^*\rangle, g^*\rangle$ von M mit $D^* = D$, so daß für das von M^* eindeutig bestimmte $\bar{e}$ gilt: $\bar{e}(\Delta yFy) = \bar{e}(\Delta y\mathrm{E}!y)$. Sei $\bar{e}_0$ eine solche Extensionsfunktion. Die Terme ΔyFy und $\Delta y\mathrm{E}!y$ sind dann – wegen (T11) – schwach koextensional$_{\mathrm{V}}$ relativ zu diesem $\bar{e}_0$. Aber es gilt weiters, daß:

(11) $\bar{e}_0((\Delta yFy)a) = \langle\in, \bar{e}_0(a), \bar{e}_0(\Delta yFy)\rangle \neq$
$\bar{e}_0((\Delta y\mathrm{E}!y)a) = \langle\in, f(a)^\infty, \bar{e}_0(\Delta y\mathrm{E}!y)\rangle$,

und zwar weil $\bar{e}_0(\Delta yFy) = \bar{e}_0(\Delta y\mathrm{E}!y) = D$ und $f(a)^\infty \notin D$ und $\bar{e}_0(a) \in D^*$ und $D^* = D$, weshalb $f(a)^\infty \neq \bar{e}_0(a)$. Die beiden Sätze $(\Delta yFy)a$ und $(\Delta y\mathrm{E}!y)a$ sind demnach nicht schwach koextensional$_{\mathrm{V}}$ relativ zu jenem $\bar{e}_0$. Der Satz $(\Delta yFy)a$ ist deshalb non-SE-extensional$_{\mathrm{V}}$ und folglich auch non-SE-extensional$_{\mathrm{VII}}$ (siehe das vierte Stärkediagramm), wenn $f(a) \uparrow$ ist und $D \neq \varnothing$. Analog verhält es sich bei singulären Existenzsätzen und Identitätssätzen mit genau einem irreferentiellen singulären Term. □

Im Gegensatz dazu gilt aber unter den genannten Bedingungen, daß:

(12) $\bar{e}_0((\Delta yFy)a) = \langle\in, \bar{e}_0(a), \bar{e}_0(\Delta yFy)\rangle =$
$\bar{e}_0((\Delta yFy \wedge \mathrm{E}!y)a) = \langle\in, \bar{e}_0(a), \bar{e}_0(\Delta yFy \wedge \mathrm{E}!y)\rangle \neq$
$\bar{e}_0((\Delta yFy)a \wedge (\Delta y\mathrm{E}!y)a) =$
$\langle\textsc{und}, \{\langle\in, \bar{e}_0(a), \bar{e}_0(\Delta yFy)\rangle, \langle\in, f(a)^\infty, D\rangle\}\rangle$

Wie bei der dritten Antwort kann also auch hier das NEA nicht die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{V}}$ und die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VII}}$ des Satzes (1), in welchem ein irreferentieller singulärer Term vorkommt, nachweisen. Es haben nämlich zum einen die in diesem Argument involvierten Sätze (1)–(3) hinsichtlich aller Extensionsfunktionen $\bar{e}$ (also auch hinsichtlich $\bar{e}_0$) identische Sachverhalte$_2$ zur Extension bei $\bar{e}$. Und es wird zum anderen wie zuvor die Gleichsetzung der Extension bei $\bar{e}$ der Prädikation (2) mit derjenigen der Konjunktion (8) (bzw. der Prädikation (3) mit derjenigen einer Implikation) aus den schon genannten Gründen zurückgewiesen.

7.8 Fünfte Antwort

Dennoch wäre es – trotz (T15) – verfrüht zu schlußfolgern, daß singuläre Existenzsätze mit leeren singulären Termen sowie weiters Prädikationen mit leeren singulären Termen und komplexen n-stelligen generellen Termen, welche Junktoren enthalten, (im folgenden kurz: molekulare Prädikationen) SE-extensional$_{\mathrm{VIII}}$ (und damit auch SE-extensional$_{\mathrm{VI}}$) sind. Um deren Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ nachzuweisen, betrachte die molekulare Prädikation

(13) $\Delta y \neg(Fy \wedge \neg Fy)a$

mit einem irreferentiellen singulären Term a. Wie man leicht nachprüfen kann, gilt für alle $\bar{e}$: $\bar{e}(\Delta y \neg(Fy \wedge \neg Fy)) = \bar{e}(\Delta y \mathrm{E}!y)$ (beide Terme haben stets D^* zur Extension bei $\bar{e}$). Die beiden generellen Terme $\Delta y \neg(Fy \wedge \neg Fy)$ und $\Delta y \mathrm{E}!y$ sind also – wegen (T11) – stark koextensional$_{\mathrm{VII}}$ relativ zu allen $\bar{e}$ und damit auch – wegen (T12) – stark koextensional$_{\mathrm{VIII}}$. Weiters gilt für alle $\bar{e}$: wenn $f(a)\uparrow$ ist, dann

(14) $\bar{e}(\Delta y \neg(Fy \wedge \neg Fy)a) = \langle \in, f^*(a), D^* \rangle \neq$
$\langle \in, f(a)^\infty, D \rangle = \bar{e}((\Delta y \mathrm{E}!y)a)$

