La Lógica de Gottlob Frege: 1879 – 1903

Joan Bertran San Millán

Programa de Doctorado: Lógica Pura y Aplicada
Directores: Prof. Dr. Calixto Badesa y Prof. Dr. José Martínez
Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència
Facultat de Filosofia

Universitat de Barcelona

Joan Bertran San Millán: *La Lógica de Gottlob Frege: 1879-1903*, noviembre de 2015

DIRECTORES:
Prof. Dr. Calixto Badesa
Prof. Dr. José Martínez

TUTOR:
Prof. Dr. Ramon Jansana

MIEMBROS DEL TRIBUNAL:
Prof. Dr. Luis M. Valdés
Prof. Dr. Marco Panza
Prof. Dr. Enrique Casanovas

Esta investigación ha sido posible gracias a la financiación ofrecida por la Universitat de Barcelona (Ajuts de Personal Investigador en Formació - APIF 2009-2013) y por el Ministerio de Economía y Competitividad (FFI2011-25626).

Abstract

In this dissertation I offer a global and detailed reconstruction of the logic developed by Gottlob Frege throughout his career. Even though Frege's logic suffered profound modifications from his initial formulation in *Begriffsschrift* to its revised version in *Grundgesetze*, the significant differences between these two works have been rarely taken at face value. I not only argue that these differences exist, but I also explain how they should be understood in the light of the evolution of Frege's thought.

First, I suggest a new reconstruction of *Begriffsschrift*'s logic, which amounts to a completely novel reading of its formal system—one that contradicts the core of modern historical studies. In particular, I defend that this logic is not—as it has been repeatedly said—a second-order logic and provide the following reasons. (1) The language is not properly a formal language. For instance, it lacks a definition of the notion of atomic formula. Frege's conception of the use of *Begriffsschrift*'s formal system as a tool—and not as its own object of study—explain this omission. (2) Contrary to what might seem, in *Begriffsschrift* there is only one sort of quantification: quantification over arguments. (3) *Begriffsschrift*'s logic does not have a semantics in the modern sense. Its letters can be read in such a variety of ways that the formulas that contain them cannot be assigned a definite meaning. Moreover, its quantifiers are not semantically interpreted: there is no domain they range over.

Second, I offer an explanation of the reasons that drive the evolution of Frege's logic. The transition from *Begriffsschrift* to *Grundgesetze* has been seldom addressed and never fully explained. According to my historical analysis, the switch from Frege's position concerning logic in *Begriffsschrift* to his later conception—finally established in *Grundgesetze*—can be articulated through the adoption of the distinction between concept and object as the basic element of the formal system. This leads to a formalisation of the notion of concept, which in the end drives to *Grundgesetze*'s notion of function.

Finally, I put forward a global analysis of *Grundgesetze*'s logic. In this work, Frege develops a formal system that resembles in many relevant ways a second-order one. I suggest a reconstruction of this formal system that allows us to compare it with *Begriffsschrift*'s. In particular, I formulate precisely every rule of inference proposed by Frege and especially focus on the rules of substitution. Moreover, I reflect on several meta-logical results that can be drawn from this reconstruction; for instance, I justify that the propositional fragment and the first-order fragment of *Grundgesetze*'s logic are equivalent to a complete propositional calculus and a complete first-order calculus, respectively.

Resum

Oferim a aquesta tesi doctoral una reconstrucció global i detallada de la lògica desenvolupada per Gottlob Frege durant la seva carrera. Tot i que aquesta lògica va ser objecte de modificacions profundes des de la seva formulació inicial a *Begriffsschrift* fins a la versió revisada de *Grundgesetze*, rarament s'han considerat adequadament les diferències fonamentals que hi ha entre les dues obres. No només defensem que aquestes diferències existeixen, sinó que, a més, expliquem com s'han d'entendre atenent a l'evolució del pensament de Frege.

En primer lloc, plantegem una reconstrucció de la lògica de *Begriffsschrift*, de què resulta una lectura completament original del seu sistema formal; una que contradiu la base dels estudis històrics moderns. En particular, defensem que aquesta lògica no és, com s'ha dit moltes vegades, una lògica de segon ordre i proporcionem les següents raons. (1) El seu no és pròpiament un llenguatge formal. Per exemple, no disposa d'una definició de la noció de fórmula atòmica. La concepció de Frege de l'ús del sistema formal de *Begriffsschrift* com una eina, i no com el seu propi objecte d'estudi, pot explicar aquesta omissió. (2) Contra el que pot semblar, només hi ha un tipus de quantificació: la quantificación sobre arguments. (3) La lògica de *Begriffsschrift* no té una semàntica en un sentit modern. Les seves lletres poden llegir-se de tantes maneres diferents que no és possible atribuir un significat concret a les fórmules que les contenen. A més, els quantificadors no reben una interpretació semàntica: no hi ha cap domini de quantificació.

En segon lloc, oferim una explicació de les raons que determinen l'evolució de la lògica de Frege. La transició de *Begriffsschrift* a *Grundgesetze* ha sigut molt rarament considerada i mai no s'ha explicat plenament. Segons la nostra anàlisi històrica, el pas de la posició de Frege a *Begriffsschrift* relativa a la lògica envers la seva concepció final, establerta a *Grundgesetze*, pot articular-se mitjançant l'adopció de la distinció entre concepte i objecte com l'element essencial del sistema formal. Això porta a la formalització de la noció de concepte, que finalment condueix a la noció de funció de *Grundgesetze*.

Finalment, proporcionem una anàlisi global de la lògica de *Grundgesetze*. A aquesta obra, Frege desenvolupa un sistema formal que és similar a un sistema de segon ordre. Presentem una reconstrucció d'aquest sistema formal que permet comparar-lo amb el de *Begriffsschrift*. En particular, formulem amb precisió cada regla d'inferència plantejada per Frege i parem especial atenció a les regles de substitució. A més, a partir d'aquesta reconstrucció obtenim resultats meta-lògics com, per exemple, l'equivalència del fragment proposicional i del fragment de primer ordre de *Grundgesetze* amb càlculus complets per la lògica proposicional i la lògica de primer ordre, respectivament.

Agradecimientos

Esta tesis doctoral se ha beneficiado muy significativamente de numerosas contribuciones, consejos y sugerencias. Es justo manifestar gratitud a todas las personas que han contribuido intelectualmente al contenido de este trabajo.

En primer lugar, esta tesis doctoral no sería ni remotamente lo que ha terminado siendo sin mis directores, Calixto Badesa y José Martínez. Han dedicado conjuntamente tal inmensidad de horas a este trabajo a lo largo de su elaboración que su nivel de implicación impresiona a quienes lo he dado a conocer. Quiero agradecer su generosidad en la transmisión de su formación, su excelente guía y sus adecuados, constantes e incansables comentarios a las incontables revisiones que ha sufrido esta tesis. Me han inculcado un irrenunciable respeto por el rigor tanto filosófico como histórico que considero de gran valor, y mis aptitudes en la investigación se deben a ellos.

En segundo lugar, mi tutor, Ramon Jansana, ha ofrecido en todo momento una completa y generosa disposición a ayudar en lo necesario y a proporcionar consejos no contaminados por el academicismo fregeano. Le debo, además, haberme brindado una valiosa ayuda en el peliagudo campo de la burocracia.

Los distintos viajes que he realizado a lo largo del proceso de elaboración de esta tesis han contribuido en gran medida a mi investigación. En particular, agradezco las preguntas y sugerencias que he recibido tras presentar comunicaciones basadas en esta tesis en San Diego, Bucarest, Barcelona y Helsinki. Durante mi estancia en el MCMP de Munich, en la primavera de 2013, Erich Reck, el supervisor de mi investigación en Munich, mostró la mayor disposición a valorar críticamente mi trabajo. Tengo que agradecerle su consejo en los múltiples aspectos en los que consiste la elaboración de una tesis doctoral.

A lo largo de los cinco años en los que he cursado mis estudios de doctorado en Barcelona, he recibido la inestimable ayuda de algunas personas. Quiero expresar una especial gratitud a Ignasi Jané, quien se ha mostrado dispuesto a leer y comentar con un gran nivel de profundidad todos los manuscritos que le he mostrado. Siendo el excelente filósofo que sin duda es, sus consejos han beneficiado enormemente este trabajo. Agradezco a Laura Cortés su constante y extraordinariamente atinado consejo lingüístico. Genoveva Martí atendió a una exposición de la parte inicial de esta tesis y sus comentarios me ayudaron a mejorar tanto mis argumentos como la forma de presentarlos. Los integrantes del grupo de lectura *Philosophy of Logic*, coordinado por José Martínez, también plantearon sugerencias valiosas tras mi presentación de uno de los capítulos de esta tesis.

Esta tesis doctoral ha podido realizarse gracias a la financiación de la Universitat de Barcelona (Ajuts de Personal Investigador en Formació - APIF 2009-2013), del Ministerio de Economía y Competitividad (proyecto 'Reference, self-reference and empirical data' - FFI2011-25626), y de la Fundación Bertran-San Millán.

Índice general

Introducción

Gottlob Frege: obra y recepción

Friedrich Ludwig *Gottlob Frege* (1848-1925) nació en Wismar, en la costa báltica. Tras estudiar en Jena y Göttingen, permaneció en la Universidad de Jena a lo largo de toda de su vida académica como docente. Se retiró por razones de salud en 1918 y murió siete años después en Bad Kleinen, cerca de su ciudad natal[1]. Su lugar en la historia de la lógica es, sin ninguna duda, destacado.

Frege escribió multitud de artículos, reseñas y tratados de diversas temáticas, incluidas la geometría, la lógica o la filosofía de las matemáticas. Hay tres textos que destacan especialmente en el conjunto de su obra. El breve libro *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [Frege, 1879a] (de aquí en adelante, *Begriffsschrift*) fue publicado en 1879 y es la primera obra de consideración del autor. En ella presenta un sistema formal que permite justificar que la demostración de algunos teoremas aritméticos no exige recurrir a la intuición. Abandonando momentáneamente la perspectiva formal, en 1884 Frege publicó *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* [Frege, 1884] (de aquí en adelante, *Grundlagen*). Este texto contiene una justificación de carácter filosófico de la naturaleza lógica del concepto de número y de la serie numérica. Tras un relativamente largo periodo de preparación, *Grundgesetze der Arithmetik* [Frege, 1893, Frege, 1903] (de ahora en adelante, *Grundgesetze*) fue publicado en dos volúmenes en 1893 y 1903, respectivamente. Esta obra supone la culminación del proyecto insinuado en *Begriffsschrift* y planteado informalmente en *Grundlagen*: la deducción por medio de recursos formales y definiciones puramente lógicas del conjunto de la aritmética.

[1]Respecto a la vida de Frege, véase 'Frege's life and work' [Thiel; Beaney, 2005], de C. Thiel y M. Beaney y, especialmente, *Gottlob Frege. Leben - Werk - Zeit* [Kreiser, 2001], de L. Kreiser.

Es un lugar común en los estudios actuales mencionar que la obra de Frege fue objeto de poca atención académica hasta bien entrado el siglo XX. El vehículo de este cambio fue la mención a Frege y a sus obras por parte de algunos filósofos que sí eran verdaderamente influyentes y que establecieron, por distintos motivos, contacto con él: Bertrand Russell (1872-1970), Ludwig Wittgenstein (1889-1951) y Rudolf Carnap (1891-1970).

El descubrimiento de Frege en la segunda mitad del siglo XX por parte de la filosofía anglosajona marcó el origen de un inabarcable torrente de bibliografía secundaria. Uno de los motores de este descubrimiento, y el más influyente, fue el libro *Frege: Philosophy of Language* [Dummett, 1973], de M. Dummett. Posteriormente, Dummett publicó tres volúmenes más: *The Interpretation of Frege's Philosophy* [Dummett, 1981a], *Frege and Other Philosophers* [Dummett, 1991a] y finalmente *Frege: Philosophy of Mathematics* [Dummett, 1991b]. La interpretación planteada por Dummett condicionó los estudios de Frege, y es posible que los orientara, al menos inicialmente, a la filosofía del lenguaje. A pesar de que los estudios de origen alemán han tendido a ofrecer una visión más amplia y más históricamente contextualizada de las obras de Frege, sólo recientemente otros aspectos de su pensamiento, además de su filosofía del lenguaje, han sido abordados con justicia. Hoy en día, los trabajos de Frege son un elemento ineludible en la filosofía de la lógica y, muy especialmente, en la filosofía de la matemática. Noventa años después de su muerte, puede decirse sin gran controversia que Frege fue un matemático dedicado fundamentalmente a la lógica.

Por lo que respecta a la lógica, tradicionalmente se ha afirmado que los trabajos de Frege dan inicio a la lógica moderna[2]. Sirva de ejemplo el siguiente comentario por parte de M. Beaney en *The Frege Reader*:

> "Frege's most remarkable and indisputable achievement was the revolution that he effected in logic, which for over 2000 years, ever since its origins in Aristotle's *Prior Analytics*, had been dominated by syllogistic theory. Propositional logic had indeed emerged at the time of the Stoics, and been developed in the work of Boole and others on the 'algebra of logic' in the middle of the nineteenth century, but even then it had only been regarded as one part of Boolean algebra, dependent upon the more fundamental calculus of classes. One of Frege's achievements in the *Begriffsschrift* was to give a self-contained and rigorously axiomatized

[2]A esta concepción ha ayudado en gran medida el papel preeminente que J. van Heijenoort atribuyó a Frege en su monumental recopilación de textos *From Frege to Gödel* [van Heijenoort, 1967a], una obra esencial en el mundo anglosajón para el estudio de la historia de la lógica.

> exposition of propositional logic, in effect relying on just two rules of inference (*modus ponens* and an implicit rule of substitution), and six axioms. But it was in the creation of what we now know as predicate logic, through his invention of quantifier notation, that the real logic breakthrough occurred." [Beaney, 1997, p. 10]

Sin embargo, si bien es innegable el carácter pionero de su lógica, es también justo afirmar que la influencia que tuvo Frege en la lógica de finales del siglo XIX y principios del siglo XX fue prácticamente inexistente, a pesar de que no fuese, al menos en Alemania, un autor desconocido. Los esfuerzos de Russell por dar a conocer la obra de Frege dieron sus frutos, aunque no inmediatamente, en filosofía[3]. Pero no es en absoluto claro que Frege influyera de modo notable y substantivo ni en la lógica de Russell ni en la de ningún otro autor de su época. C. Thiel menciona en 'Gottlob Frege and the Interplay between Logic and Mathematics' las razones de esta circunstancia:

> "The neglect of Frege by the contemporaneous scientific community has two very different reasons. First, there is little doubt that Frege maneuvered himself out of the mainstream of foundational research (or rather, never succeeded in joining this mainstream) by his insistence on using his newly developed "Begriffsschrift," a logical notation the sophistication and analytical power of which the experts of the nineteenth century (as, in fact, most of those of the twentieth and the early twenty-first centuries) failed to recognize. And second, the double disadvantage of working in the no-man's-land between formal logic and mathematics, and of teaching at the then relatively unimportant small university of Jena gave Frege a low status in the academic world." [Thiel, 2009, p. 196]

[3] Ya en 1903 Russell dedicó un apéndice de *The Principles of Mathematics* [Russell, 1903, pp. 501-521] a la lógica y al proyecto de fundamentación de la aritmética de Frege. Este apéndice comienza del modo siguiente:

> "The work of Frege, which appears to be far less known than it deserves, contains many of the doctrines set forth in Parts I and II of the present work, and where it differs from the views which I have advocated, the differences demand discussion. Frege's work abounds in subtle distinctions, and avoids all the usual fallacies which beset writers on Logic. His symbolism, though unfortunately so cumbrous as to be very difficult to employ in practice, is based upon an analysis of logical notions much more profound than Peano's, and is philosophically very superior to its more convenient rival." [Russell, 1903, §475, p. 501]

No obstante, esto no significa que la lógica de Frege no tenga ninguna importancia a nivel histórico. Todo lo contrario; los esfuerzos del autor por garantizar una fundamentación rigurosa de la aritmética se concretaron en gran medida en el desarrollo del primer sistema formal de la historia de la lógica. La motivación y la evolución de este sistema formal, así como su particular naturaleza, merecen la atención de la que ha sido objeto.

Independientemente de la importancia que se atribuye en general a la obra de Frege, y de las alabanzas de rigor y claridad de sus explicaciones, son contados los estudios históricos de su lógica disponibles en la actualidad que no incurren en simplificaciones. Un elemento fundamental de estas simplificaciones es la presentación casi unánime de la lógica de *Begriffsschrift* como una versión menos desarrollada, pero en esencia coincidente, de la lógica de *Grundgesetze*. Desde esta perspectiva, la lógica de Frege, a lo largo de las distintas versiones en que fue presentada, es concebida como una totalidad unitaria, que fue modificada únicamente en detalles no substanciales. Contrastemos este planteamiento con un ejemplo. Suele mencionarse sin detenerse a ofrecer explicaciones que Frege reemplaza en *Begriffsschrift* la distinción tradicional entre sujeto y predicado por la distinción entre función y argumento, y que ésta es la base del análisis lógico planteado en este texto. Dejando de lado la correspondencia científica, el autor no vuelve a recurrir a la distinción entre función y argumento hasta 1891, momento en que la distinción tiene un sentido completamente distinto. Y, sin embargo, esta omisión no ha sido objeto de prácticamente ningún comentario. A la mayoría de estudios históricos les parece natural observar que cierta distinción es fundamental en *Begriffsschrift* y, al mismo tiempo, no preguntarse la razón por la cual esta misma distinción es completamente ignorada por Frege inmediatamente después de haberla planteado.

A lo largo de los años, la interpretación de la lógica de Frege que hemos mencionado se ha asentado y ha pasado a considerarse un lugar común. Pero una lectura atenta de las fuentes muestra que esta interpretación es, cuanto menos, problemática. Este trabajo pretende arrojar nueva luz al conjunto de la lógica de Frege y, especialmente, presentar fielmente y de forma completa el sistema formal desarrollado en *Begriffsschrift*.

Orientación y metodología

Independientemente de las múltiples posibilidades de investigación que ofrece la obra de Frege, este trabajo va a dedicarse exclusivamente a estudiar desde una perspectiva histórica la lógica de este autor. Así pues, se considerarán los sistemas formales presentados en *Begriffsschrift* y *Grundgesetze*, así como los elementos planteados en el período que separa las dos obras que son relevantes para el desarrollo del sistema formal de 1893-1903.

Dado el estado de desarrollo de la lógica contemporánea, no es en absoluto trivial distinguir la reconstrucción histórica de un sistema formal de su interpretación en términos de la lógica actual. El estudio riguroso de un sistema formal como el de *Begriffsschrift*, pionero en aspectos importantes y planteado en un marco de casi completo aislamiento respecto a trabajos coetáneos de naturaleza similar, impide dar por sentados paralelismos con sistemas formales actuales. La reconstrucción histórica de un sistema formal debe ser exhaustiva y fiel con respecto al texto estudiado. Creemos que el estudio de la lógica de Frege, en tanto que muestra de las contribuciones en la lógica de finales del siglo XIX, es significativo y relevante en sí mismo, y que no necesita ser conectado artificialmente con la lógica contemporánea para ser tanto interesante como relevante.

La metodología de este trabajo va a seguir estrictamente este planteamiento. La base de nuestra investigación es el análisis exhaustivo de las fuentes. En primer lugar, trataremos de proporcionar una explicación global de cada una de ellas, que atienda a sus particularidades y que no sacrifique su coherencia interna ni renuncie al tratamiento de aquellos elementos que, al menos en apariencia, la perjudican. En segundo lugar, contextualizaremos cada uno de los textos que serán objeto de nuestro estudio en el conjunto de las obras de Frege y localizamos aquellos elementos en los que Frege pudo haber recibido la influencia de otros autores.

El resultado de nuestro trabajo consistirá en la reconstrucción completa y fidedigna de los sistemas formales desarrollados por Frege. Esta reconstrucción pretende, en la medida de lo posible, adaptar la presentación del autor a los estándares expositivos y de rigor propios de la lógica actual. En particular, presentaremos, por un lado, los elementos básicos del lenguaje de los sistemas formales de *Begriffsschrift* y *Grundgesetze*, haciendo hincapié en los aspectos en los que se diferencian, y, por el otro, formularemos detalladamente sus sistemas axiomáticos.

El foco en nuestra investigación deja fuera de consideración múltiples y significativos aspectos contenidos en los trabajos de Frege. No pretendemos, de hecho, ofrecer un estudio de carácter global de su obra. Sin embargo, puede decirse justificadamente que este autor hizo contribuciones (de mayor o menor relevancia), además de a la lógica, a las matemáticas, a la filosofía de la lógica y de las matemáticas, a la epistemología y a la filosofía del lenguaje. La relación de Frege con estas disciplinas es, en ocasiones, puramente indirecta, en el sentido de que tratan de resolver aspectos particulares de un proyecto de naturaleza lógica de mayor envergadura. Si una empresa puede definir el trabajo de Frege a lo largo de su carrera es su proyecto de fundamentación de la aritmética, conocido como proyecto o programa logicista. Por ejemplo, sus aportaciones en los campos de la filosofía del lenguaje y de la epistemología están íntimamente ligadas a este proyecto. Sólo entrarán dentro del alcance de esta tesis algunos aspectos instrumentales del programa logicista de Frege: en particular, sólo consideraremos la lógica planteada por el autor para tratar de realizarlo.

Aún teniendo en consideración únicamente la lógica de Frege, debemos hacer frente a limitaciones. La más significativa es que no consideraremos la influencia que esta lógica pudo ejercer, directa o indirectamente, en el desarrollo formal de otros lógicos de la misma época. En particular, un elemento temático de gran importancia, cuyo estudio deberá ser pospuesto para una futura investigación, es la relevancia real que la lógica de Frege tuvo para autores como Russell o G. Peano (1858-1931). No es en absoluto claro que estos lógicos adoptaran algún aspecto de los distintos sistemas formales desarrollados por Frege.

Otra limitación a la que debemos hacer frente es el estudio de la lógica de Frege posterior a *Grundgesetze*. Tras el descubrimiento en 1902 de que el sistema formal de *Grundgesetze* es vulnerable a la llamada paradoja de Russell y, por lo tanto, inconsistente, Frege no abandonó completamente su trabajo en lógica, aunque no volvió a ofrecer una nueva versión de su sistema formal. En cierto sentido, la lógica fregeana posterior a la publicación del segundo volumen de *Grundgesetze* en 1903 puede verse como una restricción de la lógica presentada en este texto[4]. Posiblemente por esta razón, esta lógica ha sido objeto de relativamente pocos comentarios históricos. Aunque esta circunstancia podría motivar especialmente su estudio, no podemos ofrecer un tratamiento al respecto en el marco de esta tesis.

Las tres grandes obras publicadas por Frege, *Begriffsschrift*, *Grundlagen* y *Grundgesetze*, han sido objeto de reediciones y están disponibles en la actualidad como volúmenes independientes. El resto de su obra, al menos, la que hoy en día se conserva y que posee relevancia filosófica, puede clasificarse del modo siguiente: artículos y reseñas publicados por Frege, trabajos originalmente no publicados y correspondencia científica. En la segunda mitad del siglo XX se editaron volúmenes que reflejan esta división: *Kleine Schriften* [Frege, 1967], *Nachgelassene Schriften* [Frege, 1969] y *Wissens-*

[4]La edición por parte de E. H. Reck y S. Awodey, en *Frege's Lectures on Logic* [Reck; Awodey, 2004], de las notas que Carnap tomó de algunas clases impartidas por Frege proporciona una muestra de la lógica post-*Grundgesetze* a la que nos referimos.

chaftlicher Briefwechsel [Frege, 1976][5].

Para las citas de Frege incluidas en este trabajo hemos tratado de usar la traducción inglesa más reciente o fiable. En el caso de *Begriffsshchrift*, esta traducción es la realizada por T. W. Bynum en 1972 [Frege, 1972] y, en el de *Grundgesetze*, la traducción llevada a cabo por P. Ebert y M. Rossberg en 2013 [Frege, 2013] (traducción que, de hecho, es la única disponible del texto completo). Los volúmenes *Philosophical and Mathematical Correspondence* [Frege, 1976], *Posthumous Writings* [Frege, 1979] y *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy* [Frege, 1984], que son traducciones de sendos volúmenes en alemán, han sido, adicionalmente, textos de referencia para las citas. Salvo en algunas excepciones, estas traducciones nos parecen herramientas adecuadas, junto con el texto original, para el estudio histórico. Cuando ha sido necesario corregir algún aspecto de las traducciones, lo hemos mencionado en una nota a pie. Además, a lo largo de nuestra exposición ha sido conveniente, ocasionalmente, citar directamente el texto alemán. En lugar de incluir la traducción inglesa de estas citas, hemos añadido nuestra propia traducción al castellano.

En general, también hemos escogido traducciones inglesas recientes para las citas del resto de fuentes a las que hacemos referencia. En algunos casos muy concretos, cuando hay disponible una traducción castellana fiable, hemos preferido esta traducción.

Todas las interpolaciones y glosas añadidas por nuestra parte en las citas para ayudar a su comprensión están indicadas mediante corchetes [ ].

Estructura

Esta tesis puede dividirse en tres partes. El sistema formal de *Begriffsschrift* será objeto de estudio de la **primera parte**, "*Begriffsschrift* (1879)", que consta de cuatro capítulos. Dedicamos una **segunda parte**, "De *Begriffsschrift* a *Grundgesetze*", que consta de un único capítulo, para establecer un nexo entre la primera y la tercera parte. La **tercera parte**, "*Grundgesetze* (1893-1903)", se compone de dos capítulos y se centra en el sistema formal desarrollado en *Grundgesetze*.

[5]La totalidad de los manuscritos de Frege desapareció a causa de un bombardeo a finales de la Segunda Guerra Mundial. Se conservan copias de los originales realizadas por H. Scholz en la Universidad de Müntser, que constituyen únicamente una parte del material original. Los volúmenes disponibles de las obras de Frege consisten sólo en la edición de las copias conservadas. Véase 'Auf der Suche nach Freges Nachlaß' [Wehmeier; Schmidt am Busch, 2000], de K. Wehmeier y H.-C. Schmidt am Busch.

El **primer capítulo**, "Función y argumento en *Begriffsschrift*", presentará el lenguaje del sistema formal de *Begriffsschrift* y prestará especial atención a dos de sus elementos más relevantes, cuya naturaleza ha suscitado una gran controversia en los estudios contemporáneos de la obra de Frege: la distinción entre función y argumento y la noción de generalidad. No nos limitaremos a una perspectiva expositiva, sino que defenderemos nuestra reconstrucción frente a las interpretaciones más relevantes que se han llevado a cabo.

En el **segundo capítulo**, "Lógica de *Begriffsschrift*", ofreceremos una reconstrucción del sistema axiomático de *Begriffsschrift*. En primer lugar, presentaremos sus axiomas y formularemos sus reglas de inferencia. En segundo lugar, consideraremos con detalle los procesos de substitución que Frege lleva a cabo en las demostraciones del texto de 1879 y valoraremos la polémica cuestión de si Frege considera implícitamente una regla de substitución. Finalmente, proporcionaremos una explicación pormenorizada de algunas demostraciones de *Begriffsschrift* de especial importancia.

El **tercer capítulo**, "Conceptografía y logística", proporcionará una completa exposición del uso para el cual Frege concibe el sistema formal de *Begriffsschrift*. El autor, en oposición a los lógicos que constituyen la llamada corriente algebrista, defiende un uso instrumental de la lógica. Detallaremos las características de este uso y ofreceremos una reconstrucción de la oposición entre modos distintos de concebir la lógica que puede localizarse en la polémica mantenida por Frege con algunos lógicos algebristas.

En el **cuarto capítulo**, "Interpretaciones de *Begriffsschrift*", se considerarán, en primer lugar, los distintos sistemas formales que, desde una perspectiva contemporánea, pueden derivarse de *Begriffsschrift*. En segundo lugar, se hará frente a la posibilidad de interpretar el sistema formal de 1879 como un sistema para la lógica de segundo orden. Por último, se valorará la posibilidad de que el sistema formal de 1879 ya sea vulnerable a la paradoja.

Con el cuarto capítulo termina la primera parte de este trabajo. La segunda parte contiene únicamente el **quinto capítulo**, "Transición de *Begriffsschrift* a *Grundgesetze*". En él se localizarán los motivos por los cuales Frege decide modificar el sistema formal de *Begriffsschrift* y desarrollar uno nuevo, y se detallarán los elementos que caracterizan este largo proceso.

La tercera parte de la tesis empieza con el **sexto capítulo**, "Lenguaje de *Grundgesetze*". Este capítulo está dedicado, en primer lugar, a caracterizar el universo de la teoría lógica desarrollada en *Grundgesetze* y, en segundo lugar, a presentar los componentes básicos que conforman el lenguaje de su sistema formal. Destacaremos aquellos aspectos en los que el sistema formal de 1879 debe distinguirse del propio de 1893-1903.

Finalmente, el **séptimo capítulo**, "Lógica de *Grundgesetze*", proporcionará una reconstrucción de la lógica de *Grundgesetze*. Con un procedimiento similar al propio del segundo capítulo, listaremos, en primer lugar, sus axiomas y presentaremos sus reglas de inferencia. Las diferencias en la presentación de Frege en 1893-1903 respecto a 1879 nos permitirán ofrecer una reconstrucción más cercana a los estándares de rigor actuales. En segundo lugar, consideraremos los distintos fragmentos que, desde una perspectiva contemporánea, pueden extraerse del sistema formal de *Grundgesetze*.

Tras unas conclusiones generales, esta tesis termina con un apéndice en el que se recopilan, con el fin de facilitar la lectura, los elementos básicos de los distintos fragmentos que pueden extraerse de la lógica de *Grundgesetze*.

Parte I

Begriffsschrift (1879)

Capítulo 1

Función y argumento en *Begriffsschrift*

1.1 Introducción

En el primer texto de consideración de Frege, *Begriffsschrift*[6], se desarrolla un sistema formal constituido por un sistema axiomático y una serie de reglas de deducción. Se trata, sin duda, de un texto fundacional en el desarrollo de la lógica formal y ha sido intensamente estudiado a lo largo de las últimas seis décadas.

El sistema formal de *Begriffsschrift*[7] se basa en la distinción entre función y argumento, que es presentada por Frege en oposición a la distinción

[6]Tal y como G. Gabriel afirma en 'Frege and the German Background to Analytic Philosophy [Gabriel, 2013, p. 281], es muy probable que Frege tomara el término '*Begriffsschrift*' del tratado *Über Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Characteristik* [Trendelenburg, 1856], de F. A. Trendelenburg. El origen del término '*Begriffsschrift*' es, sin embargo, anterior. C. Thiel afirma en '„Nichts aufs Gerathewohl und aus Neuerungssucht“: Die Begriffsscrhrift 1879 und 1893' [Thiel, 1995, p. 281] que este término ya había sido usado por W. von Humbolt en 1824 y que, además, es muy difícil determinar quién fue el primero que usó el término en alemán.

Es relevante mencionar, siguiendo nuevamente a Gabriel, que Frege no escogió para su tratado el título '*Begriffsschrift*' hasta un momento posterior a la redacción del texto:

> "It is also known that Frege decided on the title '*Begriffsschrift*' comparatively late: this is indicated by the fact that the publisher (or the typesetter) labelled the printed sheets using the specification 'Frege, *Formelsprache* (formula language)', that is, they applied a word from the subtitle." [Gabriel, 2013, p. 281]

[7]En lo sucesivo, se reservará el término '*Begriffsschrift*' al texto de Frege, mientras que 'conceptografía' será usado para referir al sistema formal que se desarrolla en él.

tradicional entre sujeto y predicado. Entre los estudios históricos de *Begriffsschrift* recientes se ha establecido una interpretación unitaria, que es compartida, exceptuando casos particulares, por la mayor parte de los comentarios del texto fregano. Un elemento específico de esta interpretación es una particular comprensión de la distinción entre función y argumento: se defiende (o, al menos, se sugiere) una interpretación semántica de esta distinción, de tal manera que se tiende a identificarla con la distinción entre concepto y objeto, que Frege introduce en obras posteriores a *Begriffsschrift*. De acuerdo con la interpretación tradicional, la conceptografía propuesta por Frege en *Begriffsschrift*, a pesar de contener algunas inexactitudes, es entendida como un sistema formal esencialmente correcto para la lógica de segundo orden: el primero de la historia de la lógica.

Una lectura cuidadosa de las fuentes muestra que esta extendida interpretación de *Begriffsschrift* posee numerosas inexactitudes y que es, además, esencialmente incorrecta. Nuestra pretensión en este capítulo es exponer fielmente el planteamiento de Frege respecto a la distinción entre función y argumento desarrollada en 1879, así como mostrar con el mayor detalle la relación que guarda esta distinción con la teoría de la cuantificación del mismo texto. Esta tarea incluye, por un lado, analizar tanto el lenguaje de la conceptografía como la exposición de Frege de la distinción entre función y argumento y de la noción de generalidad. Por el otro, se trata de evaluar los elementos fundamentales de la interpretación tradicional de *Begriffsschrift* con el propósito de reconstruir fructíferamente y de un modo verdaderamente fiel los aspectos básicos de la conceptografía.

El desarrollo de nuestra exposición no seguirá exactamente el orden de *Begriffsschrift*. Tras esta introducción, en la segunda sección (1.2), se tratarán los elementos básicos de la conceptografía. Se detallarán, en primer lugar, los aspectos técnicos del lenguaje de este sistema formal. En segundo lugar, se considerará la exposición de Frege sobre de la distinción entre función y argumento. Por último, se expondrán los aspectos básicos de la noción de generalidad. Tras ello, abandonaremos el planteamiento expositivo y daremos inicio a la discusión de carácter histórico. La tercera sección (1.3) clarificará, en primer lugar, la naturaleza de la distinción entre función y argumento y, en segundo lugar, la relación que guardan los elementos del lenguaje de la conceptografía con esta estructura. En la cuarta sección (1.4) se ofrecerá una reconstrucción de la noción de generalidad y se considerarán las pautas sintácticas que Frege proporciona para manejarla. Finalmente, la quinta sección (1.5), con el objetivo de contrastar la interpretación habitual de *Begriffsschrift*, evaluará la posibilidad de que los cuantificadores de la conceptografía estén semánticamente interpretados.

1.2 Nociones básicas de la conceptografía

Dedicaremos esta primera sección a exponer, con una orientación expositiva, los elementos básicos de la conceptografía de *Begriffsschrift*. En primer lugar, presentaremos algunos de los símbolos del lenguaje de este sistema formal: las barras de juicio y contenido, las conectivas y el símbolo de igualdad de contenido. En segundo lugar, expondremos cómo se aplica un análisis en términos de función y argumento: dividiremos nuestra explicación en casos y presentaremos los símbolos con los que la conceptografía en su lenguaje la distinción entre función y argumento. En tercer lugar, describiremos de qué modo Frege presenta la noción de generalidad. Por último, ejemplificaremos cómo la noción de generalidad se vincula con la distinción entre función y argumento en un caso de aplicación de estos elementos básicos al análisis de juicios categóricos.

1.2.1 Símbolos del lenguaje

El lenguaje de la conceptografía posee tres tipos de símbolos: los símbolos lógicos, las letras y los símbolos auxiliares (paréntesis) [Frege, 1879a, §1, p. 111]. Los símbolos lógicos se dividen en conectivas, símbolo de generalidad, de igualdad de contenido, y las barras de juicio y contenido. Las letras, que recibirán una exposición más detallada más adelante, expresan generalidad. En el capítulo III de *Begriffsschrift*, Frege da un tratamiento específico a un grupo concreto de letras, según el cual la generalidad que expresan, en algunos contextos, está restringida. Valoraremos esta cuestión en el apartado 2.4.1.

Además de estos tres tipos de símbolos, en la exposición informal de la conceptografía, Frege recurre al uso de mayúsculas griegas $A, B, \mathit{\Gamma}, \mathit{\Delta}, \ldots$. Estos símbolos no forman parte del lenguaje de la conceptografía, por lo que no son, formalmente, letras. Así pues, no expresan generalidad, de modo que pueden ser usados para explicar el significado de los símbolos lógicos de la conceptografía. Las letras griegas mayúsculas tienen dos usos, aunque Frege no establece ninguna distinción: representan en ocasiones un contenido en concreto cualquiera y a veces desempeñan el papel que llamaríamos de metavariables.

A pesar de que en *Begriffsschrift* la conceptografía se presenta como un sistema formal sin símbolos propios, exclusivamente con letras, se desprende de la serie de artículos que acompañan la publicación de *Begriffsschrift* que este sistema formal está concebido para ser complementado con otros lenguajes reglados; típicamente, el de la aritmética. Así pues, en 'Anwendungen der Begriffsschrift' [Frege, 1879b] y 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b], y en los originalmente no publicados 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880] y 'Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift' [Frege, 1882c], se presenta una conceptografía aplicada, que usa los símbolos propios de estos lenguajes reglados, como se desarrollará en el apartado 3.3.2. En este trabajo, se usarán los símbolos de la aritmética para complementar los símbolos de la conceptografía y se supondrán dados; así pues, los numerales y los símbolos de las operaciones aritméticas se tomarán como constantes, aunque no en sentido actual, sino como nombres canónicos no reinterpretables.

1.2.2 Barras de juicio y contenido

Hay dos símbolos especialmente significativos y peculiares de la conceptografía: las barras de juicio y de contenido [Frege, 1879a, §2, pp. 111-112]. La barra de contenido, $—\!\!—$, indica que el contenido de cierta combinación de símbolos es tomado como una unidad. La barra de juicio, $\mid$, expresa el acto de aseveración a través del cual los contenidos son afirmados y, por tanto, convertidos en un juicio. Frege no explica con detalle qué entiende por 'contenido' (*Inhalt*). Para nuestros propósitos en este punto de la explicación, basta con establecer que el contenido de un enunciado es aquello que significa, y que el contenido de un término es su denotación.

Con las barras de juicio y contenido pueden expresarse formalmente juicios. La fórmula:

$$\vdash 2 + 3 > 4$$

expresa la afirmación del significado de $2 + 3 > 4$. Hay que tener en cuenta que Frege advierte que a una barra de contenido siempre debe seguirle la expresión de un contenido aseverable ('*beurtheilbarer Inhalt*' en el original alemán), esto es, un contenido susceptible de ser afirmado o negado: "*Whatever follows the content stroke must always have an assertible content*" [Frege, 1879a, §2, p. 112][8]. De acuerdo con ello, toda expresión que siga la combinación de una barra de juicio con una barra de contenido debe

[8]Frege no aclara qué entiende por 'contenido aseverable'. El criterio para su distinción parece ser el de ser expresable por una oración declarativa. Sin embargo, hay ejemplos, como veremos más adelante, que parecen restringir este criterio. La cuestión de la aseverabilidad es, desde luego, de naturaleza sintáctica, pero hay indicios que sugieren que también puede ser de naturaleza semántica.

Consideraremos con detalle la cuestión de la aseverabilidad en el apartado 1.4.2 y discutiremos en el apartado 3.3.2 de qué modo, cuando la conceptografía se complementa con algún discurso científico, esta complementación proporciona elementos adicionales para determinar la aseverabilidad de sus expresiones.

ser un contenido aseverable; no se pueden crear juicios mediante términos. Así, las expresiones siguientes:

$$— 2 \quad \text{o} \quad \vdash 3+1$$

no son aceptables en la conceptografía.

1.2.3 Conectivas

La conceptografía dispone de dos conectivas básicas: el condicional y la negación. Para la expresión del condicional se añade un nuevo símbolo, la barra de condicionalidad, una barra vertical que une dos barras de contenido:

$$\begin{array}{l} \ulcorner\!— 4 > 2 \\ \llcorner\!— 2+2=4, \end{array}$$

mediante la cual puede expresarse un juicio hipotético [Frege, 1879a, §§5-6, pp. 114-120]. La expresión inferior es el antecedente y el superior el consecuente. Así:

$$\begin{array}{l} —\!\!\top\!— A \\ \quad\ \llcorner\!— B \end{array}$$

expresa el juicio según el cual no puede ser negado que A y afirmado que B o, más apropiadamente, significa lo mismo que 'Si B, entonces A'[9].

Para expresar la negación se añade otro nuevo símbolo, la barra de negación, que se intercala en la barra de contenido [Frege, 1879a, §7, pp. 120-124]. Sirve para negar cierto contenido. La expresión siguiente:

$$—\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\,_{\mathsf{T}}\!— A$$

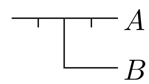
significa que A es negado. Expresa, pues, que A no es el caso.

[9] En realidad, Frege considera que el significado de la conectiva de condicionalidad y el de la expresión lingüística 'si ..., entonces ...' no coinciden plenamente; en su opinión, el condicional natural contiene una conexión causal entre el antecedente y el consecuente que la conectiva no captura:

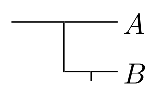
> "The causal connection implicit in the word "if", however, is not expressed by our symbols, although a judgement of this kind can be made only on the basis of such a connection; for this connection is something general, but at this point we do not yet have an expression for generality." [Frege, 1879a, §5, p. 116]

El autor considera, en consecuencia, que sólo un condicional cuantificado universalmente expresa la relación causal propia del condicional natural.

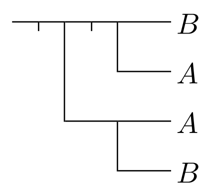
Mediante la combinación de estas dos conectivas puede obtenerse el resto de conectivas lógicas:



expresa lo mismo que '*B* y *A*'.



expresa lo mismo que '*B* o *A*'. Por último:



expresa lo mismo que '*B* si y sólo si *A*'.

Un aspecto importante a destacar es que, en las presentaciones de *Begriffsschrift*, los comentaristas suelen afirmar que la definición de las conectivas lógicas es veritativo-funcional[10]. El primer elemento relevante al respecto es que Frege presenta el significado de las conectivas como ciertas posibilidades de afirmación o negación de sus componentes. En 1879, el autor aún no distingue entre la afirmación de un contenido y la verdad o falsedad del mismo; de hecho, en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880, pp. 11ss], redactado entre 1880 y 1881, en ocasiones habla en términos de verdad y falsedad en referencia a los juicios y a sus componentes mediante una exposición, por lo demás, equivalente a la de *Begriffsschrift*. La distinción entre el reconocimiento de un contenido como verdadero (o

[10]Así lo atestigua P. Sullivan en 'Frege's Logic' [Sullivan, 2004]:

> "Implication and negation are defined by Frege in the now familiar truth-functional way." [Sullivan, 2004, p. 664]

Este mismo planteamiento es defendido por, entre otros, J. van Heijenoort, en su introducción a la traducción de *Begriffsschrift* de *From Frege to Gödel* [van Heijenoort, 1967a, p. 1], y H. Sluga, en *Gottlob Frege* [Sluga, 1980, pp. 76-82].

Ahora bien, G. Baker y P. Hacker se muestran contrarios, en *Frege: Logical Excavations* [Baker; Hacker, 1984, pp. 114-119], a la presencia de definiciones veritativo-funcionales de las conectivas en *Begriffsschrift*.

afirmación) y la verdad de este contenido por parte de Frege no se produce hasta 'Logik' [Frege, 1882e][11]:

> "The goal of scientific endeavor is *truth*. Inwardly to *recognize something as true* is to *make a judgement*, and to give expression to this judgement is to make an assertion.
>
> What is true is true independently of our recognizing it as such. We can make mistakes." [Frege, 1882e, p. 2]

En *Begriffsschrift*, por tanto, esta distinción no tiene lugar. Puede aceptarse que entre 1879 y 1882 Frege identifica, o no distingue claramente, el reconocimiento de un contenido como verdadero, esto es, su sometimiento a afirmación en un juicio, y el hecho de que el contenido sea verdadero. Pero confundir ambas circunstancias no equivale a atribuir, en sentido técnico, valores de verdad. La introducción del concepto de valor de verdad es muy relevante en lógica y se debe a C. S. Peirce (1839-1914)[12]. Con ello, toda proposición toma un valor, de dos posibles, y en virtud de esta atribución

[11] La datación de esta obra no es clara. Siguiendo los comentarios de H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach en la edición alemana [Frege, 1969, pp. 1-2, nota 1], P. Long y R. White, sitúan, en su traducción inglesa, la redacción de este texto entre 1879 y 1891. Sin embargo, la presencia en su índice inicial de la distinción entre concepto y objeto como análisis básico de un juicio (en detrimento del esquema función-argumento, vigente en 1879), indican que su redacción tuvo lugar tras la publicación de *Begriffsschrift*. Por tanto, pertenece, junto a los artículos de 1880-1882, a una etapa de desarrollo posterior, que será considerada a lo largo del capítulo 5. Pero, además, la distinción entre la afirmación de un juicio y la atribución de verdad que contiene, y que no está presente, como se ha visto, en el artículo no publicado de 1880-1881, 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880], así como tampoco en todos los artículos redactados en 1882, indican que su redacción se inicia, como mínimo, en la segunda mitad de 1882. En 'Lotze and Frege: The Dating of the 'Kernsätze'' [Hovens, 1997, pp. 21-27], F. Hovens ofrece razones adicionales que apoyan nuestra decisión.

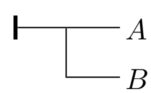
[12] G. Gabriel comenta en 'Frege, Lotze and the Continental Roots of Early Analytic Philosophy' [Gabriel, 2002, p. 171] que el primer uso del término 'valor de verdad' se debe a W. Windelband (1848-1915), que en en 'Was ist Philosophie?' [Windelband, 1882, p. 32] introduce la denominación '*Wahrheitswert*'. En este texto, sin embargo, la noción de valor de verdad no es tratada como el valor de una función.

Propiamente, el primer uso de valores de verdad, como indica A. Church en *Introduction to Mathematical Logic*, se debe a Peirce:

> "The explicit use of two truth-values appears for the first time in a paper by C.S. Peirce in the *American Journal of Mathematics*, vol. 7 (1885), pp. 180-202 (or see his *Collected Papers*, vol. 3, pp. 210-238). Frege's first use of truth-values is in his *Funktion und Begriff* of 1891 and in his paper of 1892 which is cited in the footnote 5 ['Über Sinn und Bedeutung' [Frege, 1892a]]; it is in these that the account of sentences as names of truth-values is first put forward." [Church, 1956, p. 25, nota 67]

se determina el valor de verdad de enunciados compuestos. Si Frege hubiese introducido el concepto de valor de verdad y hubiese proporcionado una definición veritativo-funcional de las conectivas en *Begriffsschrift*, habría podido mostrar de forma natural que sus leyes básicas proposicionales son universalmente válidas. Y, sin embargo, estas leyes básicas, como se discutirá en el apartado 2.2.1, son válidas en cuanto expresión de leyes del pensamiento[13].

Esta circunstancia pone de manifiesto el segundo elemento a destacar respecto a la definición de las conectivas en *Begriffsschrift*. Cierto contenido se reconoce como verdadero únicamente en el acto de aseveración representado por la barra de juicio. Las conectivas, en cambio, afectan al significado de una expresión, pero no tienen ninguna influencia en la creación de un juicio. En este sentido, no puede decirse que los enunciados de la conceptografía posean un valor de verdad en virtud del valor veritativo de sus componentes; las conectivas no son funciones que asignan un valor, sea el verdadero o el falso, a los juicios, sino que son componentes del lenguaje que expresan la relación que existe entre la afirmación de un contenido compuesto y la afirmación o negación de los contenidos que lo componen. En la presentación del condicional, Frege no establece que la siguiente fórmula:



La introducción de valores de verdad por parte de Peirce tiene lugar en 'On the Algebra of Logic' [Peirce, 1885]:

> "Let propositions be represented by quantities. Let $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{f}$ be two constant values, and let the value of the quantity representing a proposition be $\boldsymbol{v}$ if the proposition is true and be $\boldsymbol{f}$ if the proposition is false." [Peirce, 1885, p. 166]

Tal presentación posibilita formular una definición veritativo-funcional del condicional:

> "A proposition of the form
>
> $$x \mathrel{-\!\!<} y$$
>
> is true if $x = \boldsymbol{f}$ or $y = \boldsymbol{v}$. It is only false if $y = \boldsymbol{f}$ and $x = \boldsymbol{v}$." [Peirce, 1885, p. 181]

[13]Como paso introductorio al capítulo II de *Begriffsschrift*, y con la finalidad de clarificar tanto el contenido de las fórmulas como la notación de las demostraciones, Frege justifica la evidencia de dos leyes básicas [Frege, 1879a, §14, pp. 137-139], que llamaremos en el apartado 2.2.1 (**L1**) y (**L2**). Esta justificación no es más que una aclaración de lo que expresan estas proposiciones y, como el autor indica, no tiene pretensión sistemática:

> "The following derivation would tire the reader if he were to trace it in all its details. Its purpose is only to keep in readiness the answer to any question about the derivation of the law." [Frege, 1879a, §13, p. 137]

De hecho, Frege no dedica un razonamiento equivalente al resto de leyes básicas.

sea negada si y sólo si B es afirmado y A negado; plantea que esta fórmula expresa que no se da el caso en el que B es afirmado y A negado. Dicho en otros términos, si la misma fórmula formase parte de la conceptografía, jamás sucedería que A fuera negado y B afirmado, porque expresa precisamente que ese posibilidad no es el caso. En este sentido, no son los valores de verdad de los componentes de un juicio los que determinan, de acuerdo con la definición de las conectivas, el valor de verdad del juicio, sino que la afirmación de un contenido (con la presencia de conectivas) informa de qué combinaciones de afirmación y negación de componentes son compatibles entre sí.

1.2.4 Igualdad

Presentación en *Begriffsschrift*

Para hacer frente a la necesidad de relacionar símbolos que poseen una misma denotación, Frege introduce la relación de igualdad de contenido. El autor se refiere a ella mediante el símbolo '$\equiv$'. A diferencia del condicional y la negación, el signo de igualdad de contenido se aplica a símbolos, esto es, a nombres para contenidos, y no a contenidos en sí mismos:

> "Identity of content differs from conditionality and negation by relating to names, not to contents. Although symbols are usually only representatives of their contents—so that each combination [of symbols usually] expresses only a relation between their contents—they at once appear *in propria persona* as soon as they are combined by the symbol for identity of content, for this signifies the circumstance that the two names have the same content. Thus, with the introduction of a symbol for identity of content, a bifurcation is necessarily introduced into the meaning of every symbol, the same symbols standing at times for their contents, at times for themselves." [Frege, 1879a, §8, p. 124]

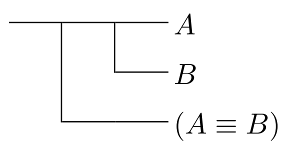
El planteamiento de Frege respecto a la igualdad es oscuro: a pesar de que en el cálculo el símbolo '$\equiv$' se maneja de forma natural, su explicación no es completamente clara. El autor constata que si A y B son contenidos, una fórmula que los identifique es o bien falsa o bien no es informativa. Así pues, sin haber desarrollado en 1879 la distinción entre sentido y significado, Frege se enfrenta a la dificultad de expresar de modo informativo que dos símbolos tienen el mismo contenido[14]. Dicho de otro modo, su intención es

[14]En 'Über Sinn und Bedeutung' [Frege, 1892a], Frege inicia su exposición con una

poner en relación mediante la igualdad dos formas distintas de presentar un mismo contenido.

Como el autor indica, esta intención respecto al tratamiento de la igualdad obedece a dos razones distintas [Frege, 1879a, §8, pp. 125-126]. La primera, la principal, parte del hecho de que un mismo contenido puede expresarse de modos distintos, de forma que no tiene por qué ser vacuo hacer explícito que las distintas formas de expresarlo denotan en realidad al mismo contenido. Así, en un caso particular, que dos formas de determinar un contenido expresen exactamente lo mismo es el contenido de un juicio (de igualdad de contenido). La segunda razón es puramente pragmática; Frege considera que el juicio de igualdad de contenido puede servir para introducir una abreviación para una expresión larga, como ocurre en el caso de las definiciones.

Esta atribución de significado al símbolo de igualdad de contenido conlleva una ambigüedad en la interpretación de los símbolos del lenguaje, que no suele ser observada por los comentaristas de *Begriffsschrift*. En efecto, los símbolos expresan contenidos excepto cuando forman parte de un enunciado que contiene el símbolo de igualdad; en tal caso, en tanto que símbolos, son nombres de sí mismos. De este modo, en los contextos en los que aparece '$\equiv$', los símbolos del lenguaje no expresan el contenido que denotan en cualquier otro contexto. Esta circunstancia es especialmente patente en casos concretos. Consideremos la fórmula siguiente:



En ella se producen dos tipos de usos para los símbolos. En primer lugar, tanto 'A' como 'B' expresan contenidos cuando aparecen aisladamente[15]. En cambio, estos mismos símbolos, cuando aparecen en el antecedente '$(A \equiv B)$', son nombres de sí mismos, ya que el contenido $(A \equiv B)$ expresa que ambos símbolos comparten significado.

discusión acerca de la igualdad y divide el contenido entre sentido (*Sinn*) y significado (*Bedeutung*). Con ello se pone de manifiesto la preocupación por parte del autor por resolver la ambigüedad que conlleva su uso del símbolo '$\equiv$'. En este artículo se resuelve esta dificultad determinando que la igualdad establece la igualdad respecto a la referencia de dos símbolos, pero no necesariamente respecto a su sentido. Así, los símbolos denotan en todo contexto lo mismo: su significado. Véase el apartado 6.3.2 para un tratamiento más detallado de esta cuestión.

[15]De hecho, esta circunstancia parece implicar que no hay diferencias de significado entre A y —— A. En tal caso, la barra de contenido no añadiría nada a las capacidades expresivas del conjunto de símbolos que la sigue, de modo que cabe preguntarse qué utilidad

Notación

No consideraremos propiamente la ambigüedad que introduce el símbolo de igualdad de contenido ni valoraremos las razones de Frege para introducir dicho símbolo de este modo particular. En este trabajo, se adoptará la convención semántica según la cual el símbolo '$\equiv$' expresará una de dos circunstancias: bien la igualdad entre términos, bien la igualdad de contenido entre contenidos aseverables. Así, el enunciado:

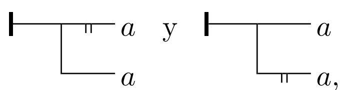
$$— 1 + 2 \equiv 2 + 1$$

expresa lo mismo, en notación actual, que '$1 + 2 = 2 + 1$'. En cambio, la fórmula:

$$— 2^2 > 3 \equiv 2 > 1$$

expresa lo mismo que '$(2^2 > 3) \leftrightarrow (2 > 1)$'.

En el Prefacio de *Begriffsschrift*, redactado tras la elaboración del texto, Frege comenta que dos condicionales, las Proposiciones (31) y (41):



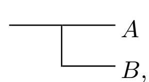
respectivamente, pueden combinarse en una única expresión, lo cual parece apoyar nuestra decisión:

> "I noticed only later that formulas (31) and (41) can be combined into a single formula,
>
> $$\vdash (\neg\neg\, a \equiv a),$$
>
> which makes even more simplifications possible." [Frege, 1879a, p. 107]

Sin embargo, esta interpretación del símbolo de igualdad no está exenta de dificultades. Hemos considerado inicialmente la ambigüedad que va aparejada a este símbolo. Pero, además, surge una dificultad técnica: interpretando del modo propuesto el símbolo '$\equiv$', se obtienen dos formas distintas

---

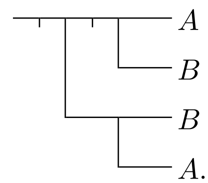
tiene. Ahora bien, en casos como:



sin la barra de contenido a la izquierda de la barra de condicionalidad no se dispondría del significado del condicional, sino únicamente de cada uno de sus componentes. Así, es necesaria la barra de contenido para obtener el significado de la expresión completa.

de expresar un bicondicional:

$$—\!—(A \equiv B) \quad \text{y}$$

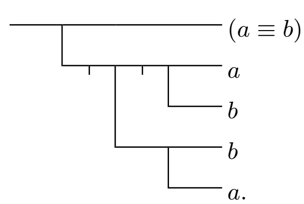


Como veremos en el apartado 4.2.2, no sólo no es posible demostrar en el cálculo de *Begriffsschrift* que estas dos fórmulas son equivalentes, sino que puede demostrarse que, de hecho, no lo son[16]. Por tanto, a pesar de que, de entrada, la lectura adoptada parece fiel con el planteamiento de Frege, resulta problemática.

1.2.5 Función y argumento

El modo de estructuración propio de la conceptografía guarda una estrecha vinculación con la concepción de la lógica de Frege y, sobre todo, con el cometido que, para el autor, ésta debe llevar a cabo. Tal concepción se sustenta en aspectos particulares, y puede decirse que una de las cuestiones particulares más relevantes es la distinción que Frege introduce entre función y argumento. De inspiración aritmética, esta distinción se fundamenta en el modo como el autor considera que se articula el contenido que la conceptografía transmite. Y ello es esencial hasta el punto de determinar la naturaleza de la conceptografía en tanto que sistema lógico, ya que, según como se interprete tal distinción, la conceptografía puede ser identificada con un sistema

[16] G. Landini y O. Chateaubriand afirman (sin incluir la demostración), en 'Decomposition and Analysis in Frege's *Grundgesetze*' [Landini, 1996, p. 138] y en *Logical Forms* [Chateaubriand, 2001, p. 279], respectivamente, que el siguiente condicional no es demostrable en la conceptografía:



Además, O. Duarte ofrece una demostración de la independencia de este condicional respecto al fragmento proposicional de *Begriffsschrift* en 'Lógica e Aritmetica na Filosofia Matemática de Frege' [Duarte, 2009, pp. 334-340]. Véase una demostración análoga en el apartado 4.2.2.

formal de segundo orden, o puede ser considerada independientemente de la jerarquía de órdenes formales.

A un nivel preliminar, hay que tener en cuenta que Frege aplica su distinción entre función y argumento a expresiones formadas, de modo que tanto función como argumento se identifican con componentes o partes de tal expresión. No se trata de una distinción realizada sobre la denotación de las expresiones, sino sobre las expresiones mismas[17].

Así, las expresiones de la conceptografía están estructuradas en la medida en que se toma un símbolo (o varios símbolos) como la parte reemplazable, que corresponde al *argumento*, y el resto de símbolos como la parte que permanece fija, que es la *función* [Frege, 1879a, §9, p. 126]. Esta distinción se aplica tanto a expresiones aseverables como no aseverables.

Antes de desarrollar la discusión referente a la naturaleza de la distinción entre función y argumento, es conveniente establecer una simbología concreta. Hasta el momento, se han usado letras griegas mayúsculas para representar indeterminadamente contenidos. Estos mismos símbolos pueden usarse para reflejar la estructuración de un contenido en términos de función y argumento: $A, B, \mathit{\Gamma}, \mathit{\Delta}, \ldots$ y $\mathit{\Phi}, X, \mathit{\Psi}, \ldots$ representan argumentos y funciones concretos, respectivamente. Nuevamente, estos símbolos no son letras ni forman parte del lenguaje de la conceptografía; se usan como recurso explicativo y cada uno de ellos representa un contenido concreto, aunque sin determinar cuál. Una expresión como '$\mathit{\Phi}(A)$' representa un contenido y, según el contexto, puede corresponder a una fórmula o a un término.

Primer caso

Implícitamente, Frege considera distintos casos en los que puede aplicarse la distinción entre función y argumento, dependiendo de la complejidad de la expresión analizada. Como veremos, dichos casos reciben una consideración diferenciada por parte del autor. En aras de la claridad, nuestra exposición acentuará su separación, pero hay que tener en cuenta que esta estrategia explicativa no se corresponde completamente con la exposición de Frege.

El primer caso de aplicación del esquema función-argumento concierne a las expresiones simples (términos o enunciados atómicos). En este caso,

[17] Discutiremos ampliamente en el apartado 1.3.2 si la distinción que Frege introduce en *Begriffsschrift* es de naturaleza distinta a la estructura concepto-objeto. Adicionalmente, en los apartados 5.5.2 y 5.6.2, veremos que estas dos estructuras no conforman aspectos distintos de un esquema común, por lo que, por medio de la distinción entre función y argumento, el autor no pretende reflejar los aspectos lingüísticos de la distinción ontológica entre concepto y objeto.

lo que caracteriza la distinción entre función y argumento es que no hay ningún criterio preestablecido: cualquier componente puede ser el argumento. Simplemente, hay que tomar una decisión respecto a qué componente de una expresión se toma como la parte que varía:

> "[An expression] divides into [1] a constant component which represents the totality of the relations and [2] the symbol which is regarded as replaceable by others and which denotes the object which stands in these relations (...). This distinction has nothing to do with the conceptual content, but only with our way of viewing it." [Frege, 1879a, §9, p. 126]

De acuerdo con ello, por un lado, esta distinción no transmite la estructura semántica de la expresión en la que se aplica y, por el otro, puede llevarse a cabo de modos distintos. Así pues, el esquema función-argumento no afecta al contenido de una expresión; sólo modifica el modo de considerarla. La característica principal de la distinción entre función y argumento es su completa flexibilidad. Los ejemplos de Frege pueden hallarse en [Frege, 1879a, §9, pp. 126-127]:

- El enunciado 'La circunstancia de que el dióxido de carbono es más pesado que el hidrógeno' admite, al menos, dos análisis distintos:

    1. La función 'La circunstancia de que A es más pesado que el hidrógeno' con el argumento 'dióxido de carbono',
    2. La función 'La circunstancia de que el dióxido de carbono es más pesado que A' con el argumento 'hidrógeno'[18].

- El enunciado 'Catón mató a Catón' admite, al menos, tres análisis distintos:

    1. La función 'A mató a Catón' con el argumento 'Catón',
    2. La función 'Catón mató a A' con el argumento 'Catón',
    3. La función 'A mató a A' con el argumento (que aparece dos veces) 'Catón'.

[18]Más adelante se discutirán otros posibles análisis, aunque hay análisis alternativos que, simplemente, no se van a considerar. Además, a diferencia de lo propuesto en nuestra exposición, Frege no utiliza letras griegas mayúsculas (como 'A') para aislar la función en estos ejemplos. En otro pasaje de *Begriffsschrift*, como se verá a continuación, empieza a hacer uso de estos símbolos para indicar el lugar del argumento.

Frege proporciona una definición, en cierto modo rigurosa, de este primer caso de la distinción:

> "*If, in an expression (whose content need not be assertible), a simple or a complex symbol occurs in one or more places and we imagine it as replaceable by another (but the same one each time) at all or some of these places, then we call the part of the expression that shows itself invariant a function and the replaceable part its argument*[19]." [Frege, 1879a, §9, p. 127]

Mediante esta definición, el autor hace explícito que la distinción entre función y argumento puede ser aplicada incluso a una expresión cuyo contenido puede no ser aseverable. Así, tanto términos como expresiones simples pueden ser divididos en función y argumento, de tal modo que no se tenga en cuenta ningún criterio para capturar su estructura semántica.

Una vez desarrollada la exposición de este primer caso, Frege añade una variación significativa: la posibilidad de descomponer un enunciado en una función y varios argumentos distintos[20]:

> "*If we imagine that in a function a symbol, which has so far been regarded as not replaceable, is now replaceable at some or all of the places where it occurs, we then obtain, by considering it in this way, a function with another argument besides the one it had before.* In this way, *functions of two or more arguments arise.*" [Frege, 1879a, §9, p. 128]

De este modo, Frege permite funciones de hasta n-argumentos distintos, cuando, en un primer momento, sólo cabía la posibilidad de que una función tuviese un solo argumento (aunque podía aparecer en ella en varios lugares). Así:

> 'Catón mató a Catón' puede verse como la función 'A mató a B' con dos argumentos (que en este caso coinciden), 'Catón' y 'Catón'.

Esta circunstancia posee una gran importancia histórica, puesto que posibilita, por primera vez en la historia de la lógica, un análisis adecuado de los enunciados relacionales.

[19] De aquí en adelante, eliminamos las glosas entre corchetes que T. W. Bynum añade en su traducción. Todas las glosas que se mantengan en las citas obedecen a nuestro criterio.

[20] De hecho, esta modificación se encuentra, en *Begriffsschrift*, al final de la sección dedicada a las funciones, esto es, tras considerar el segundo caso. Sin embargo, por cuestiones expositivas, es más adecuado situarla en este punto en nuestra discusión.

Segundo caso

La amplia flexibilidad con la que puede aplicarse la estructura función-argumento en el primer caso no es adecuada para todas las expresiones en general. Frege advierte del peligro de aplicar la distinción entre función y argumento tomando como guía la estructura gramatical. Este peligro se pone especialmente de manifiesto en el análisis de expresiones cuantificadas. Para mostrarlo, Frege recurre a los siguientes ejemplos [Frege, 1879a, §9, p. 127]:

- "The number 20 can be represented as the sum of four squares."
- "Every positive integer can be represented as the sum of four squares."

Estas dos oraciones presentan una diferencia clara: a pesar de compartir predicado, el sujeto es radicalmente distinto. En opinión del autor, a esta diferencia lingüística subyace un elemento relevante:

> "(...) "the number 20" and "every positive integer" are not concepts of the same rank. What is asserted of the number 20 cannot be asserted in the same sense of "every positive integer"; though, of course, in some circumstances it may be asserted of every positive integer. The expression "every positive integer" by itself, unlike "the number 20", yields no independent idea; it acquires a sense only in the context of a sentence." [Frege, 1879a, §9, p. 128]

Es difícil entender claramente qué quiere establecer el autor. Frege indica que 'the number 20' y 'every positive integer' no son conceptos del mismo rango. Esta diferencia de rango está ligada a lo que puede aseverarse de un concepto y del otro. El autor parece reconocer la diferencia entre los dos enunciados en el hecho de que 'the number 20' posee una denotación concreta e invariable, mientras 'every positive integer' no denota nada en concreto, sino que refiere con generalidad a una serie de entidades que cumplen la propiedad de ser un número entero positivo.

Frege generaliza la diferencia entre estos dos enunciados con la ayuda de la distinción entre determinación e indeterminación:

> "For us, the different ways in which the same conceptual content can be considered as a function of this or that argument have no importance so long as function and argument are completely determinate. But if the argument becomes *indeterminate* (...), then the distinction between function and argument acquires a *substantive* significance. It can also

> happen that, conversely, the argument is determinate, but the function is indeterminate. In both cases, through the opposition of the *determinate* and the *indeterminate* or the *more* and the *less determinate*, the whole splits up into *function* and *argument* according to its own content, and not just according to our way of looking at it." [Frege, 1879a, §9, p. 128]

A pesar de que Frege no especifica qué significa ser determinado, es razonable afirmar que un componente indeterminado es o bien un argumento, o bien una función que expresa generalidad y no tiene una denotación fija. El contenido de las expresiones indeterminadas no puede ser expresado en la conceptografía sin ayuda de símbolos que expresan generalidad. Así, la indeterminación de una expresión, o de una de sus partes, se produce cuando contiene, en términos actuales, variables (en fórmulas o términos abiertos) o fragmentos cuantificados que, como 'todo entero positivo', no expresan una idea independiente[21]. Puede ocurrir que todo el componente funcional, el argumento, o la expresión entera sean indeterminados. De acuerdo con ello,

[21] Hay en *Begriffsschrift* al menos tres usos distintos de la dupla '*bestimmt-unbestimmt*', que se traduce literalmente como '*determinate-indeterminate*' y a la que nos hemos referido como 'determinado-indeterminado'. Estos tres usos dependen de su aplicación; la denominación 'determinado-indeterminado' puede referirse a símbolos explicativos como 'Φ', a expresiones o a conceptos, y cada una de estas referencias determina un uso distinto.

Según el primer uso, un símbolo como 'Φ', es indeterminado porque representa una función en concreto, pero sin especificar cuál; simplemente indica el hecho de ser el componente que permanece fijo en una expresión como '$\Phi(A)$'. De este modo, no tiene sentido predicar determinación de 'Φ'; según este uso sólo es relevante referirse a la indeterminación.

En segundo lugar, Frege usa '*unbestimmt*', según el modo descrito a partir de la cita anterior, para referirse a funciones o argumentos que expresan generalidad. Sin una separación clara entre lenguaje objeto y metalenguaje, Frege no distingue estos dos primeros usos, y utiliza símbolos metalingüísticos (como 'Φ') como variables en casos de indeterminación. En nuestra exposición, tratará de minimizarse esta dificultad, aún a pesar de contravenir la literalidad del texto fregeano.

En base al tercer y último uso, un concepto es indeterminado si es designado por una función que no permite generar un contenido aseverable junto con cualquier argumento, sino sólo con algunos. Frege pone el ejemplo de la propiedad de ser un puñado de judías [Frege, 1879a, §27, p. 177]; debido a su vaguedad, no de todo argumento puede afirmarse o negarse que sea un puñado de judías. Como veremos en los apartados 5.4 y 6.3.2, este último uso tendrá gran relevancia en las obras posteriores de Frege. En *Grundlagen*, podemos hallar una muestra de este tercer uso de determinación:

> "All that can be demanded of a concept from the point of view of logic and with an eye to rigour of proof is only that the limits of its application should be sharp, that we should be able to decide definitely about every object whether it falls under that concept or not." [Frege, 1884, §74, p. 87]

es posible distinguir distintos grados de indeterminación; un símbolo como 'A' representa una expresión completamente indeterminada, pero 'every positive integer' es una expresión sólo parcialmente indeterminada.

Todos los enunciados cuantificados contienen componentes indeterminados. Como Frege plantea, la distinción entre función y argumento debe aplicarse en estos casos teniendo en cuenta el contenido. La razón para esta variación respecto al primer caso se debe a la necesidad de evitar análisis erróneos sugeridos por la estructura gramatical de multitud de expresiones. La estructura sujeto-predicado, superada explícitamente por Frege, como se discutirá en el apartado 1.3.2, es inocua por lo que respecta al primer caso, puesto que la distinción entre función y argumento puede llevarse a cabo según el punto de vista que se adopte, y nada más. Sin embargo, ante expresiones con componentes indeterminados, la aplicación de la distinción entre sujeto y predicado puede resultar problemática. Esta circunstancia motiva la propuesta de este segundo caso de aplicación[22]. Así pues, Frege distingue la descomposición de enunciados cuantificados para imponer un análisis lógico correcto al contenido que maneja la conceptografía. Ahora bien, *Begriffsschrift* no tiene la finalidad de mostrar cómo llevar a cabo un análisis lógico del contenido, aunque ayude a hacerlo. El objetivo de *Begriffsschrift* es ofrecer, una vez el contenido ha sido analizado adecuadamente, un modo riguroso de expresarlo, libre de las ambigüedades del lenguaje natural. En consecuencia, Frege no especifica, en este punto de su exposición, cómo debe llevarse a cabo este análisis particular: únicamente advierte de que la descomposición planteada en el primer caso no es adecuada para expresiones con componentes indeterminados.

De acuerdo con el planteamiento de Frege, 'the number 20' es un caso de expresión determinada, mientras que 'every positive integer' es un componente indeterminado. Es claro que el enunciado 'the number 20 can be represented as the sum of four squares' corresponde al primer caso y, por tanto, su análisis únicamente depende del punto de vista adoptado. Por consiguiente, 'the number 20' puede ser el argumento de la función 'A can be represented as the sum of four squares'. Sin embargo, como ya se ha señalado, no es adecuado aplicar esta misma descomposición a 'every positive integer can be represented as the sum of four squares', ya que es necesario llevar a cabo un análisis lógico previo.

Destacando la indeterminación de 'every positive integer' y planteando

[22]El planteamiento de un segundo caso y la diferenciación entre los análisis de las expresiones atómicas y de los enunciados cuantificados avanzan el análisis semántico de los juicios categóricos que Frege desarrolla a partir de 1880. Consideraremos detalladamente esta cuestión en el apartado 5.5.2.

que los dos juicios propuestos requieren análisis distintos, Frege está sugiriendo las diferencias que subyacen entre ambos. Dado que el predicado 'can be represented as the sum of four squares' está tomado como si fuese simple (aunque, en rigor, debería estar analizado), 'the number 20 can be represented as the sum of four squares' es una expresión atómica, mientras que 'every positive integer can be represented as the sum of four squares' es una expresión cuantificada compleja. Naturalmente, esa diferencia sólo podrá ser propiamente considerada tras la exposición de la noción de generalidad y, por ello, Frege se limita, en este punto de *Begriffsschrift*, a destacar las diferencias entre los dos juicios por lo que respecta a la determinación o indeterminación de sus componentes.

Letras

Tras el desarrollo de los casos en los que puede aplicarse la distinción entre función y argumento, Frege introduce los símbolos que usa para representar genéricamente este esquema. Como se ha planteado, '$\Phi(A)$' representa una expresión dividida en dos componentes, función y argumento. La lectura inicial que propone el autor es que 'A' es el argumento de '$\Phi(A)$'. Sin embargo, la flexibilidad con la que concibe la distinción entre función y argumento permite variar esta descomposición inicial:

> "Since the symbol Φ occurs at a place in the expression
>
> $$\Phi(A)$$
>
> and since we can think of it as replaced by other symbols Ψ, X—by which other functions of the argument A would be expressed[23]—*we can consider $\Phi(A)$ as a function of the argument Φ*." [Frege, 1879a, §10, p. 129]

En coherencia con lo expuesto para el primer caso, $\Phi(A)$ pasa a ser el esquema genérico de una expresión, sea simple o compleja. Una una vez establecido, el esquema $\Phi(A)$ puede representar cualquier expresión dividida en función y argumento, ya sea un término, una fórmula atómica o una fórmula compleja.

Frege propone una lectura de expresiones como '$\Phi(A)$': A tiene la propiedad (*Eigenshaft*) Φ [Frege, 1879a, §10, p. 129]. Esta lectura proviene de la oración básica representada por '$\Phi(A)$', a saber, un enunciado que expresa

[23]No seguimos en este punto la traducción de T. W. Bynum. En ella consta: "which then express other functions of the argument A".

que un objeto tiene cierta propiedad, sea ésta simple o compleja. Por consiguiente, 'A' ocupa el lugar del objeto y 'Φ' representa la propiedad. Ahora bien, dado que '$\Phi(A)$' es un esquema genérico para toda expresión descompuesta en una función y un argumento, esta lectura es meramente sugerente. Por tanto, desde un punto de vista puramente lógico, esta lectura no impone roles preestablecidos a los distintos componentes de la expresión. Dicho en otras palabras, el análisis en términos de función y argumento no es absoluto y puede ser modificado: una vez la división ha sido realizada, lo que ha sido tomado como parte reemplazable puede considerarse el componente fijo, de modo que ambos símbolos pueden ser considerados tanto función como argumento. Según las herramientas que proporciona la conceptografía, hay total flexibilidad; ser función o argumento es, en este caso, intercambiable. De acuerdo con ello, nada impide tomar 'Φ' como el componente que varía de '$\Phi(A)$'. En consecuencia, en una expresión como '$\Phi(A)$', por un lado, 'Φ' puede ser la función para los argumentos'A', 'B', 'Γ', ... y, por el otro, 'A' puede ser la función para los argumentos 'Φ', 'X', 'Ψ', ...

Hasta el momento, siguiendo a Frege, hemos usado letras griegas mayúsculas en nuestra explicación. Sin embargo, es conveniente presentar los símbolos mediante los cuales la conceptografía puede dar cuenta tanto de funciones como de argumentos. Ya se ha aclarado que las letras griegas mayúsculas no forman parte del lenguaje de la conceptografía, sino que se usan, simplemente, con fines explicativos. Los símbolos de la conceptografía destinados a expresar generalidad son aquellos a los que Frege se refiere con el nombre de 'letras latinas', o simplemente 'letras': 'f','g','h' son *letras funcionales* y 'a','b','c','d','e' son, de acuerdo con nuestra terminología, *letras para argumento*. Las letras son fácilmente distinguibles al ser siempre letras cursivas latinas. El hecho de separar las letras en letras funcionales y letras para argumento debe entenderse exclusivamente como una cuestión metodológica. La práctica de Frege, por lo general, coincide con nuestra exposición, pero es fundamental tener en cuenta que el hecho de denominar a las letras de un modo u otro no impone un único análisis a las expresiones en las que aparecen, como se verá en casos concretos de demostraciones de *Begriffsschrift* en el apartado 2.4.2. Así pues, habitualmente las letras funcionales serán tomadas como funciones y las letras para argumento como argumentos, pero el mismo Frege variará esta práctica, que no responde a ningún aspecto estructural de la conceptografía, a conveniencia.

Podemos representar mediante '$\Phi(A)$' la estructura de un enunciado como 'Sócrates es hombre'. Sin embargo, Frege nunca simbolizaría este enunciado como '$f(a)$', porque las letras expresan generalidad. Consideremos ahora la siguiente ecuación:

$$x + y = y + x.$$

Un enunciado de este tipo no puede ser simbolizado como '$f(a, b) = f(b, a)$', porque tendría que valer para cualquier expresión que pueda ocupar las posiciones de 'f', 'b', 'a', lo cual es claramente falso. Esta dificultad en la simbolización de expresiones en el lenguaje de la conceptografía, propiamente, no va a plantearse; ni '$\Phi(A)$' ni 'Sócrates es mortal' pertenecen al lenguaje de este sistema formal y, además, como veremos en el apartado 3.3.2, un enunciado de la aritmética como '$x + y = y + x$' se simboliza usando la conceptografía de un modo particular.

En muchos casos es conveniente hacer explícito de qué modo una expresión ha sido dividida. La conceptografía dispone un recurso básico para expresar esta circunstancia en las expresiones simples: los paréntesis. Así, '$f(a)$' es una expresión con dos componentes, un argumento y una función. Los paréntesis aíslan uno de los dos componentes; siguiendo la analogía matemática, el análisis inicial establece que el argumento sea el símbolo entre paréntesis. Pero, como ya se ha discutido, hay otras formas igualmente aceptables de dividir la expresión. Recurriremos a letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ para poder expresar con claridad las diversas formas alternativas de dividir una expresión. El siguiente ejemplo nos servirá para ilustrar el uso de estos símbolos. En la fórmula '$2 + 2 > 1$', un posible análisis puede tomar las dos apariciones de '2' como argumentos. Por tanto, hay dos posibles funciones, dependiendo de cómo se analicen las apariciones de '2'. Sin embargo, la fórmula considerada no dispone de paréntesis para aislar los argumentos, ni es posible distinguir en ella las funciones. Para ambos cometidos se plantea el uso de letras griegas minúsculas. Por un lado, si se considera que la fórmula tiene dos argumentos, y que en este caso son el mismo, la función es '$\alpha + \beta > 1$'. Por el otro, si se prefiere indicar que un único argumento tiene dos apariciones, la función es '$\alpha + \alpha > 1$'. El hecho es que la formulación explícita de estas dos funciones, '$\alpha + \beta > 1$' y '$\alpha + \alpha > 1$', debe distinguirse de la siguiente expresión:

$$\vdash\!\!\!\!\text{——}\; a + b > 1,$$

que contiene letras y expresa el juicio (falso) según el cual la suma de cualesquiera dos argumentos, a y b, es mayor que 1.

