STEN LINDSTRÖM

Sanningens paradoxer: om ändliga och oändliga lögnare

---

1. *Inledning*

Lögnarparadoxen, i dess olika versioner, tycks ge vid handen att vår naiva förståelse av sanningspredikatet, uttryckt i följande slutledningsregler:

(Sann I) A $\Rightarrow$ Sann('A')

(Sann E) Sann('A') $\Rightarrow$ A.

är motsägelsefull (jag skriver '$\Rightarrow$' som en förkortning för 'implicerar'). Det förefaller som om vårt sanningsbegrepp bryter samman i extrema situationer: när det konfronteras med paradoxala satser. Innan vi kan söka efter en lösning – om det finns en sådan – måste vi emellertid studera paradoxerna i all deras mångfald och lära känna dem bättre. Tack vare Tarski tycks vi veta hur vi skall kunna *undvika* de semantiska paradoxerna – åtminstone för regimenterade formella språk. Däremot har vi inte lyckats uppnå en förståelse av det intuitiva sanningsbegreppet som är fri från paradoxer. Situationen är analog med den som möter oss beträffande det logiska klassbegreppet. Logiker har utarbetat teorier om klasser (eller mängder) som utesluter *paradoxala* klasser och som är tillräckliga för de flesta matematiska behov. Trots detta har man inte lyckats ge en övertygande analys av det intuitiva klassbegreppet – klass i betydelse *extension* hos ett begrepp – som är fri från motsägelser. Förmodligen är de två problemen, att ge en analys av klassbegreppet respektive sanningsbegreppet, nära relaterade till varandra.

Uppsatsen behandlar fyra varianter av lögnarparadoxen. Först den *ordinära Lögnaren*: 'Denna sats är inte sann'. Jag diskuterar förslaget att denna sats är *varken sann eller falsk*. Detta i sin tur leder till den *förstärkta Lögnaren* (d.v.s. observationen att om satsen saknar sanningsvärde så är den ju när allt kommer omkring inte sann). I samband med denna paradox diskuteras tanken att lögnarsatserna är *både sanna och falska*. Bägge idéerna, att de paradoxala satserna är varken sanna eller falska respektive att de är både sanna och falska, är speciellt avpassade för paradoxer som väsentligen involverar negation. Men det finns också versioner av Lögnaren som inte använder sig av negation. En sådan är *Currys paradox* som istället för negation använder sig av implikation. Varken idén om *sanningsvärdesgap* (“gaps”) eller den *om kolliderande sanningsvärden* (“gluts”) verkar ha någon tillämpning på Currys paradox.

Det är en vanlig uppfattning att alla semantiska paradoxer involverar antingen självreferens eller någon form av cirkulär referens. Stephen Yablo har formulerat en version av lögnaren som inte tycks innefatta vare sig självreferens eller cirkulär referens. Jag avslutar uppsatsen med att presentera en version av *Yablos paradox* där inte heller negation kommer till användning. Denna paradox innehåller en oändlig sekvens av satser:

(S1) För varje $i>1$: om S_i är sann, så existerar Gud.
(S2) För varje $i > 2$: om S_i är sann, så existerar Gud.

etc.

Jag visar att var och en av dessa satser måste vara sann samt att man därur kan sluta sig till satsen ‘Gud existerar’ (eller vilken annan sats som sätts i dess ställe).

Jag avstår ifrån att ge någon diagnos av vad som kan “vara fel” med dessa härledningar av paradoxala konklusioner från synbarligen rimliga premisser med hjälp av synbarligen korrekta logiska principer. En sådan diagnos får vänta till ett annat tillfälle.

