Zur Deutung von Axiomensystemen bei Popper

Hans-Peter Leeb

aus

Was wir Karl R.Popper und seiner Philosophie verdanken

Zu seinem 100.Geburtstag

herausgegeben von

Edgar Morscher

Academia Verlag • Sankt Augustin

Zur Deutung von Axiomensystemen bei Popper

Hans-Peter Leeb*

1. Einleitung

Gemäß einer weit verbreiteten Auffassung kann ein Teilgebiet der Wissenschaft durch eine Menge von Aussagesätzen (im folgenden kurz: Sätzen) beschrieben werden. Eine solche Satzmenge trachtet man im Hinblick auf eine strenge Systematisierung zu axiomatisieren. Eine Satzmenge zu axiomatisieren, heißt, eine Teilmenge dieser Satzmenge so auszuwählen, daß daraus alle übrigen Sätze nur mit Hilfe der zugrunde gelegten Logik ableitbar sind. An das Axiomatisieren von Satzmengen sind aber gewisse Bedingungen wie etwa die Widerspruchsfreiheit zu stellen. Wenn eine solche Satzmenge in diesem Sinne axiomatisierbar ist, dann kann man aus den ausgewählten Sätzen nur mit den Mitteln der Logik alle übrigen Sätze des jeweiligen Teilgebiets der Wissenschaft generieren. Auf diese Weise läßt sich alles, was in den Sätzen eines solchen Teilgebiets beschrieben wird, in den ausgewählten Sätzen zusammenfassen – gelegentlich sogar in einigen wenigen solchen Sätzen. Die ausgewählte Teilmenge von Sätzen nennt man auch ´Axiomensystem`, ihre Elemente ´Axiome` und die mit Hilfe der zugrunde gelegten Logik aus dem Axiomensystem ableitbaren Sätze ´Theoreme des betreffenden Teilgebiets der Wissenschaft` (wobei aller-

* Dieser Aufsatz ist im Rahmen eines Projekts entstanden, welches dankenswerterweise vom Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung, FWF, Wien, gefördert und am Institut für Angewandte Ethik, Salzburg, durchgeführt wird. Weiters möchte ich meinen Kollegen von diesem Institut sowie aus dem Forschungsseminar am Institut für Philosophie, Salzburg, für wertvolle Hinweise danken.

dings all jene Sätze, die aus der leeren Satzmenge ableitbar sind, der zugrunde gelegten Logik zugerechnet werden).

In diesem Aufsatz werde ich zunächst Poppers Bedingungen für das Axiomatisieren von solchen Satzmengen anführen. Weiters werde ich seine Antworten auf die Frage untersuchen, wie man die Axiome eines Axiomensystems für ein Teilgebiet der Wissenschaft philosophisch deuten (auffassen) kann. In diesen Antworten findet man einige interessante Ideen, die ich auf kritische Weise rekonstruieren und weiterentwickeln werde. Der Fokus meiner Untersuchung wird dabei sowohl auf Poppers Analytizitäts- als auch Synthetizitätsbegriff liegen.

2. Das Axiomatisieren von theoretischen Systemen

Popper versteht im §16 seiner *Logik der Forschung* (= *LdF*) unter einem theoretischen System eine Menge von Sätzen, die ein Teilgebiet der Wissenschaft beschreiben.[1] Bei einem theoretischen System wird immer eine streng systematische Form – die Form einer Axiomatik – angestrebt, wobei er primär das Axiomatisieren von Satzmengen im Auge hat, die Teilgebiete der Erfahrungswissenschaften beschreiben:

> „Sämtliche Voraussetzungen werden in einer kleinen Anzahl von ´Axiomen` [...] an die Spitze gestellt, derart, daß alle übrigen Sätze des theoretischen Systems aus ihnen durch rein logische bzw. mathematische Umformung abgeleitet werden können.“ (*LdF* S.41)

Man benötigt eine Logik, um aus einer Menge von solchen Axiomen weitere Sätze ableiten zu können. Ich nehme im folgenden der

[1] Vgl. Popper *Logik der Forschung* S.31, 41. Für Beispiele von solchen theoretischen Systemen vgl. Carnap *Introduction to Symbolic Logic*.

Einfachheit halber an, daß einem theoretischen System eine Sprache sowie ein Kalkül des natürlichen Schließens für die klassische Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität (= PL1=) zugrunde gelegt wird. Die Axiome eines theoretischen Systems werden einem solchen Kalkül hinzugefügt und heißen deshalb im folgenden auch ´Eigenaxiome`. Es sollen dann aus der Menge der Eigenaxiome eines theoretischen Systems alle übrigen Sätze – die Theoreme – dieses Systems nur mittels der Schlußregeln der PL1= ableitbar sein. Die Annahme der PL1= als Basis eines theoretischen Systems dient dabei lediglich zur Vereinfachung der allgemeinen philosophischen Diskussion über Eigenaxiome.

Unter welchen Bedingungen kann ein solches theoretisches System als axiomatisiert gelten? Popper nennt einige Bedingungen für das Axiomatisieren eines theoretischen Systems, die ich sinngemäß wie folgt zusammenfasse (und etwas vereinfache):[2]

(D1) Ein theoretisches System *T* ist durch eine Menge *E* axiomatisiert $\Leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$
- (i) *E* (die Menge der Eigenaxiome) ist eine nicht-leere Teilmenge von *T* und
- (ii) *E* ist widerspruchsfrei (d.h. aus *E* sind nicht alle Sätze der dem theoretischen System *T* zugrunde gelegten Sprache ableitbar) und
- (iii) alle Sätze aus *E* sind voneinander unabhängig (d.h. kein Satz aus *E* ist aus der Menge der anderen Sätze von *E* ableitbar) und
- (iv) alle übrigen Sätze von *T* sind aus *E* ableitbar.

[2] Vgl. Popper *Logik der Forschung* S.41. Er unterscheidet an dieser Stelle meines Erachtens nicht klar genug das Axiomatisieren eines theoretischen Systems von seiner Axiomatisierbarkeit. Diese Unklarheit habe ich in den Definitionen (D1) und (D2) auszuräumen versucht.

(D2) Ein theoretisches System T ist axiomatisierbar $\Leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$
Es gibt ein E, so daß gilt: T ist durch E axiomatisiert.

3. Deutungsmöglichkeiten von Eigenaxiomen

Popper erwähnt im §17 der *Logik der Forschung* drei Deutungsmöglichkeiten der Eigenaxiome eines theoretischen Systems. Nach der ersten faßt man die Eigenaxiome eines solchen theoretischen Systems als unmittelbar evidente und gewisse Sätze auf. Man kann sie weiters als Festsetzungen deuten und drittens als empirisch-wissenschaftliche Hypothesen.