Las letras griegas minúsculas únicamente indican el modo relevante en el contexto de separar la función del argumento en una expresión concreta, y no imponen un análisis determinado. Hasta ahora, se han usado, siguiendo la práctica del mismo Frege, letras griegas mayúsculas para llevar a cabo una tarea similar. No obstante, parece que representar un componente particular no es la misma tarea que indicar cómo llevar a cabo la separación entre una función y un argumento. En cualquier caso, todas las letras griegas comparten un aspecto: no son símbolos del lenguaje de la conceptografía, ya que meramente proporcionan un recurso técnico para poner de relieve un aspecto sintáctico.

1.2.6 Generalidad

También ligada a la distinción entre función y argumento, la teoría de la cuantificación que se desarrolla en *Begriffsschrift* supone uno de los avances más significativos por parte de Frege en materia de lógica.

El símbolo de generalidad de la conceptografía está asociado a una letra y, en palabras de Frege, "*delimits the scope of the generality signified by the letter*" [Frege, 1879a, §11, p. 131]. Este símbolo, que denominaremos 'cuantificador universal', está formado por dos elementos distintos[24]. El primero es una concavidad que se intercala en una barra de contenido (no necesariamente aquella que sucede a la barra de juicio), de tal manera que su posición indica el alcance (*Gebiet*) del cuantificador. El segundo es una letra situada dentro de la concavidad; se recurre a la tipografía gótica para indicar qué letra está ligada por el cuantificador. Así pues, en presencia de un cuantificador, se usará '$\mathfrak{F}$' como letra funcional cuantificada y '$\mathfrak{a}$', '$\mathfrak{b}$', '$\mathfrak{d}$', '$\mathfrak{e}$' como letras para argumento cuantificadas.

En su misma presentación en *Begriffsschrift*, es patente cómo la noción de generalidad está profundamente conectada con la distinción entre función y argumento. De acuerdo con el planteamiento de Frege, un símbolo en la expresión de un juicio (sea una letra funcional o una letra para argumento) puede ser tomado como argumento y ser reemplazado por una letra cuantificada [Frege, 1879a, §11, p. 130]. De hecho, Frege afirma explícitamente que la función es aquella combinación de símbolos que permanece cuando se toma un símbolo en una expresión aseverable como argumento y una letra cuantificada lo reemplaza. Por tanto, no hay un vínculo específico entre el predicado de un enunciado cuantificado y el componente que se toma como su componente que permanece fijo, esto es, como su función.

Frege introduce la cuantificación en *Begriffsschrift* del modo siguiente:

[24]Tal y como afirma A. Church en *Introduction to Mathematical Logic* [Church, 1956, p. 288], el primer uso del término 'cuantificador' se debe a Peirce, que introduce los cuantificadores (independientemente de Frege) en 'On the Algebra of Logic: a Contribution to the Philosophy of Notation' [Peirce, 1885, p. 164; pp. 178-185].

> *"lf we replace this argument by a German letter and introduce in the content stroke a concavity containing the same German letter, as in*
>
> $$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\Phi(\mathfrak{a}),$$
>
> *then this stands for the judgement that the function is a fact whatever we may take as its argument.* Since a letter which is used as a function symbol, like Φ in $\Phi(A)$, can itself be considered as the argument of a function, it can be replaced by a German letter in the manner just specified." [Frege, 1879a, §11, p. 130]

Hemos afirmado que el siguiente enunciado:

$$\vdash\!\!\!-\!\!-\!\!-\,\Phi(A)$$

puede ser analizado de un modo natural tomando 'A' como el argumento y 'Φ' como la función. Así, si el símbolo 'A' es considerado la parte variable, puede ser reemplazado por una letra gótica correspondiente y consecuentemente ser cuantificado. El resultado:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\,\Phi(\mathfrak{a})$$

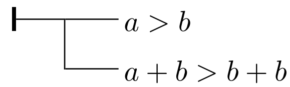
expresa el juicio de que $\Phi(A)$ es un hecho (esto es, $\Phi(A)$ es verdadero) para cualquier argumento 'A' que pueda situarse en el lugar de '$\mathfrak{a}$'. Frege menciona que 'Φ' también puede ser el argumento y que, por tanto, puede ser reemplazado por una '$\mathfrak{F}$' gótica para obtener:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!-\,\mathfrak{F}(A).$$

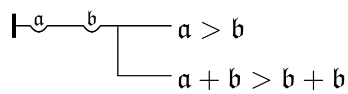
Consideraremos detalladamente esta cuestión en los apartados 1.4.1 y 1.5.4.

Aparte de la cuantificación explícita, hay en la conceptografía una cuantificación implícita. Puesto que las letras expresan generalidad, toda aparición libre, es decir, fuera del alcance de un cuantificador, puede verse como cuantificada universalmente de modo implícito. Con este fin se utilizan las letras latinas, presentadas previamente; se consideran letras cuantificadas, pero ligadas por una cuantificación universal implícita. En este caso, se entiende que el alcance de la generalidad que expresan las letras latinas abarca la totalidad del juicio en el que aparecen [Frege, 1879a, §11, p. 131-132]. La distinción entre tipografías es fundamental en el tratamiento de las substituciones en la conceptografía, como se discutirá en el apartado 2.3.3.

Así, todas las letras de la conceptografía están cuantificadas. Las letras latinas están implícitamente cuantificadas y las letras góticas están en el alcance de una cuantificación explícita. De hecho, la fórmula:



expresa el mismo juicio que:



1.2.7 Análisis de enunciados categóricos

La nueva distinción entre función y argumento aporta algunas novedades de carácter formal respecto a la distinción tradicional entre sujeto y predicado. La principal es la introducción de un nuevo modo de analizar los juicios categóricos básicos. En segundo lugar, como ya se ha mencionado, posibilita el análisis lógico adecuado de los enunciados relacionales, al permitir que una función tenga distintos argumentos. Y, por último, esta nueva distinción sintáctica abre la posibilidad de una cuantificación múltiple. En este apartado, consideraremos, tras haber tratado la exposición de Frege de la noción de generalidad, cómo debe llevarse a cabo la descomposición en términos de función argumento de los enunciados cuantificados y, en particular, de los enunciados categóricos.

Consideremos el siguiente enunciado:

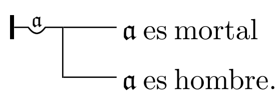
> Todo hombre es mortal.

Este enunciado contiene componentes indeterminados, por lo que es necesario llevar a cabo un análisis lógico previo. Paralelamente al comentario de Frege, no puede considerarse que la función de la expresión 'Todo hombre es mortal' sea 'α es mortal', puesto que, así, podría ser la misma que en la expresión 'Sócrates es mortal', con lo cual el argumento sería en un caso 'Sócrates' y, en el otro, 'Todo hombre'. La novedad del análisis de Frege consiste en negar que la expresión 'Todo hombre' pueda actuar como sujeto lógico o, más propiamente, como argumento.

Sin embargo, Frege no indica explícitamente cómo debe llevarse a cabo el análisis de enunciados con componentes indeterminados. Únicamente comenta que un enunciado como 'Todo hombre es mortal' debe ser analizado del modo siguiente: puedes tomar como argumento de 'ser mortal' un hombre cualquiera, y la proposición resultante será siempre verdadera [Frege, 1879a, §9, p. 128].

A nuestro juicio, el análisis implícito en la exposición de Frege puede dividirse en dos pasos distintos. En primer lugar, se precisa extraer la forma lógica de la expresión. Como hemos mencionado, éste es un paso que no corresponde propiamente a la conceptografía, aunque este sistema formal proporcione herramientas para llevarlo a cabo adecuadamente. En cualquier caso, se trata de un paso es fundamental, ya que permite distinguir expresiones con una estructura formal aparentemente idéntica, como son 'Sócrates es mortal' y 'Todo hombre es mortal'. La apariencia de una estructura formal común para ambas expresiones es producto de la ambigüedad del lenguaje, y éste es un caso de ambigüedad similar al que manifiesta Frege evaluando las razones para la creación de un lenguaje formal como el de la conceptografía, que consideraremos en el apartado 3.2.2. Puesto que 'todo hombre' es un componente indeterminado, su expresión en la conceptografía debe incluir letras. De acuerdo con el autor, 'ser hombre' es una condición que debe imponerse a los argumentos, esto es, a las posibles instancias de la letra cuantificada[25]. Por lo tanto, dado que, en palabras de Frege: "[*a*]*ll other conditions that must he imposed upon what may be put in for a German letter are to be included in the judgement.*" [Frege, 1879a, §11, p. 130], la condición 'ser hombre' debe ser incluida en el juicio como antecedente de un condicional. Podemos concluir, por consiguiente, que 'todo hombre es mortal' es la cuantificación universal de un condicional. Atendiendo al contenido de 'todo hombre es mortal', la cuantificación universal pertenece al componente funcional, de modo que es natural entender que 'todo hombre' no puede verse como argumento.

La forma lógica de 'Todo hombre es mortal' es explícita en la siguiente expresión simbolizada con la ayuda de la conceptografía:



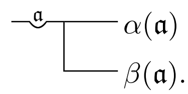
Aunque esta reconstrucción en particular puede parecer obvia, al menos de acuerdo con el punto de vista lógico actual, debe reconocerse la enorme relevancia que posee para la historia de la lógica[26]. De hecho, aunque Frege

[25]Aunque podría entenderse que, en este aspecto particular del planteamiento de Frege, hay cierta confusión entre uso y mención, ésta no tiene ninguna importancia para la discusión presente.

[26]El análisis de Frege difiere del tradicional en dos aspectos relevantes. En primer lugar, los juicios categóricos universales habían sido considerados a lo largo de la historia de la lógica enunciados simples. Incluso lógicos prominentes como G. Boole (1815-1864) analizan según el modo tradicional este tipo de juicios. Véase su análisis en términos de sujeto y

proporciona en *Begriffsschrift* una simbolización como la que hemos incluido, no indica cómo obtenerla.

Sin embargo, el análisis en términos de función y argumento sigue sin estar completamente determinado. El segundo paso consiste en dividir la expresión en función y argumento. Dado que la forma lógica de 'Todo hombre es mortal' se ha puesto de manifiesto en el primer paso del análisis, decidir qué componente es el argumento no requiere apelar nuevamente al contenido. Hay múltiples opciones de división, pero consideraremos únicamente dos de ellas. En primer lugar, el enunciado 'Para todo $\mathfrak{a}$, si $\mathfrak{a}$ es hombre, entonces $\mathfrak{a}$ es mortal' puede verse como el resultado de combinar la siguiente función:



con los argumentos 'ser hombre' y 'ser mortal'. En segundo lugar, el argu-

predicado de un enunciado análogo al considerado aquí en *An Investigation of the Laws of Thought*:

> "In the proposition, "All fixed stars are suns," the term "all fixed stars" would be called the *subject*, and "suns" the *predicate*." [Boole, 1854, p. 59]

En segundo lugar, los juicios singulares recibían un análisis uniforme con el resto de juicios categóricos. Una muestra del tratamiento tradicional de los juicios singulares, según el cual éstos se reducen a juicios universales, puede hallarse en *La Logique ou l'art de penser* [Arnauld; Nicole, 1662] de A. Arnauld (1612-1694) y P. Nicole (1625-1695):

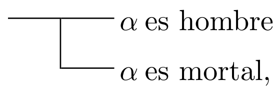
> "Pero aunque [una proposición singular] sea diferente de la proposición universal en cuanto que su sujeto no es común, sin embargo, guarda semejanza más bien con la universal afirmativa que con la particular porque su sujeto está tomado necesariamente en toda su extensión precisamente por ser singular, siendo esto lo que constituye la esencia de una proposición universal y lo que la distingue de la proposición particular (...). Esta es la razón por la que las proposiciones singulares ocupan el lugar de las universales en la argumentación" [Arnauld; Nicole, 1662, p. 157]

La perspectiva de reducir los juicios singulares a los restantes tipos de juicio se aprecia en manuales de lógica de la segunda mitad del siglo XIX. Es el caso, por ejemplo, de *System der Logik und Geschichte der logischen Lehren* [Überweg, 1857], de F. Überweg. En este tratado de lógica, coetáneo a Frege, se reducen los juicios singulares a universales o particulares en función de la forma del sujeto; en el primer caso, si el sujeto es definido y concreto, se consideran juicios universales y, en el segundo, si el sujeto es indefinido, se consideran juicios particulares:

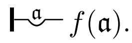
> "For in the first case the predicate is affirmed or denied of the *whole* sphere of the subject (which in this case is reduced to an individual), and in the other case of an indefinite *part* of the sphere of the subject-notion." [Überweg, 1857, §70, p. 214]

Véanse también los comentarios al respecto de R. Whately en *Elements of Logic* [Whately, 1845, p. 77].

mento también puede ser el siguiente:



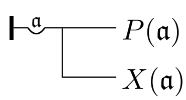
de modo que la simbolización del enunciado en cuestión resulta de reemplazar '$f(\alpha)$' por esta expresión en la siguiente fórmula:



La exposición precedente puede extenderse con total naturalidad al análisis de todos los juicios categóricos. De hecho, Frege reserva el último apartado de la sección dedicada a la noción de generalidad en *Begriffsschrift* a la expresión en la conceptografía de juicios categóricos y existenciales. Es históricamente significativo que el autor ofrezca un análisis formal novedoso y adecuado de estos juicios.

A la luz de la descomposición ofrecida para el enunciado 'Todo hombre es mortal', en la que la cuantificación se disocia completamente del sujeto, es clara la importancia de la distinción entre función y argumento en el análisis de los juicios categóricos.

Como ya hemos planteado, la expresión '$\Phi(A)$' puede leerse en algunos contextos como 'A tiene la propiedad Φ'. Esto es especialmente útil en el tratamiento de los juicios categóricos. De acuerdo con el planteamiento de Frege respecto al condicional y la generalidad, la expresión:



significa que, sea lo que sea $\mathfrak{a}$, no sucede que $P(\mathfrak{a})$ sean negado y $X(\mathfrak{a})$ afirmado [Frege, 1879a, §12, p. 134]. Si se consideran 'P' y 'X' como representantes de propiedades, este juicio puede ser leído como un juicio categórico universal[27]:

> "We can thus translate: "If something has the property X, then it also has the property P.", or "Every X is a P.", or "All X's are P's."." [Frege, 1879a, §12, p. 134]

[27]Es importante observar que un elemento esencial para hacer posible el análisis fregeano es el uso de letras para argumento, que expresan generalidad y que, en este contexto se interpretan como variables individuales. Sin embargo, como veremos, ésta no es la única interpretación posible de las letras para argumento.

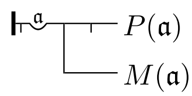
El uso de variables individuales, esto es, de letras que se interpretan exclusivamente como variables individuales, se debe a Peirce. Véase la nota 122.

Por otro lado, mediante la combinación del símbolo de generalidad y el de negación puede darse expresión de la cuantificación existencial. Así,

$$\vdash\!\!\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\neg\, \mathfrak{a}^2 \equiv 4$$

expresa el juicio (verdadero) ‘Hay alguna raíz cuadrada de 4’. Frege afirma explícitamente que este juicio debe ser entendido como ‘Hay raíces cuadradas de 4 o hay al menos una raíz cuadrada de 4’ [Frege, 1879a, §12, p. 134, nota]. Por lo tanto, en el significado de esta construcción del cuantificador existencial hay asociado un requisito de existencia.

Mediante esta construcción del cuantificador existencial y con la ayuda de la negación es posible expresar de modo similar otros juicios categóricos. Por ejemplo, el juicio:



niega el caso en el que, sea lo que sea $\mathfrak{a}$, $P(\mathfrak{a})$ es negado o $M(\mathfrak{a})$ es negado. Dicho en otras palabras, este juicio afirma el caso en el que, para algún A, $M(A)$ es afirmado y $P(A)$ es afirmado. En consecuencia, puede ser traducido como ‘Algún M es P’, esto es, como un juicio categórico particular. Nuevamente, Frege observa que la partícula ‘algún’ contenga un requisito existencial [Frege, 1879a, §12, p. 135, nota].

1.3 Naturaleza de la distinción función-argumento

En los apartados 1.2.5 y 1.2.6 se ha considerado la exposición de Frege en *Begriffsschrift* relativa a la distinción entre función y argumento y a la noción de generalidad, respectivamente. Abandonamos ahora este punto de vista expositivo para contrastar nuestros resultados con los aspectos más prominentes de la interpretación habitual de *Begriffsschrift*.

El propósito de esta sección es examinar si el esquema función-argumento posee o no naturaleza ontológica. Por un lado, consideraremos la posibilidad de identificar la noción de función de *Begriffsschrift* con la noción matemática de función[28]. Por el otro, abordaremos los argumentos a favor de tomar el esquema función-argumento como una distinción sobre aquello que las expresiones denotan, y no como un modo de descomponer expresiones. Esta segunda discusión nos llevará a evaluar la relación entre las letras de la conceptografía y la distinción fundamental de este sistema formal.

[28] A lo largo de esta sección, para simplificar nuestra explicación, siempre que la ariedad de una función no sea explícita, consideramos únicamente funciones unarias.

1.3.1 Funciones matemáticas y funciones de *Begriffsschrift*

Probablemente por el carácter revolucionario de la obra de Frege de 1879, numerosos comentarios históricos modernos tienden a identificar la noción de función de *Begriffsschrift* con la noción moderna de función, que guarda estrechas similitudes con la función matemática, cuya característica esencial es atribuir un único valor a cada argumento apropiado[29]. Las múltiples diferencias entre el modo como Frege presenta las funciones en *Begriffsschrift* y las presentaciones modernas son a menudo consideradas meras inexactitudes.

Frege indica que la noción de función desarrollada en *Begriffsschrift* toma como guía la noción matemática de función. No obstante, al mismo tiempo plantea que hay grandes diferencias entre estas dos nociones:

> "Since the symbol $\mathit{\Phi}$ occurs at a place in the expression
>
> $$\mathit{\Phi}(A)$$
>
> and since we can think of it as replaced by other symbols $\mathit{\Psi}$, X—by which other functions of the argument A would be expressed—*we can consider* $\mathit{\Phi}(A)$ *as a function of the argument* $\mathit{\Phi}$. This shows quite clearly that the concept of function in analysis, which I have in general followed, is far more restricted than the one developed here." [Frege, 1879a, §10, p. 129]

Si bien Frege ofrece la lectura canónica 'A tiene la propiedad $\mathit{\Phi}$' de una expresión como '$\mathit{\Phi}(A)$', que ya ha sido dividida en función y argumento, nunca leería la expresión matemática '$f(x)$' como 'x tiene la propiedad f'[30]. Y, contra lo que sucede con $\mathit{\Phi}(A)$, f nunca podría ser el argumento matemático de $f(x)$. En este sentido, la función de *Begriffsschrift* no puede verse como una generalización de la función en análisis. O, dicho de otro

[29] G. Baker y P. Hacker defienden repetidamente y con firmeza esta posibilidad en 'Functions in *Begriffsschrift*' [Baker; Hacker, 2003]. Más recientemente, E. Kanterian, en *Gottlob Frege: A Guide for the Perplexed* [Kanterian, 2012, pp. 128-129], contempla la necesidad de que cada función de *Begriffsschrift* asigne un valor, ya sea un objeto del universo o un valor de verdad, una vez se combina con un argumento adecuado.

[30] Precisamente, éste es exactamente el aspecto que Frege enfatiza cuando compara los dos conceptos de función en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift':

> "Use is made here of the generalized concept of a function explained in §§9 and 10 of the *Begriffsschrift*. According to that, you can render $X(\mathit{\Delta})$: $\mathit{\Delta}$ has the property X, or falls under the concept X." [Frege, 1880, p. 26]

modo, la mera extensión del dominio de posibles argumentos y valores no explica las diferencias entre estas dos nociones.

Frege toma del análisis el hecho de que en cada expresión aritmética de una función, como es, por ejemplo, '$2x^2+3$', siempre hay un componente que toma valores, esto es, 'x', mientras que el resto permanece fijo. De acuerdo con ello, función y argumento en *Begriffsschrift* sólo están indirectamente relacionados con sus análogos aritméticos[31].

El sentido en el que el esquema función-argumento es más general que el propio de análisis es ejemplificado por parte de Frege en 'Anwendungen der Begriffsschrift' [Frege, 1879b]:

> "According to the more general conception of function [*allgemeinerer Funktionsbegriff*] that I took as a basis, we can regard
>
> $$u + 1 = v$$
>
> as a function of u and v and can therefore view it as a particular case of $f(u, v)$." [Frege, 1879b, pp. 204-205]

En análisis, '$u + 1 = v$' nunca sería vista como una función de dos variables. No obstante, para Frege es perfectamente natural, de acuerdo con lo establecido en *Begriffsschrift*, considerar esta expresión una función de 'u' y 'v', esto es, analizarla como '$f(u, v)$'.

Queremos examinar aún una última diferencia entre las dos nociones de función a las que hemos aludido. En análisis, una función asigna un único número a cada número. Como matemático, Frege necesariamente conocía esta circunstancia fundamental y, por alguna razón, decidió no incorporarla en su concepción de función desarrollada en *Begriffsschrift*; en este texto, una función no asigna un valor a un argumento[32]. Sólo a partir de 1891,

[31] Es significativo y llamativo que nuestra reconstrucción de las dos nociones de función que consideramos coincida con el comentario de C. Th. Michaëlis en su reseña a *Begriffsschrift* [Michaëlis, 1880]:

> The form of the function symbols is the same as the usual one of mathematics. It differs in sense from the mathematical one since it signifies, not the whole of the dependent expression of magnitude, but, unlike the argument, only the invariant part of the expression. Also, the logical function symbol allows interchange of argument and function." [Michaëlis, 1880, p. 215]

No debe ignorarse el hecho de que esta interpretación proviene de un contemporáneo de Frege.

[32] En algunas ocasiones, para ejemplificar en *Begriffsschrift* su distinción entre función y argumento, Frege recurre a la práctica matemática de considerar $f(x)$ como una función *de* x: por ejemplo, "we can consider $\Phi(A)$ as a function *of* the argument Φ" [Frege, 1879a, §10,

como es manifiesto en *Funktion und Begriff* [Frege, 1891, pp. 144-146], Frege generaliza la noción matemática de función de tal modo que asigne objetos, y no únicamente números, a objetos.

1.3.2 Distinción función-argumento y distinción concepto-objeto

Uno de los primeros aspectos que hemos destacado acerca de la distinción entre función y argumento es el hecho de que únicamente se aplica a expresiones; en particular, a aquellas expresiones que han sido presentadas de la forma adecuada. Defendemos que no hay absolutamente ningún indicio en la exposición de Frege que sugiera que esta distinción puede aplicarse en un contexto extra-lingüístico, esto es, que no hay ninguna distinción supra-lingüística con la cual se vincule el esquema función-argumento[33]. De hecho, la analogía entre el análisis en términos de función y argumento, desarrollado en *Begriffsschrift*, y la distinción entre concepto y objeto, desplegada en las obras posteriores de Frege, es problemática. Claramente, estas dos estructuras están relacionadas, pero no hay ninguna razón en absoluto para identificarlas. En realidad, como veremos, hay poderosas razones para defender una clara separación entre ellas.

---

p. 129, cursiva añadida]. Sin embargo, estos ejemplos no son de ningún modo concluyentes respecto a la presencia de valores para las funciones de *Begriffsschrift*. En primer lugar, pueden ser leídos en perfecta coherencia, de acuerdo con nuestra reconstrucción, con el resto de casos en los que el autor se expresa de un modo distinto para ejemplificar la misma distinción. En segundo lugar, si hay un sentido para el cual la combinación de una función y un argumento proporcionan un valor en *Begriffsschrift*, es el resultado trivial de tomar como valor la expresión que se forma a partir de esta combinación. Sería extremadamente difícil explicar el resto de la exposición de Frege acerca del esquema función-argumento asumiendo, para cada función de *Begriffsschrift*, la exigencia de proporcionar un valor no trivial para cada argumento.

[33] Sin embargo, en los trabajos históricos acerca de *Begriffsschrift* ha tenido lugar una relevante controversia acerca de la naturaleza de la distinción función-argumento. M. Dummett, por un lado, y G. Baker y P. Hacker, por el otro, son contendientes prominentes de esta polémica. Véase *Frege: Logical Excavations* [Baker; Hacker, 1984, pp. 104-144] y la sucesión de reseñas y réplicas que generó su publicación: 'An Unsuccessful Dig' [Dummett, 1984], 'Reply to 'Dummett's Dig', by Baker and Hacker' [Dummett, 1988]; y 'Dummett's Dig: Looking-Glass Archeology' [Baker; Hacker, 1987] y 'The Last Ditch' [Baker; Hacker, 1989]. Dummett defiende que la distinción entre función y argumento en *Begriffsschrift* no está asociada a ninguna estructura supra-lingüística. La tesis contraria, según la cual el esquema función-argumento debería aplicarse al significado de expresiones, ha sido defendida más recientemente por Baker en "Function' in *Begriffsschrift*: Dissolving the Problem' [Baker, 2001], por Baker y Hacker in 'Functions in *Begriffsschrift*' [Baker; Hacker, 2003] y por M. Beaney en 'Frege's use of function-argument analysis and his introduction of truth-values as objects' [Beaney, 2007].

Superación del esquema sujeto-predicado

La estructuración en términos de función y argumento desarrollada en *Begriffsschrift* se contrapone a una distinción previa, establecida en términos de sujeto y predicado, que es estándar en la lógica tradicional, de raíz aristotélica. En efecto, Frege rechaza usar indiscriminadamente la distinción entre sujeto y predicado porque el análisis que proporciona no es el adecuado en algunos casos. Según el autor, el análisis en términos de sujeto y predicado permite distinguir entre oraciones complejas que expresan el mismo significado, lo cual, desde una perspectiva lógica, es una desventaja relevante. Siguiendo el ejemplo de Frege [Frege, 1879a, §3, p. 112], a pesar de que los enunciados 'En Platea los griegos derrotaron a los persas' y 'En Platea los persas fueron derrotados por los griegos' difieren en su estructura gramatical, tienen el mismo contenido, por lo que no es conveniente distinguirlos.

En general, Frege considera que dos juicios se pueden diferenciar de dos modos distintos: de forma que las posibles consecuencias que se deducen de ellos (y en conjunción con los mismos juicios en cada caso) coincidan, o de forma que estas posibles consecuencias no sean las mismas. Para el contexto de su conceptografía, sólo es relevante el segundo modo, porque evidencia una diferencia de contenido o, más propiamente, de contenido conceptual (*begrifflicher Inhalt*) [Frege, 1879a, §3, pp. 112-113]. Frege remarca que lo único relevante en un juicio son las consecuencias que pueden inferirse de él; bajo esta perspectiva, la distinción entre sujeto y predicado, tal y como la entiende Frege, permite diferenciar otros elementos (como el énfasis que el hablante quiere transmitir al interlocutor), por lo que carece de interés:

> "In [ordinary] language, the subject-place has the significance [*Bedeutung*] in the word-order of a *special* place where one puts what he wishes the listener to particularly heed (...). Now all aspects of [ordinary] language which result only from the interaction of speaker and listener—for example, when the speaker considers the listener's expectations and tries to put them on the right track even before speaking a sentence—have nothing corresponding to them in my formula language, because here the only thing considered in a judgement is that which influences its *possible consequences*. Everything necessary for a correct inference is fully expressed; but what is not necessary usually is not indicated; *nothing is left to guessing*." [Frege, 1879a, §3, p. 113]

Frege no es contrario, sin embargo, al uso de la distinción tradicional en casos de enunciados atómicos no relacionales, de la forma '*a* tiene la propiedad P'. Precisamente, no ofrece argumentos que muestren la superioridad de su análisis respecto al que resulta de aplicar el esquema sujeto-predicado en estos contextos atómicos no relacionales. Por ejemplo, veremos que el autor identifica, por lo que respecta al tratamiento de la conceptografía, 'Ningún M es P' con 'Ningún P es M', porque no manifiestan ninguna diferencia en su significado.

La explicación de Frege respecto al abandono de la distinción entre sujeto y predicado es coherente con la idea fundacional que sustenta la creación del lenguaje de la conceptografía: su principal motivación, como se tratará en la sección 3.2, es la de permitir la expresión de contenido de naturaleza científica, de modo que sea posible capturar las relaciones lógicas que lo estructuran y posibilitar, con ello, una argumentación rigurosa. Así pues, parece natural que Frege manifieste la voluntad de retener del contenido de un juicio sólo aquella información relevante para tal cometido, ya que es aquella la que recibe una expresión exacta y completa con la conceptografía.

Ya hemos establecido qué entendemos informalmente por 'contenido': en el contexto de este trabajo, el contenido es o bien aquello que expresan los enunciados o bien la denotación de los términos. La única marca definitoria que proporciona Frege es la mencionada, esto es, que el contenido conceptual de un juicio determina las consecuencias lógicas que pueden extraerse de él.

Función-argumento y concepto-objeto

Muchos de los argumentos que defienden una estrecha analogía entre los esquemas función-argumento y concepto-objeto toman como esencial la noción de contenido conceptual. Por ejemplo, autores como G. Baker, E. Kanterian, M. Textor o J. Weiner argumentan en favor de la presencia de un isomorfismo entre la estructura lingüística de las expresiones, articulada mediante la distinción entre función y argumento, y la estructura semántica de este contenido[34]. De acuerdo con esta perspectiva, se arguye que el valor de las funciones de *Begriffsschrift* es un contenido conceptual. Ésta es la posición de J. Weiner en *Frege Explained* [Weiner, 2004]:

> "Although the notion of function is not much developed in *Begriffschrift*, Frege already identified concepts as functions there and indicated what their values are. The value of *is a planet* for the Earth as argument is,

[34] Véase "Function' in *Begriffsschrift*: Dissolving the Problem' [Baker, 2001, pp. 537-538], *Frege: A Guide for the Perplexed* [Kanterian, 2012, p. 139], *Frege on Sense and Reference* [Textor, 2011, pp. 76-77] y *Frege Explained* [Weiner, 2004, pp. 76-77], respectivamente.

> according to the views of *Begriffsschrift*, the conceptual content of the sentence, 'The Earth is a planet'." [Weiner, 2004, pp. 76-77]

Realizaremos dos comentarios de naturaleza distinta contra esta posición. Con ellos, discutiremos nuevamente la naturaleza de la distinción entre función y argumento y el papel que juegan las letras de la conceptografía en un análisis en términos de función y argumento.

En primer lugar, la distinción entre función y argumento no demarca dos tipos de entidades en el mundo, como sucede con la distinción entre función y objeto en *Grundgesetze*. No hay ninguna evidencia en *Begriffsschrift* que permita concluir que función y argumento son categorías ontológicas. Es más, no hay una correspondencia directa entre una descomposición en términos de función y argumento y la estructura ontológica expresada por un enunciado. En otras palabras, la distinción entre función y argumento no está determinada por la denotación de los componentes de una expresión analizada[35].

Ya hemos planteado que la estructura función-argumento no es absoluta: un componente que en un contexto determinado ha sido tomado como función puede considerarse el argumento en otra circunstancia. Sin embargo, en el plano ontológico, un objeto individual no puede desempeñar el rol de un predicado. Dicho de otro modo, tratar los objetos como propiedades, como hicieron los lógicos algebristas, es tanto como identificar el objeto con la clase unitaria del mismo. Una consecuencia directa de esta circunstancia es que el esquema función-argumento no puede reflejar la estructura semántica de los juicios atómicos. La expresión 'Sócrates es mortal' puede ser analizada de modo que o bien 'Sócrates' o bien 'es mortal' sean el argumento[36]. Sin embargo, ni Sócrates puede verse como una propiedad en el enunciado 'Sócrates es mortal' ni la propiedad de ser mortal puede ser su objeto: no sólo es imposible, sino que además carece por completo de sentido. Esto muestra que la analogía entre una propiedad o concepto y una función, y

[35] Un análisis histórico cuidadoso de las fuentes muestra que, en general, la defensa de una analogía entre, por un lado, la posición posterior de Frege acerca de las nociones de concepto y objeto y, por el otro, su planteamiento de función y argumento en *Begriffsschrift* (una analogía que se defiende, por ejemplo, con la finalidad de mantener una deseable uniformidad en el pensamiento de Frege) está fuera de lugar. Véanse los comentarios opuestos a esta analogía de H. Sluga en *Gottlob Frege. The Arguments of the Philosophers* [Sluga, 1980, p. 139], W. Kienzler en *Begriff und Gegenstand* [Kienzler, 2009, p. 57] y, especialmente, R. Heck y R. May en 'The Function is Unsaturated' [Heck; May, 2013, pp. 826-827].

[36] R. Heck y R. May ofrecen una explicación equivalente de un enunciado análogo en 'The Function is Unsaturated' [Heck; May, 2013, pp. 830-831].

entre un objeto y un argumento es, en general, difícil de mantener, aunque pueda ser útil bajo ciertas circunstancias. Podría aplicarse un razonamiento análogo a enunciados relacionales como '$3 > 2$'.

Es significativo que, cuando Frege trata de explicar la distinción entre concepto y objeto o individuo, como hace, poco después de la publicación de *Begriffsschrift*, en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880, pp. 16-18], no recurra al esquema función-argumento[37]. Dado que en *Begriffsschrift* Frege no se preocupa por la semántica de su sistema formal, esta carencia de la distinción entre función y argumento no es perjudicial, sino que, de hecho, la flexibilidad de su aplicación supone una ventaja importante. Pero a partir de 1880, como se discutirá en el capítulo 5, el autor manifiesta una preocupación creciente por estas cuestiones semánticas y, en particular, por la necesidad de que la conceptografía sea capaz de expresar la diferencia entre objeto y concepto, para que ambas entidades no puedan ser confundidas.

En segundo lugar, un análisis cuidadoso de las demostraciones de *Begriffsschrift* permite apreciar dos características fundamentales del lenguaje formal que son habitualmente ignoradas y que, además, son incompatibles con la defensa de que la distinción entre función y argumento es de naturaleza ontológica: las letras de la conceptografía pueden tener instancias de naturaleza muy distinta y, lo que es más importante, las fórmulas de este sistema formal posibilitan una variedad tal de lecturas distintas que propiamente no se les puede asignar un significado concreto.

Consideremos la expresión '$f(a)$'. Esta expresión representa la forma básica de toda fórmula de la conceptografía. Manifiesta, simplemente, una división no absoluta entre sus componentes: tanto 'f' como 'a' pueden ser argumento. Tal es la flexibilidad de esta estructura, y la ambigüedad que expresan las letras 'f' y 'a', que puede decirse que toda proposición de la conceptografía es una instancia de '$f(a)$'. Esta circunstancia es, preliminarmente, difícil de conciliar con la presunción según la cual '$f(a)$' expresa necesariamente y en cualquier circunstancia el hecho extra-lingüístico de que cierto objeto tiene una propiedad. En realidad, lo único que puede decirse de 'a' es que es una expresión y de '$f(a)$' que es una expresión en la que 'a' aparece. Desde una perspectiva moderna, determinar a qué expresiones de la lógica actual corresponde '$f(a)$' depende de las circunstancias en las que esta

[37]El hecho de que Frege no aluda, en los artículos elaborados inmediatamente tras la publicación de *Begriffsschrift*, a la distinción entre función y argumento cuando pretende explicar la estructura concepto-objeto es una indicación ulterior contra la posición de G. Baker y P. Hacker en 'Functions in *Begriffsschrift*', según la cual "he [Frege] tied his concept of a function to concept formation" [Baker; Hacker, 2003, p. 283].

expresión aparece. Así, por ejemplo, cada una de las siguientes expresiones de un lenguaje formal actual pueden corresponder a ‘$f(a)$’:

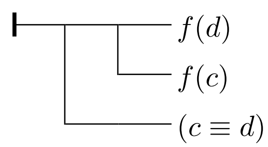
1. Ft,
2. $\phi(t)$,
3. $\phi(X)$[38],
4. $\Phi(\phi)$,

donde ‘Ft’ es un término formado por la variable funcional ‘F’ y el término ‘t’; ‘$\phi(t)$’ es una fórmula en la que aparece el término ‘t’; ‘$\phi(X)$’ es una fórmula en la que aparece la variable de predicado ‘X’; y ‘$\Phi(\phi)$’ es una fórmula que tiene a ‘ϕ’ como subfórmula.

En los lenguajes formales actuales no existe una distinción análoga a la estructuración sintáctica fregeana en función y argumento. El modo más natural de emular parcialmente la distinción de Frege consiste en especificar el argumento como variable libre, como haremos en otros ejemplos.

Con el propósito de ejemplificar las posibles lecturas de una fórmula de la conceptografía, recurriremos ahora a la Proposición (52) de *Begriffsschrift*:

Pr. (52)



(1.1)

Esta proposición es una ley básica de la conceptografía y tiene distintas lecturas. Expresaremos cada una de ellas, de nuevo, en un lenguaje formal actual.

De acuerdo con la primera lectura, ‘c’ y ‘d’ pueden verse como variables individuales; ésta es la interpretación habitual cuando se reconstruye la conceptografía como un sistema formal para la lógica de primer orden. En tal caso, ‘f’ se interpretaría como una variable para fórmulas y, por tanto, ‘$f(c)$’ y ‘$f(d)$’ como fórmulas en las que ‘c’ y ‘d’ aparecen como variables libres. Así pues, la primera lectura de (52) es la siguiente:

$$x = y \to (\phi(x) \to \phi(y)). \tag{1.2}$$

Un caso particular de esta lectura consiste en tomar ‘f’ como variable de predicado:

$$x = y \to (Xx \to Xy). \tag{1.2$'$}$$

[38] Nótese que tanto ‘$\phi(t)$’ como ‘$\phi(X)$’ pueden ser fórmulas atómicas. Así, ‘Xx’ o ‘Xy’, respectivamente, pueden ser, si el contexto así lo indica, instancias adecuadas.

La segunda lectura para (52) consiste en interpretar proposicionalmente las letras 'c' y 'd'. Así, 'f' no puede ser de ningún modo una variable de segundo orden. De hecho, no tiene un equivalente en el lenguaje formal: debe ser vista como una expresión en la que una subfórmula es reemplazada por una fórmula lógicamente equivalente. Así pues, (52) también puede leerse como la fórmula siguiente:

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \to (\Phi(\phi) \to \Phi(\psi)), \tag{1.3}$$

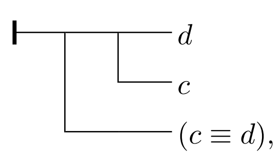
que expresa, intuitivamente:

Si ϕ y ψ tienen el mismo contenido, entonces si $\Phi(\phi)$, $\Phi(\psi)$.

En las lecturas expresadas por (1.2$'$) y (1.3) puede apreciarse que el símbolo de igualdad de contenido '$\equiv$' tiene dos interpretaciones distintas: igualdad entre términos o bicondicional. La fórmula (1.4), que consideraremos a continuación y que procede de un ejemplo tomado de *Begriffsschrift*, muestra que la lectura de (52) como (1.3) se corresponde con la práctica de Frege. Hemos avanzado esta circunstancia en el apartado 1.2.4.

Los procesos de substitución de la conceptografía demuestran la variedad de instancias de naturalezas distintas que puede tener una letra determinada. En la lógica moderna, hay una total uniformidad en las substituciones: las variables individuales son reemplazadas por términos, las variables proposicionales se substituyen por fórmulas complejas, y así sucesivamente. Sin embargo, la práctica de Frege en *Begriffsschrift* no muestra la misma uniformidad; muchas substituciones involucran, de acuerdo con los estándares actuales, un cambio de interpretación de la fórmula original. No obstante, desde el punto de vista de *Begriffsschrift*, estas substituciones únicamente implican una restricción en las posibles lecturas que una fórmula puede tener.

Ejemplificaremos este planteamiento con una substitución llevada a cabo por Frege en algunas demostraciones. La fórmula siguiente:



(1.4)

se obtiene reemplazando en (52) '$f(c)$' por 'c' y $f(d)$' por 'd', eso es, mediante la substitución de '$f(\alpha)$' por 'α'. Frege recurre a esta substitución sólo en aquellos contextos en los que las letras para argumento se interpretan proposicionalmente. De acuerdo con esta interpretación, '$f(\alpha)$' es una expresión en la que aparece 'α'; en particular, puede ser la misma 'α'[39].

La Proposición (52) puede leerse como (1.2) o como (1.3) y, sin embargo, la fórmula (1.4) admite únicamente una interpretación proposicional. A través de la transición de (52) a (1.4), podemos apreciar que es difícil determinar la naturaleza de las instancias de 'f' en (52): esta letra ha sido eliminada en la substitución de la que resulta (1.4) (que, por lo demás, desde el punto de vista de Frege es un cambio aceptable), de modo que difícilmente puede tomarse como una letra que refiere a propiedades.

Podemos extraer dos conclusiones a partir de este último comentario. En primer lugar, una letra determinada de la conceptografía no tiene por qué tener instancias de una tipo particular y fijado. Al contrario, puede ser interpretada de modos muy diversos[40]. Además, las letras no tienen un rol específico y fijado en cada una de las posibles descomposiciones. Una letra funcional puede ser el argumento de una proposición y una letra para argumento puede tomarse como la función en algunos contextos. Naturalmente, el hecho de que la distinción entre función y argumento no sea, en este sentido, absoluta no niega el hecho de que, de acuerdo con un análisis inicial de una expresión como '$f(a)$', 'f' sea tomada como la función y 'a' como el argumento.

En segundo lugar, la multitud de posibles lecturas que posibilita una letra de la conceptografía muestra la enorme generalidad que dicha letra expresa, que Frege no sólo no pretende evitar, sino que, por el contrario, es vista como una ventaja fundamental. Esta generalidad es una prueba fehaciente de la

[39] La substitución de '$f(\alpha)$' por 'α' es perfectamente natural cuando se interpreta '$f(a)$' como una fórmula que contiene una subfórmula, esto es, como '$\Phi(\phi)$'. Esta substitución tiene lugar en la derivación de la Proposición (68), que consideraremos en el apartado 1.4.1.

[40] Esta conclusión puede reforzarse considerando la fórmula siguiente:

$$\vdash\!\!\begin{array}{l} (f(c) \equiv f(d)) \\ (c \equiv d). \end{array} \qquad (1.5)$$

Esta proposición no aparece en *Begriffsschrift*, pero se demuestra fácilmente, mediante la aplicación sucesiva de Modus Ponens y las Proposiciones (1), (54) y (2) [Frege, 1879a, §14, §21 y §14, p. 137 y p. 162], que es un teorema de la conceptografía. Es posible extraer lecturas análogas a (1.2) y (1.3) a partir de (1.5) y, adicionalmente, la letra 'f' puede interpretarse como una variable funcional. En tal caso, 'c' y 'd' deben tomarse como variables individuales. Por tanto, la fórmula (1.5) también podría leerse como sigue:

$$x = y \to Fx = Fy.$$

plasticidad que exhiben las letras de la conceptografía, así como también una poderosa razón contra la tesis de que las expresiones de la conceptografía poseen un significado concreto y determinado, cuya estructura es reflejada por su descomposición lingüística.

Función y argumento en la aplicación de la conceptografía

La discusión acerca de la naturaleza de las funciones en *Begriffsschrift* está basada por lo general casi exclusivamente en la explicación de Frege de esta noción en el capítulo I de este texto. Sin embargo, este capítulo introductorio no contiene propiamente conceptografía. Frege recurre a ejemplos del lenguaje natural para asistirse en su explicación y estos ejemplos son vistos por los defensores de la interpretación supra-lingüística de la estructura función-argumento como los únicos representantes y, de hecho, como el único objeto, del análisis de Frege. Si su posición fuese correcta, la interpretación semántica de la distinción entre función y argumento que estos ejemplos particulares sugieren debería ser reproducible en la conceptografía y, sin embargo, no lo es. A pesar de que comentadores como G. Baker defienden que la exposición de Frege en los párrafos §§9-10 de *Begriffsschrift* debe aplicarse a juicios expresados en el lenguaje de la conceptografía, sus argumentos no se aplican propiamente a la conceptografía pura, sino a cierta complementación de su lenguaje con el de una disciplina científica en particular[41]. En este apartado discutiremos cómo debe entenderse esta complementación y por qué únicamente en su contexto tiene sentido considerar el significado de las fórmulas de la conceptografía. Evaluaremos, adicionalmente, el modo mediante el cual la distinción entre función y argumento puede reflejar, en la complementación de la conceptografía con una disciplina, la estructura semántica de este significado.

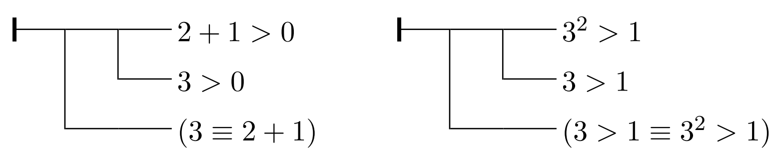
El lenguaje de la conceptografía no debe verse como un lenguaje formal en el sentido moderno, sino como una herramienta para la expresión rigurosa de las relaciones lógicas que vinculan enunciados de una disciplina científica (paradigmáticamente, la aritmética). Desde esta perspectiva, este sistema formal, obviando momentáneamente el contenido de los capítulos II y III de *Begriffsschrift*, puede ser visto como un medio para desarrollar una disciplina como la aritmética, sin que ello conlleve realizar una simbolización o una reducción. La conceptografía, por un lado, permite expresar todas las relaciones lógicas que hay entre enunciados aritméticos y, por el otro, hace patente que toda demostración matemática puede ser formulada como una

[41] Véase "Function' in *Begriffsschrift*: Dissolving the Problem' [Baker, 2001, pp. 528-529].

serie regimentada de pasos estrictamente regulados por un pequeño conjunto de reglas de inferencia. Así, la conceptografía elimina cualquier rastro de lenguaje natural de la aritmética. El resultado de esta complementación, como consideraremos con detalle en la sección 3.3, era conocido como *logística*.

En logística, los símbolos de una disciplina en particular se complementan con los símbolos lógicos y las letras de la conceptografía. El resultado es un lenguaje regimentado al que puede aplicarse de modo natural los recursos formales de la conceptografía. En particular, todas las expresiones pueden ser analizadas en términos de función y argumento, ya que la conceptografía permite presentarlas de un modo adecuado, esto es, de tal manera que su forma lógica sea patente. Además, dado que el significado de los enunciados de una disciplina está estructurado, de acuerdo con su propia semántica, en términos de conceptos, propiedades y objetos, no es sorprendente hallar ciertas analogías entre la descomposición en términos de función y argumento y la estructura semántica de un enunciado de la esta disciplina.

Si consideramos expresiones de conceptografía pura, debería admitirse que los únicos símbolos no lógicos que aparecen en ellas son letras y que, por tanto, carecen de interpretación. Estas expresiones no aparecen en la aritmética formalizada, puesto que son componentes de una suerte de superestructura o metalenguaje. Dado que, por ejemplo, la Proposición (52) no está expresada en un lenguaje logístico, no hay un vínculo directo entre sus símbolos y un contenido semántico concreto: esta fórmula está ideada para complementarse con el lenguaje de una disciplina. Sólo los símbolos de este lenguaje aplicado y, consecuentemente, sus fórmulas, pueden expresar rigurosamente el significado específico que concierne a esta disciplina. En este sentido, la relación que guardan las fórmulas de la conceptografía pura y un significado específico es meramente indirecta. Un ejemplo puede clarificar nuestra posición. Consideremos las siguientes instancias de (52):



Como este ejemplo muestra, la ambigüedad que exhiben las fórmulas de la conceptografía es una ventaja clave cuando este sistema formal es usado como logística. De acuerdo con ello, la posibilidad de aplicar fructíferamente y con naturalidad los recursos formales de la conceptografía a una disciplina en particular se debe al hecho de que las expresiones de la conceptografía pura no tienen un significado concreto y fijado, y pueden ser interpretadas de modos distintos.

1.4 Reconstrucción de la noción de generalidad

En el apartado 1.2.6 hemos considerado la exposición por parte de Frege de la noción de generalidad. Esta exposición ha posibilitado completar el análisis en términos de función y argumento de enunciados complejos y plantear cómo se expresan en la conceptografía juicios categóricos.

Sin embargo, una vez se ha discutido la naturaleza de la distinción entre función y argumento y se ha defendido su carácter exclusivamente lingüístico, es preciso seguir evaluando la noción de generalidad de *Begriffsschrift*. Ofreceremos en esta sección una reconstrucción que pretende ser fiel a la exposición de Frege en el texto de 1879.

1.4.1 Generalidad de las letras

Muchos de los comentaristas actuales defienden que los cuantificadores de la conceptografía están interpretados sobre un dominio universal. Ahora bien, la formulación explícita por parte de Frege del símbolo de generalidad es la siguiente:

> "In the expression of a judgement we can always regard the combination of symbols to the right of $\vdash\!\!\!-\!\!\!-$ as a function of one of the symbols occurring in it. *lf we replace this argument by a German letter and introduce in the content stroke a concavity containing the same German letter, as in*
>
> $$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a}),$$
>
> *then this stands for the judgement that the function is a fact whatever we may take as its argument.* Since a letter which is used as a function symbol, like Φ in $\Phi(A)$, can itself be considered as the argument of a function, it can be replaced by a German letter in the manner just specified." [Frege, 1879a, §11, p. 130]

Tras esta explicación del significado de los cuantificadores de la conceptografía, que ya hemos considerado, Frege especifica ciertas condiciones que se aplican a las instancias de una letra cuantificada. Tal y como hemos defendido en el apartado 1.3.2, la generalidad que expresan las letras cuantificadas debería interpretarse sintácticamente. Las condiciones que plantea Frege permiten entender cómo debe manejarse dicha generalidad:

> "The meaning of a German letter is subject only to the obvious restrictions that [1] the assertibility (§2) of a combination of symbols following the content stroke must remain intact, and [2] if the German letter

> appears as a function symbol, this circumstance must be taken into account." [Frege, 1879a, §11, p. 130]

Desviándonos de la interpretación tradicional de este elemento fundamental de la conceptografía, defendemos que, siguiendo lo establecido por Frege en estas dos citas, su planteamiento de la cuantificación en *Begriffsschrift* puede sistematizarse del modo siguiente:

(∗) Si '$f(a)$' es una expresión aseverable en la que la letra 'a' es el argumento, el juicio:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- f(\mathfrak{a})$$

expresa que $f(A)$ es un hecho para cualquier argumento 'A' que pueda ocupar la posición de '$\mathfrak{a}$' conservando la aseverabilidad del juicio.

Este modo unitario de reconstruir la cuantificación puede ser aplicado con naturalidad a cualquier tipo de argumento. En particular, Frege introduce una nueva letra funcional, 'F', que usa únicamente en el capítulo III de *Begriffsschrift*. Como Frege menciona, las letras funcionales como 'F' también pueden ser tomadas como argumento por lo que pueden ser reemplazadas por una letra gótica correspondiente[42]. En este sentido, la cuantificación sobre letras funcionales debe ser vista como un caso particular de (∗). Así pues:

(∗∗) Si '$f(F)$' es una expresión aseverable en la que 'F' es el argumento, el juicio:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!- f(\mathfrak{F})$$

expresa que $f(B)$ es un hecho para cualquier argumento 'B' que pueda ocupar la posición de '$\mathfrak{F}$' conservando la aseverabilidad del juicio.

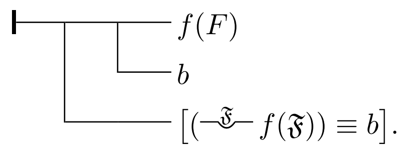
La transición de (∗) a (∗∗) es simplemente una cuestión de aplicación. Por tanto, no es sorprendente que en la derivación de la Proposición (77), Frege proponga aplicar la Proposición (68):

Pr. (68)

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!\!-\!\!\top\!\!\!-\!\!- f(c) \\ \quad\;\; |\quad\; \llcorner\!\!-\!\!- b \\ \quad\;\; \llcorner\!\!-\!\!-\!\!- \left[(-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- f(\mathfrak{a})) \equiv b\right], \end{array} \tag{1.6}$$

[42]El primer uso de la cuantificación sobre letras funcionales en *Begriffsschrift* puede hallarse en la Proposición (76).

del modo siguiente:



(1.7)

Es significativo que, a pesar de que Frege prueba propiamente (68), usa esta proposición como figura en (1.7); esto sucede, precisamente, en la demostración de la Proposición (77), que trataremos con más detalle en el apartado 2.4.2. Al fin y al cabo, la expresión siguiente:

$$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\, f(\mathfrak{a})$$

tiene como instancia cualquier fórmula cuantificada. De acuerdo con ello, '$\mathfrak{a}$' representa cualquier argumento y, en particular, '$\mathfrak{a}$' puede ser una letra funcional: esta circunstancia se ha hecho explícita en la transición de (68) a (1.7)[43]. Discutiremos en el siguiente apartado la relación que guardan la cuantificación sobre letras para argumento y la cuantificación sobre letras funcionales.

Ya hemos mencionado que la distinción entre función y argumento no es absoluta: un símbolo funcional 'Φ' puede ser el argumento de una expresión como '$\Phi(A)$', independientemente del hecho de que, en otros contextos, sea tomado como su función. Dado que la cuantificación de 'Φ' en una expresión como '$\Phi(A)$' consiste en la cuantificación de una letra funcional, puede ser expresada en el lenguaje de la conceptografía del modo siguiente:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!-\, \mathfrak{F}(a).$$

Este juicio expresa que $\Phi(a)$ es un hecho para cualquier argumento 'Φ' que pueda ocupar la posición de '$\mathfrak{F}$' conservando la aseverabilidad del juicio[44].

Estamos en disposición de explicar cómo la reconstrucción propuesta en (∗) puede articularse con la explicación de Frege acerca de las restricciones que deben respetar las instancias de una letra cuantificada. En primer lugar, Frege introduce un criterio general para limitar las posibles instancias de una letra cuantificada, según el cual: "the assertibility (§2) of a combination of

[43]Solo hemos indicado alguna de las substituciones que afectan a (68) en la demostración de la Proposición (77). En particular, Frege substituye 'f' por una instancia compleja.

[44]Una expresión como '$f(a)$' consiste en dos componentes distintos, y cualquiera de ellos puede ser tomado como su argumento para ser cuantificado. El caso (∗) representa genéricamente la cuantificación de un argumento, sea cual sea su naturaleza. Por lo tanto, esta última forma de cuantificación es únicamente un caso particular de (∗).

symbols following the content stroke must remain intact" [Frege, 1879a, §11, p. 130]. Por consiguiente, el autor advierte del hecho de que las instancias aceptables para una cuantificación son exactamente aquellas que permiten formar un contenido aseverable una vez son añadidos al componente funcional.

La segunda restricción, en palabras de Frege, plantea que "if the German letter appears as a function symbol, this circumstance must be taken into account." [Frege, 1879a, §11, p. 130]. Desde un punto de vista sintáctico, dado que en estos casos las letras funcionales son tratadas como argumento, esta cuantificación es esencialmente equivalente a la cuantificación sobre letras para argumento. Pero hay que considerar dos circunstancias particulares que afectan únicamente a las letras funcionales: la ariedad de estas letras y la especial aseverabilidad de la expresión cuantificada para toda instancia de cuantificación.

La expresión mínima de la conceptografía es una letra funcional junto a una letra para argumento, o junto a varias de ellas, encerrada entre paréntesis, '$f(a)$'. Independientemente de su rol como función o como argumento, las letras funcionales figuran junto a letras de argumento entre paréntesis. El número de estas letras para argumento determina la ariedad de la letra funcional. Así, toda instancia de cuantificación de una letra funcional debe tener la misma ariedad que la letra funcional cuantificada. De acuerdo con ello, por ejemplo, una letra funcional binaria no es una instancia aceptable de una letra funcional unaria cuantificada. Además, tal y como veremos en un ejemplo en el siguiente apartado, el componente funcional de la expresión debe adaptarse bajo determinadas circunstancias al hecho de que la letra funcional cuantificada figure junto al número de letras para argumento correspondiente a su ariedad. De hecho, esta circunstancia determina ulteriores limitaciones con el objetivo de preservar la aseverabilidad de toda la expresión en la que aparece la cuantificación.

Un ejemplo va a ser de ayuda para clarificar nuestra exposición acerca de esta última limitación. Las instancias aceptables de la letra funcional cuantificada en el juicio:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!-\mathfrak{F}(a),$$

son expresiones unarias como '$g(\alpha)$', '$2 + \alpha > 3$', 'si α es múltiplo de 4, entonces α no es primo' o incluso:

$$\begin{array}{l} \text{———}\!\!\!\!\top\!\text{——}\ \alpha \\ \qquad\ \ \llcorner\text{——}\ \alpha, \end{array}$$

donde propiamente la conectiva es una instancia de '$\mathfrak{F}$'. Ahora bien, 'a' no es una instancia aceptable de '$\mathfrak{F}$'. De este modo, la función permite que otras letras funcionales unarias, o incluso expresiones complejas, puedan ocupar el lugar de '$\mathfrak{F}$' como instancias de cuantificación. Todas y cada una de estas instancias pueden ser esquematizadas mediante '$\varPhi(\alpha)$'.

1.4.2 Elementos sintácticos de la cuantificación fregeana

Nuestra exposición de la noción de generalidad puede complementarse considerando dos aspectos particulares: el carácter específico de la cuantificación de letras funcionales y la noción de aseverabilidad.

Cuantificación de letras funcionales

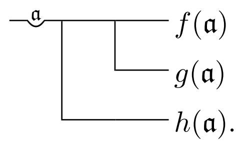
En primer lugar, debe ser claro que la propuesta de un caso particular de $(*)$ como es $(**)$ no plantea una jerarquía de cuantificación. El hecho de hacer explícito el caso $(**)$ obedece a la conveniencia de proporcionar un tratamiento específico de las letras funcionales. De hecho, el carácter específico de estas letras ha sido desarrollado en el apartado anterior, 1.4.1. Sin embargo, las particularidades de la cuantificación sobre letras funcionales no modifican de ningún modo el planteamiento unitario de Frege[45].

Un ejemplo permitirá mostrar claramente que Frege no contempla que haya una diferencia substantiva entre la cuantificación sobre letras funcionales y la cuantificación sobre letras para argumento. En las derivaciones contenidas en los capítulos II y III de *Begriffsschrift*, el autor indica las expresiones por las cuales deben substituirse algunas de las letras de las proposiciones consideradas. Como expondremos en el apartado 2.3.3, los procesos de substitución, dado que las letras expresan generalidad, pueden verse como instanciaciones. Así pues, considerando las substituciones se dispone de un testimonio claro y fiable del modo como Frege concibe la cuantificación.

[45] En coherencia con lo que hemos planteado, C. Thiel defiende en 'From Leibniz to Frege: Mathematical Logic between 1679 and 1879' que la cuantificación de *Begriffsschrift* es ambigua [Thiel, 1982, p. 766].

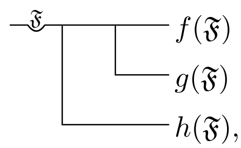
De acuerdo con otra línea de argumentación, S. Russinoff afirma en 'On the Brink of a Paradox?' [Russinoff, 1987, p. 128], siguiendo parcialmente lo que G. Boolos sugiere en 'Reading the *Begriffsschrift*' [Boolos, 1985, p. 339], que la cuantificación sobre letras funcionales es un caso particular de la cuantificación sobre letras para argumento. Su posición parece basarse en el hecho de que $(**)$ es un caso particular de $(*)$. Ahora bien, de acuerdo con el planteamiento de Russinoff, las instancias de las letras funcionales son propiedades y relaciones, mientras que las letras para argumento toman valores entre la totalidad de entidades del universo. Discutiremos la presencia de un dominio preestablecido para las letras para argumento en el apartado 1.5.3.

En la demostración de la Proposición (93), el autor propone ciertas modificaciones a una de las premisas, la Proposición (60). Para simplificar nuestra explicación y, dado que trataremos con detalle esta demostración más adelante, consideraremos estas substituciones únicamente en el antecedente de (60):



(1.8)

Frege aplica (1.8) en la derivación del modo siguiente:



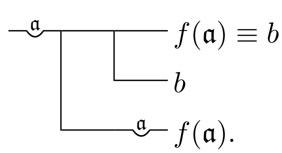
(1.9)

que resulta de reemplazar '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$'.

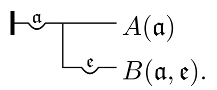
La cuantificación de '$\mathfrak{F}$' en la fórmula (1.9) debe verse como un ejemplo de nuestra reconstrucción general. Este cambio, como veremos a continuación, tiene implicaciones en las instancias de 'f', 'g' y 'h'.

Aseverabilidad

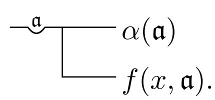
Las dos condiciones que Frege especifica respecto a las instancias de las letras cuantificadas tienen como elemento central la noción de *aseverabilidad*, de la que nos ocuparemos en segundo lugar. Que un contenido pueda ser convertido en un juicio y, por tanto, pueda considerarse aseverable, es una cuestión que merece comentarios. El autor no proporciona explicación al respecto. En la conceptografía parece haber exclusivamente criterios sintácticos para evaluar la aseverabilidad de una expresión; criterios que, por ejemplo, establecen la correcta formación de una fórmula compleja o que regulan las substituciones posibles. La siguiente fórmula es un ejemplo de expresión no aseverable en la conceptografía:



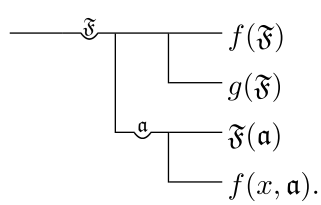
Esta expresión contiene un conflicto en el alcance de dos cuantificadores de la misma letra gótica, '$\mathfrak{a}$'[46]. Frege explícitamente descarta la posibilidad de un conflicto tal:

> "The scope of one German letter can include that of another, as is shown by the example
>
> 
>
> In this case, *different* letters must be chosen; we may not replace $\mathfrak{e}$ by $\mathfrak{a}$." [Frege, 1879a, §11, p. 131]

Más allá de esta particular circunstancia, hay considerar qué quiere decir conservar la aseverabilidad en una fórmula cuantificada. Recuperemos las substituciones sobre la fórmula (1.8) que dan lugar a (1.9). Desde un punto de vista sintáctico, el cambio de una letra para argumento por una letra funcional involucra, por un lado, la necesidad de considerar la ariedad de la letra funcional y, por el otro, adaptar el resto de la expresión a la circunstancia de que la letra cuantificada es funcional. Se trata de preservar la aseverabilidad de la expresión tras la especificación de la letra cuantificada; al fin y al cabo, cuando se considera '$\mathfrak{F}$' como una instancia aceptable de '$\mathfrak{a}$', se especifica que, en este caso particular, la parte variable, esto es, el argumento, es una expresión funcional en sentido matemático. Esta característica del argumento condiciona las substituciones adecuadas para '$f(\mathfrak{F})$', '$g(\mathfrak{F})$' y '$h(\mathfrak{F})$'. En concreto, las instancias adecuadas de estas letras deben ser expresiones en las que '$\mathfrak{F}$' sea usada como se usa una letra funcional unaria en matemáticas. Ejemplificaremos esta circunstancia con '$h(\mathfrak{F})$' (el caso de '$f(\mathfrak{F})$' y '$g(\mathfrak{F})$' es análogo y será objeto de nuestra consideración más adelante). En (1.9), '$h(\alpha)$' es substituida por la expresión compleja:



El resultado de la substitución es el siguiente:



[46] Es conveniente destacar que la ocurrencia de cuantificadores en el alcance de un cuantificador de la misma variable (como en $\forall x(\phi(x) \to \forall x\psi(x)))$ no hace de una expresión una fórmula mal formada en lógica actual.

Con esta substitución se pone de manifiesto tanto que se ha preservado la ariedad de '$\mathfrak{F}$' en '$\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$' como que se ha adaptado la expresión, escogiendo una instancia adecuada de 'h', con el fin de mantener la aseverabilidad de (1.9) tras el cambio de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$'.

La definición de la cuantificación de la conceptografía hace patente el hecho de que Frege presenta la generalidad de un modo exclusivamente sintáctico. Contra lo que parecen sugerir sus ejemplos, que analizaremos pormenorizadamente en el apartado 1.5.5, Frege no ofrece una lectura semántica de los cuantificadores. Así pues, el cuantificador universal es un símbolo con un significado determinado por criterios de aseverabilidad y cuyo funcionamiento en la conceptografía está fijado únicamente por las reglas del cálculo que le afectan. Por consiguiente, cuando un cuantificador aparece en una fórmula dada, se consideran únicamente aquellas expresiones que, de acuerdo con las reglas de inferencia disponibles, pueden ocupar el lugar de la letra cuantificada preservando la aseverabilidad de la fórmula. Las condiciones sintácticas expuestas condicionan el conjunto de expresiones que debe considerarse. Llamaremos '*recorrido*' a este conjunto de instancias aceptables de una letra cuantificada. En la conceptografía considerada como un sistema formal autónomo, no hay una definición de carácter semántico que condicione o limite el recorrido de una letra cuantificada: ni el significado de los cuantificadores ni la interpretación de las letras están determinados en la conceptografía pura por criterios semánticos[47].

Por razones explicativas, hemos considerado la aseverabilidad como criterio para determinar el recorrido de una letra en una fórmula aislada, pero podríamos con más razón plantearla en un marco concreto. Por '*marco*' entendemos cierta colección de fórmulas que se presentan conjuntamente por alguna razón (paradigmáticamente, porque estas fórmulas son premisas o suposiciones en una demostración). En un marco, la interpretación de cada letra debe ser homogénea para que sea consistente con todas las apariciones de la letra en cada una de las fórmulas.

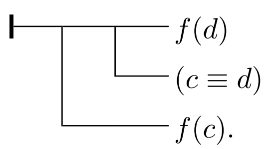
El recorrido de una letra cuantificada, a diferencia del dominio de cuantificación de una variable de la lógica actual, no está determinado de ante-

[47]Tal y como hemos reconstruido la noción de generalidad de la conceptografía, no puede decirse que la cuantificación de *Begriffsschrift* sea substitucional. En particular, el hecho de que las letras de la conceptografía admitan distintas lecturas y que, en consecuencia, no pueda determinarse de antemano un recorrido de expresiones que pueden ocupar el lugar de una letra cuantificada, es completamente incompatible con la posibilidad de interpretar substitucionalmente los cuantificadores de *Begriffsschrift*. Sin embargo, L. Stevenson argumenta en 'Frege's two Definitions of Quantification' [Stevenson, 1973] a favor de la tesis según la cual la cuantificación de este texto es substitucional.

mano. Depende de la fórmula en la que aparece la letra y, en mayor medida, del marco correspondiente. Las letras de la conceptografía expresan tal grado de generalidad que sin un marco concreto no admiten una única interpretación y, por tanto, no se les puede delimitar un recorrido concreto. Un marco indica cómo deben interpretarse las letras de las fórmulas que contiene y, por tanto, posibilita especificar instancias aceptables concretas para cada una de las letras. De este modo, únicamente en presencia de un marco tiene sentido plantearse el recorrido concreto de una letra en particular. En cada marco, el recorrido de cada letra se verá delimitado, adicionalmente, por las condiciones sintácticas planteadas por Frege. Así pues, en nuestro ejemplo anterior, el marco que determina parcialmente la demostración de la Proposición (93) permite, de acuerdo con todas las condiciones sintácticas que hemos señalado, indicar una instancia de substitución concreta de 'h' y descartar lecturas de (1.8) que no son posibles.

Veamos con un nuevo ejemplo cómo un marco delimita el recorrido de instancias adecuadas de una letra. Consideremos la Proposición (53) de *Begriffsschrift*:

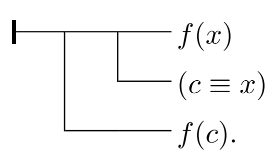
Pr. (53)



(1.10)

De modo análogo a la Proposición (52) (en este capítulo, (1.1)), esta fórmula admite distintas lecturas, por lo que no es posible especificar de antemano el recorrido de cada una de sus letras. Ejemplificaremos dos marcos distintos siguiendo algunas demostraciones de *Begriffsschrift* como guía y veremos no sólo cómo un marco permite delimitar las instancias acecuadas de una letra, sino también cómo marcos distintos pueden determinar recorridos de una misma letra que sean incompatibles entre sí.

El primer marco se obtiene a partir de la derivación de la Proposición (92), donde se usa la Proposición (53) como premisa. Frege propone aplicar ciertas substituciones a (53); en particular, plantea reemplazar 'd' por 'x'. El resultado de esta substitución es la fórmula siguiente:



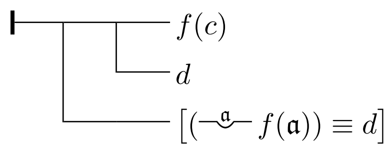
(1.11)

Como explicaremos en el apartado 2.4.1, la letra 'x' se interpreta a lo largo del capítulo III de *Begriffsschrift* como una letra que refiere a objetos.

De hecho, así lo sugiere su uso aritmético. En consecuencia, 'c' también debe leerse como una letra que refiere a objetos. En el marco de la derivación de la Proposición (93), (53) se interpreta como (1.11).

Puede suceder que en un marco las letras 'c' y 'd' tengan una interpretación proposicional. Hallamos en esencia un ejemplo de este tipo en la demostración de la Proposición (68), en la que interviene la Proposición (57), que es similar a (53). El segundo marco está compuesto por la Proposición (68)[48]:

Pr. (68)



(1.6)

y la Proposición (53). Independientemente del provecho que se pueda sacar a este marco, la necesidad de interpretar uniformemente las letras de (53) y (68) implica que las únicas instancias adecuadas para 'c' y 'd' sean fórmulas. Por lo tanto, ni 'g' ni '2', por mencionar dos ejemplos de naturaleza distinta, pertenecen al recorrido de 'd'. Esta circunstancia es coherente con una lectura de la Proposición (53) según el modo establecido por (1.3). Sin una lectura tal, la transición de (52) a (1.4) no sería interpretable.

Ninguna instancia de 'c' propia de este marco es una instancia adecuada para la misma letra en el marco anterior: 'c' no puede substituirse por una fórmula sin afectar a la aseverabilidad de (1.11). De hecho, como estos dos ejemplos muestran, es incluso posible que los recorridos de una misma letra en dos marcos distintos sean completamente disjuntos.

1.4.3 Elementos semánticos de la cuantificación fregeana

En el capítulo II de *Begriffsschrift* la conceptografía es manejada de un modo abstracto y aislado. Pero, tal y como se ha discutido en el apartado 1.3.2, la conceptografía está concebida para complementar disciplinas científicas. Desde este punto de vista, la noción de aseverabilidad que es relevante en *Begriffsschrift* no es únicamente sintáctica.

A la luz del uso de la conceptografía como base para la logística, no es sorprendente que no haya ninguna definición de fórmula atómica en *Begriffsschrift*. El lenguaje de cierto ámbito de conocimiento proporciona un

[48]Hemos substituido en (68) la letra 'b' por 'd'. En la demostración de esta proposición es perfectamente claro que este cambio es meramente notacional y que no afecta en absoluto a la interpretación de (68).

conjunto de símbolos y de reglas sintácticas que permiten formar las expresiones atómicas. Estas expresiones, a su vez, son complementadas con los recursos formales de la conceptografía. Estos recursos hacen posible, por ejemplo, formar expresiones complejas o expresar rigurosamente cuantificaciones. En consecuencia, la ausencia de aquellos elementos semánticos y sintácticos que deberían ser clarificados en la conceptografía es suplida por su aplicación en cierta disciplina.

Un ejemplo particular de esta aplicación tiene lugar en el capítulo III de *Begriffsschrift*. Como veremos en el apartado 2.4.1, en este capítulo Frege, por un lado, introduce nuevas letras, como 'x', 'y' o 'z' (que son interpretadas únicamente como letras que refieren a objetos) o 'F' (que es interpretada como letra que refiere a propiedades), y, por el otro, usa la letra 'f', que en el capítulo II es utilizada como letra funcional unaria que expresa generalidad, como letra binaria genérica que refiere a procedimientos[49]. Estos nuevos símbolos no son propiamente letras de la conceptografía pura, sino símbolos de logística, cuya introducción está fundamentada por una teoría lógica mínima. A pesar de que 'x' o 'f' son letras, en este contexto no poseen tal variedad de lecturas posibles como una letra de la conceptografía pura. De hecho, 'f' no expresa generalidad en el mismo sentido en el que la expresa en la fórmula (1.10), sino en el sentido de ser un procedimiento cualquiera. Así, 'f' expresa generalidad restringida a expresiones que sólo admiten cierto tipo de interpretación. Sin embargo, estas nuevas letras posibilitan formar fórmulas atómicas, como '$f(x, y)$'.

Las disciplinas científicas a las que se adapta la conceptografía determinan un dominio específico de entidades. Los símbolos propios del lenguaje de esta disciplina denotan entidades en este dominio, o relaciones y propiedades aplicadas a los elementos del dominio. La conceptografía no altera la interpretación de estos símbolos, pero posibilita, no obstante, que sus propios símbolos se interpreten de acuerdo con esta disciplina. Así, el significado de los términos adquiridos y el ámbito de aplicación de los conceptos de la disciplina indican cómo deben manejarse las instancias de las letras cuantificadas en el cálculo. De este modo, las condiciones sintácticas de la conceptografía se complementan con otras de naturaleza semántica: única-

[49]A pesar de que 'f' no es propiamente una letra nueva, ya que Frege ha usado esta misma letra a lo largo del capítulo II de *Begriffsschrift*, en el capítulo III 'f' posee características específicas que permiten diferenciar su uso respecto al del capítulo previo: es un símbolo binario que se aplica exclusivamente a objetos. El hecho de que, en la demostración de la Proposición (77), Frege substituya 'f' por una instancia compleja que contiene una aparición de '$f(x, \mathfrak{a})$' es una muestra clara de que en el cálculo son tratadas como letras distintas. Véase nuestra explicación de la demostración de (77) en el apartado 2.4.2.

mente las expresiones con significado de la disciplina en cuestión pueden ser consideradas instancias aceptables. Cualquier disciplina o discurso científico permite especificar de un modo similar la interpretación prevista para las letras de la conceptografía.

En este contexto, la cuantificación es manejada exactamente del mismo modo que en *Begriffsschrift*, esto es, de forma puramente sintáctica, a pesar de que, en términos semánticos, tenga otro significado. El uso de los cuantificadores en el cálculo no sufre absolutamente ningún cambio, aunque éstos hayan sido interpretados para que ciertas condiciones semánticas se añadas a las condiciones sintácticas ya especificadas en el apartado 1.4.1. Ahora bien, la posibilidad de leer los cuantificadores del modo usual en aritmética, como hace Frege en distintas ocasiones en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880, pp. 21-27], no significa que los cuantificadores de la conceptografía pura estén interpretados semánticamente. La cuantificación de una letra en logística involucra, del mismo modo que en un contexto de conceptografía pura, un recorrido de expresiones que pueden ocupar el lugar de la letra. La diferencia entre la cuantificación en logística y la propia de la conceptografía es que las instancias de la última sólo están determinadas sintácticamente, mientras que en la primera también están limitadas por razones semánticas. Retomaremos la cuestión de la complementación de disciplinas científicas con los recursos formales de la conceptografía y la consideraremos en detalle en la sección 3.3.

Las condiciones semánticas que la complementación de la conceptografía con cierto ámbito de conocimiento impone a los cuantificadores afectan de modo general a la aseverabilidad de las letras y, por lo tanto, a la generalidad que expresan. En cada *contexto de aplicación* de los recursos formales de la conceptografía hay una restricción general al recorrido de las letras. Hay contextos de aplicación muy generales, como el capítulo III de *Begriffsschrift*, donde únicamente una serie de condiciones sintácticas limita la generalidad que expresan las letras y, adicionalmente, hay un grupo de letras (como, por ejemplo, 'x' o 'F') que tienen una interpretación única.

Aunque la noción de contexto de aplicación es más general que la de marco, ambas están estrechamente relacionadas: ambas imponen condiciones que limitan la aseverabilidad de las expresiones de la conceptografía y, consecuentemente, la generalidad que expresan las letras. Sin embargo, estas condiciones se aplican de modos distintos. Por un lado, un contexto de aplicación impone una restricción general a las letras de la conceptografía, según la cual éstas, en todas sus apariciones dentro del contexto de aplicación, expresan generalidad únicamente sobre expresiones que conciernen a una disciplina determinada. Esta circunstancia no impide que una misma letra admita distintas lecturas; el contexto de aplicación exige, sin embargo, que todas estas lecturas sean compatibles con el ámbito de conocimiento al que se aplica la conceptografía. Por el otro, un marco, en un contexto de aplicación o en conceptografía pura, impone restricciones de tipo local, que no tienen por qué aplicarse fuera del marco. De hecho, en un mismo contexto de aplicación, por ejemplo, el determinado por la aritmética, puede haber distintos marcos. Así, en el mismo contexto, una instancia aceptable para una letra para argumento puede ser una fórmula de la aritmética en un marco y un numeral en otro marco.

En cualquier caso, determinar los componentes del recorrido de una expresión en un contexto de aplicación concreto es una cuestión delicada. Por esta razón, va a considerarse con detalle más adelante, en la sección 2.3.

1.5 Naturaleza de la cuantificación de *Begriffsschrift*

1.5.1 Introducción

Es posible que las lecturas históricas de *Begriffsschrift* estén influenciadas por las presentaciones modernas de un sistema formal. No sin argumentos, los comentaristas suelen extraer una semántica de *Begriffsschrift*, a menudo coincidente en lo esencial con la propia de un sistema formal de segundo orden. Siguiendo la interpretación habitual de este texto, M. Beaney defiende que Frege ofrece una interpretación semántica de los cuantificadores:

> "In §11, he [Frege] introduces his key symbol for the universal quantifier, which involves inserting in the content stroke a concavity (Höhlung) in which the letter indicating the argument is placed:
>
> $$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a}).$$
>
> This is understood as representing the judgement that 'the function [Φ] yields a fact whatever is taken as its argument', i.e. that everything has the property Φ (for all x, Fx – '$(\forall x)Fx$' as it would be formalized in modern notation)." [Beaney, 1997, pp. 378-379]

Desde la perspectiva de esta interpretación tradicional, que es compartida, por ejemplo, por P. Sullivan[50], es extraordinariamente sorprendente que Frege hubiese desarrollado, ya en 1879, prácticamente todos los elementos que, de acuerdo con los estándares actuales de rigor, un sistema formal

[50] Véase 'Frege's Logic' [Sullivan, 2004, p. 662].

debe poseer. Hasta el momento, hemos tratado de mostrar que muchas de las similitudes que posibilitan esta conclusión son meramente aparentes. Sin embargo, articularemos más adelante, especialmente en los apartados 2.4.2, 4.3.1 y 4.3.2, nuestra posición contra la interpretación de que la conceptografía es un sistema formal de segundo orden. Específicamente, todas las demostraciones y substituciones de *Begriffsschrift* pueden reconstruirse en coherencia con una interpretación fiel de la distinción entre función y argumento y con la particular teoría de la cuantificación que se desarrolla en este texto. Uno de los mayores beneficios de esta perspectiva es que desaparece la necesidad de salvar a Frege de sus propias imprecisiones: cada demostración puede ser explicada con naturalidad sin constreñirse a las herramientas que proporciona un cálculo de segundo orden.