2. Den ordinära Lögnaren

Det finns många sätt att åstadkomma en sats A, som intuitivt säger om sig själv att den inte är sann, d.v.s. som är sådan att:

$$A \Rightarrow \neg\text{Sann}(\text{‘}A\text{’}) \qquad \text{och} \qquad \neg\text{Sann}(\text{‘}A\text{’}) \Rightarrow A.$$

Vi kan t.ex., låta α vara en bestämd beskrivning som unikt beskriver satsen A. Låt t.ex. α vara beskrivningen: ‘Den sats som står skriven på svarta tavlan i rum C204, Humanisthuset, Umeå Universitet, kl. 16.00 den 21 april, 2000’. Antag vidare att

> Den sats som står skriven på svarta tavlan i rum C204, Humanisthuset, Umeå Universitet, kl. 16.00 den 21 april, 2000 = ‘Den sats som står skriven på svarta tavlan i rum C204, Humanisthuset, Umeå Universitet, kl. 16.00 den 21 april, 2000 är inte sann’.

Eller kortare uttryckt:

$$\alpha = \text{‘}\neg\text{Sann}(\alpha)\text{’}.$$

Vi kan nu resonera på följande sätt:

Antag att Sann(α). Då följer medelst identitetssubstitution: Sann(‘¬Sann(α)’). Men detta ger, med hjälp av (Sann E), att ¬Sann(α). Antagandet att Sann(α) ledde till en motsägelse. Således har vi bevisat ¬Sann(α).

Men från ¬Sann(α) får vi Sann(‘¬Sann(α)’) medelst (Sann I), vilket i sin tur ger Sann(α) (identitetssubstitution). Vi har alltså härlett Sann(α) och ¬Sann(α), d.v.s. en motsägelse.

Ett populärt sätt att undgå paradoxen är att tillåta möjligheten att satsen ¬Sann(α) är vare sig sann eller falsk. Varje sats antas nu vara antingen sann, falsk, eller sakna sanningsvärde. Vi antar följande “sanningstabell” för negation:

(1) om A är sann, så är ¬A falsk
(2) om A är falsk, så är ¬A sann
(3) om A saknar sanningsvärde, så saknar ¬A sanningsvärde.

Antag dessutom att A alltid har samma värde (sann, falsk, eller varken sann eller falsk) som Sann(‘A’). Speciellt gäller att Sann(‘A’) saknar sanningsvärde om och endast om A gör det. Vi har alltså följande slutledningsregler, förutom (Sann I) och (Sann E):

(Falsk I) ¬A ⇒ Falsk(‘A’)

(Falsk E) Falsk(‘A’) ⇒ ¬A.

Falsk(‘A’) är här en förkortning för ¬Sann(‘A’).

Med denna tolkning blir argumentet ovan ogiltigt. Visserligen leder bägge antagandena Sann(α) och ¬Sann(α) till motsägelser. Men detta visar bara att inget av dessa två alternativ kan vara sant. Både Sann(α) och ¬Sann(α) saknar sanningsvärde. De klassiskt giltiga slutledningsreglerna:

(i) om Γ, A ⇒ ¬A, så Γ ⇒ ¬A
(ii) om Γ, ¬A ⇒ A, så Γ ⇒ A,

blir ogiltiga med den givna tolkningen. Således kan vi i lögnarargumentet ovan sluta oss från antagandet Sann(α) till ¬Sann(α). Men från detta kan vi inte sluta oss till att Sann(α) är falsk, utan endast till att Sann(α) är falsk *eller saknar sanningsvärde*. Den andra delen av argumentet, utesluter att Sann(α) är falsk. Det återstår alltså enbart möjligheten att Sann(α) saknar sanningsvärde.

3. Lögnarens revansch

Betrakta återigen lögnarsatsen ¬Sann(α). Vi har nu kommit fram till att denna sats saknar sanningsvärde: den är varken sann eller falsk. Men i så fall är den ju *inte sann*:

(1) lögnarsatsen är inte sann.

Man det var väl det som lögnarsatsen var avsedd att uttrycka? Vi kan alltså sluta oss till, i tur och ordning:

$\neg$Sann(α), Sann(‘$\neg$Sann(α)’), Sann(α).

Så även alternativet att lögnarsatsen saknar sanningsvärde tycks leda till en paradox. Denna paradox går under namnet den *förstärkta Lögnaren*.

Den förstärkta Lögnaren kan också formuleras på följande sätt:

(1) Satsen (1) är inte sann.

Enligt den ursprungliga lösningen på paradoxen gäller:

(2) Satsen (1) saknar sanningsvärde.