Während er die erste Deutungsmöglichkeit verwirft, hält er die zweite und dritte für zulässig. Die erste Deutungsmöglichkeit ist viel zu eng, weil auch nach einem modernen Verständnis beliebige Sätze eines theoretischen Systems als Eigenaxiome in Frage kommen können sollen.[3]

3.1. Eigenaxiome als Festsetzungen

In der vorliegenden Arbeit werden vor allem zwei Arten von Definitionen angesprochen, weshalb ich diese hier kurz erläutere: Bei einer expliziten Definition ist der zu definierende sprachliche Ausdruck deutlich durch das Definitionszeichen vom definierenden sprachlichen Ausdruck abgehoben; bei einer impliziten Definition hingegen kommt der zu definierende sprachliche Ausdruck nicht abgehoben, sondern eingebettet, als Teil eines Satzes wie etwa eines Axioms oder Theorems vor.[4]

Gemäß der zweiten Deutungsmöglichkeit legen die Eigenaxiome eines theoretischen Systems den Gebrauch der darin vorkommenden Grundzeichen für die Grundbegriffe fest. Nach einem mo-

[3] Vgl. Carnap *Introduction to Symbolic Logic* S.171.
[4] Vgl. Weingartner *Wissenschaftstheorie Bd.II,1* S.240-241.

dernen Verständnis sind Grundzeichen im Sinne einer expliziten Definition undefiniert gelassene Zeichen – wie etwa undefiniert gelassene Individuenkonstanten (bzw. Eigennamen) und n-stellige Prädikatkonstanten (bzw. Allgemeinnamen) etc. Weiters sind Grundbegriffe im Sinne einer expliziten Definition undefiniert gelassene Begriffe. Gemäß der zweiten Deutungsmöglichkeit sind nun die Eigenaxiome eines theoretischen Systems implizite Definitionen der darin vorkommenden Grundzeichen für die Grundbegriffe:

> „Als *Festsetzungen* aufgefaßt, legen die Axiome den Gebrauch der in ihnen auftretenden Begriffe fest; es wird durch sie bestimmt, was von diesen Begriffen ausgesagt werden darf und was nicht. Man pflegt auch zu sagen, daß die Axiome die *impliziten Definitionen* der in ihnen auftretenden Begriffe sind.“ (*LdF* S.42)[5]

Popper erläutert diese Deutung von Eigenaxiomen mit Hilfe einer Analogie zwischen einem Axiomensystem und einem widerspruchsfreien Gleichungssystem aus der Mathematik. Ich untersuche im folgenden diese Analogie.

---

[5] Unter den in einem Eigenaxiom „auftretenden“ Begriffen sind stets die Grundbegriffe, d.h. die im Sinne einer expliziten Definition undefiniert gelassenen Begriffe zu verstehen. Popper unterscheidet meistens nicht zwischen einem Grundzeichen und einem Grundbegriff (bzw. zwischen einem Zeichen und einem Begriff). Ich gehe in der vorliegenden Arbeit jedoch von der folgenden Unterscheidung aus: Während ein Grundzeichen etwas Sprachliches ist, ist ein Grundbegriff etwas Außer-Sprachliches. Demnach ersetze ich in den Kommentaren zu den Zitaten seine Formulierung: ´ein Begriff tritt in einem Axiom auf` durch die Formulierung: ´ein Grundzeichen für einen Grundbegriff kommt in einem Eigenaxiom vor`.

3.1.1. Gleichungssysteme und Aussagefunktionen

Bei einem Gleichungssystem handelt es sich um ein System von Aussagefunktionen. Popper versteht unter einer Aussagefunktion ein Satzbruchstück, in dem mindestens eine Leerstelle (d.h. mindestens eine freie Individuenvariable) vorkommt; eines seiner Beispiele für eine solche Aussagefunktion ist: ´*x* ist in Korsika geboren`.[6] Ein solches Gleichungssystem legt nach Popper die darin vorkommenden freien Individuenvariablen in gewisser Weise fest. Aber wie legt es diese fest, und was schreibt er dazu? Er stellt in diesem Zusammenhang die folgende Behauptung auf:

> „Jede solche Aussagefunktion wird durch Substitution gewisser Werte in einen *Satz* verwandelt – je nach den substituierten Werten in einen wahren oder in einen falschen Satz." (*LdF* S.42)

Popper setzt hier offensichtlich voraus, daß eine Aussagefunktion in einen Satz verwandelt werden kann, wenn gewisse Werte für die freien Individuenvariablen aus einer solchen Aussagefunktion „substituiert" werden. Diese Voraussetzung ist problematisch, denn Sätze entstehen aus solchen Aussagefunktionen nicht durch die „Substitution" von Werten für die freien Individuenvariablen, sondern durch die Einsetzung von sprachlichen Ausdrücken wie etwa Individuenkonstanten (oder Eigennamen) für die freien Individuenvariablen aus einer Aussagefunktion – oder durch Quantifikation über die freien Individuenvariablen, was hier aber nicht zur Debatte steht. Die Werte für diese Individuenvariablen sind jedoch im allgemeinen nicht derartige sprachliche Ausdrücke, sondern außersprachliche Entitäten. Wie sich noch zeigen wird, räumt Popper in einer nachträglich hinzugefügten Fußnote diese Unklarheit in seinem Substitutionsbegriff aus.

[6] Vgl. Popper *Logik der Forschung* Fußnote 6 S.39.

Bevor ich diesen Punkt ausführlicher diskutiere, fasse ich zunächst einmal den weiteren Gedankengang in seinen Worten zusammen, wobei ich Termini für Begriffe, die ich noch näher erläutern werde, unter doppelte Anführungsstriche setze. So soll etwa die „Substitution" der Werte 5 und 7 für die Individuenvariablen ´x` und ´$y$`

(1) $x + y = 12$

die Aussagefunktion (1) in einen wahren Satz verwandeln. Ähnlich soll die „Substitution" der Wörter ´Kupfer` (bzw. ´Zink`) für die Individuenvariable ´x` aus

(2) Für alle y gilt: Wenn y ein Isotop des chemischen Elements x ist, dann hat y das Atomgewicht 65

die Aussagefunktion (2) in einen wahren Satz verwandeln.[7] Weiters dürfen weder in (1) noch in (2)

> „alle möglichen Kombinationen von Werten für die Variablen eingesetzt werden; vielmehr wird ein gewisse Klasse von Wertsystemen [d.h. Kombinationen von Werten] als zulässig, eine andere Klasse als unzulässig ausgezeichnet." (*LdF* S.42)

---

[7] Es ist nicht klar, ob Popper diese Wörter als Eigennamen oder als Allgemeinnamen versteht. Ich fasse sie hier als Eigennamen für chemische Elemente auf, obwohl man sie in anderen sprachlichen Kontexten durchaus auch als Allgemeinnamen auffassen kann – wie etwa in: ´Dies ist ein Kupferdraht`. Ein Eigenname ist ein sprachlicher Ausdruck, der dazu dient, genau ein Individuum zu bezeichnen (hier z.B. das chemische Element Kupfer). Ein Allgemeinname hingegen ist ein sprachlicher Ausdruck, der dazu dient, jedes einzelne von vielen Individuen einer bestimmten Klasse zu bezeichnen (hier z.B. die einzelnen Kupferdrähte).