En esta sección defenderemos que la interpretación tradicional es errónea principalmente por su sumisión a una perspectiva moderna en un aspecto particular: la presencia de semántica en la conceptografía.

1.5.2 Interpretación de las letras

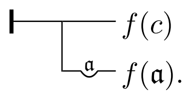
Hay tres aspectos que se pueden discernir en la interpretación tradicional de *Begriffsschrift* y que son relevantes para la discusión presente: las letras para argumento son variables individuales; su dominio es absolutamente universal, esto es, comprende la colección de todos los objetos del universo; y las funciones de *Begriffsschrift*, siendo identificadas con propiedades, pueden ser cuantificadas. El primer y el tercer aspecto van asociados a la defensa de la tesis según la cual la conceptografía de *Begriffsschrift* es un sistema formal de segundo orden. El segundo aspecto, en cualquier caso, forma parte de la interpretación común de los trabajos de Frege.

En lo sucesivo, discutiremos en detalle estos tres aspectos. En primer lugar, nos centraremos en la interpretación de las letras para argumento. En el apartado 1.3.2 hemos planteado que, dejando de lado el fragmento proposicional de la conceptografía[51], la interpretación de las letras para argumento en una fórmula aislada no puede ser uniforme. En este apartado se desarrollará esta conclusión mediante un análisis de cómo la ambigüedad de las letras para argumento persiste en la complementación de la conceptografía con la aritmética.

[51]Esto es, la presentación o derivación de las Proposiciones (1) a (51) de *Begriffsschrift*.

Consideremos la Proposición (58) de *Begriffsschrift*:

Pr. (58)



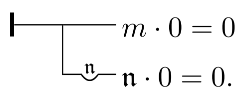
(1.12)

Esta proposición es una ley básica de la conceptografía y una de las más fundamentales en las derivaciones de *Begriffsschrift*. Expresa que:

> No puede afirmarse que $f(\mathfrak{a})$ es un hecho para todo argumento que pueda ocupar la posición de '$\mathfrak{a}$' y, a la vez, negarse que, para un argumento 'c' aceptable cualquiera, $f(c)$ es un hecho.

Esta afirmación es extremadamente general: tiene múltiples aplicaciones. La generalidad de (58) puede ser apreciada en los teoremas que se deducen de esta ley básica y de la substituciones que se le aplican.

Claramente, las letras para argumento pueden ser interpretadas como letras que refieren a objetos, esto es, como letras cuyas instancias son nombres de objetos. Así, podemos considerar una instancia de (58) como la siguiente:

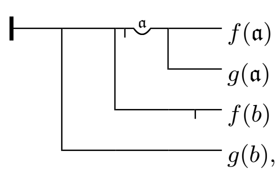


(1.13)

Para la obtención de (1.13), se ha reemplazado '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{n}$', 'c' por 'm' y '$f(\alpha)$' por '$\alpha \cdot 0 = 0$'. En este contexto de aplicación particular, las únicas instancias adecuadas para 'n' y 'm' son numerales[52].

[52]Frege ofrece una instancia del mismo tipo, en un contexto no aritmético, a través de una lectura posible de la Proposición (59):

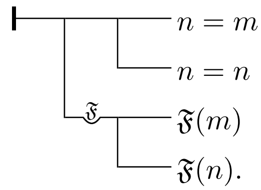
Pr. (59)



> "For example, let b mean an ostrich; that is, an individual animal belonging to this species; $g(A)$ mean "A is a bird"; $f(A)$ mean "A can fly". Then we have the judgement: "If this ostrich is a bird and cannot fly, then it follows that some birds cannot fly["]." [Frege, 1879a, §22, p. 163]

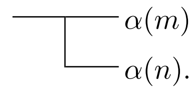
En este caso, la letra para argumento cuantificada '$\mathfrak{a}$' es interpretada como una letra para objetos, la letra para argumento 'b' como el nombre de un objeto y las letras funcionales 'f' y 'g' como nombres de propiedades.

Sin embargo, (1.13) no ejemplifica la única posible interpretación de (58). Podemos considerar una instancia de (58) de una naturaleza completamente distinta:

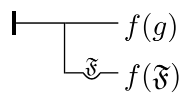


(1.14)

La fórmula (1.14)[53] resulta de aplicar a (58) el cambio alfabético de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$' y las siguientes substituciones: 'c' ha sido reemplazada por '$n = \beta$' y '$f(\alpha)$' por la expresión:



La posibilidad de leer la Proposición (58) del modo siguiente:

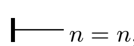


(1.15)

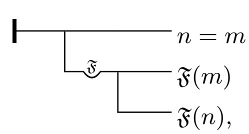
explica la razón por la cual pueden admitirse con naturalidad instancias como (1.14)[54].

Es innecesario completar la conceptografía con una ley básica como (1.15): las fórmulas (1.13) y (1.14) son instancias de la misma Proposición (58). Dado que ambas fórmulas comparten la forma lógica con (58), la única limitación que se les aplica es la necesidad de ser analizadas en términos de la función del argumento de modo consistente con la lectura que hemos extraido de (58). De hecho, (1.15) puede leerse exactamente del mismo modo que (58):

[53] A partir de la fórmula (1.14) y con la ayuda de la Proposición (8) de *Begriffsschrift* y del siguiente teorema:



puede deducirse el resultado siguiente:



que es el principio de identidad de indiscernibles.

[54] Para la obtención de (1.15) se ha substituido '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$' y 'c' por 'g'. Hay que tener en cuenta que la substitución de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$' conlleva modificar de la generalidad que expresa la letra 'f'. Al fin y al cabo, las instancias de '$\mathfrak{a}$', aquellas que preservan la aseverabilidad de la Proposición (58), no tienen por qué ser instancias aceptables de '$\mathfrak{F}$' en la fórmula (1.15).

> No puede afirmarse que $f(\mathfrak{F})$ es un hecho para todo argumento que pueda ocupar la posición de '$\mathfrak{F}$' y, a la vez, negarse que, para el argumento 'g', $f(g)$ es un hecho.

De acuerdo con esta lectura, una instancia posible de '$\mathfrak{n}$' en (1.13) es 'm' y la correspondiente para '$\mathfrak{F}$' en (1.14) es '$n = \beta$'.

La formulación del ejemplo (1.14) y, adicionalmente, la extracción de las distintas lecturas de la Proposición (57) que se han discutido en el apartado 1.3.2, son razones poderosas contra la identificación de las letras para argumento con variables individuales. Nos hemos limitado a seguir la práctica de Frege en *Begriffsschrift* para formular estos ejemplos. En primer lugar, la transición de (58) a (1.15) es análoga a la que Frege lleva a cabo en la demostración de la Proposición (77), cuando escribe (1.7) en lugar de (68). En segundo lugar, en la demostración de la Proposición (93), Frege lleva a cabo ciertas substituciones en una instancia de (58), que son similares a las que hemos aplicado para obtener (1.15). En el apartado 2.4.2 ofreceremos explicaciones detalladas de las demostraciones de las Proposiciones (77) y (93).

El marco de cada uno de nuestros ejemplos, que ha sido especificado mediante las substituciones que se aplican a (58), determina el recorrido de las letras en cada instancia, limitándolo de modos distintos. Las instancias posibles para una letra cuantificada nunca son objetos, propiedades, relaciones o proposiciones, sino expresiones. Y no hay una forma homogénea de considerar este recorrido de expresiones.

1.5.3 Ausencia de un dominio universal para las letras

De forma casi unánime, las letras de argumento suelen interpretarse como variables individuales, con un dominio absolutamente ilimitado[55]. Así lo plantea G. Boolos en 'Reading the *Begriffsschrift*':

[55] La posición de T. W. Bynum respecto al dominio de las letras para argumento en *Begriffsschrift* ejemplifica la interpretación estándar:

> "Arithmetic, according to Frege, is the scientific discipline concerned with numbers; therefore the range of arguments of its functions is the numbers. Maintaining a strict analogy with this view of arithmetic, one can say that, if logic is that scientific discipline concerned with anything at all, then the range of arguments of its functions should be anything at all." [Bynum, 1972, p. 62]

Bynum también afirma que este dominio es el universo sin restricción: "*not* a limited "universe of discourse", but *the* universe" [Bynum, 1972, p. 64, nota 44].

> "[I]t appears that Frege did intend the first-order variables of the *Begriffsschrift* to range over absolutely all of the "objects", or things, that there are. In any event even if Frege did envisage applications in which the first-order variables were to range over some but not all objects, it seems perfectly clear that he did allow for some applications in which they do range over absolutely all objects. And because a use of the *Begriffsschrift* in which the variables do not range over all objects that there are can, by introducing new relation letters to relativize quantifiers, be treated as one in which they do range over all objects, we shall henceforth assume that the *Begriffsschrift* first-order variables do range over all objects, whatever an object might happen to be." [Boolos, 1985, p. 339]

Ya hemos argumentado en contra de esta interpretación de la cuantificación de *Begriffsschrift*. La presencia de un recorrido específico de expresiones aceptables para tomar el lugar de una letra cuantificada, determinado en general por un contexto de aplicación y delimitado en cada caso concreto por un marco, es una fuente de evidencia contra esta tesis. De hecho, como es patente con las instancias de la Proposición (58) propuestas, es posible que el recorrido de una letra, en un mismo contexto de aplicación, no contenga las mismas expresiones en dos marcos distintos. Así, el recorrido de posibles instancias para una letra cuantificada es relativo a un contexto de aplicación y, en cada contexto, a un marco determinado.

Además, la tesis defendida por Boolos obligaría a interpretar uniformemente las letras para argumento. Sin embargo, la posibilidad de interpretar con total naturalidad una misma letra para argumento de formas incompatibles, que hemos explorado con detalle en los apartados 1.3.2, imposibilita esta interpretación unitaria.

En último término, podría razonarse que una interpretación uniforme de las letras de la conceptografía, como la que propone Boolos, se extrae de una lectura de los comentarios con los que Frege presenta algunas proposiciones de *Begriffsschrift*. Discutiremos esta lectura en el apartado 1.5.5.

1.5.4 Imposibilidad de cuantificar sobre funciones

De acuerdo con la interpretación tradicional de *Begriffsschrift*, la cuantificación de las letras funcionales tiene un carácter semántico y es asociada a la cuantificación sobre variables de predicado en lógicas de segundo orden. El punto de partida de esta asociación es una lectura sesgada de pasajes de este texto, mientras que para su desarrollo se recurre a consideraciones parciales acerca de las demostraciones que tienen lugar en los capítulos II y III de *Begriffsschrift*. De acuerdo con el planteamiento del Frege respecto a la noción de generalidad, cualquier símbolo en un juicio puede ser tomado como el argumento y ser cuantificado. En particular, las letras funcionales pueden ser cuantificadas. Algunos comentaristas modernos toman esta circunstancia como la evidencia de que las funciones son cuantificadas en *Begriffsschrift* y que, por tanto, la conceptografía contiene, o debería contener, cuantificación de orden superior[56]. M. Beaney ejemplifica en *The Frege Reader* [Beaney, 1997] este planteamiento con un comentario acerca del contenido de la Proposición (76)[57]:

> "It should be noted that (PA) [Proposition (76)] involves quantification over functions; i.e. presupposes second-order predicate logic. Frege did not at the time of BS [*Begriffsschrift*] distinguish between first-order and higher-order quantification, and his derivation of formula 77 in fact requires amendment." [Beaney, 1997, p. 76, nota 52]

Comentaremos pormenorizadamente la demostración de la Proposición (77) en el apartado 2.4.2, y valoraremos el intento de reparar (desde el punto de vista de la lógica actual) esta misma derivación en el apartado 4.3.2.

Si prestamos atención a la distinción desarrollada en *Begriffsschrift*, la cuantificación sobre funciones, propiamente, no tiene lugar. Frege establece claramente que el símbolo que se reemplaza por una letra cuantificada es siempre el argumento, dado que es tomado como el componente reemplazable. La función, entendida como el componente fijo, nunca es cuantificada. En consecuencia, no tiene sentido afirmar que las funciones en *Begriffsschrift*, tal y como Frege realmente las presenta, pueden cuantificarse.

Seamos claros respecto al planteamiento al que queremos oponernos. Cuando la posibilidad de cuantificar sobre funciones es defendida, a menudo conlleva la asociación entre las funciones fregeanas y las propiedades. Probablemente, esta perspectiva está influenciada por la posición de Frege al respecto en *Grundgesetze*. Desde este punto de vista, una letra funcional,

[56]El planteamiento de T. W. Bynum en 'On an Alleged Contradiction lurking in Frege's *Begriffsschrift*' [Bynum, 1973, p. 286] es un referente significativo de la interpretación a la que nos oponemos. Véase también la afirmación de P. Sullivan en 'Frege's Logic' [Sullivan, 2004, p. 667].

[57]La Proposición (76) contiene notación que aún no se ha explicado, y que será detalladamente considerada en el apartado 2.4.1. Sin embargo, para la presente discusión únicamente es necesario apreciar en (76) la circunstancia de que contiene una cuantificación de una letra funcional.

siendo vista como función en la expresión en la que aparece, expresa generalidad sobre propiedades o relaciones y es interpretada, en consecuencia, como una variable de predicado. Por lo tanto, lo que realmente se defiende es que en *Begriffsschrift* hay una cuantificación sobre propiedades, esto es, una suerte de cuantificación de segundo orden. Ahora bien, esta interpretación no es aceptable[58].

Es cierto que, de algún modo, hay una analogía entre una función de *Begriffsschrift* y una propiedad: pueden detectarse muestras de ello a lo largo del capítulo III, como veremos en el apartado 1.5.5. Ahora bien, la realización de esta analogía requiere asimilar la noción de función de *Begriffsschrift* con la noción de función de *Grundgesetze*. El paso de tratar las propiedades (o conceptos) y relaciones como funciones de cierto tipo no es en absoluto inmediato. De hecho, la primera elaboración de este tratamiento aparece por primera vez en 1891, en *Funktion und Begriff* [Frege, 1891]. Como Frege observa en el Prólogo de *Grundgesetze*, ésta es una diferencia esencial entre las nociones de función de *Begriffsschrift* y *Grundgesetze*:

> "Moreover, the nature of functions, in contrast to objects, is characterised more precisely [in *Grundgesetze*] than in *Begriffsschrift*. Further, from this the distinction between functions of first and second level results. As elaborated in my lecture *Funktion und Begriff*, concepts and relations are functions as I extend the reference [*Bedeutung*] of the term, and so we also must distinguish concepts of first and second level and relations of equal and unequal level." [Frege, 1893, p. x]

Si Frege hubiese explotado, ya en *Begriffsschrift*, la analogía entre la noción de función y la de propiedad o concepto, como se defiende tan a menudo, de tal manera que la cuantificación de '$\mathfrak{F}$' fuese indudablemente una cuantificación sobre propiedades o conceptos, no mencionaría la extensión del significado del término, sino que se referiría únicamente a una cuestión de detalle. Y, aún más, Frege nunca habría afirmado que "*Begriffsschrift* (...) no longer corresponds entirely to my present standpoint" [Frege, 1893, §11, p. 5, nota 1] refiriéndose a la noción de función de *Grundgesetze*. Esta posibilidad, a la luz de la cita ofrecida, es difícil de aceptar[59].

[58] Partiendo de un análisis comparativo de la presentación de la cuantificación en *Grundgesetze* y *Begriffsschrift* y, adicionalmente, fruto de un comentario acerca del carácter particular de las substituciones en *Begriffsschrift*, R. Heck y R. May llegan a la misma conclusión en 'The Function is Unsaturated' [Heck; May, 2013, pp. 831-833].

[59] Las diferencias entre la perspectiva de Frege en *Begriffsschrift* y en *Grundgesetze*, especialmente respecto a las divergencias entre los esquemas función-argumento y concepto-

Está completamente fuera de cuestión que si la conceptografía se transformase, sea cual sea la razón de tal transformación, en un sistema formal moderno, entre la multitud de cambios significativos que habría que realizar, toda cuantificación de una letra funcional debería interpretarse como una cuantificación de una variable de predicado. Estos cambios presentan multitud de problemas; por ejemplo, la reconstrucción de algunas derivaciones, como veremos en el apartado 4.3.2. Sin embargo, nuestra voluntad presente no es discutirlos; estamos defendiendo que esta transformación no es fiel a *Begriffsschrift*.

Ciertamente, hay muchos contextos de aplicación en los cuales las instancias de las letras funcionales son predicados. No estamos negando de esta posibilidad, sino defendiendo que éste no es el único contexto en el cual puede aparecer una letra funcional. En la exposición precedente, hemos argumentado contra la presencia de una interpretación homogénea para las letras funcionales de *Begriffsschrift* y, en particular, contra la tesis según la cual, de acuerdo con esta interpretación, las letras funcionales pueden ser substituidas únicamente por predicados. De hecho, hay marcos en los que esta substitución no es ni siquiera posible, como se ha mostrado en los apartados 1.3.2 y 1.4.2.

A lo largo de este apartado se ha defendido, por un lado, que una letra funcional no tiene dominio de cuantificación, sino un recorrido de expresiones por las que puede substituirse y, por el otro, que este recorrido no puede determinarse de antemano. Aunque en un contexto de aplicación y un marco particulares sea posible especificar qué expresiones pueden ocupar el lugar de una letra funcional, no es en absoluto necesario que estas expresiones refieran a propiedades. En consecuencia, las letras funcionales no poseen un dominio de interpretación general y completamente determinado que consista en propiedades o relaciones.

1.5.5 Comentarios elucidatorios

Si bien Frege no se ocupa de establecer la semántica de las letras de la conceptografía, ofrece algunas indicaciones, por medio de comentarios elucidatorios, para hacer más comprensible y accesible su explicación. Estos

objeto, raramente se detectan y, excepto en contadas ocasiones, nunca son consideradas apropiadamente. Por ejemplo, D. Macbeth entiende en *Frege's Logic* que estas diferencias no son realmente esenciales, y que consisten en una caracterización más precisa a través de la introducción de niveles funcionales [Macbeth, 2005, pp. 74-75]. Por contra, R. Heck y R. May mencionan en 'The Composition of Thoughts' [Heck; May, 2011, pp. 129-134] las razones de las profundas divergencias al respecto que pueden localizarse en *Begriffsschrift* y *Grundgesetze*.

comentarios son explicaciones informales que aparecen ocasionalmente junto a alguna proposición en *Begriffsschrift*.

Los comentarios elucidatorios de Frege suelen considerarse una evidencia textual en favor de una interpretación particular de las letras, que habitualmente se asocia con la propia de la lógica de segundo orden[60]. G. Boolos, en 'Reading the *Begriffsschrift*' [Boolos, 1985], así lo atestigua:

> "If we look at the *Begriffsschrift*, we find that when Frege wishes to decipher his relation letters and second-order quantifiers, he uses the terms 'property', 'procedure', 'sequence'; he uses the terms 'result of an application of the procedure' and 'object' to tell us what sorts of things free variables like 'x' and 'y' denote." [Boolos, 1985, p. 337]

Estas referencias por parte de Frege son innegables y pueden hallarse sin dificultad y en repetidas ocasiones a lo largo de *Begriffsscrhift*. Sin embargo, un análisis detallado muestra que la cuestión debe considerarse desde otra perspectiva. Básicamente, en *Begriffsschrift* hay dos tipos de comentarios elucidatorios intercalados en el grueso de la exposición. Por un lado, Frege propone ejemplos concretos para alguna de las proposiciones de la conceptografía y, por el otro, ofrece lecturas canónicas de los elementos de su simbolismo, sin asistirse por ello de ejemplos concretos, sino recurriendo a términos abstractos.

Ejemplos concretos

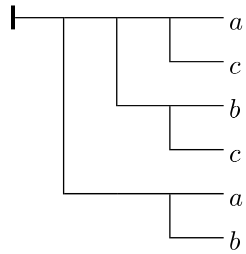
Hay multitud de casos del primer tipo de comentarios, que se concentran casi exclusivamente en el capítulo II de *Begriffsschrift*[61]. Puede decirse que su finalidad no es tanto explicativa como ejemplificadora: el autor no sólo traduce algunas de las proposiciones de la conceptografía al lenguaje natural, sino que propone una interpretación concreta, adaptada al contexto en el que se hallan, para hacerlas plenamente accesibles. Un buen ejemplo es el comentario de Frege de la Proposición (5):

[60]Puede verse un claro ejemplo en el planteamiento de S. Russinoff en 'On the Brink of a Paradox?' [Russinoff, 1987, p. 129]. La defensa de la autora de la presencia de una interpretación particular en *Begriffsschrift* será exhaustivamente tratada en el apartado 4.4.3.

[61]Aparecen a lo largo del capítulo II de forma repetida entre los párrafos §14 y §18 [Frege, 1879a, p. 137; pp. 139-140; p. 144; pp. 145-146; pp. 154-155; pp. 157-158], y en casos puntuales en el capítulo III: en los párrafos §22, en §24 y §27 [Frege, 1879a, p. 163; pp. 169-170; p. 177].

"As an example of (5), let

Pr. (5)



> a be the circumstance that the piece of iron E becomes magnetized,
> b be the circumstance that a galvanic current flows through the wire D,
> c be the circumstance that the key T is depressed.

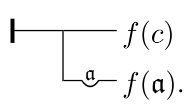
We then obtain the judgment:

> "If the proposition holds that E becomes magnetized as soon as a galvanic current flows through D;
> if further the proposition holds that a galvanic current flows through D as soon as T is depressed;
> then E becomes magnetized if T is depressed"." [Frege, 1879a, §15, p. 144]

La Proposición (5) no contiene constantes, sino letras y, sin embargo, Frege lee cada una de ellas como oraciones concretas. Con ello, el autor plantea un posible contexto de aplicación, en el que las letras se interpretan proposicionalmente: este ejemplo sugiere cómo interpretar expresiones del mismo tipo. Pero, como es natural, esta interpretación tiene aplicación únicamente en contextos proposicionales. Un ejemplo, al fin y al cabo, puede ser indicativo de una manera apropiada de interpretar una fórmula si de él se extrae una regla que se aplica a todos los ejemplos del mismo tipo. De modo que la cuestión es si, en otro contexto de aplicación, esta instancia de (5) es un mero ejemplo o plantea una interpretación que pueda aplicarse en general. En (5), las letras para argumento, como Frege indica, se interpretan proposicionalmente. Ahora bien, esta misma interpretación no es coherente con otros contextos en los que aparecen estas letras.

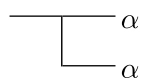
Las letras para argumento de la Proposición (58):

Pr. (58)

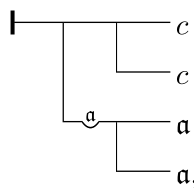


(1.12)

pueden interpretarse proposicionalmente, aunque también pueden aparecer en contextos de aplicación distintos que exijan otra interpretación. La fórmula (1.13), que se ha presentado en el apartado 1.5.2, es un ejemplo en el que las letras para argumento se interpretan como letras que refieren a objetos. Ahora bien, si se reemplaza '$f(\alpha)$' por la expresión:



en (58):



entonces tanto '$\mathfrak{a}$' como 'c' tienen interpretación proposicional.

En consecuencia, este ejemplo para la Proposición (5), y todos los que le son análogos, debe verse como indicador de la interpretación que Frege prevé para un contexto de aplicación concreto. Pero este tipo de interpretación no puede establecerse como una regla general. Por ello, es conveniente no tomar estos ejemplos más que como una complementación a la exposición sistemática del simbolismo de la conceptografía. Es en esta exposición, por otro lado, donde es claro que las letras para argumento, entre otras posibles, pueden tener una interpretación proposicional.

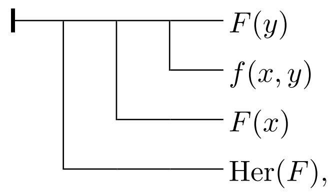
Traducciones al lenguaje natural

Los comentarios del segundo tipo son de cariz más abstracto; no son, como los comentarios del primer tipo, ejemplificaciones concretas, sino que proporcionan lecturas generales de proposiciones de la conceptografía. Estas lecturas, de carácter informal y expresadas en lenguaje natural, se aplican tanto a los símbolos lógicos como, especialmente, a las letras; su particularidad es que plantean una interpretación para estos componentes. Normalmente, estas lecturas restringidas se enmarcan en un contexto de aplicación concreto en el que hay símbolos que determinan la interpretación de las letras.

Un caso paradigmático en *Begriffsschrift* es gran parte del capítulo III, en el que la conceptografía es usada como herramienta en un contexto de aplicación de carácter lógico. Este contexto de aplicación posee letras específicas, que tienen una interpretación particular y que, por lo tanto, deben diferenciarse claramente de las letras propias de la conceptografía pura. Por ejemplo, Frege usa 'f' como parámetro para un procedimiento, 'F' como letra que refiere a propiedades y 'x', 'y', 'z' o 'm' como letras que refieren a objetos. En el apartado 2.4.1 detallaremos el contexto de aplicación de la conceptografía presente en el capítulo III y el uso específico que se hace en él de estas letras.

Consideremos un ejemplo concreto de comentario del segundo tipo. La Proposición (72) contiene algunos de los símbolos que acabamos de considerar:

Pr. (72)



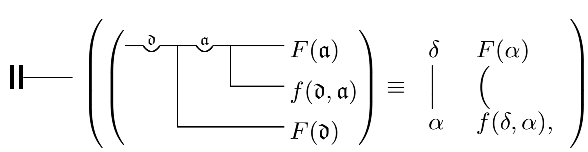
Tras su demostración, Frege proporciona una lectura informal de esta proposición[62]:

> "*If the property F is hereditary in the f-sequence; and if x has the property F, and if y is a result of an application of the procedure f to x: then y has the property F.*" [Frege, 1879a, §25, p. 171]

Claramente, tanto 'f' como 'x' o 'y' determinan la interpretación de la fórmula en conjunto. Sin embargo, este ejemplo, y todos los del mismo tipo, presenta las mismas dificultades que los ejemplos del primer tipo: de él puede extraerse una interpretación aplicable a cualquier representante de su mismo contexto, pero no generalizable a cualquier otro contexto de aplicación. No hay duda de que el significado de la Proposición (72) indica que el recorrido de sus letras para argumento contiene expresiones que denotan objetos, y el de sus letras funcionales, expresiones cuya denotación son propiedades.

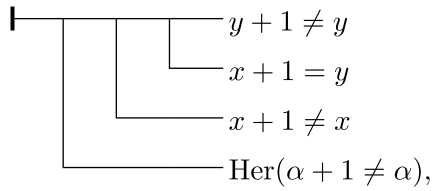
[62]La Proposición (72) contiene una mención a la noción de propiedad hereditaria, que tiene gran relevancia en el capítulo III de *Begriffsschrift*. Esta noción se define en la Proposición (69):

Pr. (69)



En la Proposición (72) abreviamos la notación fregeana de la noción de propiedad hereditaria mediante 'Her(F)'. Se ofrecerá una explicación detallada de esta noción en el apartado 2.4.1.

En esta misma dirección lo plantea Frege en su comentario. Una instancia adecuada de (72) puede ser la siguiente:



donde se ha substituido '$F(\alpha)$' por '$\alpha + 1 \neq \alpha$' y '$f(\alpha, \beta)$' por '$\alpha + 1 = \beta$'. Reproduciendo literalmente la formulación de Frege, esta instancia puede expresarse informalmente en un contexto aritmético como sigue:

> Si ser distinto del sucesor es una propiedad hereditaria y x es distinto de su sucesor y además y es el sucesor de x, entonces y es distinto de su sucesor.

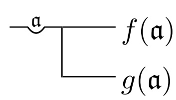
No hay que olvidar cuál es el contexto de aplicación en el que tienen lugar los representantes de este segundo tipo de comentarios elucidatorios: la gran mayoría aparecen en el capítulo III de *Begriffsschrift*[63]. Como discutiremos en el apartado 2.4.1, este contexto de aplicación, aunque de naturaleza abstracta, es el de la definición lógica de algunas nociones aritméticas. Así pues, es comprensible que la lectura de estas proposiciones esté plenamente ligada a la interpretación habitual de los símbolos de la aritmética.

[63]Los comentarios elucidatorios de este segundo tipo aparecen únicamente en dos ocasiones fuera del capítulo III. En primer lugar, en la sección dedicada a funciones [Frege, 1879a, §10, p. 129], Frege plantea una lectura de las expresiones analizadas en términos de función y argumento. Según esta lectura, una expresión como '$\Phi(A)$' expresa que A tiene la propiedad Φ. Esto parece sugerir que 'A' es el argumento y 'Φ' la función, y que siempre debería ser así. Pero, asimismo, más que imponer una interpretación única para una expresión con componentes indeterminados, en realidad Frege ofrece una lectura paradigmática de las expresiones de la forma $\Phi(A)$, que las haga accesibles y las conecte con la tradición. De hecho, a continuación Frege afirma que en '$\Phi(A)$', 'Φ' puede ser el argumento, lo cual es difícilmente conciliable con la lectura propuesta. En *Begriffsschrift* no se introducen niveles funcionales, por lo que no tendría sentido, en el contexto de este texto, afirmar que una función es el argumento de otra función (de nivel superior).

En la misma línea puede situarse la segunda ocasión en la que Frege recurre a este tipo de comentarios elucidatorios fuera del capítulo III de *Begriffsschrift* [Frege, 1879a, §12, pp. 134-135]. En este caso, según lo expuesto en el apartado 1.2.7, el autor propone una lectura tradicional, en términos de objetos y propiedades, de los juicios categóricos básicos. Probablemente, la finalidad de Frege es mostrar que los enunciados categóricos son expresables en la conceptografía, de modo que puede probar que su lógica contiene toda la lógica tradicional, cosa que, en 1879, no sucede en la lógica de tradición algebraica originada en Boole.

Naturalmente, la interpretación que se desprende de estos ejemplos es una interpretación posible para los símbolos de la conceptografía en un contexto de aplicación particular. Pero es importante tener en cuenta que no es la única, ni para cualquier contexto ni para este contexto de aplicación en concreto. Ya se ha discutido esta cuestión y se han proporcionado ejemplos de cómo el contexto de aplicación modifica las instancias adecuadas de una misma letra en una fórmula de la conceptografía. El simbolismo de la conceptografía posee una flexibilidad expresiva suficiente como para ser coherente con distintas interpretaciones.

Además, la lectura que ofrece Frege de las proposiciones de *Begriffsschrift* mediante este tipo de ejemplos, leída desde el punto de vista actual, contradice en algunos aspectos relevantes su propia exposición. Dicho en otras palabras, si los comentarios del autor se entienden como la imposición de una interpretación particular del simbolismo, son incompatibles con su exposición precedente. Ahora bien, si se toman como lecturas posibles de las proposiciones, según las cuales las letras se interpretan en conformidad con el contexto en cuestión, son perfectamente consistentes. Esta circunstancia es clara en ejemplos concretos. Una expresión de la conceptografía como la siguiente:



puede leerse, entre otras opciones determinadas por el contexto de aplicación, como:

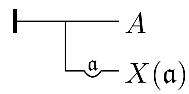
$$\forall x(\phi(x) \to \psi(x)),$$

o bien como:

$$\forall X(\phi(X) \to \psi(X)),$$

y cada versión recibiría por parte de Frege un comentario distinto. Prueba de ello es la Proposición (68), cuya doble lectura es manifiesta en la demostración de la Proposición (77), que a su vez analizaremos en el apartado 2.4.2 y que consideraremos extensamente en el apartado 4.3.2.

A diferencia del primer tipo de comentarios elucidatorios, que engloba ejemplificaciones de proposiciones de la conceptografía, el segundo tipo de comentarios corresponde a traducciones al lenguaje natural del contenido de fórmulas de la conceptografía. Frege introduce comentarios de este segundo tipo mediante un conjunto limitado de expresiones: vincula cada fórmula relevante con el comentario correspondiente por medio de verbos y expresiones específicos. Un análisis lingüístico de este conjunto de expresiones posibilitará considerar con mayor detalle estos comentarios, tanto por lo que respecta a su contenido como a las razones de Frege para su uso. Por lo general, el autor distingue consistentemente dos modos de trasladar al lenguaje natural expresiones de la conceptografía. En primer lugar, usa el verbo '*bedeuten*' (que es traducido al inglés como '*mean*' o '*stand for*') para dar cuenta de la forma lógica general de las proposiciones. Así, tras la siguiente expresión:



consta el comentario:

> "[B]edeutet, dass der Fall, wo $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\, X(\mathfrak{a})$ bejaht und A verneint wird, nicht eintritt."[64] [Frege, 1964a, §11, p. 20]

En segundo lugar, Frege usa los verbos '*übersetzen*' (traducido al inglés como '*translate*'), '*wiedergegeben werden*' ('*be rendered*'), '*besagen*' ('*mean*' o '*say*'), '*aussprechen*' ('*express*'), '*ausdrücken*' ('*mean*' o '*express*'), o las expresiones '*man lesen kann*' ('*can be read*') o '*ein anderer Ausdrück ist*' ('*another way of expressing it is*') para ofrecer una interpretación semántica específica de las expresiones de la conceptografía. Normalmente, tras el uso del verbo '*übersetzen*', la indicación semántica figura entre comillas. En general, por medio de estas expresiones, Frege pretende mostrar que las proposiciones de la conceptografía pueden leerse de un modo natural, y que su significado puede ser, en algunos contextos, adecuado para una teoría como la aritmética. Por lo tanto, son estas expresiones las que encabezan el segundo tipo de comentarios elucidatorios.

En ninguna ocasión en *Begriffsschrift* Frege ofrece explicaciones semánticas generales, que son las que propiamente corresponden a la conceptografía, mediante expresiones del segundo grupo como '*übersetzen*' o '*aussprechen*'. Sin embargo, no siempre usa exclusivamente estas expresiones para introducir lecturas en el lenguaje natural: hay al menos tres ocasiones en las que el autor usa el verbo '*bedeuten*' para introducir comentarios semánticos de carácter informal[65].

[64] "[S]ignifica que no sucede el caso en el que $-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\, X(\mathfrak{a})$ es afirmado y A negado."

[65] No parece haber ningún criterio que justifique esta variación. Las tres excepciones al uso consistente del verbo '*bedeuten*' por parte de Frege son las siguientes:

1. "Dies bedeutet: „was auch $\mathfrak{a}$ sein mag, $X(\mathfrak{a})$ ist immer zu verneinen", oder: „etwas was die Eigenschaft X habe, giebt es nicht"; oder, wenn wir etwas, was die Eigenschaft X hat, ein X nennen: „es giebt kein X" [Esto significa: ≪para cualquier $\mathfrak{a}$, $X(\mathfrak{a})$ debe siempre ser negado≫, o: ≪no hay nada que tenga la propiedad X≫; o, cuando llamamos a algo que tiene la propiedad X un X: ≪no hay ningún X≫.]."

Por otro lado, hay multitud de casos en *Begriffsschrift* en los que Frege usa en un mismo contexto ambos tipos de expresiones, pero respetando el uso que reserva a cada uno de ellos. Así pues, cada tipo de explicación, sea general o específica, recibe una introducción distinta. Tras la expresión siguiente:

$$\vdash\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\begin{array}{|l} \top P(\mathfrak{a}) \\ \Psi(\mathfrak{a}), \end{array}$$

consta:

> "[B]edeutet: „dem $\mathfrak{a}$ kann keine solche Bedeutung gegeben werden, dass $P(\mathfrak{a})$ und $\Psi(\mathfrak{a})$ beide bejaht werden könnten". Man kann daher übersetzen: „was die Eigenschaft Ψ hat, hat nicht die Eigenschaft P", oder „kein Ψ ist ein P"."[66] [Frege, 1964a, §12, pp. 23-24]

Finalmente, en los capítulos II y III de *Begriffsschrift*, Frege incluye en multitud de ocasiones comentarios elucidatorios de tipo semántico sin ningún tipo de introducción, esto es, sin recurrir a expresiones del segundo grupo que se ha destacado. Por ejemplo, tras la Proposición (97)[67]:

Pr. (97)
$$\vdash\!\!- \begin{array}{c} \delta \\ | \\ \alpha \end{array} \left(\begin{array}{l} \tfrac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta) \\ \\ f(\delta, \alpha), \end{array} \right.$$

[Frege, 1964a, §12, p. 23]

2. "(...) bedeutet daher: „einige M's sind P's", oder „es ist möglich, dass ein M ein P sei" [(...) por consiguiente significa: ≪algún M es P≫, o ≪es posible que un M sea un P≫.]." [Frege, 1964a, §12, p. 24]

3. "(77) bedeutet [(77) significa]:

> *Wenn y in der f-Reihe auf x folgt; wenn die Eigenschaft F sich in der f-Reihe vererbt; wenn jedes Ergebnis einer Anwendung des Verfahrens f auf x die Eigenschaft F hat: so hat y die Eigenschaft F* [*Si y sigue a x en la secuencia-f; si la propiedad F es hereditaria en la secuencia-f; si cada resultado de una aplicación del procedimiento f a x tiene la propiedad F: entonces y tiene la propiedad F*.]." [Frege, 1964a, §27, p. 62]

[66] "[S]ignifica: ≪no puede darse a $\mathfrak{a}$ el significado de que $P(\mathfrak{a})$ y $\Psi(\mathfrak{a})$ podrían ser ambos afirmados≫. Por consiguiente, puede traducirse: ≪lo que tiene la propiedad Ψ no tiene la propiedad P≫, o ≪ningún Ψ es P≫."

[67] La Proposición (97) contiene, además de los símbolos para expresar propiedades hereditarias, el símbolo '$\tfrac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$', que expresa que f es una secuencia. El significado de este símbolo será convenientemente explicado en el apartado 2.4.1.

únicamente figura:

> "*Die Eigenschaft, in der f-Reihe auf x zu folgen, vererbt sich in der f-Reihe.*"[68] [Frege, 1964a, §28, p. 71]

Destacan en este análisis lingüístico tres elementos clave. En primer lugar, el contexto en el que aparece este segundo tipo de comentarios elucidatorios está vinculado, mayoritariamente, al uso de un conjunto limitado de expresiones para introducirlos. En segundo lugar, Frege separa mediante el uso de expresiones distintas modos diferentes de comentar las proposiciones de la conceptografía: las explicaciones generales son introducidas mediante expresiones distintas a las traducciones al lenguaje natural del contenido de las proposiciones. Por último, el autor no muestra absolutamente ningún reparo en presentar los dos tipos de explicación conjuntamente, como parte de una aclaración unitaria de su formalismo.

Es cierto que, una vez demostrada en el cálculo de la conceptografía una proposición, puede garantizarse su rigor y la ausencia en dicha demostración de pasos intuitivos. Por ello, parece razonable ofrecer una lectura en el lenguaje natural, como hace Frege, que busque, antes que imponer una interpretación al simbolismo, hacerlo accesible y comprensible. Muestra de ello es que, entre este segundo tipo de comentarios elucidatorios, Frege simplifique en su reformulación en lenguaje natural la forma lógica de una proposición recurriendo a una conjunción, como por ejemplo en la lectura de la Proposición (72). De modo más llamativo, en ocasiones el autor expresa con palabras las inferencias completas correspondientes a las demostraciones de algunas proposiciones[69]. Mediante estas lecturas de derivaciones completas, se pretende mostrar que los procesos deductivos de la conceptografía pueden verse como demostraciones matemáticas comunes. Sin plantearlo explícitamente, Frege espera que el lector aprecie que la simbología de la conceptografía añade rigor, pero que no se separa de la práctica matemática habitual.

Bajo esta perspectiva, es posible entender que el autor aparentemente incurra en inconsistencias con lo expuesto en el primer capítulo de *Begriffsschrift*. Así lo confirma el hecho de que, aunque en estos comentarios las letras se interpreten como letras que refieren objetos o a propiedades, en la conceptografía las letras toman valores en un recorrido de expresiones (fijado por el contexto de aplicación y, en determinados casos, por cierto marco), no en un dominio prefijado de entidades. En particular, la cuantificación de la

[68] "*La propiedad de seguir a x en la secuencia-f es hereditaria en la secuencia-f.*"

[69] Véanse las Proposiciones (87), (91), (102), (108), (111), (114), (122), (124) y (126) de *Begriffsschrift*.

conceptografía no es referencial, contra lo que sugiere la lectura de Frege de, por ejemplo, ‘$-\!\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!-$’: ‘die Eigenschaft $\mathfrak{F}$, was auch $\mathfrak{F}$ sein mag’ [la propiedad $\mathfrak{F}$, sea lo que pueda ser $\mathfrak{F}$]. Esta lectura está motivada por la teoría lógica que fundamenta el uso de la letra para parámetros ‘f’ y de las letras ‘x’, ‘y’ o ‘z’ en el capítulo III de *Begriffsschrift*. Así pues, la lectura de ‘$\mathfrak{F}$’ como una letra para propiedades posibilita expresar del modo habitual los cuantificadores en el lenguaje natural, pero no modifica en absoluto su manejo en el cálculo.

En conclusión, los comentarios elucidatorios de Frege a algunas proposiciones de *Begriffsschrift*, en conjunto, no pueden tomarse como una evidencia textual en favor de una interpretación unitaria y global del simbolismo de la conceptografía. En particular, estos comentarios no permiten extraer una interpretación general de las letras, sean funcionales o para argumento. Como tales, los comentarios del autor complementan y hacen accesible el grueso expositivo de *Begriffsschrift*. Precisamente, es en la exposición del simbolismo de la conceptografía, y a lo largo de toda su aplicación, donde debe extraerse la naturaleza de sus elementos básicos; no en un contexto específico.

Capítulo 2

Lógica de *Begriffsschrift*

2.1 Introducción

La conceptografía es un sistema formal con un conjunto de leyes básicas y una serie de reglas de inferencia. Dada la importancia que tiene la distinción entre función y argumento en el lenguaje y la sintaxis de este sistema formal, sus leyes básicas están completamente estructuradas de acuerdo con esta distinción. Análogamente, las reglas de inferencia permiten operar tomando esta estructura básica como eje vertebrador. El resultado es un sistema formal extraordinariamente singular, cuyas particularidades deben estudiarse cuidadosamente.

En *Begriffsschrift*, la conceptografía sirve, en primer lugar, para obtener las proposiciones lógicas necesarias para, en segundo lugar, formular definiciones lógicas de nociones aritméticas y deducir, por medio de reglas de inferencia, algunos teoremas relevantes. Éste es el cometido de los capítulos II y III de *Begriffsschrift*, respectivamente. Las proposiciones de estos capítulos son el resultado de derivaciones en las que intervienen únicamente las herramientas lógicas que proporciona la conceptografía: además de teoremas lógicos, reglas de inferencia que permiten obtener verdades lógicas a partir de verdades lógicas.

El objetivo de este capítulo es ofrecer una presentación completa del sistema formal contenido en *Begriffsschrift*. Esta presentación se apoyará en la exposición precedente, especialmente en la explicación de los símbolos lógicos de la conceptografía, y en nuestra reconstrucción de la distinción entre función y argumento y de la noción de generalidad. A partir de esta introducción, la segunda sección (2.2), detallará los componentes de la conceptografía: leyes básicas y reglas de inferencia. En la tercera sección (2.3), se expondrán los procesos de substitución de *Begriffsschrift* y se discutirá si su sistema formal contiene propiamente una Regla de substitución. Por último, la cuarta sección (2.4) mostrará cómo Frege pone en funcionamiento estos elementos en los capítulos II y III de *Begriffsschrift* y, en particular, ofrecerá una reconstrucción pormenorizada de algunas demostraciones especialmente relevantes.

2.2 Sistema axiomático

La conceptografía, en tanto que sistema formal, dispone de un conjunto de leyes básicas y de unas reglas de inferencia. En *Begriffsschrift*, el cálculo que resulta de ambos elementos es usado para expresar algunas proposiciones de la aritmética por medio de herramientas puramente lógicas. Ahora bien, no es inmediato que este cálculo sea equivalente a un sistema formal de la lógica actual. En particular, la tendencia a evaluar la conceptografía como un sistema formal análogo a los actuales ha generado cierta controversia sobre la necesidad de añadir una Regla de substitución a *Begriffsschrift*.

Se dedicará esta sección a exponer y discutir el sistema axiomático de la conceptografía: se desarrollará la noción de ley básica, y se comentarán las leyes básicas y las reglas de inferencia de la conceptografía.

2.2.1 Leyes básicas

Frege atribuye un estatuto especial a algunas de las proposiciones de *Begriffsschrift*, a las que denomina 'leyes básicas' o 'fundamentales' ('*Grundgesetze*'), o 'leyes primitivas' ('*Urgesetze*' o '*ursprüngliche Sätze*')[70]. Forman el conjunto de proposiciones a partir de las cuales se deduce el resto. Así

[70] Por su naturaleza puramente lógica, las leyes básicas de la conceptografía no son, estrictamente, axiomas, y por ello Frege no las denomina así en *Begriffsschrift*. En este texto, las leyes básicas de la conceptografía sólo reciben una denominación específica en el índice, en el que son llamadas '*Grundgesetze*' [Frege, 1964a, p. xvi]. Además de este localizado uso, los términos '*Grundgesetze*', '*Urgesetze*' y '*ursprüngliche Sätze*' (este último referido, por lo general, al conjunto de leyes básicas y reglas de inferencia) son utilizados exclusivamente en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1969, pp. 42-44], posterior a la publicación de *Begriffsschrift*. En el período que rodea la publicación de *Begriffsschrift* (entre 1874 y 1882), Frege únicamente utiliza el término '*Axiom*' referido a los axiomas de la aritmética o de la geometría, y siempre reserva términos distintos para referirse a las leyes básicas de la lógica (Véase 'Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffes gründen' [Frege, 1874, p. 50] y la carta de Frege al filósofo A. Marty (1847-1914) de 29/8/1882 [Frege, 1976, p. 163] –ambas citas refieren a la edición alemana).

pues, desde una perspectiva moderna, las leyes básicas son los axiomas de la conceptografía.

Leyes básicas, leyes del pensamiento y verdad

En *Begriffsschrift* no hay ningún tratamiento sistemático que posibilite evaluar las condiciones de verdad de sus fórmulas[71]. De hecho, Frege no considera ninguna noción de verdad para las proposiciones de la conceptografía. Y, sin embargo, no hay ninguna duda de que todas y cada de las proposiciones de *Begriffsschrift* son universalmente válidas: expresan verdades de la lógica. Es patente que, desde el punto de vista del autor, lo que las hace válidas es el hecho de que expresen leyes generales del pensamiento. Las leyes del pensamiento son aquellas leyes que forman el bloque lógico común al conjunto conocimiento científico, esto es, al conocimiento propio de las distintas disciplinas científicas.

Frege no se molesta en aclarar el proceso de conocimiento o la justificación del las proposiciones de la conceptografía; simplemente, en la medida que son expresión de leyes del pensamiento puro, manifiesta que tratar de aumentar su grado de certeza es innecesario[72].

---

[71] Siguiendo parcialmente el planteamiento de van Heijenoort en 'Logic as Calculus and Logic as Language' [van Heijenoort, 1967b], J. Hintikka plantea en 'Frege's Hidden Semantics' [Hintikka, 1979] que el lenguaje formal desarrollado por Frege, así como la capacidad de este lenguaje para expresar las leyes de la lógica de primer orden, se vio motivado por su desarrollo de una teoría semántica. Hintikka opina que, a pesar de ello, la concepción por parte de Frege del lenguaje como medio universal le impidió incluir explícitamente esta teoría semántica en su sistema formal.

En nuestra opinión, el tratamiento del conjunto del sistema formal por parte de Frege, al menos en *Begriffsschrift*, es absolutamente sintáctico y está enfocado a su aplicación en el cálculo. Defendemos, pues, que la conceptografía no posee una semántica explícita y que su desarrollo como sistema formal es completamente independiente de que Frege tuviese o no en 1879 una concepción semántica concreta.

[72] Este planteamiento es perfectamente coherente con el párrafo inicial del Prefacio de *Begriffsschrift* y una muestra del germen de la postura antipsicologista que Frege desarrolla en sus obras posteriores:

> "The apprehension of a scientific truth proceeds, as a rule, through several stages of certainty. First guessed, perhaps, from an inadequate number of particular cases, a universal proposition becomes little by little more firmly established by obtaining, through chains of reasoning, a connection with other truths—whether conclusions which find confirmation in some other way are derived from it; or, conversely, whether it comes to be seen as a conclusion from already established propositions. Thus, on the one hand, we can ask by what path a proposition has been gradually established; or, on the other hand, in what way it is finally most firmly establishable. Perhaps the former question must be answered differently for different people. The

Las leyes básicas, en tanto que proposiciones de la conceptografía, expresan leyes del pensamiento. Su papel destacado es producto de la posibilidad de deducir el resto de proposiciones de la conceptografía a partir de ellas:

> "Now in this chapter [II], some judgements of pure thought which can be expressed in the "conceptual-notation" are to be stated in symbols. It seems natural to deduce the more complex of these judgements from the simpler ones—not to make them more certain, which generally would be unnecessary, but to bring out the relations of the judgements to one another. Merely knowing the laws is obviously not the same as also understanding how some are implicitly contained in others. In this way, we obtain a small number of laws in which (if we add the laws contained in the rules) is included, though in embryonic form, the content of all of them." [Frege, 1879a, §13, p. 136]

Dejando de lado, pues, la cuestión de la verdad o la justificación de las proposiciones, Frege plantea la conveniencia de hallar el conjunto de proposiciones que, por medio de los recursos formales que proporcionan las reglas de inferencia, posibilitan obtener el resto de proposiciones:

> "And it is an advantage of the deductive mode of presentation that it teaches us to recognize this kernel. Because we cannot enumerate all of the boundless number of laws that can be established, we can attain completeness only by a search for those which, *potentially*, imply all the others." [Frege, 1879a, §13, p. 136]

Ahora bien, en *Begriffsschrift* no se incluyen todas las leyes del pensamiento; al menos, no desde el punto de vista de *Grundgesetze*, según el cual del cálculo de la conceptografía, junto con las definiciones pertinentes, puede deducirse toda la aritmética. Ciertamente, como trataremos en el apartado 5.6.1, la conceptografía de *Begriffsschrift* es insuficiente para mostrar la reducción completa de la aritmética a la lógica. En 1879 el autor no planteó globalmente la tesis logicista[73], pero obtuvo resultados significativos para su

> latter is more definite, and its answer is connected with the inner nature of the proposition under consideration." [Frege, 1879a, p. 103]

[73]En el contexto de este trabajo, entendemos por 'tesis logicista' o 'logicismo' el planteamiento que consiste en la formulación, con la ayuda de nociones lógicas, de una serie de definiciones (de naturaleza lógica) junto con unos principios de validez universal y unas reglas de inferencia (que transforman verdades lógicas en verdades lógicas) con el propósito de demostrar que todos los teoremas de la aritmética son verdades lógicas. Para

desarrollo, como la demostración del carácter lógico de algunas proposiciones que se consideraban, hasta el momento, de naturaleza aritmética.

El objetivo de Frege respecto a la creación del sistema formal de *Begriffsschrift* es formular aquellas leyes básicas a partir de las cuales se obtienen todas las leyes necesarias para garantizar el rigor en las deducciones. En *Begriffsschrift* se obtienen únicamente aquellas leyes que son necesarias para las demostraciones que contiene. Ahora bien, si fuese preciso añadir alguna ley básica con el fin de realizar una deducción adicional, Frege no tendría ningún inconveniente en hacerlo. En este sentido, no hay ningún aspecto esencial que caracterice un conjunto específico de leyes básicas. La elección de un conjunto de leyes básicas determinado es, pues, metodológica:

> "Now, of course, it must be admitted that the reduction is possible in other ways besides this particular one. Thus, one such mode of presentation will not elucidate all the interconnections of the laws of thought. Perhaps there is yet another series of judgements from which (with the addition of those contained in the rules) all the laws of thought can be derived." [Frege, 1879a, §13, p. 136]

De la presentación de Frege destaca globalmente la ausencia de consideración del estatuto semántico de proposiciones de la conceptografía. Todas ellas expresan leyes del pensamiento y, como tales, son verdaderas, por lo que no es necesario determinar de qué modo deben considerarse como tales o cuáles son las condiciones para su verdad.

Leyes básicas de la conceptografía

El conjunto de *leyes básicas* que presenta Frege, como él mismo indica, puede dividirse en cuatro partes diferenciadas [Frege, 1879a, §13, p. 136]. Así, del total de leyes básicas[74], seis de ellas son propias de la lógica proposicional,

---

una discusión del origen histórico de la tesis logicista y de su relevancia en los trabajos de Frege, véase 'Frege, Dedekind, and the Origins of Logicism' [Reck, 2013b], de E. H. Reck; y 'The Road to Modern Logic–An Interpretation' [Ferreirós, 2001] y 'Hilbert, Logicism, and Mathematical Existence' [Ferreirós, 2009], de J. Ferreirós.

[74]Véanse las referencias de las leyes básicas para su localización en *Begriffsschrift*:

L1	P. (1)	[§14, p. 137]	**L4**	P. (28)	[§17, p. 154]	**L7**	P. (52)	[§20, p. 161]
L2	P. (2)	[§14, p. 137]	**L5**	P. (31)	[§18, p. 156]	**L8**	P. (54)	[§21, p. 162]
L3	P. (8)	[§16, p. 146]	**L6**	P. (41)	[§19, p. 158]	**L9**	P. (58)	[§22, p. 162]

Dado que los componentes de la conceptografía se han explicado con detalle y que se ha destacado su genuina particularidad, para simplificar nuestra explicación y ahorrar mientras que de las tres restantes, dos están dedicadas a la igualdad de contenido y una a la generalidad:

L1 $a \to (b \to a)$.

L2 $(c \to (b \to a)) \to ((c \to b) \to (c \to a))$.

L3 $(d \to (b \to a)) \to (b \to (d \to a))$.

L4 $(b \to a) \to (\neg a \to \neg b)$.

L5 $\neg\neg a \to a$.

L6 $a \to \neg\neg a$.

L7 $(c \equiv d) \to (f(c) \to f(d))$.

L8 $(c \equiv c)$.

L9 $\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \to f(c)$, para cualquier argumento c.

Las seis primeras leyes básicas corresponden a axiomas de la lógica proposicional, como se discutirá con detalle en el apartado 4.2.1, y no precisan ningún comentario. En el apartado 1.3.2 se han hecho las puntualizaciones pertinentes a (**L7**) y (**L8**), sobre todo por lo que respecta al símbolo de igualdad de contenido.

La ley básica (**L9**), por su parte, requiere un tratamiento detallado. Desde el punto de vista actual, sería necesario hacer algunas restricciones de tipo técnico sobre el argumento 'c' de (**L9**), de las que hablaremos en la sección 2.3.

Además, hay que recordar que un argumento concreto puede aparecer en la función en los lugares de argumento, pero también dentro del componente funcional. Dicho de otro modo, distintas apariciones de un mismo símbolo pueden tomarse como argumento (aquellas que están en los lugares de argumento) o como parte de la función. Frege indica que todas las apariciones de '$\mathfrak{a}$' deben darse en los lugares de argumento de 'f', para evitar que '$\mathfrak{a}$' aparezca también como parte de la función:

espacio, de aquí en adelante se formularán las proposiciones de la conceptografía en una notación híbrida. Las únicas excepciones a esta práctica serán las citas y algunos ejemplos muy localizados, en los cuales será relevante usar la notación original. En el resto de fórmulas, tanto los cuantificadores como las conectivas de la conceptografía se expresarán según los equivalentes disponibles en notación moderna, pero se respetarán las distintas tipografías usadas por Frege en *Begriffsschrift*. Naturalmente, esta circunstancia no implica que defendamos que la interpretación de los símbolos de la conceptografía y de la lógica clásica actual sea análoga, pues busca únicamente economizar el espacio.

> "Here $\mathfrak{a}$ can occur only in the argument places of f because this function occurs also outside the scope of $\mathfrak{a}$ in the judgement." [Frege, 1879a, §22, pp. 162-163]

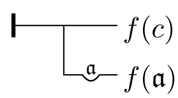
El sentido de esta restricción puede apreciarse con un ejemplo. En (**L9**), 'f' aparece fuera del alcance de la cuantificación de '$\mathfrak{a}$'. Así, 'f' no puede substituirse por una expresión como '$g(\mathfrak{a}) \rightarrow h(\alpha)$'. En tal caso, la instancia de 'f' contendría una aparición de '$\mathfrak{a}$', que es precisamente lo que Frege pretende evitar. Por tanto, 'f' debería substituirse por '$g(\alpha) \rightarrow h(\alpha)$', y así puede aplicarse correctamente la ley básica (**L9**) para obtener la fórmula:

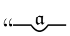
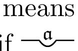
$$\forall \mathfrak{a}(g(\mathfrak{a}) \rightarrow h(\mathfrak{a})) \rightarrow (g(c) \rightarrow h(c)).$$

Recordemos que el significado de (**L9**) es más general del que una lectura superficial parece indicar. En realidad, (**L9**) expresa:

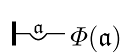
> No puede afirmarse que $f(\mathfrak{a})$ es un hecho para todo argumento que pueda ocupar la posición de '$\mathfrak{a}$' y, a la vez, negarse que, para un argumento 'c' aceptable cualquiera, $f(c)$ es un hecho.

Esta lectura es completamente coherente con las explicaciones con las que Frege presenta la ley básica (**L9**):

Pr. (58)  (**L9**)

> " $f(\mathfrak{a})$ means that $f(\mathfrak{a})$ occurs whatever we may understand by $\mathfrak{a}$. Therefore, if  $f(\mathfrak{a})$ is affirmed, $f(c)$ cannot be denied. This is what our sentence expresses." [Frege, 1879a, §22, p. 162]

Y estas explicaciones son una extensión natural de la lectura, por parte del autor, de la cuantificación:

> "The horizontal stroke situated the left of the concavity in
>
> 
>
> is the content stroke of [the assertible content] that $\Phi(\mathfrak{a})$ holds, whatever we may put in the place of $\mathfrak{a}$. The horizontal stroke to the right of the concavity is the content stroke of $\Phi(\mathfrak{a})$, and here we must think of $\mathfrak{a}$ as replaced by something definite." [Frege, 1879a, §11, p. 130]

En la ley básica (**L9**), las letras '$\mathfrak{a}$' y 'c' indican el lugar del argumento, pero no determinan su naturaleza semántica, sino simplemente su rol en el conjunto de la expresión. Por ello, (**L9**) puede leerse situando letras funcionales en los lugares de los argumentos. Veremos, en los apartados 2.2.2 y 2.4.3, dos aplicaciones de esta ley básica que ponen de relieve esta circunstancia fundamental. El cambio, en definitiva, es importante en cuanto a la interpretación relevante de la ley básica, pero no exigiría la formulación de una nueva ley, puesto que (**L9**) ya posibilita una lectura tal.

Concluiremos observando una circunstancia particular de (**L9**). La conceptografía únicamente dispone de letras como símbolos no lógicos; no posee propiamente un lenguaje, de modo que sus fórmulas no contienen constantes propias de ningún tipo. Así, la letra 'c' en el consecuente de (**L9**) es indudablemente una letra en el sentido de Frege. Pero, teniendo en cuenta las limitaciones de la conceptografía, hay que considerar la intención de Frege al incluir esta ley básica, que no es otra que reproducir el *dictum de omni*: si una función es un hecho con todo argumento, entonces lo es con uno cualquiera. Por esta razón hemos incluido la cláusula "para cualquier argumento c", que no está presente en el texto de Frege[75].

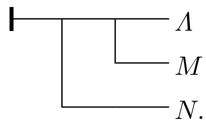
2.2.2 Reglas de inferencia

La conceptografía dispone de reglas de inferencia que permiten obtener nuevos juicios a partir de las leyes básicas. De entrada, Frege parece querer reducir las reglas de inferencia de la conceptografía al Modus Ponens. Para ello, arguye razones metodológicas, pues, en su opinión, siempre que sea posible, es preferible reducir todo modo de inferencia a un único modo:

> "In logic people enumerate, following Aristotle, a whole series of modes

[75]Es ilustrador, en este contexto, comparar el modo de presentación de Frege de la ley básica (**L9**) con el de D. Hilbert (1862-1943) y W. Ackermann (1896-1962) respecto a un equivalente de esta ley en *Grundzüge der Teoretischen Logik* [Hilbert; Ackermann, 1928]:

> "Dazu kommen jetzt als zweite Gruppe zwei *formale Axiome* für „*alle*", *und* „*es gibt*" hinzu [Se añaden ahora como segundo grupo dos *axiomas formales* para ≪*todo*≫ y ≪*algún*≫]:
>
> e) $(x)F(x) \rightarrow F(y)$.
>
> f) $F(y) \rightarrow (Ex)F(x)$.
>
> Das erste dieser Axiome bedeutet: „Wenn ein Prädikat F auf alle x zutrifft, so trifft es auch auf ein beliebiges y zu" [El primero de estos axiomas significa: ≪Si un predicado F es aplicable a todo x, entonces también es aplicable a un y cualquiera≫]." [Hilbert; Ackermann, 1928, III, §5, p. 53]

> of inference. I use just this one [Modus Ponens]—at least in all cases where a new judgement is derived from more than one single judgement. We can, of course, express the truth implicit in another mode of inference in one judgement of the form: if M holds and if N holds, then Λ holds as well; in symbols:
>
> 
>
>
> From this judgment plus $\vdash N$ and $\vdash M$, $\vdash \Lambda$ follows (...). In this way, an inference using any mode of inference can be reduced to our case. Accordingly, since it is possible to manage with a single mode of inference, perspicuity demands that we do so.” [Frege, 1879a, §6, p. 119-120]

En *Begriffsschrift*, Frege reduce a Modus Ponens toda regla de inferencia que permita obtener un juicio a partir de más de un juicio. Ahora bien, en el Prefacio plantea la posibilidad de introducir nuevas reglas de inferencia que permitan la transición en un único paso de varios juicios a un único juicio. El interés de estas nuevas reglas consiste en el hecho de que permiten llevar a cabo en un paso deductivo una transición que, de otro modo, exigiría más pasos:

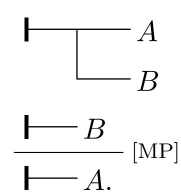
> “The restriction, declared in §6, to a single mode of inference is justified by the fact that in laying the *foundation* of such a conceptual notation the primitive components must be chosen as simple as possible if perspicuity and order are to be created. This does not preclude the possibility that, *later*, transitions from several judgements to a new one, which are possible by this single mode of inference in only an indirect way, be converted into direct ways for the sake of abbreviation. Indeed, this may be advisable in a later application. In this way, then, further modes of inference would arise.” [Frege, 1879a, p. 107]

Así pues, el autor prevé que en algunos casos la aplicación del Modus Ponens deberá complementarse con otras reglas para permitir que la inferencia sea inmediata. Todas estas nuevas reglas de inferencia no se introducen en *Begriffsschrift*, sino en textos posteriores que ofrecen ejemplos de aplicación de la conceptografía. Puesto que estas reglas no se introducen en *Begriffsschrift*, ni explícita ni implícitamente, no las presentaremos aquí. En los apartados 3.3.4 y 5.6.3 analizaremos algunos casos de nuevas reglas de inferencia que Frege introduce en el curso de una demostración.

En *Begriffsschrift*, en los párrafos dedicados a la Generalidad, Frege introduce nuevas reglas de inferencia, aunque sin hacer explícito que lo son; todas ellas permiten obtener un juicio a partir de un único juicio. Por esta razón, el autor las omite. En total, en este texto, Frege menciona tres reglas de inferencia distintas: Modus Ponens, Generalización y Confinamiento del cuantificador. Es debatible en qué sentido la conceptografía requiere una Regla de substitución. Más adelante se tratará esta regla con detalle.

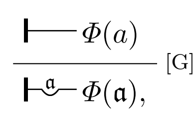
Modus Ponens

Como se ha visto, el principal método de inferencia de la conceptografía es el Modus Ponens [Frege, 1879a, §6, pp. 117-120], es decir, la regla que permite concluir el consecuente de un condicional a partir del mismo condicional y su antecedente. Su motivación es exactamente la misma que la del condicional: si la aseveración de un condicional impide afirmar su antecedente y negar su consecuente a la vez, una vez se ha afirmado el antecedente, no puede más que afirmarse el consecuente (de lo contrario, el condicional debería ser negado). En lo sucesivo, nos referiremos a la regla de Modus Ponens como [MP]. La estructura del [MP] es la siguiente:



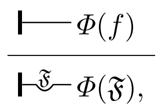
Generalización

La Generalización es la primera regla de inferencia introducida por Frege que afecta a la cuantificación universal. Como regla, permite la inferencia de una fórmula (cuantificada universalmente de modo implícito, es decir, mediante el uso de, como mínimo, una letra latina) a la cuantificación universal de la misma fórmula [Frege, 1879a, §11, p. 132]. Nos referiremos a la regla de Generalización como [G]. La estructura de [G] es la siguiente:



si 'a' sólo aparece en lugares de argumento en '$\Phi(a)$' (esto es, si la cuantificación universal afecta a todas las apariciones de 'a' en '$\Phi(a)$').

En este caso, [G] se ha representado con letras para argumento. Pero la misma regla tiene aplicación para letras funcionales; basta tener en cuenta que las letras ejercen de argumento en sus respectivas apariciones y que, como tales, son cuantificadas en virtud de la aplicación de [G]:



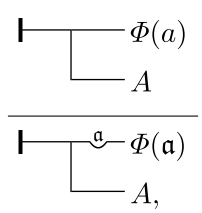
[G]

si 'f' sólo aparece en lugares de argumento en '$\Phi(f)$'.

Frege sólo hace uso de la regla de Generalización en dos de las demostraciones de *Begriffsschrift*[76], y en todas ellas se aplica junto a la regla de Confinamiento del cuantificador. Como ya hemos comentado, el autor no hace explícito el uso de estas reglas. De hecho, dado el uso convencional asignado a las letras latinas, desde la perspectiva de Frege, la regla de Generalización no hace más que hacer explícita la cuantificación que afecta a una letra latina. Precisamente por esta razón, por permitir vincular letras en tipografía gótica con su contrapartida en tipografía latina, esta regla será relevante para dar cuenta de las substituciones, como se discutirá a continuación.

Confinamiento del cuantificador

Otra regla de inferencia introducida es el Confinamiento de la cuantificación universal [Frege, 1879a, §11, pp. 132-133]. Nos referiremos a la regla de Confinamiento como [C]. Esta nueva regla permite el siguiente tipo de inferencia:



[C]

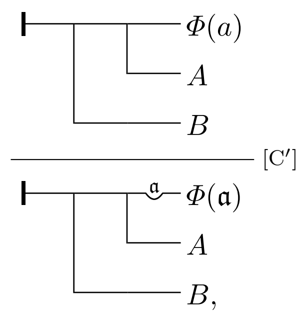
si en la fórmula 'A' no aparece 'a', y 'a' sólo aparece en los lugares de argumento de '$\Phi(a)$'.

Análogamente al caso de [G], [C] se ha representado con letras para argumento. Téngase en cuenta que la misma regla permite un confinamiento del cuantificador que ligue letras funcionales; como tales, estas letras son

[76]Véanse las demostraciones de las Proposiciones (97) y (109) de *Begriffsschrift*.

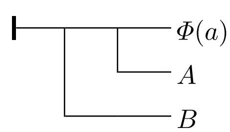
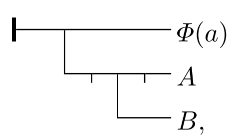
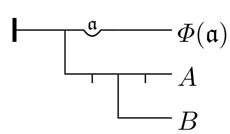
argumento y, por ello, son cuantificadas. No hay, pues, dos versiones distintas de [C], sino una única que se aplica indistintamente a letras, en contra de los historiadores que interpretan la conceptografía como una lógica de segundo orden[77].

Para no alargar innecesariamente algunas demostraciones, Frege formula una regla derivada de [C] [Frege, 1879a, §11, p. 133], que llamaremos [C′]:



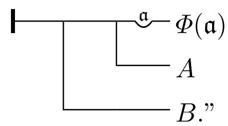
si en las fórmulas ‘B’ y ‘A’ no aparece ‘a’, y ‘a’ sólo aparece en los lugares de argumento de ‘$\Phi(a)$’.

El autor justifica esta regla derivada [C′] por la posibilidad de reducirla a [C]:

> “This case can be reduced to the preceding one, since instead of
>
> 
>
>
> we can put
>
> 
>
>
> and
>
> 
>

[77] La perspectiva que aquí se defiende choca frontalmente, por tanto, con el planteamiento de T. Bynum en ‘On an Alleged Contradiction lurking in Frege’s Begriffsschrift’ [Bynum, 1973], que propone una regla de confinamiento para funciones, distinta de la planteada aquí [Bynum, 1973, p. 286].

can be converted again into



[Frege, 1879a, §11, p. 133]

Frege no ofrece ninguna indicación de esta derivación en el sistema de *Begriffsschrift*. Es posible que llevase a cabo la demostración y decidiese dar una explicación intuitiva en lugar de incluirla en *Begriffsschrift*, o que, simplemente, considerara que la demostración podría darse, pero no la llevara a cabo.

2.3 Substituciones en *Begriffsschrift*

Las demostraciones de *Begriffsschrift* involucran dos proposiciones a partir de las cuales, mediante la aplicación de las reglas de inferencia disponibles, se obtiene una nueva proposición. Es habitual que Frege no use en las demostraciones los teoremas lógicos necesarios exactamente en la forma en que éstos han sido deducidos: los somete frecuentemente a una serie de substituciones. Las substituciones son de naturaleza muy dispar; por ejemplo, se producen cambios alfabéticos de letras o substituciones de letras funcionales por expresiones complejas. En lugar de sistematizar de forma pormenorizada cada tipo de substitución, como sería de esperar en una presentación actual, Frege ofrece una indicación genérica acerca de su naturaleza.

No obstante, es un hecho que Frege lleva a cabo todas las substituciones de un modo transparente y sin error. Todas ellas se adaptan a las indicaciones ofrecidas, por mucho que algunas substituciones sean complejas y requieran una explicación detallada.

Esencialmente, en la conceptografía encontramos tres tipos distintos de substitución: cambios en el fragmento proposicional de la conceptografía, cambios alfabéticos de letras y substituciones de letras por otras expresiones. En el transcurso de las demostraciones, Frege lleva a cabo las substituciones, sean de uno u otro tipo, sin explicación, y tampoco proporciona procedimientos generales mediante los cuales llevar a cabo los cambios. Simplemente, indica qué letras deben substituirse y cuál es su instancia de substitución.

En esta sección, ofreceremos una explicación detallada de cada tipo de substitución, asistiéndonos de ejemplos de *Begriffsschrift*. Finalmente, discutiremos en qué sentido la conceptografía requiere una Regla de substitución.

2.3.1 Cambios en contextos proposicionales

Ya hemos mencionado que la conceptografía dispone de un fragmento proposicional. En *Begriffsschrift*, las Proposiciones (1)-(51) tienen únicamente una interpretación proposicional y requieren para su obtención únicamente las leyes básicas (**L1**)-(**L6**). A pesar de que Frege no ofrece un tratamiento específico de las substituciones que afectan a estas proposiciones, en nuestra exposición es conveniente separarlas del resto.

Todas las substituciones del fragmento proposicional de *Begriffsschrift* consisten en el cambio de una letra para argumento por una fórmula (o, en particular, por otra letra para argumento). Por ejemplo, en la demostración de la Proposición (29), se somete a la Proposición (5) a una serie de substituciones para obtener una premisa de la demostración. El punto de partida es el siguiente:

$$\text{Pr. (5)} \qquad (b \to a) \to [(c \to b) \to (c \to a)]. \tag{2.1}$$

Un paso en las substituciones propuestas por Frege es cambiar 'a' por '$\neg a \to \neg b$'. Claramente, 'a' se interpreta proposicionalmente y su instancia, que es una fórmula compleja, respeta la aseverabilidad de (5). Simplemente, Frege ha escogido una instancia concreta para 'a' de las instancias adecuadas para obtener la expresión siguiente:

$$(b \to (\neg a \to \neg b)) \to [(c \to b) \to (c \to (\neg a \to \neg b))].$$

La ausencia de cuantificación en este contexto hace que, en conjunto, estas substituciones no conlleven ninguna dificultad.

2.3.2 Cambios alfabéticos

Frege aísla los cambios alfabéticos de letras como un tipo concreto de substitución. Se producen siempre en el contexto en el que las letras a substituir figuran en tipografía gótica:

> "Naturally, it is permitted to replace one German letter throughout its scope by another particular one provided that there are still different letters standing where different letters stood before. This has no effect on the content." [Frege, 1879a, §11, p. 131]

Propiamente, el cambio de una letra gótica por otra no debería verse como una substitución; no afecta al significado y se introduce, en general, por razones pragmáticas, para evitar conflictos entre distintas cuantificaciones[78].

[78] Véanse las demostraciones de las Proposiciones (70), (116) y (118) de *Begriffsschrift*.

En términos actuales, un cambio alfabético consiste en el reemplazo de una fórmula, que contiene como subfórmula '$\forall\mathfrak{a}\Phi(\mathfrak{a})$', por una fórmula equivalente que es el resultado de reemplazar '$\forall\mathfrak{a}\Phi(\mathfrak{a})$' por '$\forall\mathfrak{b}\Phi(\mathfrak{b})$' en la fórmula inicial. El cambio puede llevarse a cabo si en '$\Phi(\mathfrak{a})$' no aparece la letra cuantificada '$\mathfrak{b}$'.

Un caso particular de cambio alfabético es el que se produce entre una letra para argumento cuantificada, como '$\mathfrak{a}$', y la letra funcional cuantificada '$\mathfrak{F}$'[79]. En *Begriffsschrift*, este cambio se produce únicamente cuando las instancias aceptables de '$\mathfrak{a}$' son expresiones funcionales[80]; por esta razón, se reescribe la fórmula inicial reemplazando '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$'. Como es natural, este cambio restringe, independientemente del marco, las instancias posibles del resto de letras de la fórmula en la que tiene lugar. Sintácticamente, sin embargo, el cambio de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$' debe verse como un cambio alfabético más.

Las substituciones proposicionales, como hemos visto, son triviales cuando se producen en el fragmento proposicional de la conceptografía. Fuera del fragmento proposicional de la conceptografía, en concreto, en la demostración de las Proposiciones (52)-(133) de *Begriffsschrift*, Frege lleva a cabo substituciones de letras por fórmulas que exigen realizar cambios alfabéticos. En este contexto, pueden producirse conflictos de cuantificación en el proceso de substitución, aunque Frege no da ninguna indicación al respecto. Puede decirse, sin embargo, que el autor lleva a cabo las substituciones siguiendo implícitamente la siguiente regla: si hay conflictos de cuantificación, es preciso únicamente realizar los cambios alfabéticos apropiados para eliminarlos.

Puede plantearse mediante un ejemplo un caso en el que tales cambios sean necesarios. Consideremos el siguiente teorema de la conceptografía[81]:

$$\forall\mathfrak{e}[(f(\mathfrak{e}) \to a) \to (\forall\mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \to a)],$$

y supongamos que deseamos substituir 'a', que tiene una interpretación claramente proposicional, por '$\forall\mathfrak{e}(c \to f(\mathfrak{e}))$'. De llevar a cabo esta substitución, el alcance en la cuantificación de '$\mathfrak{e}$' en la fórmula inicial y en la instancia de

[79] Véanse las demostraciones de las Proposiciones (77) y (93) y nuestra reconstrucción de estas demostraciones en el apartado 2.4.2.

[80] En lo sucesivo, y especialmente en lo que queda de capítulo, usaremos 'expresión funcional' para referirnos a una instancia adecuada de una letra funcional. Usaremos letras griegas minúsculas para hacer explícita y comprensible la circunstancia de que las letras funcionales tienen ariedad y que sus instancias deben mantenerla. El uso de las letras griegas, además, será especialmente útil para indicar de qué modo una instancia particular de una letra funcional debe encajar en la función correspondiente.

[81] Esta fórmula se obtiene aplicando [G] a la Proposición (61).

'a' entrarían en conflicto. Por lo tanto, como paso previo al cambio propuesto, es necesario realizar un cambio alfabético, por ejemplo, de '$\mathfrak{e}$' por '$\mathfrak{b}$', en la fórmula inicial:

$$\forall\mathfrak{b}[(f(\mathfrak{b}) \to a) \to (\forall\mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \to a)],$$

para poder realizar la substitución, a partir de la cual se obtiene como resultado:

$$\forall\mathfrak{b}[(f(\mathfrak{b}) \to \forall\mathfrak{e}(c \to f(\mathfrak{e}))) \to (\forall\mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \to \forall\mathfrak{e}(c \to f(\mathfrak{e})))].$$

2.3.3 Otras substituciones

El tercer tipo de substitución engloba cualquier otro cambio que afecta a las letras de la conceptografía en las demostraciones de *Begriffsschrift*. A diferencia de los cambios alfabéticos, estas substituciones no se producen, en general, entre fórmulas equivalentes. Globalmente, los procesos de substitución de este tercer tipo siempre consisten en la derivación de una fórmula que es el resultado de aplicar ciertas substituciones a una fórmula inicial. Todas estas substituciones conllevan el cambio de un argumento por otro del mismo tipo, esto es, el reemplazo de una letra, que expresa generalidad, por una instancia adecuada.

Como hemos discutido en los apartados 1.4.2 y 1.4.3, determinar qué es una instancia adecuada está directamente relacionado con la aseverabilidad. Cada letra, en un marco concreto y, en caso de haberlo, en un contexto de aplicación específico, expresa generalidad sobre un recorrido de expresiones que pueden ocupar su lugar. Todas estas expresiones, para poder ser consideradas instancias adecuadas, deben preservar la aseverabilidad de la fórmula en la que aparece la letra que debe substituirse. Como ya hemos comentado, hay reglas sintácticas, tanto generales como específicas de cada marco, que condicionan la aseverabilidad, así como condiciones semánticas adicionales determinadas por un contexto de aplicación. Por ejemplo, sería posible plantear substituciones de letras para argumento que sean válidas únicamente en aquellos marcos y contextos de aplicación en los que estas letras se interpreten como letras que refieren a objetos..

Los cambios alfabéticos afectan únicamente a aquellas subfórmulas que están dentro del alcance de la cuantificación de la letra gótica reemplazada. En cambio, las substituciones que consideramos ahora afectan al conjunto de la fórmula en la que tienen lugar. Para hacer patente esta diferencia, Frege usa tipografías distintas (letras góticas y letras latinas, respectivamente), que ya han sido presentadas en el apartado 1.2.6:

> "*Other substitutions are permitted only if the concavity follows immediately after the judgement stroke* so that the content of the whole judgement constitutes the scope of the German letter. Since, accordingly, this is a specially important case, I shall introduce the following abbreviation for it: *An italic letter is always to have as its scope the content of the whole judgement*, and this need not be signified by a concavity in the content stroke." [Frege, 1879a, §11, pp. 131-132]

Frege no detalla qué substituciones afectan a las letras latinas. Ahora bien, el hecho de que las letras latinas se consideren implícitamente cuantificadas es relevante, porque hace manifiesto que las letras expresan generalidad. Así, una substitución consiste en tomar una letra como el argumento de la fórmula en la que aparece y reemplazarla por una de sus instancias adecuadas; en conjunto, pues, una substitución consiste en una instanciación. Como veremos a continuación, este proceso puede producirse en varias ocasiones en el curso de una misma demostración: cada letra que se substituye es tomada como argumento de la fórmula en la que aparece y, por lo tanto, el análisis de la fórmula cambia con cada substitución.