Denn entweder ist $D^* = D$ oder $D^* \neq D$; wenn nun $D^* = D$, dann $f^*(a) \neq f(a)^\infty$, und zwar weil $D^* = D$ und $f^*(a) \in D^*$ und $f(a)^\infty \notin D$, weshalb (14) gilt; wenn aber $D^* \neq D$, dann gilt wieder (14). Deshalb sind die Sätze

(15) $(\Delta y \mathrm{E}!y)a$

und (13) nicht stark koextensional$_{\mathrm{VII}}$ relativ zu allen $\bar{e}$, wo $f(a) \uparrow$ ist. Es gilt daher: wenn $f(a) \uparrow$ ist, dann ist (13) nicht stark koextensional$_{\mathrm{VIII}}$ mit (15). Es folgt also: Wenn a irreferentiell ist, dann sind (13) und (15) non-SE-extensional$_{\mathrm{VIII}}$.

Die Quelle der Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ von singulären Existenzsätzen und molekularen Prädikationen, welche die Form in

(16) $(\Delta y A)a$

haben (wo A Junktoren enthält), liegt in der Notwendigkeit, in jeder Superbewertungs-Semantik singuläre Existenzsätze mit irreferentiellen singulären Termen anders als molekulare Prädikationen mit solchen Termen zu behandeln. Während sich nämlich z.B. der singuläre Existenzsatz (15) (mit irreferentiellem a) als falsch in der ersten Phase der Superbewertungs-Wahrheitswertsemantik herausstellt, kommt die molekulare Prädikation (13) (mit irreferentiellem a) als wahrheitswertlos in dieser Phase heraus. Aus diesem Grund kann man in der ersten Phase die Extensionen von (13) und (15) nicht miteinander identifizieren, sobald in ihnen ein irreferentieller singulärer Term vorkommt. Deshalb erhält (15) in der ersten Phase der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik eine nicht-bestehende Extension bei e, und (13) erhält dagegen in dieser Phase gar keine Extension bei e. Die Notwendigkeit aber zwischen den Extensionen bei e von (13) und (15) zu unterscheiden, wenn der in ihnen vorkommende singuläre Term irreferentiell ist, verursacht die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ von (13) und (15).[76] Solange man also das Kompositionalitätsprinzip (K) aus §1.1 als Leitprinzip für die Suche nach den Extensionen bei $\bar{e}$ von *allen* Prädikationen der Sprache $\mathcal{L}_2$ für die freie Logik aufrechterhält, sind Sachverhalte$_2$ nicht als die Extensionen bei $\bar{e}$ von diesen Ausnahmefällen zulässig (gemäß (Df.ZE) aus §1.1). Deshalb lautet die fünfte Antwort auf das Extensionalitätsproblem wie folgt:

[76] Ähnliches gilt auch für Sätze wie $(\Delta y \neg \mathrm{E!}y)a$, $(\Delta y_1 \Delta y_2 y_1 = y_2)ab$ und $(\Delta y_1 \Delta y_2 \neg y_1 = y_2)ab$, wenn diese genau einen irreferentiellen singulären Term enthalten. Sie sind dann ebenfalls non-SE-extensional$_{\mathrm{VIII}}$.

(T17) Man kann nicht beides im Rahmen einer Superbewertungs-Sachverhaltssemantik für $\mathcal{L}_2$ aufrechterhalten: (i) die Annahme, daß das Kompositionalitätsprinzip (K) die Suche nach den Extensionen bei $\bar{e}$ von allen Prädikationen von $\mathcal{L}_2$ anleitet, und (ii) die Annahme, daß molekulare Prädikationen – wie (13) – und singuläre Existenzsätze – wie (15) – SE-extensional$_{\mathrm{VIII}}$ sind.

Diese Ausnahmefälle, welche von der Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ betroffen sind, können jedoch scharf von jenen Fällen unterschieden werden, wo die SE-Extensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ vorherrscht. Man kann somit der einheitlichen Behandlung zuliebe akzeptieren, daß diese Ausnahmefälle dennoch von Sachverhalten$_2$ sprechen. Diese Stipulation kommt allerdings dem Zugeständnis gleich, daß das Kompositionalitätsprinzip nicht die Suche nach den Extensionen bei $\bar{e}$ von jenen Ausnahmefällen anleiten kann.

7.9 Schlußfolgerungen

Ich fasse im folgenden die Schlußfolgerungen von §6–7 zusammen. Es haben sich also alle elementaren Sätze mit leeren singulären Termen als SE-extensional$_{\mathrm{II}}$ herausgestellt. Die Bedingungen, unter denen dieses Resultat – im Rahmen der zweiten Sachverhaltssemantik und meiner Analyse der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn – erzielt wurde, können wie folgt wiedergegeben werden:

(i) Leere singuläre Terme haben (in der ersten Phase der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik) keine Extension, insbesonders werden keine relativ zum *Domain* nicht-existierenden Einzeldinge als ihre Extensionen eingeführt.

(ii) Die Extensionsfunktion e ist partiell, wobei leere singuläre Terme keine Extension bei e haben und Extensionslücken demnach zugelassen werden.

(iii) Die beiden Relationen der schwachen Koextensionalität aus der ersten Phase dieser Semantik werden vorausgesetzt. Sie sind jedoch keine Äquivalenzrelationen.