Während etwa die Aussagefunktion (1) die Klasse aller geordneten Paare von Zahlen, deren Summe 12 ist, als zulässig auszeichnet, zeichnet die Aussagefunktion (2) die Klasse mit den chemischen Elementen Kupfer und Zink als zulässig aus. Eine sogenannte ´Aussagegleichung` soll schließlich aus einer Aussagefunktion durch die Festsetzung entstehen,

> „nur solche Werte zur Substitution zuzulassen, die die Aussagefunktion in einen *wahren* Satz verwandeln. Durch eine solche Aussagegleichung ist dann eine bestimmte Klasse von Wertsystemen definiert – die, die sie befriedigen." (*LdF* S.43)

Popper beantwortet also die Frage, wie ein widerspruchsfreies Gleichungssystem die darin vorkommenden freien Individuenvariablen festlegt, auf folgende Weise: Ein solches Gleichungssystem ist ein System von Aussagefunktionen (d.h. von Satzbruchstücken mit freien Individuenvariablen). Jede solche Aussagefunktion soll aber durch „Substitution" gewisser Werte für die freien Individuenvariablen in einen wahren oder falschen Satz verwandelt werden können. Eine „Aussagegleichung" soll nun aus einer Aussagefunktion aufgrund der Festsetzung entstehen, nur solche Werte zur „Substitution" zuzulassen, die die Aussagefunktion in einen wahren Satz verwandeln. Durch eine solche „Aussagegleichung" (welche ein Satz sein soll, der per Festsetzung wahr ist) ist dann eine gewisse Klasse von „Wertsystemen" (d.h. „Kombinationen von Werten") definiert, und zwar die, die sie befriedigen. Popper setzt in einer später hinzugefügten Fußnote seinen Begriff der Befriedigung mit Tarskis Begriff der Erfüllung gleich.[8] Da aber bei Tarski die Erfüllung eine Relation zwischen solchen Aussagefunktionen und Folgen von Individuen aus einem vorgegebenen Gegenstands-

[8] Vgl. Popper *Logik der Forschung* Fußnote *1 S.219 und Tarski „Die semantische Konzeption der Wahrheit" S.157.

bereich (= Domain) ist, legt Popper also nahe, daß er unter einem „Wertsystem" eine Folge von solchen Individuen versteht. Diese Auffassung eines „Wertsystems" ist aber viel zu eng, wie sich im folgenden noch zeigen wird.

3.1.2. Axiomensysteme und Aussagefunktionen

Die Analogie zwischen einem Gleichungssystem und einem Axiomensystem kann jedoch hier schon wie folgt auf den Punkt gebracht werden: So wie ein widerspruchsfreies Gleichungssystem – d.i. eine Menge von Aussagefunktionen – die darin vorkommenden freien Individuenvariablen für Zahlen implizit definiert, definiert auch ein widerspruchsfreies Axiomensystem – d.i. eine Menge von Sätzen – die darin vorkommenden Grundzeichen für die Grundbegriffe. Poppers Idee dabei ist die folgende:

> „Ein Axiomensystem kann zunächst, da seine undefinierten Grundbegriffe als Leerstellen [d.h. nach S.42: als freie Variablen] betrachtet werden können, als ein System von Aussagefunktionen aufgefaßt werden; setzt man fest, nur solche Wertsysteme zu substituieren, die es befriedigen, so ist es ein System von Aussagegleichungen; als solches definiert es implizit eine Klasse von Begriffssystemen. Jedes das Axiomensystem befriedigende Begriffssystem kann man auch ein ´Modell` des Axiomensystems nennen." (*LdF* S.43)

Seine Idee ist also, die Grundbegriffe eines Axiomensystems als Leerstellen (d.h. als freie Variablen) zu betrachten. Diese interessante Idee ist aber in mindestens zweierlei Hinsicht noch zu unscharf formuliert: Während nämlich Variablen sprachliche Ausdrücke sind, sind Grundbegriffe nach einem allgemeinen Verständnis keine solchen sprachlichen Ausdrücke; es ist weiters aufgrund der vorliegenden Textstellen nicht völlig klar, ob Poppers Idee, die Grundbegriffe eines Axiomensystems als freie Variablen zu betrachten, nur freie Individuenvariablen einschließt und alle anderen Arten von freien Variablen ausschließt. Im Sinne einer adäquaten Präzisierung seiner Idee muß er aber zumindest auch noch freie Prädikatvariablen betrachten, weil sich bei vielen Eigenaxiomen unter den Grundzeichen für die Grundbegriffe nicht nur Individuenkonstanten (bzw. Eigennamen), sondern auch *n*-stellige Prädikatkonstanten (bzw. Allgemeinnamen) befinden (vgl. etwa die Symbolisierung ´$N(0)$` des ersten Eigenaxioms der Peano-Arithmetik, daß 0 eine natürliche Zahl ist). Man kann somit seine Idee wie folgt schärfer formulieren (und insoweit weiterentwickeln, als er solche andere Arten von freien Variablen nicht betrachtet hat): Die Grundzeichen für die Grundbegriffe eines Axiomensystems werden durch freie Variablen ersetzt, wobei an eine solche Ersetzung die Bedingung zu stellen ist, daß die ersetzenden Variablen nicht schon in den Eigenaxiomen vorkommen dürfen.

Man kann dann ein Eigenaxiom als eine Aussagefunktion auffassen, indem man die im Eigenaxiom vorkommenden Grundzeichen – wie etwa Individuenkonstanten, Prädikatkonstanten etc. – für die Grundbegriffe durch passende Variablen – wie etwa Individuenvariablen, Prädikatvariablen etc. – ersetzt.

Diese schärfere Formulierung von Poppers Idee macht aber eine Erweiterung seines Aussagefunktionsbegriffs erforderlich: Demnach ist eine Aussagefunktion im weiteren Sinne ein Satzbruchstück, in dem mindestens eine freie Variable vorkommt – wie etwa Individuenvariablen, Prädikatvariablen etc. Eine solche Erweiterung des Aussagefunktionsbegriffs zieht nun seinerseits auch eine Erweiterung dessen nach sich, was unter einem „Wertsystem" zu verstehen ist. Bevor ich mich der Frage zuwende, was ein solches „Wertsystem" eigentlich ist, wende ich mich zunächst noch Poppers Korrektur seines Substitutionsbegriffs zu. Diese Korrektur enthält nämlich weitere Hinweise, wie jene Frage zu beantworten ist.

Popper hat seinen Substitutionsbegriff in der folgenden – erst nachträglich hinzugefügten – Fußnote korrigiert:

„Heute würde ich klar unterscheiden zwischen *den Systemen von Objekten*, die ein Axiomensystem befriedigen, und dem *System der Namen dieser Objekte*, die in die Axiome [aufgefaßt als Aussagefunktionen] eingesetzt werden können (und sie wahr machen), und ich würde nur das erstgenannte System ein ´Modell` nennen. Daher würde ich jetzt schreiben: ´nur Namen von Objekten, die ein Modell darstellen, sind zur Substitution zuzulassen`." (*LdF* Fußnote *2 S.43)

Aus dieser nachträglich hinzugefügten Fußnote geht hervor, daß Popper heute klar zwischen den außer-sprachlichen Werten einerseits und den Konstanten (bzw. Namen) für solche Werte andererseits unterscheiden würde und er weiters heute nur noch von der Einsetzung von solchen Konstanten (Namen) für die freien Variablen, aber nicht mehr von der „Substitution" von Werten für diese Variablen sprechen würde. Aus dieser Fußnote geht zudem auch hervor, daß er die freien Variablen nicht direkt interpretieren möchte – etwa durch Variablenbelegungen –, sondern indirekt durch die Einsetzung von noch zu interpretierenden Konstanten (Namen) für diese Variablen.[9] Es kann schließlich die Frage, ob der aufgrund einer solchen Einsetzung von Konstanten (bzw. Namen) für Variablen resultierende Satz wahr oder falsch ist, solange nicht beantwortet werden, solange die eingesetzten Konstanten (Namen) noch uninterpretiert sind.

