Open Journal of Mathematics and Physics | Volume 6, Article 286, ISSN: 2674-5747
https://doi.org/10.5281/zenodo.12191334 | published: 20 Jun 2024 | https://ojmp.org

LI

[philosophy]
Diamond Open Access
[awaiting peer review]

Como sei que nada sei? O axioma da seleção e a aritmética do infinito

Colaboração Filosofia Aberta[1]

23 de Junho de 2024

Resumo

Mostramos que a proposição "Só sei que nada sei", atribuída ao filósofo grego Sócrates, contém, em seu âmago, o axioma da seleção de Zermelo e a aritmética do infinito $\aleph_0$ (aleph-0).

palavras-chave: paradoxo socrático, epistemologia, axioma da seleção, número cardinal

A versão mais atualizada deste white paper está disponível em
https://doi.org/10.5281/zenodo.12191334

Introdução

1. A célebre frase "Só sei que nada sei" é atribuída ao filósofo grego Sócrates [1].

2. Ele é conhecido por sua abordagem dialética ao conhecimento, frequentemente questionando a sabedoria convencional e reconhecendo suas próprias limitações em termos de conhecimento.

3. Esta atitude de humildade intelectual e constante busca pela verdade é uma marca registrada do método socrático.

[1]Todos os autores com suas afiliações aparecem no final deste white paper.

4. A abordagem dialética, também conhecida como método dialético, é uma forma de argumentação e investigação filosófica que envolve a exploração de contradições e oposições para chegar a uma compreensão mais profunda da verdade.

Interpretação

5. A proposição "Só sei que nada sei" significa "Nada sei, exceto que sei que nada sei".

Aparente Paradoxo

6. *Como se pode saber uma coisa e nada ao mesmo tempo?*

Paradoxo de Russell

7. [2–6]

8. Seja $R = \{x : x \notin x\}$ o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos.

9. Se $R \in R$, então a partir de $R = \{x : x \notin x\}$, concluímos que $R \notin R$.

10. Se $R \notin R$, então a partir de $R = \{x : x \notin x\}$, concluímos que $R \in R$.

11. (9) e (10) levam a $R \in R \leftrightarrow R \notin R$, o que é uma contradição.

12. Portanto, $\nexists \{x : x \notin x\}$.

Axiomas da Fundação e da Antifundação

13. [6]

14. O axioma da fundação garante que não existem cadeias infinitamente descendentes de conjuntos, onde cada conjunto é um elemento do conjunto anterior, como, por exemplo, em

$$F = \{\{\{f\}\}\}.$$

15. O axioma da antifundação permite um número infinito de conjuntos contidos em um conjunto; por exemplo,

$$\overline{F} = ...\{\{\{g\}\}\}...$$

Axioma da Seleção

16. [4, 5]

17. A ideia é modificar o conjunto $R = \{x : x \notin x\}$, assumindo $x \in A$.

18. (17) resolve o paradoxo de Russell, como mostraremos a seguir.

19. Seja $S = \{x \in A : x \notin x\}$ o conjunto de todos os elementos de A que não são elementos de si mesmos.

20. Se $S \in S$, então a partir de $S = \{x \in A : x \notin x\}$, concluímos que $S \notin S$.

21. (20) é uma contradição, então $S \in S$ é impossível.

22. Se $S \notin S$, então a partir de $S = \{x \in A : x \notin x\}$, temos dois casos:
    - (i) $S \notin S$ e $S \notin A$,
    - (ii) $S \notin S$ e $S \in A$.

23. O caso $(22.ii)$ leva a $S \in S$, que é uma contradição; portanto, $S \notin A$.

24. Assim, $(22.i)$, $S \notin S$ e $S \notin A$ é um caso válido.

25. Em resumo, temos os seguintes três casos:
    - (a) $S \in S$ leva a uma contradição, (20)-(21);
    - (b) $S \notin S \to S \notin A$, $(22.i)$;
    - (c) $(S \notin S \land S \in A) \to S \in S$, que é uma contradição, $(22.ii)$.

26. Portanto, $\exists S : S = \{x \in A : x \notin x\}$ tal que $S \notin S$ e $S \notin A$.

Seleção de Sócrates

27. A partir de (19), temos que $S = \{x \in A : x \notin x\}$.

28. O conjunto A compreende tudo que se possa saber.

29. S é denominado o 'conjunto do conhecimento' por conter o conjunto A.

30. Seja $x = \{1\}$ o conjunto contendo o que Sócrates sabe.

31. O elemento '1' em x simboliza 'nada sei'.

32. As chaves { }, que delimitam o conjunto x, significam cada instância do saber.

33. Assim,
$$\{1\} := \text{sei que nada sei.}$$

34. E,
$$\{\{1\}\} := \text{sei que sei que nada sei.}$$

35. Note que $x \in A$, pois
$$A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, ...\},$$
onde os números $2, 3, 4, ...$ representam outros conhecimentos.