(iv) Ausdrücke, welche keine Extension bei e haben, sind mit Ausdrücken, welche eine Extension bei e haben, schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ relativ zu e (siehe (T10)).

(v) Die Zusammensetzungsthese (Z) und die These (S), wonach Sachverhalte$_2$ die Extensionen von Sätzen sind, werden statt der These (W), wonach Wahrheitswerte solche Extensionen sind, angenommen.

(vi) Die Definition (Df.SE$'_{\mathrm{II}}$) der SE-Extensionalität$_{\mathrm{II}}$ wird vorausgesetzt.

Weiters können die Bedingungen, unter denen die SE-Extensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen (exklusive singulären Existenzsätzen und Identitätssätzen mit genau einem irreferentiellen singulären Term) sichergestellt ist, wie folgt zusammengefaßt werden:

(i) Leeren singulären Termen wird (in der zweiten Phase der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik) eine Extension willkürlich zugeordnet, nämlich ein Element aus einem erweiterten *Domain*, d.i. ein relativ zu diesem *Domain* existierendes Einzelding.

(ii) Die Extensionsfunktion $\bar{e}$ ist total, womit alle Extensionslükken aus der ersten Phase jetzt geschlossen werden.

(iii) Die beiden Relationen der starken Koextensionalität aus der zweiten Phase dieser Semantik werden vorausgesetzt.

(iv) Die beiden Theoreme (T11) und (T12) erweisen diese beiden Relationen der Koextensionalität als Äquivalenzrelationen.

(v) Die Zusammensetzungsthese (Z) und die These (S), wonach Sachverhalte$_2$ die Extensionen von Sätzen sind, werden statt der These (W), wonach Wahrheitswerte solche Extensionen sind, angenommen.

(vi) Die Definition (Df.SE$'_{\mathrm{VIII}}$) der SE-Extensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ wird vorausgesetzt.

(vii) Das klassische Prinzip der Termabstraktion wird zurückgewiesen: Molekulare Prädikationen mit leeren singulären Termen haben demnach andere Sachverhalte$_2$ zur Extension bei $\bar{e}$ als Konjunktionen bzw. Implikationen.

Ferner wurde gezeigt, daß Lamberts NEA nicht die Non-SE-Extensionalität von irgendeinem elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen in irgendeiner Bedeutung der Non-SE-Extensionalität nachweisen kann, und zwar aus folgenden Gründen:

(i) Offensichtlicherweise kann dieses Argument nicht die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{II}}$ von irgendeinem elementaren Satz mit leeren singulären Termen nachweisen, und zwar ganz einfach, weil alle solche Sätze SE-extensional$_{\mathrm{II}}$ sind. Weiters kann es auch nicht die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{I}}$ von elementaren Sätzen (exklusive singulären Existenzsätzen und Identitätssätzen mit genau einem irreferentiellen singulären Term) aufzeigen, und zwar wiederum aus dem einfachen Grund, daß alle derartigen Sätze SE-extensional$_{\mathrm{I}}$ sind. Weiters stellen sich singuläre Existenzsätze und Identitätssätze mit genau einem irreferentiellen singulären Term ja nur deshalb als non-SE-extensional$_{\mathrm{I}}$ heraus, weil *singuläre* Terme, welche miteinander relativ zu e schwach koextensional$_{\mathrm{I}}$ sind, nicht immer füreinander unbeschadet$_{\mathrm{I}}$ der Extension bei e substituierbar sind. Ihre Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{I}}$ wird somit nicht durch das Fehlschlagen der Ersetzung von komplexen einstelligen generellen Termen hervorgerufen, welche miteinander relativ zu e koextensional$_{\mathrm{I}}$ sind. Da jedoch im NEA nur solche komplexe einstellige generelle Terme füreinander ersetzt werden, kann es daher auch nicht die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{I}}$ von jenen beiden Sonderfällen nachweisen.

(ii) Weiters kann das NEA auch nicht die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{III}}$ und Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{IV}}$ von irgendeinem elementaren Satz mit leeren singulären Termen nachweisen, und zwar weil in diesem Argument vorausgesetzt wird, daß die Ersetzungsergebnisse eine Extension haben. Der Grund für die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{III}}$ und Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{IV}}$ von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen liegt hier aber darin, daß die Ersetzungsergebnisse keine Extension bei e haben.

(iii) Ferner kann dieses Argument nicht die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VI}}$ und Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ von irgendeinem elementaren Satz der Form $(\Delta yFy)a$ mit einem leeren singulären Term (exklusive singulären Existenzsätzen mit einem irreferentiellen singulären Term) nachweisen, und zwar ganz einfach, weil solche Sätze SE-extensional$_{\mathrm{VIII}}$ und damit SE-extensional$_{\mathrm{VI}}$ sind.

(iv) Weiters läßt sich mit dem NEA auch nicht die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{V}}$ und Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VII}}$ von irgendeinem elementaren Satz mit leeren singulären Termen nachweisen. Denn aus dem Blickwinkel der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik haben zum einen die im NEA involvierten Prädikationen identische Sachverhalte$_2$ zur Extension bei allen $\bar{e}$ und zum anderen ist die Gleichsetzung der Extension bei $\bar{e}$ von einer molekularen Prädikation mit derjenigen einer Konjunktion (bzw. Implikation) völlig unplausibel. Das klassische Prinzip der Termabstraktion, womit eine solche Gleichsetzung gerechtfertigt wird, ist außerdem nicht gültig in dieser Semantik.