Das allgemeine Bild, welches sich mittlerweile ergeben hat, kann im Hinblick auf die Frage, was ein „Wertsystem" eigentlich

[9] Es kommt nicht so sehr darauf an, welche Konstanten eingesetzt werden, sondern vielmehr darauf an, wie sie interpretiert werden. Ich verstehe deshalb im folgenden Poppers Formulierung „nur Namen von Objekten, die ein Modell darstellen, sind zur Substitution zuzulassen" so: „nur Interpretationen der eingesetzten Konstanten (Namen), unter denen das Resultat der Einsetzung wahr ist, sind zuzulassen".

ist, wie folgt zusammengefaßt werden: Man muß von Aussagefunktionen im weiteren Sinne ausgehen, wenn man Poppers Idee, die Grundbegriffe eines Axiomensystems als freie Variablen zu betrachten, adäquat präzisieren will. Eine Aussagefunktion im weiteren Sinne ist dann – wie gesagt – ein Satzbruchstück, das mindestens eine freie Variable (Individuen-, Prädikatvariable etc.) enthält. Solche freien Variablen werden nun indirekt durch die Einsetzung von noch zu interpretierenden Konstanten interpretiert. Ein Satz entsteht weiters aus einer Aussagefunktion im weiteren Sinne durch die Einsetzung von solchen Konstanten für die freien Variablen aus einer derartigen Aussagefunktion. Ein solcher Satz ist aber nur unter einer Interpretation der eingesetzten Konstanten wahr oder falsch. Was ein „Wertsystem“ eigentlich ist, ergibt sich somit daraus, wie die eingesetzten Konstanten interpretiert werden – so kann eine Interpretation den Individuenkonstanten Individuen aus einem Domain und den *n*-stelligen Prädikatkonstanten Mengen von geordneten *n*-Tupeln von solchen Individuen zuordnen. Unter einem Wertsystem ist demnach dann eine Folge von jenen Entitäten zu verstehen, die diesen Konstanten durch eine Interpretation zugeordnet werden. Man kann nun weiters festsetzen, all jene und nur jene Interpretationen dieser Konstanten zuzulassen, unter denen der aus einer solchen Einsetzung resultierende Satz wahr ist. Das so entstehende System von „Aussagegleichungen“ definiert dann implizit eine Klasse von solchen Wertsystemen bzw. Begriffssystemen, d.h. eine Klasse von Folgen von im allgemeinen außersprachlichen Entitäten (bzw. Grundbegriffen). Ein Eigenaxiom als implizite Definition zu deuten, heißt demnach, es als eine Aussagegleichung aufzufassen, d.h. als einen Satz aufzufassen, für den festgesetzt ist, all jene und nur jene Interpretationen zuzulassen, unter denen er wahr ist.

3.1.3. Aussagegleichungen und Wertsysteme

Dieses allgemeine Bild kann am besten durch die Einführung einer sogenannten ´substitutionellen Semantik` formal umgesetzt werden. Im folgenden werde ich die Grundzüge einer Sprache sowie einer substitutionellen Semantik für die PL1= angeben, soweit sie für die formale Umsetzung dieses Bildes (sowie den daran anschließenden Überlegungen zu den Analytizitätsbegriffen) erforderlich sind. Weiters kann man dann anhand einer solchen Semantik Poppers Aussagegleichungsbegriff definieren und die durch eine solche „Aussagegleichung" implizit definierte Klasse von Wertsystemen angeben.

Die prädikatenlogischen Sätze können rekursiv durch die folgenden vier Klauseln definiert werden:

(D3) Prädikatenlogischer Satz

- (i) Wenn P eine n-stellige Prädikatkonstante ist und $c_1,..., c_n$ Individuenkonstanten sind, dann ist $Pc_1...c_n$ ein Satz
- (ii) wenn ϕ und ψ beides Sätze sind, dann sind auch $\neg\phi$ und $(\phi \rightarrow \psi)$ Sätze
- (iii) wenn $\phi[c/x]$ – d.i. das Resultat der Einsetzung von Vorkommnissen der Individuenkonstante c für alle freien Vorkommnisse der Individuenvariable x aus ϕ – ein Satz für alle Individuenkonstanten c ist, dann ist auch $\forall x\phi$ ein Satz
- (iv) nichts sonst ist ein Satz.

Die prädikatenlogischen Aussagefunktionen sind dann die prädikatenlogischen Sätze und jeder Ausdruck, der ein Resultat der Ersetzung mindestens eines Vorkommnisses einer Individuenkonstante c bzw. einer Prädikatkonstante P aus einem solchen Satz S durch ein Vorkommnis einer Individuenvariable x bzw. einer Prädikatvariable F ist, wobei diese Variablen nicht schon in S vorkommen dürfen. (Weiters kommt eine Individuenvariable x in einer solchen Aussagefunktion ϕ frei vor $\Leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ mindestens ein Vorkommnis von x in ϕ ist frei. Ein Vorkommnis von x in ϕ ist frei $\Leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ dieses Vorkommnis von x in ϕ steht nicht in einer in ϕ vorkommenden Aussagefunktion $\forall x \psi$. Schließlich ist eine Prädikatvariable stets frei in einer solchen Aussagefunktion.)[10]

Man kann weiters eine Notation für Einsetzungen wie folgt einführen: Sei ϕ eine prädikatenlogische Aussagefunktion, und seien $v_1,..., v_m$ alle in ϕ in dieser Reihenfolge vorkommenden freien Variablen – wie etwa Individuenvariablen, Prädikatvariablen etc. –, was ich im folgenden durch ´$\phi[v_1,..., v_m]$` anschreibe. Für die Bestimmung dieser Reihenfolge sei das jeweils erste freie Vorkommnis einer Variable v_i in ϕ, von links nach rechts betrachtet, maßgeblich. Sei weiters $\phi[c_1/v_1,..., c_m/v_m]$ derjenige prädikatenlogische Satz, der aus der Aussagefunktion $\phi[v_1,..., v_m]$ durch die uniforme Einsetzung von Vorkommnissen der Konstanten $c_1,..., c_m$ für alle freien Vorkommnisse der Variablen $v_1,..., v_m$ aus $\phi[v_1,..., v_m]$ entsteht.

Weiters kann man eine prädikatenlogische Interpretation wie folgt definieren:

(D4) Eine prädikatenlogische Interpretation I ist ein geordnetes Paar $<D, f>$, das folgende Bedingungen erfüllt:
- (i) D ist eine nicht-leere Menge
- (ii) für jede Individuenkonstante c gilt: $f(c) \in D$
- (iii) für jede n-stellige Prädikatkonstante P gilt: $f(P) \subseteq D^n$
- (iv) zu jedem $d \in D$ gibt es eine Individuenkonstante c, so daß gilt: $f(c) = d$.

---

10 Für die Definition der prädikatenlogischen Sätze und Aussagefunktionen, die ich hier erweitert habe, vgl. Lambert *Free Logics* S.37-38.

Wenn im folgenden von solchen prädikatenlogischen Interpretationen die Rede ist, werde ich gelegentlich den Zusatz ´prädikatenlogisch` weglassen.