Från (2) kan vi sluta oss till:

(3) Satsen (1) är inte sann.

Från (3) följer medelst (Sann I):

(4) ‘Satsen (1) är inte sann’ är sann.

Men Satsen (1) = ‘Satsen (1) är inte sann’. Således gäller:

(5) Satsen (1) är sann.

Låt oss nu se närmare vad som försiggår i den förstärkta Lögnaren. I den ursprungliga lösningen på lögnarparadoxen antog vi, att om en sats A saknar sanningsvärde, så saknar också $\neg$Sann(‘A’) sanningsvärde. Detta antagande blockerar slutledningen från (2) till (3) ovan. Men samtidigt tycks det vara uttryck för en ointuitiv läsning av $\neg$Sann(‘A’). Om A saknar sanningsvärde, så borde väl satserna Sann(‘A’) och $\neg$Sann(‘A’) ha sanningsvärdet ‘falskt’ respektive ‘sant’, snarare än sakna sanningsvärde. Det verkar som om vi löst paradoxen till priset av en onaturlig läsning av konstruktionen Sann(‘A’).

Låt oss nu se vad som händer om vi “rättar till” detta missförhållande och ger Sann(‘A’) en mer naturlig läsning:

(i) om A är sann, så är satsen Sann(‘A’) också sann.
(ii) om A är falsk eller saknar sanningsvärde, så är Sann(‘A’) falsk.

Med denna läsning gäller följande för varje sats A:

(iii) Sann(‘A’) $\vee$ $\neg$Sann(‘A’),

d.v.s. satser av formen Sann(‘A’) saknar aldrig sanningsvärde.

Speciellt gäller för lögnarsatsen $\neg$Sann(α):

(iv) Sann(‘$\neg$Sann(α)’) $\vee$ $\neg$Sann(‘$\neg$Sann(α)’).

Eftersom α = ‘$\neg$Sann(α)’, får vi:

(v) $\text{Sann}(\alpha) \vee \neg\text{Sann}(\alpha)$.

Men, precis som tidigare leder bägge alternativen till en motsägelse. Vi har fått tillbaka lögnarparadoxen.

4. Dialetism: tesen att Lögnaren är både sann och falsk

Den starka Lögnaren gick ut på att visa att den ursprungliga lösningen i termer av sanningsvärdesgap är *instabil*. Om lögnarsatsen saknar sanningsvärde, så är den när allt kommer omkring *inte sann*. Men det är precis vad satsen säger, alltså är den sann. Lögnarparadoxen har slagit tillbaka.

Vissa filosofer, bl.a. Brad Dowden och Graham Priest, har föreslagit att lögnarsatsen är *både sann och falsk* istället för *varken sann eller falsk*. Varför inte se på lögnargumentet som två indirekta bevis:¨

(i) $\text{Sann}(\alpha) \Rightarrow \neg\text{Sann}(\alpha) \Rightarrow \text{Falsk}(\alpha)$
Alltså, $\text{Sann}(\alpha) \Rightarrow (\text{Sann}(\alpha) \wedge \neg\text{Sann}(\alpha))$.

(ii) $\text{Falsk}(\alpha) \Rightarrow \neg\text{Sann}(\alpha) \Rightarrow \text{Sann}(\alpha)$.
Alltså, $\text{Falsk}(\alpha) \Rightarrow (\text{Sann}(\alpha) \wedge \neg\text{Sann}(\alpha))$

Från (i) och (ii) tillsammans med

(iii) $\text{Sann}(\alpha) \vee \text{Falsk}(\alpha)$

kan vi deducera:

(iv) $\text{Sann}(\alpha) \wedge \text{Falsk}(\alpha)$.

Men detta innebär att:

(v) $\text{Sann}(\alpha) \wedge \neg\text{Sann}(\alpha)$.

Med användande av (Sann I) följer sedan:

(vi) Sann('$\text{Sann}(\alpha) \wedge \neg\text{Sann}(\alpha)$')

d.v.s. det finns *sanna motsägelser*.