A pesar de que son tratadas unitariamente por Frege, las substituciones que consideramos en este apartado pueden ser significativamente heterogéneas entre sí y, por esta razón, nuestra explicación estará regimentada en casos: substituciones de letras latinas y substituciones de letras funcionales por expresiones complejas. Un caso particular de las substituciones que afectan a letras funcionales exige, desde una perspectiva actual, tratar las fórmulas como esquemas. Por la particularidad de este caso, le daremos un tratamiento específico.

Substituciones de letras latinas

Los cambios de una letra latina por otra, como la substitución de 'a' por 'c' o de 'f' por 'g', no involucran, en general, cambios en el significado de la fórmula en la que se producen. En cierto sentido, se trata meramente de un cambio tipográfico, cuya finalidad, de modo parecido a como sucede con los cambios alfabéticos de letras góticas, es pragmática.

No obstante, en rigor, deberían poder llevarse a cabo en el cálculo, por mucho que Frege lleve a cabo estos reemplazos directamente. Y, de hecho, puede reproducirse en general un cambio de una letra latina por otra mediante una demostración en la conceptografía. El punto de partida es una expresión como '$f(a)$', cuyo argumento está cuantificado universalmente de forma implícita. La instancia de substitución de 'a' es 'c'. Así:

1. $f(a)$.
2. $\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$, [G] en (1).
3. $\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \rightarrow f(c)$, Ley básica (**L9**).
4. $f(c)$, [MP] en (3) y (2).

Esta misma deducción podría servir para justificar la transición de '$f(a)$' a '$g(a)$', esto es, el cambio de 'f' por 'g'. En tal caso, la ley básica (**L9**) se formula del modo siguiente:

$$\forall \mathfrak{F}\, \mathfrak{F}(a) \rightarrow g(a),$$

donde la función en '$\mathfrak{F}(a)$' y '$g(a)$' es '$\alpha(a)$'.

Esta explicación no procede explícitamente del texto de *Begriffsschrift*. En sentido estricto, desde la perspectiva de Frege sería posible proceder directamente de (1) a (4) sin necesidad de incluir los pasos intermedios; basta considerar esta transición como el resultado de la aplicación directa de (**L9**). Para el autor no sería necesario detallar más este proceso; la única dificultad que conlleva son los casos de substitución particulares, que deben resolverse individualmente mediante los cambios alfabéticos oportunos. Sin embargo, el hecho de que las substituciones puedan ser reconstruidas como el resultado de la aplicación de [G] y [MP] y el uso de (**L9**) muestra la coherencia del sistema de Frege.

Hay un tipo de cambio alfabético de letras latinas de naturaleza particular: el reemplazo de una letra para argumento por una letra funcional, como por ejemplo de 'c' por 'F'. Esta substitución se produce exclusivamente en logística, y en *Begriffsschrift* tiene lugar únicamente en el capítulo III[82]. Se trata, en cualquier caso, de un cambio de una letra latina por otra; técnicamente, no es problemático.

Naturalmente, un cambio como el de 'c' por 'F' tiene lugar en una fórmula cuya aseverabilidad, antes y después de la substitución, se mantiene intacta. La substitución de 'c' por 'F' conlleva tomar a 'c' como argumento de una función para la que una letra funcional debe ser un argumento adecuado. Así pues, el cambio mencionado puede exigir otros cambios en la fórmula para garantizar que ésta sigue siendo aseverable.

Las substituciones de letras para argumento por términos individuales son un tipo específico de substituciones de letras latinas y tienen sentido

[82] Véase la demostración de la Proposición (77) y nuestra reconstrucción de la demostración (93) en el apartado 2.4.2.

únicamente en logística; es necesario disponer de letras que, en un marco concreto, se interpreten exclusivamente como letras que refieren a objetos. En tal caso, la substitución de una letra para argumento por un término individual es completamente natural. Prueba de ello es que este caso de substitución se produce en multitud de ocasiones a lo largo del capítulo III de *Begriffsschrift*, donde las letras como 'x' o 'y' se interpretan invariablemente como letras que refieren a objetos.

Como discutiremos en el apartado 3.3.4, este caso de substitución se adapta, cuando la conceptografía se usa como base para la logística, a las reglas sintácticas que pueda tener el lenguaje de la disciplina a la que complementa la conceptografía. La única dificultad relevante que conllevan la substitución de un término individual por otro es la aparición de conflictos de cuantificación.

Las letras de la conceptografía pura, al margen de estos contextos de aplicación particulares, pueden leerse de maneras tan diversas que sería imposible fijar una interpretación concreta compatible con la substitución de términos por otros términos. Así pues, este caso de substitución, simplemente, no es aplicable en la conceptografía cuando este sistema formal se considera aisladamente.

Substituciones de letras funcionales (caso 1)

Las substituciones de letras funcionales por expresiones complejas consisten en el reemplazo de una letra funcional, que es tomada como argumento de la fórmula en la que aparece, por una de sus instancias[83]. Por consiguiente, su justificación global es equivalente a la substitución de letras latinas, ya que puede llevarse a cabo mediante la derivación que se ha propuesto para ese caso.

Ahora, bien, la substitución de letras funcionales por expresiones funcionales complejas puede requerir, en ocasiones, prestar atención a multitud de detalles, por el particular encaje de las letras funcionales tomadas como argumento en la función correspondiente. En concreto, la expresión por la que se substituye una letra funcional debe heredar su ariedad y, también, respetar la aseverabilidad de la expresión resultante. Y puede no ser trivial adaptar el lugar de argumento correspondiente a una letra funcional al propio de una expresión compleja.

[83]Las substituciones de letras funcionales de caso 1 tienen lugar en *Begriffsschrift* en las siguientes demostraciones: en §22, Proposición (65); §25, Proposiciones (70), (72) y (75); §27, Proposiciones (77) y (83); §28, Proposiciones (92), (97) y (98); §30, Proposiciones (109) y (110); §31, Proposiciones (116), (118), (120), (131) y (133).

Un buen ejemplo de este caso de substitución puede hallarse en la demostración de la Proposición (70), en la que interviene la Proposición (68):

$$\text{Pr. (68)} \qquad (\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \equiv b) \to (b \to f(c)). \tag{2.2}$$

El paso relevante en el proceso de derivación de (70) consiste en la substitución contextual en (68) de la letra 'f' en la forma '$f(\alpha)$' por la expresión funcional '$F(\alpha) \to \forall \mathfrak{a}(f(\alpha, \mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a}))$', que abreviaremos como '$\mathit{\Phi}(\alpha)$'[84].

Hay distintos elementos a tener en cuenta en esta substitución. En primer lugar, la letra 'f' es unaria y '$\mathit{\Phi}(\alpha)$' también lo es; por esta razón, en '$\mathit{\Phi}(\alpha)$' hemos usado únicamente 'α' y no varias letras griegas minúsculas distintas. En segundo lugar, una de las apariciones de 'f' en (68) está dentro del alcance de un cuantificador de '$\mathfrak{a}$' y '$\mathit{\Phi}(\alpha)$' contiene, asimismo, una cuantificación de '$\mathfrak{a}$'. De llevar a cabo directamente la substitución, el cuantificador en (68) entraría en conflicto con el cuantificador de '$\mathit{\Phi}(\alpha)$'. Por lo tanto, es necesario realizar un cambio alfabético previo que resuelva este conflicto. Frege indica que '$\mathfrak{a}$' debe reemplazarse por '$\mathfrak{d}$' en (68), fruto de lo cual resulta:

$$(\forall \mathfrak{d} f(\mathfrak{d}) \equiv b) \to (b \to f(c)).$$

Por último, hay que considerar elementos de naturaleza semántica, puesto que el marco en el que se sitúa esta substitución, esto es, la demostración de la Proposición (70), contiene símbolos con una interpretación fijada. Los lugares indicados por 'α' en '$\mathit{\Phi}(\alpha)$', esto es, en '$F(\alpha) \to \forall \mathfrak{a}(f(\alpha, \mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a}))$', son propios de letras que refieren a objetos. Esta circunstancia es compatible con una lectura posible de (68), según la cual las letras 'c' y '$\mathfrak{a}$' se interpretan como letras que refieren a objetos, y, además, se adapta completamente al marco determinado por la Proposición (70).

Una vez realizado el cambio de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{d}$' en (68), dado que la ariedad de la letra substituida y de su instancia es la misma y que (68) permite una lectura compatible con '$\mathit{\Phi}(\alpha)$' y con el conjunto del marco de esta demostración, no hay ningún criterio sintáctico ni semántico que informe de que la aseverabilidad de (68) se ve afectada por el cambio. Por consiguiente, la substitución es correcta. Si (68) es una fórmula válida, también lo es el resultado de substituir 'f' por '$\mathit{\Phi}(\alpha)$' en (68):

$$[\forall \mathfrak{d}(F(\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{a}(f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a}))) \equiv b] \to [b \to (F(c) \to \forall \mathfrak{a}(f(c, \mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a})))].$$

[84]En rigor, en '$\mathit{\Phi}(\alpha)$' no debería constar la letra 'f', por la que '$\mathit{\Phi}(\alpha)$' es substituida. Nótese, sin embargo, que 'f' en (68) es una letra unaria, mientras que en $\mathit{\Phi}(\alpha)$, 'f' es binaria. En este ejemplo particular, la presencia de 'f' en '$\mathit{\Phi}(\alpha)$' no tiene ningún efecto.

Frege realiza esta substitución directamente, sin comentarios y sin detallar las condiciones que, en rigor, debería cumplir. Ahora bien, aunque el proceso de substitución ejemplificado es aplicable a otros procesos de substitución similares, englobar todas las posibles substituciones del caso en una definición resulta farragoso, y este es un inconveniente para su formulación rigurosa. Sin embargo, a pesar de que la formulación precisa de la definición es compleja, su aplicación práctica presenta pocos problemas si se introducen los cambios alfabéticos adecuados, como es claro en el ejemplo planteado.

Desde una perspectiva actual, las substituciones de letras funcionales por expresiones funcionales complejas como la que hemos explicado pueden verse como la aplicación de la Regla de substitución en un sistema formal de segundo orden. Hay multitud de ejemplos de este caso de substitución en el capítulo III de *Begriffsschrift*.

Substituciones de letras funcionales (caso 2)

Algunas substituciones de *Begriffsschrift* que involucran letras funcionales no pueden reconstruirse como substituciones de variables de predicado por fórmulas. Su particularidad es que las letras funcionales que deben ser substituidas no admiten ser interpretadas como letras que refieren a propiedades, porque el marco en el que aparecen lo impide. Así pues, estas substituciones no pueden reproducirse en un cálculo de segundo orden.

En el ejemplo de substitución que hemos detallado en el apartado anterior, la letra 'f', que ha sido objeto de una substitución, aparece en (68) junto a letras como 'c' y '$\mathfrak{a}$' que, en el marco de la demostración de la Proposición (70), se interpretan como letras que refieren a objetos. Hay, sin embargo, marcos en *Begriffsschrift* en los que las letras funcionales a las que deben aplicarse substituciones aparecen junto a letras que no admiten esta misma interpretación, como en '$f(\mathfrak{F})$' o '$g(F)$', o que pueden ser interpretadas de otros modos[85]. En consecuencia, ni estas letras funcionales pueden ser leídas como letras que refieren a propiedades ni las substituciones que las afectan pueden reconstruirse en un sistema formal de segundo orden con una Regla de substitución para variables de predicado.

Las ocasiones más relevantes en las que este caso específico de substituciones de letras funcionales tiene lugar se hallan en el capítulo III de *Begriffsschrift*. Más adelante analizaremos las demostraciones de las Proposiciones (77) y (93), que incluyen este tipo de substituciones. Consideremos

[85]Véanse las demostraciones de las Proposiciones (77) y (93), que analizaremos con detalle en el apartado 2.4.2.

la siguiente aplicación de la Proposición (68):

$$(\forall \mathfrak{F} f(\mathfrak{F}) \equiv b) \to (b \to f(F)), \tag{2.3}$$

que Frege usa en la demostración de la Proposición (77). La única lectura posible en términos modernos de la fórmula (2.3) es la siguiente:

$$(\forall X \phi(X) \leftrightarrow \psi) \to (\psi \to \phi(Y)).$$

Frege indicaría los cambios de la letra 'f' en (2.3) exactamente del mismo modo que haría en la Proposición (68):

Pr. (68) $$(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \equiv b) \to (b \to f(c)).$$

Ahora bien, estos cambios no se pueden reproducir mediante la Regla de substitución de un cálculo de segundo orden.

Dos casos destacados de substituciones de letras funcionales de caso 2 tienen lugar en algunas demostraciones del capítulo III de *Begriffsschrift*: la substitución de '$f(\alpha)$' por '$\alpha(y)$' y la substitución de '$f(\alpha)$' por 'α'[86]. Este último caso es de naturaleza esencialmente proposicional y, de hecho, en los casos en los que Frege lo aplica, podría hacerse independientemente, esto es, deduciendo independientemente la fórmula que resulta de la substitución. Como veremos, seguir esta estrategia es, en ocasiones, lo más adecuado. En conjunto, estos dos casos de substituciones consisten en el reemplazo de una fórmula en la que aparece 'α', que indica el lugar que ocupa una letra funcional, por otra fórmula en la que aparece 'α'. En el caso de la substitución de '$f(\alpha)$' por 'α', '$f(\alpha)$' es una fórmula que contiene a 'α' como subfórmula.

Frege no distingue en absoluto los dos tipos de substituciones de letras funcionales que planteamos, y presenta el tipo particular de substituciones que estamos considerando exactamente del mismo modo que el resto de substituciones de letras funcionales: especifica la letra funcional a reemplazar y su instancia, asistiéndose de letras griegas para indicar el modo en que éstas encajan en la función correspondiente.

No obstante, desde un punto de vista actual, el hecho de que estas substituciones no admitan el mismo tratamiento que el resto de substituciones que afectan a letras funcionales es una circunstancia fundamental. La cuestión

[86] La substitución de '$f(\alpha)$' por '$\alpha(y)$' ocurre en *Begriffsschrift* únicamente en la demostración de la Proposición (93).

La substitución de '$f(\alpha)$' por 'α' se produce en *Begriffsschrift* en las siguientes demostraciones: §22, Proposición (68); §25, Proposición (75); §28, Proposición (89); §29, Proposición (100); §30, Proposición (105).

no es que Frege no disponga de las herramientas propias de un sistema formal de segundo orden; las substituciones de *Begriffsschrift*, y en particular las que se enmarcan en el caso que estamos considerando, son perfectamente correctas. Simplemente, en este texto Frege lleva a cabo algunas substituciones que exigen tratar como un esquema la fórmula en la que tienen lugar y son, por tanto, completamente ajenas a las substituciones propias de un sistema formal de segundo orden con una Regla de substitución para variables de predicado.

2.3.4 Conclusiones

En los procesos de substitución no está involucrada únicamente una regla de inferencia, sino también una definición de las substituciones posibles. Las definiciones especifican cómo deben llevarse a cabo las substituciones, mientras que las reglas permiten deducir una instancia de substitución a partir de una fórmula válida.

Estrictamente, la conceptografía debería disponer de definiciones para los distintos tipos de substitución que consideramos ahora. No obstante, exceptuando una breve indicación para los cambios alfabéticos, Frege no proporciona ninguna. Hemos planteado que, en esencia, una substitución en la conceptografía consiste en reemplazar una letra por una instancia adecuada. Ahora bien, Frege no especifica qué es una instancia adecuada ni explica cómo resolver en general los conflictos de cuantificación (que son abordados en cada caso particular sin comentarios). En sentido estricto, ambos elementos son imprescindibles en una definición rigurosa de substitución en un sistema formal. Sin embargo, dado que el lenguaje la conceptografía, considerada aisladamente, no es un lenguaje formal, no es posible especificar claramente y con detalle qué es una instancia adecuada ni indicar con precisión cómo llevar a cabo las substituciones para resolver los conflictos de cuantificación que puedan surgir. La plasticidad de las letras, que se pone de manifiesto en la amplia variedad de lecturas que admiten, impide formular una definición rigurosa y general de las substituciones. Explicamos, en cualquier caso, por qué es razonable que Frege no proporcione una definición tal para la conceptografía. Al fin y al cabo, no puede obviarse que todas las substituciones de *Begriffsschrift* son correctas y que, cuando en alguna demostración surge un conflicto de cuantificación, Frege lo resuelve adecuadamente.

Por lo que respecta a la *Regla de substitución*, los estudios históricos han discutido extensamente si Frege hace uso de ella en *Begriffsschrift* sin hacerla explícita, y por qué motivo no la formula. Lo cierto es que, bajo un análisis preliminar, el autor debería haber proporcionado una Regla de substitución para el cálculo de la conceptografía. Una explicación histórica completa debe, sin embargo, tratar de ofrecer una justificación a esta omisión.

Ahora bien, cuando se habla de esta regla de inferencia se refiere únicamente a la regla de inferencia que involucra substituciones de letras funcionales por expresiones funcionales complejas, esto es, para las substituciones de letras funcionales de caso 1. Si se exige formular una regla para este caso de substitución, deberían considerarse también las correspondientes reglas para el resto de casos: para las substituciones proposicionales, para el resto de substituciones de letras latinas (en particular, de letras para argumento por términos individuales) y para las substituciones de letras funcionales de caso 2. Y, sin embargo, la discusión histórica actual únicamente le reprocha a Frege haber omitido la regla para las substituciones de letras funcionales por expresiones funcionales de caso 1. Esta tendencia se explica por la lectura tradicional de *Begriffsschrift*, según la cual la conceptografía es un sistema formal de segundo orden.

De acuerdo con esta lectura, el fragmento proposicional del cálculo exige una regla de substitución, pero se evita especificarla formulando las leyes básicas como esquemas, y no como fórmulas concretas. Se entiende que las substituciones proposicionales fuera del fragmento proposicional de la conceptografía pueden realizarse de modo similar resolviendo los conflictos de cuantificación que eventualmente puedan aparecer. La regla correspondiente a las substituciones de letras para argumento, vistas como variables individuales, por términos se desprende de una interpretación parcial, en lenguaje de primer orden, de la ley básica (**L9**):

$$\forall x \phi(x) \to \phi(t),$$

donde ninguna aparición de 'x' en 'ϕ' está dentro del alcance de un cuantificador que ligue alguna de las variables de 't'.

Por consiguiente, desde esta perspectiva, sólo se considera necesario formular la regla que denominaremos 'Regla de substitución', que permite deducir, a partir de una fórmula válida, una fórmula en la que se ha substituido una letra funcional, vista como variable de predicado, por una expresión funcional. Esta regla de inferencia es fundamental por su equivalencia con el Axioma de comprensión, como se discutirá detalladamente en el apartado 4.2.4. Todas las dificultades que podría plantear la ausencia de esta regla se tratarán más adelante, en el apartado 4.3.1.

En algunas demostraciones de *Begriffsschrift* se producen substituciones de letras funcionales de caso 2, en las que la letra funcional reemplazada no puede interpretarse como variable de predicado (o no puede determinarse que ésta sea la única interpretación posible). Tal circunstancia exige tomar la fórmula a la que se aplican las substituciones como esquemas. Así pues, si únicamente se añade a la conceptografía una Regla de substitución para variables de predicado, se obvia que hay derivaciones que no pueden realizarse mediante una regla tal y, en consecuencia, ni se explica la razón por la cual Frege no la hace explícita en su exposición ni se pueden reconstruir todas las substituciones de *Begriffsschrift*. Además, si se ignoran las razones del autor, se compromete el rigor de su exposición, tan alabado en otros contextos. Por consiguiente, esta estrategia, ante la posibilidad de ofrecer una reconstrucción global y coherente de las substituciones de *Begriffsschrift*, resulta discutible.

2.4 Demostraciones de *Begriffsschrift*

La división por capítulos de *Begriffsschrift* refleja una estructuración de su contenido. El capítulo I está dedicado a la presentación de la los elementos más relevantes de la conceptografía, los capítulos II y III contienen casi exclusivamente deducciones. Así, la explicación del simbolismo está separada de la presentación y la aplicación del sistema axiomático. Es precisamente en esta aplicación, esto es, en la obtención de teoremas a partir del uso de las leyes básicas y de las reglas de inferencia, donde nuestra reconstrucción de la conceptografía puede ser verificada.

Esta sección se dedicará, en primer lugar, a exponer el contenido de los capítulos II y III de *Begriffsschrift*, en los que tienen lugar la presentación de las leyes básicas y las derivaciones. Se hará hincapié en el carácter específico de algunos de los símbolos usados en el capítulo III y en la naturaleza de sus definiciones. En segundo lugar, se reconstruirán tres demostraciones de *Begriffsschrift*, que tienen especial relevancia por contener substituciones que ponen de manifiesto la singularidad de la conceptografía.

2.4.1 Capítulos II y III de *Begriffsschrift*

El capítulo II comprende las Proposiciones (1)-(68) y contiene la exposición de las leyes básicas y la deducción de teoremas lógicos que son necesarios en las derivaciones del capítulo III. La mayor parte de estos teoremas (las Proposiciones (1)-(51)) son de naturaleza proposicional y no contienen letras funcionales. En el último apartado de este capítulo (§22), a partir de la demostración de la Proposición (62), Frege adopta el uso de nuevas letras para argumento a las que no había recurrido anteriormente: 'x', 'y' y 'm'. Estas letras no pertenecen propiamente a la conceptografía; son letras propias de un contexto de aplicación de logística. Probablemente, Frege las introduce pensando en el uso que se hace de ellas en el capítulo III de *Begriffsschrift*. Ahora bien, propiamente sólo la Proposición (63) es usada en un contexto logístico: esta proposición es usada en las demostraciones del capítulo III, y es posible que por esta razón incluya las nuevas letras. En las Proposiciones (62) y (64)-(66), el uso de x y y es completamente innecesario[87].

El capítulo II es una muestra de la conceptografía pura, esto es, del uso de este sistema formal aisladamente y sin una aplicación concreta. Sus proposiciones tienen un carácter meramente estructural, puesto que expresan propiedades de los símbolos lógicos de la conceptografía.

El último capítulo de *Begriffsschrift* comprende las Proposiciones (69)-(133) y está dedicado a la demostración lógica de proposiciones de naturaleza aparentemente aritmética:

> "[W]e see in this example how pure thought (regardless of any content given through the senses or even given *a priori* through an intuition) is able, all by itself, to produce from the content which arises from its own nature judgements which at first seem to be possible only on the grounds of some intuition (...). The propositions about sequences developed in what follows far surpass in generality all similar propositions which can be derived from any intuition of sequences." [Frege, 1879a, §23, p. 167]

Las proposiciones sobre sucesiones (*Reihe*) a las que se refiere Frege involucran las nociones de procedimiento, de propiedad hereditaria, de ancestral fuerte y débil, y de función en sentido matemático. Todas ellas poseen una notación específica y reciben, salvo la noción de procedimiento, una definición formal.

El uso de la noción de procedimiento supone una novedad muy importante con respecto a los dos primeros capítulos de *Begriffsschrift*: la introducción de símbolos no lógicos con una interpretación fija. El autor comienza a usar la letra 'f', hasta el momento usada como letra funcional genérica, como símbolo para un procedimiento. En palabras de Frege, la siguiente expresión:

$$\vdash f(\mathit{\Gamma}, \mathit{\Delta})$$

[87] La Proposición (62) es un teorema auxiliar que posibilita demostrar (63). Las Proposiciones (64), (65) y (66) no son, en cambio, auxiliares ni tienen ninguna aplicación en el capítulo III. Frege ejemplifica con ellas distintos modos de silogismo para familiarizar al lector de *Begriffsschrift* con el simbolismo de la conceptografía.

> "can be rendered, "Δ is a result of applying the procedure f to Γ.", or "Γ is the object of an application, with the result Δ, of the procedure f.", or "Δ bears the f-relation to Γ.", or "Γ bears the converse of the f-relation to Δ." These expressions are to be taken as equivalent in meaning." [Frege, 1879a, §24, p. 169]

En este contexto, la letra'f' es un parámetro que denota un procedimiento cualquiera. En cuanto procedimiento, f es una regla que, aplicada a un objeto de un ámbito determinado, permite obtener uno o más objetos del mismo ámbito. La operación sucesor o la relación de paternidad son ejemplos de procedimientos. Frege utiliza las letras 'x', 'y', 'v', 'z' y 'm' para referirse genéricamente a objetos y la letra 'F' para referirse genéricamente a propiedades cuando estas letras aparecen en el mismo contexto que 'f'. Por consiguiente, '$f(x,y)$' y '$F(x)$' deben verse como fórmulas atómicas que expresan lo siguiente, respectivamente: el objeto y es un resultado de aplicar el procedimiento f al objeto x y el objeto x tiene la propiedad F. Frege no considera que el procedimiento f tenga que proporcionar un único resultado para cada objeto, de modo que la noción de procedimiento no tiene carácter funcional (en el sentido de una función matemática). Las fórmulas atómicas sólo pueden aparecer en un contexto como éste, de logística, y no en conceptografía pura.

Cabe destacar que el añadido de estos símbolos no modifica la presentación ofrecida de la conceptografía. Las letras siguen teniendo un recorrido sobre una colección de expresiones. De hecho, la conceptografía puede adaptarse perfectamente a las características particulares de los símbolos que Frege introduce en el capítulo III: el uso de 'f', 'F' o 'x' está asociado a un contexto de aplicación particular y, por lo tanto, restringe las interpretaciones posibles de los restantes símbolos de las proposiciones donde estas letras aparecen.

Con la aportación de estos símbolos no lógicos al lenguaje de la conceptografía, Frege puede definir las nociones relevantes para su empresa: obtener por medios puramente lógicos teoremas que hagan uso de estas nociones, para cuya justificación se consideraba necesario, hasta ese momento, recurrir a la intuición. Las letras reservadas para designar genéricamente propiedades u objetos expresan generalidad restringida a cierta interpretación. En este sentido, la naturaleza lógica de la conceptografía en el capítulo III de *Begriffsschrift*, a pesar de la modificación de su lenguaje, se mantiene intacta.

El capítulo III comienza con la definición de la noción de propiedad hereditaria, que corresponde a la Proposición (69)[88]:

Pr. (69) $$\forall \mathfrak{d}[F(\mathfrak{d}) \rightarrow \forall \mathfrak{a}(f(\mathfrak{d}, \mathfrak{a}) \rightarrow F(\mathfrak{a}))] \equiv \mathrm{Her}(F).$$

Informalmente, según las palabras de Frege, (69) expresa:

> "*If from the proposition that* $\mathfrak{d}$ *has the property* F*, whatever* $\mathfrak{d}$ *may be, it can always be inferred that each result of an application of the procedure* f *to* $\mathfrak{d}$ *has the property* F*,*
>
> *then I say:*
>
> *'The property* F *is hereditary in the* f*-sequence'.*" [Frege, 1879a, §24, p. 170]

Dado que aparecen en el mismo contexto que 'f' y 'F', es natural interpretar '$\mathfrak{a}$' y '$\mathfrak{d}$' como letras que denotan genéricamente objetos. Naturalmente, esta interpretación no se aplica en general a '$\mathfrak{a}$' y '$\mathfrak{d}$', pues está determinada por el contexto de aplicación particular en el que aparecen. Por esta razón, Frege se expresa en estos términos en su explicación de la Proposición (69).

La definición de la noción de ancestral fuerte, que es relativa a un procedimiento f, tiene lugar en la Proposición (76)[89]:

Pr. (76) $$\forall \mathfrak{F}[\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \rightarrow (\forall \mathfrak{a}(f(x, \mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \rightarrow \mathfrak{F}(y))] \equiv f^*(x, y).$$

Frege realiza una lectura en lenguaje natural de (76):

> "*If from the two propositions, that every result of an application of the procedure* f *to* x *has the property* F*, and that the property* F *is hereditary in the* f*-sequence, it can be inferred, whatever* F *may be, that* y *has the property* F*;*
>
> *then I say:*
>
> *'*y *follows* x *in the* f*-sequence' or '*x *precedes* y *in the* f*-sequence'.*" [Frege, 1879a, §26, p. 174]

[88]Seguimos, en lo esencial, la notación adoptada por Boolos en 'Reading the *Begriffsschrift*' [Boolos, 1985, p. 332] para adaptar las proposiciones de *Begriffsschrift* y facilitar así su lectura. Tomamos 'Her(F)' como substituto del símbolo fregeano:

$$\begin{array}{ll} \delta & F(\alpha) \\ \big| & \big(\\ \alpha & f(\delta, \alpha). \end{array}$$

[89]Nuevamente, siguiendo a Boolos, tomamos '$f^*(x, y)$' como substituto de la expresión fregeana '${}^{\gamma}_{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$'. Véase la nota 88.

En términos actuales, el ancestral fuerte de un procedimiento f es la transitivización de f. La analogía con la aritmética puede ser clarificadora: dado que la operación sucesor puede verse como un procedimiento concreto, el correspondiente ancestral fuerte es la relación $<$; así, $x < y$ significa que x sigue a y en la sucesión determinada por la operación sucesor.

A partir de la noción de ancestral fuerte, y con la ayuda de la noción de propiedad hereditaria, Frege puede obtener resultados relevantes, como la Proposición (81):

Pr. (81) $$F(x) \rightarrow (\mathrm{Her}(F) \rightarrow (f^*(x,y) \rightarrow F(y))),$$

que Frege lee informalmente del modo siguiente:

> "*If x has the property F which is hereditary in the f-sequence, and if y follows x in the f-sequence, then y has the property F.*" [Frege, 1879a, §26, p. 177]

También es un resultado remarcable la Proposición (96):

Pr. (96) $$f^*(x,y) \rightarrow (f(y,z) \rightarrow f^*(x,z)).$$

La noción de ancestral débil se desprende de la noción de ancestral fuerte. Su definición es la Proposición (99)[90]:

Pr. (99) $$[\neg f^*(x,z) \rightarrow x \equiv z] \equiv f^*_{=}(x,z).$$

Frege expresa esta proposición en lenguaje natural:

> "*If z is identical with x or follows x in the f-sequence, then I say: "z belongs to the f-sequence beginning with x"; or, "x belongs to the f-sequence ending with z."*" [Frege, 1879a, §29, p. 186]

Finalmente, Frege introduce la noción matemática de función, que se aplica a un procedimiento f. Su definición tiene lugar en la Proposición (115)[91]:

Pr. (115) $$[\forall \mathfrak{e} \forall \mathfrak{d}(f(\mathfrak{d},\mathfrak{e}) \rightarrow \forall \mathfrak{a}(f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{a} \equiv \mathfrak{e}))] \equiv \mathrm{Fun}(f).$$

Informalmente, (115) expresa, en palabras de Frege:

---

[90] Como ha ocurrido con los símbolos usados en las proposiciones precedentes, recurrimos a una simplificación notacional inspirada en las adoptadas por Boolos, según la cual '$f^*_{=}(x,y)$' es el substituto de la expresión fregeana '$\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$'. Véase la nota 89.

[91] Siguiendo nuevamente el ejemplo de Boolos, adoptamos una última simplificación notacional: substituimos el siguiente símbolo fregeano:

$$\overset{\delta}{\underset{\epsilon}{\mathrm{I}}} f(\delta,\epsilon)$$

por 'Fun(f)'.

> *"If it can be inferred from the circumstance that $\mathfrak{e}$ is a result of an application of the procedure f to $\mathfrak{d}$, whatever $\mathfrak{d}$ may be, that every result of an application of the procedure f to $\mathfrak{d}$ is identical with $\mathfrak{e}$,*
>
> *then I say:*
>
> *"f is a many-one procedure"."* [Frege, 1879a, §31, p. 193]

Los símbolos 'Her(F)', '$f^*(x, y)$', '$f^*_=(x, y)$' y 'Fun(f)' son abreviaturas de fórmulas complejas. Frege lo afirma explícitamente en sus comentarios a la Proposición (69):

> "[N]othing follows from it [Proposition (69)] which could not also be inferred without it. The only aim of such definitions is to bring about an extrinsic simplification by the establishment of an abbreviation." [Frege, 1879a, §24, p. 168]

Sin embargo, el mismo autor plantea que las definiciones que involucran estos símbolos pueden verse de un modo alternativo:

> "Although originally (69) is not a judgement, still it is readily converted into one; for once the meaning of the new symbols is specified, it remains fixed from then on; and therefore formula (69) holds also as a judgement, but as an analytic one, since we can only get out what was put into the new symbols." [Frege, 1879a, §23, p. 168]

Según una lectura alternativa, los símbolos 'Her(F)', '$f^*(x, y)$', '$f^*_=(x, y)$' y 'Fun(f)' (o, al menos, los símbolos correspondientes propuestos por Frege) pueden verse como constantes; constantes cuyo significado ha sido establecido mediante definición. En este caso, tal y como plantea el autor, las respectivas definiciones de estos símbolos podrían considerarse propiamente juicios y, desde el punto de vista de Frege, juicios analíticos.

Globalmente, la estrategia de Frege en este capítulo III es clara: se trata de restringir la generalidad de la conceptografía para poder atribuir a las fórmulas significados concretos y obtener resultados en aritmética.

2.4.2 Demostraciones

En las demostraciones de *Begriffsschrift* hay algunas substituciones que requieren explicación; veremos cada caso en el contexto de una derivación. En cuanto tales, estas substituciones destacan por la naturaleza de los cambios que plantean, y presentan una dificultad a dos niveles. Por un lado, si se pretende reconstruir la conceptografía como sistema formal de segundo orden, es necesario dar cuenta de ellas y encajarlas dentro de los recursos deductivos propios de estos sistemas. Pero, por otro lado, exigen una explicación aislada, porque no es en absoluto evidente que sean legítimas ni que su aplicación sea correcta.

Sin embargo, la reconstrucción de ejemplos relevantes de estas substituciones, efectuadas en el transcurso de distintas demostraciones de teoremas de *Begriffsschrift*, puede realizarse en coherencia con la exposición desarrollada. Así pues, tratarán de verse como un soporte argumentativo para nuestra tesis.

Antes de reconstruir tres demostraciones donde estos casos de substitución tienen lugar, y para facilitar y simplificar nuestra explicación, se ofrecerá una exposición del recurso metodológico que denominamos 'tablas de substitución'.

Tablas de substitución

En las demostraciones, Frege realiza varias substituciones que representa mediante lo que llamaremos 'tablas de substitución'. Con ellas, indica todas las substituciones que deben realizarse. Así, es posible obtener fórmulas más complejas a partir de fórmulas más simples o de esquemas de fórmulas; como el autor plantea, "The little Table (...) serves to make [a] proposition (...) more easily recognizable in the more complex form in which it appears here" [Frege, 1879a, §15, p. 142].

Hay dos aspectos a destacar en cuanto a la notación que usa Frege y que variaremos en este trabajo. En primer lugar, el autor presenta las tablas de substitución verticalmente, de modo que la letra a substituir y su instancia de substitución se sitúan en la misma línea horizontal. Presentaremos, por razones de espacio, las tablas horizontalmente, por lo que las expresiones a substituir aparecerán encima de su instancia.

En segundo lugar, en los casos en los que una letra funcional debe ser substituida por una expresión compleja, Frege hace uso de letras griegas mayúsculas para indicar su ariedad y su instancia de substitución, así como para especificar los lugares donde esta expresión encaja en su respectiva función. Este recurso es necesario, puesto que no disponer de él no permitiría distinguir con claridad cómo aplicar estas substituciones.

En la demostración de la Proposición (65) Frege propone la substitución en la Proposición (61):

Pr. (61) $$(f(c) \to a) \to (\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \to a),$$

de 'f' por una expresión compleja. El autor indica este cambio del siguiente modo:

$$\frac{f(A)}{(h(A) \to g(A))}$$

Observemos que se trata de substituir una letra funcional unaria por una expresión funcional también unaria. El símbolo 'A' indica los lugares que serán ocupados por 'c' y por '$\mathfrak{a}$' cuando se aplique la substitución a '$f(c)$' y '$f(\mathfrak{a})$'. En concreto, el resultado de realizar esta substitución en (61) es el siguiente:

$$((h(c) \to g(c)) \to a) \to (\forall\mathfrak{a}(h(\mathfrak{a} \to g(\mathfrak{a}))) \to a).$$

En el apartado 1.2.5 se han introducido las letras griegas minúsculas para llevar a cabo el cometido que tiene 'A' en esta substitución. Como se ha discutido, el uso para el cual hemos introducido las letras griegas mayúsculas es, estrictamente, distinto. En cualquier caso, las indicaciones en los procesos de substitución mediante letras griegas minúsculas serán, salvando diferencias de notación, las mismas que las que proporciona Frege.

Respecto al proceso de substitución, es relevante señalar que puede darse de dos modos distintos. Habitualmente, las substituciones son simultáneas. Sin embargo, algunos casos pueden requerir substituciones ordenadas. Frege no da indicaciones al respecto, pero es claro que observa ambos modos de substitución y su procedimiento exige discriminarlos para llevar a cabo correctamente las substituciones planteadas.

Demostración de la Proposición (68)

Con la demostración de la Proposición (68) concluye el capítulo II de *Begriffsschrift*. Se trata de una derivación de la conceptografía pura, esto es, sin el añadido de símbolos con interpretación restringida. Así pues, en este contexto la letra 'f' es una letra funcional unaria genérica y no un parámetro, de modo que las letras para argumento que aparecen junto a ella no son, necesariamente, símbolos que refieren a objetos. Sin un contexto de aplicación específico, (68) es una proposición completamente general.

A lo largo de esta demostración se produce la substitución de una expresión funcional con interpretación proposicional por uno de sus componentes. En el caso que nos ocupa, se produce el cambio de '$f(\alpha)$' por el correspondiente 'α':

1. $[(\forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a}) \equiv b) \to (b \to \forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a}))] \to [(\forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a}) \equiv b) \to (b \to f(c))]$,

   Prop. (67).

2. $(c \equiv d) \rightarrow (f(d) \rightarrow f(c))$, Prop. (57).

3. $(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \equiv b) \rightarrow (b \rightarrow \forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}))$, Substitución en (2) de:

$$\begin{array}{ccc} f(\alpha) & c & d \\ \hline \alpha & \forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) & b \end{array}$$

4. $(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \equiv b) \rightarrow (b \rightarrow f(c))$, Prop. (68): [MP] en (1) y (3).

Hay dos aspectos relevantes a destacar en esta demostración: por un lado, la lectura de las letras para argumento en cada uno de sus pasos y, por el otro, el proceso de substitución llevado a cabo en (3).

En ambas apariciones del símbolo de igualdad en (1), uno de los símbolos puestos en relación es claramente una fórmula, '$\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$'. Así, de acuerdo con lo explicado, si se quisiera traducir a un lenguaje formal el símbolo de igualdad, debería interpretarse como un bicondicional. Y esta misma lectura debe mantenerse en (2), como hace explícito la tabla de substitución en (3). Por ello, las letras 'b' y 'd' deben interpretarse proposicionalmente a lo largo de toda la demostración.

El proceso de substitución en (3) debe ser ordenado. El punto de partida es la Proposición (57):

Prop. (57) $$(c \equiv d) \rightarrow (f(d) \rightarrow f(c)),$$

y la tabla de substitución siguiente:

$$\begin{array}{ccc} f(\alpha) & c & d \\ \hline \alpha & \forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) & b \end{array}$$

Es claro que, en este caso, el orden de substitución no es arbitrario. Para obtener el resultado conveniente, es preciso seguir una secuencia ordenada de pasos en lugar de realizar una substitución simultánea. Así, el primer paso consiste en aplicar la substitución siguiente:

$$\begin{array}{c} f(\alpha) \\ \hline \alpha \end{array}$$

lo cual permite obtener:

$$(c \equiv d) \rightarrow (d \rightarrow c).$$

Tras este primer paso, es posible llevar a cabo las siguientes substituciones:

$$\begin{array}{cc} c & d \\ \hline \forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a}) & b \end{array}$$

que llevan a la fórmula definitiva:

$$(\forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a}) \equiv b) \rightarrow (b \rightarrow \forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a})).$$

Lo relevante en este proceso es la substitución de ‘$f(\alpha)$’ por ‘α’, esto es, de ‘$f(c)$’ por ‘c’ y de ‘$f(d)$’ por ‘d’. Estos cambios no son aceptables a menos que ‘c’ y ‘d’ se interpreten o bien proposicionalmente o bien como sentencias en contextos de lógica cuantificada; los cambios correspondientes a ambas letras así lo atestiguan. En esta demostración, (2) debe interpretarse del mismo modo que en la actualidad se interpreta la fórmula siguiente:

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\Phi(\psi) \rightarrow \Phi(\phi)),$$

es decir, en este caso, ‘$f(\alpha)$’ debe verse como una fórmula cualquiera en la que aparece ‘α’; dicho en otros términos, ‘$f(\alpha)$’ es una fórmula cualquiera que contiene a ‘α’ como subfórmula. Entendida de este modo, es claro que ‘α’ es un caso particular de ‘$f(\alpha)$’. Esta substitución no tiene una contrapartida dentro de un sistema formal de primer o segundo orden.

El hecho que la Proposición (57) deba interpretarse proposicionalmente en (2) provoca que la letra ‘f’ no pueda interpretarse uniformemente en el marco de esta demostración. En efecto, la lectura propuesta para ‘f’ en (2), que está determinada por al substitución de ‘$f(\alpha)$’ por ‘α’, no es compatible con las lecturas aceptables de las apariciones de ‘f’ en (1), (3) y (4). Preliminarmente, hay dos opciones ante esta dificultad. La primera consiste en demostrar independientemente la fórmula siguiente:

$$(c \equiv d) \rightarrow (d \rightarrow c),$$

e introducirla como (2) en lugar de (57). La segunda opción es introducir un cambio alfabético previo en la Proposición (57) que permita preservar la interpretación de ‘f’ a lo largo de la demostración[92].

Demostración de la Proposición (77)

La demostración de la Proposición (77) pertenece al capítulo III de *Begriffsschrift*. Contiene el parámetro ‘f’, la letra ‘F’, que refiere genéricamente a

[92]A pesar de que dedica dos apéndices a la reconstrucción en notación moderna de las 68 primeras derivaciones de *Begriffsschrift* en *The Philosophy of Gottlob Frege* [Mendelsohn, 2005], L. Mendelsohn no hace ningún comentario a la substitución de ‘$f(\alpha)$’ por ‘α’ en la demostración presente [Mendelsohn, 2005, p. 201].

propiedades, así las como letras 'x' e 'y', cuyas instancias de substitución forman parte de un recorrido de nombres de objetos. Además, en (77) aparece el predicado 'Her(F)'. Por consiguiente, (77) es una proposición propia de los contextos de aplicación consistentes con la interpretación de los parámetros. En su demostración interviene la Proposición (68), y las substituciones a las que se ve sometida también restringen su generalidad. Por ello, esta demostración es, en conjunto, una prueba fehaciente de la influencia del contexto de aplicación en el recorrido de las letras de la conceptografía.

La demostración que se expondrá a continuación tiene una relevancia especial por ser un punto de discusión clave respecto a la cuestión de las substituciones en la conceptografía y, sobre todo, respecto al debate sobre la vulnerabilidad de la conceptografía a la paradoja de Russell, como se verá en el apartado 4.4.3. En ella hay dos casos de substitución destacables: en primer lugar, se produce la substitución de una letra funcional que hemos llamado caso 2 y, en segundo lugar, se substituye una letra para argumento por una letra funcional:

1. $\forall\mathfrak{F}[\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to \mathfrak{F}(y))] \equiv f^*(x,y)$[93], Prop. (76).

2. $(\forall\mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \equiv b) \to (b \to f(c))$, Prop. (68).

3. $[\forall\mathfrak{F}[\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to \mathfrak{F}(y))] \equiv f^*(x,y)] \to [f^*(x,y) \to (\mathrm{Her}(F) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a})) \to F(y)))]$, Substitución en (2) de:

$$\begin{array}{cccc}
\mathfrak{a} & f(\beta) & b & c \\
\hline
\mathfrak{F} & \mathrm{Her}(\beta) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \beta(\mathfrak{a})) \to \beta(y)) & f^*(x,y) & F
\end{array}$$

4. $f^*(x,y) \to (\mathrm{Her}(F) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a})) \to F(y)))$, Prop. (77): [MP] en (3) y (1).

De nuevo, en esta demostración hay aspectos importantes que conviene subrayar. Todos ellos se hallan en las substituciones planteadas en (3). El primer paso de estas substituciones, el cambio de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$', es muy relevante. Es claro, comparando (1) y (2), que Frege propone leer (2) del siguiente modo:

$$(\forall\mathfrak{F} f(\mathfrak{F}) \equiv b) \to (b \to f(c)).$$

[93]Respecto a la notación utilizada, véanse las notas 88 y 89.

Se trata de la aplicación de (2) a un tipo específico de letras cuantificadas. Al llevar a cabo el cambio entre '$\mathfrak{a}$' y '$\mathfrak{F}$', se hace explícito que, en este caso concreto, las instancias aceptables de la letra cuantificada son expresiones funcionales. Se distinguen estas lecturas para hacer más perspicuo el tipo de expresión que resulta apropiado en el marco de esta demostración. Ciertamente, en el reemplazo de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$' hay un cambio. Sin embargo, este cambio consiste únicamente en la restricción de las instancias y, por lo tanto, no equivale al paso de una cuantificación de primer orden a una cuantificación de segundo orden.

El segundo paso en la obtención de (3) es la substitución de la letra 'f' por una expresión funcional compleja: se reemplaza '$f(\beta)$' por '$\mathrm{Her}(\beta) \rightarrow (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \rightarrow \beta(\mathfrak{a})) \rightarrow \beta(y))$'. La substitución de una letra funcional por una expresión funcional compleja es tan natural, dada la ausencia de conflictos en las cuantificaciones, que no precisa de explicaciones[94]. Sin embargo, esta substitución no resulta de la aplicación de la Regla de substitución en un cálculo de segundo orden, puesto que no es una substitución de letras funcionales de caso 1: consiste en el cambio de '$f(\mathfrak{F})$' y '$f(c)$' por fórmulas complejas. En este caso, dado que la interpretación de 'f' debe ser uniforme en el marco, 'c' no puede interpretarse como un término individual y, por otra parte, es obvio que '$\mathfrak{F}$' tampoco admite tal interpretación. En un sistema formal actual, debería tomarse (2) como el siguiente esquema:

$$(\forall X\phi(X) \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi(Y)),$$

y considerar que la substitución de 'f' consiste en el reemplazo de '$\phi(\beta)$' por la instancia propuesta, esto es, una expresión funcional que forma una fórmula cuando se complementa con una letra funcional interpretada como una variable de predicado.

En tercer lugar, según propone la tabla de (3), se substituye la letra 'b', que claramente se interpreta proposicionalmente (por una razón similar a la que, en la demostración anterior, obligaba a interpretar proposicionalmente 'b' y 'd'), por '$f^*(x,y)$'. Dado que el uso de la letra 'b' es proposicional, y

[94]En '$f(\beta)$', 'f' es unaria y, en '$\mathrm{Her}(\beta) \rightarrow (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \rightarrow \beta(\mathfrak{a})) \rightarrow \beta(y))$', es binaria. La ambigüedad se produce únicamente por el uso de la Proposición (68), que contiene la letra funcional unaria 'f', letra que puede confundirse con la letra de procedimientos binaria '$f(\alpha,\beta)$'. En rigor, para evitar ambigüedades, (2) podría ser expresada mediante un cambio alfabético de 'f' por 'g':

$$(\forall\mathfrak{a}g(\mathfrak{a}) \equiv b) \rightarrow (b \rightarrow g(c)).$$

Sin embargo, en este caso, Frege no lleva a cabo este cambio por el uso de '$f(\alpha,\beta)$' como parámetro, y por la diferente ariedad de las distintas apariciones de 'f' (en (2) y en (3)).

que no hay ninguna cuantificación que pueda afectar a este cambio, se trata de un paso trivial en la demostración.

Por último, se substituye la letra 'c' por la letra 'F'. Con ello, puede comprobarse que las letras funcionales son, en ciertos contextos, instancias de substitución de letras para argumento. Al fin y al cabo, el rol que estas letras juegan en la expresión en la que aparecen es común: 'c' es el argumento y este rol es heredado por 'F'. El mismo Frege indica esta circunstancia, al afirmar que "Here, in accordance with §10, $F(y)$, $F(\mathfrak{a})$ and $F(\alpha)$[95] are to be considered different functions of the argument F" [Frege, 1879a, §27, p. 175]. Por tanto, una letra funcional que aparece en un enunciado complejo puede ser tomada como argumento, y ello no hace más que recalcar el tipo de expresiones sobre las que tiene aplicación la proposición. La substitución es legítima en tanto que la estructura de la expresión completa en (3) no cambia por causa de ella. Muestra de ello es que el cambio no equivale a un paso de una cuantificación de primer orden a una de segundo orden; ya se ha visto que se trata, simplemente, del uso de una convención sintáctica.

Demostración de la Proposición (93)

La demostración de la Proposición (93) también pertenece al capítulo III de *Begriffsschrift* y las fórmulas que la componen, como en la derivación de (77), contienen símbolos con una interpretación específica. De hecho, el uso de alguno de estos símbolos involucra substituciones que no pueden aplicarse en general a cualquier expresión de la conceptografía. Discutiremos cómo estas substituciones están determinadas por el contexto de aplicación y por qué esta circunstancia puede afectar a la aseverabilidad de la expresión en la que se realizan.

Esta demostración destaca por contener dos tipos de substituciones a tener en cuenta. En primer lugar, incluye substituciones de letras funcionales de caso 2, de las que ya se ha visto un ejemplo en la demostración de (77). En particular, se produce en ella la substitución de la letra funcional por una expresión funcional atómica: en este ejemplo concreto, se lleva a cabo la substitución de '$f(\beta)$' por '$\beta(y)$'. Y, en segundo lugar, como sucede en la demostración de (77), se produce la substitución de una letra para argumento por una letra funcional. Por reunir estos dos tipos de substituciones distintos, la demostración de (93), a pesar de tener en común muchos elementos con la demostración (77), es relevante por sí misma:

[95] El símbolo 'α' forma parte de la notación que abreviamos aquí como 'Her(F)', y no debe entenderse como un indicador del lugar del argumento. Véase la nota 88.

1. $[c \to \forall\mathfrak{F}(\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to \mathfrak{F}(y)))] \to (c \to f^*(x,y))$,
Prop. (90).

2. $[\forall\mathfrak{F}(\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to (\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}(y))) \to \forall\mathfrak{F}(\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to \mathfrak{F}(y)))] \to [\forall\mathfrak{F}(\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to (\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}(y))) \to f^*(x,y)]$, Substitución en (1) de:

$$\frac{c}{\forall\mathfrak{F}[\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to (\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}(y))]}$$

3. $\forall\mathfrak{a}[h(\mathfrak{a}) \to (g(\mathfrak{a}) \to f(\mathfrak{a}))] \to [g(b) \to (h(b) \to f(b))]$, Prop. (60).

4. $\forall\mathfrak{F}[\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to (\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}(y))] \to \forall\mathfrak{F}[\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to \mathfrak{F}(y))]$, [C] y substitución en (3) de:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{a} & f(\beta) & g(\beta) & h(\beta) & b \\ \hline \mathfrak{F} & \beta(y) & \mathrm{Her}(\beta) & \forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \beta(\mathfrak{a})) & \mathfrak{F} \end{array}$$

5. $\forall\mathfrak{F}(\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to (\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}(y))) \to f^*(x,y)$, Prop. (93):
[MP] en (2) y (4).

Esta compleja demostración requiere comentarios en casi cada uno de sus pasos. En primer lugar, hay que destacar una lectura divergente de las letras 'c' y 'b'. Por un lado, la letra 'c' debe interpretarse proposicionalmente, como hace explícita su substitución en (2) y el hecho de que sea el antecedente, en (1), de dos condicionales distintos. Pero, la letra 'b' no admite la misma interpretación, puesto que es substituida en (4) por una letra funcional.

En segundo lugar, en (2) se reemplaza 'c', que se interpreta proposicionalmente, por una fórmula compleja. Dado que 'c' no aparece en (1) dentro del alcance de un cuantificador que afecte a alguna de las letras góticas de la instancia de 'c', la substitución no produce conflictos de cuantificación y, por lo tanto, no supone ninguna dificultad.

En tercer lugar, hay que prestar atención a la tabla de substitución de (4). Para facilitar nuestra explicación, detallaremos cada uno estos cambios en orden secuencial. El primer paso de esta tabla consiste en el cambio alfabético de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$'. Este cambio es análogo al que ocurre en la demostración de la Proposición (77): consiste en hacer explícita la lectura adecuada para (3) en el marco de esta demostración. En esta última proposición, hay un argumento cuantificado que, para el curso de la demostración, es más conveniente leer como letra funcional que como letra para argumento. Así pues, Frege propone leer (3) del siguiente modo:

$$\forall \mathfrak{F}[h(\mathfrak{F}) \to (g(\mathfrak{F}) \to f(\mathfrak{F}))] \to [g(b) \to (h(b) \to f(b))].$$

Ninguna de las substituciones que afectan a letras funcionales de esta fórmula puede reproducirse en un sistema formal de segundo orden por medio de una regla de substitución para variables de predicado. Todas ellas son ejemplos paradigmáticos de lo que hemos llamado substituciones de letras funcionales de caso 2. Las expresiones '$f(\mathfrak{F})$', '$g(\mathfrak{F})$' o '$h(\mathfrak{F})$' no pueden verse como fórmulas atómicas. De hecho, en el marco de la demostración, y dada la substitución que afecta a la letra 'b', ni siquiera '$f(b)$', '$g(b)$' o '$h(b)$' pueden verse como fórmulas atómicas, como veremos a continuación. Las instancias aceptables de '$\mathfrak{F}$' y de 'b', en este marco, no son, en ningún caso, términos, por lo que, en rigor, para reproducir las substituciones indicadas en (4) habría que tratar (3) como el siguiente esquema:

$$\forall X(\phi(X) \to (\psi(X) \to \chi(X))) \to (\psi(Y) \to (\phi(Y) \to \chi(Y))),$$

Y, además, ver las substituciones que afectan a 'f', 'g' y 'h' como reemplazos de '$\phi(\beta)$', '$\psi(\beta)$' y '$\chi(\beta)$', respectivamente, por las instancias propuestas (expresiones funcionales que, en combinación con letras interpretadas como variables de predicado, constituyen fórmulas).

Si se sigue estrictamente el orden que propone Frege en la tabla de substitución de (4), puede analizarse mejor el proceso de substitución de las letras funcionales de (3). Si bien las letras 'f', 'g' y 'h' aparecen tanto en el antecedente como en el consecuente de (3), fijaremos nuestros comentarios únicamente en el consecuente de (3). El punto de partida es, por tanto:

(*i*) $g(b) \to (h(b) \to f(b))$.

Como hemos mencionado, el segundo paso en la substitución es el cambio de '$f(b)$' por '$b(y)$':

(*ii*) $g(b) \to (h(b) \to b(y))$.

Pese a que 'b', independientemente de su uso proposicional, habitualmente figura en toda expresión, como en '$g(b)$', entre paréntesis, esta posición se invierte en '$b(y)$'. Naturalmente, esta diferencia no conlleva ningún cambio en el rol de la letra 'b'. Esta doble posición pone de relieve que esta letra será substituida por una expresión funcional, y que '$g(\alpha)$' y '$h(\alpha)$' tienen como instancias expresiones que se aplican a expresiones funcionales. Lo verdaderamente significativo es que puede considerarse una expresión como '$b(y)$', aún a pesar de que aparezca únicamente en un paso intermedio en una substitución. Siendo 'y' una letra que se interpreta como variable individual, las instancias de 'b' deberán ser expresiones funcionales aplicables a objetos; en particular, predicados o símbolos relacionales. Dado que 'b' aparece en otros lugares en (3), esta circunstancia deberá tenerse en cuenta[96].

El tercer y cuarto paso en la substitución es el cambio de las letras 'g' y 'h' por expresiones complejas, esto es, el reemplazo de '$g(b)$' por '$\mathrm{Her}(b)$' y de '$h(b)$' por '$\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to b(\mathfrak{a}))$'. De todos estos cambios resulta sucesivamente:

(*iii*) $\mathrm{Her}(b) \to (h(b) \to b(y))$.

(*iv*) $\mathrm{Her}(b) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to b(\mathfrak{a})) \to b(y))$.

En (*iv*) destaca aún más claramente el papel reservado a 'b'. La substitución que afecta a 'h' modifica el contexto en el que aparece 'b', pues este cambio hace explícito que las instancias adecuadas de 'b' son expresiones funcionales y, en particular, símbolos de predicado o relacionales. Al fin y al cabo, debe ser aseverable una expresión en la que el '$\mathrm{Her}(\alpha)$' se aplica a 'b'. Así lo atestigua el último cambio en la substitución de (4): 'b' se substituye por '$\mathfrak{F}$', lo que implícitamente conlleva el añadido de la cuantificación de '$\mathfrak{F}$':

(*v*) $\forall\mathfrak{F}[\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \to \mathfrak{F}(y))]$.

Este último paso de la tabla de substitución de (4) es, en parte, de carácter notacional. Dados los cambios a los que se somete (3) en (*ii*) – (*iv*), la substitución de 'b' por '$\mathfrak{F}$' simplemente facilita la lectura de (4), pero no modifica en absoluto el significado de esta proposición. Esta última es una substitución análoga a la que se produce en (77) entre 'c' y 'F'. La substitución que nos ocupa tiene, sin embargo, una particularidad: el hecho de que '$\mathfrak{F}$' aparezca en tipografía gótica indica que, además de llevar a cabo el cambio, es preciso realizar un Confinamiento del cuantificador para indicar el alcance concreto de la cuantificación de '$\mathfrak{F}$'.

[96]La presencia de substituciones en *Begriffsschrift* que únicamente son válidas en determinados contextos de aplicación afecta al planteamiento de R. Heck y de R. May al respecto, que afirman en 'The Function is Unsaturated' [Heck; May, 2013] que "[a]pparently, argument-symbols are being freely substituted for function-symbols and *vice versa*" [Heck; May, 2013, p. 829]. Hemos comentado otro caso de substitución que no es válida en general en nuestra reconstrucción de la demostración de la Proposición (68).

Precisamente, el último elemento que hay que destacar en la demostración es el Confinamiento llevado a cabo en (4). Hemos preferido, reproduciendo exactamente el proceso que sigue el propio Frege, ofrecer una explicación separada de estos distintos pasos, dado el particular papel que juega la letra '$\mathfrak{F}$' en el conjunto de la demostración. El autor no hace explícita la aplicación de [C], pero muestra fehacientemente el resultado en el curso de la demostración para disipar cualquier duda. De hecho, las substituciones que conllevan un cambio en la tipografía (como es el cambio de 'b' por '$\mathfrak{F}$') están asociadas a una convención de *Begriffsschrift*: cuando una letra figura en tipografía gótica en el consecuente, es necesaria una cuantificación explícita. Así pues, se ha incluido, de acuerdo con [C], una cuantificación de '$\mathfrak{F}$' en el consecuente de (4).

2.4.3 Recapitulación

La exposición del sistema axiomático de la conceptografía y, especialmente, de algunas demostraciones que tienen lugar en *Begriffsschrift*, permite contrastar el planteamiento que se ha desarrollado a lo largo del capítulo 1. En deducciones concretas es posible apreciar, por un lado, de qué modo Frege aplica su distinción entre función y argumento y, por el otro, cuál es su tratamiento de los distintos elementos del lenguaje. Nuestra reconstrucción ha tratado de enfatizar los aspectos en los que la conceptografía es genuinamente original y distinta de la lógica contemporánea.

El cometido de este apartado es recapitular los componentes básicos de nuestra exposición acerca del esquema función-argumento en el contexto de los procesos deductivos de la conceptografía. Se insistirá en la extraordinaria flexibilidad que Frege atribuye a la estructuración de la conceptografía, y en cómo esta circunstancia determina un modo particular de usar el lenguaje.

A lo largo del capítulo 1, y especialmente en el apartado 1.3.2, se ha enfatizado que la distinción fregeana entre función y argumento se aplica únicamente a expresiones y se ha explicado que la descomposición de una expresión en parte reemplazable y parte fija no es absoluta: la flexibilidad de la distinción entre función y argumento impide diferenciar de modo determinante los elementos del lenguaje según se consideren componentes fijos o componentes reemplazables. En determinadas circunstancias (por ejemplo, en el marco de una demostración), un componente que inicialmente es función puede ser considerado argumento, o una expresión que normalmente es el argumento puede ser parte del componente funcional.

El esquema función-argumento se aplica a todos los niveles del lenguaje. Una expresión como '$f(a)$' es en principio indicadora de una división y, dado que está compuesta por letras que expresan generalidad, aparece únicamente en las demostraciones. Para la explicación de la conceptografía, Frege utiliza el esquema '$\Phi(A)$', que es una forma genérica y representa una expresión compuesta de argumento y función. Hay un análisis inicial, según el cual 'f' es función y 'a' es argumento, pero la misma expresión admite ser analizada de modos distintos. Al fin y al cabo, si hay un análisis inicial es por razones pragmáticas, pero no hay ningún aspecto sistemático que le atribuya un papel primordial.

Pero, además, cuando una expresión como '$f(a)$' no aparece aisladamente, sino en un marco cualquiera, el análisis puede ser completamente distinto. El rasgo definitorio de las letras, como elementos del lenguaje, es que expresan generalidad sobre las expresiones que pueden ocupar su posición en una fórmula determinada. No es posible fijar de antemano ni el hecho de que una letra concreta sea función o argumento ni tampoco el conjunto de expresiones por las que esta letra puede substituirse. En el apartado 1.3.2 se ha observado cómo una expresión como '$f(a)$' puede ser considerada, según el contexto de aplicación y el marco en el que se encuentre, una fórmula, compleja o atómica, o un término. El elemento esencial es que no hay modo de determinar, por ejemplo, en qué circunstancias '$f(a)$' es una fórmula atómica: dada la generalidad de las letras, nada exige que las instancias de 'f' sean únicamente símbolos de predicado (o relacionales), ni que las instancias de 'a' sean invariablemente términos. Y, de hecho, aunque dichas circunstancias pudiesen especificarse, tomar en cada caso 'f' y 'a' como función o argumento dependería de la expresión en la que apareciesen y de las substituciones que hubiese que aplicarle, de modo que los posibles análisis no estarían, en ningún caso, predeterminados.

Consideremos la siguiente fórmula, a la que hemos aludido en el apartado 1.3.2:

$$(c \equiv d) \rightarrow (f(c) \equiv f(d)). \tag{2.4}$$

En tanto que letras cuya generalidad está subordinada a la aseverabilidad en el marco en el que aparecen, las letras 'f','c' y 'd' tienen en (2.4) cierto recorrido de instancias.

Por un lado, nada exige que 'f' sea la función y 'c' el argumento; este análisis se lleva a cabo en el conjunto de (2.4) y no en cada uno de sus componentes. Así pues, si 'c' es el argumento de esta expresión compleja, entonces 'f' es una parte de la función resultante, que puede ser tanto '$(\alpha \equiv d) \rightarrow (f(c) \equiv f(d))$', como '$(c \equiv d) \rightarrow (f(\alpha) \equiv f(d))$' o '$(\alpha \equiv d) \rightarrow (f(\alpha) \equiv f(d))$'. También es posible considerar que 'c' y 'd' son conjuntamente argumentos. Pero, además, 'f' puede ser argumento, de modo que 'c' pasaría a formar parte de la función, que podría ser, en este caso, '$(c \equiv d) \to (\alpha(c) \equiv f(d))$', '$(c \equiv d) \to (f(c) \equiv \alpha(d))$' o '$(c \equiv d) \to (\alpha(c) \equiv \alpha(d))$'. Incluso es perfectamente posible que en una expresión funcional, si el marco en el que aparece (2.4) así lo indica, sea el argumento de una expresión compleja; en tanto que componente de una expresión, puede ser considerada la parte que varía.

Y, por otro lado, las expresiones que pueden ocupar la posición de 'α' en '$(c \equiv d) \to (\alpha(c) \equiv \alpha(d))$', que aparece en (2.4), pueden ser expresiones funcionales complejas y, en particular, lo que en lógica actual llamamos variables funcionales, o variables o constantes de predicado. El hecho de que un mismo símbolo admita lecturas muy distintas hace imposible delimitar completamente el recorrido de cada letra. Dicho explícitamente, no puede determinarse si '$f(c)$' en (2.4) debe interpretarse como término, como fórmula atómica o como fórmula compleja. De hecho, sabemos que incluso es posible interpretar (2.4) metalingüísticamente. Únicamente un marco o un contexto de aplicación particular permiten acotar la interpretación de '$f(c)$' en (2.4). El modo de presentación en el que una letra figura entre paréntesis, y la otra a la izquierda de los paréntesis, remite a una estructuración inicial, y nada más. De hecho, este análisis inicial es modificado a conveniencia en el curso de una demostración. En este sentido, las letras del lenguaje de la conceptografía pueden verse más como símbolos de metalenguaje que como variables, puesto que no restringen en absoluto el recorrido en el que toman valores. Apreciando esta circunstancia es comprensible que la conceptografía pueda complementarse con total naturalidad con cualquier teoría con un lenguaje regimentado.

En el apartado 2.4.1 se ha planteado que, en el capítulo III de *Begriffsschrift*, Frege introduce símbolos con una interpretación particular y, por tanto, determina un contexto de aplicación específico, aunque de naturaleza puramente abstracta. A pesar de que no es posible determinar en general que '$f(c)$' sea o no una fórmula atómica, '$f(x, y)$' sí lo es y, de hecho, no admite ninguna lectura alternativa. Esta circunstancia determina de un modo muy específico un contexto de aplicación para el conjunto de letras de la conceptografía, y no únicamente para los nuevos símbolos. Así, mientras que '$g(a)$', considerada como expresión aislada, debe ser vista únicamente como esquema, la expresión siguiente:

$$g(a) \to f(x, a),$$

es un esquema que presenta restricciones para las posibles interpretaciones de sus letras. Dado que, en este contexto, 'f' es un procedimiento, 'a' es una letra que refiere a objetos y, por lo tanto, '$g(a)$' expresa más que una simple división entre un componente reemplazable y un componente que permanece fijo, puesto que el recorrido de instancias adecuadas de 'g' y 'a' ha sido convenientemente restringido. En consecuencia, en el capítulo III de *Begriffsschrift* conviven dos perspectivas distintas: por un lado, la propia de la conceptografía y, por el otro, la determinada por el uso de símbolos con una interpretación.

Esta particularidad, sin embargo, no afecta a la flexibilidad con la que se concibe la relación entre la estructura básica de la conceptografía y las letras de su lenguaje. De hecho, es habitual hallar ejemplos donde el esquema función-argumento está aparentemente alterado. Todos ellos se han analizado en el apartado 2.4.2. En efecto, en la demostración de la Proposición (77), hallamos '$f(\mathfrak{F})$' en un paso intermedio de la deducción. O, de modo aún más llamativo, en el proceso de demostración de la Proposición (93), encontramos una expresión como '$b(y)$' como parte de una fórmula. El marco de la demostración restringe las posibles lecturas de estas expresiones, y el hecho de que se presenten de este modo es una forma de indicar qué tipo de instancias son las adecuadas. Pero la presencia de una división entre función y argumento se mantiene sin cambios: el argumento es el componente que se considera reemplazable. En el curso de una demostración, la división entre función y argumento de una fórmula va cambiando a medida que se realizan substituciones; en cada substitución, el argumento de la fórmula en cuestión es aquella letra que va a ser reemplazada. Por ejemplo, en el curso de la demostración de la Proposición (93), hemos detallado secuencialmente las substituciones que afectan al consecuente de una de sus premisas. Este proceso consiste en los siguientes pasos:

(i) $g(b) \rightarrow (h(b) \rightarrow f(b))$.

(ii) $g(b) \rightarrow (h(b) \rightarrow b(y))$.

(iii) $\mathrm{Her}(b) \rightarrow (h(b) \rightarrow b(y))$.

(iv) $\mathrm{Her}(b) \rightarrow (\forall \mathfrak{a}(f(x, \mathfrak{a}) \rightarrow b(\mathfrak{a})) \rightarrow b(y))$.

(v) $\forall \mathfrak{F}[\mathrm{Her}(\mathfrak{F}) \rightarrow (\forall \mathfrak{a}(f(x, \mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a})) \rightarrow \mathfrak{F}(y))]$.

Cada uno de estos pasos muestra la substitución de una de las letras de (i): 'f', 'g', 'h' y 'b', respectivamente. Por consiguiente, 'f' es el argumento de la función '$g(b) \rightarrow (h(b) \rightarrow \alpha(b))$' en ($i$), mientras que en ($iii$) el argumento es '$h$' y la función es '$\mathrm{Her}(b) \rightarrow (\alpha(b) \rightarrow b(y))$'.

Por lo tanto, es comprensible la presencia de expresiones cuyo análisis ha sido aparentemente alterado: fruto de substituciones previas, hallamos expresiones como '$f(\mathfrak{F})$' o '$b(y)$' como componentes de fórmulas complejas. En estas expresiones, es claro que 'f' y 'b' van a ser tomadas como argumento de la fórmula en la que aparecen, respectivamente, para ser reemplazadas por instancias más adecuadas para el marco en el que se encuentran.

En último término, la gran libertad que atribuye Frege a la distinción entre función y argumento está íntimamente ligada a los procesos deductivos que involucran a la conceptografía. Es en las demostraciones donde se pone de manifiesto la potencia deductiva que posibilita una estructuración sintáctica como la propia de este sistema formal; el elemento central son las substituciones que hemos presentado pormenorizadamente en la sección 2.3.

Capítulo 3

Conceptografía y logística

3.1 Introducción

Frege dedicó los años inmediatamente posteriores a la publicación de *Begriffsschrift* a la elaboración de artículos que tratan de explicar y profundizar en las capacidades de la conceptografía. Entre 1879 y 1882, Frege se esforzó en mostrar cómo los recursos formales de la conceptografía pueden aplicarse para garantizar el rigor deductivo en la obtención de nuevos teoremas de disciplinas científicas. Cuando se usa de este modo, la conceptografía desempeña el papel de herramienta auxiliar: los enunciados atómicos significativos de los que carece este sistema formal son aportados por una disciplina.

Adicionalmente, Frege observa la posibilidad de considerar la lógica desde otro punto de vista: como sistema formal puro y abstracto, desvinculado de cualquier discurso científico. De acuerdo con ello, un conjunto de leyes básicas y reglas de inferencia sirven para la formulación de principios lógicos de naturaleza abstracta. Aunque Frege usa en ocasiones la conceptografía de modo abstracto (por ejemplo, en el capítulo II de *Begriffsschrift*), rechaza la perspectiva general de usar la lógica únicamente de este modo. Este rechazo sienta las bases del enfrentamiento que tiene lugar tras la publicación de *Begriffsschrift* entre la posición de Frege y la propia de la lógica algebrista.

Este capítulo pretende evaluar los usos que pueden darse a la conceptografía, y que Frege valoró en sus obras. Se trata, en último término, de poner en relación el planteamiento fundacional de Frege en *Begriffsschrift* con el desarrollo de nuevas perspectivas en cuanto al uso de la conceptografía, que son objeto de consideración en los artículos elaborados en los años siguientes a su publicación en 1879. Así pues, a partir de esta introducción, la segunda sección (3.2) analizará el objetivo que se propone Frege con respecto a la redacción de *Begriffsschrift*, y cómo este objetivo lleva a la creación de la conceptografía. En la tercera sección (3.3), se discutirá de qué modo Frege concibe la conceptografía como logística, esto es, de qué modo su sistema formal puede aplicarse a otras disciplinas científicas. Esta aplicación conlleva tener en consideración aspectos tanto sintácticos como semánticos. Por último, la cuarta sección (3.4) tratará de articular históricamente la distinción entre lógica abstracta y lógica concebida como base para la logística. En primer lugar, se discutirá qué caracteriza esta distinción y el aspecto histórico que la motiva. En segundo lugar, se considerarán los motivos por los cuales Frege no manifiesta ningún interés por el desarrollo de la conceptografía en sí misma más allá de su posible uso instrumental como herramienta para garantizar el rigor deductivo de las demostraciones.

3.2 Contexto de creación de la conceptografía

En los apartados 2.2.1, 2.2.2 y 2.3 se han presentado con detalle los elementos del sistema formal de *Begriffsschrift*. También se han ofrecido muestras, en el apartado 2.4.2, del modo como estos elementos entran en funcionamiento con la explicación de algunas demostraciones de *Begriffsschrift*.

Sin embargo, a pesar de que se han ofrecido algunas indicaciones en los apartados 1.3.2 y 1.4.3, no se han considerado aún, propiamente, los posibles usos de la conceptografía. En cuanto sistema formal, es obvio que la conceptografía permite obtener leyes de naturaleza lógica, pero es preciso evaluar el objetivo de Frege al considerar su creación.

Las explicaciones de Frege referentes a la creación de su conceptografía derivan hacia dos puntos de vista distintos, no plenamente contrarios, pero no exactamente coincidentes. Cada uno de ellos plantea una relación distinta entre la lógica y la aritmética. Sin embargo, debe destacarse en ellos un elemento común y vertebrador: la necesidad de que las fórmulas de la conceptografía adquieran un significado específico.

3.2.1 Dos perspectivas respecto a la relación entre aritmética y lógica

En las primeras líneas del Prefacio de *Begriffsschrift*, Frege apunta a su objetivo fundamental: la caracterización de teoremas aritméticos de especial relevancia como puramente lógicos. No en vano, afirma que:

> "(...) I had first to test how far one could get in arithmetic by means of logical deductions alone, supported only by the laws of thought,

> which transcend all particulars. The procedure in this effort was this: I sought first to reduce the concept of ordering-in-a-sequence to the notion of *logical* ordering, in order to advance from here to the concept of number." [Frege, 1879a, p. 104]

Por tanto, la cuestión fundacional consiste en evaluar hasta qué punto puede desarrollarse la aritmética desde una perspectiva exclusivamente lógica. El desempeño de Frege no consiste tanto en tratar de proporcionar una fundamentación lógica de la aritmética en su conjunto, sino en mostrar la naturaleza lógica de algunas nociones de carácter aritmético, como son las de propiedad hereditaria o de orden asociado a una sucesión. Así pues, la tentativa de Frege acaba consistiendo, desde un punto de vista práctico, en definir en términos lógicos algunos elementos aritméticos relevantes y justificar rigurosamente con estas definiciones algunas proposiciones lógicas cuya naturaleza aritmética parece requerir, para su demostración, la influencia de la intuición. Por consiguiente, en *Begriffsschrift* no se despliega propiamente la tesis logicista: sus resultados, de acuerdo con la finalidad que Frege reconoce, son parciales.

No obstante, Frege concede una capital importancia al hecho de poder demostrar algunos teoremas aritméticos apelando únicamente a principios lógicos. Así lo demuestra el párrafo inicial del capítulo III de *Begriffsschrift*. En primer lugar, el autor destaca que puede haber otros modos de manejar la conceptografía, modos que pueden complementarse con el que propone en este capítulo:

> "The following derivations [those contained in chapter III] are meant to give a general idea of how to handle this "conceptual notation", even if they do not suffice, perhaps, to entirely reveal the advantage it possesses. This would only stand out clearly with more complicated propositions." [Frege, 1879a, §23, p. 167]

Y, a continuación, Frege pone de manifiesto la relevancia que tiene mostrar que no es preciso apelar a la intuición para demostrar algunas proposiciones aritméticas:

> "Besides, we see in this example how pure thought (regardless of any content given through the senses or even given *a priori* through an intuition) is able, all by itself, to produce from the content which arises from its own nature judgements which at first seem to be possible only on the grounds of some intuition (...). The propositions about sequences developed in what follows far surpass in generality all similar

> propositions which can be derived from any intuition of sequences. Therefore, if one wishes to consider it more appropriate to take as a basis an intuitive idea of sequences, then he must not forget that the propositions so obtained, which might have somewhat the same wording as the ones given here, would not state nearly so much as these because they would have validity only in the domain of the particular intuition upon which they were founded." [Frege, 1879a, §23, p. 167]

Frege destaca dos ventajas respecto a la posibilidad de demostrar proposiciones aritméticas a partir del pensamiento puro, esto es, por medios exclusivamente lógicos. En primer lugar, es posible justificar que no hace falta apelar a la intuición, ni siquiera a una intuición a priori, para demostrar estos teoremas. Y, por esta razón, en segundo lugar, dado que su contenido no está restringido a un dominio particular, estas proposiciones expresan una generalidad mayor a la que expresarían las proposiciones análogas, demostradas mediante principios no lógicos.

Frege adopta la terminología kantiana para dar cuenta de su planteamiento. De acuerdo con ello, puede demostrar que algunas proposiciones aritméticas no son, por un lado, a posteriori y, por el otro, que tampoco son sintéticas, como se consideraba tradicionalmente. Independientemente de qué suponga este resultado para el proyecto logicista, es importante apreciar su relevancia histórica. En *Grundlagen*, el autor insiste en esta misma cuestión refiriéndose a la conceptografía de *Begriffsschrift*:

> "In this way I have, without borrowing any axiom from intuition, given a proof of a proposition which might at first sight be taken as synthetic which I shall here formulate as follows:
>
> > If the relation of every member of a series to its successor is one- or many-one, and if m and y follow in that series after x, then either y comes in that series before m, or it coincides with m, or it follows after m.
>
> From this proof it can be seen that propositions which extend our knowledge can have analytic judgements for their content." [Frege, 1884, §91, pp. 103-104]

Frege se refiere a la Proposición (133), con la que concluye *Begriffsschrift*[97]:

Pr. (133) $\quad \mathrm{Fun}(f) \to [f^*(x,m) \to (f^*(x,y) \to (\neg f^*(y,m) \to f^*_{=}(m,y))].$

[97] Para una explicación de la notación de la Proposición (133), véanse las notas 89, 90 y 91.

La Proposición (133) no es usada como premisa para la demostración de ninguna otra proposición a lo largo de *Begriffsschrift*. A partir de este hecho, G. Boolos observa que Frege cree haber demostrado concluyentemente que una proposición que en apariencia es sintética (como (133)) es, sin embargo, genuinamente analítica[98].

Sin embargo, ésta no es la única perspectiva que plantea Frege respecto a la relación entre la lógica y la aritmética. Ciertamente, el desarrollo por medios puramente lógicos de esta disciplina matemática puede verse desde otra perspectiva. En 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b], Frege manifiesta su voluntad de añadir a la lógica los elementos del lenguaje de la aritmética:

> "I wish to blend together the few symbols which I introduce and the symbols already available in mathematics to form a single formula language. In it, the existing symbols [of mathematics] correspond to the word-stems of ordinary language; while the symbols I add to them are comparable to the suffixes and formwords that logically interrelate the contents embedded in the stems." [Frege, 1882b, p. 93]

El autor pretende complementar el lenguaje aritmético con un simbolismo lógico que permita representar con rigor las relaciones lógicas que vinculan los enunciados aritméticos. El caso de la aritmética es paradigmático y, como se ha visto, responde a la pretensión fundacional de Frege de que sea la disciplina por antonomasia a la que la conceptografía complemente. No es, por descontado, un caso único.