Es folgt die rekursive Definition eines relativen Wahrheitsbegriffs für alle prädikatenlogischen Sätze entsprechend ihrer Form:

(D5) Wahrsein unter einer Interpretation

(i) Ein Atomsatz $Pc_1...c_n$ ist wahr unter $I \Leftrightarrow$
$<f(c_1),..., f(c_n)> \in f(P)$

(ii) ein Negationssatz $\neg\phi$ ist wahr unter $I \Leftrightarrow$
ϕ ist nicht wahr (d.h. falsch) unter I

(iii) ein Konditionalsatz $(\phi \rightarrow \psi)$ ist wahr unter $I \Leftrightarrow$
ϕ ist falsch unter I oder ψ ist wahr unter I

(iv) ein Allsatz $\forall x\phi$ ist wahr unter $I \Leftrightarrow$
für alle Individuenkonstanten c gilt:
$\phi[c/x]$ ist wahr unter I.[11]

Die Begriffe des prädikatenlogischen Wahr- sowie Falsch- und Kontingentseins eines Satzes können dann wie üblich definiert werden:

(D6) Prädikatenlogische Wahrheit, Falschheit und Kontingenz

(i) Ein Satz S ist prädikatenlogisch wahr $\Leftrightarrow_{Df}$
Für alle prädikatenlogischen Interpretationen I
gilt: S ist wahr unter I

[11] Da $\forall x\phi$ ein Allsatz ist, kann ϕ ein Satz sein – bei der leeren Quantifikation – oder aber eine Aussagefunktion mit x als der einzigen freien Individuenvariable. Im ersteren Fall ändert in der Klausel (iv) die Einsetzung von c für x nichts, im letzteren Fall wird $\phi[x]$ durch die Einsetzung der interpretierten Individuenkonstante c für x interpretiert.

(ii) S ist prädikatenlogisch falsch $\Leftrightarrow_{\text{Df}}$
Für alle prädikatenlogischen Interpretationen I gilt: S ist falsch unter I
(iii) S ist prädikatenlogisch kontingent $\Leftrightarrow_{\text{Df}}$
S ist weder prädikatenlogisch wahr noch prädikatenlogisch falsch.

Das Resultat $\phi[c_1/v_1,..., c_m/v_m]$ einer solchen Einsetzung kann nun unter allen solchen Interpretationen I wahr bzw. falsch sein – oder aber unter manchen solchen Interpretationen wahr, unter anderen jedoch falsch sein.

Man kann jetzt festsetzen, all jene und nur jene Interpretationen I zuzulassen, unter denen das Resultat $\phi[c_1/v_1,..., c_m/v_m]$ einer solchen Einsetzung wahr ist. Eine Aussagegleichung besteht demnach dann aus dem Satz $\phi[c_1/v_1,..., c_m/v_m]$ und der Klasse I^* all jener Interpretationen, unter denen dieses Resultat wahr ist; d.h.:

(D7) Eine Aussagegleichung ist ein geordnetes Paar $<S, I^*>$, das folgende Bedingungen erfüllt:
(i) $S = \phi[c_1/v_1,..., c_m/v_m]$ und
(ii) $I^* = \{I \mid S \text{ ist wahr unter } I\}$.

Die durch eine Aussagegleichung $<S, I^*>$ relativ zur Aussagefunktion $\phi[v_1,..., v_m]$ implizit definierte Klasse von Wertsystemen ist dann die folgende Klasse von geordneten m-Tupeln von Entitäten:

$$\{<e_1,..., e_m> \mid \exists I\, \exists D\, \exists f\, (I = <D, f> \wedge e_1 = f(c_1) \wedge ... \wedge e_m = f(c_m) \wedge \phi[c_1/v_1,..., c_m/v_m] \text{ ist wahr unter } I)\}.$$

Je nach den in der Aussagefunktion $\phi[v_1,..., v_m]$ vorkommenden freien Variablen sind die Elemente dieser geordneten m-Tupel Individuen (aus D) oder Mengen von geordneten n-Tupeln von solchen Individuen (d.h. Eigenschaften-, Relationen-in-extenso) etc.

Sind etwa die in der Aussagefunktion $\phi[v_1,..., v_m]$ vorkommenden freien Variablen ausschließlich Individuenvariablen, so handelt es sich um geordnete *m*-Tupel von Individuen (aus *D*).

Der springende Punkt dieser formalen Umsetzung des vorhin erwähnten Bildes ist nun, daß man die Konjunktion *S* der Eigenaxiome eines theoretischen Systems bilden kann und weiters diese Konjunktion *S* – im Sinne der Präzisierung von Poppers Idee, die Grundzeichen $c_1,..., c_m$ für die Grundbegriffe durch freie Variablen zu ersetzen – als eine Aussagefunktion $\phi[v_1,..., v_m]$ auffassen kann.[12] Die Aussagegleichung $<S, I^*>$ definiert dann relativ zur Aussagefunktion $\phi[v_1,..., v_m]$ implizit eine Klasse von Wertsystemen (bzw. Begriffssystemen). Es ist allerdings einzuräumen, daß diese formale Umsetzung auf mindestens zweierlei Weise beschränkt ist: Erstens muß man voraussetzen, daß die Eigenaxiome eines theoretischen Systems im Rahmen einer Sprache für die PL1= formulierbar sind; und zweitens kann im Rahmen des vorliegenden formalen Apparats eine Konjunktion nur aus einer endlichen Anzahl von Eigenaxiomen gebildet werden. Trotz dieser Beschränkungen meine ich, daß diese Analyse nützlich für ein besseres Verständnis des Popperschen Aussagegleichungsbegriffs und der durch eine solche Aussagegleichung relativ zu einer Aussagefunktion implizit definierten Klasse von Wertsystemen ist.

3.1.4. Absolute und relative Analytizität

Die Deutung von Eigenaxiomen als implizite Definitionen hat nun die Konsequenz, daß die Eigenaxiome eines theoretischen Systems in einem gewissen Sinne „analytisch“ werden. Ich werde im folgenden einen absoluten Analytizitätsbegriff von einem relativen unterscheiden. Es wird sich dann zeigen, daß bei der Deutung von Eigenaxiomen als implizite Definitionen die Eigenaxiome eines

[12] Der Konjunktionsoperator kann wie in der modernen Logik üblich durch den Negations- und Konditionaloperator definiert werden.

theoretischen Systems nicht im absoluten, sondern im relativen Sinne „analytisch“ werden. Popper nennt übrigens im nächsten Zitat die durch ein System von Aussagegleichungen relativ zu einer Aussagefunktion implizit definierten Wertsysteme auch ´Modelle des Axiomensystems`:

> „Die Auffassung eines Axiomensystems als System von (Konventionen oder) impliziten Definitionen kann man auch so ausdrücken: Es wird festgesetzt, nur Modelle zur Substitution zuzulassen[*2]. Substituiert man aber ein Modell, so erhält man ein System von analytischen Sätzen (da dann die Sätze durch Übereinkunft wahr sind). [...] auch jeder Folgesatz muß analytisch sein.“ (*LdF* S.43)

In der nachträglich hinzugefügten Fußnote *2 korrigiert Popper diese Textstelle.[13] Er würde heute – wie gesagt – sprachliche Ausdrücke wie Konstanten (Namen) von deren Werten unterscheiden; demnach würde er jetzt die Festsetzung an dieser Stelle wie folgt formulieren: „nur Namen von Entitäten (Grundbegriffen), die ein Modell darstellen, sind zur Substitution zuzulassen“.