Denna ståndpunkt kan förefalla minst sagt uppseendeväckande, då vi lärt oss att varje sats följer logiskt ur en motsägelse. Men detta är inte korrekt, under förutsättning att det finns sanna motsägelser. Låt nämligen $A \wedge \neg A$ vara en sann motsägelse och låt B vara en sats som inte är sann, t.ex. $0 = 1$. Då gäller inte:

$$A \wedge \neg A \Rightarrow B$$

eftersom förledet är sant och efterledet inte är det. Vi antar här en definition av logisk konsekvens enligt vilken logisk konsekvens är *sanningsbevarande*: om premisserna är sanna, så måste slutsatsen i en giltig slutledning också vara sann.

Ståndpunkten att lögnarsatsen $\neg$Sann(α) är både sann och falsk leder alltså inte till den absurda slutsatsen att varje sats är sann. Så varför inte acceptera ståndpunkten att paradoxala satser är både sanna och falska? Kanske Lögnaren både är sann och falsk och kanske Russells paradoxala klass, bestående av alla klasser som inte tillhör sig själva, både tillhör och inte tillhör sig själv.

Tesen att det finns sanna satser vars negationer också är sanna, d. v. s. att det finns sanna motsägelser, går under beteckningen *dialetism* (på engelska, "dialetheism"). Det förefaller emellertid som om dialetismen, när den tillämpas på Lögnaren, stöter på ett slags förstärkt Lögnare (jfr. Sainsbury 1995, s 143). Låt oss säga att:

satsen A är sann* om och endast om A är sann och inte falsk
satsen A är osann* om och endast om det inte är fallet att A är sann*.

Då tycks det gälla att varje sats är sann* eller osann* och att ingen sats är både sann* och osann*.

Betrakta nu följande variant av Lögnaren:

(L) L är osann*.

Tesen att L är både sann* och osann* är verkligen svårsmält. Men kanske det är exakt vad en *riktig* dialetist skulle hävda i detta fall.

Oavsett om denna invändning mot dialetismen är konklusiv, så skall jag i nästa avsnitt diskutera en paradox som varken sanningsgapsteoretikerna eller dialetisterna tycks ha något botemedel mot.

5. Currys paradox

Hittills har jag i diskussionen av paradoxerna inte använt mig av begreppet implikation. Med 'implikation' menar jag här ett *konnektiv* och inte t.ex. *relationen* logisk konsekvens (betecknas '$\Rightarrow$') mellan satser. I klassisk logik (såväl som i intuitionistisk logik) satisfierar implikationen '$\rightarrow$' följande principer:

(i) *Deduktionsteoremet*
Om $A_1,\ldots, A_n, A \Rightarrow B$, så $A_1,\ldots, A_n \Rightarrow (A \rightarrow B)$

(ii) *Modus ponens*
$A, A \rightarrow B \Rightarrow B$.

Bägge dessa principer är högst rimliga egenskaper hos en implikation. Dessutom används de ständigt i informella logiska resonemang, t.ex. i matematiken.

Antag nu att vi har principerna (Sann I), (Sann E), deduktionsteoremet, modus ponens, samt identitetssubstitution. Då kan vi, med hjälp av ett argument som uppfanns av Haskell Curry i början av 1940-talet och som går under namnet

Currys paradox, bevisa vilken sats G som helst. Vi kan t.ex. låta G vara satsen ‘Gud existerar’.

Currys ursprungliga paradox var formulerad inom ramen för s. k. kombinatorisk logik. Vi kan emellertid betrakta den som en variant av *Russells paradox* formulerad för klassen $c = \{x: (x \in x) \rightarrow G\}$. I naiv klassteori (naiv mängdlära) gäller:

$$c \in c \leftrightarrow ((c \in c) \rightarrow G).$$

Curry visade hur man från denna ekvivalens kan härleda G, med användande enbart av modus ponens och deduktionsteoremet. Det var Currys avsikt att visa att närvaron av negation inte var nödvändig för uppkomsten av de logiska paradoxerna.