Por contra, el intento de obtener por los medios puramente lógicos que proporciona la conceptografía algunos teoremas de la aritmética, que constituye la idea fundacional de *Begriffsschrift*, no es propiamente considerado en los textos de 1880-1882. Así pues, como se planteaba a modo de introducción, hay cierta tensión entre ambos puntos de vista, dado que prevén una relación significativamente distinta entre lógica y aritmética. Sin embargo, el trasfondo de un desarrollo parcial de la tesis logicista permite explicarlos ambos a la vez, como se discutirá en el apartado 3.3.5.

La perspectiva que plantea una complementación entre los lenguajes de la lógica y la aritmética es confirmada en 'Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift' [Frege, 1882c]. Según este texto, el fruto de la complementación de ambas disciplinas es la garantía de rigor, en términos formales, que posibilita integrar los recursos de la lógica a la aritmética:

[98]Véase 'Reading the *Begriffsschrift*' [Boolos, 1985, p. 333ss].

> "I wanted to supplement the formula-language of mathematics with signs for logical relations so as to create a concept-script which would make it possible to dispense with words in the course of a proof, and thus ensure the highest degree of rigour whilst at the same time making the proofs as brief as possible." [Frege, 1882c, p. 47]

Por tanto, parece que la voluntad inicial de explorar qué conceptos aritméticos son definibles exclusivamente mediante términos lógicos pasa a un segundo término. En lugar de ello, Frege enfatiza la necesidad de crear un lenguaje formal capaz, por un lado, de expresar con rigor los procesos deductivos propios de la aritmética y, por el otro, de formular explícitamente las relaciones lógicas entre fórmulas aritméticas. Pero, con ello, el autor no pretende substituir los símbolos propios aritméticos por constantes lógicas con el propósito de evitar que el significado de las fórmulas de la conceptografía sea abstracto.

3.2.2 Creación del lenguaje de la conceptografía

Precisamente, es el desarrollo de la complementación entre aritmética y lógica lo que lleva a Frege a considerar la insuficiencia del lenguaje natural. Para el autor, el lenguaje natural es completamente inadecuado para dar cuenta de las cadenas de inferencias, en las que cada paso debe estar perfectamente justificado. En 'Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift' [Frege, 1882a], Frege proporciona un ejemplo de inadecuación del lenguaje: se trata de la ambigüedad mediante la cual una misma palabra puede referir a un objeto o a un concepto:

> "Generally, no strong distinction is made between concept and individual. "The horse" can denote a single creature; it can also denote the species, as in the sentence: "The horse is an herbivorous animal". Finally, horse can denote a concept, as in the sentence "This is a horse"." [Frege, 1882a, p. 84]

En opinión de Frege, un lenguaje propiamente riguroso debe evitar ambigüedades en cuanto a la designación de objetos y conceptos, así como, en realidad, cualquier tipo de ambigüedad. En *Begriffsschrift*, planteándose el desarrollo puramente lógico de la aritmética, Frege manifiesta la necesidad de garantizar el rigor deductivo en la ejecución de esta tarea. Y ésta es, de hecho, la motivación de la creación del lenguaje de la conceptografía:

> "As I endeavoured to fulfil this requirement [to keep the chain of reasoning free of gaps] most rigorously, I found an obstacle in the inadequacy

> of the language; despite all the unwieldiness of the expressions, the more complex the relations became, the less precision—which my purpose required—could be obtained. From this deficiency arose the idea of the "conceptual notation" presented here. Thus, its chief purpose should be to test in the most reliable manner the validity of a chain of reasoning and expose each presupposition which tends to creep in unnoticed, so that its source can be investigated." [Frege, 1879a, p. 104]

Así, lo que lleva a la creación de la conceptografía aparece indirectamente subordinado al principal objetivo de Frege en los pasos introductorios de *Begriffsschrift*, que no es otro que la deducción mediante herramientas exclusivamente lógicas de ciertos teoremas de naturaleza aritmética. El desarrollo de esta tarea lleva a la creación de esta conceptografía, y no al revés. Su principal cometido, como señala Frege, es el de ofrecer un sistema formal apropiado para la expresión sin ambigüedades de las relaciones que vinculan proposiciones y que, además, permita un control riguroso de las cadenas de inferencia, sacando a la luz los pasos implícitos dados a partir de presuposiciones. Y, con ello, manifiesta que el foco de su atención se centra, en este contexto, exclusivamente en el contenido conceptual:

> "For this reason, I have omitted the expression of everything which is without importance for the chain of inference. In §3, I have designated by *conceptual content* that which is of sole importance for me. Hence, this must always be kept in mind if one wishes to grasp correctly the nature of my formula language." [Frege, 1879a, p. 104]

Esta afirmación es completamente coherente con el breve tratamiento de la noción de contenido conceptual que Frege realiza en el párrafo §3 de *Begriffsschrift*, a la que hemos aludido en el apartado 1.3.2. El autor se refiere mediante 'contenido conceptual' a todo aquello (y sólo aquello) que es relevante para determinar las posibles consecuencias lógicas de una proposición. A nivel preliminar, como planteamiento de objetivos, ésta parece ser una de las pretensiones del autor, la de expresar con precisión las relaciones lógicas entre proposiciones.

3.3 Logística: Aplicación de la conceptografía

3.3.1 Introducción

Hemos planteado que Frege decide crear la conceptografía para disponer de una herramienta que permita mostrar que la intuición no juega ningún papel en la derivación de algunos teoremas aritméticos, y que éstos pueden mostrarse por medios exclusivamente lógicos. En el proceso de realización de este objetivo, la conceptografía garantiza el rigor en la expresión de las relaciones lógicas que vinculan las proposiciones y en los procesos deductivos.

Ya desde un inicio Frege contempla que esta herramienta puede usarse en otros contextos, además del aritmético. Así lo plantea en el Prefacio de *Begriffsschrift*:

> "I am sure that my "conceptual notation" can be successfully applied wherever a special value must be placed upon the validity of proofs, as in laying the foundation of the differential and integral calculus.
>
> It appears to me to be still easier to extend the area of application of this formula language to geometry. We should only have to add a few symbols for the intuitive relations that occur there." [Frege, 1879a, p. 106]

Como veremos a continuación, el uso de la conceptografía como logística, esto es, su aplicación a una disciplina científica, es un proceso complejo que, en rigor, no conlleva únicamente añadir algunos símbolos apropiados. A lo largo de esta sección discutiremos con detalle la naturaleza de este proceso y las implicaciones que tiene en el lenguaje, la cuantificación y los procesos de deducción de la conceptografía.

Esencialmente, sin embargo, Frege captura con exactitud en qué consiste la aplicación de la conceptografía a una disciplina científica: el uso de la lógica como herramienta para garantizar la validez de las deducciones. Precisamente por ello, este uso contrasta con la concepción de la lógica como lógica abstracta.

En el marco de esta dicotomía entre lógica abstracta y lógica instrumental, resulta reveladora la distinción que plantea C. I. Lewis entre la lógica simbólica y la logística en *A Survey of Symbolic Logic* [Lewis, 1918]. En primer lugar, Lewis define la lógica simbólica como la disciplina que busca el descubrimiento de principios lógicos, cuya generalidad excluye cualquier aplicación particular:

> "Symbolic Logic is the development of the most general principles of rational procedure, in ideographic symbols, and in a form which exhibits the connection of these principles one with another. Principles which belong exclusively to some one type of rational procedure—*e. g.* to dealing with number and quantity—are hereby excluded, and generality is designated as one of the marks of symbolic logic." [Lewis, 1918, p. 1]

Como veremos en el apartado 3.4.5, la concepción de Frege respecto a la lógica abstracta coincide con lo sugerido en esta definición. En segundo lugar, Lewis presenta la logística como lógica simbólica aplicada y, como tal, más como un método que como una disciplina:

> "“[L]ogistic” is commonly used to denote symbolic logic together with the application of its methods to other symbolic procedures. Logistic may be defined as *the science which deals with types of order as such.* It is not so much a subject as a method." [Lewis, 1918, p. 3]

En opinión de Lewis, los trabajos de Frege, en tanto que enfocados a la obtención de teoremas aritméticos por medios exclusivamente lógicos, deben ser considerados logística:

> "Frege's works, from the *Begriffsschrift* of 1879 to the *Grundgesetze der Arithmetik* (Vol. I, 1893; Vol. II, 1903) provide a comprehensive development of arithmetic by the logistic method." [Lewis, 1918, p. 4]

Esta división general de la lógica puede vincularse, como hemos mencionado, al planteamiento de Frege respecto a la conceptografía. En *Begriffsschrift*, y especialmente en su capítulo III, se obtienen teoremas de naturaleza aritmética a partir de nociones definidas lógicamente. Ahora bien, la naturaleza aritmética de estos teoremas la proporcionan símbolos que no pertenecen a la aritmética. En cualquier caso, probablemente por este uso instrumental de la lógica, Lewis considera *Begriffsschrift* (y también *Grundgesetze*) un tratado de logística.

3.3.2 Método logístico

Frege plantea que cada disciplina con la que se complementa la conceptografía proporciona un significado específico, expresado mediante símbolos propios que forman fórmulas atómicas. Hemos considerado brevemente esta circunstancia en el apartado 1.3.2. Propiamente, en la conceptografía pura, en tanto que sistema formal, no hay ninguna noción de fórmula atómica. En general, la expresión básica de la conceptografía, '$f(a)$', en virtud de la generalidad que expresan las letras, no tiene una única lectura. Así pues, no puede determinarse de antemano que '$f(a)$' sea una fórmula atómica y no cualquier otro tipo de expresión.

Pero los discursos científicos disponen de símbolos con denotación fija. A través de ellos puede expresarse que cierto objeto del dominio tiene una propiedad o que varios objetos del dominio guardan entre sí cierta relación.

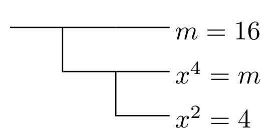
Todas estas circunstancias pueden vincularse entre sí por medio de relaciones lógicas, que son expresadas por los símbolos lógicos de la conceptografía.

De acuerdo con ello, es posible comprender por qué Frege no ofrece ninguna indicación, en la presentación del lenguaje de la conceptografía, de sus símbolos propios, o por qué no especifica los procesos de creación de fórmulas atómicas. Por un lado, la aritmética, o cualquier otra disciplina, proporciona las fórmulas atómicas: aquellos de sus enunciados que no presentan ninguna complejidad lógica, esto es, que no contienen conectivas o cuantificadores. Por el otro, a partir de las fórmulas atómicas se construyen fórmulas complejas usando los recursos técnicos de la conceptografía. Estas fórmulas, tanto atómicas como complejas, expresan los contenidos aseverables que pueden ser precedidos por la barra de juicio.

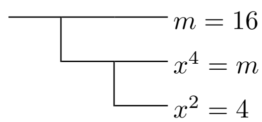
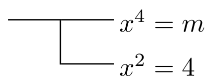
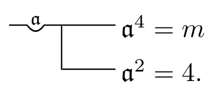
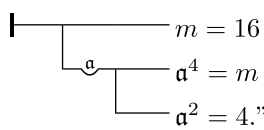
En una primer aproximación, puede decirse que el resultado de complementar una disciplina con la conceptografía adopta los símbolos propios del lenguaje de la disciplina y los recursos deductivos de la conceptografía. Así pues, un sistema de logística adquiere los términos de la disciplina (junto con su interpretación), así como sus fórmulas atómicas.

La conceptografía aporta todos los recursos deductivos en su complementación con una disciplina de un modo que requiere explicación, porque un sistema de logística no es exactamente una teoría formalizada a la que se añaden los recursos formales de la lógica. Esto se debe principalmente a dos motivos: en primer lugar, en la conceptografía no están permitidas las deducciones con premisas y, en segundo lugar, no es posible determinar de antemano una única lectura para las fórmulas de la conceptografía pura.

Nuestra aproximación se ve confirmada por multitud de ejemplos tomados de la aplicación de la conceptografía y no de su exposición. En estos casos, se mezcla notación aritmética con la propiamente lógica. En ‘Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift’ [Frege, 1880], puede hallarse un ejemplo especialmente significativo. Frege ofrece una tentativa de traducción a conceptografía de una oración de contenido aritmético:

> “If every square root of 4 is a 4th root of m, then m must be 16.
>
> The expression
>
> 
>
>
> does not correspond to the sentence, and is even false, which is why the judgement stroke has been left off the left-hand end of the uppermost horizontal stroke; for we may substitute numbers for x and m which falsify this content.” [Frege, 1880, p. 18]

La intención de Frege con esta primera tentativa es poner de relieve la relación que hay entre las distintas formas de expresar generalidad en la conceptografía, y hacer explícito cómo este sistema formal permite capturar adecuadamente la cuantificación parcial de enunciados como el propuesto. Como hemos discutido en el apartado 1.2.7 respecto a la simbolización de enunciados categóricos, llevar a cabo un análisis lógico adecuado es un paso previo fundamental para poder simbolizar correctamente un enunciado. Frege prosigue su discusión hasta obtener una traducción adecuada del enunciado inicial:

> “We can see: the generality to be expressed by means of x must not govern the whole
>
> 
>
>
> but must be restricted to
>
> 
>
>
> I designate this by supplying the content-stroke with a concavity in which I put a gothic letter which also replaces the x:
>
> 
>
>
> I thus restrict the scope of the generality designated by the gothic letter to the content, into whose content stroke the concavity has been introduced (§11 of the *Begriffsschrift*). So our judgement is given the following expression:
>
> 
>
>
> [Frege, 1880, pp. 19-20]

En este caso, y en todos los similares, el autor no pretende hacer lo que en la actualidad denominaríamos ‘formalizar’ las fórmulas atómicas, esto es, substituir sus símbolos por lo que llamaríamos constantes no lógicas, que pueden interpretarse de modos distintos. Todo lo contrario; la voluntad de Frege es expresar la complejidad de la expresión propuesta mediante la combinación de símbolos lógicos. Las fórmulas atómicas se expresan en el mismo lenguaje aritmético, como es el caso de '$m = 16$'. La distinción entre función y argumento, propia de la conceptografía, se adapta de forma natural a su estructuración sintáctica. Por ejemplo, '$m = 16$' puede verse como '$\Phi(m)$', donde '$\Phi(\alpha)$' representa '$\alpha = 16$'. Este modo de ver la expresión pone de manifiesto una posible división natural entre sus componentes. Así, esta distinción no debe verse como la imposición de un modo particular de simbolización, sino como una forma de articular contenidos ya sintácticamente estructurados: es lo que permite, tomando 'x' como el argumento de '$x^2 = 4$' y de '$x^4 = m$', expresar correctamente la cuantificación que corresponde a esta subfórmula. Las expresiones aritméticas atómicas no se han alterado más que para respetar la notación de las letras cuantificadas en la conceptografía; simplemente, se han dividido entre un componente que permanece fijo y un componente que varía.

En disposición de las fórmulas atómicas, pues, se simbolizan las relaciones lógicas que las vinculan, tanto los condicionales como la cuantificación que afecta al antecedente de la expresión, circunstancia que supone la realización de una de las características fundamentales de la conceptografía. Y, de hecho, el ejemplo de Frege muestra que la simbolización de estas relaciones lógicas no es trivial, y que son las capacidades expresivas de su lenguaje las que permiten llevar a cabo adecuadamente esta tarea.

Por otro lado, puesto que la conceptografía no se ocupa de simbolizar fórmulas atómicas, los símbolos propios de la disciplina que aparecen en ellas tendrán necesariamente una naturaleza singular. Desde la perspectiva actual, las constantes (en cuanto tales), sean individuales o de predicado, son reinterpretables: en función de la estructura considerada, un mismo símbolo adquiere significados distintos. Pero la conceptografía es un sistema formal que se complementa con discursos científicos dados, como la aritmética, con un lenguaje propio. Los símbolos propios del lenguaje de cada uno de estos discursos científicos son las constantes de un sistema de logística. Sin embargo, para la logística son constantes en tanto que nombres canónicos y, en consecuencia, no son reinterpretables. Así, en el ejemplo de Frege, tanto '4' como '16' o '$-^2$' son símbolos propios de la complementación de conceptografía y aritmética, cuya denotación no puede modificarse por medio de la definición de una nueva estructura; su denotación es unívoca y corresponde a la que poseen en aritmética, ya sea un número o una operación.

Además, en este ejemplo es claro como el recorrido de las letras está perfectamente delimitado. El contexto en el que aparecen indica claramente que las letras 'x' y 'm' son términos y que, por tanto, refieren genéricamente a objetos. En concreto, estas letras expresan generalidad sobre el conjunto de los números naturales, aunque las reglas del cálculo que afectan a los cuantificadores sean puramente sintácticas.

3.3.3 Cuantificación en logística

Las disciplinas con las cuales se complementa la conceptografía tienen un ámbito de aplicación concreto, que determina un dominio de entidades. De acuerdo con ello, los símbolos propios del lenguaje de esta disciplina denotan entidades en este dominio, o relaciones o propiedades de los integrantes de este dominio. Esta circunstancia condiciona de manera relevante la interpretación de las fórmulas de la conceptografía cuando se emplea como base para logística, porque sólo son aceptables aquellas interpretaciones que sean compatibles con la propia de los símbolos de la disciplina. De hecho, el significado de los símbolos de la disciplina limita las instancias aceptables de las letras cuantificadas; el recorrido de instancias de substitución de las letras no está delimitado únicamente por condiciones sintácticas, sino también por razones semánticas, ya que en este recorrido se incluyen únicamente expresiones apropiadas del lenguaje del sistema de logística. Ya hemos mencionado esta circunstancia en el apartado 1.4.3.

El contexto de aplicación limita en general las instancias de substitución de las letras de la conceptografía: sólo son aceptables aquellas instancias que son compatibles con el conjunto de un discurso científico. Ahora bien, el recorrido de una letra no está determinado por esta limitación general; la presencia de un contexto de aplicación es perfectamente compatible con el hecho de que las letras de la conceptografía, incluso en logística, puedan tener distintas lecturas. Las condiciones semánticas que añade el contexto de aplicación únicamente imponen una limitación de carácter general en las instancias adecuadas de cada una de estas lecturas posibles.

Cada marco en logística fija una lectura adecuada para las apariciones de una misma letra, y esta lectura debe ser compatible con las limitaciones que plantea el contexto de aplicación. Así pues, la interpretación de los símbolos propios de un sistema de logística condiciona de dos modos distintos la interpretación de las letras de la conceptografía. En primer lugar, establece condiciones generales que están vinculadas al contexto de aplicación en cuestión. Pero estas condiciones generales no serían aplicables fuera de un marco concreto, en el que cada letra asume una lectura específica. En un marco, una vez se determina la interpretación de cada una de las letras que aparecen en él, pueden considerarse las instancias adecuadas de una letra en particular: todas ellas deben ser expresiones compatibles con el conjunto del discurso científico en cuestión.

Consideremos nuevamente la Proposición (52) de *Begriffsschrift*:

Pr. (52) $$(c \equiv d) \rightarrow (f(c) \rightarrow f(d)).$$

Esta proposición es una fórmula de la conceptografía que, como tal, dado que sus letras admiten distintas lecturas, no está interpretada. Ahora bien, si realizamos distintas substituciones a (52) podemos obtener las siguientes expresiones de logística:

$$(c \equiv 2+1) \rightarrow (c > 0 \rightarrow 2+1 > 0),$$
$$(c \equiv 3^2 > 1) \rightarrow ((c \equiv n > 1) \rightarrow (3^2 > 1 \equiv n > 1)).$$

Ambas fórmulas pertenecen a un contexto de aplicación aritmético. Sin embargo, es claro que pertenecen a marcos distintos: la letra 'c' no puede interpretarse uniformemente en las dos fórmulas. En el primer caso, las instancias adecuadas de 'c' son términos numéricos, mientras que en el segundo son fórmulas aritméticas. Sin especificar un marco, no es posible determinar la interpretación de las letras.

La cuantificación de la conceptografía aplicada se adapta consecuentemente a la presencia de un contexto de aplicación específico. Así, si bien la cuantificación se maneja en el cálculo exactamente del mismo modo que en un contexto puramente lógico, el significado de las cuantificaciones se adapta a las limitaciones impuestas por la disciplina. Las letras cuantificadas expresan generalidad, que está limitada tanto por las condiciones sintácticas de la conceptografía como por las restricciones semánticas impuestas por la disciplina. Únicamente aquellas expresiones sintácticamente aceptables que pertenezcan a la disciplina pueden ser instancias de una letra cuantificada.

De acuerdo con ello, si D es la disciplina con la que se complementa la conceptografía, una cuantificación universal en logística se interpreta como sigue: Sea '$\Phi(\alpha)$' una expresión funcional de logística,

(∗) Si '$\Phi(a)$' es una expresión en la que la letra 'a' es el argumento, el juicio:

$$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a})$$

expresa que $\Phi(A)$ es un teorema de D para cualquier argumento 'A' que pueda ocupar la posición de '$\mathfrak{a}$' de modo que '$\Phi(A)$' sea una fórmula de D.

Este modo de interpretar la cuantificación puede aplicarse de un modo natural a cualquier tipo de argumento. Por ejemplo, la fórmula siguiente:

$$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{n}}\!\!-\, \mathfrak{n} + 0 = \mathfrak{n},$$

expresa, en particular, que la expresión:

$$\vdash 3 + 0 = 3$$

es un teorema de la aritmética.

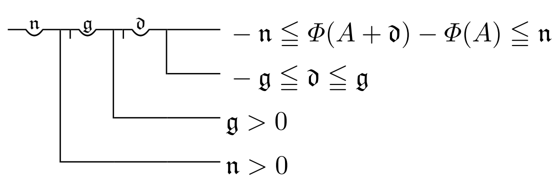
Además, tal y como hemos planteado en el apartado 1.4.1, (∗) puede aplicarse a la cuantificación sobre letras funcionales:

(∗∗) Si '$\Phi(F)$' es una expresión en la que 'F' es el argumento, el juicio:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!-\ \Phi(\mathfrak{F})$$

expresa que $\Phi(B)$ es un teorema de D para cualquier argumento 'B' que pueda ocupar la posición de '$\mathfrak{F}$' de modo que '$\Phi(B)$' sea una fórmula de D.

Frege pone de manifiesto los elementos de esta definición en algunos ejemplos de aplicación de la conceptografía a aritmética propuestos en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift':

> "The real function $\Phi(x)$ is continuous at $x = A$; that is, given any positive non-zero number $\mathfrak{n}$, *there is* a positive non-zero $\mathfrak{g}$ such that any number $\mathfrak{d}$ lying between $+\mathfrak{g}$ and $-\mathfrak{g}$ satisfies the inequality $-\mathfrak{n} \leqq \Phi(A + \mathfrak{d}) - \Phi(A) \leqq \mathfrak{n}$[99]
>
> 
>
>
> I have assumed here that the signs $<, >, \leqq$ mark the expressions they stand between as real numbers." [Frege, 1880, p. 24]

Observemos, preliminarmente, que ni 'Φ' ni 'A' son letras, sino parámetros, es decir, no expresan generalidad en el sentido de *Begriffsschrift*. De hecho, 'Φ' es el signo de una función matemática determinada, sea la que sea, y 'A' representa uno de los posibles argumentos concretos de esta función, esto es, un número real particular.

[99] Hay que advertir que el uso de la palabra 'función' por parte de Frege en esta cita responde al uso matemático de este término, y no al uso como componente que permanece fijo en una expresión, desarrollado en *Begriffsschrift*.

Es preciso advertir, además, de una impresión errónea que puede surgir por el modo de expresión al que recurre Frege. El autor se expresa del modo habitual en matemáticas, en un contexto en el que los cuantificadores se leen semánticamente. Sin embargo, no por ello proporciona una interpretación semántica a los cuantificadores de la conceptografía; los cuantificadores de la fórmula considerada pertenecen a un contexto logístico, de modo que su interpretación no tiene por qué generalizarse a los cuantificadores de la conceptografía. En un contexto de aplicación como el presente, los cuantificadores se leen tal y como es habitual en el discurso científico en cuestión, pero eso no cambia su manejo en el cálculo. Tal y como se ha discutido en el apartado 1.4.2, los cuantificadores de la conceptografía no están semánticamente interpretados; Frege únicamente se preocupa, en primer lugar, de que tengan un significado comprensible para el lector en este contexto de aplicación particular y, en segundo lugar, de proporcionar al cálculo las reglas pertinentes para su manejo, como son las reglas de introducción de cuantificadores ([G] y [C]), así como de especificar los procesos de substitución que los involucran (que pueden verse, en parte, como un proceso de eliminación del cuantificador universal). En consecuencia, el conjunto de expresiones que pueden ocupar el lugar de una letra cuantificada cambia en función de cada aplicación concreta de la concepografía y del marco en el que aparezca la letra.

En el ejemplo que nos ocupa, se cuantifica sobre números reales, como es habitual en aritmética[100]. Pero esta circunstancia afecta sólo a la lectura que se hace de la fórmula en la que aparecen los cuantificadores y no al modo en que éstos se usan. En el enunciado aritmético del ejemplo, así como en *Begriffsschrift*, los cuantificadores se manejan de acuerdo con las reglas del cálculo. Ahora bien, las instancias de las letras cuantificadas que aparecen en el enunciado son expresiones que no sólo deben ser sintácticamente correctas, sino significativas para la aritmética.

Plantear un conjunto de instancias aceptables para una letra cuantificada podría generar, aparentemente, dificultades en un contexto de aplicación como el considerado; en particular, en un lenguaje formal numerable hay números reales a los cuales no es posible asignar un nombre con el que puedan ser considerados instancias aceptables de una letra cuantificada. Ahora bien, el resultado de aplicar la conceptografía a una disciplina científica no puede entenderse como una teoría formalizada, cuyos enunciados están expresados

[100]En la época de redacción de *Begriffsschrift*, y de los artículos que acompañan su publicación, el término ‘aritmética’ se entiende en sentido amplio, aunque en la actualidad sería más adecuado llamarlo ‘análisis’. Respetamos, a lo largo de la discusión presente, el uso de Frege del término ‘aritmética’.

en un lenguaje formal que dispone de una serie de símbolos propios fijados de antemano. En primer lugar, en ese momento, esto es, en los años 1879-1882, no existe la distinción entre lenguaje y metalenguaje. En segundo lugar, y a consecuencia de ello, la única diferencia que hay entre las expresiones de la aritmética y las de logística (cuando la conceptografía se aplica a la aritmética) es, desde la perspectiva de Frege, que en el segundo caso la estructura lógica de las expresiones es explícita. Así, para el autor, el enunciado de logística '$\forall\mathfrak{r}(\mathfrak{r} + 0 = \mathfrak{r})$' es absolutamente indistinguible del enunciado aritmético 'para todo r, $r + 0 = r$'. En este sentido, cualquier instancia de este enunciado aritmético lo será también de '$\forall\mathfrak{r}(\mathfrak{r} + 0 = \mathfrak{r})$'. Por consiguiente, en ningún caso surgirá la dificultad, que podría producirse si la disciplina estuviese formalizada, de que una instancia sea aceptable en aritmética, y no en logística, por contener términos que no pertenecen al lenguaje de logística.

Volviendo al ejemplo aritmético que nos ocupa, las relaciones y las funciones matemáticas que contiene están definidas para el contexto de aplicación que se está considerando: en este caso, para los números reales, y no para cualquier objeto lógico. Por ello, el presente ejemplo no es puramente lógico. El hecho de aplicar la conceptografía a la aritmética permite asumir una interpretación concreta y, por tanto, suponer que la cuantificación es relativa a esta interpretación. Las definiciones aritméticas no requieren modificación, porque se adaptan perfectamente al dominio para el cual han sido definidas.

Naturalmente, este tipo de restricciones no son sistemáticas, sino puramente metodológicas. Frege no las especifica en la presentación de la conceptografía en *Begriffsschrift*, sino que, simplemente, cuenta con ellas cuando ofrece casos de aplicación de la conceptografía.

3.3.4 Demostraciones en logística

Un sistema de logística no es únicamente el resultado de unir las leyes básicas de la conceptografía con cierto conjunto de fórmulas de la disciplina. Una agrupación tal de fórmulas no sería utilizable. Es preciso indicar previamente cómo aplicar la distinción entre función y argumento a las fórmulas de un discurso científico para que puedan ser usadas en las demostraciones. Dicho en otras palabras, como paso previo a la creación de un sistema de logística es necesario hacer compatible la estructura de las leyes básicas de la conceptografía con la propia de las fórmulas de la disciplina.

En realidad, únicamente cierta aplicación de las fórmulas de la conceptografía, y no propiamente estas fórmulas, interviene en las demostraciones de logística. Compatibilizar las proposiciones de la conceptografía con las fórmulas de la disciplina en cuestión consiste en llevar a cabo una serie de substituciones que permitan especificar, en cada marco concreto, cómo va a ser aplicada una fórmula de la conceptografía. Por esta razón, los procesos de substitución son esenciales para llevar a cabo demostraciones de la disciplina por medio de las leyes básicas y teoremas lógicos de la conceptografía. La aplicación de las proposiciones de la conceptografía es posible en virtud de la adquisición de símbolos propios de la disciplina en cuestión; estos símbolos proporcionan un nuevo recorrido en el que considerar posibles instancias de substitución.

Por ejemplo, la Proposición (58) de *Begriffsschrift*:

Pr. (58) $$\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \to f(c),$$

puede ser aplicada en un marco aritmético del siguiente modo:

$$\forall \mathfrak{n}(\mathfrak{n} + 0 = \mathfrak{n}) \to (3 + 0 = 3),$$

si se substituye '$f(\alpha)$' por '$\alpha + 0 = \alpha$', 'c' por '3' y se realiza el cambio alfabético de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{n}$'. La misma proposición también puede aplicarse usando los símbolos del capítulo III de *Begriffsschrift* como sigue:

$$\forall \mathfrak{a}(f(x, \mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a})) \to (f(x, y) \to F(y)),$$

si se reemplaza '$f(\alpha)$' por '$(f(x, \alpha) \to F(\alpha))$' y '$c$' por '$y$'[101].

En el apartado anterior hemos considerado algunos ejemplos de posibles lecturas que la Proposición (52) puede tener en logística. Al fin y al cabo, esta misma proposición es ejemplo iluminador de las substituciones que se aplican a las proposiciones de *Begriffsschrift* para ser usadas en demostraciones de logística:

Pr. (52) $$(c \equiv d) \to (f(c) \to f(d)).$$

La Proposición (52) podría aplicarse en aritmética al menos de dos modos distintos. En primer lugar, si se substituye 'c' por 'm', 'd' por 'm' y '$f(\alpha)$' por '$\alpha < 3$', obtenemos la fórmula siguiente:

$$(n \equiv m) \to (n < 3 \to m < 3).$$

En segundo lugar, si 'c' se reemplaza por '$3 > 1$', 'd' por '$3^2 > 1$' y '$f(\alpha)$' por 'α', el resultado es el siguiente:

$$(3 > 1 \equiv 3^2 > 1) \to (3 > 1 \to 3^2 > 1).$$

[101] Estas son las substituciones a las que se somete (58) en la demostración de la Proposición (72) de *Begriffsschrift*.

Las letras que se usan en las fórmulas de la conceptografía pura y en las fórmulas de logística suelen ser distintas, porque se considera que las letras de la conceptografía expresan generalidad ilimitada y que las letras de logística expresan generalidad restringida a una interpretación particular. Al fin y al cabo, las letras de las expresiones de un discurso científico en particular siguen ciertas reglas de generalidad, pero estas expresiones no son aplicables sin limitación, puesto que no son leyes del pensamiento puro. Mientras que las letras de la conceptografía admiten distintas lecturas, lecturas que son delimitadas por el contexto de aplicación y por un marco, las letras de las fórmulas de una disciplina se interpretan de un único modo, independientemente del marco en el que se encuentren. Por lo tanto, las letras de logística no se consideran propiamente letras de la conceptografía. Si se comparan las letras de las expresiones siguientes:

$$f(c) \rightarrow (c \equiv d \rightarrow f(d)),$$
$$n + 0 = n,$$

es claro que, así como 'c' puede ocupar el lugar de 'n' (y adaptarse a las condiciones de generalidad que rigen a 'n'), 'n' no puede ocupar en general el lugar de 'c'.

Considerado aisladamente, en el cálculo de la conceptografía no hay deducciones con premisas; siempre se obtienen teoremas lógicos a partir únicamente de las leyes básicas. Ahora bien, dado que en un contexto de logística se dispone de un conjunto de fórmulas de una disciplina, éstas fórmulas pueden ser usadas en las deducciones a modo de premisas. En consecuencia, cuando la conceptografía se aplica a una disciplina en particular tiene sentido plantear una deducción con premisas: cuando hay un conjunto de fórmulas que expresan un significado concreto y que permiten obtener nuevas proposiciones de la disciplina. No es necesario que esta disciplina disponga de un conjunto de axiomas para que la conceptografía pueda llevar a cabo demostraciones usando los axiomas como premisas; basta con que la disciplina tenga a su disposición una serie de proposiciones relevantes que puedan usarse fructíferamente en las demostraciones. Es indiferente que estas proposiciones sean axiomas o teoremas de la disciplina. De hecho, como sucede en el caso de la aritmética en 1879, es perfectamente posible que no haya un conjunto de axiomas para un discurso científico en concreto.

En resumen, la disciplina proporciona tanto un conjunto de símbolos asociados a una interpretación particular como un conjunto de fórmulas que pueden ser usadas como premisas, y la conceptografía proporciona sus recursos formales, siempre que éstos hayan sido adaptados al lenguaje de la disciplina. Las reglas de inferencia de la conceptografía pueden aplicarse sin restricción en las deducciones de logística. Una vez se ha dado el paso fundamental de uniformizar, en el marco de una demostración en concreto y por medio de substituciones, la estructura sintáctica de las proposiciones de la conceptografía y de las expresiones de la disciplina que se usan como premisas, todas las expresiones del marco pueden dividirse consistentemente en función y argumento, de modo que las reglas de inferencia pueden aplicarse con total naturalidad.

El producto de la creación de este sistema híbrido es la obtención de nuevas verdades de la disciplina a partir de verdades de la disciplina ya establecidas. La conceptografía proporciona la garantía de que el proceso deductivo es riguroso.

Ejemplificación

Frege ejemplifica en algunas ocasiones de qué modo la conceptografía puede usarse para demostrar teoremas aritméticos. En 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880, pp. 27-31] puede hallarse un caso completamente desarrollado. Frege propone demostrar el teorema aritmético según el cual el resultado de sumar dos múltiplos de un número es también un múltiplo de dicho número. Reconstruiremos completamente esta demostración y mostraremos que ilustra nuestra explicación previa.

Para ello, el autor hace uso de las nociones de propiedad hereditaria y de ancestral fuerte. Como hemos expuesto en el apartado 2.4.1, ambas nociones son relativas a un procedimiento f. La Proposición (69) contiene la definición de propiedad hereditaria (que abreviamos, aplicada a letra funcional 'F', como Her(F)). Informalmente,

(69) Una propiedad F es f-hereditaria si y sólo si para cualquier objeto $\mathfrak{d}$ que posee la propiedad F, cada resultado de la aplicación del procedimiento f a $\mathfrak{d}$ también posee la propiedad F.

La noción de ancestral fuerte (que abreviamos mediante $f^*(x, y)$), por su parte, se define en la Proposición (76)[102]. De un modo informal,

(76) x es el ancestral fuerte de y si y sólo si y posee todas las propiedades f-hereditarias que tienen todos los resultados de aplicar el procedimiento f a x.

El lenguaje de aritmético que se utiliza en la demostración que consideramos es muy limitado, como se verá a continuación; en este ejemplo,

[102] Respecto al uso de las abreviaturas Her(F) y $f^*(x, y)$, véanse las notas 88 y 89.

Frege sólo necesita usar, además de los símbolos lógicos y las letras de la conceptografía, los símbolos propios ‘0’ y ‘+’. El autor adapta las letras para argumento de la conceptografía a aquellas letras que son habituales en aritmética, como ‘n’, ‘x’, ‘y’ o ‘z’.

En la demostración que nos ocupa, se trata de mostrar cierta distribución de propiedades relativas a un número natural cualquiera. Este número natural se toma como parámetro y se denota mediante la letra ‘a’. El procedimiento considerado en esta demostración está determinado por la siguiente ecuación:

$$x + a = y.$$

Así, el procedimiento, en este caso, consiste en sumar a a un número natural. De acuerdo con ello, siendo f_{+a} el procedimiento indicado, ‘$f_{+a}(x, y)$’ expresa que y es el resultado de sumar a a x[103]. Así pues, el ancestral fuerte de esta relación, de acuerdo con la notación adoptada, es f^*_{+a}[104]. Este ancestral fuerte proporciona el orden asociado a la sucesión generada de números naturales. Por lo tanto, la expresión ‘$f^*_{+a}(0, n)$’ indica que n pertenece al orden que resulta de aplicar repetidamente el procedimiento f_{+a} a 0, esto es, que n pertenece al orden correspondiente a la sucesión siguiente:

$$a, 2a, 3a, \ldots$$

En consecuencia, ‘$f^*_{+a}(0, n)$’ expresa que n es un múltiplo de a.

La terminología y la notación presentadas posibilitan formular el teorema que resulta de la demostración propuesta por Frege:

$$f^*_{+a}(0, n) \to (f^*_{+a}(0, y) \to f^*_{+a}(0, n + y)).$$

Informalmente, este teorema expresa que si n e y pertenecen a la sucesión generada por la aplicación del procedimiento f_{+a} a 0, entonces $n + y$ pertenece a la misma sucesión. Esto es, si n e y son múltiplos de a, entonces $n + y$ es múltiplo de a.

Dado que la demostración es más elaborada que las propias de *Begriffsschrift*, el autor especifica primero todos los recursos que serán necesarios para llevarla a cabo. En primer lugar, enumera los teoremas que serán usados en la demostración:

[103] Por razones de claridad, a lo largo de la demostración el procedimiento indicado será expresado explícitamente, y no mediante f_{+a}. Sin embargo, conviene tener en cuenta la motivación de esta notación al considerar expresiones como ‘$f^*_{+a}(x, y)$’.

[104] Recordemos que, del mismo modo que ‘$f^*(x, y)$’ abrevia ‘$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}} f(x_\gamma, y_\beta)$’, la notación ‘$f^*_{+a}(x, y)$’ es una simplificación de la expresión fregeana ‘$\overset{\gamma}{\underset{\beta}{\sim}}(x_\gamma + a = y_\beta)$’. Véase la nota 89.

1. $(n+b)+a = n+(b+a)$.

2. $n = n+0$.

3. $\forall\mathfrak{d}[F(\mathfrak{d}) \to \forall\mathfrak{a}(f(\mathfrak{d},\mathfrak{a}) \to F(\mathfrak{a}))] \to [F(x) \to (f^*(x,y) \to F(y))]$[105], Prop. (84).

4. $f^*(x,y) \to (f(y,z) \to f^*(x,z))$, Prop. (96).

Como es obvio, las proposiciones (1) y (2), que se presuponen en la demostración, son de naturaleza aritmética. Las instancias de substitución de las letras que aparecen en ellas son numerales. La misma restricción se aplica a las letras para argumento de (3) y (4). Estas dos últimas proposiciones son proposiciones del capítulo III de *Begriffsschrift*, por lo que su uso en la demostración no requiere más comentarios.

Tal y como hemos observado acerca de la complementación entre la conceptografía y cualquier disciplina, ésta es una demostración con premisas. El teorema que se quiere demostrar es una proposición aritmética; su demostración se lleva a cabo con los recursos formales que proporciona la conceptografía. Las proposiciones (3) y (4) se deducen sin premisas a partir de las leyes básicas de la conceptografía y, como tales, se toman como teoremas auxiliares en la demostración. Ahora bien, las proposiciones (1) y (2) no se deducen de las leyes básicas de la conceptografía, sino que se añaden como premisas.

Además de los teoremas señalados, Frege anuncia en esta demostración el uso de una nueva regla de inferencia:

> "In the preface of my *Begriffsschrift* I already said that the restriction to a single rule of inference which I there laid down was to be dropped in later developments. This is achieved by converting what was expressed as a judgement in a formula into a rule of inference. I do this with formulae (52) and (53) of my *Begriffsschrift*, whose content I render by the rule: in any judgement you may replace one symbol by another, if you add as a condition the equation between the two." [Frege, 1880, p. 29]

[105]Nótese que, de acuerdo con la notación de Frege (y las abreviaciones que adoptamos), (3) debería ser, tal y como aparece en *Begriffsschrift*, la fórmula siguiente:

$$\mathrm{Her}(F) \to (F(x) \to (f^*(x,y) \to F(y)))$$

Sin embargo, dadas las particularidades de la demostración, el autor prefiere hacer uso de la Proposición (84) sin abreviación, como consta en (3).

Así pues, el autor, buscando abreviar la longitud de la demostración, plantea usar las proposiciones mencionadas:

Pr. (52)	$(c \equiv d) \to (f(c) \to f(d))$.
Pr. (53)	$f(c) \to ((c \equiv d) \to f(d))$.

como aplicación de la siguiente regla:

> in any judgement you may replace one symbol by another, if you add as a condition the equation between the two.

En la demostración, nos referiremos genéricamente a esta regla como regla de introducción de la equivalencia [IE]. De acuerdo con ello, podrán llevarse a cabo transiciones como las siguientes:

- Si $\vdash f(c)$, entonces $\vdash (c \equiv d) \to f(d)$.
- Si $\vdash f(c) \to A$, entonces $\vdash (c \equiv d) \to (f(d) \to A)$.
- Si $\vdash A \to (f(c) \to B)$, entonces $\vdash A \to ((c \equiv d) \to (f(d) \to B))$.

Además, en la deducción Frege hace uso de una variante de [MP], aunque no ofrece ninguna justificación de su uso. Mediante esta regla, posibilita la siguiente transición:

> Si $\vdash A \to (B \to (\mathit{\Gamma} \to \mathit{\Delta}))$ y $\vdash \mathit{\Gamma}$, entonces $\vdash A \to (B \to \mathit{\Delta})$.

Nos referiremos a esta variante como [MP′].

Partiendo de los teoremas listados, y de la nueva regla de inferencia, la deducción de Frege continúa como sigue:

5. $\forall \mathfrak{d}[f^*_{+a}(0, n+\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{a}(\mathfrak{d} + a = \mathfrak{a} \to f^*_{+a}(0, n+\mathfrak{a}))] \to [f^*_{+a}(0, n+0) \to (f^*_{+a}(0, y) \to f^*_{+a}(0, n+y))]$, Substitución en (3) de[106]:

$F(\alpha)$	$f(\alpha, \beta)$	x
$f^*_{+a}(0, n+\alpha)$	$\alpha + a = \beta$	0

[106] Obsérvese que ni esta tabla ni la correspondiente al paso (6) de la demostración reflejan la substitución de $f^*(x, y)$ por $f^*_{+a}(x, y)$. Sin embargo, hay que recordar que la notación ‘$f^*_{+a}(\alpha, \beta)$’ es simplemente una abreviación, y que la expresión que abrevia contiene apariciones de ‘$f_{+a}(\alpha, \beta)$’, esto es, de ‘$\alpha + a = \beta$’. Por esta razón se ha substituido $f^*(x, y)$ por $f^*_{+a}(0, y)$ en (3), pese a que tal cambio no está explícitamente indicado en la tabla. Sucede lo mismo en la tabla de substitución correspondiente al paso (6).

6. $f^*_{+a}(0, n+b) \to [((n+b)+a) = (n+m) \to f^*_{+a}(0, n+m)]$,
Substitución en (4) de:

$f(\alpha, \beta)$	x	y	z
$\alpha + a = \beta$	0	$n+b$	$n+m$

7. $f^*_{+a}(0, n+b) \to [b+a = m \to (((n+b)+a) = (n+(b+a)) \to f^*_{+a}(0, n+m))]$, [IE] en (6).

8. $f^*_{+a}(0, n+b) \to [b+a = m \to f^*_{+a}(0, n+m)]$, [MP′] en (7) y (1).

9. $\forall \mathfrak{d}[f^*_{+a}(0, n+\mathfrak{d}) \to \forall \mathfrak{a}(\mathfrak{d}+a = \mathfrak{a} \to f^*_{+a}(0, n+\mathfrak{a}))]$, [C] y [G] en (8).

10. $f^*_{+a}(0, n+0) \to [f^*_{+a}(0, y) \to f^*_{+a}(0, n+y)]$, [MP] en (5) y (9).

11. $n = n+0 \to [f^*_{+a}(0, n) \to (f^*_{+a}(0, y) \to f^*_{+a}(0, n+y))]$, [IE] en (10).

12. $f^*_{+a}(0, n) \to (f^*_{+a}(0, y) \to f^*_{+a}(0, n+y))$ [MP] en (11) y (2).

Esta demostración muestra claramente la naturalidad con la que Frege aplica la conceptografía para la demostración de un teorema aritmético. La única modificación respecto a la las deducciones de *Begriffsschrift* es el uso del símbolo '$=$' en lugar del símbolo de igualdad de contenido de la conceptografía, '$\equiv$'. Propiamente, este último símbolo sería necesario, al menos, en la aplicación de [IE] en (7) y (11). El resto de diferencias entre lenguajes se resuelven a través de substituciones: de este modo, es posible aplicar teoremas de *Begriffsschrift* al curso de la demostración, como ocurre en los pasos (5) y (6). Hay que observar, en primer lugar, que todos estos cambios son exactamente de la misma naturaleza que los llevados a cabo en *Begriffsschrift*, y que se adaptan a las condiciones semánticas impuestas por la aritmética: las letras para argumento se substituyen por términos aritméticos, y las letras funcionales por expresiones funcionales que, en este caso, forman fórmulas cuando se combinan con los términos correspondientes. En segundo lugar, hay que destacar la naturalidad con la que se producen los cambios de una letra funcional por una expresión funcional en (5) y (6). En concreto, en un contexto de demostración matemática, se producen substituciones de diferentes casos, y todos ellos han sido mencionados en *Begriffsschrift.* En este sentido, destaca especialmente el cambio de '$F(\alpha)$' por '$f^*_{+a}(0, (n+\alpha))$': se trata de la substitución de una letra funcional por una expresión funcional de caso 1, que corresponde en un cálculo de segundo orden a una substitución de una variable de predicado por una fórmula.

Para aplicar [IE], Frege apela al contenido de proposiciones demostradas en *Begriffsschrift*, y esta indicación puede tomarse como una justificación de la introducción de la regla. Sin embargo, el autor no ofrece comentarios análogos respecto al uso de [MP′]; de hecho, respecto a la obtención de (8), Frege únicamente comenta: "From which [(7)] together with (1) there follows (8)" [Frege, 1880, p. 30]. Probablemente, el autor entiende que esta transición es una modificación natural de [MP] y que no requiere comentario. Lo cierto es que esta misma transición puede demostrarse mediante los recursos proposicionales de la conceptografía, sin apelar a una regla derivada.

Observemos que la estructura proposicional de (7) y (8) es del siguiente tipo

7. $d \rightarrow (c \rightarrow (b \rightarrow a))$.
8. $d \rightarrow (c \rightarrow a)$.

De acuerdo con esta esquematización de (7) y de (8), la letra proposicional 'b' representa (1). Ahora podemos expresar esta transición como sigue:

7.	$d \rightarrow (c \rightarrow (b \rightarrow a))$.	
i.	$[d \rightarrow (c \rightarrow (b \rightarrow a))] \rightarrow [b \rightarrow (d \rightarrow (c \rightarrow a))]$.	Prop. (13).
ii.	$b \rightarrow (d \rightarrow (c \rightarrow a))$,	[MP] en (i) y (7).
8.	$d \rightarrow (c \rightarrow a)$,	[MP] en (ii) y (1).

3.3.5 Logisticismo y logicismo en *Begriffsschrift*

Es posible hallar en los comentarios a *Begriffsschrift* de algunos autores de principios del siglo XX, como C. Lewis, evaluaciones generales no coincidentes acerca de su sistema formal. Lewis considera que *Begriffsschrift* es un tratado de logística. La logística, vista como simple combinación de los recursos formales de la lógica con otras disciplinas, es neutra respecto al logicismo. Ahora bien, si la tesis logicista es cierta, la logística pierde su interés; al menos, en cuanto aplicación de la lógica a la aritmética.

Tal y como hemos desarrollado la noción de logística, la conceptografía de *Begriffsschrift*, a pesar de ser un sistema formal planteado para la expresión de contendido, no se enmarca en un contexto propiamente logisticista. En este sentido, el uso de la conceptografía ejemplificado en la demostración ofrecida en el apartado 3.3.4 y el propio de *Begriffsschrift* no son exactamente coincidentes. Además, no está claro si Frege, en el momento de publicación de *Begriffsschrift*, contempla algún tipo de logicismo: el autor se limita a proporcionar los principios lógicos necesarios y a demostrar que algunos teoremas aritméticos son de naturaleza lógica. Por ello, la afirmación de Lewis, según la cual *Begriffsschrift* ofrece "a comprehensive development of arithmetic" [Lewis, 1918, p. 4], resulta dudosa. El desarrollo de la tesis logicista en 1879 es meramente parcial.

Los casos de aplicación de la conceptografía a otras disciplinas, esto es, donde la conceptografía se muestra genuinamente como logística, se hallan en los artículos inmediatamente posteriores a la publicación de *Begriffsschrift*. El texto de 1879 es de naturaleza completamente lógica, ya que en los capítulos II y III únicamente hay fórmulas compuestas por símbolos lógicos y letras. Ahora bien, en *Begriffsschrift* hay dos niveles de abstracción, como pone de relieve el contenido de los capítulos II y III. En primer lugar, las proposiciones del capítulo II expresan máxima generalidad, y son representantes de la conceptografía pura. En segundo lugar, las proposiciones del capítulo III expresan generalidad en el contexto de una teoría lógica fijada, pero no admiten distintas lecturas. De hecho, dado que en el capítulo III aparecen símbolos propios, su contenido es el más cercano de *Begriffsschrift* a la lógica actual.

El desarrollo de la lógica por parte de Frege en 1879 tiene una particularidad relevante: el autor no está interesado en la formulación y el análisis de leyes lógicas por sí mismas, sino únicamente en la obtención de teoremas aritméticos. Frege, por ejemplo, no estudia en ningún capítulo de *Begriffsschrift* las relaciones lógicas que hay entre los cuantificadores y las conectivas. De hecho, es fácil apreciar la relación de los símbolos de naturaleza lógica de las proposicones del capítulo III con nociones y propiedades verdaderamente aritméticas. Por ejemplo, la demostración de la Proposición (98) permite justificar la transitividad de la noción de ancestral fuerte:

Pr. (98) $$f^*(x,y) \rightarrow (f^*(y,z) \rightarrow f^*(x,z)).$$

Esta proposición expresa la generalización de una propiedad de la relación $<$ entre los números naturales. Por ello, es claro que, si la aritmética se complementara con la conceptografía, los teoremas que Frege trata de demostrar, concernientes al concepto de número y de orden numérico, formarían parte de esta complementación. La lógica de *Begriffsschrift*, al menos parcialmente, puede obtener estos teoremas, que son precisamente el resultado del desarrollo autónomo de la conceptografía.

En *Grundlagen*, Frege ofrecerá el desarrollo filosófico e informal de la tesis logicista, cuya formulación sistemática y rigurosa tendrá lugar en *Grundgesetze*. El planteamiento de este último texto es, por ello, sensiblemente distinto al de *Begriffsschrift*. Los resultados del texto de 1879 no van más allá de la definición lógica de algunas nociones aritméticas y de la deducción de algunos teoremas que involucran estas definiciones. Y, de hecho, la conceptografía de *Begriffsschrift* es insuficiente para llevar a cabo una reducción completa de la aritmética. En cambio, en *Grundgesetze*, Frege trata de construir un sistema formal axiomático del que se derive toda la aritmética. La diferencia esencial de *Grundgesetze* con *Begriffsschrift* debe hallarse en el uso explícito de la conceptografía en el texto de 1893-1903 con el propósito firme de justificar el logicismo.

3.4 *Lingua characterica* y *calculus ratiocinator*

3.4.1 Introducción

Ya hemos planteado que hay dos modos en los que la conceptografía, en tanto que sistema formal, puede considerarse. En primer lugar, la conceptografía puede ser utilizada como herramienta, como base para un sistema de logística y, en particular, bajo el trasfondo de la tesis logicista, para justificar que algunos teoremas aritméticos pueden ser demostrados exclusivamente por medio de herramientas lógicas. En segundo lugar, la conceptografía puede tomarse como lógica abstracta, esto es, como un sistema de verdades lógicas de aplicación completamente general. Esta división en los usos que pueden darse a la conceptografía responde al modo como Frege distingue entre dos nociones de herencia leibniziana: *lingua characterica* y *calculus ratiocinator*.

En el Prefacio de *Begriffsschrift*, Frege bosqueja su proyecto de construir un sistema formal, la conceptografía, cuyos mecanismos puedan ser aplicados a otras disciplinas científicas, además de la lógica. Uno de los rasgos más relevantes de su planteamiento es la conexión de este proyecto con las contribuciones metodológicas de F. Bacon (1561-1626) y G. W. Leibniz (1646-1716). En particular, Frege fija su atención en la realización del ideal leibniziano de una característica universal o *lingua characterica*[107]:

[107]Como comenta G. Patzig en la introducción a su edición de *Logische Untersuchungen* [Frege, 1966], la denominación '*lingua characterica*', en lugar de '*lingua rationalis*' o '*lingua universalis*', proviene de las ediciones de las obras de Leibniz de R. E. Raspe y de J. E. Erdmann. De hecho, Raspe tituló un escrito de Leibniz de 1678-1679 como 'Historia et Commendatio Lingua Charactericae Universalis' [Leibniz, 1765, pp. 533-540]; título que ha permanecido en sucesivas ediciones y traducciones. Según Patzig [Frege, 1966, p. 10,

> "Leibniz also recognized—perhaps overestimated—the advantages of an adequate method of notation. His idea of a universal characteristic, a *calculus philosophicus* or *ratiocinator*, was too ambitious for the effort to realize it to go beyond the mere preparatory steps. The enthusiasm which overcomes its creator when he considers what an immense increase in the mental power of mankind would result from method of notation which fits things themselves lets him underestimate the difficulty which such an undertaking confronts. But even if this high aim cannot be attained in one try, we still need not give up hope for a slow, stepwise approximation." [Frege, 1879a, p. 105]

El interés por parte de Frege por la conexión entre la conceptografía y la característica universal de Leibniz es un aspecto relevante en los escritos del autor que acompañan la publicación de *Begriffsschrift*. De hecho, tras la publicación de este texto en 1879, Frege y E. Schröder (1841-1902) iniciaron una polémica referente a sus respectivos sistemas formales que tenía como telón de fondo las nociones de *lingua characterica* y *calculus ratiocinator*. Tradicionalmente se ha asociado a Frege el uso de la lógica como *lingua*, mientras que el uso de la lógica como *calculus* se atribuye a la corriente algebrista y, en particular, a Schröder[108]. Sin embargo, tanto Frege como Schröder defendieron, con razones distintas, que sus respectivos sistemas formales realizaban adecuadamente el ideal de Leibniz de un lenguaje universal, y consideraron la lógica rival un mero *calculus ratiocinator*.

A lo largo de esta sección reconstruiremos el origen y la motivación del enfrentamiento entre las concepciones de lógica de Frege y los autores algebristas en el contexto de la publicación de *Begriffsschrift*. Más allá de mencionar algunos lugares comunes sobre esta disputa y de vincularla con el precedente común de Leibniz, los artículos especializados relacionados que tratan este tema no exponen con claridad ni la disputa ni las divergencias últimas que subyacen a ella. Veremos cómo la comprensión divergente por

---

nota 8], Frege tomó este término de la primera parte del tercer volumen de *Historisches Beiträge zur Philosophie* [Trendelenburg, 1867] de F. A. Trendelenburg: el tratado *Über Leibnizens Entwurf einen allgemeinen Charakteristik* [Trendelenburg, 1856].

L. Haaparanta añade en 'The Relations between Logic and Philosophy' [Haaparanta, 2009b, p. 230] que ya en la edición de las obras de Leibniz de Erdmann [Leibniz, 1840] se emplea en los títulos de algunos escritos originalmente no titulados el término '*characterica*' en lugar de '*characteristica*', que Leibniz usa a lo largo de sus obras. Tanto Trendelenburg como Frege mantienen, en general, la denominación '*characterica*'.

[108]El artículo 'Logic as Calculus and Logic as Language' [van Heijenoort, 1967b], de J. van Heijenoort, puede considerarse el germen de esta tradicional oposición entre las concepciones de la lógica.

parte de Frege y Schröder de la noción de *lingua characterica* se ve reflejada de modo substantivo en una diferencia fundamental en sus respectivas concepciones de la lógica y de sus funciones como disciplina.

3.4.2 *Characteristica universalis* en Leibniz

Antes de valorar la oposición entre Frege y los autores algebristas, es preciso considerar el origen y la naturaleza de las nociones de *characteristica universalis* y de *calculus ratiocinator*[109]. Leibniz concibe la *charateristica universalis* como una lengua franca para el conjunto de la humanidad y, además, como una herramienta para la expresión rigurosa y unívoca de conocimiento[110]. Para la articulación ordenada de los pensamientos en la que consiste el conocimiento humano es necesaria una estructura de símbolos. Como Frege destaca, es conveniente que haya una vinculación directa entre los símbolos del lenguaje y los componentes de los pensamientos, esto es, los conceptos, de modo que las operaciones con símbolos reflejen formas de composición conceptuales.

Para lograr esta conexión directa entre signos y pensamiento, Leibniz concibe la creación de la *characteristica universalis* como un proceso que comprende distintas fases. Así lo pone de manifiesto en 'Fundamenta calculi ratiocinatoris' [Leibniz, 1688]:

> "Habiendo estudiado desde hace tiempo esta cuestión, me resultó claro que todos los pensamientos humanos se resuelven en unos pocos, que son a modo de pensamientos primitivos. Si a éstos se les asignan caracteres, podrían formarse caracteres de las nociones derivadas. A partir de éstas podrían ser demostrables todos los requisitos y nociones primitivas que las componen, y por así decirlo las definiciones o valores, y por tanto

[109]En la introducción a su edición de *Logical Papers*, G. H. R. Parkinson considera la distinción entre *characteristica universalis* y *lingua universalis* [Leibniz, 1966, p. xvii]. Ambas son vistas esencialmente como el mismo lenguaje, y se distinguen, simplemente, porque la *characteristica universalis* es un lenguaje escrito y la *lingua universalis* hablado.

En aras de la claridad, trataremos de uniformizar las distintas formas de nombrar el lenguaje universal ideado por Leibniz. En el contexto de este autor, usaremos '*characteristica universalis*'. Cuando consideremos el tratamiento tanto de Frege como de los autores algebristas de esta lengua artificial, usaremos '*lingua characterica*'. Nos referiremos uniformemente al cálculo que complementa este lenguaje universal mediante la denominación '*calculus ratiocinator*'.

[110]Véase un tratamiento histórico detallado por parte de M. R. Antognazza de la *characteristica universalis* y del *calculus ratiocinator* de Leibniz en *Leibniz. An Intellectual Biography* [Antognazza, 2009, pp. 93-94; pp. 240-245].

> también las afecciones a partir de las definiciones.” [Leibniz, 1688, pp. 100-101]

En primer lugar, es preciso identificar los conceptos simples o nociones primitivas de todas las ciencias para, en segundo lugar, formar un vocabulario con los signos o caracteres que refieran a estos conceptos simples. La última fase comprende el establecimiento de reglas de combinación de conceptos, necesarias para la obtención de conceptos complejos o, como Leibniz se refiere a ellos, nociones derivadas. Dada la naturaleza aritmética de los caracteres, estas reglas se comportan como operaciones aritméticas: se obtienen nuevos conceptos mediante, por ejemplo, la multiplicación de los números correspondientes a dos conceptos primitivos.

La necesidad de garantizar el rigor en las demostraciones en la *characteristica universalis* explica su vinculación con la noción de *calculus ratiocinator*. Éste es visto como una herramienta complementaria al lenguaje; aquella que posibilita verificar si un enunciado se deriva de otros en conformidad con las propiedades de las operaciones mediante las cuales se combinan conceptos. Así pues, por un lado, la *characteristica universalis* posibilita formar enunciados a partir de un vocabulario básico, con el que referirse a las nociones primitivas, y de una serie de operaciones entre conceptos; y, por el otro, el *calculus* garantiza la corrección en la deducción de nuevos enunciados. De este modo se expresa Leibniz en ‘Fundamenta calculi ratiocinatoris’ [Leibniz, 1688]:

> “Puesto que esta arte característica, cuya idea tengo en mi alma, incluye el auténtico instrumento de la ciencia general, que atañe a todo cuanto cae bajo el raciocinio humano, revestido por las demostraciones evidentes y perennes de un cálculo, se trata de mostrar esta Característica nuestra, o arte de utilizar un cierto tipo de cálculo, tan exacto como generalísimo, basado en signos. Como todavía no hemos podido establecer de qué manera deben formarse los signos, entre tanto, y con el fin de llegar a formarlos en el futuro, utilizamos al modo de los matemáticos las letras del alfabeto u otros signos arbitrarios cualesquiera, los cuales irán apareciendo profusamente mientras progresemos. Y por la misma razón también irá apareciendo el orden de las ciencias, tratado mediante caracteres, y la cosa misma tratada mostrará que la aritmética elemental es previa y más simple que los elementos del cálculo lógico sobre las figuras y los modos silogísticos.” [Leibniz, 1688, pp. 100-101]

El propio Leibniz destaca el carácter ideal de la *characteristica univer-*

salis; en sus escritos, no pasó de ser un proyecto. Y sin un trabajo previo respecto a la selección de los conceptos simples y a la elaboración del vocabulario, únicamente se dispone de reglas abstractas para operar entre conceptos. Así, sin una *characteristica universalis*, el *calculus ratiocinator* es, desde una perspectiva actual, una suerte de teoría abstracta de clases[111]. Aprovechando esta particular relación entre la *characteristica universalis* y el *calculus ratiocinator* de Leibniz, podemos distinguir entre dos concepciones distintas de la lógica formal: la lógica como *calculus ratiocinator* y la lógica como *lingua characterica*[112].

3.4.3 Crítica de Schröder a la lógica de *Begriffsschrift*

En 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880], Frege menciona que en los desarrollos del *calculus ratiocinator* por parte de Leibniz se pretende crear una lógica de conceptos o clases (dependiendo de si se adopta un punto de vista intensional o extensional, respectivamente) con la ayuda de signos de operaciones aritméticas básicas. Esta perspectiva permite a Frege vincular la lógica algebrista con la concepción de lógica como *calculus*:

> "This way [Leibniz's] of setting up a formal logic seems to suggest itself naturally. At any rate recent German and English logicians have arrived at the same conception quite independently of Leibniz, though, as far as I know, in doing so they do not have a general characteristic in mind. However much Boolean logic may stand out as a systematic working out of the fragmentary hints in Leibniz, it only goes beyond him in one point of fundamental importance—in the way it reduces hypothetical and disjunctive judgements to categorical." [Frege, 1880, p. 10]

La mención por parte de Frege a la lógica booleana no es gratuita. De hecho, 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880] es una

[111] Una buena muestra del modo como Leibniz concibe el *calculus ratiocinator* desvinculado de una *characteristica universalis* puede hallarse en el escrito 'Ad Specimen Calculi Universalis addenda' [Leibniz, 1679].

[112] J. van Heijenoort, en 'Logic as calculus and logic as language' [van Heijenoort, 1967b], H. Sluga, en 'Frege Against the Booleans' [Sluga, 1987], V. Peckhaus, en 'Calculus ratiocinator versus characteristica universalis? The two traditions in logic, revisited' [Peckhaus, 2004], T. Korte, en 'Frege's *Begriffsschrift* as *lingua characterica*' [Korte, 2010] y J. Heis, en 'Frege, Lotze, and Boole' [Heis, 2013] ofrecen aproximaciones distintas a la que ofrecemos a continuación respecto a la dicotomía entre lógica como *calculus ratiocinator* y lógica como *lingua characterica*.

elaborada respuesta por parte de Frege a una reseña de *Begriffsschrift* escrita por Schröder [Schröder, 1880]. En su intento de destacar la importancia y la originalidad de su sistema formal, tras la publicación de *Begriffsschrift*, Frege elaboró tres artículos cuyo contenido, en gran medida, polemiza con la posición algebrista: el mencionado 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880], 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b] y 'Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift' [Frege, 1882c].

La profunda divergencia entre Frege y las posiciones algebristas (y más específicamente, entre Frege y Schröder) está motivada por una comprensión opuesta de qué es una *lingua characterica* y qué funciones se le deben asignar. Esta circunstancia pone de manifiesto un desacuerdo fundamental en sus respectivas concepciones de la lógica[113].

En 1880, en el momento de redacción de su reseña, Schröder aún no ha publicado ninguno de los tres volúmenes de su monumental tratado *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [Schröder, 1890, 1891, 1895, 1905] (de aquí en adelante, *Vorlesungen*) ni presentado detalladamente su planteamiento respecto al ideal de *lingua characterica*, de lo que se ocupa en el artículo 'On Pasigraphy' [Schröder, 1899][114]. Tal y como Schröder pone de manifiesto en la nota bibliográfica de su reseña a *Begriffsschrift* [Schröder, 1880, p. 231-232], en lo que respecta a la discusión que estamos considerando, los elementos básicos de su posición están presentes en *Der Operationskreis des Logikkalkuls* [Schröder, 1877]. Ahora bien, basaremos nuestra explicación en 'On Pasigraphy', lo cual está justificado; la perspectiva de Schröder no cambia respecto a su planteamiento general y, en particular, en lo que respecta a su concepción global de la *lingua characterica* y el *calculus ratiocinator*. El único cambio significativo entre los textos de 1877 y 1899 es el distinto estado de desarrollo de la teoría lógica, que consideraremos a continuación.

[113]La sucinta explicación que ofrecemos a continuación de los elementos básicos de la lógica algebrista y de su desarrollo sigue la reconstrucción de C. Badesa en los dos primeros capítulos de *The Birth of Model Theory* [Badesa, 2004, pp. 1-72].

[114]Schröder se refiere a la pasigrafía como "a scientific Language, entirely free from national peculiarities", por medio de cuya construcción se establezca "the foundation of exact and true philosophy" [Schröder, 1899, p. 45]. En el primer volumen de *Vorlesungen*, Schröder contrasta la pasigrafía, en tanto que "eine *allgemeine* Sprache der Sache [una lengua *universal* de las cosas]", con los distintos lenguajes naturales [Schröder, 1890, p. 93]; sin embargo, desde su perspectiva, la pasigrafía no debe verse como una lengua franca de uso corriente, sino como un lenguaje de carácter lógico [Schröder, 1890, p. 94, nota].

Lógica algebrista, *lingua characterica* y *calculus ratiocinator*

En su larga reseña a *Begriffsschrift*, Schröder considera las nociones de *lingua characterica* y de *calculus ratiocinator* [Schröder, 1880, pp. 218-219]. Su perspectiva inicial es análoga, en términos generales, a la de Leibniz. En 'On Pasigraphy' [Schröder, 1899], Schröder recupera este planteamiento y distingue claramente entre la *lingua characterica* y el *calculus ratiocinator*. Esta distinción se convierte en el planteamiento programático del artículo de 1899:

> "The problem to be solved for any given branch of science amounts to: expressing *all* the notions which it comprises, adequately and in the concisest possible way, through a minimum of *primitive notions*, say "categories," by means of purely logical operations of general applicability, thus remaining the same for every branch of science and being subject to the laws of ordinary Logic, but which latter will present themselves in the shape of a "calculus ratiocinator." For the categories and the operations of this "lingua characteristica" or "scriptura universalis" easy signs and simple symbols, such as letters, are to be employed, and—unlike the "words" of common language—they are to be used with absolute consistency (...)." [Schröder, 1899, p. 46]

Desde la perspectiva de Schröder, el lenguaje formal, visto como *lingua characterica* o pasigrafía, está compuesto por un vocabulario de símbolos de las nociones básicas o primitivas, que Schröder denomina 'categorías'. Este vocabulario básico puede ampliarse para poder expresar en el lenguaje las nociones derivadas. El cálculo se encarga de proporcionar los principios para la derivación de nuevos teoremas.

La lógica algebraica de tradición booleana posee un único conjunto de nociones primitivas que se aplican tanto a la lógica de clases como a la lógica de enunciados. En el momento de la publicación de la reseña de Schröder a *Begriffsschrift*, las nociones simples eran la suma, el producto y el complemento, que esencialmente coincidían con las propuestas por Boole en *An Investigation of the Laws of Thought* [Boole, 1854], aunque la interpretación de alguna de ellas (en particular, la suma) había sufrido cambios. Un paso esencial para la lógica algebrista consistió en añadir la noción de subsunción al conjunto de nociones básicas. Así pues, en 1879-1880 el conjunto básico de nociones para Schröder coincide con el propuesto por Peirce, que se compone de la subsunción ($-\!\!<$), la suma ($+$), el producto ($\cdot$), el complemento ($^{-}$) y los módulos (1 y 0)[115]. Todos los símbolos correspondientes a

[115]Peirce introduce el símbolo '$-\!\!<$' para la relación de subsunción en 'Description of a

las nociones primitivas tienen una doble interpretación, según se apliquen a la lógica de clases o a la lógica de enunciados. Así, el símbolo '$\prec$' se interpreta como inclusión, o como implicación o condicional; '+' como unión o disyunción; '$\cdot$' como intersección o conjunción; '$^{-}$' como complemento o negación; '1' como universo del discurso o verdadero; y '0' como clase vacía o falso, respectivamente.

En 1880, Schröder dispone de las nociones básicas de la lógica de clases y la lógica de enunciados, pero no cuenta con una teoría axiomatizada. Por ello, un paso esencial en el desarrollo de la lógica de tradición booleana es la axiomatización del cálculo de clases que Peirce, en lo esencial, lleva a cabo en 'On the Algebra of Logic' [Peirce, 1880][116]. Desde la perspectiva de Peirce, el cálculo de clases es el mismo que el de enunciados, por lo que su axiomatización es común. En el primer volumen de *Vorlesungen* [Schröder, 1890], Schröder formula con precisión la axiomatización del cálculo de clases que Peirce había estado a punto de lograr en 1880. En el segundo volumen de *Vorlesungen* [Schröder, 1891] y [Schröder, 1905], Schröder obtiene un cálculo de enunciados añadiendo un axioma al cálculo de clases [Schröder, 1891, §31, p. 52]. Las demostraciones en el cálculo de la lógica de clases y de enunciados booleana son demostraciones algebraicas al uso. Su mayor peculiaridad está en que los principios lógicos están incluidos sin distinción en los principios del cálculo; no hay una separación nítida entre los principios de razonamiento y las leyes algebraicas. Esta circunstancia obedece a la adopción de símbolos algebraicos que pueden interpretarse de modos distintos, según se apliquen al cálculo de clases o al cálculo de enunciados, como acabamos de comentar. Así, por ejemplo, la fórmula '$a \mathrel{=\!\!\!\in} a \cdot b$' puede interpretarse, en términos actuales, o bien como '$a \subseteq a \cap b$' o bien como '$\alpha \vDash \alpha \wedge \beta$'.

El lenguaje de las lógicas mencionadas es, en cierto modo, insuficiente, dado que únicamente permite expresar operaciones entre clases o enunciados. Hay, por lo tanto, aspectos relevantes que no se pueden expresar, como, por ejemplo, y de forma especialmente significativa, los enunciados relacio-

Notation for the Logic of Relatives, resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic' [Peirce, 1870, p. 328] (de aquí en adelante, 'Description of a Notation'), y pasa a considerarla como una relación más básica y simple que la igualdad en 'On the Algebra of Logic' [Peirce, 1880, p. 21, nota]. En el primer volumen de *Vorlesungen*, Schröder adopta el símbolo '$\mathrel{=\!\!\!\in}$' en lugar de '$\prec$' para expresar la relación de subsunción [Schröder, 1890, §1, p. 140].

[116]El artículo 'On the Algebra of Logic' [Peirce, 1880], en el que Peirce, como hemos mencionado, lleva a cabo, en los aspectos esenciales, la primera axiomatización del cálculo de clases, no aparece en el listado bibliográfico que Schröder incluye al final de su reseña [Schröder, 1880, pp. 231-232].

nales. Estas lógicas tampoco disponen de un tratamiento adecuado de la cuantificación. Por esta razón, el lenguaje de la lógica de clases y de enunciados a disposición de los lógicos algebristas no puede considerarse una *lingua characterica*.

Peirce inicia el desarrollo del cálculo de relativos en 'Description of a Notation' [Peirce, 1870] y 'On the Algebra of Logic' [Peirce, 1880][117]. Dos pasos esenciales para el cálculo de relativos y, en general, para el desarrollo algebraico de la lógica tienen lugar en 'The Logic of Relatives' [Peirce, 1883] y 'On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation' [Peirce, 1883]: la introducción de variables individuales y la interpretación de $\sum$ y $\prod$ como cuantificadores. En el tercer volumen de *Vorlesungen* [Schröder, 1895], Schröder continua el trabajo de Peirce en la lógica de relativos. En esta lógica se ofrece una presentación algebraica de la lógica de clases y la lógica de enunciados, que están contenidas en la primera. Sin embargo, la teoría de relativos nunca ha sido axiomatizada[118].

En 'On Pasigraphy', Schröder afirma que el cálculo al que recurre es el álgebra de relativos de Peirce:

> "Now the *calculus ratiocinator* ruling, nay governing, our categories and fundamental operations, to the laws of which these primitive elements of thought are of necessity subject, is none other than Peirce's "*Algebra of Relatives*," a discipline (branch of science) crowning the edifice of the "Algebra of Logic" and comprising as well the statement-calculus as the class-calculus—both as very subordinate parts." [Schröder, 1899, pp. 52-53]

Así pues, siguiendo los pasos iniciados por Peirce, Schröder amplia el lenguaje y el cálculo disponibles para construir, en el tercer volumen de *Vorlesungen* [Schröder, 1895], un sistema que proporcione un análisis lógico adecuado de los términos relativos. El conjunto de categorías de este sistema ampliado resulta de añadir a las categorías de la lógica de clases y de enunciados categorías específicas adecuadas para tratar la lógica de relativos. Las categorías básicas que Schröder enumera en 'On Pasigraphy'

[117]Peirce distingue entre términos relativos y términos absolutos en 'Description of a Notation' [Peirce, 1870, p. 332]. Los términos relativos, a diferencia de los términos absolutos, expresan relaciones entre objetos. De hecho, la denominación 'lógica de relativos' deriva de 'lógica de términos relativos'. Para Schröder, la noción de relativo equivale a lo que en términos actuales se denomina 'relación', esto es, una clase de pares ordenados.

[118]A. Tarski, en 'On the calculus of relations' [Tarski, 1941], propuso una axiomatización de la teoría de relativos y afirmó que con ella podía deducir los teoremas del tercer volumen de *Vorlesungen* [Schröder, 1895].

[Schröder, 1899, pp. 47-49] son las siguientes: la igualdad ($=$) y la relación de identidad (1'), la intersección ($\cdot$) y el producto generalizado ($\prod$), el complemento ($^{-}$), la inversión de relaciones ($\breve{\ }$) y el producto relacional (;). El vocabulario básico es ampliado para poder expresar en el lenguaje las nociones derivadas, que se presentan mediante definiciones [Schröder, 1899, p. 49]. Las nociones derivadas son el universo (1), la clase vacía (0), la disyunción ($+$) y la suma generalizada ($\sum$), la suma relativa ($\dagger$) y la subsunción ($\mathrel{=\!\!\!\!<}$). La lógica resultante engloba el conjunto ampliado de símbolos y todas las definiciones que regulan las operaciones entre relativos.

Llamaremos 'lógica algebrista' al sistema formado por la lógica de clases, la lógica de enunciados y la lógica específica de relativos[119]. Desde la perspectiva de Schröder, la lógica algebrista no se distingue de la lógica de relativos, ya que mantenía que todo el sistema en el que consiste la lógica algebrista se reduce a lógica de relativos, esto es, que la lógica algebrista incluye la lógica booleana. El lenguaje de esta lógica, a diferencia del propio de la lógica de clases o de enunciados, permite expresar cualquier concepto. Este aspecto es esencial para formal el lenguaje de una teoría lógica a la que pueda ser reducida cualquier disciplina científica. Al fin y al cabo, para Schröder casi todo puede ser visto como un relativo:

> "Almost everything may be viewed as, or considered under the aspect of, a (dual or) *binary relative*, and can be represented as such. Even statements submit to be looked at and treated as binary relatives. Classes, assemblages (Mengen, ensembles) or absolute terms may be thus presented.
>
> And since in ordinary as well as in scientific thinking the relative notions by far prevail over the absolute ones, which latter, over and above, are eventually comprised in and superseded by them, it is evident, that the Logic of the relative notions, Relatives, must form the indispensable base and underlie every successful attempt at Pasigraphy." [Schröder, 1899, p. 53]

En consecuencia, desde la perspectiva de Schröder, la lógica algebrista realiza el proyecto leibniziano con una *lingua characterica* y un *calculus ratiocinator*. Naturalmente, esto no significa que Schröder ya defendiera este planteamiento en el momento de redactar su reseña a *Begriffsschrift*. En

[119]La lógica algebrista es la base para el planteamiento de Schröder respecto a la pasigrafía presente en 'On Pasigraphy' [Schröder, 1899].

Para tratar de evitar confusiones, usaremos en lo que sigue la denominación 'lógica booleana' para referiremos unitariamente a la lógica de clases y de enunciados desarrollada por los lógicos algebristas.

particular, en 1880, Schröder no disponía de la lógica de relativos y, de hecho, ni siquiera de la formulación definitiva de la lógica de clases o de la lógica de enunciados.

Únicamente la lógica de relativos, esto es, la combinación de su lenguaje y del cálculo de relativos, captura, en opinión de Schröder, el ideal de Leibniz. Esta circunstancia crea cierta tensión en nuestra evaluación de la posición de Schröder en 1880, y por esta razón hemos considerado adecuado tomar 'On Pasigraphy' [Schröder, 1899] como texto de referencia para la exposición de la relación entre la lógica algebraica y la construcción de una *lingua characterica*.