Man kann den absoluten Analytizitätsbegriff – im Popperschen Sinne dieses Begriffs – wie folgt definieren:[14]

(D8) Ein Satz S ist analytisch $\Leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$ S ist logisch wahr
(d.h. wahr unter allen Interpretationen der zugrunde gelegten Logik).

---

[13] Vgl. Popper *Logik der Forschung* Fußnote *2 S.43.

[14] Vgl. Popper *Logik der Forschung* S.4, 32, 45, 462. Er verwendet neben den Termini ´analytisch` und ´logisch wahr` gelegentlich auch den Terminus ´tautologisch`, und zwar nicht im Sinne von ´aussagenlogisch wahr`, sondern im weiteren Sinne von ´logisch wahr`.

Zur Vereinfachung der weiteren Diskussion betrachte ich nur prädikatenlogische Interpretationen, weshalb im folgenden unter dem Terminus ´logisch wahr` der Terminus ´prädikatenlogisch wahr` zu verstehen ist. Die Theoreme der PL1= sind im absoluten Sinne der Definition (D8) analytisch, weil sie prädikatenlogisch wahr sind.

Kann ein Eigenaxiom eines theoretischen Systems (der Erfahrungswissenschaften) ebenfalls prädikatenlogisch wahr und folglich in diesem absoluten Sinne analytisch sein? Die Antwort lautet meines Erachtens: Nein, weil sonst die Unabhängigkeitsbedingung für die Axiomatisierung eines theoretischen Systems verletzt wäre. Es ist nämlich jeder prädikatenlogisch wahre Satz aus der leeren Satzmenge ableitbar. Wenn aber ein solcher prädikatenlogisch wahrer Satz aus der leeren Satzmenge ableitbar ist, dann ist er trivialerweise auch aus einer nicht-leeren Menge von prädikatenlogischen Sätzen ableitbar – er ist deshalb trivialerweise aus einer solchen nicht-leeren Menge ableitbar, weil zu seiner Ableitung kein Satz aus einer solchen Menge nötig ist. Folglich ist ein prädikatenlogisch wahrer Satz trivialerweise auch aus einer nicht-leeren Menge von Eigenaxiomen eines solchen theoretischen Systems ableitbar (es wird hier und im folgenden vorausgesetzt, daß die Eigenaxiome in einer Sprache für die PL1= formuliert sind). Wenn nun ein Eigenaxiom prädikatenlogisch wahr wäre, dann wäre es trivialerweise aus der Menge der anderen Eigenaxiome ableitbar und somit nicht mehr unabhängig von dieser Menge. Ein Eigenaxiom eines solchen theoretischen Systems kann also nicht prädikatenlogisch wahr sein, weil sonst die Unabhängigkeitsbedingung verletzt wäre.

Wenn aber ein solches Eigenaxiom nicht im vorliegenden absoluten Sinne analytisch sein kann, in welchem Sinne – wenn überhaupt – ist es dann „analytisch“? Gemäß der zweiten Deutung wird ein Eigenaxiom als eine Aussagegleichung aufgefaßt, d.h. als ein Satz aufgefaßt, für den festgesetzt ist, all jene und nur jene Interpretationen zuzulassen, unter denen dieser Satz wahr ist. Die Klasse aller prädikatenlogischen Interpretationen überhaupt wird hier also eingeschränkt auf die Klasse all jener Interpretationen, unter denen dieser Satz wahr ist. Diese Klasse ist aber aufgrund der Überlegung, daß ein Eigenaxiom wegen der Unabhängigkeitsbedingung nicht prädikatenlogisch wahr sein kann, eine echte Teilklasse der Klasse aller prädikatenlogischen Interpretationen überhaupt.

Man kann nun ein Eigenaxiom in einem relativen Sinne ´analytisch` nennen, und zwar analytisch relativ zur Klasse all jener Interpretationen, unter denen es wahr ist. Die Definition dieses relativen Analytizitätsbegriffs lautet dann für beliebige Sätze der PL1= wie folgt:

(D9) Ein Satz *S* ist analytisch relativ zu einer Klasse *I** von prädikatenlogischen Interpretationen $\Leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$
Für alle $I \in I^*$ gilt: *S* ist wahr unter *I*.

Die Theoreme der PL1= sind nicht nur im absoluten Sinne der Definition (D8) analytisch, sondern auch im relativen Sinne der Definition (D9) – und zwar nicht nur relativ zur Klasse aller prädikatenlogischen Interpretationen überhaupt, sondern auch zu einer beliebigen nicht-leeren Teilklasse davon. Die Eigenaxiome eines theoretischen Systems hingegen sind nicht im fraglichen absoluten Sinne analytisch, sondern nur im vorliegenden relativen Sinne – und zwar relativ zur Klasse all jener Interpretationen, unter denen sie wahr sind.

Popper muß also mit seiner Behauptung, daß die Auffassung von Eigenaxiomen als Aussagegleichungen die Konsequenz hat, daß die Eigenaxiome „analytisch“ werden, meinen, daß sie analytisch im relativen Sinne werden. Weiters sind die logischen Folgerungen einer Menge von Eigenaxiomen, die im relativen Sinne analytisch sind, selber in diesem Sinne analytisch. Ein gemäß der zweiten Möglichkeit gedeutetes Axiomensystem ist somit nicht durch Falsifikation seiner logischen Folgerungen widerlegbar, und zwar weil diese analytisch im relativen Sinne sind.

3.2. *Eigenaxiome als empirisch-wissenschaftliche Hypothesen*

Nach der dritten Deutungsmöglichkeit sind die Eigenaxiome eines theoretischen Systems empirisch-wissenschaftliche Hypothesen. Was ist damit gemeint? Hypothesen sind für Popper unsichere Sätze.[15] Man kann weiters die drei Forderungen, die er an das Empirischsein eines theoretischen Systems stellt, als Definition dieses Begriffs des Empirischseins verstehen.[16] Man erhält dann die folgende Definition:

(D10) Ein theoretisches System T ist empirisch $\Leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$
Für jeden Satz $S \in T$ gilt: S ist synthetisch sowie falsifizierbar und beschreibt unsere Erfahrungswelt.[17]

Nach der dritten Deutungsmöglichkeit sind somit die Eigenaxiome eines theoretischen Systems unsichere sowie synthetische und falsifizierbare Sätze, die unsere Erfahrungswelt beschreiben.

3.2.1. *Absolute Synthetizität*

Popper definiert allerdings den absoluten Synthetizitätsbegriff auf sachlich unangemessene Weise. Für ihn ist nämlich ein „synthetischer“ Satz ein Satz dessen Negation nicht logisch falsch ist;[18] d.h.:

---

15 Vgl. Popper *Logik der Forschung* S.XXIV.

16 Vgl. Popper *Logik der Forschung* S.13.

17 Ich lasse an dieser Stelle die Frage offen, ob die dritte Bedingung redundant ist und nicht schon etwa in den anderen beiden Bedingungen enthalten ist.

18 Vgl. Popper *Logik der Forschung* S.4. Er hat seinen sachlich unangemessenen Synthetizitätsbegriff wohl als die Negation des absoluten Analytizitätsbegriffs fassen wollen, da man letzteren Begriff in einer

(D11*) Ein Satz S ist synthetisch $\Leftrightarrow_{Df}$
$\neg S$ ist nicht logisch falsch
(d.h. $\neg S$ ist nicht falsch unter allen Interpretationen der zugrunde gelegten Logik).