Det var först vid mitten av 1950-talet som Geach och Löb, oberoende av varandra, visade att Currys argument också kan tillämpas på Lögnaren (Se Boolos och Jeffrey, 1989, för en diskussion av sambandet mellan Currys paradox och Löbs berömda teorem i bevisteorin). Mot bakgrund av paradoxens komplicerade historia vore det kanske rättvisast att kalla den för ‘Curry-Geach-Löbs paradox’. Nu till själva paradoxen:

Vi låter:

(β) Sann(β) $\rightarrow$ G,

d.v.s.

($*$) β = ‘Sann(β) $\rightarrow$ G’,

β är med andra ord satsen ‘Om satsen β är sann, så existerar Gud’.

Vi kan nu resonera på följande sätt:

(1)	Sann(β)	Antagande
(2)	Sann(‘Sann(β) $\rightarrow$ G’)	1 identitetssubstitution
(3)	Sann(β) $\rightarrow$ G	2 (Sann E)
(4)	G	1, 3 modus ponens
(5)	Sann(β) $\rightarrow$ G	1, 4 deduktionsteoremet

Observera att antagandet (1) avslutas i rad (5). Följande rader är alltså inte beroende av några antaganden:

(6)	Sann(‘Sann(β) $\rightarrow$ G’)	5 (Sann I)
(7)	Sann(β)	6 identitetssubstitution
(8)	G	5, 7 modus ponens.

Låt oss påminna oss om hur lätt det är att konstruera en självreferentiell sats β som uppfyller villkoret ($*$) ovan. Låt β vara en förkortning för beskrivningen:

Den sats som står skriven på svarta tavlan i rum C 202

och anta att den enda sats som står skriven på tavlan i rum C 202 är:

Om den sats som står skriven på svarta tavlan i rum C 202 är sann, så existerar Gud.

I så fall är förutsättningen (∗) för Currys paradox uppfylld, och vi kan bevisa vilken som helst sats G.

Om vi inte vill göra drastiska förändringar i logiken, förefaller det som om vi måste införa restriktioner på reglerna (Sann I) och (Sann E) för att undgå Currys paradox. Jag kommer inte att diskutera närmare här hur detta kan gå till.

En tanke som emellertid förekommer i diskussionen (Se t.ex. Barwise och Etchemendy, 1987), är att sanningspredikatet innehåller någon dold kontextuell parameter. Subtila skiften i kontext kan kanske förklara hur ett argument som Currys i själva verket kan vara ogiltigt.

Låt oss t.ex. anta att sanningspredikatet har formen: Sann_x, där x refererar till en kontextuellt given situation. Kanske vi kan utläsa $\mathrm{Sann}_x(\alpha)$ som 'situationen x gör satsen α sann'. Ifall man nu kunde argumentera för att övergången från rad (5) till rad (6) i härledningen av Currys paradox involverar ett skifte av situation, så skulle den paradoxala härledningen ovan sluta på följande sätt:

(5)	$\mathrm{Sann}_x(\beta) \rightarrow G$	
(6)	$\mathrm{Sann}_y(\text{'}\mathrm{Sann}_x(\beta) \rightarrow G\text{'})$	5 (Sann I)
(7)	$\mathrm{Sann}_y(\beta)$	6 identitetssubstitution
(8)	G	5, 7 modus ponens.

Den nya härledningen är emellertid ogiltig. Den skulle bli giltig om vi hade rätt att förutsätta att x och y är samma situation. Ifall vi kunde argumentera för att så inte är fallet, d.v.s. att tillämpningen av (Sann I) introducerar en ny situation y, så skulle vi kanske ha en lösning på denna och andra lögnarparadoxer.

Även denna typ av lösning stöter på svårigheter. För att den skall fungera, behöver vi förmodligen något filosofiskt argument som blockerar införandet av ett predikat $\mathrm{Sann}^{\infty}(\alpha)$ definierat genom:

$\mathrm{Sann}^{\infty}(\alpha)$ om, och endast om, för någon situation x, $\mathrm{Sann}_x(\alpha)$.

I termer av predikatet Sann^{∞}, tycks vi kunna få tillbaka Currys paradox genom att låta:

$\gamma = \text{'}\mathrm{Sann}^{\infty}(\gamma) \rightarrow G\text{'}$.