Conceptografía como mero *calculus*

Desde el punto de vista de Schröder, la conceptografía de *Begriffsschrift* no contiene una *lingua characterica*, porque carece completamente de nociones básicas. Este detalle fundamental ha sido ignorado por la práctica totalidad de estudios históricos[120]. En *Begriffsschrift*, se ofrece un modo de presentar proposiciones y de realizar inferencias, pero no se proporciona un vocabulario de los conceptos simples con los que operar para obtener estas proposiciones. Por consiguiente, en *Begriffsschrift* Schröder únicamente reconoce la presencia de un *calculus ratiocinator*. Los comentarios introductorios de su reseña a *Begriffsschrift* concluyen en estos términos:

> "[I]t must be said that Frege's title, *Conceptual Notation*, promises too much—more precisely, that the title does not correspond at all to the content [of the book]. Instead of leaning toward a universal characteristic, the present work (perhaps unknown to the author himself) definitely leans toward a Leibniz's "*calculus ratiocinator*". In the latter direction, the present little book makes an advance which I should consider very creditable, if a large part of what it attempts had not already been accomplished by someone else, and indeed (as I shall prove) in a doubtlessly more adequate fashion." [Schröder, 1880, pp. 219-220]

[120] Un ejemplo particularmente significativo al respecto es el planteamiento de H. Sluga en 'Frege Against the Booleans'[Sluga, 1987]. En este texto, Sluga afirma que, desde la perspectiva de Schröder, "Fregean logic fell short of being a characteristic language because it did not aim at building up complex concepts and judgements out of simple ones by means of a few determinate concepts" [Sluga, 1987, p. 84]. Tal y como es claro en el planteamiento de Sluga [Sluga, 1987, p. 83], esta afirmación no es más que una paráfrasis extraída de la reseña de Schröder a *Begriffsschrift* [Schröder, 1880]; en particular, Sluga no ofrece absolutamente ninguna explicación de su afirmación.

Schröder ve en la conceptografía un mero cálculo, esto es, un conjunto de leyes y una serie de reglas que permiten lleva a cabo inferencias. Ahora bien, también reconoce que la lógica de Boole no dispone de un modo para expresar adecuadamente los enunciados existenciales, de modo que, en este sentido, las capacidades expresivas de la conceptografía son superiores:

> "There is a defect in Boole's theory, perceived by many (...), in the fact that particular judgements are only inadequately expressed in it (strictly speaking, not at all). The indeterminate factor v, which uses, for example, in the first part of the logical calculus in the form $va = vb$ to express the sentence "Some a's are b's.", does not fulfil his purpose because, through the hypothesis $v = ab$, this equation always comes out an identity, even when no a is b. Now in the section concerning "generality", Frege correctly lays down stipulations that permit him to express such judgements precisely." [Schröder, 1880, p. 229]

No es gratuito, por tanto, que Frege muestre en *Begriffsschrift*, como hemos visto en el apartado 1.2.7, que los cuatro tipos de proposiciones categóricas pueden expresarse en la conceptografía[121]. Además, Frege se encarga de destacar que la conceptografía puede expresar también juicios existenciales, como el siguiente:

$$\vdash\!\neg\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\neg\; \mathfrak{a}^2 = 2,$$

que puede leerse como 'Existe una raíz cuadrada de 2'. Frege, de hecho, dedica una buena parte del artículo 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880] a poner de relieve las diferencias en las respectivas capacidades expresivas de la lógica de Boole y la conceptografía[122].

La lógica de clases y la lógica de enunciados con las que pudo contar Schröder en 1879-1880 eran muy limitadas. La simbolización provisional de un enunciado particular que plantea Schröder en su reseña a *Begriffsschrift* es una muestra de ello [Schröder, 1880, p. 230]. Así pues, Schröder debería

[121]Sin embargo, es posible que en 1879, en el momento de redactar *Begriffsschrift*, Frege no conociese la lógica booleana ni, en particular, la obra de Boole. Tal y como T. W. Bynum plantea en la introducción a su traducción de *Begriffsschrift* [Frege, 1879a, pp. 77-78], Frege no asistió antes de la publicación de *Begriffsschrift* a ningún curso en el que pudiese entrar en contacto con los trabajos de Boole ni cita en ninguna ocasión en el texto de 1879 a ningún lógico algebrista.

[122]En 1883, con la publicación de 'The Logic of Relatives' [Peirce, 1883], Peirce introduce la cuantificación con variables individuales como suma y producto generalizados de coeficientes. Hasta ese momento, los lógicos algebristas no dispusieron de las herramientas formales necesarias para dar cuenta de un análisis de los enunciados categóricos como el de Frege. Véase *The Birth of Model Theory* [Badesa, 2004, p. 39, nota 13].

haber reconocido que tanto las capacidades expresivas como la potencia deductiva del sistema formal de *Begriffsschrift* son superiores a las de la lógica booleana en 1879-1880. Naturalmente, esta diferencia fundamental se disolverá en gran medida con la axiomatización del cálculo de clases y del cálculo de enunciados y, especialmente, con el desarrollo de la lógica de relativos, gracias a la cual los lógicos algebristas disponen de las herramientas adecuadas para expresar cuantificación múltiple y relaciones. Desde la perspectiva de la lógica de relativos, la diferencia fundamental entre la lógica fregeana y la algebrista es que la conceptografía dispone de un proceso deductivo reglado, y la lógica algebrista no dispone de un sistema formal propiamente dicho, ni siquiera de manera implícita. Dado que los lógicos algebristas únicamente pretenden estudiar la estructura algebraica de las leyes lógicas, esta circunstancia no podía suponer una diferencia realmente significativa para Schröder.

La parcialidad del diagnóstico de Schröder puede explicarse, en parte, porque se basa casi exclusivamente en el capítulo II de *Begriffsschrift*. Es patente en la reseña la poca atención que presta Schröder al capítulo III de *Begriffsschrift*; desdeña lo que considera una innecesariamente compleja notación y la generalidad de sus resultados [Schröder, 1880, pp. 230-231]. La constatación de esta recepción llevó a Frege a la redacción de los artículos comprendidos entre los años 1880 y 1882. En el apartado 5.5.2 consideraremos esta cuestión.

En este punto, debemos destacar el modo en el que Schröder ve la conceptografía, como un sistema lógico cuyo contenido es puramente abstracto; un sistema de reglas para la operación con símbolos, sin un vocabulario básico y sin que pueda establecerse un significado concreto para sus expresiones. Y, de hecho, Schröder no aprecia el interés que puede tener aplicar los recursos deductivos que proporciona la conceptografía tal y como Frege hace en el capítulo III de *Begriffsschrift*.

3.4.4 Concepción fregeana de la *lingua characterica*

El planteamiento inicial de Frege en sus artículos inmediatamente posteriores a la publicación de *Begriffsschrift* es complementario al de Schröder. El elemento común entre ambos autores es la división entre concepciones de la lógica. En 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b], Frege expone su perspectiva respecto a la conceptografía:

> "In fact, I wished to produce, not a mere *calculus ratiocinator*, but a *lingua characteristica* in the Leibnizian sense. In doing so, however, I

> recognize that deductive calculus is a necessary part of a conceptual notation. If this was misunderstood, perhaps it is because I let the abstract logical aspect stand too much in the foreground." [Frege, 1882b, p. 91]

Frege establece claramente que su voluntad es desarrollar la conceptografía como la realización adecuada de una *lingua characterica* y un *calculus ratiocinator*. En clara respuesta a Schröder, Frege niega que su sistema formal sea un mero *calculus ratiocinator*; en su opinión, el desarrollo de un cálculo lógico es imprescindible para garantizar el rigor de las deducciones, pero debe ir unido a una estructura lingüística adecuada.

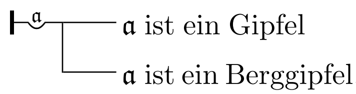
En 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880], Frege realiza un análisis elaborado de las capacidades expresivas de un lenguaje apto para ser considerado *lingua characterica*. En primer lugar, el autor destaca la inadecuación del lenguaje natural como *lingua characterica*, esto es, como lenguaje de expresión de conocimiento científico:

> "But the content is to be rendered more exactly than is done by verbal language. For that leaves a great deal to guesswork, even if only of the most elementary kind. There is only an imperfect correspondence between the way words are concatenated and the structure of the concepts." [Frege, 1880, pp. 12-13]

Frege recupera el planteamiento de Leibniz con respecto al lenguaje natural: este lenguaje permite imprecisiones tanto en la expresión de relaciones conceptuales como en el uso de supuestos implícitos en las demostraciones. En el lenguaje natural, siguiendo el ejemplo de Frege en el original alemán, dos expresiones con la misma estructura gramatical, como son '*Berggipfel*' y '*Baumriese*' ('cumbre de montaña' y 'árbol gigantesco', respectivamente), expresan relaciones entre conceptos completamente distintas [Frege, 1880, p. 13]. Mientras que el concepto '*Baumriese*' consiste en la intersección de los conceptos 'ser un árbol' y 'ser gigantesco', el concepto '*Berggipfel*' únicamente está subordinado al concepto 'ser una cumbre'[123]. Por consiguiente, de todos los objetos que caen bajo '*Baumriese*' se puede predicar ser un árbol y ser gigantesco, pero ningún objeto que cae bajo el concepto '*Berggipfel*'

[123]Usamos en este contexto la misma notación que usa Frege para designar conceptos o relaciones, a pesar de que puede inducir al error dada la inconsistencia de este uso con el que mayoritariamente se ha dado a esta notación a lo largo de este trabajo. En este contexto particular, el uso de comillas no indica la referencia a la expresión que estas contienen, sino la referencia al concepto o relación denotado por la expresión. En los textos posteriores a *Grundlagen*, Frege recurre al uso de cursiva para designar conceptos.

cae bajo el concepto 'ser una montaña'. La conceptografía permite evitar la imprecisión del lenguaje natural en la expresión de relaciones conceptuales como las ejemplificadas; en particular, asiste en la expresión la relación entre los conceptos '*Berggipfel*' y '*Gipfel*' del modo siguiente:



En segundo lugar, Frege plantea de qué modo los lenguajes reglados disponibles pueden ser también inadecuados como *lingua characterica*. Los lenguajes con una sintaxis regimentada, de los cuales es un caso paradigmático el matemático, posibilitan expresar contenido de forma clara y rigurosa. Sin embargo, no extienden el mismo rigor a la representación de las relaciones entre proposiciones, como, por ejemplo, en el caso de introducir nuevos conceptos. Con este planteamiento, Frege prosigue su discusión respecto a la realización de una *lingua characterica*, evaluando el lenguaje de la matemática:

> "The formula-languages of mathematics come much closer to this goal, indeed in part they arrive at it. But that of geometry is still completely undeveloped and that of arithmetic itself is inadequate for its own domain; for at precisely the most important points, when new concepts are to be introduced, new foundations laid, it has to abandon the field to verbal language, since it only forms numbers out of numbers and can only express those judgements which treat of the equality of numbers which have been generated in different ways." [Frege, 1880, p. 13]

Los lenguajes matemáticos tienen limitaciones relevantes. Son demasiado específicos, y extender su aplicación no es posible porque necesitan el complemento del lenguaje natural para dar expresión a las relaciones lógicas entre enunciados. Precisamente, estas son las carencias que hemos considerado en el apartado 3.2.2.

La conceptografía está ideada para complementarse con una disciplina y proporcionar todas las herramientas necesarias para reconstruir de modo riguroso las demostraciones de esta disciplina. Estas herramientas posibilitan eliminar el uso de lenguaje natural en las pruebas, lo cual no significa simplemente substituir las palabras por símbolos. La conceptografía exige llevar a cabo un análisis lógico de los enunciados de la disciplina que permite diferenciar adecuadamente los elementos del lenguaje lógico del significado específico de estos enunciados. Así pueden expresarse con rigor las relaciones conceptuales. El lenguaje de la conceptografía permite así la simbolización de los enunciados de la disciplina en cuestión. Esta simbolización no debe verse, en ningún caso, como la formalización que llevan a cabo los lenguajes formales actuales. Al fin y al cabo, el lenguaje de la conceptografía no es un lenguaje formal: no substituye los símbolos propios del lenguaje de la disciplina por constantes que carecen de significado, sino que preserva los símbolos que designan los objetos, conceptos y relaciones propios de la disciplina con su interpretación, de modo que los enunciados resultantes de la simbolización no son meros esquemas sin contenido.

El cálculo de la conceptografía hace explícitos todos los pasos llevados a cabo en las pruebas, de modo que permite reflejar las relaciones deductivas que hay entre enunciados. Así, al expresar de manera rigurosa cada uno de los pasos en las demostraciones, hace posible eliminar en ellas el lenguaje natural. En este sentido, el cálculo es una parte necesaria de un lenguaje universal.

3.4.5 Crítica de Frege a la lógica booleana

En las acusaciones cruzadas entre Frege y Schröder, cada uno de ellos considera que el sistema formal al que se oponen es únicamente un *calculus*. En 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880], Frege evalúa la lógica booleana como candidata a realizar el ideal de *lingua characterica*:

> "In contrast, Boole's symbolic logic only represents the formal part of language, and even that incompletely. The result is that Boole's formula-language and the formula-language of arithmetic each solve only one part of the problem of a concept-script. What we have to do now, in order to produce a more adequate solution, is to supplement the signs of mathematics with a formal element, since it would be inappropriate to leave the signs we already have unused. But on this score alone Boole's logic is already completely unsuited to the task of making this supplementation, since it employs the signs +, 0 and 1 in a sense which diverges from their arithmetical ones. It would lead to great inconvenience if the same signs were to occur in one formula with different meanings. This is not an objection to Boole, since such an application of his formulae obviously lay completely outside his intentions." [Frege, 1880, pp. 13-14]

El conjunto de nociones básicas para la expresión de contenido incluye los conceptos primitivos, pero no los conceptos lógicos. Ni Boole ni Schröder llevan a cabo esta distinción y no separan, por ejemplo, en el caso de la suma, su uso algebraico, en tanto que unión en el cálculo de clases, de su uso lógico, en tanto que conectiva en el cálculo de enunciados. Los autores algebristas se apoyan en su comportamiento algebraico común para no distinguir entre estos usos; desde el punto de vista de Schröder, la única diferencia que hay entre los dos contextos es que, en el caso del cálculo de enunciados, el álgebra sólo tiene dos elementos (los correspondientes a los valores de verdad) y, en el caso del cálculo de clases, el álgebra puede tener más elementos[124].

Para Frege, sin embargo, los componentes lógicos de la teoría deben estar nítidamente separados. Por esta razón, rechaza el uso por parte de los lógicos algebristas de símbolos de operaciones aritméticas, como '+' o '·', para expresar relaciones lógicas como la disyunción o la conjunción, respectivamente. Bajo este punto de vista, un símbolo como '+' no puede ser lógico, porque posee un significado aritmético determinado y, por tanto, su uso lógico conlleva inconsistencias en la notación. Así lo atestigua en 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b]:

> "(...) I could not use Boolean symbolism; for it is not feasible to have, for example, the + sign occurring in the same formula part of the time in the logical sense and part of the time in the arithmetical sense. The analogy between the logical and the arithmetical methods of calculation, which is of value to , can only bring confusion if both are combined together. Boole's symbolic language is conceivable only in complete separation from arithmetic. Therefore, I must invent symbols for the logical relations." [Frege, 1882b, pp. 93-94]

Así pues, la posición de Frege es clara: se trata de introducir, por un lado, un lenguaje formal cuyos símbolos permitan, en primer lugar, expresar con precisión las relaciones conceptuales y, en segundo lugar, las relaciones lógicas que vinculan los enunciados de una disciplina; y, por el otro, un cálculo que posibilite establecer rigurosamente las relaciones deductivas que hay entre las verdades de la disciplina. Así recapitula su discusión en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift':

> "Thus, the problem arises of devising signs for logical relations that are suitable for incorporation into the formula-language of mathematics, and in this way of forming—at least for a certain domain—a complete concept-script. This is where my booklet comes in." [Frege, 1880, p. 14]

[124] Esta diferencia en los elementos del álgebra se establece mediante el añadido de un axioma adicional para el cálculo de enunciados, según el cual una variable proposicional sólo puede tener los valores 0 o 1 [Schröder, 1891, §31, p. 52].

En *Grundlagen*, Frege recupera este planteamiento con un comentario general acerca de la conceptografía, y que bien puede tomarse como una síntesis de su posición:

> "[The conceptual-notation] is designed to produce expressions which are shorter and easier to take in, and to be operated like a calculus by means of a small number of standard moves, so that no step is permitted which does not conform the rules which are laid down once and for all*. It is impossible, therefore, for any premiss to creep into a proof without being noticed."
>
> *[Nota de Frege] "It is designed, however, to be capable of expressing not only the logical form, like Boole's notation, but also the content of a proposition." [Frege, 1884, §91, p. 103]

La insistencia por parte de Frege respecto a la necesidad de expresar contenido puede entenderse a la luz de la comparación entre la conceptografía y la lógica booleana: esencialmente, en la comparación entre la lógica vista como herramienta y la lógica vista como su propio objeto de estudio, respectivamente.

Precisamente, en 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b], Frege vuelve la acusación de Schröder, según la cual la conceptografía es un mero cálculo, en su contra. En opinión de Frege, la lógica booleana es lógica abstracta:

> "When we view the Boolean formula language as a whole, we discover that it is a clothing of abstract logic in the dress of algebraic symbols. It is not suited for the rendering of a content, and that is also not its purpose. But this is exactly my intention." [Frege, 1882b, p. 93]

La acusación de Frege, según la cual la lógica booleana no es más que lógica abstracta y no está adaptada para la expresión de contenido, puede entenderse adecuadamente prestando atención a la naturaleza de esta lógica. El objeto de la lógica de clases booleana son las operaciones entre conceptos, tomados extensionalmente. En este sentido, los autores algebristas operan con clases en sentido abstracto, aunque en los ejemplos que planteen siempre intervengan extensiones de conceptos en particular. Las operaciones entre conceptos no son relativas a ninguna extensión concreta; pueden aplicarse con generalidad. Ciertamente, es posible simbolizar con esta lógica algunos enunciados: aquellos que pueden simbolizarse con la lógica de clases o la lógica de enunciados. Sin embargo, prácticamente ningún argumento aritmético es simbolizable con los medios de la lógica booleana, porque no dispone de las herramientas para expresar cuantificación múltiple o relaciones. Por consiguiente, si bien la lógica booleana puede aplicarse con el propósito de simbolizar, en el sentido en que puede usarse la lógica de clases o de enunciados para mostrar la corrección de argumentos sencillos, éste no es su propósito general. Es más, cuando Schröder, con el tercer volumen de *Vorlesungen* [Schröder, 1895], finalmente tuvo a su disposición una lógica de relativos, que permite simbolizar adecuadamente, ni usó la lógica para simbolizar enunciados matemáticos ni mostró ningún interés en hacerlo[125].

Por esta razón, desde la perspectiva de Frege, la lógica booleana debe ser considerada 'lógica abstracta' y, en consecuencia, no se corresponde con aquello para lo cual ha creado la conceptografía. En 'Über den Zweck der Begriffsschrift' afirma que:

> "I did not wish to present an abstract logic in formulas, but to express a content through written symbols in a more precise and perspicuous way than is possible with words." [Frege, 1882b, pp. 90-91]

Naturalmente, el uso de la lógica como herramienta para la expresión precisa y perspicua de contenido, en virtud de la cual puedan realizarse sin error cadenas de inferencias, exige el desarrollo de un sistema formal que contenga las reglas mediante las cuales llevar a cabo estas inferencias. La conceptografía, en cuanto tal, es un sistema formal con una estructura lógica y unas reglas lógicas que permiten manejarla. Efectivamente, el sistema formal resultante en *Begriffsschrift* es, en cierto modo, un sistema de lógica abstracta. Al margen de la posibilidad de vincular los resultados del capítulo III con la aritmética, en el capítulo II únicamente pueden hallarse fórmulas con letras. No obstante, hay que tener en cuenta que el autor debe plantear los elementos básicos de su conceptografía; el capítulo II establece la estructura y las reglas lógicas que deben ser aplicadas a las expresiones de una disciplina científica.

Un detalle que muestra el nulo interés de Frege por la lógica abstracta es que, como se ha puesto de manifiesto considerando el desarrollo autónomo de la conceptografía, no se preocupa por establecer más leyes lógicas de las

[125]En 'Frege Against the Booleans', H. Sluga también plantea que la denominación por parte de Frege de la lógica booleana como 'lógica abstracta' está motivada por su incapacidad de expresar contenido. Sluga proporciona razones para fundamentar el diagnóstico de Frege y asocia la capacidad de expresión de contenido de la conceptografía al despliegue del proyecto logicista, con el cual *Begriffsschrift* está sólo indirectamente vinculado. En su análisis, Sluga no considera el uso de la conceptografía como base para la logística; un uso que, de acuerdo con nuestra reconstrucción, permite a Frege defender que su lógica puede expresar contenidos concretos.

estrictamente necesarias para las demostraciones de *Begriffsschrift*. En lugar de tratar de formular o analizar las leyes lógicas por sí mismas, el autor sólo pretende un desarrollo instrumental: obtiene únicamente aquellos teoremas aritméticos que le interesan.

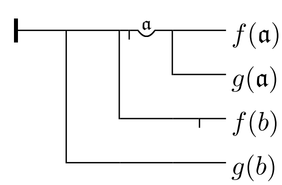
Este mismo desinterés se aprecia en el tratamiento de Frege de los modos de silogismo Felapton y Fesapo. Desde una perspectiva lógica, estos dos modos se distinguen porque son formas de razonamiento distintas; pertenecen a figuras silogísticas diferentes, ya que en su premisa mayor el orden de los términos es distinto:

FELAPTON	FESAPO
Ningún M es P	Ningún P es M
Todo M es S	Todo M es S
No todo S es P.	No todo S es P.

Frege, sin embargo, aplica los dos modos como sigue: sea b un individuo cualquiera con cierta propiedad,

$$\begin{array}{l} b \text{ es } g \\ b \text{ no es } f \\ \hline \text{No todo } g \text{ es } f. \end{array}$$

Estrictamente, este argumento no pueden considerarse ni Felapton ni Fesapo, porque sus premisas son singulares. En él no se distinguen 'Ningún M es P' de 'Ningún P es M', puesto que se aplican indistintamente como 'b no es f'. Sin embargo, esta distinción tiene interés lógico: en lógica actual, estos enunciados se simbolizan, respectivamente, como '$\neg\exists x(Mx \wedge Px)$' y '$\neg\exists x(Px \wedge Mx)$', y es la conmutatividad de la conjunción la que permite concluir que tienen el mismo significado. Para Frege, esta propiedad lógica no tiene ningún interés en este contexto; basta con tener una única simbolización para todos los enunciados con un mismo contenido. En este caso, es suficiente disponer de una única simbolización para los dos argumentos:

> "We see how this judgement
>
> Pr. (59)
>
> 
>
>
> replaces one mode of inference, namely Felapton or Fesapo, which are not differentiated here since no subject is distinguished." [Frege, 1879a, §22, p. 163]

Así pues, por mucho que sea patente que el autor desarrolla una estructura formal, sería erróneo entender que, con ello, pretende obtener exclusivamente una lógica abstracta. El mismo Frege expresa esta circunstancia en 'Über den Zweck der Begriffsschrift':

> "These formulas [for instance, $\neg(B \rightarrow \neg A)$] are actually only empty schemata; and in their application, one must think of whole formulas in the places of A and B—perhaps extended equations, congruences, projections. Then the matter appears completely different." [Frege, 1882b, p. 97]

La conceptografía, a diferencia de la lógica booleana, está creada como herramienta general para expresar con rigor las relaciones entre enunciados de disciplinas científicas y garantizar la corrección de las deducciones. Por esta razón, Frege menciona que las fórmulas a las que se refiere son esquemas vacíos: el lenguaje de la conceptografía es lo suficientemente plástico y flexible como para ser aplicado a distintos contextos y estar preparado para adquirir conjuntos de símbolos propios (con significados fijados ya dados) de disciplinas distintas. De este modo, si la conceptografía adquiere un conjunto de símbolos propios con un significado específico y un método para hacer compatible la descomposición de sus proposiciones con la estructura sintáctica de las expresiones que contienen estos símbolos, entonces puede eliminar toda expresión en lenguaje natural de las demostraciones de la disciplina y garantizar, por lo tanto, el rigor en las demostraciones. En este sentido, Frege construye un sistema formal con un lenguaje y un cálculo particulares por medio de los cuales es posible simbolizar de modo riguroso.

La flexibilidad de la conceptografía también puede aprovecharse para una aplicación genuinamente lógica: basta con proporcionar a la conceptografía los recursos suficientes para referirse unívocamente a procedimientos y con generalidad a objetos para que, a partir de definiciones de naturaleza lógica, pueda obtener en el cálculo algunas proposiciones aritméticas. Para Frege, estas proposiciones son una prueba fehaciente de las capacidades expresivas de la conceptografía considerada aisladamente, capacidades que están más allá de las posibilidades de la lógica booleana.

Por consiguiente, cuando la conceptografía se complementa con una disciplina científica puede verse como la realización del proyecto de Leibniz: dispone de una *lingua characterica* con un vocabulario básico y de un *calculus ratiocinator* con los que representa adecuadamente y con rigor tanto el aspecto material como el formal de las demostraciones de la disciplina.

Capítulo 4

Interpretaciones de *Begriffsschrift*

4.1 Introducción

Uno de los aspectos que se han destacado respecto a la interpretación tradicional de *Begriffsschrift* es que la conceptografía que contiene suele considerarse un sistema formal de segundo orden. A lo largo de los capítulos 1 y 2, y especialmente en los apartados 1.3.2, 1.5, 2.3.3 y 2.4.2, aunque no hemos evaluado completamente esta tesis, hemos planteado argumentos que ofrecían evidencia en su contra. Si bien nuestro cometido en los capítulos anteriores ha sido proporcionar una reconstrucción histórica de *Begriffsschrift*, en este contexto ha sido conveniente hacer frente a su lectura habitual en aquellos aspectos en los que diverge con nuestro análisis.

Hay dos formas distintas de abordar la posibilidad de que la conceptografía sea un sistema formal de segundo orden. En primer lugar, dejando de lado la fidelidad histórica, pueden corregirse aquellas deficiencias que presente de modo que sea posible considerarla un sistema formal análogo a los actuales. En este sentido, la conceptografía puede reconstruirse como un sistema formal de segundo orden, un sistema que a su vez contiene un sistema formal de lógica proposicional (con o sin igualdad) y un sistema formal de primer orden.

En segundo lugar, puede defenderse que el sistema formal que desarrolló Frege en *Begriffsschrift*, tal y como su autor lo concibió, es, de hecho, un sistema formal de segundo orden. En este sentido, el paralelismo entre la conceptografía y la lógica actual debería tener una orientación histórica.

La estructura de este capítulo está condicionada por el desarrollo de nuestra discusión. Tras esta introducción, la segunda sección (4.2) tratará de exponer las distintas posibilidades de interpretar la conceptografía como un sistema formal actual. En la tercera sección (4.3) se valorará la tesis según la cual la conceptografía es un sistema formal de segundo orden. Por último, en la cuarta sección (4.4) se comentarán diversos artículos en los que se discute si la conceptografía de *Begriffsschrift* es vulnerable a la paradoja de Russell. A lo largo de estas tres secciones, será continuo el apoyo argumental en lo establecido en el capítulo 1; no en vano ambos capítulos son complementarios y deben considerarse, junto al capítulo 2, como el resultado global de nuestro tratamiento de *Begriffsschrift*.

4.2 Sistemas formales derivables de *Begriffsschrift*

Al margen del trabajo histórico, es posible ver *Begriffsschrift* desde una perspectiva formal actual, es decir, como un tratado de lógica que, independientemente de su interpretación, puede adaptarse al modo de presentación moderno. Desde este punto de vista, es secundario que la conceptografía, en cuanto sistema formal, pueda interpretarse fielmente; lo relevante es adaptar su lenguaje al actual y traducir su sistema axiomático a aquellos que sean pertinentes.

Esta sección complementa la sección 2.2 desde una perspectiva exclusivamente formal. Así, ofreciendo interpretaciones concretas de las letras y de los símbolos lógicos de la conceptografía, y tomando las leyes básicas y reglas de inferencia convenientes, se obtienen cálculos para distintas lógicas actuales: la lógica proposicional, la lógica proposicional con igualdad, la lógica de primer orden y la lógica de segundo orden.

La práctica que se sigue no es histórica en la medida en que obvia la literalidad de *Begriffsschrift* y la peculiaridad de la naturaleza de la conceptografía. Por ello, en esta sección no se buscará discutir si este trabajo resulta fiel o sostenible en el contexto de una reconstrucción histórica de la obra de Frege, dado que la perspectiva adoptada es puramente formal: no se pretende explicar en términos modernos la conceptografía, sino localizar aquellos de sus elementos que pueden reformularse de acuerdo con los recursos formales de los que se dispone en la actualidad. Por tanto, una vez interpretadas las leyes básicas y, si resulta conveniente, las reglas de inferencia, será secundario si cualquier proposición puede demostrarse de un modo análogo al propio de Frege en *Begriffsschrift* o cualquier otro. Ante todo, de esta práctica resulta una nueva perspectiva de análisis de la cual es relevante dar cuenta.

4.2.1 Lógica proposicional

Si se toman las seis primeras leyes básicas y una de las reglas de inferencia de la conceptografía y se interpretan sus letras como símbolos metalingüísticos para fórmulas, se obtiene un cálculo para la lógica proposicional. Los axiomas de este cálculo, en consecuencia, son esquemas de fórmulas. Por su parte, el lenguaje de esta lógica dispone de un conjunto de variables proposicionales y del condicional y la negación como los símbolos lógicos.

Así pues, esta interpretación permite formular los siguientes axiomas de la lógica proposicional:

A1 $\phi \to (\psi \to \phi)$.

A2 $(\sigma \to (\psi \to \phi)) \to ((\sigma \to \psi) \to (\sigma \to \phi))$.

A3 $(\sigma \to (\psi \to \phi)) \to (\psi \to (\sigma \to \phi))$.

A4 $(\psi \to \phi) \to (\neg\phi \to \neg\psi)$.

A5 $\neg\neg\phi \to \phi$.

A6 $\phi \to \neg\neg\phi$.

La única regla de inferencia necesaria es Modus Ponens, que, puesto que está formulada en la conceptografía para fórmulas, no requiere ningún comentario adicional.

Con este conjunto de axiomas y reglas de inferencia se obtiene, como establece J. Łukasiewicz (1878-1956) en 'Z historii logiki zdań' [Łukasiewicz, 1934] de acuerdo con sus resultados en 'Ein Vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls' [Łukasiewicz, 1931], un cálculo completo para la lógica proposicional. De hecho, en el mismo artículo, Łukasiewicz muestra que el axioma (**A3**) es redundante, y que puede ser derivado a partir de (**A1**) y (**A2**) [Łukasiewicz, 1934, pp. 86-87].

4.2.2 Lógica proposicional con igualdad

La lógica proposicional que acaba de presentarse no dispone del símbolo de igualdad entre los símbolos lógicos de su lenguaje. Sin embargo, es posible interpretar las leyes básicas (**L7**) y (**L8**) para, en conjunción con el cálculo para la lógica proposicional, obtener un cálculo para la lógica proposicional con igualdad.

El lenguaje de este cálculo, además de los símbolos de la lógica proposicional, también dispone del símbolo de igualdad entre fórmulas, '$\equiv$'.

De este modo, a partir de las leyes básicas de la conceptografía se obtienen los siguientes axiomas de un cálculo de lógica proposicional con igualdad:

A1 $\phi \to (\psi \to \phi)$.

A2 $(\sigma \to (\psi \to \phi)) \to ((\sigma \to \psi) \to (\sigma \to \phi))$.

A3 $(\sigma \to (\psi \to \phi)) \to (\psi \to (\sigma \to \phi))$.

A4 $(\psi \to \phi) \to (\neg\phi \to \neg\psi)$.

A5 $\neg\neg\phi \to \phi$.

A6 $\phi \to \neg\neg\phi$.

A7 $(\phi \equiv \psi) \to (\Phi(\phi) \to \Phi(\psi))$.

A8 $\phi \equiv \phi$.

El axioma (**A7**) contiene la fórmula arbitraria $\Phi(\phi)$ en la que aparece la fórmula ϕ. $\Phi(\psi)$ es el resultado de reemplazar ϕ por ψ en $\Phi(\phi)$. Obsérvese que '$f(a)$' en la ley básica (**L7**) se interpreta en (**A7**) de acuerdo con una de las lecturas que hemos hecho en el apartado 1.3.2. La única regla de inferencia necesaria es Modus Ponens, análoga a la regla del cálculo para la lógica proposicional.

Es fácil mostrar que el cálculo presentado es equivalente al desarrollado por S. L. Bloom y R. Suszko en los artículos 'Semantics for the Sentential Calculus with Identity' [Bloom; Suszko, 1971] y 'Investigations into the Sentential Calculus with Identity' [Bloom; Suszko, 1972]. Este último se compone de los axiomas:

(a) $\phi \to (\psi \to \phi)$.

(b) $(\sigma \to (\psi \to \phi)) \to ((\sigma \to \psi) \to (\sigma \to \phi))$.

(c_1) $\neg\phi \to (\phi \to \psi)$.

(c_2) $(\phi \to \psi) \to ((\neg\phi \to \psi) \to \psi)$.

(d) $\phi \equiv \phi$.

(e) $(\phi \equiv \psi) \to (\neg\phi \equiv \neg\psi)$.

(f) $(\phi_1 \equiv \psi_1) \to [(\phi_2 \equiv \psi_2) \to ((\phi_1 \to \phi_2) \equiv (\psi_1 \to \psi_2))]$.

(g) $(\phi_1 \equiv \psi_1) \to [(\phi_2 \equiv \psi_2) \to ((\phi_1 \equiv \phi_2) \equiv (\psi_1 \equiv \psi_2))]$.

(h) $(\phi \equiv \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$.

Y de Modus Ponens como única regla de inferencia.

Los axiomas (**A1**)-(**A6**) son equivalentes a (a)-(c_2), dada la completud del fragmento proposicional de ambos cálculos. Así, únicamente es preciso justificar que los axiomas concernientes a la relación de igualdad de un cálculo son teoremas del otro, y viceversa. Por un lado, (**A8**) es exactamente (d), y puede probarse que las instancias de (**A7**) son teoremas del cálculo de Bloom y Suszko[126]. Por otro lado, es posible demostrar que las instancias de los axiomas (e)-(g) son teoremas del cálculo presentado[127]. Además, (h) es claramente una instancia de (**A7**).

Algunos autores, como el mismo Suszko en 'Ontology in the *Tractatus* of Wittgenstein' [Suszko, 1968], han considerado que una posible interpretación de este cálculo es el desarrollo ontológico de *Tractatus Logico-Philosophicus* [Wittgenstein, 1921], de Wittgenstein. En cualquier caso, puede estudiarse la semántica de este cálculo como una cuestión autónoma, independiente de las conexiones filosóficas que puedan llevarse a cabo[128].

Antes de desarrollar la semántica del cálculo presentado hay que establecer algunas nociones de naturaleza algebraica. A partir de ellas podrá definirse con rigor la noción de modelo y la relación de satisfacción para fórmulas.

Un lenguaje algebraico es un lenguaje que no contiene símbolos relacionales, como el lenguaje L de la lógica proposicional con igualdad. Este lenguaje L dispone de un conjunto de variables proposicionales VAR y de las conectivas $\rightarrow, \neg, \equiv$, que son símbolos funcionales (binarios, en el caso de $\rightarrow$ y $\equiv$, y unario, en el caso de $\neg$). El conjunto de fórmulas **Fm** del lenguaje L se genera del modo usual a partir de VAR y las conectivas.

Un álgebra para L es una estructura $\mathbf{A} = \langle A, \rightarrow^{\mathbf{A}}, \neg^{\mathbf{A}}, \equiv^{\mathbf{A}} \rangle$, donde $\rightarrow^{\mathbf{A}}$, $\equiv^{\mathbf{A}}$ y $\neg^{\mathbf{A}}$ tienen la misma ariedad que las respectivas conectivas. Aunque las álgebras para L no disponen de la conjunción, la disyunción o el bicondicional como símbolos funcionales, es claro que todos ellos pueden definirse a partir del condicional y la negación.

[126] Dado que $(\phi \equiv \psi) \rightarrow (\Phi(\phi) \equiv \Phi(\psi))$ es un teorema del cálculo de Bloom y Suszko para cualesquiera ϕ y ψ [Bloom; Suszko, 1972, p. 291], la demostración puede establecerse con ayuda de este teorema y recursos proposicionales.

[127] Las demostraciones para los tres axiomas son similares. Basta recurrir a los axiomas (**A7**) y (**A8**) y operar con la ayuda de los axiomas (**A1**) y (**A2**).

[128] Nuestra presentación de la semántica para el cálculo de la lógica proposicional con igualdad también sigue, en lo esencial, los trabajos de Bloom y Suszko anteriormente citados ([Bloom; Suszko, 1972] y [Bloom; Suszko, 1971]).

Definición 4.1. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra para L. Una *asignación* en $\mathbf{A}$ es una función $f : \mathrm{VAR} \to A$. Si f es una asignación en $\mathbf{A}$, la *evaluación* en $\mathbf{A}$ asociada a f es la única función $\bar{f} : \mathbf{Fm} \to A$ que cumple las condiciones siguientes: para cada $\phi, \psi \in \mathbf{Fm}$,

1. $\bar{f}(p) = f(p)$, para cada $p \in \mathrm{VAR}$.
2. $\bar{f}(\phi \to \psi) = \bar{f}(\phi) \to^{\mathbf{A}} \bar{f}(\psi)$.
3. $\bar{f}(\neg\phi) = \neg^{\mathbf{A}}\bar{f}(\phi)$.
4. $\bar{f}(\phi \equiv \psi) = \bar{f}(\phi) \equiv^{\mathbf{A}} \bar{f}(\psi)$.

Definición 4.2. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra para L, y sea F un subconjunto no vacío de A. Definimos las siguientes propiedades:

1. F es *cerrado* sii para cada $a, b \in A$, si $a \in F$ y $a \to^{\mathbf{A}} b \in F$, entonces $b \in F$.
2. F es *propio* sii $F \neq A$.
3. F es *admisible* sii, para cualquier evaluación $\bar{f}$ en $\mathbf{A}$ y cualquier axioma α (esto es, para (**A1**)-(**A8**)), $\bar{f}(\alpha) \in F$.
4. F es *primo* sii para cada $a \in A$, $a \in F$ o $\neg^{\mathbf{A}}a \in F$.
5. F es *normal* sii para cada $a, b \in A$, $a \equiv^{\mathbf{A}} b \in F$ si y solo si $a = b$.

Decimos que F es un *filtro* si es propio, cerrado y admisible.

A partir de estas nociones puede definirse una interpretación de L. Informalmente, se trata de proporcionar un conjunto de valores de verdad para las variables proposicionales e interpretar las conectivas de L como operaciones en el conjunto de valores de verdad. De acuerdo con ello, puede definirse la propiedad de ser verdadera, relativa a un conjunto de valores de verdad, para las fórmulas de L. Concretamente, se fija un filtro y se considera que una fórmula es verdadera si su valor de verdad pertenece al filtro.

Definición 4.3. Una *matriz* para L es un par $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ formado por un álgebra $\mathbf{A}$ para L y un filtro F de $\mathbf{A}$. Un *modelo* para L es una matriz $\langle \mathbf{A}, F \rangle$, en la que F es un filtro normal y primo.

Todo modelo conforma una interpretación de L, ya que en cada modelo la interpretación de las conectivas es la esperada. Así, es fácil ver que, para cada modelo $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ y para cada evaluación $\bar{f}$ en $\mathbf{A}$,

1. $\bar{f}(\neg\phi) \in F$ sii $\bar{f}(\phi) \notin F$.
2. $\bar{f}(\phi \to \psi) \in F$ sii $\bar{f}(\phi) \notin F$ o $\bar{f}(\psi) \in F$.
3. $\bar{f}(\phi \equiv \psi) \in F$ sii $\bar{f}(\phi) = \bar{f}(\psi)$.

Naturalmente, el modelo estándar para L es $\langle \mathbf{A}, \{1\}\rangle$, donde $A = \{0, 1\}$. No obstante, como es claro, éste no es el único modelo posible. Más adelante podrá apreciarse el interés de recurrir a un modelo alternativo. De hecho, es conveniente considerar otros modelos además del estándar, puesto que la noción de validez no es relativa únicamente al modelo estándar.

Definición 4.4. Para toda fórmula ϕ de L, ϕ es *verdadera en* una matriz $\langle \mathbf{A}, F\rangle$ si y solo si para cualquier evaluación $\bar{f}$ en $\mathbf{A}$, $\bar{f}(\phi) \in F$. Para toda fórmula ϕ de L, ϕ es *válida* si y solo si ϕ es verdadera en toda matriz $\langle \mathbf{A}, F\rangle$ para L.

Se ha bosquejado la demostración de que el cálculo presentado, derivado de la conceptografía, es equivalente al desarrollado por Bloom y Suszko en 1971-1972. Estos autores demuestran la completud y la corrección de su cálculo respecto a la semántica que desarrollan (que es, en lo esencial, equivalente a la presentada) en el artículo 'Investigations into the Sentential Calculus with Identity' [Bloom; Suszko, 1972, p. 292-293][129]. Por lo tanto, siendo ambos cálculos equivalentes, puede concluirse que el cálculo presentado es correcto y completo.

Aplicando los teoremas de corrección y completud pueden obtenerse como consecuencias los resultados siguientes:

Proposición 4.5. *Toda fórmula de L deducible sin premisas es válida, esto es, para toda fórmula ϕ de L,*

$$\text{Si} \vdash \phi, \text{ entonces } \phi \text{ es válida.}$$

[129] Bloom y Suszko definen, en primer lugar, las relaciones de consecuencia lógica y de deducibilidad (que denominan 'consecuencia semántica' y 'consecuencia sintáctica', respectivamente). En segundo lugar, demuestran la vinculación entre estas dos relaciones por medio de los siguientes hechos: para cada conjunto $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}$ y para cada fórmula $\phi \in \mathbf{Fm}$,

1. $\Gamma \vdash \phi$ sii para toda matriz $\langle \mathbf{A}, F\rangle$, $\Gamma \vDash_{\langle \mathbf{A}, F\rangle} \phi$ (esto es, para toda evaluación $\bar{f}$ en $\mathbf{A}$, si para toda $\psi \in \Gamma$, $\bar{f}(\psi) \in F$, entonces $\bar{f}(\phi) \in F$).
2. $\Gamma \vdash \phi$ sii para todo modelo $\langle \mathbf{A}, F\rangle$, $\Gamma \vDash_{\langle \mathbf{A}, F\rangle} \phi$.
3. ϕ es válida sii $\vdash \phi$.

Proposición 4.6. *Toda fórmula de L válida es deducible sin premisas, esto es, para toda fórmula ϕ de L,*

$$\textit{Si } \phi \textit{ es válida, entonces} \vdash \phi.$$

A partir de la semántica para la lógica proposicional con igualdad, es posible discutir la relación entre la igualdad de contenido y el bicondicional en *Begriffsschrift*. Desde la perspectiva de Frege, la motivación intuitiva de la noción de igualdad entre símbolos del lenguaje (en este caso, entre fórmulas) es su igualdad de contenido. Y, puesto que dos fórmulas ϕ y ψ que no contengan el símbolo '$\equiv$' tienen el mismo contenido si se extraen de ellas las mismas consecuencias, y esto significa lo mismo que decir que ϕ y ψ son lógicamente equivalentes, la noción de igualdad puede vincularse de un modo natural con el bicondicional. Esta ha sido la práctica seguida en este trabajo, como ya hemos planteado en el apartado 1.2.4.

En el Prefacio de *Begriffsschrift*, Frege afirma haber reparado en la posibilidad de interpretar el símbolo de igualdad como bicondicional, como se ha dicho en el apartado citado. En la conceptografía se puede demostrar el siguiente teorema:

$$\vdash (\phi \equiv \psi) \rightarrow \neg((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \phi)),$$

partiendo del axioma (**A7**), recurriendo a los axiomas (**A3**) y (**A6**), y a recursos proposicionales. En lo sucesivo, entenderemos que $(\phi \leftrightarrow \psi)$ es una abreviación de $\neg((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \phi))$. Si se quiere demostrar que la igualdad entre fórmulas y el bicondicional son nociones equivalentes, también hay que probar el hecho siguiente:

$$\vdash (\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \equiv \psi). \tag{4.1}$$

En los artículos que se ocupan de la lógica proposicional con igualdad suele darse por hecho que, en *Begriffsschrift*, Frege identifica, para el caso de las sentencias, la igualdad con lo que en lógica moderna se denomina bicondicional. Por ello, en este contexto, (4.1) se denomina 'Teorema de Frege'. Considerar que (4.1) es o no un teorema determina la distinción entre lógicas fregeanas y no-fregeanas, introducida por Suszko en 'Ontology in the *Tractatus* of L. Wittgenstein' [Suszko, 1968]. Por su parte, la motivación de las lógicas no-fregeanas se remonta al contenido de *Tractatus Logico-Philosophicus* [Wittgenstein, 1921][130].

[130]Véase 'Wittgensteinian Foundations of Non-Fregean Logic' [Boguslaw, 1971], de W. Boguslaw.

Lo significativo y sorprendente en cuanto a esta distinción es que la lógica proposicional con igualdad asociada a la conceptografía no es fregeana. De hecho, puede demostrarse que el Teorema de Frege no es deducible de este cálculo[131].

Proposición 4.7. *El cálculo para la lógica proposicional con igualdad de* Begriffsschrift *es no-fregeano, esto es, puede mostrarse que existen fórmulas* ϕ *y* ψ *tales que:*

$$\nvdash (\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \equiv \psi).$$

Demostración. Consideremos el lenguaje L de la lógica proposicional con igualdad. Sea VAR $= \{p, q\}$. Demostraremos que $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \equiv q)$ no es válida, lo cual, por corrección, nos proporcionará el resultado deseado.

Sea $\mathbf{A} = \langle A, \rightarrow^{\mathbf{A}}, \neg^{\mathbf{A}}, \equiv^{\mathbf{A}} \rangle$ un álgebra para L donde $A = \{1, a, b, 0\}$ y $\rightarrow^{\mathbf{A}}$, $\neg^{\mathbf{A}}$ y $\equiv^{\mathbf{A}}$ se interpretan como sigue:

$\rightarrow^{\mathbf{A}}$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

$\neg^{\mathbf{A}}$	
0	1
a	b
b	a
1	0

$\equiv^{\mathbf{A}}$	0	a	b	1
0	1	0	0	0
a	0	1	0	0
b	0	0	1	0
1	0	0	0	1

Consideremos el conjunto $F \subseteq A$ tal que $F = \{1, b\}$. Veamos que F es un filtro. Claramente, F es propio. Sean $x, y \in A$ tales que $x \in F$ y $x \rightarrow^{\mathbf{A}} y \in F$. Por la definición de F y la interpretación de $\rightarrow^{\mathbf{A}}$, $y \in F$. Por lo tanto, F es cerrado. Finalmente, veamos que F es admisible. Mostraremos, en particular, que $\bar{f}(\mathbf{A7}) \in F$ para cualquier evaluación $\bar{f}$ en $\mathbf{A}$. Para el resto de axiomas, la demostración es similar. Sea $\bar{f}$ una evaluación en $\mathbf{A}$. Así,

1. Si $\bar{f}(\phi \equiv \psi) \in F$, entonces $\bar{f}(\phi) \equiv^{\mathbf{A}} \bar{f}(\psi) \in F$ y, dada la interpretación de $\equiv^{\mathbf{A}}$, $\bar{f}(\phi) = \bar{f}(\psi)$. En tal caso, una inducción sencilla muestra que $\bar{f}(\Phi(\phi)) = \bar{f}(\Phi(\psi))$. Por lo tanto, $\bar{f}(\Phi(\phi)) \rightarrow^{\mathbf{A}} \bar{f}(\Phi(\psi)) = 1$ y $\bar{f}(\Phi(\phi) \rightarrow \Phi(\psi)) = 1$. Así, $\bar{f}(\Phi(\phi) \rightarrow \Phi(\psi)) \in F$ y, en consecuencia, $\bar{f}((\phi \equiv \psi) \rightarrow (\Phi(\phi) \rightarrow \Phi(\psi))) \in F$.

2. Si $\bar{f}(\phi \equiv \psi) \notin F$, entonces $\bar{f}((\phi \equiv \psi) \rightarrow (\Phi(\phi) \rightarrow \Phi(\psi))) \in F$.

Además, dada la interpretación de $\neg^{\mathbf{A}}$ y de $\equiv^{\mathbf{A}}$, F es claramente primo y normal. Por lo tanto, $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ es un modelo para L.

[131] Agradezco a Ramon Jansana el planteamiento de esta posibilidad y la idea de la demostración que requiere.

Veamos ahora que $(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \equiv \psi)$ no es verdadera en $\langle \mathbf{A}, F \rangle$, esto es, que existe una evaluación $\bar{f}$ y dos fórmulas ϕ y ψ tales que $\bar{f}((\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \equiv \psi)) \notin F$. Ahora bien, la fórmula $(\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\phi \equiv \psi)$ es equivalente a $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\phi \equiv \psi))$ cuando el bicondicional se introduce como abreviatura del modo habitual. En rigor, mostraremos que existen dos fórmulas ϕ y ψ tales que la fórmula siguiente:

$$(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\phi \equiv \psi)),$$

no es verdadera en $\langle \mathbf{A}, F \rangle$.

Sea $\bar{f} : \mathbf{Fm} \rightarrow A$ la evaluación en $\mathbf{A}$ determinada por la asignación $f : \mathrm{VAR} \rightarrow A$, según la cual $f(p) = b$ y $f(q) = 1$. Por tanto, $\bar{f}(p) = b$ y $\bar{f}(q) = 1$. Así, por un lado, $\bar{f}(p \rightarrow q) = 1$. Por el otro, $\bar{f}(q \rightarrow p) = b$ y, puesto que $\bar{f}(p) \neq \bar{f}(q)$, $\bar{f}(p \equiv q) = 0$. En consecuencia, $\bar{f}((q \rightarrow p) \rightarrow (p \equiv q)) = a$. Puesto que $\bar{f}(p \rightarrow q) = 1$, $\bar{f}((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \equiv q))) = a$. Por consiguiente, $\bar{f}((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \equiv q))) \notin F$, esto es, $\bar{f}((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \equiv q)) \notin F$. Por tanto, $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \equiv q))$ no es válida y, por corrección, podemos concluir con el resultado deseado:

$$\nvdash (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \equiv q). \qquad \square$$

Esta demostración refleja una dificultad asociada al cálculo, según la cual éste no es lo suficientemente potente como para demostrar la identidad entre la igualdad de contenido y el bicondicional. Para resolver este obstáculo, habría que añadir (4.1) como axioma al cálculo propuesto.

Sin embargo, es razonable que el cálculo no permita mostrar la identidad entre la igualdad y el bicondicional. Frege identifica el hecho de que dos fórmulas expresen el mismo contenido con el hecho de que una sea verdadera si y solo si la otra también lo es. Dicho en otras palabras, el autor confunde el hecho de que ϕ y ψ tengan el mismo contenido (lo cual se expresa como $\phi \equiv \psi$) con la circunstancia de que, para cualesquiera fórmulas ϕ y ψ, el bicondicional $\phi \leftrightarrow \psi$ sea verdadero. En particular, la demostración muestra que puede ocurrir que $\phi \leftrightarrow \psi$ sea verdadero mientras que $\phi \equiv \psi$ es falso.

4.2.3 Lógica de primer orden

El esquema función-argumento del formalismo de la conceptografía puede adaptarse también al lenguaje de la lógica de primer orden. Sin embargo, la conceptografía no puede ser adaptada en absoluto a un sistema formal de primer orden a no ser que se presuponga que hay un lenguaje dado con la interpretación pertinente. El aspecto esencial de este lenguaje es que disponga de los símbolos necesarios para la construcción de fórmulas atómicas.

Por otra parte, dada la naturaleza de las letras de la conceptografía, es preciso introducir una distinción entre usos de las letras para argumento: o bien tienen un uso proposicional o, si no lo tienen, se consideran variables individuales y, en tal caso, toman valores sobre un dominio de objetos.

De acuerdo con esta adaptación del lenguaje, usaremos las letras 'x', 'y' para referirnos a las variables individuales y la letra 't' para referirnos a términos individuales. Además, usaremos '$\forall$' como cuantificador universal y '$=$' como símbolo de igualdad. Las conectivas son comunes a las de la lógica proposicional.

En las presentaciones habituales del sistema axiomático de la lógica de primer orden se utilizan esquemas de axiomas. Para expresar dichos esquemas hay que hacer uso de los símbolos del metalenguaje 'ϕ', 'ψ' y 'σ', que representan fórmulas.

El resultado de aplicar esta interpretación a las nueve leyes básicas de la conceptografía es un sistema axiomático de la lógica de primer orden:

B1 $\phi \to (\psi \to \phi)$.

B2 $(\sigma \to (\psi \to \phi)) \to ((\sigma \to \psi) \to (\sigma \to \phi))$.

B3 $(\sigma \to (\psi \to \phi)) \to (\psi \to (\sigma \to \phi))$.

B4 $(\psi \to \phi) \to (\neg\phi \to \neg\psi)$.

B5 $\neg\neg\phi \to \phi$.

B6 $\phi \to \neg\neg\phi$.

B7 $x = y \to (\phi(x) \to \phi(y))$, donde x es libremente substituible por y en ϕ[132].

B8 $x = x$

B9 $\forall x\phi \to \phi(\frac{x}{t})$, donde x es libremente substituible por t en ϕ.

En el axioma (**B7**), $\phi(x)$ es una fórmula en la que la variable individual x aparece libre y $\phi(y)$ es el resultado de substituir una o todas las apariciones de x por y en ϕ.

Las reglas de inferencia de este cálculo son Modus Ponens, Generalización y Confinamiento. Las dos últimas deben adaptarse para los casos de cuantificación sobre variables individuales. La formulación fregeana de estas

[132] Respecto a la noción de ser libremente substituible, véase la Definición 4.8.

reglas es suficientemente similar a las formulaciones actuales como para que no se requiera una formulación explícita.

Los nueve axiomas (**B1**)-(**B9**) y las reglas de inferencia indicadas conforman un cálculo completo para la lógica de primer orden[133].

4.2.4 Lógica de segundo orden

A pesar de que el tratamiento que reciben las letras en *Begriffsschrift* es sensiblemente distinto al propio de las variables en los sistemas formales modernos, es posible establecer una analogía entre el lenguaje de la conceptografía y el de la lógica de segundo orden, similar a la llevada a cabo en el caso de la lógica de primer orden. Precisamente, esta estrategia es la que se ha seguido habitualmente en las reconstrucciones históricas de la conceptografía, como se verá en la sección siguiente. En cualquier caso, esta analogía requiere presuponer que se dispone de un lenguaje que permita construir fórmulas atómicas y con una semántica adecuada. El hecho es que ninguno de estos elementos están en absoluto presentes en la conceptografía.

De acuerdo con esta adaptación, las letras para argumento pueden interpretarse de dos modos distintos: lingüísticamente, como variables individuales, y metalingüísticamente, como variables proposicionales para fórmulas. Las letras funcionales, por su parte, pueden recibir una interpretación similar: pueden verse, en función del marco en el que aparezcan, como variables de predicado o como variables metalingüísticas para fórmulas. No hay un modo unitario de especificar el marco de cada una de las fórmulas y, de hecho, ésta es una dificultad interpretativa relevante en *Begriffsschrift*. En cualquier caso, dado que estos obstáculos se hallan esencialmente en las demostraciones, y no en la formulación de las proposiciones, no se considerarán aquí, sino en el apartado 4.3.2.

En las presentaciones estándar del sistema axiomático de una lógica de segundo orden se utilizan esquemas de axiomas, entre los cuales figura el Axioma de comprensión. Y es bien sabido que la conceptografía no dispone de una ley básica análoga a un axioma tal. Formularemos con precisión una Regla de substitución y mostraremos que esta regla es equivalente al Axioma de comprensión.

Antes de presentar el cálculo de la lógica de segundo orden que resulta de reinterpretar las leyes básicas y las reglas de inferencia de la conceptografía,

[133]Puede hallarse una demostración de la completud de un cálculo equivalente en *Mathematical Logic: A First Course*, de J. Robbin [Robbin, 1969, pp. 56-59]. Nótese que en la axiomatización de Robbin, la Regla de confinamiento está formulada como axioma [Robbin, 1969, p. 43].

es necesario precisar la notación, que no varía en lo esencial respecto a la introducida en el apartado anterior. Los distintos tipos de variables, como es habitual, se representarán mediante cuerpos de letra distintos: usaremos las letras 'x', 'y' y 'z' para referirnos a las variables individuales y las letras 'X', 'Y' y 'Z' para referirnos a las variables de predicado. Como en el caso de la lógica de primer orden, usamos 't' para denotar genéricamente términos individuales.

Para evitar confusiones en lo que sigue respecto a las distintas nociones de substitución, que afectan tanto a los axiomas como a las reglas de inferencia, es necesario establecer definiciones rigurosas.

Definición 4.8. Una variable individual x es *libremente substituible por* t en la fórmula ϕ si ninguna aparición libre de x en ϕ está en el alcance de una aparición en ϕ de un cuantificador $\forall$ que ligue alguna variable individual que aparezca en t.

Definiremos la substitución de variables de predicado por fórmulas sólo para el caso de variables de predicado unarias. Así, a menos que se diga lo contrario, supondremos en lo sucesivo que todas las variables de predicado son unarias. Las definiciones que siguen pueden generalizarse con facilidad a definiciones para variables de predicado n-arias.

Definición 4.9. Una variable de predicado X es *libremente substituible por* la variable de predicado Y en la fórmula ϕ si ninguna aparición libre de X en ϕ está en el alcance de una aparición en ϕ de un cuantificador $\forall$ que ligue Y.

Definición 4.10. Sea X una variable de predicado, ϕ una fórmula cualquiera y sea $\psi(y)$ una fórmula tal que (1) la variable individual y no aparece en ϕ, (2) y aparece libre pero no ligada en $\psi(y)$ y (3) X no aparece libre en $\psi(y)$. La variable X es *libremente substituible por* $\psi(y)$ en ϕ si:

1. para cualquier término t tal que Xt aparece en ϕ, y es libremente substituible por t en $\psi(y)$.

2. para cualquier variable individual x distinta de y que aparece libre en $\psi(y)$, ninguna aparición libre de X en ϕ está en el alcance de un cuantificador $\forall$ que ligue x.

3. para cualquier variable de predicado Y que aparece libre en $\psi(y)$, X es libremente substituible por Y en ϕ.

Así pues, llevando a cabo la interpretación indicada, se obtienen los siguientes axiomas de un cálculo de segundo orden a partir de las leyes básicas de la conceptografía:

C1 $\phi \to (\psi \to \phi)$.

C2 $(\sigma \to (\psi \to \phi)) \to ((\sigma \to \psi) \to (\sigma \to \phi))$.

C3 $(\sigma \to (\psi \to \phi)) \to (\psi \to (\sigma \to \phi))$.

C4 $(\psi \to \phi) \to (\neg\phi \to \neg\psi)$.

C5 $\neg\neg\phi \to \phi$.

C6 $\phi \to \neg\neg\phi$.

C7 $x = y \to (\phi(x) \to \phi(y))$, donde y es libremente substituible por x en ϕ.

C8 $x = x$

C9 $\forall v\phi \to \phi(^v_e)$, donde v es libremente substituible por e en ϕ.

Como en el caso del axioma (**B7**) de la lógica de primer orden, en (**C7**) $\phi(x)$ es una fórmula en la que x aparece libre y $\phi(y)$ es el resultado de substituir una o todas las apariciones de x por y en ϕ. En el axioma (**C9**), usamos la letra 'v' para denotar genéricamente tanto variables individuales como de predicado. Además, el signo 'e' es un símbolo auxiliar y no pertenece al lenguaje que se está considerando. Su denotación depende del contexto, determinado por el tipo de variable que es v. Así, e denota un término, si v es una variable individual, y una variable de predicado, si v es una variable de predicado.

Las reglas de inferencia de este cálculo son las mismas que las de la conceptografía, con la adición explícita de la Regla de substitución. No es necesario reescribir la regla de Modus Ponens, pero sí adaptar la formulación de las reglas de Generalización y Confinamiento.

Estas dos últimas reglas, por tanto, requieren dos versiones distintas, una para cada tipo de variable. En cada caso, el tipo de variable pertinente se substituye por una instancia correspondiente (un término para el caso de las variables individuales, y una variable de predicado de la ariedad adecuada, para el caso de las variables de predicado).

Por último, puesto que este cálculo no dispone de un Axioma de comprensión, expresaremos con más detalle la relación entre este axioma y la Regla de substitución. Para este cometido, es necesario formular con precisión la Regla de substitución para variables de predicado unarias.

Definición 4.11. Sea X una variable de predicado, ϕ una fórmula cualquiera y sea $\psi(y)$ una fórmula tal que (1) la variable individual y no aparece en ϕ, (2) y aparece libre pero no ligada en $\psi(y)$ y (3) X no aparece libre en $\psi(y)$. La *substitución* de X por $\psi(y)$ en ϕ, $\phi(^{X}_{\psi(y)})$, es el resultado de reemplazar en ϕ cada subfórmula Xt, donde X aparece libre, por $\psi(^{y}_{t})$.

Regla de substitución. Si X es una variable de predicado, y ϕ y $\psi(y)$ son fórmulas que cumplen las siguientes restricciones:

1. la variable X no aparece libre en $\psi(y)$,
2. la variable individual y no aparece en ϕ,
3. la variable X es libremente substituible por $\psi(y)$ en ϕ,

entonces:

$$\text{si} \vdash \phi, \text{ entonces} \vdash \phi(^{X}_{\psi(y)})$$[134].

Como hemos adelantado, puede mostrarse que la Regla de substitución es equivalente al Axioma de comprensión[135]:

$$\exists X \forall x (Xx \leftrightarrow \psi(x)),$$

donde X no aparece libre en ψ.

Con ello se hace patente, en primer lugar, que el cálculo presentado es propiamente un cálculo estándar para la lógica de segundo orden y, en segundo lugar, cuál es la potencia deductiva de la Regla de substitución.

Mostraremos ahora que el Axioma de comprensión implica la Regla de substitución y viceversa.

Proposición 4.12. *La Regla de substitución implica el Axioma de comprensión.*

[134] El condicional de la Regla de substitución puede formularse alternativamente como sigue:

$$\text{si} \vdash \forall X \phi, \text{ entonces} \vdash \phi(^{X}_{\psi(y)}).$$

[135] Pueden verse justificaciones de esta equivalencia por parte de L. Henkin, G. Boolos y S. Russinoff (estos dos últimos realizan un esbozo más que una demostración rigurosa), en 'Banishing the Rule of Substitution for Functional Variables' [Henkin, 1953], 'Reading the *Begriffsschrift*' [Boolos, 1985, p. 337] y en 'On the Brink of a Paradox?' [Russinoff, 1987, pp. 123-126], respectivamente.

La demostración de esta proposición consiste, en primer lugar, en suponer demostrado en el cálculo que:

$$\vdash \forall x(Yx \leftrightarrow Yx), \tag{4.2}$$

y que la introducción del cuantificador existencial en el cálculo nos permite concluir el siguiente resultado:

$$\vdash \exists X \forall x(Xx \leftrightarrow Yx). \tag{4.3}$$

En segundo lugar, sea $\psi(y)$ una fórmula en la que la variable de predicado X no aparece libre y sea y una variable individual distinta de y que aparece libre pero no ligada en $\psi(y)$. Por la Regla de substitución aplicada a (4.3):

$$\vdash (\exists X \forall x(Xx \leftrightarrow Yx))\binom{Y}{\psi(y)}, \tag{4.4}$$

esto es,

$$\vdash \exists X \forall x(Xx \leftrightarrow \psi(x)),$$

tal como queríamos demostrar.

La demostración de que el Axioma de comprensión implica la Regla de substitución es más compleja. Requiere el uso de proposiciones auxiliares que posibiliten la obtención de dicha regla de inferencia[136].

Lema 4.13. *Sea X una variable de predicado, ϕ una fórmula cualquiera y sea $\psi(y)$ una fórmula tal que (1) la variable individual y no aparece en ϕ, (2) y aparece libre pero no ligada en $\psi(y)$ y (3) X no aparece libre en $\psi(y)$. Si la variable X es libremente substituible por $\psi(y)$ en $\forall z\phi$, $\exists z\phi$, $\forall Z\phi$ y $\exists Z\phi$, entonces*

1. *Si $z \neq y$, entonces*
   (a) $(\forall z\phi)' = \forall z\phi'$.
   (b) $(\exists z\phi)' = \exists z\phi'$.
2. *Si $Z \neq X$, entonces*
   (a) $(\forall Z\phi)' = \forall Z\phi'$.
   (b) $(\exists Z\phi)' = \exists Z\phi'$.

[136] Para simplificar la notación, de aquí en adelante se hace uso del símbolo 'ϕ'', que es una abreviación de $\phi\binom{Xv}{\psi(v)}$. Así, ϕ' es el resultado de la substitución de X por la fórmula $\psi(y)$ en ϕ, donde X, $\psi(y)$ y ϕ cumplen las restricciones impuestas en la Definición 4.11.

Lema 4.14. *Sea X una variable de predicado, ϕ una fórmula cualquiera y sea $\psi(y)$ una fórmula tal que (1) la variable individual y no aparece en ϕ, (2) y aparece libre pero no ligada en $\psi(y)$ y (3) X no aparece libre en $\psi(y)$. Si X es libremente substituible por $\psi(y)$ en ϕ, entonces*

$$\vdash \forall x(Xx \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \phi').$$

El Lema 4.13 es sencillo de verificar con las definiciones de substitución (4.11) y de variable libremente substituible (4.10). El Lema 4.14 se demuestra por inducción sobre la complejidad de ϕ; el paso central, correspondiente a la cuantificación, se prueba con ayuda del Lema 4.13.

Finalmente, puede demostrarse la dirección opuesta en la implicación entre el Axioma de comprensión y la Regla de substitución.

Proposición 4.15. *El Axioma de comprensión implica la Regla de substitución.*

Para demostrar esta proposición, supongamos $\vdash \phi$. Por el lema 4.14, partimos del siguiente resultado:

$$\vdash \forall x(Xx \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \phi'). \tag{4.5}$$

Supongamos que ϕ y ψ cumplen todas las restricciones que se indican en el Lema 4.14. Por razones proposicionales, dado que $\vdash \phi$, obtenemos:

$$\vdash \forall x(Xx \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow \phi'. \tag{4.6}$$

Por la regla de Generalización:

$$\vdash \forall X(\forall x(Xx \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow \phi'). \tag{4.7}$$

Dado que suponemos demostrado que $\vdash \forall X(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists X\phi \rightarrow \psi)$, si X no aparece libre en ψ, a partir de (4.7) podemos obtener:

$$\vdash \exists X \forall x(Xx \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow \phi'. \tag{4.8}$$

Obsérvese que X no aparece libre en ϕ', puesto que no aparece libre en $\psi(y)$ y las apariciones libres de X en ϕ han sido substituidas.

El antecedente de la fórmula (4.8) es el Axioma de comprensión:

$$\exists X \forall x(Xx \leftrightarrow \psi(x)) \tag{4.9}$$

En consecuencia, por Modus Ponens puede concluirse a partir de (4.8) y de (4.9) que $\vdash \phi'$, el resultado deseado.

4.3 Conceptografía como lógica de segundo orden

Es común en los estudios históricos actuales de *Begriffsschrift* defender su carácter pionero en la lógica moderna y destacar aquellos aspectos por los que, en opinión de los comentaristas, esta obra debe considerarse uno de los textos clave en la historia de la lógica. La presencia de la lógica de segundo orden en el sistema formal de *Begriffsschrift* suele ser uno de los aspectos prominentes. Así lo hace patente P. Sullivan en 'Frege's Logic' [Sullivan, 2004]:

> "[I]n *Begriffsschrift* modern logic appears to spring forth fully formed. The work's list of 'firsts' is remarkable: the first complete presentation of truth-functional propositional logic; the first representation of generality through quantifiers and variables, allowing the first formulation of reasoning involving multiple nested generality; the first formal system of logic, in which correctness of inference is to be confirmable by syntactic criteria; the first mathematically significant employment of higher-order logic, in the reduction of inductive to explicit definitions. But the *most* remarkable feature of *Begriffsschrift* is that all of these arrive *at once*." [Sullivan, 2004, p. 662]

De nuestra exposición en los capítulos 1 y 2 se desprende que algunos de los elementos que Sullivan lista deberían ser severamente revisados; en particular, hemos defendido que en *Begriffsschrift* ni hay una presentación completa de lógica proposicional definida de modo veritativo-funcional ni contiene el primer uso de lógica de orden superior. Nuestro cometido, en la presente sección, es discutir la presencia del uso por parte de Frege de lógica de segundo orden en *Begriffsscrift*. Dada la particular naturaleza de la conceptografía, la defensa de esta tesis exige asumir compromisos importantes, tanto a nivel lingüístico como en el sistema axiomático. El mayor compromiso afecta a la literalidad de la exposición de *Begriffsschrift*; no en vano esta tesis pretende ser de naturaleza histórica, en el sentido que su defensa involucra afirmar que el sistema formal de *Begriffsschrift* es un sistema formal de segundo orden, y no únicamente que puede ser reformulado como tal. Además, aunque este modo de interpretar la conceptografía fuese técnicamente aceptable, hay que considerar la práctica concreta de Frege en el uso de este sistema formal. Dicho en otras palabras, es necesario evaluar si esta interpretación puede adaptarse coherentemente a las demostraciones que Frege incluye en los capítulos II y III de *Begriffsschrift*.

4.3.1 Reformulación del cálculo

Algunos de los compromisos que deben asumirse son comunes tanto a la lectura de la conceptografía como lógica de segundo orden como a la interpretación de su correspondiente fragmento como lógica de primer orden. Éstos afectan al lenguaje y a sus condiciones sintácticas, y han sido considerados previamente en los apartados 4.2.3 y 4.2.4.

Así, en primer lugar, por lo que respecta al lenguaje, es preciso, por un lado, interpretar la igualdad tal y como se hace en (**B7**) y (**B8**), y en (**C7**) y (**C8**) y, por el otro, ignorar la generalidad que expresan las letras de la conceptografía y reducir su recorrido a aquellas instancias que sean compatibles, respectivamente, con una única interpretación en lógica de primer y en lógica de segundo orden. Por consiguiente, las letras para argumento deberán ser substituidas, según el marco, por variables proposicionales, variables individuales y, en el caso de la lógica de segundo orden, por variables de predicado. Además, será preciso substituir las letras funcionales por variables de predicado o variables metalingüísticas para fórmulas, según el marco.

En segundo lugar, es necesario especificar ciertas condiciones sintácticas que no están presentes en la conceptografía. Por un lado, hay que proporcionar una noción de fórmula atómica. Y, por el otro, hay que plantear definiciones precisas de las posibles substituciones de variables, en coherencia con las propias de lenguajes de primer y segundo orden. En conjunto, todas estas modificaciones al lenguaje de la conceptografía conllevan que la distinción entre función y argumento pierda completamente su utilidad.

Sin embargo, los compromisos más relevantes afectan exclusivamente a la lógica de segundo orden. Específicamente, la adaptación del cálculo de la conceptografía requiere:

1. Suponer que hay dos versiones distintas de la ley básica (**L9**).

2. Suponer que hay dos versiones distintas de las reglas de Generalización y de Confinamiento del cuantificador.

3. Añadir una Regla de substitución de variables de predicado por fórmulas análoga a la propia de un cálculo para la lógica de segundo orden, dando por supuesto que Frege hace uso de ella y que, por tanto, debería hacerla explícita.

A lo largo de la discusión precedente, especialmente en los apartados 2.2.1, 2.2.2 y 2.3, se han considerado la mayor parte de estas cuestiones y se han valorado las dificultades que conllevan. En el apartado 4.2.4 puede encontrarse una muestra de cómo llevar a cabo desde una perspectiva ahistórica este proceso. Naturalmente, hay que dar razones, que se apoyen en evidencias textuales, para acometer todas estas modificaciones.

En particular, por lo que respecta a la Regla de substitución, desde la perspectiva de Frege parece diluirse la necesidad de su formulación explícita. Tal y como se ha expuesto en a lo largo de la sección 2.3, dada la flexibilidad del lenguaje de la conceptografía, es posible ver todas las substituciones de *Begriffsschrift* que son resultado de la Regla de substitución como aplicaciones de la ley básica (**L9**) y de [MP]: basta identificar adecuadamente la función y el argumento. Puesto que las letras expresan generalidad, pueden substituirse por cualquier instancia en su recorrido. Y esta instancia puede ser tan compleja como sea necesario, siempre que sea una instancia adecuada. Definir en general las substituciones que tienen lugar en *Begriffsschrift* es una cuestión compleja y, de hecho, teniendo en cuenta que la conceptografía no dispone propiamente de un lenguaje formal, no es posible formular tales definiciones de acuerdo con los estándares de rigor de las presentaciones actuales. Sin embargo, para llevar a cabo cada una de las substituciones, Frege no necesita tomar más precauciones que los cambios alfabéticos de letras necesarios para evitar interferencias entre cuantificadores[137]. Cualquier otro aspecto en el proceso de substitución es visto como una instanciación de una cuantificación universal implícita. Creemos que, desde el punto de vista de Frege, tales substituciones forman parte de la metodología matemática habitual, en la que se substituyen expresiones por otras más complejas sin sospecha de falta de rigor, y sin que sea necesario especificar una regla que sistematice estas substituciones.

Que Frege no apreció la necesidad de formular en la conceptografía una regla explícita con respecto a las substituciones puede verse claramente considerando la traducción en la conceptografía del Axioma de comprensión:

$$\exists X \forall x (Xx \leftrightarrow \phi(x)).$$

La conceptografía, sin poseer un modo específico para hacer uso de variables para fórmulas, no dispone de un equivalente directo de este axioma. La formulación más cercana es la siguiente:

$$\exists \mathfrak{F} \forall \mathfrak{a} (\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \leftrightarrow g(\mathfrak{a})).$$

Esta fórmula es claramente un teorema de la conceptografía y, además, cualquiera de las instancias del Axioma de comprensión puede expresarse en

[137]Como ocurre en las demostraciones de las Proposiciones (116) y (118) de *Begriffsschrift*.

este sistema formal: basta con escoger una instancia de substitución de 'g'. Así, en un contexto de aplicación específico como el propio del capítulo III de *Begriffsschrift*, puede obtenerse la instancia del axioma correspondiente a la substitución de '$g(\alpha)$' por '$\exists\mathfrak{e} f(\alpha, \mathfrak{e})$' como la que sigue:

$$\exists\mathfrak{F}\forall\mathfrak{a}(\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \exists\mathfrak{e} f(\mathfrak{a}, \mathfrak{e})).$$

Frege contempla cualquier conflicto en el alcance de cuantificación en las substituciones que se producen en sus demostraciones y, así, todas ellas se llevan a cabo de un modo natural. Por tanto, es comprensible la razón por la cual no resulta necesario formular una Regla de substitución que, por lo que respecta a las demostraciones, no añadiría ningún grado de corrección o rigor deductivo.

Ahora bien, la formulación de una Regla de substitución es ineludible si el cálculo de *Begriffsschrift* se interpreta como un cálculo para la lógica de segundo orden. La formulación de una regla tal no está exenta de dificultades. Hemos justificado que las demostraciones de las Proposiciones (77) y (93) no pueden llevarse a cabo simplemente con un sistema formal de segundo orden que disponga de una Regla de substitución. En particular, algunas de las substituciones que aparecen en estas dos demostraciones no pueden realizarse en el lenguaje mediante una deducción en un cálculo de segundo orden.

4.3.2 Reconstrucción de las demostraciones

Parece a primera vista que mediante la reformulación de las leyes básicas y de las reglas de inferencia, y con una Regla de substitución explícita, análoga a la propuesta en el apartado 4.2.4, se obtiene un sistema formal que permite expresar las demostraciones de *Begriffsschrift* en un lenguaje de segundo orden. Y, por lo general, éste es el caso: basta con interpretar las letras en las premisas, las substituciones y las proposiciones obtenidas de modo coherente con un lenguaje de segundo orden. Sin embargo, como hemos planteado, en *Begriffsschrift* hay substituciones que no pueden realizarse como aplicación de la Regla de substitución de un cálculo de segundo orden.

Un caso conocido de estas dificultades es la demostración de la Proposición (77):

Pr. (77) $\quad f^*(x, y) \rightarrow [\mathrm{Her}(F) \rightarrow (\forall\mathfrak{a}(f(x, \mathfrak{a}) \rightarrow F(\mathfrak{a})) \rightarrow F(y))].$

En ella, como se ha visto en el apartado 2.4.2, se requiere como premisa la Proposición (68):

Pr. (68) $$(\forall\mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \equiv b) \rightarrow (b \rightarrow f(c)). \tag{4.10}$$

En la demostración, se produce la substitución en (68) de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$', lo cual hace explícito que, en el marco de esta deducción, las instancias aceptables de '$\mathfrak{a}$' son expresiones funcionales. Desde la perspectiva de Frege, este paso consiste en la aplicación de (68) a un contexto particular, pero desde el punto de vista de la lógica de segundo orden debería ser justificado independientemente de (68): habría que proporcionar una demostración para la lectura en segundo orden de (68). De acuerdo con nuestra interpretación, esta justificación es innecesaria y además, como veremos, conlleva renunciar a la literalidad de *Begriffsschrift*.