36. Como Sócrates apenas sabe que nada sabe, então o axioma da fundação está estabelecido em $x = \{1\}$.

37. Se Sócrates estivesse ciente de um ciclo infinito de reconhecimento de sua própria ignorância (isto é, ... sei que sei que sei que nada sei), então estaríamos considerando o axioma da antifundação, pois teríamos
$$x' = \ldots\{\{\{1\}\}\}\ldots$$

38. Neste caso, $x' = \{x'\}$, que implica em $x' \in x'$.

39. Portanto, a seleção de Sócrates está em S com o auxílio do conjunto seletor A.

Aritmética dos Ordinais Transfinitos

40. [7–9]

41. Cantor definiu ω como o menor ordinal transfinito, representado pelo conjunto dos números naturais, e que tem $\aleph_0$ elementos,

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

42. A subtração ω-esquerda pode ser definida como

$$\omega - 1 = \{0, 1, 2, 3, ...\} \backslash \{\omega\}.$$

43. Como $\omega \notin \omega$, então

$$\omega - 1 = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \omega.$$

44. Outra definição de subtração ω-esquerda pode ser

$$\omega - 1 = \{0, 1, 2, 3, ...\} \backslash \{1\},$$

cujo resultado é

$$\{0, 2, 3, ...\} \neq \omega,$$

que tem a mesma cardinalidade de ω.

45. Em qualquer uma das duas definições, subtrair um elemento de um conjunto infinito com cardinalidade $\aleph_0$ resulta em um conjunto que mantém a mesma cardinalidade.

Aritmética de Sócrates

46. Seja `S'` := *Só sei que nada sei.*

47. Definimos ω como o conjunto de tudo que se possa saber.

48. O número 1 representa a única coisa que Sócrates diz saber, isto é,

$$1 := \text{nada sei}.$$

49. Assim, temos que

$$\texttt{S'} = \omega - 1 = \omega \quad \text{ou} \quad \texttt{S'} = \omega - 1 = \omega \backslash \{1\}.$$

50. Ambos os resultados de `S'` conduzem à mesma interpretação: subtrair um conhecimento de um conjunto que compreende todos os conhecimentos possíveis não altera a cardinalidade (tamanho) do conjunto.

51. Um sujeito que nada sabe e, por isso, não sabe que nada sabe, tem a seguinte fração do conhecimento total

$$c_0 = \lim_{n \to |\omega|} \frac{0}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{0}{n} = 0.$$

52. Sócrates, que sabe que nada sabe, tem a fração do conhecimento total dada por

$$c_1 = \lim_{n \to |\omega|} \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Considerações Finais

53. A partir da interpretação fornecida neste white paper, o axioma da seleção está presente na proposição de Sócrates "Só sei que nada sei".

54. Saber que nada se sabe não altera o tamanho do conjunto que contém tudo que se sabe, quando este conjunto é o menor infinito matemático.

Convite Aberto

Revise, *adicione* conteúdo e seja `coautor(a)` deste `white paper` [10, 11]. *Junte-se* à **Colaboração Filosofia Aberta**.

Arquivos Suplementares

[12]

Como citar este artigo

`https://doi.org/10.5281/zenodo.12191334`

Agradecimentos

+ **Zenodo**
`https://zenodo.org`

+ **OpenAI (GPT-4)**
`https://chatgpt.com`

Consentimento

O autor concorda com [11].

Licença

CC-By Attribution 4.0 International [13]

Referências

[1] Platão. *Apologia de Sócrates.*

[2] Velleman, Daniel J. *How to prove it: A structured approach*. Cambridge University Press, 2006.

[3] Warner, Steve. *Pure Mathematics for Beginners*. GET 800, 2018.

[4] Pinter, Charles C. *A book of set theory*. Courier Corporation, 2014.

[5] Lobo, Matheus P. "The Axiom of Selection Resolves Russell's Paradox." *OSF Preprints*, 19 Aug. 2019. `https://doi.org/10.31219/osf.io/pt8ax`

[6] Warner, Steve. *Set Theory for Beginners*. GET 800, 2019.

[7] Stillwell, John. *Roads to Infinity: the mathematics of truth and proof.* CRC Press, 2010.

[8] Lobo, Matheus P. "Aritmética Dos Ordinais Transfinitos." *OSF Preprints*, 10 Sept. 2020. `https://doi.org/10.31219/osf.io/h3t5f`

[9] Lobo, Matheus P. "Subtraction of Transfinite Ordinals." *OSF Preprints*, 8 Mar. 2020. https://doi.org/10.31219/osf.io/yvrf3

[10] Lobo, Matheus P. "Microarticles." *OSF Preprints*, 28 Oct. 2019. https://doi.org/10.31219/osf.io/ejrct

[11] Lobo, Matheus P. "Simple Guidelines for Authors: Open Journal of Mathematics and Physics." *OSF Preprints*, 15 Nov. 2019. https://doi.org/10.31219/osf.io/fk836

[12] https://doi.org/10.5281/zenodo.12191334

[13] CC. Creative Commons. *CC-By Attribution 4.0 International.* https://creativecommons.org/licenses/by/4.0

Colaboração Filosofia Aberta

Matheus Pereira Lobo[1] (autor principal, matheusplobo@gmail.com)
https://orcid.org/0000-0003-4554-1372

[1]Universidade Federal do Norte do Tocantins (Brasil)