(v) Schließlich kann dieses Argument auch nicht die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VI}}$ und die Non-SE-Extensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ von molekularen Prädikationen wie (13) nachweisen, und zwar weil solche molekulare Prädikationen keine elementaren Sätze (d.h. Sätze ohne Junktoren und Quantoren) mehr sind und in diesem Argument aber solche elementare Sätze mit leeren singulären Termen gemeint sind (siehe (1)).

Es haben also die drei im NEA involvierten Prädikationen mit einem leeren singulären Term identische Sachverhalte$_2$ zur Extension bei allen $\bar{e}$ und somit auch identische Extensionen bei allen $\bar{e}$. Sie haben deshalb nur solange verschiedene Extensionen, als Wahrheitswerte (und nicht Sachverhalte$_2$) als deren Extensionen angenommen werden und am klassischen Prinzip der Termabstraktion festgehalten wird. Denn dann haben molekulare Prädikationen immer denselben Wahrheitswert wie die ihnen entsprechenden Konjunktionen bzw. Implikationen. Die zusätzliche Annahme, daß Wahrheitswerte die Extensionen von Sätzen sind, führt dann dazu, daß solche molekulare Prädikationen auch immer dieselbe Extension wie die ihnen entsprechenden Konjunktionen bzw. Implikationen haben. Doch jemand, der Wahrheitswerte als die Extensionen von Sätzen ansieht, hat überhaupt keinen guten Grund, das klassische Prinzip der Termabstraktion für Prädikationen, welche *nicht* die Existenz ihres vermeintlichen Subjekts implizieren, abzulehnen. Dagegen hat jemand, der ernsthaft Sachverhalte als solche Extensionen in Betracht zieht, allen Grund, dieses Prinzip zurückzuweisen. Besagtes Prinzip ist nämlich aus dem Blickwinkel einer Sachverhaltssemantik völlig unplausibel. Denn aus einem solchen Blickwinkel ist der Sachverhalt$_2$, welchen eine molekulare Prädikation zur Extension bei $\bar{e}$ hat, auf eine völlig andere Weise aus völlig anderen Bestandteilen zusammengesetzt als der Sachverhalt$_2$, den die entsprechende Konjunktion bzw. Implikation zur Extension bei $\bar{e}$ hat. Diese Sachverhalte$_2$ sind demzufolge ebenso voneinander verschieden, wie es die Extensionen jener Sätze sind, welche sie zur Extension bei $\bar{e}$ haben. Aus diesen Gründen wird Lamberts NEA durch die vorliegende Sachverhaltssemantik erschüttert.

Im Licht der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik und meiner Analyse der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn muß man daher die philosophischen Auswirkungen des NEA stark relativieren:

(i) So zeigt es nicht, daß die Prädikation 'Vulkan ist ein Ding, so daß es rotiert' non-SE-extensional$_n$ ist (mit $n = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{VIII}$).

(ii) Es stützt deshalb auch nicht die These, daß Quines Prädikationstheorie in *Word and Object* non-SE-extensional$_n$ ist.

(iii) Es stützt weiters nicht die These, daß die SE-Substitutierbarkeit von koextensionalen generellen Termen in der freien Logik mit dem generellen Term E! fehlschlägt.

(iv) Und es stützt schließlich nicht die These, daß die klassische Prädikatenlogik non-SE-extensional$_n$ wird, sobald man ihre Existenzannahmen hinsichtlich der konstanten singulären Terme expliziert.

Schlußendlich wurde gezeigt, daß in der ersten Phase der vorliegenden Sachverhaltssemantik Sachverhalte$_2$ als die Extensionen bei e von allen elementaren Sätzen mit leeren singulären Termen zulässig sind. Dafür muß man allerdings die absolute schwache Relation der

Koextensionalität$_{\mathrm{II}}$ annehmen. Es wurde weiters gezeigt, daß in der zweiten Phase dieser Semantik Sachverhalte$_2$ als die Extensionen bei $\bar{e}$ von allen elementaren Sätzen der Form $(\Delta yFy)a$ mit leeren singulären Termen (exklusive singulären Existenzsätzen mit einem irreferentiellen singulären Term) zulässig sind. Hierfür muß man aber die absolute schwache Koextensionalität$_{\mathrm{VI}}$ bzw. die absolute starke Koextensionalität$_{\mathrm{VIII}}$ annehmen. In ihrer zweiten Phase sind jedoch Sachverhalte$_2$ nicht als die Extensionen bei $\bar{e}$ von einigen Ausnahmefällen zulässig, wohingegen sie für alle anderen Fälle als solche Extensionen bei $\bar{e}$ zulässig sind. Weiters wurde gezeigt, daß die Superbewertungs-Wahrheitswertsemantik von demselben Non-SE-Extensionalitätsproblem betroffen ist wie die Superbewertungs-Sachverhaltssemantik. Die letztere Semantik für $\mathcal{L}_2$ ist jedoch aus folgendem Grund der ersteren vorzuziehen: Obwohl sich die beiden Mengen von logisch wahren Sätzen als identisch erweisen, können in der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik verschiedene logisch wahre$_4$ Sätze von verschiedenen Entitäten sprechen, in der Superbewertungs-Wahrheitswertsemantik können logische wahre$_3$ Sätze das jedoch nicht. Das *Slingshot*-Argument ist schließlich aus den vielen schon genannten Gründen auch kein Hindernis für die Superbewertungs-Sachverhaltssemantik. Einer sei hier noch abschließend angeführt: Es gibt nämlich eine Extensionsfunktion $\bar{e}$, so daß einige logisch äquivalente$_4$ Sätze nicht stark koextensional$_{\mathrm{VII}}$ relativ zu $\bar{e}$ sind.