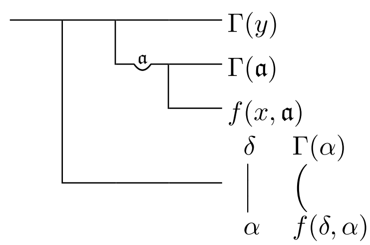
T. W. Bynum, en 'On an Alleged Contradiction Lurking in Frege's *Begriffsschrift*' [Bynum, 1973], defiende que el cálculo de *Begriffsschrift* es interpretable como el propio de una lógica de segundo orden y, además, que sus demostraciones son reproducibles en un cálculo de segundo orden realizando únicamente cambios notacionales que, en su opinión, aclaran distinciones presentes en *Grundgesetze* no contempladas por Frege en 1879. Así, Bynum ofrece una formulación alternativa para la demostración de (77):

> "[W]hile proving formula (77), Frege cites the following principle (68):
>
> Pr. (68)
> $$\begin{array}{l} \vdash\!\!\rule[0.5ex]{6em}{0.4pt}\, f(c) \\ \qquad\qquad b \\ \qquad ((\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})) \equiv b). \end{array} \tag{4.10}$$
>
> Rather than this principle, he actually needs–but has not yet developed the machinery to express–an analogous second-order principle (call it 68') involving quantification over functions. In the latter notation of the *Grundgesetze* (...) (ignoring the, for this purpose, irrelevant switch from '≡' to '=') it would look like this:
>
> Pr. (68′)
> $$\begin{array}{l} \vdash\!\!\rule[0.5ex]{6em}{0.4pt}\, M_\beta f(\beta) \\ \qquad\qquad b \\ \qquad ((\overset{\mathfrak{f}}{\smile} M_\beta \mathfrak{f}(\beta)) \equiv b). \end{array} \tag{4.11}$$
>
> The appropriate substitution table (placed horizontally for convenience) would then run as follows[138]:

[138]Incluimos, en aras de la claridad, la tabla que propone Bynum con la notación simplificada:

$\mathfrak{f}$	$M_\beta\Gamma(\beta)$	b	f
$\mathfrak{F}$	$\mathrm{Her}(\Gamma) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \Gamma(\mathfrak{a})) \to \Gamma(y))$	$f^*(x,y)$	F

Respecto a la notación, véanse las notas 88 y 89. Es muy ilustrador comparar esta tabla

$\mathfrak{f}$	$M_\beta \Gamma(\beta)$	b	f
$\mathfrak{F}$		$\frac{\gamma}{\beta} f(x_\gamma, y_\beta)$	F

These substitutions in formula (68′), and the detachment of the definitionally true equivalence (76) in the *Begriffsschrift*, yields formula (77) with flawless correctness." [Bynum, 1973, p. 286]

Hay que aclarar, previamente, una posible confusión entre distintas nociones relativas a la cuantificación. En lógica actual, la distinción entre órdenes de cuantificación refleja una diferencia en el tipo de variables que son cuantificadas: la cuantificación en segundo orden afecta a variables de predicado. La distinción entre niveles, que Frege desarrolla completamente en *Grundgesetze* [Frege, 1893, §§21-25, pp. 72-80] y cuya aparición consideraremos en el apartado 5.6.3, es sensiblemente distinta:

> "Functions whose arguments are objects we now call *first-level functions*; in contrast those functions whose arguments are first-level functions will be called *second-level functions*." [Frege, 1893, §21, p. 37]

En primer lugar, la distinción entre niveles funcionales se aplica a funciones en sentido matemático, tal y como Frege las presenta en *Grundgesetze*, no a funciones en el sentido de *Begriffsschrift*, y es relativa al tipo de argumentos de cada una de ellas: una función de primer nivel tiene objetos como argumentos, mientras que una función de segundo nivel, a su vez, tiene funciones de primer nivel como argumentos. Por lo tanto, la cuantificación sobre funciones de primer nivel es análoga a una cuantificación de segundo orden en lógica actual.

Después de explicar la diferencia entre órdenes de cuantificación y niveles funcionales, veamos que la fórmula (4.11), que Bynum propone, es una

---

con la que se ha discutido en el apartado 2.4.2, en la exposición de la demostración de la Proposición (77):

$\mathfrak{a}$	$f(\beta)$	b	c
$\mathfrak{F}$	$\mathrm{Her}(\beta) \to (\forall \mathfrak{a}(f(x, \mathfrak{a}) \to \beta(\mathfrak{a})) \to \beta(y))$	$f^*(x, y)$	F

fórmula de la conceptografía de *Grundgesetze* con funciones (en sentido matemático) de segundo nivel. Como veremos en el apartado 6.4.1, el símbolo '$M_\beta(f(\beta))$' no es propio de *Begriffsschrift*: 'M_β' es una letra de la conceptografía de 1893-1903 que expresa generalidad sobre funciones (en sentido matemático) de segundo nivel cuyos argumentos son funciones de primer nivel. Así lo presenta Frege en *Grundgesetze*:

> "We indicate a second-level function with one argument of the second kind[139] by using the *Roman function-letter* 'M' in this way:
>
> '$M_\beta(\varphi(\beta))$'
>
> just as by '$f(\xi)$' we indicate a first-level function with one argument. Here, '$\phi(\ )$' marks the argument place, just as 'ξ' in '$f(\xi)$'. The bracketed letter 'β' here fills the argument place of the function that occurs as argument. The use of '$M_\beta(\phi(\beta))$' for second-level functions is completely analogous to that of '$f(\xi)$' for first-level functions." [Frege, 1893, §25, p. 42]

De hecho, Frege no necesita una modificación tal de (68): en *Begriffsschrift* no hay niveles ni, por supuesto, órdenes de cuantificación. Para indicar explícitamente que la cuantificación de (68) afecta a expresiones funcionales, al autor le basta con substituir '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$', y 'c' por 'F' en (68):

$$\forall \mathfrak{F}(f(\mathfrak{F}) \equiv b) \rightarrow (b \rightarrow f(F)), \tag{4.12}$$

Los cambios propuestos a (68) para obtener (4.12) corresponden a los que adopta Frege en la demostración de (77). Precisamente, aunque se defienda que la conceptografía es un sistema formal de segundo orden, debe reconocerse que las letras para argumento pueden leerse como letras funcionales.

La interpretación adecuada de (4.12) en un lenguaje de segundo orden es la siguiente:

$$\forall X(\phi(X) \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi(Y)). \tag{4.13}$$

[139]Tal y como planteamos en la nota 199, Frege lleva a cabo una jerarquización de los tipos de argumento de las funciones en *Grundgesetze*:

> "[W]e distinguish:
>
> *arguments of the first kind*: objects;
> *arguments of the second kind*: first-level functions with one argument;
> *arguments of third kind*: first-level functions with two arguments."
>
> [Frege, 1893, §23, p. 40]

En cualquier caso, (4.12) es la aplicación de (68) al caso específico en que los argumentos son letras que refieren a propiedades: esto es lo que precisamente expresa (4.13) en notación actualizada para la lógica de segundo orden. En este sentido, puede decirse que Frege dispone de (4.13), sin que haya que modificar ni un ápice del formalismo de la conceptografía.

El desarrollo de Bynum corresponde con el que se está discutiendo. Según la tesis de este autor, las demostraciones de Frege en *Begriffsschrift* son, teniendo en cuenta los detalles que comenta, interpretables en segundo orden. Desde esta perspectiva, Frege debería usar (4.11), en lugar de (68), para la demostración de la Proposición (77). La única diferencia relevante entre estas dos proposiciones está en el hecho de que (4.11) incluye explícitamente cuantificadores sobre letras funcionales y notación propia de *Grundgesetze*, mientras que (68) es una expresión de la conceptografía de 1879. Pretender que las fórmulas de la conceptografía puedan tener una única interpretación es completamente infundado. Bynum no proporciona ninguna razón con la cual sostener su afirmación; no da cuenta del procedimiento del propio Frege en la demostración de (77), sino que propone uno alternativo que no se justifica a partir de una supuesta falta de rigor de la demostración fregeana. Apelar en este punto a la caridad interpretativa es innecesario y condescendiente, porque Frege es capaz de obtener (77) sin mencionar niveles funcionales ni la fórmula (4.11) o una fórmula alternativa, y por lo demás su demostración es perfectamente rigurosa y correcta. Bajo el punto de vista que aquí se defiende, la demostración de (77) en *Begriffsschrift*, así como la de la Proposición (91), que Bynum también comenta, son perfectamente claras y no requieren ninguna adaptación; pueden entenderse por sí mismas en el contexto de una visión global de la conceptografía. Más concretamente, pueden comprenderse siempre que (4.12) se interprete del modo en que hemos planteado.

Ahora bien, el planteamiento de Bynum presenta, adicionalmente, mayores dificultades. Si, a pesar del comentario precedente, se mantiene la perspectiva según la cual la conceptografía es un sistema formal de segundo orden, la demostración de (77) debe adecuarse completamente a la adaptación del lenguaje y del sistema axiomático propuestos. Además, esta adecuación debe ser consistente con el procedimiento de Frege. Bynum menciona que, para llevarla a cabo, es preciso que la premisa, la Proposición (68), esté formulada en segundo orden, por lo que propiamente debería ser el equivalente en conceptografía de (4.13). Bynum no tiene en consideración que la substitución de '$f(\beta)$' por '$\mathrm{Her}(\beta) \rightarrow (\forall \mathfrak{a}(f(x, \mathfrak{a}) \rightarrow \beta(\mathfrak{a})) \rightarrow \beta(y))$' en (68), planteada en la demostración de (77), no es reproducible mediante la Regla de substitución de un cálculo de segundo orden. En particular, no aprecia que para llevar a cabo esta substitución es necesario interpretar (68) como (4.13). Ésta es una dificultad fundamental para la interpretación de Bynum.

Ciertamente, el equivalente en segundo orden de (77) puede deducirse mediante un sistema axiomático de segundo orden con una demostración distinta de la fregeana. Pero ello no corresponde al desarrollo que se ha planteado en este apartado, según el cual se discute si es posible defender que la conceptografía es, en realidad, un sistema formal de segundo orden. La reformulación de la demostración de la Proposición (77), y por ende de la Proposición (68), muestran que la defensa de esta tesis conlleva cambios que van más allá del ajuste notacional y la formulación explícita de la Regla de substitución.

En cualquier caso, la necesidad de tener en cuenta estos detalles no es achacable a un error cometido por Frege, ya sea debido a su contexto histórico o a cualquier otra razón, porque la demostración que se considera puede llevarse a cabo, como se ha expuesto con detalle, en perfecta coherencia con su planteamiento y sin mayores impedimentos. Las substituciones de Frege resultan naturales y admisibles según el formalismo expuesto en *Begriffsschrift*. Sólo si se impone la necesidad de considerar la conceptografía como sistema formal de segundo orden (imposición que, en todo caso, y especialmente por razones históricas, debe considerarse infundada), la demostración de la Proposición (77) requiere añadir todos los elementos necesarios para hacerla compatible con los estándares de rigor actuales. El error fundamental de Bynum es ignorar la naturaleza de la distinción entre función y argumento, propia de *Begriffsschrift*, y como consecuencia de ello, no reconocer que una misma letra puede interpretarse de modos distintos.

4.4 Paradoja de Russell

Una vez valorada la posibilidad de interpretar la conceptografía de *Begriffsschrift* como un sistema formal de segundo orden, aplicaremos esta explicación al contexto de una discusión concreta y contrastaremos nuestra perspectiva con un aspecto que, desde su aparición, condiciona todo análisis de la obra de Frege: la paradoja de Russell. Se abordará la cuestión desde dos puntos de vista distintos: el descubrimiento histórico de la paradoja y su relación con *Begriffsschrift*, y la evaluación que se lleva a cabo en la actualidad de la vulnerabilidad de la conceptografía de *Begriffsschrift* a contradicciones como la mencionada paradoja de Russell.

En esta sección se desarrollará una discusión de carácter filosófico que hará frente, haciendo uso de la reconstrucción de la conceptografía que hemos llevado a cabo, al planteamiento de algunos historiadores, según el cual la paradoja puede afectar a la conceptografía de *Begriffsschrift*.

4.4.1 Russell: consideraciones alrededor de la paradoja

La conceptografía no fue desarrollada exclusivamente en *Begriffsschrift*, sino que fue modificada profundamente y formulada nuevamente en los dos volúmenes de *Grundgesetze*. Pero esta nueva versión de la conceptografía es inconsistente. Es célebre la carta de 16 de junio de 1902 en la que Russell comunica a Frege el descubrimiento de una contradicción, conocida actualmente como la paradoja de Russell. Como veremos, Frege pudo reproducir esta contradicción en el sistema formal de *Grundgesetze*.

Lo relevante en la discusión presente es el hecho de que Russell hace referencia a *Begriffsschrift* en su carta. Esta circunstancia ha inducido a algunos comentaristas a preguntarse, aunque Russell no lo mencione, si la conceptografía propia de esta obra también es inconsistente por causa de la paradoja. En la mencionada carta de Russell a Frege hay un pasaje fundamental para la presente discusión:

> "On functions in particular (sect. 9 of your *Conceptual Notation*) I have been led independently to the same views even in detail. I have encountered a difficulty only on one point. You assert (p. 17) that a function could also constitute the indeterminate[140] element. This is what I used to believe, but this view now seems to me dubious because of the following contradiction: Let w be the predicate of being a predicate which cannot be predicated of itself. Can w be predicated of itself? From either answer follows its contradictory." [Frege, 1976, p. 130]

Es manifiesto como Russell, más que formular la paradoja en la conceptografía, indica a Frege que hay aspectos comunes de sus respectivas investigaciones y que uno de ellos, la posibilidad de que un concepto o propiedad, en cierto modo, caiga bajo sí mismo, conlleva una contradicción. En cualquier caso, no lo expresa en estos términos y, de hecho, su lectura supone, como se discutirá a continuación, una mala interpretación del texto de Frege. Lo cierto es que, propiamente, Russell no formula la contradicción

[140] En la traducción de B. McGuinness y H. Kaal se traduce el original '*unbestimmt*' por '*indefinite*'. A pesar de que se trata de una traducción exacta, por uniformidad con el resto de este trabajo hemos optado por cambiar '*indefinite*' por '*indeterminate*'.

ni en el sistema formal de *Begriffsschrift* ni en el de *Grundgesetze*[141].

Además, Russell localiza el germen de la paradoja en un aspecto concreto de la conceptografía de *Begriffsschrift*, el hecho de que una función pueda ser indeterminada; se refiere al siguiente pasaje de *Begriffsschrift*:

> "For us, the different ways in which the same conceptual content can be considered as a function of this or that argument have no importance so long as function and argument are completely determinate. But if the argument becomes *indeterminate*, (...) then the distinction between function and argument acquires a *substantive* {*inhaltlich*} significance. It can also happen that, conversely, the argument is determinate, but the function is indeterminate." [Frege, 1879a, §9, p. 128]

En este pasaje, Frege distingue entre la aplicación general del esquema función-argumento y la aplicación específica a enunciados que contienen componentes indeterminados. Como hemos expuesto en el apartado 1.2.5, una función es indeterminada en sentido fregeano cuando, siendo el componente que varía, expresa generalidad. En la conceptografía, si una función es indeterminada, entonces contiene letras.

En el planteamiento de Russell, sin embargo, parece haber dos confusiones. En primer lugar, Russell entiende la noción de función en términos matemáticos y no tal y como Frege la presenta en *Begriffsschrift*. Así, Russell

[141]Es posible reconstruir el proceso de descubrimiento de las obras de Frege por parte de Russell a través de los comentarios al respecto que contiene su autobiografía, *The Autobiography of Bertrand Russell. 1872-1914* [Russell, 1951], y en algunas de sus cartas a P. Jourdain (1879-1919), que pueden hallarse en *Dear Russell–Dear Jourdain* [Grattan-Guinness, 1977].

Russell obtuvo una copia de *Begriffsschrift* en una fecha posterior a su nombramiento como Fellow en Cambridge en 1895 [Russell, 1951, p. 68] (Cfr. [Grattan-Guinness, 1977, p. 133]). Tras leer la reseña de G. Peano de *Grundgesetze* [Peano, 1895], consiguió a finales de 1900 el primer volumen de *Grundgesetze* [Grattan-Guinness, 1977, p. 133]. Sin embargo, el autor inglés no trabajó inmediatamente en los textos de Frege: tuvo dificultades con la notación y no pudo leerlos en profundidad. Tras el descubrimiento de la paradoja, en algún momento de la primavera de 1901, Russell empezó a leer las obras de Frege [Grattan-Guinness, 1977, p. 144], aunque, con toda probabilidad, lo hizo superficialmente. No obstante, posteriormente Russell afirmó que "I had discovered for myself most of what he [Frege] had to say, and was therefore able to understand him" [Grattan-Guinness, 1977, p. 133]. Dado el tratamiento por parte de Russell de *Begriffsschrift* en la carta de junio de 1902, es razonable conjeturar que nunca leyó en profundidad esta obra, y que concentró su atención en *Grundgesetze*. Incluso, dado lo que afirma Russell en el Prefacio de *Principles of Mathematics* [Russell, 1903, p. vi], no estudió *Grundgesetze* hasta una fecha posterior a 1903.

Véase una reconstrucción alternativa de este proceso por parte de Macbeth en *Frege's Logic* [Macbeth, 2005, pp. 6-7].

asume erróneamente que el pasaje citado se refiere a funciones en sentido matemático, a las cuales les corresponden predicados. En segundo lugar, Russell no asocia la indeterminación a la expresión de generalidad, sino al hecho de ser el componente reemplazable o que varía en una expresión (lo que, en términos de *Begriffsschrift*, corresponde al argumento). El error interpretativo de Russell es claro si se compara el resultado de los dos análisis de esta cita: Frege afirma que, en ocasiones, el componente que permanece fijo en una expresión, esto es, la función, puede ser indeterminado y, por tanto, expresar generalidad. Por contra, Russell atribuye a Frege la conclusión según la cual es posible que una función en sentido matemático, esto es, cierto tipo de entidad, pueda considerarse el elemento reemplazable, lo cual equivale, desde el punto de vista de Russell, a ser sujeto de predicación. Mientras que el planteamiento de Frege se sitúa en un plano exclusivamente lingüístico, la lectura de Russell pasa a un plano ontológico. La falta de correspondencia que hemos localizado en el apartado 1.3.2 entre el esquema función-argumento y la estructura ontológica básica expresada por enunciados atómicos es completamente ignorada por el autor inglés.

De acuerdo con el razonamiento de Russell, si una función (en sentido matemático) puede ser el componente reemplazable, puede aplicare a sí misma (si, a su vez, es también el componente que permanece fijo). En un enunciado, esto equivale a decir que un predicado se predica de sí mismo. La definición de 'w' como el predicado que no puede predicarse de sí mismo permite obtener la contradicción.

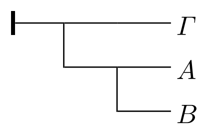
El descubrimiento de la paradoja tiene consecuencias definitivas para el sistema formal de *Grundgesetze*. Sin embargo, la referencia de Russell a *Begriffsschrift* está fuera de lugar, y lo está por una razón fundamental: porque supone, como se ha visto, una interpretación desafortunada del pasaje al que hace referencia.

En la respuesta de Frege a la carta de Russell, del 22 de junio de 1902, hay dos elementos relevantes para este análisis. En primer lugar, Frege evalúa los efectos del descubrimiento de la paradoja en su conceptografía, y sólo considera sus consecuencias en la formulación de *Grundgesetze*. Es significativo, sin embargo, que el autor mencione la conceptografía de *Begriffsschrift*, pero no para destacar qué efectos tiene en ella la paradoja, sino simplemente para remarcar que la conceptografía, como sistema formal, ha sufrido cambios:

> "When I now reread my *Conceptual Notation*, I find that I have changed my view on some points, as you will see if you compare it with my *Basic Laws of Arithmetic*. Please cross out the paragraph on p. 7 of

> my *Conceptual Notation* beginning with 'We can see just as easily'[142] [Frege, 1879a, §5, p. 117] because it contains a mistake which, incidentally, did not have any undesirable consequences for the rest of the contents of my little book." [Frege, 1976, p. 132]

El párrafo erróneo al que alude Frege contiene una interpretación equivocada de un ejemplo de condicional, que no tiene, como el autor indica, ninguna consecuencia en el desarrollo posterior de la obra:

> "We can see just as easily that
>
> 
>
> denies the case in which B is affirmed but A and Γ are denied." [Frege, 1879a, §5, p. 117]

La lectura del condicional citado por el autor es errónea: debería constar "denies the case in which Γ is denied, and A is affirmed or B is denied".

Lo que llama la atención es, pues, que Frege haga referencia explícita a *Begriffsschrift* y no realice ningún comentario respecto a los efectos de la paradoja en el sistema formal desarrollado en este texto; lo único que destaca son los cambios a los que la conceptografía ha sido sometida y un error menor en su exposición.

Pero, en segundo lugar, después de enumerar los elementos de la conceptografía de *Grundgesetze* que no se ven afectados por la paradoja, Frege corrige el modo como Russell ha formulado la dificultad:

> "Incidentally, the expression 'A predicate is predicated of itself' does not seem exact to me. A predicate is as a rule a first-level function which requires an object as argument and which cannot therefore have itself as argument (subject)." [Frege, 1976, p. 132]

En 1902, Frege ha abandonado el esquema lingüístico función-argumento. Como discutiremos detalladamente en los apartados 5.5.2 y 5.6.2, la distinción básica de 1879 es reemplazada por el esquema función-objeto, que posee

[142]En la traducción de B. McGuinness y H. Kaal se traduce el original 'Nicht minder erkennt man' por 'We can just as easily'. A pesar de que se trata de una traducción adecuada, no coincide con la traducción de *Begriffsschrift* de T. W. Bynum, que usamos como referencia en este trabajo. Por ello, hemos cambiado 'We can just as easily' por 'We can see just as easily'.

naturaleza ontológica. La conceptografía de *Grundgesetze* está basada en este esquema posterior. A pesar de que, a lo largo de sus trabajos, el autor nunca abandonó la terminología 'función-argumento', su uso en *Grundgesetze* es claramente distinto al de *Begriffsschrift*.

Dado este cambio en el ámbito de aplicación de la estructura fundamental de la conceptografía, Frege no corrige la confusa lectura de Russell de *Begriffsschrift*; de hecho, ni siquiera la menciona. Frege únicamente adapta la formulación de Russell a una compatible con *Grundgesetze*. Así, en lugar de considerar simplemente dos tipos de entidad básica (función (en sentido matemático) y objeto) y dos posiciones posibles (predicado y sujeto de predicación), como resulta de la lectura russelliana de *Begriffsschrift*, Frege propone una completa jerarquía que estructura las posibles combinaciones entre estos dos tipos de entidades básicas, esto es, entre funciones y objetos. El planteamiento de Frege en esta respuesta está, por tanto, completamente alejado del desarrollado en 1879.

Podemos concluir, en primer lugar, que por parte de Frege no hay una respuesta explícita a la posibilidad de derivar la paradoja del sistema formal de *Begriffsschrift* y, en segundo lugar, que el modo fregeano de plantear la paradoja propuesta por Russell es completamente ajeno a los medios disponibles en *Begriffsschrift*. Dado el momento en el que surge la paradoja de Russell, Frege únicamente considera la conceptografía vigente en 1902, esto es, la desarrollada en *Grundgesetze*.

4.4.2 Paradoja en *Begriffsschrift*

Frege dedica un apéndice de *Grundgesetze* a la paradoja y a sus intentos por superarla. Pero no presta atención a la posibilidad de que la conceptografía de *Begriffsschrift* también sea vulnerable a ella. Los estudios contemporáneos, sin embargo, han discutido precisamente esta última cuestión: la posibilidad de que pueda derivarse una contradicción del sistema formal de *Begriffsschrift*.

Como es bien conocido, entre las leyes básicas de la conceptografía de *Begriffsschrift* no hay una ley análoga a la ley básica (V) de *Grundgesetze* [Frege, 1893, §20, p. 72], a partir de la cual es posible obtener la paradoja de Russell. Por lo tanto, dado el caso, el sistema formal de 1879 debería ser inconsistente por razones independientes a las de *Grundgesetze*. Los comentaristas contemporáneos han centrado su discusión en una posible alternativa: el hecho de que el lenguaje de la conceptografía posibilite la obtención de una expresión, '$f(f)$', de la que, dada una interpretación particular, se derive la paradoja.

La discusión de este apartado se centrará en este contexto concreto. Se valorará si es posible derivar en la conceptografía la expresión '$f(f)$', o una fórmula que la implique, a partir de '$\forall\mathfrak{F} f(\mathfrak{F})$', y si '$f(f)$' es una expresión aceptable en este sistema formal.

Hay razones de naturaleza sintáctica que permiten defender que la expresión '$f(f)$' no es aceptable en la conceptografía. Dicho en otras palabras, '$f(f)$' no tiene sentido en la conceptografía y no es una expresión aseverable, de modo que nunca podría ser el resultado de una instanciación.

Toda expresión de la conceptografía se divide en un componente que varía, el argumento, y un componente que permanece fijo, la función. Cuando se añade una cuantificación en una expresión, el componente que varía es reemplazado por una letra gótica; se cuantifica exclusivamente sobre argumentos. Como se ha discutido en el apartado 1.4.1, Frege establece que la aseverabilidad de la expresión que sigue a una cuantificación debe permanecer intacta con cualquier instancia aceptable, y que si la letra cuantificada es funcional, esta circunstancia debe tenerse en cuenta. Ver '$f(f)$' como instancia de '$\forall\mathfrak{F} f(\mathfrak{F})$' infringe todas estas condiciones.

Considerando '$f(f)$' aisladamente, sale a relucir el hecho de que no permite una distinción consistente entre función y argumento. Cualquier instancia adecuada de '$f(a)$', mientras se respeten las condiciones de aseverabilidad, es una expresión con sentido: hay un componente que se toma como variable y el resto es el componente fijo. El componente variable y el componente fijo son necesariamente distintos. En el caso de '$f(f)$', no es posible respetar una separación tajante entre el argumento y la función.

El lenguaje de la conceptografía no es propiamente un lenguaje formal, de modo que sus expresiones pueden tener una interpretación metalingüística. En particular, una expresión como '$f(g)$' expresa una división en términos de función y argumento: esta fórmula proporciona un modo genérico de referirse a una expresión cuyo argumento, 'g', es una expresión funcional. En este caso, la parte fija debe posibilitar tener expresiones funcionales como argumentos. Hay algunos ejemplos claros de esta circunstancia en las demostraciones de *Begriffsschrift*: en particular, en la demostración de la Proposición (77)[143], Frege substituye '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$' y 'c' por 'F' en (68), fruto de lo cual resulta la siguiente fórmula:

$$\forall\mathfrak{F}(f(\mathfrak{F}) \equiv b) \to (b \to f(F)). \tag{4.11}$$

Estas substituciones consisten en una aplicación al caso particular en el que las instancias adecuadas de '$\mathfrak{a}$' y 'c' son expresiones funcionales. Bajo

[143] Véase el apartado 2.4.2 para una explicación completa de la demostración de la Proposición (77).

un análisis inicial, 'F' es el argumento de '$f(F)$', y ésta es una expresión perfectamente aseverable. Naturalmente, estas substituciones son un paso intermedio en la demostración. Frege se encarga de substituir 'f' para adaptar esta letra al cambio de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$' y de 'c' por 'F': se substituye '$f(\beta)$' por '$\mathrm{Her}(\beta) \to (\forall\mathfrak{a}(f(x,\mathfrak{a}) \to \beta(\mathfrak{a})) \to \beta(y))$'. En esta expresión funcional, es claro como los lugares indicados mediante 'β' son los propios de una letra funcional, que en este contexto se interpreta como una letra que refiere a propiedades[144].

Ahora bien, no es posible reproducir la lectura de '$f(g)$', que hemos ejemplificado en (4.12), en una expresión como '$f(f)$'. En primer lugar, '$f(f)$' no es una fórmula de un lenguaje formal en la que la letra 'f' aparece dos veces. Y, en segundo lugar, en la conceptografía no se puede usar la misma letra para referirse a la vez a la parte variable y a la parte fija. De hecho, si tal separación entre función y argumento fuese posible en '$f(f)$', entonces debería ser posible cuantificar únicamente el argumento. Y, de acuerdo con la regla de Generalización de *Begriffsschrift*, es imposible cuantificar una única letra 'f' en '$f(f)$': como se ha expuesto en el apartado 2.2.2, la letra cuantificada debe aparecer únicamente en los lugares de argumento de la expresión en cuestión. Aunque se pretenda determinar que en '$f(f)$', 'f' es el argumento de la función '$f(\alpha)$', la imposibilidad de aplicar coherentemente la regla de Generalización muestra que esta determinación no es compatible con el formalismo de la conceptografía.

Así pues, el paso de $f(f)$ a $\forall\mathfrak{F}f(\mathfrak{F})$ no es análogo al de $f(a)$ a $\forall\mathfrak{F}\forall\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$. En el segundo caso, se trata de un proceso de cuantificación secuencial:

1. $f(a)$.
2. $\forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a})$, [G] en (1).
3. $\forall\mathfrak{F}\forall\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, [G] en (2).

En (2) se cuantifica sobre el argumento de (1), pues la función es '$f(\alpha)$', mientras que en (3) se cuantifica sobre el argumento de la función '$\forall\mathfrak{a}\,\alpha(\mathfrak{a})$'. Mediante este proceso es claro que el paso de $f(a)$ a $\forall\mathfrak{F}\forall\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ no consiste

[144] Hay que recordar que '$\mathrm{Her}(\beta)$' es una abreviatura de una expresión funcional compleja. Sus argumentos son letras funcionales, y la apariencia como abreviatura de '$\mathrm{Her}(\beta)$' parece vulnerar el hecho de que las letras funcionales siempre aparecen acompañadas de un signo (o varios) entre paréntesis, que indican su ariedad. Sin embargo, no debe olvidarse que se trata de una simplificación. La expresión abreviada de *Begriffsschrift*, como es natural, se adecua coherentemente, de acuerdo con nuestra exposición, al hecho de que una letra funcional sea su argumento y que, en cuanto tal, su ariedad debe estar explícitamente indicada.

en tomar a la vez los dos componentes de '$f(a)$' como argumentos, sino en una transición secuencial, en cada paso de la cual hay una función distinta. No es posible trasladar esta secuencia al caso de $f(f)$, lo cual muestra que, mientras que '$f(a)$' expresa lo mismo que '$\forall\mathfrak{a} f(\mathfrak{a})$' o '$\forall\mathfrak{F}\forall\mathfrak{a}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$', '$f(f)$' no tiene el mismo significado que '$\forall\mathfrak{F} f(\mathfrak{F})$'.

4.4.3 Comentarios modernos acerca de la paradoja

Con la evidencia textual disponible en *Begriffsschrift*, y de la cual surge nuestra reconstrucción de este texto, ha sido posible demostrar que una expresión como '$f(f)$' no es aceptable en la conceptografía. Algunos comentaristas contemporáneos han abordado la cuestión de la vulnerabilidad de *Begriffsschrift* a la paradoja, aunque desde perspectivas distintas. Todos los testimonios que recogemos aquí están fuertemente influenciados tanto por la concepción de la lógica actual como por la conceptografía de *Grundgesetze*. Estas influencias conllevan que su aproximación a la posibilidad de que la paradoja pueda derivarse de la conceptografía de *Begriffsschrift* sea fundamentalmente de naturaleza semántica.

Thiel: derivación de la paradoja en *Begriffsschrift*

En el Apéndice de *Grundgesetze*, Frege explica cómo puede derivarse una contradicción del sistema formal desarrollado en la obra [Frege, 1903, pp. 253-265]. En realidad, el autor plantea dos formas de mostrar la inconsistencia de la conceptografía. De acuerdo con la primera opción, se deriva una contradicción a partir de la ley básica (V). La segunda opción consiste en la derivación de la negación de un teorema obtenido a partir de la ley básica (V). Frege considera una generalización de este teorema (Vb) y, por tanto, demuestra la negación de este generalización:

> "Let us now supplement our investigation by obtaining the falsity of (Vb) as an end result instead of starting from (Vb) and running into a contradiction. To avoid dependence in this on the already suspect value-ranges signs, we will carry out the derivation in full generality for a second-level function with one argument of the second kind (...)." [Frege, 1903, p. 257]

En 'From Leibniz to Frege: Mathematical Logic between 1679 and 1879' [Thiel, 1982], C. Thiel plantea la posibilidad de llevar a cabo en *Begriffsschrift* la misma derivación que Frege realiza en *Grundgesetze* para mostrar que la conceptografía es inconsistente:

> "[I]t seems to be little known even among experts that the fuse leading to the Zermelo-Russell antinomy is already hidden in the *Begriffsschrift* in spite of the absence of courses-of-values or extensions of concepts in this system. In what sense this claim is justified will become clear from an analysis of Frege's Appendix to the second volume of the *Grundgesetze*. After presenting a meticulous derivation of the antinomy, and a shorter version using his elementhood symbol "$\frown$", Frege blames his fundamental law V for the catastrophe. To be more precise, he blames one direction of it. Splitting (and slightly changing)
>
> (V) $$\vdash (\dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha)) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$$
>
> into
>
> (Va) $$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\!\!-\; F(\dot{\varepsilon}f(\varepsilon)) = F(\dot{\alpha}g(\alpha)) \\ \;\;\llcorner\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}) \end{array}$$
>
> and
>
> (Vb) $$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; f(a) = g(a) \\ \;\;\llcorner\; \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha), \end{array}$$
>
> the latter part appears to be essential for Frege's derivation of the antinomy[145]. To raise this above all doubt, Frege decides to make his argumentation independent of courses-of-values altogether by deriving the falsehood of Vb without reference to them. The idea is to consider Vb as a special case of
>
> $$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\; f(a) = g(a) \\ \;\;\llcorner\; M_{\beta}(--\, f(\beta)) = M_{\beta}(--\, g(\beta)) \end{array}$$
>
> and to derive the negation of this formula in the system." [Thiel, 1982, pp. 768-769]

Thiel lleva cabo una reconstrucción detallada de la derivación que nos ocupa y plantea que puede reproducirse en la conceptografía de *Begriffsschrift*:

[145]Las expresiones '$\dot{\alpha}g(\alpha)$' y '$\dot{\varepsilon}f(\varepsilon)$' refieren a los cursos de valores de las funciones (en el sentido de *Grundgesetze*) g y f, respectivamente [Frege, 1893, §9, pp. 43-45]. Se trata, sin embargo, de una noción que no es necesaria en el contexto que se trabaja, precisamente porque Frege demuestra en el cálculo la negación de una generalización de (Vb), y no exactamente de (Vb).

Véase el apartado 6.4.1 para una explicación del símbolo '$M_{\beta}(\varphi(\beta))$'.

> Checking this derivation, one finds that Frege makes use of the fundamental laws IIa and IIb, of theorems Ig, IIIa, and IIIe, and that he uses substitution, detachment, contraposition, transitivity, and universal generalization as his rules. But substitution and detachment are precisely the rules of the *Begriffsschrift* system, the other rules appealed to are provably admissible, the fundamental law IIa is the *Begriffsschrift* axiom 58, theorems IIIa and IIIe are axioms 52 and 54, while Ig can easily be proved as a theorem of the *Begriffsschrift*, and IIb is understood by Frege to be contained in axiom 58, as indicated above and as may be seen from his §10 and his procedure in the third part of the text, especially on pp. 60-62." [Thiel, 1982, p. 769]

Independientemente de que su reconstrucción sea o no aceptable, hay que observar preliminarmente que el argumento de Thiel afecta poco al sistema formal de *Begriffsschrift*; únicamente plantea que es posible deducir una verdad lógica, esto es, la negación de (Vb), en la conceptografía de 1879. La cuestión, en cualquier caso, es que *Begriffsschrift* contenga una ley básica análoga a (Vb), lo cual, obviamente, no es el caso.

Por lo que respecta al cálculo, esta demostración es, como plantea Thiel, reproducible en la conceptografía de 1879 siempre que se disponga de un lenguaje adecuado. Las reglas de inferencia propias de *Grundgesetze* que se usan en ella y que no aparecen en *Begriffsschrift* son de tipo proposicional. Y, dado que el fragmento proposicional de la conceptografía de *Begriffsschrift* es completo, como se ha planteado en el apartado 4.2.1, estas reglas son reproducibles en el sistema formal de 1879 como teoremas o leyes básicas. Por ejemplo, Frege describe en *Grundgesetze* la regla de inferencia a la que Thiel se refiere mediante '*contraposition*' del siguiente modo:

> "A subcomponent in a proposition may be permuted with a supercomponent provided one also inverts their truth-values." [Frege, 1893, §48, p. 61]

Esta circunstancia es expresable en la conceptografía de 1879, como muestra la Proposición (28) (que hemos llamado ley básica (**L4**)):

Pr. (28) $$(b \to a) \to (\neg a \to \neg b),$$

o las Proposiciones (29) y (34) de *Begriffsschrift*:

Pr. (29) $$(c \to (b \to a)) \to (c \to (\neg a \to \neg b)).$$

Pr. (34) $$(c \to (\neg b \to a)) \to (c \to (\neg a \to b)).$$

Ahora bien, hay un elemento relevante que Thiel no tiene en cuenta: el lenguaje. La derivación descrita por Thiel está formulada en un lenguaje que no sólo no es el propio de la conceptografía de *Begriffsschrift*, sino que no puede ser traducido a este último. En particular, la conceptografía de 1879 no dispone de letras de función en sentido matemático de segundo nivel. En realidad, no dispone propiamente de letras de función de ningún nivel. En *Begriffsschrift* puede expresarse cualquier instancia de '$M_\beta(f(\beta))$', pero, dado que 'M_β' es una letra que, como tal, debería pertenecer al lenguaje, no es posible expresar propiamente '$M_\beta(f(\beta))$'. En términos actuales, '$M_\beta(f(\beta))$' es una expresión del lenguaje de la conceptografía de *Grundgesetze*, mientras que su equivalente más cercano en la conceptografía de *Begriffsschrift*, '$g(F)$', tiene que interpretarse como una expresión del metalenguaje como '$\phi(X)$'. Naturalmente, si, contra lo que Frege plantea en *Grundgesetze*, se interpreta 'M_β' como una metavariable para fórmulas, de modo que '$M_\beta(f(\beta))$' se interprete también como '$\phi(X)$', entonces añadir este símbolo al lenguaje de *Begriffsschrift* no supone absolutamente ningún cambio significativo para una interpretación de la conceptografía de 1879 como lógica de segundo orden. Esta opción, en cualquier caso, es históricamente inaceptable.

Añadir a la conceptografía de 1879 'M_β' como letra de su lenguaje no es análogo al hecho de añadir el parámetro de procedimiento 'f' o las abreviaturas '$\mathrm{Her}(\alpha)$' o '$\mathrm{Fun}(\alpha)$'. Estos últimos se enmarcan en el contexto de una teoría lógica que permite llevar a cabo una lectura compatible con el formalismo de *Begriffsschrift*: una lectura basada en la dicotomía entre objetos y propiedades. La teoría lógica que fundamenta el símbolo '$M_\beta(f(\beta))$' es mucho más compleja: implica, además de la distinción entre función (en sentido matemático) y objeto, una jerarquización entre niveles para las funciones y, por lo tanto, unas reglas sintácticas específicas. En cierto sentido, un cambio tal exigiría llevar a cabo el tránsito de la conceptografía de 1879 a la posterior a 1893, que introduciremos en el apartado 5.6.3 y estudiaremos con detalle en el capítulo 7. Y este cambio es absolutamente fundamental. Aunque los pasos formales de la derivación sean reproducibles en la conceptografía de 1879, no es posible expresar en este sistema formal ninguna proposición que contenga '$M_\beta(f(\beta))$': estas fórmulas son, lisa y llanamente, incompatibles con el lenguaje de *Begriffsschrift*. La teoría lógica de *Begriffsschrift*, por su simplicidad, no puede adaptarse al contenido de la demostración.

El uso del símbolo '$M_\beta(f(\beta))$' es especialmente significativo en la ley básica (IIb):

(IIb) $$\forall \mathfrak{g} M_\beta(\mathfrak{g}(\beta)) \rightarrow M_\beta(f(\beta)).$$

En cierto modo, esta proposición puede verse como una instancia de la ley básica (**L9**) de *Begriffsschrift*. Al fin y al cabo, es posible dividirla en función y argumento exactamente del mismo modo que (**L9**): bastaría con substituir '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{g}$', 'c' por 'f' y '$f(\alpha)$' por '$M_\beta(\alpha(\beta))$'. Sin embargo, a causa del uso de la expresión funcional '$M_\beta(\alpha(\beta))$', el contenido de (IIb) es, por un lado, sensiblemente más específico y, por el otro, ajeno al contenido de la mencionada ley básica, pues en la conceptografía de 1879 no hay un modo apropiado de referirse con generalidad a funciones (en sentido matemático) de segundo nivel que se aplican a funciones de primer nivel. Dicho de otro modo, no es posible obtener (IIb) a partir de (**L9**) mediante los recursos formales de *Begriffsschrift*. Para justificar esta transición sería necesaria una teoría lógica con una sintaxis mucho más desarrollada que la contenida en el texto de 1879. En consecuencia, no es cierto, como afirma Thiel, que la ley básica (IIb) esté contenida en (**L9**).

No obstante, Thiel manifiesta no ser consciente de esta diferencia en sus comentarios acerca de las implicaciones de la reproducción de la demostración en *Begriffsschrift*:

> "[T]he derivation in the Appendix can be carried out in the *Begriffsschrift* of 1879 as well, the result being a theorem stating that for any second-level function that takes an argument of the second kind (i.e., a one-place first-level function), there are two concepts yielding the same value when taken as arguments of the function although there are objects falling under one of them but not under the other." [Thiel, 1982, p. 769]

La lectura del resultado de la derivación estudiada por parte de Thiel es propia de la conceptografía de *Grundgesetze*, y no del sistema formal de 1879. En particular, Thiel aplica la distinción entre función y argumento propia de 1893-1903, según la cual una función y un argumento no son componentes de una expresión, sino entidades de categorías ontológicas esencialmente distintas. Las dificultades vinculadas con las diferencias fundamentales entre los lenguajes de las distintas versiones de la conceptografía de Frege imposibilitan aceptar la conclusión de Thiel, a saber, que en *Begriffsschrift* se puede mostrar de uno de los condicionales en los que puede descomponerse la ley básica (V).

van Heijenoort y Bynum: funciones fregeanas

En su introducción a la traducción de *Begriffsschrift* de la cual es editor, J. van Heijenoort parece responder afirmativamente a la cuestión de si la paradoja puede desarrollarse en este texto o, cuanto menos, destaca la cercanía en cuanto a su aparición entre los textos de 1879 y de 1893-1903:

> "Frege allows a functional letter occur in a quantifier (...). This license is not a necessary feature of quantification theory, but Frege has to admit it in his systems for the definitions and derivations of the third part of the book. The result is that the difference between function and argument is blurred. In fact, even before coming to quantification over functions, Frege states (...) that we can consider $\Phi(A)$ to be a function of the argument Φ as well as of the argument A (this is precisely the point that Russell will seize upon to make it bear the brunt of his paradox (...)). It is true that Frege writes (...) that, if a functional letter occurs in a quantifier, "this circumstance must be taken into account". But the phrase remains vague. The most generous interpretation would be that, in the scope of the quantifier in which it occurs, a functional letter has to be treated as such, that is, must be provided with a pair of parentheses and one or more arguments. Frege, however, does not say as much, and in the derivation of the formula (77) he substitutes $\mathfrak{F}$ for $\mathfrak{a}$ in $f(\mathfrak{a})$, at least as an intermediate step. If we observe that in the derivation of the formula (91) he substitutes $\mathfrak{F}$ for f, we see that he is on the brink of the paradox." [van Heijenoort, 1967a, p. 3]

Como se desprende del comentario de van Heijenoort, la disolución de la distinción entre función y argumento se produce en el momento en que se substituyen letras para argumento cuantificadas (que acompañan a letras funcionales en una expresión) por letras funcionales cuantificadas, y éstas, a su vez, se substituyen por letras funcionales. En su opinión, hay dos elementos que permiten estas substituciones problemáticas: en primer lugar, el hecho de que se permita cuantificar tanto letras para argumento como letras funcionales y, en segundo lugar, la flexibilidad que Frege atribuye a las letras funcionales.

En definitiva, de acuerdo con lo que van Heijenoort parece querer decir, a partir de una expresión de la forma siguiente:

$$\forall\mathfrak{a}(\dots f(\mathfrak{a})\dots),$$

y a través de la transición que sigue:

1. $\forall\mathfrak{a}(\dots f(\mathfrak{a})\dots)$,
2. $\forall\mathfrak{F}(\dots f(\mathfrak{F})\dots)$, Substitución en (1) de '$\mathfrak{a}$' por '$\mathfrak{F}$'.

3. $\forall \mathfrak{G} \forall \mathfrak{F}(\ldots \mathfrak{G}(\mathfrak{F}) \ldots)$, [G] en (2).

podría obtenerse como instancia una expresión de la forma:

$$(\ldots f(f) \ldots).$$

Con ello, Frege posibilitaría que en una fórmula apareciera la expresión '$f(f)$', lo que, en opinión de van Heijenoort, eventualmente podría dar lugar a la paradoja[146].

Posiblemente, los problemas que van Heijenoort observa en *Begriffsschrift* se deben a un análisis de la conceptografía realizado bajo la perspectiva de la lógica contemporánea, según la cual las letras funcionales, vistas como variables funcionales o de predicado, deberían expresar generalidad invariablemente sobre propiedades. La flexibilidad en la aplicación del esquema función-argumento posibilita que una letra funcional sea, al mismo tiempo, argumento y función. Según van Heijenoort, esta flexibilidad podría permitir la formación de una expresión como '$f(f)$'.

De acuerdo con el análisis de van Heijenoort, la paradoja puede plantearse únicamente cuando hay una interpretación prefijada de las letras funcionales, según la cual '$f(f)$' exprese que una propiedad se predica de sí misma. No sólo tal interpretación es completamente ajena a lo establecido en *Begriffsschrift*, sino que, además, basar la problematicidad en la lectura que tal interpretación conlleva de expresiones como '$f(f)$' obvia el plano sintáctico del desarrollo de Frege. Tal y como hemos planteado en el apartado anterior, la expresión '$f(f)$' no es aceptable en la conceptografía y, en relación con ello, la transición que plantea van Heijenoort para su obtención no es posible.

T. W. Bynum, en su traducción de *Begriffsschrift* [Frege, 1972], realiza un comentario crítico a la evaluación de van Heijenoort. En su opinión, la conceptografía no es vulnerable a la paradoja y van Heijenoort plantea una interpretación errónea. Su estrategia argumental se apoya en la reformulación de las demostraciones de las Proposiciones (77) y (91) presente en 'On an Alleged Contradiction Lurking in Frege's *Begriffsschrift*' [Bynum, 1973]:

> "The idea of treating $F(y)$ as a function of the function F [in the proof of (77)] is in no way contrary to Frege's later thought (...). To

[146]Nótese que, estrictamente, van Heijenoort no plantea una transición tal. Hemos reconstruido la opción más plausible por su relevancia para nuestra discusión. En cualquier caso, las dos transiciones que, consideradas conjuntamente, son problemáticas para van Heijenoort, no se producen en ninguna ocasión en el contexto de una única demostración en *Begriffsschrift*.

> state his thought precisely, however, required the notational machinery (which he had not yet devised) to distinguish first- from second-level functions. With that available, the difficulty can be easily resolved. Van Heijenoort (...) is in error in supposing that any paradox can arise in the system. In the *Conceptual Notation* Frege never confuses first- and second-level functions, thought he does not yet have separate terms for them." [Frege, 1972, p. 175, nota 2]

Como ya hemos mencionado, Bynum analiza la demostración de la Proposición (77) desde el punto de vista de *Grundgesetze*. De acuerdo con esta lectura, la expresión '$f(f)$' no tiene ningún sentido. Ahora bien, interpretar *Begriffsschrift* de acuerdo con *Grundgesetze* no es una perspectiva aceptable y conlleva dificultades técnicas que hemos considerado anteriormente. Bynum identifica las letras funcionales con variables de predicado. Y tal identificación se produce porque Bynum, desde un punto de vista estrictamente contemporáneo, ignora en su lectura la naturaleza de la distinción fregeana entre función y argumento. Muestra inequívoca de ello es su afirmación "treating $F(y)$ as a function of the function F", según la cual Bynum confunde el rol desempeñado por un componente de la expresión '$F(y)$', con el tipo de símbolo que es 'F'; a ambos elementos les llama 'función'[147]. Eliminando esta anfibología, lo que Bynum querría decir, respetando la naturaleza de las funciones de *Begriffsschrift*, es 'treating $\phi(F)$ as a function of the letter F'. Por esta razón, su análisis requiere una proposición de segundo orden para permitir que dicha letra funcional, 'F', pueda ser aplicada como argumento a la fórmula $\phi(F)$[148].

Efectivamente, la reconstrucción de las demostraciones más controvertidas de *Begriffsschrift* de acuerdo con los recursos propios de una lógica de segundo orden, en el caso en que pudiera hacerse, garantizaría que no fuera posible derivar la paradoja de *Begriffsschrift*. Lamentablemente, esta estrategia, que se ha discutido en el apartado 4.3.2, conlleva dificultades graves y es, además, estrictamente anacrónica. La solución de Bynum a la problemática planteada por van Heijenoort es errónea en cuanto a su lectura de *Begriffsschrift*.

[147]Sin embargo, la afirmación de Frege en *Begriffsschrift* es "(...) in accordance with §10, $F(y)$, $F(\mathfrak{a})$, and $F(\alpha)$ are to be considered different functions of the *argument* F." [Frege, 1879a, §27, p. 175, nuestra cursiva].

[148]La confusión que tratamos de resolver aquí, entre órdenes de cuantificación y niveles funcionales, se ha discutido, a colación de la reconstrucción de Bynum, en el apartado 4.3.2. Los resultados obtenidos anteriormente son los que han determinado los términos de la discusión presente.

En cualquier caso, el análisis de Bynum ofrece un punto de vista que debe destacarse por una razón particular: dado que ofrece una interpretación semántica de la noción de función, este autor proporciona argumentos de tipo semántico para defender que ninguna paradoja puede ser obtenida con la conceptografía de *Begriffsschrift*. Así pues, la discusión acerca de '$f(f)$' puede orientarse de modo distinto.

Hay una única lectura de esta expresión que es genuinamente problemática: tomar '$f(f)$' como fórmula atómica y, por tanto, interpretarla como '$X(X)$'. En este caso, 'X' es a la vez parte variable y parte que permanece fija. Como se ha visto, esta lectura es sintácticamente insostenible, aunque en *Begriffsschrift* no haya reglas explícitas que así lo indiquen. Pero, además, el contenido de esta expresión es semánticamente inaceptable. Si '$f(f)$' se lee como '$X(X)$', debe interpretarse como la predicación de una propiedad a sí misma. De hecho, es la interpretación que le atribuye van Heijenoort.

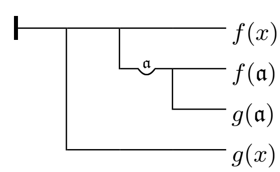
Si bien en *Begriffsschrift* no hay ninguna consideración semántica que pueda aplicarse al sistema formal, en este texto Frege manifiesta implícitamente disponer de la distinción entre concepto y objeto, cuyo desarrollo explícito empieza en 1880, con la elaboración de 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880]. Una muestra de esta circunstancia puede hallarse en el comentario de Frege en *Begriffsschrift* respecto a la distinción entre juicios categóricos universales y singulares:

"People distinguish *universal* and singular[149] judgements: this is really

[149]En el original alemán, Frege usa el adjetivo '*besondere*' para referirse a los juicios singulares. La traducción literal de este adjetivo es 'particular', pero hay que tener en cuenta que el autor modificó la terminología tradicional para referirse a los juicios singulares, tal y como plantea G. Gabriel en 'Existenz- und Zahlaussage. Herbart und Frege' [Gabriel, 2001, p. 115]. En efecto, según la terminología kantiana, los juicios se dividen bajo el criterio de cantidad en universales (*Allgemeine*), particulares (*Besondere*) y singulares (*Einzelne*), como pone de manifiesto I. Kant (1724-1804) en *Kritik der reinen Vernunft* [Kant, 1781, A70-B95].

Este cambio es patente, en primer lugar, por el hecho de que Frege se refiere a los juicios propiamente particulares mediante el adjetivo '*particulär*' y, en segundo lugar, porque aludiendo claramente a un juicio singular, el autor usa el adjetivo '*besondere*':

Pr. (62)



"Dieses Urtheil ersetz die Schlussweise Barbara in dem Falle, dass der Untersatz (g(x)) einen besondern Inhalt hat [Este juicio substituye el modo de inferencia Barbara en el caso en el que la premisa menor (g(x)) tiene un contenido

> not a distinction between judgements, but between contents. *They should say, "a judgement with a universal content", "a judgement with a singular content"*. These properties belong to the content even when it is put forth, *not* as a judgement but as a proposition." [Frege, 1879a, §4, p. 114]

El hecho de que Frege distinga los juicios universales de los singulares por su contenido, y no en cuanto juicios, responde a lo que cada uno de los representantes de estos tipos de juicios expresa: la subordinación entre conceptos y la atribución de una propiedad a un objeto, respectivamente. A pesar de que el autor decidió no reflejar esta estructuración ontológica de forma directa en la conceptografía, es claro con esta cita que ya en 1879 contaba con ella. Frege empezó propiamente a desarrollar el esquema concepto-objeto a partir de 1880, como veremos más adelante, en la sección 5.5. No hay, por otra parte, ningún indicio textual que muestre que Frege modificó su estructuración ontológica entre 1879 y 1880.

Bajo este planteamiento ontológico temprano de Frege, donde aún no se distingue entre niveles funcionales, un concepto se aplica a un objeto, y entre conceptos puede producirse una relación de subordinación. Así, un concepto puede subordinarse consigo mismo, pero jamás se predicará de sí mismo. Desde la perspectiva de Frege, no puede hallarse absolutamente ningún ejemplo en el que un concepto se aplique a sí mismo. Y, precisamente, eso es lo que expresa $X(X)$: la predicación de X a X. El contenido de $X(X)$, de acuerdo con ello, plantea una articulación ontológica inaceptable.

Por consiguiente, desde una perspectiva sintáctica, una expresión como '$f(f)$' no es aceptable en *Begriffsschrift*, mientras que la interpretación problemática de '$f(f)$' es, desde un punto de vista semántico, igualmente inaceptable. Por tanto, debe concluirse que, nada de lo que plantea van Heijenoort pone en lo más mínimo en duda la consistencia de la conceptografía de *Begriffsschrift*.

Russinoff: alcance de cuantificación de las letras

En su artículo 'On the Brink of a Paradox?' [Russinoff, 1987], S. Russinoff recoge el testigo de T. W. Bynum y J. van Heijenoort en cuanto a la evalua-

singular.]." [Frege, 1964a, §22, p. 52]

En las traducciones de T. W. Bynum y S. Bauer-Mengelberg, tanto las menciones de Frege del adjetivo '*besondere*' como la mención a '*particulär*' son indistintamente traducidas por '*particular*'. Véase [Frege, 1879a, §4, p. 114; §22, 164] y [van Heijenoort, 1967a, §4, p. 13; §22, p. 52]. Por esta razón, hemos decidido modificar su traducción al tomar, en este contexto, '*singular*' como el equivalente más adecuado de '*besondere*'.

ción de la aparición de la paradoja en *Begriffsschrift*. El primer estadio de su discusión consiste en reconstruir la conceptografía como un sistema formal de segundo orden consistente; obviamente, bajo esta reconstrucción, la conceptografía no es vulnerable a la paradoja. Pero, tras ello, Russinoff pasa a evaluar el planteamiento de van Heijenoort y a ofrecer una interpretación particular de la conceptografía:

> "Frege says very little concerning the interpretation of the system presented in the *Begriffsschrift*. In particular, he says little about how we are to interpret the second-order formulas of the third part of the work. It is these formulas that concern van Heijenoort. While the inclusion of second-order quantifications does not render the theory inconsistent, there are problems associated with the interpretation of these formulas that can be seen as anticipating problems that arise in Frege's later writings. In particular, Frege seems dangerously close to Russell's paradox and the problem with the concept *horse*." [Russinoff, 1987, p. 127]

El planteamiento de Russinoff tiene como elementos clave la interpretación de las letras para argumento y de las letras funcionales. Comparte, a grandes rasgos, las claves de la interpretación tradicional de la conceptografía de *Begriffsschrift*: las letras para argumento, vistas como variables individuales, toman valores sobre un dominio completamente ilimitado (que contiene tanto objetos como propiedades), y las letras funcionales, vistas como variables de predicado, toman valores entre una colección de propiedades o funciones en sentido matemático. De su argumentación, destaca que únicamente recurra a analogías con la lógica de segundo orden, y con la conceptografía de *Grundgesetze*, para fundamentar su posición.

Russinoff pone de manifiesto establecer una plena asociación entre las nociones de función y de letra funcional:

> "It should be noted that although Frege's notions of function and argument are presented syntactically in the *Begriffsschrift*, in view of his later characterization of functions and concepts, function variables cannot range over sets of objects or individuals. Sets are "complete", or "saturated", and hence lack the requisite of incompleteness of the function." [Russinoff, 1987, p. 128]

Las letras funcionales son un elemento del lenguaje de la conceptografía que, entre otros usos, pueden representar bajo un análisis particular funciones. Pero, contra lo que sostiene Russinoff, las funciones, en tanto que componentes de expresiones, no son funciones en el sentido matemático, como corresponderá al planteamiento de las obras posteriores de Frege, ni son representadas exclusivamente por letras funcionales: una letra funcional puede ser argumento de una expresión funcional compleja que, entre otros símbolos, puede contener letras funcionales.

Además, las letras funcionales toman valores sobre un recorrido de instancias aceptables, y no sobre un dominio de propiedades y relaciones. Que propiedades y relaciones sean el referente habitual de las expresiones que pueden ocupar el lugar de las letras funcionales es indicativo de su uso común, pero en ningún caso esta circunstancia impone una interpretación concreta. Justamente porque, de forma similar al caso de las letras para argumento, el recorrido de las letras funcionales no puede determinarse sin estar fijado el contexto concreto en el que aparecen.

En conjunto, la interpretación propuesta por Russinoff carece de una justificación textual, porque no se corresponde más que con una lectura sesgada y parcial de *Begriffsschrift*. Ya se ha defendido que la conceptografía carece de semántica. Sostener, como hace esta autora, que la conceptografía sí dispone de una semántica, sea la que sea, exige compromisos importantes, que deben apoyarse en el conjunto de *Begriffsschrift*, y no únicamente en citas localizadas y en analogías con obras posteriores de Frege.

En cualquier caso, el resultado del planteamiento de Russinoff es que la interpretación que extrae de la conceptografía, a pesar de que este sistema formal se ha reconstruido como lógica estándar de segundo orden, es vulnerable a la aparición de la paradoja:

> "[I]f the range of the second-order variables is included in the range of the first-order variables, we find Frege very close to Russell's paradox. Consider:
>
> $$(\exists F)(\forall x)(F(x) \leftrightarrow -A(x,x)). \qquad (*)$$
>
> The formula (*) is an instance of the comprehension axiom schema and hence is a theorem for Frege's theory. Frege does not tell us how to interpret formulas of the form
>
> $$(\exists F)(\ldots\ldots F(\,)\ldots\ldots)$$
>
> yet from what he does say it seems that such formulas are to be read as
>
> There is a property such that ...
>
> Let us say that an object has a property Φ just in case Φ applies to that object. If we suppose that properties exist, it follows that they are in the range of the individual variables. If we let '$A(x,x)$' stand for 'x is a property that does not apply to itself' then (*) becomes:

> There is a property that applies to an object if and only if that object is a property that does not apply to itself[150].
>
> On the supposition that properties are themselves things in the universe, this interpretation of (*) gives us Russell's paradox." [Russinoff, 1987, pp. 129-130]

El argumento de Russinoff requiere que la fórmula $A(x, x)$ esté por un predicado concreto: 'x is a property that does not apply to itself'. Sin embargo, en *Begriffsschrift* ninguna fórmula puede expresar tal circunstancia; no hay que olvidar que las letras expresan plena generalidad, y que no se les puede imponer una interpretación particular. En consecuencia, $A(x, x)$ debería considerarse una fórmula atómica, donde A sea una constante relacional que se ha añadido al lenguaje de la conceptografía[151].

Ahora bien, la fórmula (*) es una consecuencia de las leyes básicas de la conceptografía. Puesto que claramente (*) no es una contradicción, el argumento de Russinoff, de ser correcto, mostraría que hay una interpretación que hace falsa (*). Es importante apreciar que bajo la interpretación de la autora, (*) no es contradictoria, sino simplemente falsa. Por consiguiente, dado que (*) es un teorema, o bien alguna de las leyes básicas es falsa bajo la misma interpretación, o bien la Regla de substitución no es correcta. Así pues, el planteamiento de Russinoff, considerado globalmente, es indicativo de que hay interpretaciones que no son legítimas. De hecho, estamos en

[150] Dado que $A(x, x)$ aparece en (*) tras una negación, Russinoff debería afirmar que " '$A(x, x)$' stand for 'x is a property that applies to itself' " para ser coherente con su exposición. En la discusión que sigue, se ha eliminado esta errata del modo que nos parece más natural: ignorando la negación que precede a $A(x, x)$.

[151] Ignasi Jané nos ha sugerido otra posible interpretación del argumento de Russinoff. De acuerdo con ella, la autora supone que:

1. Toda propiedad es un objeto.
2. El supuesto (1) puede expresarse en el lenguaje.

Por (2), hay una fórmula $\phi(F, x)$ que expresa que $F = x$. De acuerdo con ello, $A(x, x)$ puede definirse del siguiente modo:

$$A(x, y) \leftrightarrow \exists F(\phi(F, x) \wedge \neg F(y)).$$

A partir de (*), dada la definición de $A(x, x)$, puede derivarse de modo trivial una contradicción. Como el mismo Jané ha hecho notar, de ello podría concluirse que los supuestos (1) y (2) son inconsistentes. Pero, en cualquier caso, es esta interpretación particular, y no el sistema formal de *Begriffsschrift*, la que se ve afectada por este argumento.

Dado el interés histórico que posee su discusión, consideraremos detalladamente únicamente la primera lectura propuesta del argumento de Russinoff.

disposición de justificar que la interpretación que propone Russinoff no es legítima ni propiamente fregeana.

Este tipo de inconsistencias aparecen en el contexto de validez de la ley básica (V) de *Grundgesetze* o de un principio de comprensión. Y es obvio que *Begriffsschrift* no cuenta con dicha ley ni con un principio equivalente.

En cualquier caso, el desarrollo de Russinoff, que posibilita la aparición de la paradoja de Russell en *Begriffsschrift*, presenta nuevamente inconsistencias graves con las fuentes textuales de Frege. Un elemento esencial de su argumento es la interpretación de la fórmula (*), expresada como sigue:

> Hay una propiedad que se aplica a un objeto si y sólo si este objeto es una propiedad que no se aplica a sí misma.

La situación paradójica se produce por el hecho de que una propiedad se aplica a sí misma si y sólo si no se aplica a sí misma. Pero esta relación semántica de una propiedad consigo misma es inconcebible bajo el trasfondo ontológico de Frege. Ya en los primeros comentarios a *Begriffsschrift*, a partir de 1880, el autor manifiesta haber asumido claramente la distinción entre concepto y objeto. La transición en las obras de Frege entre los esquemas función-argumento y concepto-objeto será detalladamente considerada en la sección 5.5. En *Begriffsschrift*, la distinción entre concepto y objeto no posee la relevancia que adquirirá en las obras inmediatamente posteriores, pero se trata de una estructura básica esencial, como se ha hecho notar en este mismo apartado a propósito del tratamiento de van Heijenoort de esta cuestión. De hecho, en 1882, en 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b], un artículo dedicado a poner en contexto la conceptografía de *Begriffsschrift*, Frege manifiesta explícitamente considerar esta distinción en su discusión con la posición de los lógicos algebristas:

> "Let us consider first *primary propositions*. Here the letters denote extensions of concepts. Particular things as such are not signified; and this is an important deficiency in the Boolean formula language, for even if a concept covers only a single thing, a great difference still remains between it and this thing." [Frege, 1882b, p. 91]

Poco después, en la carta Marty del 29 de agosto de 1882, Frege confirma y desarrolla su posición al respecto. Remarca la distinción entre concepto y objeto y establece claramente cuáles son las relaciones que mantienen estos distintos tipos de entidad:

> "The distinction between individual and concept seems to me more important [than the distinction between the function of judgement and

> the matter judged] (...). In logic (...), this distinction has not always been observed (for Boole only concepts really exist). The relation of subordination of a concept under a concept is quite different from that of an individual falling under a concept. It seems that logicians have clung too much to the linguistic schema of subject and predicate, which surely contains what are logically quite different notions." [Frege, 1976, pp. 100-101]

En resumen, para Frege la distinción entre concepto y objeto es esencial; por un lado, entre conceptos se da la relación de subordinación y, por el otro, se dice que un objeto cae bajo un concepto.

Inicialmente, Frege no considera que un concepto caiga bajo otro concepto, pero cuando se plantea tal posibilidad introduce una distinción entre niveles aplicada a las funciones en sentido matemático y, específicamente, a los conceptos: un concepto no cae bajo otro concepto de su mismo nivel (ya que entre ellos sólo puede haber la relación de subordinación), sino que puede caer bajo un concepto de nivel superior. Así lo confirma en *Grundlagen*:

> "If, for example, we collect under a single concept all concepts under which there falls only one object, then oneness is a component characteristic of this new concept. Under it it would fall, for example, the concept "moon of the Earth", though not the actual heavenly body called by this name. In this way we can make one concept fall under another higher or, so to say, second order concept. This relationship, however, should not be confused with the subordination of species to genus." [Frege, 1884, §53, p. 65]

Nuevamente, como en el caso de conceptos y objetos, Frege especifica que no debería confundirse la relación que guardan conceptos de un mismo nivel con la propia de conceptos de niveles distintos. Mientras que un concepto puede subordinarse a otro concepto de su mismo nivel, un concepto puede caer bajo otro concepto de un nivel superior. De hecho, el autor es claro en cuanto a la necesidad de no confundir estas dos relaciones.

Sorprendentemente, Russinoff genera una situación paradójica a partir de una propiedad que cae bajo sí misma si y solo si no cae bajo sí misma. El diagnóstico de Frege a esta afirmación sería, a partir de la evidencia textual disponible, que manifiesta una confusión ontológica grave: no es correcto plantear que una propiedad caiga bajo sí misma (una propiedad de su mismo nivel). Entre una propiedad y ella misma únicamente se da la relación, por otro lado obvia, de subordinación. De hecho, se ha observado, en el apartado

4.4.1, que Frege se expresa en estos mismos términos en su respuesta a Russell del 22 de junio de 1902.

Hay un último aspecto controvertido en la interpretación de Russinoff y el argumento que desarrolla para confirmar su posición. Se ha puesto de relieve cómo la autora asocia plenamente las nociones de función fregeana y de letra funcional; tal vinculación conlleva la atribución de una característica a las funciones que es relevante en esta discusión, la insaturación. Como trataremos en el apartado 5.6.2, la función fregeana en los textos posteriores a *Grundlagen* es una entidad la característica definitoria de la cual es la incompletud o insaturación. Russinoff atribuye esta misma caracterización a la función de *Begriffsschrift* y, a raíz de la vinculación que, en su opinión, existe entre funciones y letras funcionales, afirma que "function variables cannot range over sets of objects or individuals. Sets are "complete", or "saturated", and hence lack the requisite incompleteness of the function" [Russinoff, 1987, p. 128].

Ahora bien, la clave del argumento de la autora, al menos bajo una de sus posibles interpretaciones, es que una propiedad se predique de sí misma, es decir, que una entidad insaturada se complemente con una entidad insaturada. El resultado, de acuerdo con el planteamiento de Frege, no es una entidad completa, porque no resulta de la complementación de un objeto y una función. El autor hace manifiesto este planteamiento en *Funktion und Begriff*:

> "[W]e split up the sentence
>
> > 'Caesar conquered Gaul'
>
> into 'Caesar' and 'conquered Gaul'. The second part is unsaturated' - it contains an empty place; only when this place is filled up with a proper name, or with an expression that replaces a proper name, does a complete sense appear. Here too I give the name 'function' to what is meant by this 'unsaturated' part. In this case the argument is Caesar." [Frege, 1891, p. 147]

Por lo tanto, el planteamiento de Russinoff es inadecuado no sólo en una atribución de insaturación poco respetuosa con el contenido de *Begriffsschrift*, donde en ningún momento se atribuye insaturación a las funciones, sino que, además, esta atribución es inconsistente con el argumento que ella misma plantea para confirmar su posición.

En conclusión, puede afirmarse que todas las dificultades examinadas respecto a *Begriffsschrift*, por causa de las cuales podría generarse la paradoja de Russell en su sistema formal, son fruto de una comprensión defectuosa del planteamiento de Frege. Esta comprensión es producto, especialmente en el caso de Russinoff, de establecer vínculos injustificados entre las nociones básicas de la conceptografía de *Begriffsschrift* y la contrapartida a estas nociones de los textos posteriores de Frege. A través de nuestra discusión se pone de manifiesto como a partir del intento de ofrecer una reconstrucción completa y global de *Begriffsschrift* pueden resolverse las cuestiones particulares que surgen de su lectura y tratamiento histórico.

Parte II

De *Begriffsschrift* a *Grundgesetze*

Capítulo 5

Transición entre *Begriffsschrift* y *Grundgesetze*: 1880-1893

5.1 Introducción

En los capítulos precedentes se ha expuesto y discutido globalmente el contenido de *Begriffsschrift*, publicado en 1879. Nuestro tratamiento, como es natural, ha tenido en cuenta otras obras del autor, elaboradas antes y después de la publicación de *Begriffsschrift*, pero ha buscado fijar el sistema formal que Frege desarrolla en el texto de 1879. Sin embargo, la obra de este autor sufrió un profundo e intenso desarrollo, especialmente en el periodo que separa esta última obra de *Grundgesetze*.

Dar cuenta de este desarrollo adecuadamente es una tarea compleja, porque Frege raramente da explicación de los cambios que sufre su trabajo. Pero, indudablemente, hay muestras de ello en sus textos, y una reconstrucción histórica no sólo debe localizarlas, sino también articularlas y explicarlas desde una perspectiva global. A menudo, los comentarios históricos actuales sobre la lógica de Frege exponen aspectos básicos de sus distintas obras y mencionan que hay cambios entre ellos[152]. Y, sorprendentemente, en muy pocas ocasiones estos cambios generan la perplejidad necesaria para justificar su explicación.

[152] Por ejemplo, H. Sluga comenta las diferencias en el tratamiento de la noción de función en *Begriffsschrift* y en las obras posteriores en *Gottlob Frege* [Sluga, 1980, p. 139]. M. Dummett ofrece una explicación alternativa del desarrollo en las obras de Frege de esta misma noción en *The Interpretation of Frege's Philosophy* [Dummett, 1981a, pp. 397-398].

De hecho, a pesar de que multitud de estudios históricos incluyen numerosas menciones a *Begriffsschrift*, una cantidad sorprendentemente pequeña de éstos ofrece un tratamiento específico del sistema formal de 1879 sin someter su lectura a una visión condicionada por *Grundgesetze*. En particular, el relativamente escaso estudio detallado que ha recibido *Begriffsschrift* ha provocado que el intenso proceso de evolución que sufrió la concepción lógica de Frege desde su publicación hasta la aparición de *Grundlagen* en 1884 sea, casi sin excepción, absolutamente ignorado[153]. En este capítulo pretendemos continuar nuestro estudio de *Begriffsschrift* y, globalmente, de los aspectos formales de la obra de Frege, evaluando y explicando las razones que llevaron al autor a modificar su planteamiento en *Grundlagen* hasta culminarlo en *Grundgesetze*. Hay dos elementos básicos que destacan en este proceso: el despliegue de la tesis logicista y el desarrollo de la distinción entre concepto y objeto.

Este capítulo consta de seis secciones. Tras esta introducción, la segunda sección (5.2) ofrecerá una panorámica histórica general del período de transición de *Begriffsschrift* a *Grundlagen*: el trienio 1880-1883. Las siguientes tres secciones caracterizarán cada uno de los aspectos en los que, a lo largo de este trienio, Frege modifica o desarrolla el planteamiento de *Begriffsschrift*. En la tercera sección (5.3) se detallará la caracterización de las leyes de la lógica que hace Frege en la década de 1880, y se plantearán posibles fuentes que influyeron en su planteamiento. En la cuarta sección (5.4) se estudiará la aparición y asunción de la tesis logicista en los textos previos a 1884 y

[153]Véase, sin embargo, el comentario de R. Heck en 'Formal Arithmetic before *Grundgesetze*' [Heck, 2015]:

> "Frege's views really did change between *Begriffsschrift* and *Grundgesetze*, and in absolutely fundamental ways. Frege's understanding of the nature of generality underwent a profound transformation, for example, and there is little more fundamental to his conception of logic than that. I would go much further: Not one of the characteristic doctrines of Frege's mature philosophy, it seems to me, is actually present in his earliest work." [Heck, 2015, p. 32]

Heck incluso realiza una valoración del estudio general de la obra de Frege:

> "We have to stop just assuming that Frege's corpus is a seamless whole, except for where it obviously isn't. The benefit of doing so will not just be that it will make it possible for us to understand how Frege's mature doctrines developed, but it will make it possible for us to understand those doctrines themselves much better than we do. For I very much doubt that we can appreciate them properly unless we know who Frege took his opponents to be. And very often, Frege's opponent turns out to be a younger version of himself." [Heck, 2015, p. 32]

las consecuencias que ello tuvo en la conceptografía. También se valorará el papel que puede jugar la conceptografía de 1879 en el éxito del proyecto logicista de Frege. La quinta sección (5.5) dará cuenta de la adopción por parte de Frege de la distinción entre concepto y objeto, de las características básicas de este esquema y de su relación con la distinción entre función y argumento, presente en *Begriffsschrift*. Finalmente, la sexta sección (5.6) sintetizará el desarrollo, tanto filosófico como formal, que sufre el pensamiento de Frege entre 1884 y 1893, y que determina la naturaleza de la conceptografía de *Grundgesetze*.

5.2 Vigencia de *Begriffsschrift* y su superación

La publicación en 1879 de *Begriffsschrift* supone la culminación de una etapa en el desarrollo de una teoría formal por parte de Frege. Exceptuando un breve artículo también publicado en 1879, no hay más representantes de este desarrollo que el mismo *Begriffsschrift*, por lo que su génesis no puede establecerse más que mediante conjeturas. En cualquier caso, lo cierto es que Frege concluye con este texto, exceptuando algunos detalles (como son la noción de igualdad de contenido o la equivalencia entre ésta y el bicondicional), el proyecto de la creación de la herramienta formal que es la conceptografía. Su objetivo en *Begriffsschrift* es la definición lógica de ciertos conceptos aritméticos y la obtención de algunos teoremas relevantes que involucran estas definiciones. Ahora bien, en tal objetivo no hay ninguna voluntad de completud o de reducción; como hemos visto en el apartado 3.3.5, en 1879 Frege no ha anunciado aún su tesis logicista.

En cualquier caso, *Begriffsschrift* no consiste únicamente en la presentación de un sistema formal; contiene una concepción de la lógica con unos objetivos determinados, de la cual la conceptografía es un reflejo. Pueden localizarse al menos cuatro rasgos característicos de esta concepción: el uso instrumental de la lógica (y, por tanto, el desinterés por el descubrimiento de principios lógicos en cuanto tales, esto es, por una perspectiva puramente formal), la necesidad de disponer de un sistema de deducción riguroso cuya aplicación tenga carácter plenamente general y, especialmente, la capacidad de la lógica para deducir teoremas aritméticos que aparentemente son verdades basadas en la intuición. La conceptografía es, pues, además de un sistema formal, el resultado de una concepción global y elaborada de la lógica. Y muestra de ello son aspectos particulares como, por un lado, la distinción entre función y argumento, y la completa flexibilidad que ésta posibilita, así como, por el otro, la ausencia de elementos sintácticos clave, como es la definición de fórmula atómica.

A lo largo de esta sección se discutirá, en primer lugar, de qué modo el contenido de *Begriffsschrift* sigue vigente en los textos elaborados inmediatamente después de su publicación. En segundo lugar, se esquematizará cronológicamente el proceso que parte de la publicación de *Begriffsschrift* y a través del cual Frege modifica su lógica para sentar las bases del desarrollo de la conceptografía de *Grundgesetze*.

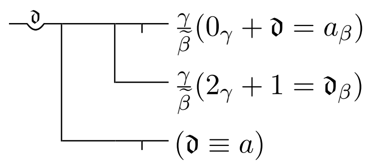
5.2.1 Trabajos inmediatamente posteriores a *Begriffsschrift*

El desarrollo formal de *Begriffsschrift*, en cuanto tal, se ve reflejado únicamente en una obra posterior a *Begriffsschrift*, en 'Anwendungen der Begriffsschrift' [Frege, 1879b]. De hecho, este breve texto consiste simplemente en la ejemplificación del uso del aparato técnico de *Begriffsschrift*; no hay en él ninguna discusión teórica, sino únicamente tres casos de aplicación de la conceptografía a disciplinas científicas (uno a la geometría y dos a la aritmética). En los textos posteriores también hay ejemplos de aplicación de la conceptografía, pero en ellos Frege no hace uso de la distinción entre función y argumento, como sí ocurre en 'Anwendungen der Begriffsschrift':

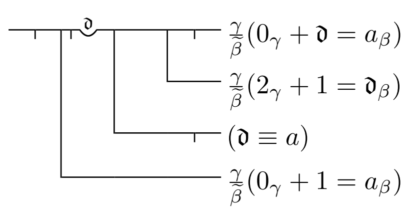
> "By
>
> $$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} f(x_\gamma, y_\beta)$$
>
> I signify that y belongs to the f-sequence beginning with x. According to the more general conception of function that I took as a basis, we can regard
>
> $$u + 1 = v$$
>
> as a function of u and v and can therefore view it as a particular case of $f(u, v)$. Accordingly
>
> $$\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} (0_\gamma + 1 = a_\beta)$$
>
> means that a belongs to the sequence which begins with 0 and arises from a constant increase by 1[.]" [Frege, 1879b, pp. 204-205]

Es patente que el esquema de aplicación de la conceptografía en *Begriffsschrift* es capturado literalmente por Frege: como hemos comentado en el apartado 1.3.1, el autor menciona explícitamente que recurre a la noción de función desarrollada en 1879, y que es más general que la propia de la aritmética. Así pues, las letras de la conceptografía ejercen roles que son transmitidos a sus instancias, y si los símbolos de estas instancias pertenecen al lenguaje de una disciplina, como es el caso, aportan la interpretación correspondiente.

Además de ser una muestra inequívoca de aplicación literal del planteamiento de *Begriffsschrift*, este texto es relevante porque pone de manifiesto el esfuerzo de Frege por mostrar fehacientemente que las fórmulas de su conceptografía pueden, adoptando los símbolos adecuados, expresar un significado concreto, y que pueden hacerlo de un modo natural y riguroso. Así lo atestigua el segundo caso de aplicación de la conceptografía a aritmética del artículo. Respecto a la expresión siguiente[154]:



Frege afirma:

> "[This proposition] says that a is divisible by none of the numbers
>
> $$2, 3, 4, \ldots$$
>
> except by itself. If we add further that a is a positive whole number then we obtain in
>
> 
>
>
> the designation of the circumstance that a is a *prime number*[155]."
> [Frege, 1879b, pp. 205-206]

[154]Cada una de las subfórmulas de esta fórmula expresan, respectivamente y en orden descendente, los hechos siguientes:

1. $\frac{\gamma}{\beta}(0_\gamma + \mathfrak{d} = a_\beta)$: a es múltiplo de $\mathfrak{d}$,
2. $\frac{\gamma}{\beta}(2_\gamma + 1 = \mathfrak{d}_\beta)$: $\mathfrak{d}$ es igual o mayor que 2,
3. $(\mathfrak{d} \equiv a)$: $\mathfrak{d}$ es igual a a.

[155]Es relevante mencionar que, en 1879, la lógica booleana no disponía de las herramientas necesarias para expresar la propiedad de ser un número primo.

Partiendo del análisis reflejado en la cita anterior, Frege traduce el contenido aritmético al simbolismo de la conceptografía. Dado que éste es un contexto logístico, tal y como hemos planteado en el apartado 3.3.3, la aritmética permite interpretar semánticamente los cuantificadores. Eso no conlleva, en cualquier caso, ningún cambio en el cálculo; simplemente, la generalidad que expresan las letras cuantificadas está restringida por el particular dominio de la aritmética.

