Hilbert Space dimensions 3, 4, 5

```
(*The constraint equations for the presentist fragmentalist
 interpretation of quantum mechanics in Hilbert Space dimensions 3,
4, 5 each have a 1-dimensional solution space which, I expect,
will be able to be interpreted as the phase.*)
```

In[ ]:=
```
eq =
  {z1 z1bar + z2 z2bar + z3 z3bar == 1, z1 z2bar == 0, z1 z3bar == 0, z2 z1bar == 0, z2 z3bar == 0,
     z3 z1bar == 0, z3 z2bar == 0, z1bar z2 == 0, z1bar z3 == 0, z2bar z1 == 0, z2bar z3 == 0,
     z3bar z1 == 0, z3bar z2 == 0} /. {z1 -> a1 + b1 I, z2 -> a2 + b2 I, z3 -> a3 + b3 I,
     z1bar -> a1 - b1 I, z2bar -> a2 - b2 I, z3bar -> a3 - b3 I} // Expand;
Reduce[eq, {a1, a2, a3, b1, b2, b3}]
```

Out[ ]=

$$\left(a1 == 0 \,\&\&\, a2 == 0 \,\&\&\, b1 == 0 \,\&\&\, b2 == 0 \,\&\&\, \left(b3 == -\sqrt{1 - a3^2} \;||\; b3 == \sqrt{1 - a3^2}\right)\right) \;||$$

$$\left(a1 == 0 \,\&\&\, a3 == 0 \,\&\&\, b1 == 0 \,\&\&\, \left(b2 == -\sqrt{1 - a2^2} \;||\; b2 == \sqrt{1 - a2^2}\right) \,\&\&\, b3 == 0\right) \;||$$

$$\left(a2 == 0 \,\&\&\, a3 == 0 \,\&\&\, \left(b1 == -\sqrt{1 - a1^2} \;||\; b1 == \sqrt{1 - a1^2}\right) \,\&\&\, b2 == 0 \,\&\&\, b3 == 0\right)$$

```
(*Daniel Huber*)
```

In[ ]:=

```
$Version

(*"13.0.1 for Mac OS X x86 (64-bit) (January 28, 2022)"*)

Clear["Global`*"]

(Format[#[n_]] := Subscript[#, n]) & /@ {a, b};

repl = Flatten[{(Symbol["z" <> ToString[#]] -> a[#] + I * b[#]),
      (Symbol["z" <> ToString[#] <> "bar"] -> a[#] - I * b[#])} & /@ Range[3]];

eqns1 = {z1 z1bar + z2 z2bar + z3 z3bar == 1, z1 z2bar == 0, z1 z3bar == 0,
    z2 z1bar == 0, z2 z3bar == 0, z3 z1bar == 0, z3 z2bar == 0, z1bar z2 == 0,
    z1bar z3 == 0, z2bar z1 == 0, z2bar z3 == 0, z3bar z1 == 0, z3bar z2 == 0} /. repl;

var1 = Outer[#1[#2] &, {a, b}, Range[3]] // Flatten;

(sol1 = {Reduce[eqns1, var1] // LogicalExpand // ToRules} /.
    r_Rule ? (! FreeQ[#[[1]], Power] &) :> Reverse[r]) // Column
```

Out[ ]= 13.0.1 for Microsoft Windows (64-bit) (January 28, 2022)

Out[ ]=

$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to -\sqrt{1 - a_3^2}\}$$
$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to \sqrt{1 - a_3^2}\}$$
$$\{a_1 \to 0,\ a_3 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to -\sqrt{1 - a_2^2},\ b_3 \to 0\}$$
$$\{a_1 \to 0,\ a_3 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to \sqrt{1 - a_2^2},\ b_3 \to 0\}$$
$$\{a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ b_1 \to -\sqrt{1 - a_1^2},\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0\}$$
$$\{a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ b_1 \to \sqrt{1 - a_1^2},\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0\}$$

```
And @@@ (eqns1 /. sol1 // Simplify)
```

```
eqns2 = {z1 z1bar + z2 z2bar + z3 z3bar + z4 z4bar == 1, z1 z2bar == 0, z1 z3bar == 0,
    z1 z4bar == 0, z2 z1bar == 0, z2 z3bar == 0, z2 z4bar == 0, z3 z1bar == 0, z3 z2bar == 0,
    z3 z4bar == 0, z4 z1bar == 0, z4 z2bar == 0, z4 z3bar == 0, z1bar z2 == 0, z1bar z3 == 0,
    z1bar z4 == 0, z2bar z1 == 0, z2bar z3 == 0, z2bar z4 == 0, z3bar z1 == 0,
    z3bar z2 == 0, z3bar z4 == 0, z4bar z1 == 0, z4bar z2 == 0, z4bar z3 == 0} /. repl;

var2 = Outer[#1[#2] &, {a, b}, Range[4]] // Flatten;

(sol2 = {Reduce[eqns2, var2] // LogicalExpand // ToRules}) // Column
```