Zur Vereinfachung der weiteren Diskussion, verstehe ich im folgenden unter dem Terminus ´logisch falsch` den Terminus ´prädikatenlogisch falsch`. Daß aber ein Satz $\neg S$ nicht prädikatenlogisch falsch ist, kann nun zweierlei heißen: Entweder ist $\neg S$ unter manchen prädikatenlogischen Interpretationen wahr, unter anderen aber falsch, oder sogar unter allen solchen Interpretationen wahr. Es gilt also:

(3) Ein Satz $\neg S$ ist nicht prädikatenlogisch falsch $\Leftrightarrow$
$\neg S$ ist entweder prädikatenlogisch kontingent oder
$\neg S$ ist prädikatenlogisch wahr.

Anhand der in §3.1 angegebenen Semantik kann man sich weiters überlegen, daß die folgenden Äquivalenzen gelten:

(4) Ein Satz $\neg S$ ist prädikatenlogisch kontingent $\Leftrightarrow$
S ist prädikatenlogisch kontingent

(5) Ein Satz $\neg S$ ist prädikatenlogisch wahr $\Leftrightarrow$
S ist prädikatenlogisch falsch.

Es folgt dann aus (3) mittels (4) und (5) folgendes:

(6) Ein Satz $\neg S$ ist nicht prädikatenlogisch falsch $\Leftrightarrow$
S ist entweder prädikatenlogisch kontingent oder
S ist prädikatenlogisch falsch.

---

zur Definition (D8) äquivalenten Weise auch wie folgt definieren kann: Ein Satz S ist analytisch $\Leftrightarrow_{Df}$ $\neg S$ ist logisch falsch.

Aus Poppers Definition (D11*) folgt dann mittels (6) und der Annahme, daß mit dem Terminus ´logisch falsch` der Terminus ´prädikatenlogisch falsch` gemeint ist:

(7) Ein Satz S ist synthetisch $\Leftrightarrow$
S ist entweder prädikatenlogisch kontingent oder
S ist prädikatenlogisch falsch.

Prädikatenlogisch falsche Sätze sind jedoch sicherlich nicht „synthetisch" (in welchem Sinne auch immer); so soll etwa die Negation eines „synthetischen" Satzes selber „synthetisch" sein, die Negation eines prädikatenlogisch falschen Satzes ist aber prädikatenlogisch wahr und folglich analytisch im absoluten Sinne. Popper hätte stattdessen den absoluten Synthetizitätsbegriff wie folgt definieren können:

(D11) Ein Satz S ist synthetisch $\Leftrightarrow_{\mathrm{Df}}$
S ist weder wahr unter allen Interpretationen der zugrunde gelegten Logik noch falsch unter allen Interpretationen der zugrunde gelegten Logik
(d.h. es gibt eine Interpretation, unter der S falsch ist, und eine andere, unter der S wahr ist).

Natürlich könnte man auch einen entsprechenden relativen Synthetizitätsbegriff definieren, wofür es hier aber keine Veranlassung gibt.

3.2.2. *Empirische Interpretationen und Wirklichkeitsaussagen*

Wie kann nun ein Axiomensystem im Sinne eines Systems von solchen empirisch-wissenschaftlichen Hypothesen aufgefaßt werden? Popper beantwortet diese Frage wie folgt:

> „Die gewöhnliche Auffassung ist, daß die in einem Axiomensystem auftretenden Zeichen nicht als implizit definiert anzusehen sind, sondern als ´außerlogische` Konstanten. So können die in einem Axiomensystem der Geometrie auftretenden Begriffe ´Gerade` und ´Punkt` als ´Lichtstrahl` und ´Fadenkreuz` interpretiert werden. Damit, so meint man, werden die Sätze des Axiomensystems zu Aussagen über empirische Gegenstände, zu synthetischen Sätzen." (*LdF* S.43)

Man betrachte als Beispiel den folgenden prädikatenlogischen Satz:[19]

(8) $\forall x \forall y(Ax \wedge Ay \wedge x \neq y \rightarrow \exists z(Bz \wedge Cxz \wedge Cyz))$.

Die darin vorkommenden Prädikatkonstanten ´A`, ´$B$` und ´C` für die Grundbegriffe *A*, *B* und *C* werden jetzt nicht als durch (8) implizit definiert angesehen. Da hier also nicht festgesetzt ist, nur solche Interpretationen zuzulassen, unter denen (8) wahr ist, sind alle prädikatenlogischen Interpretationen überhaupt zugelassen (es ist hier ja die PL1= zugrunde gelegt). Es handelt sich dann aber bei (8) um einen prädikatenlogisch kontingenten Satz, also um einen Satz, der im Sinne der Definition (D11) synthetisch ist.[20]

---

[19] Für dieses Beispiel ist die Definition der prädikatenlogischen Sätze um die üblichen Klauseln zur Bildung von Konjunktions- und Es-gibt-Sätzen zu ergänzen und weiters sind die entsprechenden Klauseln für die Interpretation solcher Sätze der Semantik hinzuzufügen; vgl. etwa Gamut *Logic, Language, and Meaning* S.91. Es gelten weiters die üblichen Klammerersparnisregeln.

[20] Dies kann man wie folgt einsehen: (8) ist wahr unter $I \Leftrightarrow$ Für alle Individuenkonstanten c_1 sowie c_2 gilt (⌜$Ac_1 \wedge Ac_2 \wedge c_1 \neq c_2$⌝ ist falsch unter *I* oder es gibt eine Individuenkonstante c_3, so daß gilt (⌜$Bc_3 \wedge Cc_1c_3 \wedge Cc_2c_3$⌝ ist wahr unter *I*)). Wie man sich leicht überzeugen kann, ist $I = \langle D, f \rangle$, wo *D* genau ein Element enthält, eine Interpretation,

Weiters ist (8) eine Symbolisierung des ersten Eigenaxioms der Euklidschen Geometrie, wenn die Prädikatkonstanten ´A`, ´B` und ´C` die Prädikate ´ist ein Punkt`, ´ist eine Gerade` und ´liegt auf` symbolisieren.[21]

Schließlich wird (8) zu einem Satz über empirische Entitäten wie Fadenkreuze und Lichtstrahlen, wenn die Interpretationsfunktion *f* die Prädikatkonstanten ´A` bzw. ´B` als eine Menge von Fadenkreuzen bzw. Lichtstrahlen interpretiert. Auffallend ist allerdings, daß (8) schon ohne eine derartige empirische Interpretation synthetisch im Sinne der Definition (D11) ist. Entweder bedarf es keiner derartigen empirischen Interpretation, damit (8) in diesem Sinne synthetisch wird, oder aber Popper hat im letzten Zitat einen anderen Sinn von ´synthetisch` im Auge als den, den er in der Definition (D11*) zu definieren versucht hat und den ich mit der Definition (D11) präzisiert habe.