Resümee

Im folgenden ziehe ich ein kurzes Resümee der vorliegenden Arbeit. Es wurden zwei Sprachen für die positive freie Logik eingeführt, nämlich $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$. Dabei ist $\mathcal{L}_2$ eine Teilsprache von $\mathcal{L}_1$ in dem Sinn, daß alle wohlgeformten Ausdrücke von $\mathcal{L}_2$ auch wohlgeformte Ausdrücke von $\mathcal{L}_1$ sind. Insbesonders sind alle Sätze von $\mathcal{L}_2$ auch Sätze von $\mathcal{L}_1$. Für $\mathcal{L}_1$ wurde nun eine Sachverhaltssemantik vorgestellt, welche auf den *Inner-Outer-Domain*-Modellen der freien Logik basiert. Das Extensionalitätsproblem kann mittels einer solchen *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik auf eine geradlinige Weise gelöst werden: Es wurde nämlich bewiesen, daß alle Sätze von $\mathcal{L}_1$ extensional in jeder Bedeutung der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn sind, welche im Rahmen einer solchen Sachverhaltssemantik definierbar ist. Damit wurde auch gezeigt, daß alle Sätze von $\mathcal{L}_2$ in jeder dieser Bedeutungen extensional sind, weil $\mathcal{L}_2$ eine Teilsprache von $\mathcal{L}_1$ ist. Es wurden weiters die Bedingungen angegeben, unter denen dieses Resultat erzielt werden kann. Die in philosophischer Hinsicht wohl am kritischsten erscheinende Bedingung ist hierbei die Einführung von nicht-existierenden Einzeldingen, welche im *Domain* liegen und als Extensionen von leeren singulären Termen angenommen werden. Für jeden, dem solche im *Domain* gelegene nicht-existierende Einzeldinge nicht behagen, wurde noch eine zweite Sachverhaltssemantik vorgeschlagen, welche ohne derartige möglicherweise fragwürdige Extensionen auskommt. Diese zweite Sachverhaltssemantik beruht auf den Einzel-*Domain*-Modellen der freien Logik und bedient sich zudem der Methode der Superbewertungen. Es wurde bewiesen, daß alle elementaren Sätze von $\mathcal{L}_2$ mit leeren singulären Termen unter manchen Bedeutungen der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn, welche in einer solchen Semantik definierbar sind, extensional sind, während sie es unter anderen derartigen Bedeutungen nicht sind. Die Antworten auf das Extensionalitätsproblem hängen also ganz davon ab, welche der beiden Sachverhaltssemantiken man für $\mathcal{L}_2$ voraussetzt. Nimmt man die *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik an, dann stellen sich nicht nur alle elementaren Sätze von $\mathcal{L}_2$ mit leeren singulären Termen, sondern überhaupt alle Sätze von $\mathcal{L}_2$ als extensional im Substituierbarkeitssinn heraus (und zwar in jeder im Rahmen einer solchen

Semantik definierbaren Bedeutung dieses Wortes). Nimmt man dagegen die Superbewertungs-Sachverhaltssemantik an, dann sind alle elementaren Sätze von $\mathcal{L}_2$ mit leeren singulären Termen nur in manchen Bedeutungen der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn, welche mit den Mitteln einer solchen Semantik definierbar sind, extensional, in anderen aber nicht.

Es wurde weiters das NEA von Lambert im Rahmen der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik untersucht. Es stellte sich dabei heraus, daß es bei weitem nicht die Auswirkungen hinsichtlich der Extensionalität im Substituierbarkeitssinn hat, als man vielleicht vermuten könnte. Im Licht einer Sachverhaltssemantik erscheint an diesem Argument vor allem die Gleichsetzung der Extensionen von molekularen Prädikationen mit denjenigen von Konjunktionen bzw. Implikationen als besonders fragwürdig. Da nämlich der Wahrheitswert von Prädikationen auf eine andere Weise bestimmt wird als derjenige von Konjunktionen und Implikationen, haben solche Sätze verschiedene logische Formen. Die logische Form eines Satzes wiederum ist aber maßgeblich dafür, wie der Sachverhalt, welchen er zur Extension hat, zusammengesetzt wird. Sachverhalte, welche auf unterschiedliche Weise zusammengesetzt sind, sind jedoch nach dem von mir vorgeschlagenen Identitätskriterium für Sachverhalte verschieden voneinander. In einer Sachverhaltssemantik haben deshalb Prädikationen andere Sachverhalte zur Extension als eben Konjunktionen und Implikationen. Solche Sätze haben demnach auch voneinander verschiedene Extensionen. Deshalb wird in der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik auch das klassische Prinzip der Termabstraktion für komplexe Prädikationen verworfen, welches aber die Hauptarbeit im NEA leistet.