På liknade sätt tycks vi kunna få tillbaka den ursprungliga Lögnaren, formulerad i termer av negation., genom att låta:

δ = ‘$\neg$Sann$^\infty$(δ)’.

6. En paradox av Curry-typ utan uppenbar självreferens

Stephen Yablo har på ett elegant sätt konstruerat ett slags lögnarparadox som inte på något uppenbart sätt involverar självreferens (eller cirkulär referens). Här skall jag modifiera Yablos konstruktion så att den anknyter till Currys paradox ovan. Avsikten är att konstruera en Lögnare som varken innefattar självreferens eller negation.

Betrakta en oändlig sekvens av satser S_0, S_1,...., S_n, ... där:

S_0 = ‘för alla i > 0: om Sann(S_i), så G’.
S_1 = ‘för alla i > 1: om Sann(S_i), så G’.
....
S_n = ‘för alla i > n: om Sann(S_i), så G’.
etc.

Här är G en godtycklig sats, t.ex., satsen ‘Gud existerar’.
Det gäller alltså, för alla n:

(*) Sann(S_n) om, och endast om, (för alla i > n: om Sann(S_i), så G).

För ett godtyckligt n, antag att S_n är sann, d.v.s.

(1) Sann(S_n) antagande.

Då gäller medelst (*),

(2) för alla i > n: om Sann(S_i), så G.

Speciellt gäller då:

(3) Om Sann(S_{n+1}), så G.

Men (2) implicerar också,

(4) för alla i > n+1: om Sann(S_i), så G.

Detta ger via (*),

(5) Sann(S_{n+1})
(6) G 3, 5 modus ponens
(7) Om Sann(S_n), så G. 1-6 hypotetisk härledning

Men n är ett godtyckligt valt naturligt tal. Det gäller alltså:

(8) för varje n: om Sann(S_n), så G.

Speciellt gäller för vilket som helst k,

(9) för varje n > k: om Sann(S_k), så G.

Detta ger medelst (∗)

(10) Sann(S_k).

Då k är godtyckligt, har vi visat:

(11) för varje n, Sann(S_n).

Slutligen får vi från (8) och (11) medelst vanlig predikatlogik:

(12) G

Not: Jag vill tacka Ingvar Johansson för goda råd och visat tålamod och Wlodek Rabinowicz för värdefulla synpunkter som lett till revisioner i texten.

Litteratur

BARWISE, J. och J. ETCHEMENDY. 1987. *The Liar: An Essay on Truth and Circularity*, Oxford: Oxford University Press.

BOOLOS, G. och R. JEFFREY. 1989. *Computability and Logic*, 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press.

CURRY, H. 1942. 'The inconsistency of certain formal logics', *Journal of Symbolic Logic* 7, s. 115-117.

DOWDEN, B. 1984. 'Accepting inconsistencies from the paradoxes', *Journal of Philosophical Logic*, 13, s. 125-130.

GEACH, P. 1955. 'On *insolubilia*', *Analysis* 15.2. Reprinted in Geach, P., *Logic Matters*, Basil Blackwell 1972.

KRIPKE, S. 1975. 'Outline of a theory of truth', *Journal of Philosophy* 72, s 690-716.

LÖB, M. H. 1955. 'Solution of a problem of Leon Henkin', *Journal of Symbolic Logic*, 20, s. 115-118.

PRIEST, G. 1979. 'The logic of paradox', *Journal of Philosophical Logic*, 8 1979, s. 219-241.

PRIEST, G. 1987. *In Contradiction*, Dordrecht: Nijhof.

SAINSBURY, R. M. 1995. *Paradoxes*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press.

TARSKI, A.. 1983. 'The concept of truth in formalized languages', in Corcoran, J. (ed.), *Logic, Semantics and Metamathematics* (papers from 1923 to 1938 by Alfred Tarski; 2nd ed.). Indianapolis, Indiana: Hackett Publishing Company.

YABLO, S. 1993. 'Paradoxes without self-reference', *Analysis* 53.4, October 1993, s 251-52.