Welchen anderen Synthetizitätsbegriff – wenn überhaupt –, als den in der Definition (D11) definierten, könnte Popper sonst noch im Auge haben? Er nimmt wohl kaum denjenigen an, den er im letzten Zitat anderen in den Mund gelegt hat: Denn der Satz ´a ist ein Lichtstrahl oder a ist kein Lichtstrahl` ist über empirische Entitäten wie Lichtstrahlen, aber ein derartiger Satz ist sicherlich nicht synthetisch (in welchem Sinne auch immer), sondern analytisch, weil prädikatenlogisch wahr. An anderer Stelle versteht er

---

unter der (8) wahr ist. Weiters ist (8) falsch unter $I \Leftrightarrow$ Es gibt Individuenkonstanten c_1 sowie c_2, so daß gilt ($\ulcorner Ac_1 \wedge Ac_2 \wedge c_1 \neq c_2 \urcorner$ ist wahr unter I und für alle Individuenkonstanten c_3 gilt ($\ulcorner Bc_3 \wedge Cc_1c_3 \wedge Cc_2c_3 \urcorner$ ist falsch unter I)). (8) ist somit falsch unter einer Interpretation $I = \langle D, f \rangle$, wo $f(c_1) \neq f(c_2)$ und $f(c_1) \in f(´A`)$ und $f(c_2) \in f(´A`)$ und $f(´B`) = \{\}$.

[21] Für die Formulierung des ersten euklidschen Eigenaxioms vgl. Hermes *Einführung in die mathematische Logik* S.12.

allerdings unter einem synthetischen Satz eine sogenannte ´Wirklichkeitsaussage`.[22]

Die Ähnlichkeit zu einer Stelle bei Carnap ist auffallend. Carnap hat in seinem Buch *Logische Syntax der Sprache* (= *LSdS*) das Analytisch- sowie Kontradiktorisch- und Synthetischsein eines Satzes syntaktisch definiert. Über diese auf syntaktische Weise definierten Begriffe schreibt er dann:

> „Bei inhaltlicher Deutung ist ein analytischer Satz unbedingt wahr, mögen die empirischen Tatsachen sein, wie sie wollen. Er besagt daher nichts über die Tatsachen. Ein kontradiktorischer Satz besagt dagegen zu viel, um wahr sein zu können; aus ihm kann jede Tatsache und auch ihr Gegenteil entnommen werden. Ein synthetischer Satz ist unter Umständen wahr, nämlich wenn bestimmte Tatsachen vorliegen, und unter Umständen falsch; daher besagt er etwas darüber, welche Tatsachen vorliegen. Die *synthetischen Sätze* sind die eigentlichen *Wirklichkeitsaussagen*." (*LSdS* S.37)

Eine Wirklichkeitsaussage ist somit für Carnap ein Satz, der unter manchen Umständen wahr, unter anderen aber falsch ist. Aber das heißt nach einem modernen Verständnis nichts anderes, als daß eine Wirklichkeitsaussage ein Satz ist, der unter manchen Interpretationen wahr, unter anderen aber falsch ist. Wirklichkeitsaussagen im Sinne Carnaps sind somit Sätze, die im Sinne der Definition (D11) synthetisch sind.

Popper könnte Wirklichkeitsaussagen auf ähnliche Weise wie Carnap verstehen. Unter dieser Voraussetzung hätte Popper dann den in der Definition (D11) definierten Synthetizitätsbegriff im Auge, wenn er von Wirklichkeitsaussagen spricht. Da er aber dann keinen anderen Sinn von ´synthetisch`, als den in der Definition (D11) definierten, im Auge hätte, sind die vorhin angesprochenen

---

[22] Vgl. Popper *Logik der Forschung* S.32.

empirischen Interpretationen gar nicht erforderlich, damit der Satz (8) synthetisch wird. Er ist es bereits aufgrund der vorausgesetzten Semantik. Sollte er dennoch einen anderen Synthetizitätsbegriff, als den in der Definition (D11) definierten, im Auge haben, so könnten diese empirischen Interpretationen vielleicht doch nötig sein. Dieses Problem lasse ich hier aber offen, weil Poppers diesbezügliche Erläuterungen zu spärlich ausgefallen sind.

3.2.3. Zuordnungen und explizite Definitionen

Abschließend erwähne ich noch, daß es nach Popper möglich ist, den Grundzeichen für die Grundbegriffe eines axiomatischen Systems, z.B. der Geometrie, die Begriffe eines anderen Systems, z.B. der Physik, zuzuordnen.[23] Er will allerdings solche Zuordnungen durch explizite Definitionen der sprachlichen Ausdrücke für die zugeordneten Begriffe ersetzt wissen. Bei solchen expliziten Definitionen muß man aber, um einen unendlichen Definitionsregreß zu vermeiden, gewisse andere sprachliche Ausdrücke undefiniert lassen. Diese undefiniert gelassenen anderen sprachlichen Ausdrücke sind aber dann gerade Grundzeichen für Grundbegriffe. Er sieht nun bei solchen expliziten Definitionen eine Schwierigkeit:

> „Es ist [...] unvermeidlich, gewisse Universalien undefiniert zu lassen, und darin liegt die Schwierigkeit: Diese undefinierten Begriffe können wir immer im nichtempirischen Sinn [...], d.h. wie implizit definierte Begriffe verwenden, wodurch das System tautologisch [d.h. analytisch im relativen Sinne] wird.“ (*LdF* S.44)

[23] Vgl. Popper *Logik der Forschung* S.44.

Er fällt deshalb den methodologischen Beschluß, die undefiniert gelassenen anderen sprachlichen Ausdrücke für die undefiniert gelassenen Begriffe nicht in dieser Weise zu verwenden.

4. Zusammenfassung

Poppers Beitrag zur Frage, wie man die Eigenaxiome eines theoretischen Systems philosophisch deuten kann, kann wie folgt zusammengefaßt werden: Er hält zwei Deutungen der Eigenaxiome eines theoretischen Systems für zulässig. Nach der einen Deutung sind solche Eigenaxiome Festsetzungen, die den Gebrauch der darin vorkommenden Grundzeichen für die Grundbegriffe festlegen. Eine Konsequenz dieser Auffassung ist allerdings, daß die Eigenaxiome analytisch im relativen Sinne werden. Sie sind damit nicht durch Widerlegung ihrer logischen Folgerungen falsifizierbar, weil nämlich auch diese Folgerungen aus den Eigenaxiomen in jenem relativen Sinne analytisch sind. Nach der anderen Deutung sind die Eigenaxiome synthetische sowie falsifizierbare und unsichere Sätze. Sie sind damit nicht von vorne herein gegen ihre Falsifikation durch die Widerlegung ihrer logischen Folgerungen immunisiert.

Literatur

Carnap, Rudolf (1958): *Introduction to Symbolic Logic and its Applications*. New York: Dover Publications.

Carnap, Rudolf ([2]1968): *Logische Syntax der Sprache*. Wien: Springer-Verlag.

Gamut, L.T.F. (1991): *Logic, Language, and Meaning. Volume 1*. Chicago: The University of Chicago Press.

Hermes, Hans ([3]1972): *Einführung in die mathematische Logik. Klassische Prädikatenlogik*. Stuttgart: Teubner.

Lambert, Karel (1997): *Free Logics. Their Foundations, Character, and Some Applications Thereof*. (ProPhil; Bd. 1) Sankt Augustin: Academia Verlag.

Popper, Karl ([10]1994): *Logik der Forschung*. Tübingen: J.C.B. Mohr (Paul Siebeck).

Tarski, Alfred (1944): „Die semantische Konzeption der Wahrheit und die Grundlagen der Semantik". In: Skirbekk, Gunnar (Hrsg.) ([2]1980): *Wahrheitstheorien*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Weingartner, Paul (1976): *Wissenschaftstheorie Bd.II,1. Grundlagenprobleme der Logik und Mathematik*. Stuttgart: Friedrich Frommann Verlag.