Der Nachweis, daß das NEA aus dem Blickwinkel der Superbewertungs-Sachverhaltssemantik alles andere als überzeugend wirkt, ist jedoch keinesfalls so zu verstehen, daß mittels einer solchen Semantik die volle Extensionalität im Substituierbarkeitssinn der Sprache $\mathcal{L}_2$ in jeder definierbaren Bedeutung derselben bewiesen werden kann. Wer ein solches Resultat wünscht, um dem eingangs erwähnten Dilemma für eine Wissenschaftssprache vollständig zu entgehen, wird wohl der *Inner-Outer-Domain*-Sachverhaltssemantik mit allen ihren Vor- und Nachteilen den Vorzug geben müssen. Gegenüber der herkömmlichen

Wahrheitswertsemantik hat letztere Sachverhaltssemantik sicherlich den klaren Vorteil, daß ihrzufolge verschiedene wahre Sätze im allgemeinen von verschiedenen Entitäten sprechen können, während das bei der Wahrheitswertsemantik unmöglich ist.

Anhang

Relationen und Funktionen

(Df.R) R ist eine (zweistellige) *Relation* von X in Y $:\Leftrightarrow$
$R \subseteq X \times Y = \{\langle x, y\rangle |\ x \in X \ \&\ y \in Y\}$
(schreibe statt '$\langle x, y\rangle \in R$' auch kürzer: '$xRy$')

(Df.DR) $Dom(R) = \{x|\ (\bigvee y)(\langle x, y\rangle \in R)\}$
(d.i. die Menge der Erstglieder von R bzw. der Vorbereich von R)

(Df.RR) $Ran(R) = \{y|\ (\bigvee x)(\langle x, y\rangle \in R)\}$
(d.i. die Menge der Zweitglieder von R bzw. der Nachbereich von R)

(Df.F) f ist eine *Funktion von X in Y* $:\Leftrightarrow$
f ist eine Relation von X in Y (d.h. $f \subseteq X \times Y$) &
f ist rechtseindeutig (d.h. zu jedem $x \in Dom(f)$ gibt es höchstens ein $y \in Ran(f)$, so daß gilt: $\langle x, y\rangle \in f$)

Eine Funktion von X in Y ist somit eine rechtseindeutige Relation von X in Y. Schreibe '$f(x)$' für das einzige $y \in Ran(f)$, so daß gilt: $\langle x, y\rangle \in f$. Es gilt also für alle $x \in Dom(f)$ und alle $y \in Ran(f)$: $f(x) = y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in f$.

(Df.TF$_1$) f ist eine *totale* Funktion von X in Y $:\Leftrightarrow$
f ist eine Funktion von X in Y &
$Dom(f) = X$

Eine totale Funktion von X in Y ist somit eine rechtseindeutige Relation von X in Y, deren Vorbereich identisch mit X ist.

(Df.PF$_1$) f ist eine *partielle* Funktion von X in Y $:\Leftrightarrow$
f ist eine Funktion von X in Y & $Dom(f) \subseteq X$

Eine partielle Funktion von X in Y ist somit eine rechtseindeutige Relation von X in Y, deren Vorbereich Teilmenge von X ist. Weiters heißt '$f(x)$ ist (un)definiert' so viel wie 'es gibt (k)ein y, so daß gilt: $\langle x, y\rangle \in f$'.

(Df.TF$_1$) f ist eine *total auf* X definierte Funktion :$\Leftrightarrow$
es gibt mindestens ein Y, so daß gilt: f ist eine totale Funktion von X in Y

(Df.PF$_2$) f ist eine *partiell auf* X definierte Funktion :$\Leftrightarrow$
es gibt mindestens ein Y, so daß gilt: f ist eine partielle Funktion von X in Y

Beispiel. In der Einzel-*Domain*-Semantik für die freie Logik ist die Interpretationsfunktion f eines EDMB M eine partiell auf der Menge SING der singulären Terme definierte Funktion; d.h.:

f ist partiell auf der Menge SING definiert $\Leftrightarrow$
es gibt ein D, so daß gilt: f ist eine Funktion von SING in D &
$Dom(f) \subseteq \text{SING}$

(Df.FK) f ist eine (partielle bzw. totale) *Funktion* :$\Leftrightarrow$
es gibt mindestens ein X und Y, so daß gilt:
f ist eine (partielle bzw. totale) Funktion von X in Y

Liste der Symbole

Lies die objektsprachlichen Symbole: $\forall, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge$ als: alle, nicht, wenn-dann, genau dann-wenn, und. Lies weiters die metasprachlichen Symbole: $\bigwedge, \bigvee, \Rightarrow, \Leftrightarrow,$ & als: alle, einige, wenn-dann, genau dann-wenn, und. Ferner stehen die mengentheoretischen Symbole: $\in, \notin, \subseteq, \cap, \cup, \setminus, \varnothing, \wp$ wie üblich für: Element, Non-Element, Teilmenge, Durchschnitt, Vereinigung, Differenz, leere Menge und Potenzmenge. Die Seitennummerierungen geben im folgenden an, wo die entsprechenden Symbole im Text erläutert werden:

$:\Leftrightarrow$	20
(a/x)	22
E!	23
Δ	29
λ	30
$\otimes_\varepsilon$	42
$\otimes$	42
$\Diamond_\varepsilon$	42
$\Diamond$	43
$G^n_{\Delta y}$	62
$\forall x_i A[G_{\overline{m}}]$	62
(t/y)	62
$\langle\langle D_I, D_O, f\rangle, g\rangle$	64
$\models^1_M$	65
$\models_1$	66
$:\leftrightarrow$	66
τ	67
R^1_1	79
R^1_2	80
R^m_j	82, 127
R^m_k	87, 120
$\models^2_M$	88
$\models_2$	89
$\equiv_e$	94
$\downarrow$	107
$\uparrow$	107
I	108
$\langle\langle D, f\rangle, g\rangle$	108
I^*	109
$\langle\langle D^*, f^*\rangle, g^*\rangle$	109
M^*/M	109
$\models^f_M$	110
$\Dashv^f_M$	110
$\models_{M^*/M}$	111
$\Dashv_{M^*/M}$	111
$\models^3_M$	112
$\Dashv^3_M$	112
$\models_3$	112
$\mathrel{|\!\!<}^f_M$	116
$\mathrel{>\!\!|}^f_M$	116
$\mathrel{|\!\!<}_{M^*/M}$	116
$\mathrel{>\!\!|}_{M^*/M}$	116
∞	118
$\mathrel{|\!\!<}_M$	123
$\mathrel{>\!\!|}_M$	123
$\mathrel{|\!\!<}$	123
$\models_4$	123
$\circ_e$	134
$\circ$	134
$\triangledown_e$	134
$\triangledown$	135
$\cong_{\bar{e}}$	135
$\cong$	135
$\equiv_{\bar{e}}$	135
$\equiv$	135

Literaturverzeichnis

Antonelli, Aldo G.

(2000) "Proto-Semantics for Positive Free Logic", *Journal of Philosophical Logic* 29 (3), S.277–294.

Armstrong, David M.

(1997) *A World of States of Affairs*, Cambridge.

Barwise, Jon / Perry, John

(1981) "Semantic Innocence and Uncompromising Situations", in: Martinich 1996, S.369–381.

(1987) *Situationen und Einstellungen. Grundlagen der Situationssemantik*, Berlin.

Benacerraf, Paul / Putnam, Hilary (Hrsg.)

(1983) *Philosophy of Mathematics*, Cambridge.

Bencivenga, Ermanno

(1986) "Free Logics", in: Gabbay/Guenthner 1986, S.373–427.

Bencivenga, Ermanno / Lambert, Karel / van Fraassen, Bas C. (Hrsg.)

(1991) *Logic, Bivalence, and Denotation*, Encino.

Born, Rainer / Neumaier, Otto (Hrsg.)

(2001) *Philosophie, Wissenschaft, Wirtschaft*, Wien.

Carnap, Rudolf

(1942) *Introduction to Semantics*, 5. Auflage 1961, Cambridge.

Church, Alonzo

(1943) "Carnap's *Introduction to Semantics*", *The Philosophical Review* 52 (3), S.298–304.

Davidson, Donald

(1967) "Truth and Meaning", in: Martinich 1996, S.92–103.

Frege, Gottlob

(1892) "Über Sinn und Bedeutung", in: Patzig 1986, S.40–65.

Gamut, L.T.F.

(1991) *Logic, Language, and Meaning. Introduction to Logic*, Vol. 1, Chicago.

Gabbay, Dov M. / Guenthner, Franz (Hrsg.)

(1986) *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 3, Dordrecht.

Goble, Lou (Hrsg.)

(2001) *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Oxford.

Gödel, Kurt

(1944) "Russell's Mathematical Logic", in: Benacerraf/Putnam 1983, S.447–469.

Goossens, Michel / Mittelbach, Frank / Samarin, Alexander

(2005) *Der LaTeX-Begleiter*, München.

Kalish, Donald / Montague, Richard / Mar, Gary

(1980) *Logic. Techniques of Formal Reasoning*, 2. Auflage, San Diego.

Kaplan, David

(1970) "What is Russell's Theory of Descriptions", in: Yourgrau/Breck 1970, S.277–295.

Kopka, Helmut

(2002) *LaTeX*, 3 Bände, München.

Lambert, Karel

(1974) "Predication and Extensionality", *Journal of Philosophical Logic* 3 (3), S.255–264.

(1996) "Substitution and the Expansion of the World", *Grazer philosophische Studien* 50, S.129–143.

(1997) *Free Logics: Their Foundations, Character, and Some Applications Thereof*, Sankt Augustin.

(2001) "Free Logics", in: Goble 2001, S.258–279.

(2003) *Free Logic. Selected Essays*, Cambridge.

Lambert, Karel (Hrsg.)

(1991) *Philosophical Applications of Free Logic*, Oxford.

Lambert, Karel / Bencivenga, Ermanno

(1986) "A Free Logic with Simple and Complex Predicates", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 27 (2), S.247–256.

Lambert, Karel / Simons, Peter M.

(1994) "Characterizing and Classifying: Explicating a Biological Distinction", *The Monist* 77 (3), S.315–328.

Leblanc, Hugues / Thomason, Richmond H.

(1968) "Completeness Theorems for Some Presupposition-Free Logics", *Fundamenta Mathematicae* 62, S.125–164.