Out[ ]=

$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0,\ b_4 \to -\sqrt{1-a_4^2}\}$$
$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0,\ b_4 \to \sqrt{1-a_4^2}\}$$
$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ a_4 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to -\sqrt{1-a_3^2},\ b_4 \to 0\}$$
$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ a_4 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to \sqrt{1-a_3^2},\ b_4 \to 0\}$$
$$\{a_1 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_4 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to -\sqrt{1-a_2^2},\ b_3 \to 0,\ b_4 \to 0\}$$
$$\{a_1 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_4 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to \sqrt{1-a_2^2},\ b_3 \to 0,\ b_4 \to 0\}$$
$$\{a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_4 \to 0,\ b_1 \to -\sqrt{1-a_1^2},\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0,\ b_4 \to 0\}$$
$$\{a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_4 \to 0,\ b_1 \to \sqrt{1-a_1^2},\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0,\ b_4 \to 0\}$$

```
And @@@ (eqns2 /. sol2 // Simplify)

(*Bob Hanlon*)
```

```
eqns3 = {

    z1 z1bar + z2 z2bar + z3 z3bar + z4 z4bar + z5 z5bar == 1,

    z1 z2bar == 0, z1 z3bar == 0, z1 z4bar == 0, z1 z5bar == 0, z2 z1bar == 0,
    z2 z3bar == 0, z2 z4bar == 0, z2 z5bar == 0, z3 z1bar == 0, z3 z2bar == 0,
    z3 z4bar == 0, z3 z5bar == 0, z4 z1bar == 0, z4 z2bar == 0, z4 z3bar == 0,
    z4 z5bar == 0, z5 z1bar == 0, z5 z2bar == 0, z5 z3bar == 0, z5 z4bar == 0,

    z1bar z2 == 0, z1bar z3 == 0, z1bar z4 == 0, z1bar z5 == 0, z2bar z1 == 0,
    z2bar z3 == 0, z2bar z4 == 0, z2bar z5 == 0, z3bar z1 == 0, z3bar z2 == 0,
    z3bar z4 == 0, z3bar z5 == 0, z4bar z1 == 0, z4bar z2 == 0, z4bar z3 == 0,
    z4bar z5 == 0, z5bar z1 == 0, z5bar z2 == 0, z5bar z3 == 0, z5bar z4 == 0

   } /. repl;

var3 = Outer[#1[#2] &, {a, b}, Range[5]] // Flatten;

(sol3 = {Reduce[eqns3, var3] // LogicalExpand // ToRules} /.
    r_Rule ? (! FreeQ[#[[1]], Power] &) :> Reverse[r]) // Column
```

$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_4 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0,\ b_4 \to 0,\ b_5 \to -\sqrt{1 - a_5^2}\}$$

$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_4 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0,\ b_4 \to 0,\ b_5 \to \sqrt{1 - a_5^2}\}$$

$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_5 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0,\ b_4 \to -\sqrt{1 - a_4^2},\ b_5 \to 0\}$$

$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_5 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0,\ b_4 \to \sqrt{1 - a_4^2},\ b_5 \to 0\}$$

$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ a_4 \to 0,\ a_5 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to -\sqrt{1 - a_3^2},\ b_4 \to 0,\ b_5 \to 0\}$$

$$\{a_1 \to 0,\ a_2 \to 0,\ a_4 \to 0,\ a_5 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to 0,\ b_3 \to \sqrt{1 - a_3^2},\ b_4 \to 0,\ b_5 \to 0\}$$

$$\{a_1 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_4 \to 0,\ a_5 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to -\sqrt{1 - a_2^2},\ b_3 \to 0,\ b_4 \to 0,\ b_5 \to 0\}$$

$$\{a_1 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_4 \to 0,\ a_5 \to 0,\ b_1 \to 0,\ b_2 \to \sqrt{1 - a_2^2},\ b_3 \to 0,\ b_4 \to 0,\ b_5 \to 0\}$$

$$\{a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_4 \to 0,\ a_5 \to 0,\ b_1 \to -\sqrt{1 - a_1^2},\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0,\ b_4 \to 0,\ b_5 \to 0\}$$

$$\{a_2 \to 0,\ a_3 \to 0,\ a_4 \to 0,\ a_5 \to 0,\ b_1 \to \sqrt{1 - a_1^2},\ b_2 \to 0,\ b_3 \to 0,\ b_4 \to 0,\ b_5 \to 0\}$$

```
And @@@ (eqns3 /. sol3 // Simplify)
```

```
(*Paul Merriam*)
```

CloudObject: Unable to authenticate with Wolfram Cloud server. Please try authenticating again.