Leeb, Hans-Peter

(1997) "Formalisierung von Gödels 'Slingshot'-Argument und die Referenzrelation", in: Weingartner/Schurz/Dorn 1997, S.532–538.

(2001a) "Was sind extensionale Sprachen?", in: Born/Neumaier 2001, S.185–190.

(2001b) "Essay Review: Free Logics", *History and Philosophy of Logic* 22 (4), S.233–236.

(2002) "Zur Deutung von Axiomensystemen bei Popper", in: Morscher 2002, S.133–159.

(2004) *Das Kompositionalitätsprinzip in seinen Anwendungen auf die "Slingshot-Argumente"*, Sankt Augustin.

(2006) "State-of-Affairs Semantics for Positive Free Logic", *Journal of Philosophical Logic* 35 (2), S.183–208.

Martin, John N.

(1987) *Elements of Formal Semantics. An Introduction to Logic for Students of Language*, San Diego.

Martinich, Aloysius (Hrsg.)

(1996) *The Philosophy of Language*, 3. Auflage, Oxford.

Meixner, Uwe

(2004) *Einführung in die Ontologie*, Darmstadt.

Morscher, Edgar (Hrsg.)

(2002) *Was wir Karl R. Popper und seiner Philosophie verdanken*, Sankt Augustin.

Morscher, Edgar / Hieke, Alexander (Hrsg.)

(2001) *New Essays in Free Logic. In Honour of Karel Lambert*, Dordrecht.

Neale, Stephen

(1995) "The Philosophical Significance of Gödel's Slingshot", *Mind* 104 (416), S.761–825.

Partee, Barbara / Meulen, Alice ter / Wall, Robert

(1993) *Mathematical Methods in Linguistics*, 2. Auflage, Dordrecht.

Patzig, Günther (Hrsg.)

(1986) *Gottlob Frege. Funktion, Begriff, Bedeutung*, 6. Auflage, Göttingen.

Quine, Willard Van Orman

(1953) "Three Grades of Modal Involvement", in: Quine 1994, S.158 bis 176.

(1960) *Word and Object*, 21. Auflage 1996, Cambridge.

(1994) *The Ways of Paradox and Other Essays*, Revised and Enlarged Edition, 6. Auflage, Cambridge.

(1995) *From Stimulus to Science*, Cambridge.

Salmon, Nathan U.

(1982) *Reference and Essence*, Oxford.

van Dalen, Dirk / Doets, Kees / Swart, Henriëtte de

(1978) *Sets: Naive, Axiomatic and Applied*, Oxford.

van Fraassen, Bas C.

(1969) "Facts and Tautological Entailments", *The Journal of Philosophy* 66 (15), S.477–487.

Weingartner, Paul / Schurz, Gerhard / Dorn, Georg (Hrsg.)

(1997) *The Role of Pragmatics in Contemporary Philosophy. Papers of the 20th International Wittgenstein Symposium*, Vol. 2, Kirchberg am Wechsel.

Yourgrau, Wolfgang / Breck, Allen D. (Hrsg.)

(1970) *Physics, Logic, and History*, New York.

Personenregister

Antonelli, A.G. 107, 173
Armstrong, D.M. 73, 173

Barwise, J. 35, 173
Benacerraf, P. 173 f.
Bencivenga, E. 30, 173, 175
Born, R. 173, 175
Breck, A.D. 174, 177

Carnap, R. 18, 173
Church, A. 35, 173

Davidson, D. 173
de Swart, H. 176
Doets, K. 176
Dorn, G. 175, 177

Frege, G. 18, 28, 174, 176

Gabbay, D.M. 173 f.
Gamut, L.T.F. 174
Goble, L. 174
Gödel, K. 35, 174–176
Goossens, M. 174
Guenthner, F. 173 f.

Hieke, A. 17, 24, 60, 176

Kalish, D. 61, 174
Kaplan, D. 29, 35, 54, 174
Knuth, D.E. 9
Kopka, H. 174

Lambert, K. 9, 12–14, 17, 21–33, 35, 50, 58, 60, 62, 66–68, 93, 105 f., 133, 136, 158, 160, 164, 173–176
Lamport, L. 9
Leblanc, H. 68, 175
Leeb, H.-P. 9, 20, 24, 35, 37, 57, 95 f., 175

Mar, G. 61, 174
Martin, J.N. 175
Martinich, A. 173, 175
Meixner, U. 73, 176
Mittelbach, F. 174
Montague, R. 61, 174
Morscher, E. 9, 17, 24, 60, 175 f.

Neale, S. 176
Neumaier, O. 173, 175

Partee, B. 176
Patzig, G. 174, 176
Perry, J. 35, 173
Popper, K. 175 f.
Putnam, H. 173 f.

Quine, W.V.O. 11 f., 25 f., 28 bis 31, 50, 149, 160, 176

Russell, B. 174

Salmon, N.U. 176
Samarin, A. 174
Schurz, G. 175, 177
Simons, P.M. 30, 175

ter Meulen, A. 176
Thomason, R.H. 68, 175

van Dalen, D. 176
van Fraassen, B.C. 57, 173, 177

Wall, R. 176
Weingartner, P. 175, 177
Wittgenstein, L. 177

Yourgrau, W. 174, 177