Por el momento, el autor no trata de reconstruir una demostración aritmética en el cálculo de la conceptografía, como sí hará más adelante, tal y como hemos expuesto en el apartado 3.3.4. En este contexto, se trata simplemente de mostrar que el simbolismo aparentemente abstracto de la conceptografía está ideado para complementarse con los símbolos propios del lenguaje de disciplinas científicas, y expresar las relaciones lógicas que guardan las fórmulas resultantes de un modo más riguroso que mediante el lenguaje natural.

5.2.2 Trienio 1880-1883

La recepción de *Begriffsschrift* por parte de la comunidad académica fue extraordinariamente fría. Se publicaron al menos seis reseñas de este texto, la mayoría de las cuales, simplemente, manifiesta falta de comprensión de los aspectos fundamentales de la conceptografía de 1879 y de su exposición[156]. Especialmente significativa es la larga reseña elaborada por Schröder [Schröder, 1880], donde se minimiza la originalidad del trabajo de Frege y se ponen en duda sus ventajas respecto a la lógica booleana. La aparición de estas reseñas provocó un cambio de actitud en Frege: el autor constató que *Begriffsschrift* no había sido recibido y comprendido del modo esperado, y que sería necesario tratar de justificar su valor. Estas circunstancias constituyeron uno de los factores que llevaron a Frege a considerar la necesidad de desarrollar y refinar algunos aspectos clave de su lógica. El proceso de renovación de la conceptografía y de todos los elementos filosóficos que la sustentan fue unitario, aunque vino motivado por distintos elementos.

La conceptografía de *Begriffsschrift* fue profundamente revisada en los dos volúmenes de *Grundgesetze*, de modo que, desde un punto de vista formal, estos dos textos son los referentes de dos estadios distintos en el desarrollo de la lógica por parte de Frege. Así pues, este desarrollo puede disociarse, al menos, en dos etapas. La etapa propia de *Begriffsschrift* termina con la

[156]Todas estas reseñas han sido recopiladas y traducidas al inglés por T. W. Bynum en *Conceptual Notation and Related Articles* [Frege, 1972, pp. 209-235].

publicación de 'Anwendungen der Begriffsschrift' [Frege, 1879b], y pasan catorce años hasta la publicación del primer volumen de *Grundgesetze*. Y, así como *Begriffsschrift* prácticamente inaugura y concluye la primera etapa, puede considerarse que con *Grundlagen* da comienzo la segunda etapa, al menos por lo que respecta a su tratamiento filosófico. El establecimiento de la lógica de *Grundgesetze* fue, por tanto, progresivo y tuvo un intenso trabajo filosófico previo.

Es posible establecer una secuencia cronológica entre los textos en los que se aprecian los pasos mediante los cuales Frege cambia de perspectiva, tras la publicación de *Begriffsschrift*, con respecto a los elementos fundamentales de su lógica. Estos textos, en su mayoría, son artículos elaborados por Frege para tratar de explicar y profundizar en las capacidades expresivas y las ventajas formales de su conceptografía de 1879. Precisamente por ello, hemos recurrido a estos trabajos en distintos contextos de discusión en los capítulos precedentes. Al ser artículos de clarificación de *Begriffsschrift*, permiten ofrecer una explicación más completa a algunos elementos de la obra de 1879. Sin embargo, hay otros elementos en estos artículos que se desmarcan de lo establecido en 1879. En consecuencia, no deben ser considerados como parte de la segunda etapa de Frege, sino más bien como exponentes de un periodo de transición:

1. 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880].
2. 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b].
3. 'Booles logische formelsprache und meine Begriffsschrift' [Frege, 1882c].
4. Carta de Frege a A. Marty de 29/8/1882 [Frege, 1976, pp. 99-102].
5. 'Logik' [Frege, 1882e][157].

Además de estos artículos, hay en este período entre etapas otros trabajos que no son significativos en el contexto estrictamente lógico, pero que deben tenerse en cuenta. Consisten en exposiciones de carácter filosófico sobre aspectos que no están directamente vinculados con las características formales de la conceptografía:

1. 'Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift' [Frege, 1882a].

[157]La secuencia cronológica de estos textos se basa en el catálogo cronológico de E. Zalta [Zalta, 2015a] y la fecha de envío de la carta de 1882. A partir de nuestros comentarios acerca de la posible datación de 'Logik' [Frege, 1882e] en la nota 11, incluimos este texto en el listado de los trabajos de Frege entre 1880-1883.

2. '17 Kernsätze zur Logik' [Frege, 1882d].

3. 'Dialog mit Pünjer über Existenz' [Frege, 1883][158].

La mayor parte de los textos listados no fueron publicados por Frege. De hecho, el autor intentó que dos de los mayores exponentes de este período de transición, como son 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880] y 'Booles logische formelsprache und meine Begriffsschrift' [Frege, 1882c], fuesen publicados, pero fueron rechazados en distintas ocasiones por los correspondientes editores[159].

En conjunto, todas estas obras suponen un cambio de concepción por parte de Frege respecto a lo expuesto en *Begriffsschrift*. Y, sin embargo, este cambio tiene lugar bajo un escenario común, el sistema formal desarrollado en 1879. Las divergencias se producen, por tanto, en la interpretación del simbolismo y en la idea de lógica que lo sustenta.

[158]La fecha de redacción del no publicado 'Dialog mit Pünjer über Existenz' [Frege, 1883] no es definitiva: E. Zalta la situa en 1883 [Zalta, 2015a] y H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach antes de 1884 [Frege, 1969, p. 60, nota 1].

Por otro lado, la fecha de redacción del no publicado '17 Kernsätze zur Logik' [Frege, 1882d] es muy controvertida. Hermes, Kambartel y Kaulbach proponen 1906, aunque admiten razones para situarla mucho antes [Frege, 1969, p. 189, nota 1]. El principal defensor de una datación temprana de este texto es M. Dummett, que propone en 'Frege's "Kernsätze zur Logik" ' [Dummett, 1981b, p. 77] datarla antes de la publicación de *Begriffsschrift*. Sin embargo, H. Sluga propone en 'Frege: the early years' [Sluga, 1984, p. 348, nota 8] datarla en una fecha posterior a 1879 y F. Hovens, en 'Lotze and Frege: The Dating of the 'Kernsätze" [Hovens, 1997], discute las razones de Dummett y argumenta que debe datarse alrededor de 1882. Zalta la establece en 1882 [Zalta, 2015a]. En '17 Kernsätze zur Logik' [Frege, 1882b], Frege distingue claramente entre verdad y el reconocimiento de verdad:

> "'2 times 2 is 4' is true and will continue to be so even if, as a result of Darwinian evolution, human beings were to come to assert that 2 times 2 is 5. Every truth is eternal and independent of being thought by anyone and of the psychological make-up of anyone thinking it." [Frege, 1882d, p. 174]

Este planteamiento conecta directamente este breve texto con 'Logik' [Frege, 1882e]. Además, el contenido de las oraciones (12)-(17) se corresponde perfectamente con la discusión presente en 'Logik' [Frege, 1882e] acerca de la lógica y de sus leyes, que consideraremos en el apartado siguiente. Por estas razones, la elaboración de estos textos debe ser muy próxima. En la nota 11 hemos propuesto una fecha de redacción para 'Logik' [Frege, 1882e] cercana o posterior a 1882. Esta propuesta debería ser también válida para '17 Kernsätze zur Logik' [Frege, 1882d].

[159]Véase el comentario al respecto por parte de H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach en *Nachgelassene Schriften* [Frege, 1969, p. 9, nota 1; p. 53, nota 1].

5.3 Naturaleza de las leyes lógicas

En el apartado 1.2.3 hemos mencionado que, en el artículo no publicado 'Logik' [Frege, 1882e], Frege distingue entre verdad y reconocimiento de verdad. Este texto sienta las bases del tratamiento de la naturaleza y la justificación de las leyes lógicas presente en *Grundgesetze*.

Dedicaremos esta sección a considerar, en primer lugar, la distinción entre verdad y reconocimiento de verdad que Frege plantea, por primera vez, en 'Logik' [Frege, 1882e], y, en segundo lugar, la caracterización que hace el autor en este texto de la naturaleza y de las posibilidades de una justificación de carácter lógico de las leyes de la lógica.

5.3.1 Verdad, reconocimiento de verdad y justificación

En *Begriffsschrift*, la formación de un juicio consiste en el reconocimiento de la verdad de un contenido aseverable. La verdad o falsedad de este contenido es indistinguible de su aseveración. Por contra, en 'Logik' [Frege, 1882e] Frege plantea que la verdad de una proposición y su reconocimiento como verdadera por parte de un sujeto son circunstancias independientes:

> "What is true is true independently of our recognizing it as such. We can make mistakes. The grounds on which we make a judgement may justify our recognizing it as true; they may, however, merely give rise to our making a judgement, or make up our minds for us, without containing a justification of our judgement. Although each judgement we make is causally conditioned, it is nevertheless not the case that all these causes are grounds that afford a justification." [Frege, 1882e, p. 2]

En esencia, Frege distingue entre un hecho objetivo, ser verdadero, y un hecho subjetivo, el reconocimiento como verdad. Todo juicio se forma en el acto de reconocimiento, por parte de un sujeto, de que aquello que el juicio expresa es verdadero. Naturalmente, hay múltiples causas para realizar un juicio, y sólo algunas de ellas justifican el reconocimiento de la verdad de su contenido. En un intento por eliminar todo rastro de psicología de su planteamiento, Frege distingue entre causas que simplemente explican el acto de formación del juicio y razones que justifican el reconocimiento de una proposición como verdadera.

La separación entre distintas causas que sustentan la formulación de un juicio responde a la distinción entre descubrimiento y justificación. El proceso mental subjetivo que conduce a la aceptación de la verdad de una proposición, y que puede sistematizarse mediante leyes psicológicas, constituye su descubrimiento. El acto de descubrimiento, por lo tanto, no depende del contenido de una proposición: simplemente consiste en el acto mental de aprehensión de una proposición por parte de un sujeto. La justificación, sin embargo, está desvinculada de todo proceso psicológico[160].

Ahora bien, tal y como Frege avanza en el Prefacio de *Begriffsschrift*, hay distintos modos de establecer la validez de una proposición [Frege, 1879a, p. 103]. En 'Logik' [Frege, 1882e], únicamente proporciona detalles acerca de la justificación lógica: la justificación de una proposición por medio de su reducción formal a otras proposiciones verdaderas, esto es, la deducción de una proposición a partir de verdades ya establecidas. Así, una justificación lógica consiste en una inferencia. Frege no detalla otros modos de justificación, porque no son relevantes para la lógica; de su estudio se encarga la epistemología:

> "Now the grounds which justify the recognition of a truth often reside in other truths which have already been recognized. But if there are any truths recognized by us at all, this cannot be the only form that justification takes. There must be judgements whose justification rests on something else, if they stand in need of justification at all.
>
> And this is where epistemology comes in. Logic is concerned only with those grounds of judgement which are truths. To make a judgement because we are cognissant of other truths as providing a justification for it is known as inferring. There are laws governing this kind of

[160] G. Gabriel indica en 'Frege, Lotze and the Continental Roots of Early Analytic Philosophy' [Gabriel, 2002, pp. 162-170] y en 'Frege and the German Background to Analytic Philosophy' [Gabriel, 2013, pp. 285-289] que la mención por parte de Frege de la distinción entre descubrimiento y justificación es una muestra de la influencia que recibió de las obras de R. H. Lotze (1817-1881) y W. Windelband. En efecto, en el planteamiento neo-kantiano de Lotze y Windelband puede hallarse la distinción entre la génesis de un juicio (*Genese*), que constituye el contexto de su descubrimiento, y su validez (*Geltung*), que determina un contexto de justificación. Véase *Logik* [Lotze, 1874, pp. 7-8] y 'Was ist Philosophie?' [Windelband, 1882, pp. 24-25]. En *Grundlagen*, la influencia de ambos autores en el planteamiento de Frege es aún más clara:

> 'It not uncommonly happens that we first discover the content of a proposition, and only later give the rigorous proof of it, on other and more difficult lines; and often this same proof also reveals more precisely the conditions restricting the validity of the original proposition. In general, therefore, the question of how we arrive at the content of a judgement should be kept distinct from the other question, Whence do we derive the justification for its assertion?." [Frege, 1884, §3, p. 3]

> justification, and to set up these laws of valid inference is the goal of logic." [Frege, 1882e, p. 3]

El objetivo de la lógica consiste en determinar las leyes que constituyen su propio modo de justificación, esto es, las leyes de una inferencia válida. Estas leyes, por lo tanto, deben permitir deducir una proposición verdadera a partir de otras verdades. En *Grundlagen*, Frege desarrolla la separación entre modos de justificación al caracterizar una demostración (*Beweis*) como el modo de justificación propio de la lógica. Una demostración en lógica cumple dos cometidos: en primer lugar, establecer la validez de una proposición, esto es, mostrar que aquello que expresa se deriva de modo absolutamente seguro de otras verdades más fundamentales; y, en segundo lugar, hacer explícitas las relaciones deductivas que guardan las distintas proposiciones. En palabras de Frege:

> "The aim of proof is, in fact, not merely to place the truth of a proposition beyond all doubt, but also to afford us insight into the dependence of truths upon one another. After we have convinced ourselves that a boulder is immovable, by trying unsuccessfully to move it, there remains the further question, what is it that supports it so securely? The further we pursue these enquiries, the fewer become the primitive truths to which we reduce everything; and this simplification is in itself a goal worth pursuing." [Frege, 1884, §2, p. 2]

La necesidad de mostrar el orden de dependencia formal de cierto conjunto de proposiciones es fundamental y una constante metodológica en las obras de Frege. En último término, una sucesión de demostraciones realizadas de acuerdo con las herramientas de un sistema formal posibilita localizar las leyes básicas o axiomas de una disciplina formalizada, esto es, las proposiciones de las que depende la demostración de cualquier otra proposición de esta disciplina.

5.3.2 Justificación de las leyes de la lógica

Hemos considerado el tratamiento que Frege ofrece de lo que en *Begriffsschrift* denomina 'leyes del pensamiento puro': aquellas leyes que forman el bloque lógico común al conjunto conocimiento científico, esto es, al conocimiento propio de las distintas disciplinas científicas. Sin embargo, en textos posteriores a 1879, como veremos a continuación, Frege aclara cuidadosamente tanto las diferencias entre las leyes del pensamiento y las leyes de la lógica como el modo en el que pueden entenderse en un mismo sentido.

De hecho, tras presentar los aspectos que distinguen el modo de justificación de la lógica, Frege caracteriza en 'Logik' [Frege, 1882e] las leyes de la lógica en contraposición con las leyes del pensamiento. En una primera aproximación, podemos afirmar que las leyes de la lógica son las verdades de esta disciplina, que establecen reglas de razonamiento correcto. Las proposiciones de la conceptografía dan expresión a estas leyes.

En este contexto, para aclarar la naturaleza de las leyes de la lógica, es relevante apelar a la distinción entre verdad y reconocimiento de verdad. En primer lugar, las leyes de la lógica no pueden entenderse como leyes del pensamiento en la medida en que estas últimas son leyes que describen el proceso mediante el cual se reconoce una proposición como verdadera. Éste es un proceso que, en tanto que subjetivamente condicionado, puede ser correcto o incorrecto (y, en opinión de Frege, las leyes de la lógica no pueden regular un proceso que no conduce a la verdad). En segundo lugar, el autor destaca que las leyes de la lógica no son leyes del pensamiento en tanto que leyes psicológicas: las leyes de la lógica no describen las causas psicológicas que llevan a un sujeto a reconocer una proposición como verdadera. Todo lo contrario, estas leyes establecen los criterios de una inferencia válida y, por lo tanto, son un medio para la justificación de la verdad de una proposición, y no meramente de su reconocimiento por parte de un sujeto.

La caracterización por parte de Frege de las leyes de la lógica se extiende a la naturaleza de su justificación. El punto de partida es la verdad de estas leyes. Toda inferencia correcta hace uso de alguna ley lógica. Ahora bien, como es natural, afirmar que las leyes lógicas son un componente necesario de toda inferencia correcta no constituye una demostración de su verdad. Tal y como hemos planteado, el modo de justificación propio de la lógica es la demostración, esto es, la derivación de una proposición por medio de otras verdades. Para algunas leyes de la lógica, es posible proporcionar una demostración y reducir, así, su verdad a otras leyes más fundamentales. Sin embargo, no siempre es posible proporcionar una demostración tal:

> "The laws of logic are themselves truths and here again there raises the question how a judgement is justified. If it is not justified in terms of other truths, then logic doesn't need to bother itself with it any further. If, on the other hand, a law of logic can be reduced to other laws by a process of inference, then it is evidently the task of logic to carry out this reduction; for it is only by doing this that we can reach a vantage point from which we can take a conspectus of the laws of logic, and not count as many a law that is one and the same." [Frege, 1882e, p. 6]

Hay leyes lógicas, las leyes básicas, que no pueden justificarse por medio de una derivación que recurra a otras leyes lógicas. No se excluye con ello algún tipo de justificación para las leyes básicas; Frege simplemente señala que ésta no es propiamente una demostración y que, por lo tanto, no concierne a la lógica. Una justificación tal de una ley básica, sin embargo, puede resultar útil para el reconocimiento de su verdad[161]. Como veremos en el apartado 6.2, este planteamiento avanza la posición desarrollada por Frege en *Grundgesetze* acerca de la justificación de las leyes de la lógica.

5.4 Tesis logicista

La tesis logicista, según la cual la aritmética se reduce a lógica, no está propiamente presente en *Begriffsschrift*. Como se ha discutido en los apartados 3.2.1 y 3.3.5, el proyecto logicista aparece en el texto de 1879 únicamente como tentativa parcial. Ciertamente, los objetivos de Frege en esta obra tienen un trasfondo logicista, pero el autor no llega a formular la tesis ni cuenta con su despliegue.

A diferencia de la posición de Frege en *Begriffsschrift*, un elemento fundamental y vertebrador de la concepción de la lógica presente en los textos de madurez del autor es la defensa del logicismo. En 1884 Frege ya anuncia la tesis como principio programático de *Grundlagen*. La culminación truncada de este proyecto de fundamentación tiene lugar en *Grundgesetze*, donde se pretende, a partir de un conjunto de leyes básicas, de reglas de inferencia y definiciones, obtener el concepto de número y deducir cualquier teorema aritmético.

Es en el tránsito entre *Begriffsschrift* y *Grundlagen* donde se produce la asunción manifiesta por parte de Frege del proyecto logicista. Ciertamente, la primera afirmación explícita por parte del autor de la tesis logicista tiene lugar en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880]:

> "[L]ogic, whose concern is correct thinking and which is also the foundation of arithmetic." [Frege, 1880, p. 12]

[161]La posición de Frege acerca de la imposibilidad de una justificación lógica de las leyes básicas de la lógica está influenciada, tal y como menciona G. Gabriel en 'Frege and the German Background to Analytic Philosophy' [Gabriel, 2013, pp. 288-289], por H. Lotze y W. Windelband. En 'Kritische oder genetische Methode?' [Windelband, 1883, p. 109], Windelband plantea que la validez de las leyes básicas de la lógica, esto es, de sus axiomas, no puede ser justificada con una necesidad de naturaleza lógica. De su validez se desprende, sin embargo, una necesidad teleológica, puesto que estas leyes deben ser observadas en todo razonamiento que tenga la pretensión de ser válido y, por lo tanto, de su validez se extrae su normatividad.

Más adelante, en la carta de Frege a Marty del 29 de agosto de 1882, Frege anuncia tener prácticamente terminado un tratado en el que se demuestra que los primeros principios de la aritmética poseen un fundamento lógico. Este tratado se convertiría más adelante en *Grundlagen*, aunque es muy posible que el autor únicamente hubiese trabajado en su aparato lógico[162]. Por lo tanto, en 1882 Frege está en disposición de anunciar las tesis generales de las obras más representativas de su segunda etapa, que no son otros que la afirmación del carácter analítico de los primeros principios de la aritmética:

> "I have now nearly completed a book in which I treat the concept of number and demonstrate that the first principles of computation which up to now have generally been regarded as unprovable axioms can be proved from definitions by means of logical laws alone, so that they may have been regarded as analytic judgements in Kant's sense." [Frege, 1976, pp. 99-100]

El hecho de que Frege no ofrezca una formulación equivalente en *Begriffsschrift* es un indicativo inequívoco de que los cambios que ponen de manifiesto sus escritos a partir de 1880 son, en contra de lo que puede parecer, significativos y con profundas consecuencias para su desarrollo lógico.

Sin embargo, hay un elemento fundamental en el tránsito de la asunción de la tesis logicista en 1880 y 1882 a su pleno despliegue en *Grundgesetze*: el tratamiento de la cuantificación en los casos de aplicación de la conceptografía a aritmética. Tal y como se ha planteado la cuestión en el apartado 3.3.5, en este proceso la conceptografía pasa de ser genuinamente logística a ser el vehículo para el desarrollo del logicismo de Frege.

De acuerdo con el modo como el autor concibe la complementación de conceptografía y aritmética en todos los artículos que acompañan la publicación de *Begriffsschrift*, el contenido de cualquier proposición aritmética

[162] Así lo afirman B. McGuinness y H. Kaal en su traducción inglesa a esta carta [Frege, 1976, p. 100, nota 1], siguiendo un comentario de G. Gabriel en la edición alemana [Frege, 1976, p. 162]. Ciertamente, la sugerencia de exponer la tesis de Frege de modo filosófico proviene de la respuesta de C. Stumpf a la carta del 29/8/1882, que aparentemente el autor siguió:

> "With regard to your work, to which I am looking forward with extraordinary interest, please do not take it amiss if I ask you whether it would not be appropriate to explain your line of thought first in ordinary language and then – perhaps separately on another occasion in the very same book – in conceptual notation: I should think that this would make for a more favourable reception of *both* accounts." [Frege, 1976, p. 172]

que contenga letras se considera relativo a un dominio que fija la aritmética. Los cuantificadores se leen semánticamente, aunque su tratamiento en la conceptografía es puramente sintáctico. El único cambio genuino que afecta a la cuantificación es la presencia de limitaciones de tipo semántico en la generalidad que expresan las letras cuantificadas. De este modo, las proposiciones cuantificadas de un sistema de logística pueden, por un lado, leerse de un modo natural y, por el otro, manejarse en el cálculo tal y como está previsto en la conceptografía. Así se ha expuesto extensamente en los apartados 3.3.3 y 3.3.4. De acuerdo con ello, Frege puede presentar en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880] dos teoremas aritméticos, que contienen letras, simplemente como verdaderos, como premisas que cumplen el conjunto de números naturales pertinente en este contexto:

> "The numbers whose multiples are to be considered are subject to no conditions other than the following addition theorems:
>
> $$\vdash\!\!\!\longrightarrow \quad (n+b)+a = n+(b+a)$$
> $$\vdash\!\!\!\longrightarrow \quad n = n+0$$
>
> hold for them." [Frege, 1880, pp. 27-28]

En general, se considera que las letras 'n', 'b' y 'a' en estos dos teoremas están cuantificadas implícitamente y que refieren a números naturales cualesquiera. En este caso, la aritmética determina la generalidad que estas letras expresan. En la conceptografía, las letras latinas también están sujetas a una cuantificación implícita, pero no están semánticamente interpretadas, como sucede en un contexto logístico como el del ejemplo.

Por lo tanto, estos dos teoremas aritméticos no son leyes lógicas. Al fin y al cabo, la suma está definida únicamente para el dominio numérico, y no para cualquier objeto. En *Begriffsschrift*, Frege no se plantea una exigencia tal, puesto que no contempla la necesidad de presentar todo teorema aritmético como una verdad lógica. Ahora bien, en el momento en el que Frege asume plenamente la tesis logicista, esta circunstancia se torna fundamental.

La cuantificación de *Begriffsschrift* afecta únicamente a argumentos y, por tanto, a componentes de expresiones. Así pues, se cuantifica sobre el componente que, en un contexto determinado, se toma como reemplazable. De este modo, es innecesario proporcionar una interpretación semántica para los cuantificadores. Dado que en *Begriffsschrift* Frege sólo pretende mostrar que algunos teoremas aritméticos son de naturaleza lógica, este tratamiento de la cuantificación no es problemático. Ahora bien, el pleno despliegue de la tesis logicista exige probar que todo teorema aritmético es una verdad lógica. Y la perspectiva logística que mantiene Frege tras la elaboración de *Begriffsschrift*, como muestra el ejemplo anterior, choca con esta exigencia. Desde el punto de vista del autor, sin una definición lógica de la noción de número y de las operaciones aritméticas, no pueden tratarse expresiones como la siguiente:

$$\vdash\!\!\!-\!\!\!- \; n = n + 0$$

como verdades lógicas. Por consiguiente, es preciso dotar a la conceptografía, entre otros elementos, de una semántica que permita representar en este sistema formal la distinción ontológica básica sobre la que reposa la definición fregeana de número: la distinción entre concepto y objeto. Se trata de proporcionar una semántica para los símbolos del lenguaje, de forma que éstos tengan una interpretación fija y única.

Es bien significativo que, ya en 1880-1881, pueda dilucidarse la problemática a la que se enfrenta Frege en el despliegue de su tesis logicista, y en el encaje de ésta con la conceptografía de 1879. Justamente, este difícil encaje sienta el precedente básico para que el autor se plantee una revisión profunda de su primera versión de la conceptografía; revisión que concluirá con la conceptografía de *Grundgesetze*.

5.5 Adopción del esquema objeto-concepto

5.5.1 Introducción

Antes de centrarse propiamente en la conceptografía para poder desplegar el proyecto logicista anunciado en 1880 y 1882, Frege adoptó una perspectiva filosófica desde la cual dar sustento a su desarrollo lógico. Probablemente influenciado por la escasa aceptación de *Begriffsschrift*, pero sin duda motivado por el avance de su propio proyecto, especialmente dadas las dificultades a las que había que hacer frente partiendo de la posición defendida en *Begriffsschrift*, Frege dejó de utilizar, ya en 1880-1881, uno de los elementos esenciales de la conceptografía de 1879: la distinción entre función y argumento. Esta distinción, que no afecta más que a expresiones, fue substituida por la distinción entre concepto y objeto, de naturaleza semántica.

Como veremos, el paso de Frege no consiste en extender la aplicación del esquema función-argumento al plano semántico, ya que la perspectiva que adopta a partir de 1880-1881 es completamente distinta a la propia de 1879. Ciertamente, el autor jamás abandonará la terminología 'función-argumento', pero su uso será muy distinto. Dicho en otras palabras, a partir de 1880-1881 la distinción entre función y argumento, en tanto que recurso lingüístico aplicado a las expresiones de la conceptografía, deja de usarse en los trabajos de Frege. Sin embargo, la terminología 'función' y 'argumento' sigue presente, aunque aplicada de formas distintas, en las obras del autor. Al fin y al cabo, la única vinculación con la distinción propia de *Begriffsschrift* es su carácter analógico con el esquema aritmético; de hecho, Frege aprovechará esta similitud para clarificar su posición.

Esta sección se dedicará a dar cuenta del proceso que siguió Frege para abandonar la distinción entre función y argumento y adoptar la distinción entre concepto y objeto. Se localizarán sus motivos para superar el esquema vigente en *Begriffsschrift*, se expondrán las características del nuevo esquema y, finalmente, se valorarán las ventajas del nuevo análisis respecto al anterior.

5.5.2 Abandono de la distinción función-argumento

Desde una perspectiva preliminar, es realmente sorprendente que Frege no haga absolutamente ninguna mención del análisis en términos de función-argumento tras la publicación del breve artículo 'Anwendungen der Begriffsschrift' [Frege, 1879b]. De hecho, el autor no hace explícitas las razones que le llevan a adoptar tal decisión.

En la sección anterior se ha observado, sin embargo, que la conceptografía de *Begriffsschrift* presenta algunas dificultades con el pleno despliegue del proyecto logicista de Frege. Ciertamente, el ámbito de aplicación del esquema función-argumento, esquema que proporciona el único modo de articular expresiones de la conceptografía, juega un papel esencial en la aparición de estas dificultades.

No obstante, bajo esta explicación general subyacen otras circunstancias particulares. Tras la publicación de *Begriffsschrift*, Frege tuvo que enfrentarse, por un lado, a una preocupantemente pobre recepción de su trabajo y, por el otro, y este es un aspecto que no ha sido mencionado por los estudios históricos, a la incapacidad del esquema función-argumento de capturar la estructura esencial de los enunciados atómicos.

Necesidad de explicar la conceptografía

En realidad, la mayoría de los artículos elaborados por Frege entre 1880 y 1882 consisten, de un modo o de otro, en intentos de explicar y hacer accesibles los elementos esenciales de la conceptografía, así como de hacer patentes su originalidad y sus capacidades. El autor manifiesta repetidamente, a raíz de la publicación de reseñas a *Begriffsschrift*, la profunda incomprensión que había sufrido su trabajo[163]. Así se expresa en 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b]:

> "I had the honour once before to give a paper here [*Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*] about my "conceptual-notation" ['Anwendungen der Begriffsschrift' [Frege, 1879b]]. What induces me to return to it again is the observation that its aim has frequently been misunderstood. This I gather from several reviews of my book which have appeared since. Distorted judgements must have resulted from these reviews." [Frege, 1882b, p. 90]

Uno de los elementos clave en esta incomprensión es la aparente falta de reconocimiento de la importancia de la distinción entre función y argumento en la conceptografía. El análisis tradicional de expresiones lingüísticas se llevaba a cabo en términos de sujeto y predicado, mientras que la terminología 'función' y 'argumento' tenía una demarcación, hasta el momento, exclusivamente matemática. Y, ciertamente, si el esquema fregeano función-argumento aparece en las reseñas, es habitualmente en un listado de los elementos de la exposición de la conceptografía, y con frecuencia no es tratado con propiedad. Algunos de los autores que elaboraron reseñas de *Begriffsschrift* simplemente ponen de manifiesto no haber comprendido ni la importancia del esquema lingüístico básico de la conceptografía ni su papel en las demostraciones[164]. Por ejemplo, de acuerdo con el punto de vista de P. Tannery:

> "The [author] abolishes the concepts of *subject* and *predicate* and replaces them by others which he calls function and argument. Thus, 'the circumstance that carbon-dioxide is heavier than hydrogen' and 'the circumstance that carbon-dioxide is heavier than oxygen' can be considered indifferently either as the same function with different arguments (hydrogen, oxygen) or as different functions with the same argument (carbon-dioxide). We cannot deny that this conception does not seem to be very fruitful." [Tannery, 1879, p. 233].

Tras este comentario general, Tannery expone los cuatro tipos tradicionales de juicios categóricos junto a su equivalente en la conceptografía, sin

[163] En 'Frege Against the Booleans' [Sluga, 1987, pp. 80-82], H. Sluga ofrece una explicación alternativa de cómo la particular recepción de *Begriffsschrift* motivó la iniciativa de Frege de dedicar gran parte de los artículos elaborados entre 1880 y 1882 a la explicación de la naturaleza y las posibles aplicaciones de la conceptografía.

[164] A excepción de C. Th. Michaëlis. Respecto a su tratamiento de la distinción entre función y argumento en *Begriffsschrift*, véase la nota 31.

apreciar cómo este sistema formal posibilita un análisis más adecuado que el tradicional.

En su reseña, Schröder ofrece un tratamiento más profundo del esquema función-argumento, aunque no reconoce las ventajas del análisis lógico que este esquema permite. Por una parte, afirma que "[t]he explanation which the author gives for the concept of (logical) "function" is very broad and entirely original. It is much broader than all previous explanations and to me seems to be not without justification" [Schröder, 1880, p. 224]. Y, por otra parte, compara la conceptografía con la lógica booleana en los siguientes términos:

> "Now Frege's "conceptual notation" actually has almost nothing in common with that portion of the logical calculus just characterized; that is, with the Boolean calculus of concepts; but it certainly does have something in common with the second part, the Boolean calculus of judgements." [Schröder, 1880, p. 224]

Aunque Schröder destaca la originalidad y la generalidad de la noción fregeana de función, le niega, a pesar de todo, cualquier vínculo con la lógica de las proposiciones primarias (al negarlo a la conceptografía en conjunto)[165]. No obstante, el uso de la distinción entre función y argumento es especialmente fructífero en la lógica de las proposiciones primarias: por un lado, permite analizar los enunciados categóricos cuantificados como enunciados complejos y, por el otro, proporciona un análisis adecuado de los enunciados existenciales, análisis que, como hemos comentado en el apartado 3.4.3 no es posible reproducir en la lógica booleana.

Es realmente significativo que Frege responda a la reseña de Schröder en tres artículos, 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880], 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b] y 'Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift' [Frege, 1882c], y que en ninguno de ellos critique o corrija la interpretación que Schröder hace de la distinción entre función y argumento. Como ya hemos explicado, en los artículos mencionados Frege defiende su conceptografía frente al planteamiento de los lógicos algebristas, y es claro que uno de los elementos que deberían destacar de su argumentación es la distinción entre función y argumento. Sin

[165]Boole plantea la distinción entre proposiciones primarias y secundarias en *An Investigation of the Laws of Thought* [Boole, 1854, p. 53; p. 160]. Las proposiciones primarias expresan relaciones entre clases y las proposiciones secundarias expresan relaciones entre proposiciones. Esencialmente, la lógica de las proposiciones primarias es la lógica de clases, y la de las proposiciones secundarias es la lógica de enunciados. Hemos ofrecido una breve exposición general de estas lógicas en el apartado 3.4.3.

embargo, aunque Frege critica con gran detalle las imprecisiones de la lógica booleana y destaca las ventajas técnicas de su sistema formal, no menciona en ninguna ocasión la distinción entre función y argumento.

Estructura de los juicios atómicos

Las particularidades de la cuantificación de la conceptografía de 1879 y el hecho de que Frege no vea la necesidad de dotar de una semántica a este sistema formal van aparejadas, como se ha discutido detalladamente en el apartado 1.4.2. En ausencia de un plano semántico y sin un conjunto de símbolos propios, las expresiones de la conceptografía no reflejan ninguna estructuración ontológica. La distinción entre función y argumento es la única disponible, y se aplica exclusivamente a expresiones.

Sin embargo, cuando la conceptografía es la base para un sistema de logística, y adquiere las reglas sintácticas y los símbolos propios del lenguaje reglado de una disciplina científica, puede ser empleada como herramienta para expresar, recurriendo a las fórmulas atómicas de la disciplina, relaciones básicas entre objetos y conceptos. Esta posibilidad se debe únicamente al hecho de que la disciplina a la que se aplica la conceptografía permite asignar una interpretación fija a sus símbolos propios y a las letras. En conjunto, la disciplina fija el significado de los símbolos de su lenguaje y el ámbito de aplicación de estos símbolos, esto es, establece un universo. El lenguaje de la disciplina también incluye constantes individuales y símbolos de predicado, que se asocian a una estructura ontológica según la cual los objetos y las propiedades pertenecen a categorías distintas. Como tal, en cuanto sistema formal, la conceptografía es completamente neutra respecto a esta estructuración.

Sin embargo, Frege manifiesta un creciente interés en que su sistema formal permita expresar relaciones ontológicas básicas. En este sentido se expresa en su carta a Marty del 29 de agosto de 1882:

> "But I wanted to tell you something about my conceptual notation. You emphasize the division between the function of judgment and the matter judged. The distinction between individual and concept seems to me even more important. In language the two merge into each other. The proper name 'Sun' becomes a concept name when one speaks of suns and a concept name with a demonstrative serves to designate an individual." [Frege, 1976, p. 100]

En *Begriffsschrift*, la distinción entre concepto y objeto es considerada por Frege, pero no es propiamente transmitida por el simbolismo de la conceptografía pura. En cambio, en gran parte de los artículos elaborados tras la publicación de *Begriffsschrift*, el autor manifiesta la conveniencia de dar cuenta de este esquema. La culminación de esta perspectiva puede hallarse en el Prefacio de *Grundlagen*, donde Frege enumera los tres principios fundamentales vertebradores de la obra y, sin mayor justificación, establece el tercero de ellos como "never to lose sight of the distinction between concept and object" [Frege, 1884, p. x].

Justamente, como hemos tratado extensamente en el apartado 1.3.2, la distinción entre función y argumento no posibilita capturar unívocamente la distinción entre concepto y objeto. Dada su naturaleza, no tiene absolutamente ninguna aplicación sobre la denotación de las expresiones, ni mucho menos sobre la estructuración ontológica de esta denotación. Convencionalmente, como hace Frege en los comentarios elucidatorios de *Begriffsschrift*, puede asumirse una analogía entre los dos esquemas, pero esta analogía no es más que metodológica.

La limitación del análisis en términos de función y argumento es especialmente llamativa en los casos de expresiones atómicas. Ya hemos visto que no hay modo de capturar la atribución de una propiedad a un objeto mediante el esquema función-argumento. Una expresión atómica se descompone de tal manera que se toma un símbolo como componente reemplazable, el argumento, mientras que el resto de la expresión es el componente que permanece fijo, la función. En esta división no se toma en consideración que en la expresión haya un término y un símbolo de predicado, así como tampoco que el término denote un objeto y el símbolo de predicado una propiedad o concepto: cualquier símbolo puede ser el argumento. Pero si se pretende no sólo respetar la distinción entre concepto y objeto, sino también representarla en el lenguaje, entonces es esencial disponer de unas reglas sintácticas que permitan definir las fórmulas atómicas, porque éstas expresan la estructura ontológica básica: que un objeto caiga bajo un concepto. Un aspecto que muestra claramente la inadecuación del esquema función-argumento para capturar esta estructura básica es la intercambiabilidad en una expresión del componente funcional y el argumento. En '$f(a)$', 'f' puede ser tanto la función como el argumento, pero en una fórmula que expresa que un objeto cae bajo un concepto, como 'Pc', no es posible intercambiar 'P' y 'c' como símbolos de concepto y objeto, respectivamente.

Hay, por tanto, una evidente tensión entre la voluntad de Frege y la articulación del significado de las expresiones de la conceptografía de *Begriffsschrift*. A la luz de esta problemática, es comprensible que el autor, a partir de 1880, no haga uso en sus escritos de la distinción entre función y argumento.

5.5.3 Primacía de juicios sobre conceptos

La estructura tradicional sujeto-predicado presupone la existencia de objetos y conceptos, a partir de los cuales se generan juicios. Por ejemplo, a partir de los conceptos hombre y mortal, puede afirmarse que 'Todo hombre es mortal'. Bajo esta perspectiva, crear un juicio categórico cuantificado consiste en poner en relación dos conceptos, de tal manera que la relación entre ellos es un tercer elemento que se establece en el acto de juzgar. Kant, en la Analítica transcendental de *Kritik der reinen Vernunft* [Kant, 1781], problematiza esta perspectiva tradicional:

> "Nunca ha llegado a satisfacerme la explicación que dan los lógicos acerca del juicio en general. Según ellos, éste consiste en la representación de una relación entre dos conceptos. Sin entrar ahora en litigio con ellos sobre las deficiencias de tal explicación, que, en cualquier caso, sólo conviene a los juicios *categóricos*, pero no a los hipotéticos y disyuntivos (éstos, en cuanto tales juicios, no contienen una relación entre conceptos, sino incluso entre juicios), sólo señalaré que —prescindiendo de que este descuido de la lógica ha dado lugar a algunas incómodas consecuencias— no se indica en dicha explicación en qué consiste esa *relación*." [Kant, 1781, B140-141]

La división booleana de proposiciones primarias y secundarias resulta ser un modo análogo al kantiano de complementar el limitado alcance de la lógica aristotélica[166]. A pesar de ello, ni el planteamiento tradicional, ni Boole, ni Kant cuestionan el proceso de generación de un juicio categórico cuantificado, que consiste en la puesta en relación de dos conceptos dados.

Frege niega globalmente esta perspectiva y, en particular, pone en duda la primacía de los conceptos desde el mismo momento que introduce en su discusión el tratamiento de conceptos y objetos[167]. Así, inmediatamente

[166] Respecto a la naturaleza de las proposiciones primarias y secundarias de la lógica booleana, véase la nota 165.

[167] La posición de Frege en esta cuestión y, especialmente, su tratamiento de los juicios existenciales, puede explicarse en parte por la influencia que en él ejercen tanto H. Lotze como J. F. Herbart (1776-1841) en el período en el que Frege pertenece a la Universidad de Jena (1869-1918) y, especialmente, antes de la publicación de *Grundlagen* en 1884. Hay algunos tratamientos detallados sobre esta influencia: U. Dathe, en 'Frege in Jena' [Dathe, 2005], realiza un estudio histórico de los contactos intelectuales de Frege durante ese período; G. Gabriel, en 'Existenz- und Zahlaussage. Herbart und Frege' [Gabriel, 2001] y en 'Frege, Lotze and the Continental Roots of Early Analytic Philosophy' [Gabriel, 2002], reconstruye la influencia de Herbart y Lotze, respectivamente; D. Sullivan, en 'Frege on existential Propositions' [Sullivan, 1991], estudia el avance en el análisis de los juicios existenciales entre Kant, Herbart y Frege.

tras la publicación de *Begriffsschrift*, en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880], manifiesta su oposición a la postura aristotélica tradicional:

> "For in Aristotle, as in Boole, the logically primitive activity is the formation of concepts by abstraction, and judgement and inference enter in through an immediate or indirect comparison of concepts via their extensions." [Frege, 1880, p. 15]

Contra la posición tradicional y la de Boole, Frege defiende que el punto de partida son juicios, cuyos contenidos, que denomina 'contenidos aseverables', permiten, por medio de su descomposición, la formación de conceptos:

> "(...) I start out from judgements and their contents, and not from concepts (...). I only allow the formation of concepts to proceed from judgements." [Frege, 1880, p. 16]

Ya en el Prefacio de *Begriffsschrift* Frege menciona la primacía de los juicios sobre los conceptos [Frege, 1879a, p. 107]. Sin embargo, su posición queda propiamente explicada en la carta que dirige a A. Marty en 1882[168].

La tesis según la cual la formación de los conceptos procede de un juicio explica, como veremos a continuación, por qué de un mismo contenido aseverable pueden obtenerse distintos conceptos. No hay un modo de establecer la preeminencia de una forma de descomposición y, en consecuencia, de situar uno de los conceptos que se obtienen a partir de un contenido aseverable como el principal.

Esta perspectiva se mantiene a lo largo del proceso de preparación de los elementos básicos de *Grundlagen*. En particular, Frege fija algunos de los aspectos fundamentales de la noción de concepto. En 1882, en la carta a Marty de 29 de agosto, el autor está en disposición de plantear que lo que caracteriza un concepto es su predicatividad, que tenga sentido afirmar de un objeto que cae bajo él:

> "It seems that logicians have clung too much to the linguistic schema of subject and predicate, which surely contains what are logically

[168]H. Sluga proporciona, en 'Frege Against the Booleans' [Sluga, 1987, pp. 85-87], una explicación alternativa del cambio acometido por Frege respecto a la lógica tradicional, en virtud del cual la el juicio precede a la formación de conceptos. Más recientemente, J. Heis, en 'The Priority Principle from Kant to Frege' [Heis, 2014] reconstruye el origen del principio de la primacía de los juicios sobre los conceptos y ofrece una panorámica histórica detallada de la influencia que Frege recibió para formular este principio.

> quite different relations. I regard it as essential for a concept that the question whether something falls under it have a sense. Thus I would call 'Christianity' a concept only in the sense in which it is used in the proposition 'this (i.e., this way of acting) is Christianity', but not in the proposition 'Christianity continues to spread'. A concept is unsaturated in that it requires something to fall under it; hence it cannot exist on its own. That an individual falls under it is a judgeable content, and here the concept appears as a predicate and is always predicative. In this case, where the subject is an individual, the relation of subject to predicate is not a third thing added to the two, but it belongs to the content of the predicate, which is what makes the predicate unsatisfied. Now I do not believe that concept formation can precede judgement because this would presuppose the independent existence of concepts, but I think of a concept as having arisen by decomposition from a judgeable content. I do not believe that for any judgeable content there is only one way in which it can be decomposed, or that one of these possible ways can always claim objective pre-eminence." [Frege, 1976, pp. 100-101]

Ésta es la primera mención por parte de Frege de la noción de *insaturación* aplicada a conceptos. En este punto, el autor vincula la predicatividad de los conceptos a su incompletud, a la necesidad de ser aplicados a un objeto. Y en la insaturación se fundamenta la dependencia de los conceptos respecto a los juicios. Un concepto, por su carácter predicativo, depende de un proceso de descomposición del contenido de un juicio, de modo que puede extraerse únicamente a partir del contenido de un juicio que plantee que un objeto cae bajo él. Por lo tanto, los conceptos, dado que requieren de saturación por parte de un objeto, no son ontológicamente primarios. Dicho en otros términos, la insaturación de los conceptos no permite que, por sí mismos, formen el contenido de un juicio. En este sentido plantea Frege que es inadecuado presuponer la existencia independiente de los conceptos. De acuerdo con este planteamiento, puede comprenderse completamente la afirmación programática de Frege en 1880-1881 de que su sistema formal tome juicios, y no conceptos, como elementos básicos.

Además, el autor explica por qué razón no debe entenderse que la relación entre el sujeto y el predicado en un juicio, que tradicionalmente se entiende como una relación entre dos conceptos, es un tercer elemento que se añade a estos dos. Esta relación pertenece al predicado y, así, conforma con él un concepto que es, por naturaleza, insaturado.

5.5.4 Ventajas del nuevo análisis

Tal y como se expone la distinción entre función y argumento en *Begriffsschrift*, y dada la naturaleza de su sistema formal, en virtud del texto de 1879 es posible, por un lado, plantear análisis alternativos a expresiones ya analizadas en términos de función y argumento y, por el otro, ofrecer un análisis lógico adecuado de los juicios categóricos. La nueva distinción entre concepto y objeto conlleva la introducción de una semántica en la conceptografía y posibilita, por tanto, trasladar las capacidades del esquema función-argumento al ámbito del significado de los juicios: en primer lugar, admite distintas formas de descomponer este significado y, en segundo lugar, proporciona los elementos necesarios para que, en el formalismo de la conceptografía, pueda distinguirse entre la subordinación de conceptos y la atribución de una propiedad a un objeto. Naturalmente, la capacidad de llevar a cabo distintas descomposiciones es propia tanto del esquema función-argumento como del esquema concepto-objeto. Veremos a continuación qué capacidades tiene la nueva descomposición de contenidos aseverables.

Posibilidades de descomposición de contenidos atómicos

La flexibilidad del análisis propio de la conceptografía de *Begriffsschrift*, como hemos discutido extensamente en los capítulos anteriores, afecta únicamente a expresiones. No afecta al significado de estas expresiones y, por tanto, es completamente ajeno a su categorización ontológica. De este modo, afirmar que una misma expresión puede ser, según el contexto, una función o un argumento es completamente distinto a plantear que un concepto pueda ser, en circunstancias particulares, un objeto. Es incluso sensiblemente distinto a considerar que una misma expresión pueda denotar un concepto o un objeto. La principal carencia del análisis de 1879, como hemos planteado en distintas ocasiones, es que no puede capturar las relaciones ontológicas que se establecen entre los referentes de signos lingüísticos.

El único contenido relevante de un juicio en *Begriffsschrift* son sus capacidades deductivas, pero a partir de 1880 su estructura ontológica resulta fundamental. La distinción entre concepto y objeto posibilita un análisis sobre una dimensión completamente distinta; no se aplica a expresiones, sino a su denotación. Frege cambia el objeto del análisis propio de su sistema formal: dejan de ser expresiones y pasan a ser aquello que expresan. Este cambio conlleva una diferencia profunda, ya que mientras que los roles de función y de argumento son intercambiables, las categorías de concepto y objeto no lo son. Así, por un lado, aquello que en determinadas circunstancias es función puede ser argumento y, por el otro, un objeto no puede ser en ningún contexto un concepto. Así lo atestigua Frege en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880]:

> "If (...) you imagine the 2 in the content of possible judgement[169]
>
> $$2^4 = 16$$
>
> to be replaceable by something else, by (-2) or by 3 say, which may be indicated by putting an x in place of the 2:
>
> $$x^4 = 16,$$
>
> the content of possible judgement is thus split into a constant and a variable part. The former, regarded in its own right but holding a place open for the latter, gives the concept '4th root of 16'.
>
> We may now express
>
> $$2^4 = 16$$
>
> by the sentence '2 is a fourth root of 16' or 'the individual 2 falls under the concept "4th root of 16" ' or 'belongs to the class of 4th roots of 16'. But we may also just as well say 'is a logarithm of 16 to the base 2'. Here the 4 is being treated as replaceable and so we get to the concept 'logarithm of 16 to the base 2':
>
> $$2^x = 16.$$
>
> The x indicated here the place to be occupied by the sign for the individual falling under the concept. We may now also regard the 16 in $x^4 = 16$ as replaceable in its turn, which we may represent, say, by $x^4 = y$. In this way we arrive at the concept of a relation, namely the relation of a number to its 4th power. And so instead of putting a judgement together out of an individual as subject and an already previously formed concept as predicate, we do the opposite and arrive at the concept by splitting up the content of possible judgement." [Frege, 1880, pp. 16-17]

La aplicación del análisis en términos de concepto y objeto al contenido de enunciados atómicos resulta en un componente variable, el objeto, y

[169]En la traducción de P. Long y R. White consta '*content of possible judgement*' como equivalente de la expresión alemana '*beurtheilbarer Inhalt*'. Esta elección no coincide con la de T. W. Bynum, que traduce esta misma expresión por '*assertible content*' en su edición de *Begriffsschrift* [Frege, 1972]. A lo largo de nuestra exposición, hemos usado para el mismo propósito una única expresión castellana: 'contenido aseverable'.

un componente fijo, el concepto. En su explicación, es probable que Frege aproveche la terminología propia de *Begriffsschrift* para hacer comprensible y accesible el nuevo análisis en términos de concepto y objeto, y por esta razón se expresa en términos de partes reemplazables y partes fijas. Ahora bien, esta estrategia no debe verse como un indicativo de que, en realidad, el esquema función-argumento y la distinción entre concepto y objeto son equivalentes.

Hay distintos modos de descomponer en concepto y objeto el significado de enunciados atómicos relacionales (como el ejemplo de Frege) o de enunciados complejos; basta que del análisis resulte una parte fija que sea insaturada. El uso de letras sirve, en este contexto, para hacer explícito de qué modo se aplica el esquema concepto-objeto. Frege plantea al menos las siguientes posibilidades de análisis de $2^4 = 16$, donde 'x' indica el componente variable: $x^4 = 16$, $2^x = 16$ o incluso $x^4 = y$.

En todas las descomposiciones de $2^4 = 16$, el concepto coincide con la parte fija. Sin embargo, en este planteamiento hay una diferencia importante respecto a la descomposición propia de *Begriffsschrift*: en este texto, cuando se divide una expresión en función y argumento, no se pone de manifiesto la insaturación. En particular, en un enunciado como '$3 > 2$' es aceptable que '> 2' sea tomado como argumento y '3' como función. Por consiguiente, la noción de función de *Begriffsschrift* no se corresponde con la de predicado. Ahora bien, a partir de 1880, cuando el significado de una proposición se descompone en concepto y objeto, la parte fija debe ser siempre insaturada, por lo que 3, que no tiene carácter predicativo, nunca podría ser considerado la parte fija; no es posible plantearse si un objeto cae bajo 3.

Frege desarrolló la distinción entre concepto y objeto antes de establecerla definitivamente en 1884 en *Grundlagen*. Sin embargo, uno de los elementos que permaneció fijo a lo largo del período de 1880-1883 es la flexibilidad con la que puede aplicarse este análisis a contenidos atómicos relacionales o a enunciados complejos[170]. En la carta a Marty de 29 de agosto de 1882, Frege confirma las ideas planteadas en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880]. En palabras del autor:

> "I do not believe that for any judgeable content there is only one way in which it can be decomposed, or that one of these possible ways can always claim objective pre-eminence. In the inequality $3 > 2$ we can

[170]Naturalmente, que el análisis en términos de concepto y objeto sea flexible no significa que sea tan flexible como el análisis basado en la distinción entre función y argumento. La posibilidad de una expresión de intercambiar los roles de función y de argumento es aquí un aspecto fundamental.

> regard either 2 or 3 as the subject. In the former case we have the concept 'smaller than 3', in the latter, 'greater than 2'. We can also regard '3 and 2' as a complex subject. As a predicate we then have the concept of the relation of the greater to the smaller." [Frege, 1976, p. 101]

El análisis tradicional en términos de sujeto y predicado aplicado a enunciados atómicos relacionales o complejos es, en opinión de Frege, erróneo por diversas razones. En primer lugar, al identificar los expresiones atómicas, esto es, los juicios singulares, con juicios universales, confunde un concepto con un objeto por considerar el sujeto un concepto. En segundo lugar, asume la primacía de los conceptos sobre el juicio y, en consecuencia, establece que la relación que los une es un tercer elemento añadido a los dos conceptos.

A pesar de ello, de acuerdo con este análisis tradicional se entiende que los enunciados atómicos, que expresan que un objeto cae bajo un concepto, son simples. Por tanto, pueden analizarse mediante la distinción entre sujeto y predicado si, como Frege se ha preocupado de hacer, se especifica claramente cuál es la naturaleza de cada uno de ellos; en este caso, el sujeto es individual y el concepto que se predica de él es insaturado, por lo que posee naturaleza predicativa. Así pues, en lugar de limitarse a considerar la distinción entre concepto y objeto, Frege usa en este ejemplo este esquema tradicional. Naturalmente, ante casos complejos, como 'Todo mamífero es vivíparo', el autor rechazaría un análisis análogo.

Nuevamente, Frege propone distintos modos de analizar el contenido de '$3 > 2$'. En este caso, es significativo que, dado que no se descompone la expresión '$3 > 2$', sino aquello que expresa, no hay ningún inconveniente en modificar la relación que vincula a los dos objetos: si el objeto es 3, se obtiene el concepto 'mayor que 2', si el objeto es 2, 'menor que 3', y si los objetos son 2 y 3, se obtiene la relación 'mayor que'[171]. En estos casos, las relaciones involucradas, $>$ y $<$, respectivamente, son diferentes. Sin embargo, Frege las usa indistintamente.

Tras la última cita, en la misma carta a Marty, hay un pasaje que podría sugerir que el esquema función-argumento de *Begriffsschrift* coincide con el esquema concepto-objeto, lo cual contradiría lo expuesto hasta el momento:

> "In general I represent the falling of an individual under a concept by $F(x)$, where x is the subject (argument) and $F(\ )$ the predicate (function), and where the empty place in the parentheses after F indicates non-saturation." [Frege, 1976, p. 101]

[171] Respecto al uso de comillas para designar conceptos, véase la nota 123.

Frege representa con generalidad la circunstancia de que un objeto caiga bajo un concepto mediante $F(x)$. El uso, en este contexto, de la terminología tradicional 'sujeto' y 'predicado' puede deberse principalmente a dos razones. En primer lugar, este texto no forma parte de un artículo del autor, sino una carta, que a la postre va dirigida a un filósofo habituado a la terminología tradicional. En segundo lugar, el esquema sujeto-predicado se adapta adecuadamente a los enunciados simples, como el presente (que expresa que un objeto cae bajo un concepto), pues refleja su estructura semántica básica. Naturalmente, ante un caso complejo, Frege rechazaría, como ya ocurre en *Begriffsschrift*, un análisis en términos de sujeto y predicado.

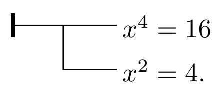
Además, la notación usada y el hecho de que los términos 'argumento' y 'función' sean añadidos con finalidad explicativa, y no sistemática, indican que, en este contexto particular, Frege los está usando en sentido matemático. Simplemente, el autor aprovecha la analogía, que ha sido y será de utilidad en multitud de ocasiones en sus escritos, para que la breve explicación de su carta sea comprensible para su lector.

Tratamiento del contenido de los juicios categóricos

Mediante los recursos de la conceptografía de 1879, es posible distinguir formalmente entre un juicio universal y un juicio singular. Ésta es una ventaja muy significativa de la conceptografía respecto a la lógica tradicional, porque permite extraer adecuadamente la forma lógica de los juicios categóricos cuantificados. Además, como hemos explicado, se trata de una característica diferenciadora respecto a la lógica booleana y un aspecto relevante en la discusión que mantiene Frege con Schröder tras la publicación de *Begriffsschrift*.

Sin embargo, el tratamiento de los juicios categóricos de *Begriffsschrift*, que hemos expuesto en el apartado 1.2.7, carece de un análisis semántico, por lo que debe considerarse incompleto. Hay indicios que muestran que Frege ya consideraba en 1879 la distinción entre concepto y objeto, como se ha expuesto en el apartado 4.4.2, pero a lo largo de los capítulos precedentes se han proporcionado las razones textuales por las cuales esta distinción no está presente en la conceptografía más que en comentarios elucidatorios concebidos para hacer comprensible la exposición del sistema formal. La conceptografía de 1879 no dispone propiamente de enunciados atómicos, que expresan que una propiedad se predica de un objeto. Para distinguir entre esta circunstancia y la subordinación entre conceptos es necesario incorporar en el sistema formal una estructuración ontológica. A pesar de disponer de las herramientas lógicas necesarias para distinguir entre un juicio universal y un juicio particular, la conceptografía carece de una estructura ontológica que aproveche estas herramientas.

La distinción entre concepto y objeto posibilita diferenciar semánticamente, con la ayuda del simbolismo de la conceptografía, entre el contenido de un juicio singular y el de uno universal. Precisamente, en 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880], Frege destaca, en polémica con Boole, esta característica. Ya se ha explicado que la distinción booleana entre proposiciones primarias y secundarias corresponde a la división entre las proposiciones que establecen relaciones entre clases y las que establecen relaciones entre otras proposiciones. Frege disuelve la división entre proposiciones de Boole al poner de manifiesto que un juicio universal, que expresa que un concepto se subordina en otro, es en realidad un juicio complejo:

> "In contrast with Boole, I now reduce his *primary propositions* to the *secondary* ones. I construe the subordination of the concept 'square root of 4' to the concept '4th root of 16' as meaning: if something is a square root of 4 it is a 4th root of 16:
>
> 
>
>
> I believe that in this way I have set up a simple and appropriate organic relation between Boole's two parts." [Frege, 1880, pp. 17-18]

La clave, en opinión de Frege, está en la confusión por parte de Boole de las nociones de concepto y objeto. En particular, la posición booleana confunde la subordinación entre conceptos, que forma el contenido de un juicio universal, con la atribución de un concepto a un objeto, que forma el contenido de un juicio singular:

> "Moreover, on this view we do justice to the distinction between concept and individual, which is completely obliterated in Boole. Taken strictly, his letters never mean individuals but always extensions of concepts. That is, we must distinguish between concept and thing, even when only one thing falls under a concept. The concept 'planet whose distance from the Sun lies between of Venus and that of Mars' is still something different from the individual object the Earth, even though it alone falls under the concept. Otherwise you couldn't form concepts with different contents whose extensions are all limited to this one thing, the Earth. In the case of a concept it is always possible to ask whether something, and if so what, falls under it, questions which are senseless in the case of an individual. We must likewise distinguish the case of one concept being subordinate to another from that of a thing falling

under a concept although the same form of words is used in both. The examples given above

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\overline{}\!\!\top\!\!\overline{}\, x^4 = 16 \\ \qquad\;\;\llcorner\!\!\overline{}\, x^2 = 4 \end{array} \quad \text{and} \quad \vdash\!\!\!\overline{}\, 2^4 = 16$$

show the distinction in the concept-script." [Frege, 1880, p. 18]

Frege destaca algunas características definitorias de los conceptos, que serán desarrolladas en textos posteriores, como discutiremos en el apartado 5.6.2. En primer lugar, mientras que Boole y los lógicos algebristas identifican los conceptos que tienen la misma extensión, para Frege, que dos conceptos tengan la misma extensión no significa en general que sean el mismo. En segundo lugar, las condiciones de acuerdo con las cuales un objeto cae bajo un concepto están determinadas. Un objeto carece de extensión y, por tanto, ningún objeto cae bajo él. Naturalmente, Frege no pretende establecer una división sistemática entre concepto y objeto; en este contexto, el autor trata de dilucidar algunos aspectos básicos de una distinción que será fundamental en el desarrollo de su proyecto logicista[172]. Como hemos planteado en el apartado 3.4.5, lo que puede expresarse mediante las operaciones con conceptos de la lógica booleana es muy limitado. Frege muestra que partir de juicios en lugar de conceptos es incomparablemente más fructífero.

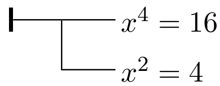
De hecho, en 1882, en la carta a Marty de 29 de agosto, Frege añade una modificación relevante a su planteamiento. En 1880-1881, establece la distinción entre concepto y objeto y, gracias al formalismo de la aritmética, que permite expresar en el lenguaje esta distinción, puede mostrar en

[172]Véase un planteamiento muy similar, aunque menos desarrollado, en el posterior 'Über den Zweck der Begriffsschrift' [Frege, 1882b]:

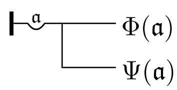
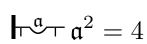
"Schröder says that my "conceptual notation" has almost nothing in common with the Boolean calculus of concepts. From this account, it could appear that the "conceptual notation" would not be able to represent the subordination of concepts. An example will convince one of the opposite. The judgement

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\overline{}\!\!\top\!\!\overline{}\, x^4 = 81 \\ \qquad\;\;\llcorner\!\!\overline{}\, x^2 = 9 \end{array}$$

runs in words: if $x^2 = 9$, then $x^4 = 81$. Now we can call a number whose square is 9 "a square root of 9", and one whose fourth power is 81 "a fourth root of 81", and then translate: all square roots of 9 are fourth roots of 81. Here, the concept "square root of 9" is subordinated to the concept "fourth root of 81". The purpose of the letter x is to make the whole judgement general in the sense that the content should hold whatever one may put in for x." [Frege, 1882b, pp. 98-99] logística de qué modo un juicio universal es distinto de un juicio singular. En la cita anterior, disponiendo de los conceptos ‘raíz cuarta de 16’ y ‘raíz cuadrada de 4’, Frege distingue entre los juicios siguientes:


y $\vdash 2^4 = 16$

La distinción no se aplica únicamente al nivel de la forma lógica, sino también a las distintas estructuras ontológicas que cada una de los juicios expresa[173]. La conceptografía, sin embargo, no dispone de símbolos propios, y sus letras carecen de interpretación semántica. Por lo tanto, es necesario incorporar el esquema concepto-objeto en la conceptografía, de modo que el lenguaje disponga de símbolos distintos para objetos y conceptos. Por medio de este esquema, la conceptografía puede mostrar la diferencia entre un juicio universal y un juicio particular: la estructura concepto-objeto posibilita aprovechar las herramientas formales de las que dispone para expresar correctamente el contenido de cada uno de estos juicios:

> “The subordination of a concept $\Psi(\ )$ under a concept $\Phi(\ )$ is expressed by
>
> 
>
> which makes obvious the difference between subordination and an individual’s falling under a concept. Without the strict distinction between individual and concept it is impossible to express particular and existential judgements accurately in such a way as to make their close relationship obvious. For every particular judgement is an existential judgement.
>
> 
>
> means ‘There is at least one square root of 4’.” [Frege, 1976, p. 101]

En este contexto, un análisis en términos de sujeto y predicado sería completamente inadecuado: el resultado de un análisis del significado de un enunciado categórico cuantificado no puede ser $F(x)$, donde x es el sujeto y $F(\ )$ el predicado. Para hacer explícita la diferencia entre un contenido atómico y un contenido categórico cuantificado, Frege ejemplifica el análisis de este último, que hace fehaciente que se trata de un contenido complejo que no involucra objetos, sino únicamente conceptos. La relación que vincula los dos conceptos en cuestión sí es, en este caso particular, relevante, y es

[173]Respecto al uso de comillas para referir a conceptos, véase la nota 123.

el elemento que proporciona complejidad. Es imprescindible disponer de símbolos de concepto y de objeto para hacer obvia la diferencia que hay entre los siguientes juicios:

$$\vdash 2^2 = 4 \quad \text{y} \quad \vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top\, \mathfrak{a}^2 = 4.$$

La conceptografía de *Begriffsschrift* permite distinguir entre un juicio y el otro: mientras que el juicio siguiente:

$$\vdash 2^2 = 4$$

es formalmente simple, la expresión:

$$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top\, \mathfrak{a}^2 = 4$$

presenta complejidad formal. Es claro, pues, que la conceptografía de 1879 posee las herramientas necesarias para distinguir entre la forma lógica de estos enunciados. No obstante, no aísla un único análisis para '$2^2 = 4$': función y argumento son intercambiables, de modo que, por ejemplo, tanto '2' como '$\alpha^2 = 4$' pueden ser indistintamente argumento o función. Para poder expresar la relación entre los dos juicios es preciso fijarles un análisis común, según el cual 2 sea en ambos casos el objeto. Esta diferencia, que Frege hace patente en la citada carta, es fundamental.

No en vano, Frege se expresa en *Begriffsschrift* de modo similar, aunque desde una perspectiva sensiblemente distinta. En 1879, el autor destaca que el único aspecto relevante en lógica del significado de un juicio es el contenido conceptual, esto es, la colección de juicios que pueden derivarse de él [Frege, 1879a, §3, p. 113]. En este sentido, Frege afirma:

> "People distinguish *universal* and *particular* judgements: this is really not a distinction between judgements, but between contents. *They should say, "a judgement with a universal content", "a judgement with a particular content"*[174]." [Frege, 1879a, §4, p. 114]

En 1882, Frege ha centrado su desarrollo en cuestiones semánticas y, en particular, en la necesidad de que la conceptografía transmita las relaciones ontológicas que expresan los juicios. Así pues, la valoración del contenido de los juicios debería considerar, desde esta perspectiva posterior a *Begriffsschrift*, más elementos, además de sus capacidades deductivas. Únicamente

[174]Véase en la nota 149 una discusión acerca del uso por parte de Frege del término 'particular' en este pasaje.

un planteamiento que incorpore una separación tajante entre objeto y concepto puede establecer que los juicios universales expresan la subordinación de un concepto en otro concepto, y que los juicios existenciales (y también los particulares) expresan que un concepto no tiene extensión vacía, o que es realizado.

5.6 De *Grundlagen* a *Grundgesetze*: 1884-1893

No puede decirse que, desde 1883 y hasta la publicación del primer volumen de *Grundgesetze* en 1893, el desarrollo formal de la conceptografía recibiese un tratamiento extenso en los trabajos de Frege. En este sentido, aparentemente Frege siguió la recomendación de C. Stumpf[175] en una carta del 9 de septiembre de 1882 [Frege, 1976, pp. 171-172]. De hecho, en el apartado 5.5.2, hemos analizado algunas de las causas de esta tendencia.

Sin embargo, esta circunstancia no implica que Frege no prosiguiese con el despliegue de la tesis logicista, ni tampoco que detuviese el desarrollo de aspectos particulares de su conceptografía. En el período que separa la publicación de *Grundlagen* de la publicación del primer volumen de *Grundgesetze*, el autor puso de manifiesto una intensa actividad filosófica[176].

5.6.1 Resultados de *Grundlagen*

La naturaleza y el alcance de *Grundlagen* son sensiblemente distintos a los de *Begriffsschrift*. En el trabajo de 1884, Frege ofrece un tratamiento informal y puramente filosófico de la tesis logicista, y la conceptografía no es considerada más que ocasionalmente y de forma instrumental. Frege pretende aclarar la naturaleza del concepto de número y hacer filosóficamente plausible que los principios básicos de la aritmética son de naturaleza lógica. Por consiguiente, en comparación con *Begriffsschrift*, puede decirse que los resultados de *Grundlagen* respecto al despliegue de la tesis logicista son más amplios.

[175]Véase la nota 162.

[176]Esta actividad, sin embargo, sufrió una interrupción entre los años 1885 y 1891: no se conserva ningún trabajo elaborado por Frege en este periodo. Incluso su correspondencia científica, dados los testimonios conservados, se vio afectada a lo largo de estos años (véase [Frege, 1976, pp. v-xi]). No obstante, como es patente en el listado de cursos impartidos por el autor que incluye L. Kreiser en *Gottlob Frege. Leben - Werk - Zeit* [Kreiser, 2001, pp. 280-284], Frege siguió con total normalidad su actividad docente en la Universidad de Jena; incluso ofreció ininterrumpidamente desde 1883 hasta 1902 un curso sobre la conceptografía, "*Über Begriffsschrift*" (aunque a menudo el curso no se impartía por falta de alumnos).

Ahora bien, en *Grundlagen* no se presenta ningún sistema formal, y todos sus resultados se obtienen informalmente, o bien con una argumentación filosófica o bien por medio de esbozos de demostraciones[177]. Así pues, Frege no ofrece una demostración, propiamente, de que las proposiciones aritméticas a las que alude en el texto de 1884 se hayan obtenido por medios exclusivamente lógicos, sin recurrir en ningún caso a la intuición; no hay ninguna garantía formal de esta circunstancia. Ciertamente, Frege argumenta en favor del carácter lógico de sus definiciones, pero la obtención de proposiciones a partir de ellas por medios informales no puede asegurar más que la verosimilitud de esta vinculación.

De hecho, en la demostración de algunos principios planteados por el autor debería hacerse uso de proposiciones no explicitadas en *Grundlagen*. Puede localizarse un ejemplo especialmente relevante de esta circunstancia. Tras ofrecer una definición explícita del concepto de número, Frege anuncia la justificación de un principio que permite determinar el sentido de toda igualdad numérica:

> "Our next aim must be to show that the Number which belongs to the concept F is identical with the Number which belongs to the concept G if the concept F is equal to the concept G." [Frege, 1884, §73, p. 85]

Expresaremos este principio para las igualdades numéricas ($\mathrm{P}_=$) en un lenguaje formal híbrido entre la conceptografía y la lógica actual:

$$(\#F = \#G) \equiv (F \sim G), \qquad (\mathrm{P}_=)$$

donde '$\#F$' refiere al número que pertenece al concepto F y '$F \sim G$' expresa que F y G son conceptos equinuméricos[178], esto es, que hay una correspondencia biunívoca entre los objetos que caen bajo F y los objetos que caen

[177] Hay multitud de reconstrucciones de la definición informal del concepto de número y de la serie numérica en *Grundlagen*. Algunos referentes clásicos son los trabajos 'The Consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic*' [Boolos, 1987] y 'The Standard Equality of Numbers' [Boolos, 1990], de G. Boolos; 'Frege's Theory of Number' [Parsons, 1965], de C. Parsons; y 'Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic' [Zalta, 2015b], de E. Zalta.

[178] En su traducción inglesa, J. L. Austin traduce '*gleichzahlig*' por '*equal*'. Para evitar la ambigüedad propia del término 'igual' y denotar que se trata de una similaridad en cuanto al número de objetos que caen bajo dos conceptos, nos referiremos a esta relación mediante el neologismo 'equinumerosidad', y diremos que dos conceptos son 'equinuméricos'. Esta misma terminología ya ha sido adoptada en la traducción castellana de *Grundlagen* (véase [Frege, 1996, p. 109, nota]).

El principio que denominamos ($\mathrm{P}_=$) es comúnmente conocido como 'Principio de Hume'. G. Boolos, en distintas ocasiones (véase, por ejemplo, 'Whence a contradiction?'

bajo G. Frege únicamente proporciona un esbozo de la demostración de este principio, que tiene una gran importancia en el conjunto del desarrollo informal de *Grundlagen*. Sin embargo, una demostración rigurosa de ($P_=$) requiere un principio de igualdad de extensiones que el autor no hace explícito en su esbozo de demostración.

Por consiguiente, a pesar de que el alcance de *Begriffsschrift* es más modesto, su metodología se corresponde exactamente con los estándares de rigor propios de la lógica. Al fin y al cabo, el objetivo de Frege con *Grundlagen* es hacer filosóficamente plausible la tesis logicista. En los párrafos finales de *Grundlagen*, Frege pone de manifiesto las limitaciones del planteamiento de este trabajo:

> "From all the preceding it thus emerged as a very probable conclusion that the truths of arithmetic are analytic and a priori; and we achieved an improvement on the view of KANT. We saw further what is still needed to raise this probability to a certainty, and indicated the path which must lead to that goal." [Frege, 1884, §109, pp. 118-119]

La justificación rigurosa del carácter analítico a priori de las verdades de la aritmética pasa a ser el objeto del desarrollo filosófico de Frege hasta la publicación de *Grundgesetze*. Desde la perspectiva del autor, la realización de este objetivo consiste en la modificación de la conceptografía para que, por un lado, su lenguaje permita expresar adecuadamente la distinción entre concepto y objeto y, por el otro, sus recursos formales posibiliten deducir el conjunto de las verdades de la aritmética.

Ciertamente, esta circunstancia remite a un aspecto relevante del sistema formal de *Begriffsschrift*. Lo cierto es que la conceptografía de 1879 no es suficiente para una deducción completa de la aritmética; independientemente de la voluntad del autor, explícita o implícita, no es posible realizar el proyecto logicista sólo con este sistema formal.

Precisamente, la introducción a partir de 1880-1881 de la distinción entre concepto y objeto, asociada a la voluntad de proporcionar definiciones lógicas del concepto de número y de las operaciones aritméticas, puede verse como la confirmación de que Frege es consciente de las carencias del sistema formal contenido en *Begriffsschrift*, y de que es preciso modificarlo. Por otra parte, es de general conocimiento que la modificación de la conceptografía contenida en *Grundgesetze*, con la cual el autor pretendía concluir este

---

[Boolos, 1993, p. 228] y '*Die Grundlagen der Arithmetik* §§82-83' [Boolos; Heck, 1998, p. 317]) menciona que C. Wright denomina el Principio de Hume '($N^=$)' (por 'number equality') y que M. Dummett lo denomina 'the original equivalence'. Por su parte, Boolos se refiere a ($P_=$) como 'Hume's principle' o como 'HP'.

proyecto, es inconsistente. Este desarrollo truncado podría descartar todo intento de probar con éxito la tesis logicista. Sin embargo, recientemente, en el contexto de reivindicación del proyecto logicista de Frege, se ha probado que una reformulación en segundo orden de la conceptografía de 1879, junto con un axioma adicional, permite deducir la aritmética, esto es, permite, a partir de definiciones de número natural, del número 0 y de la operación de sucesión, derivar cualquier verdad de la aritmética. Este axioma adicional es el Principio ($P_=$), al que acabamos de aludir[179]. La tesis según la cual, a partir de un sistema estándar para la lógica de segundo orden (como es la reformulación de la conceptografía de *Begriffsschrift* expuesta en el apartado 4.2.4) y el mencionado principio, puede deducirse la aritmética se denomina 'Teorema de Frege'[180].

El interés de este trabajo se centra en la lógica de Frege, no en el sentido fregeano de lógica, sino en el sentido actual. Por esta razón, nuestra reconstrucción en los apartados siguientes y, especialmente, en los capítulos que siguen, del desarrollo y la naturaleza de conceptografía de *Grundgesetze* se desvinculará del intento de realizar el proyecto logicista. En particular, no nos ocuparemos de la ley básica (V) y de la noción de curso de valores. En este sentido, el análisis de la lógica de *Grundgesetze* que llevaremos a cabo no estudiará la construcción de la aritmética que tiene lugar en este texto, sino únicamente el sistema formal que se usa como herramienta de esta construcción.

5.6.2 Distinción entre función y objeto

El esquema concepto-objeto es fundamental en *Grundlagen*. El tratamiento en el texto de 1884 de este esquema es esencialmente ontológico y de naturaleza lógica. Dado que Frege no recurre a la conceptografía para desarrollar su planteamiento, en *Grundlagen* no hay indicios de cómo adaptar el lenguaje de este sistema formal a este nuevo esquema. El análisis de la aplicación de la distinción entre concepto y objeto, o más apropiadamente, entre *función* y *objeto*, tiene lugar fundamentalmente en *Funktion und Begriff* [Frege, 1891] y en el artículo 'Über Begriff und Gegenstand' [Frege, 1892b].

[179]La primera demostración de la derivación de los axiomas de Peano a partir ($P_=$) y un sistema estándar para la lógica de segundo orden se halla en *Frege's Conception of Numbers as Objects* [Wright, 1983], de C. Wright; G. Boolos, a su vez, demuestra en 'The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic' [Boolos, 1987] que ($P_=$) es consistente.

[180]No hay que confundir el Teorema de Frege que presentamos aquí con el teorema homónimo que prueba la equivalencia entre el bicondicional y la igualdad de contenido, y que se ha presentado en el apartado 4.2.2. Para un tratamiento completo del Teorema de Frege, véase el trabajo de R. Heck, *Frege's Theorem* [Heck, 2011].

Noción de función a partir de 1891

En los párrafos iniciales de *Funktion und Begriff* [Frege, 1891], Frege pone de manifiesto que va modificar y ampliar algunas nociones de la conceptografía:

> "Rather a long time ago I had the honour of addressing this Society about the symbolic system that I entitled *Begriffsschrift*. Today I should like to throw light upon the subject from another side, and tell you about some supplementations and new conceptions, whose necessity occurred to me since then." [Frege, 1891, p. 137]

Estos cambios son los que dan nombre al artículo: el uso completamente distinto del término 'función', y la incorporación de la distinción entre función y objeto en la conceptografía. Es fundamental apreciar que Frege reconoce explícitamente que su planteamiento ha sido modificado. Hemos planteado que Frege abandona el concepto de función característico de *Begriffsschrift* a partir de 1880-1881. A partir de 1891, el autor usa como base de su análisis el concepto matemático de función. Por este motivo, en lo que sigue y a menos que se indique explícitamente lo contrario, todas las referencias a la noción de función corresponden a la noción matemática, esto es, a aquello que en lógica se entiende por función: la asignación de un objeto a un objeto.

Una vez se ha desvinculado completamente la noción de función de *Begriffsschrift* de la vigente en 1891, podemos considerar el modo en el que Frege analiza esta última. En particular, para el autor es fundamental aclarar las confusiones respecto a la naturaleza de la noción matemática de función:

> "[T]he expression
> $$2x^3 + x$$
> would be a function of x, and
> $$2 \cdot 2^3 + 2$$
> would be a function of 2. This answer cannot satisfy us, for here no distinction is made between form an content, sign and thing signified; a mistake, admittedly, that is very often met with in mathematical works, even those of celebrated authors. I have already pointed out on previous occasion [in *Grundlagen* [Frege, 1884] and 'Über formale Theorien der Arithmetik' [Frege, 1885]] the defects of the current formal theories of arithmetic. We there talk about signs that neither have nor are meant to have any content, but nevertheless properties are ascribed to them

which are unintelligible except as belonging to the content of a sign. So also here; a mere expression, the form for a content, cannot be the heart of the matter, only the content itself can be that." [Frege, 1891, p. 138]

De modo similar a como procede en su introducción de la noción de función en *Grundgesetze* [Frege, 1893, §1, p. 3], Frege critica implícitamente la tendencia de algunos matemáticos del siglo XVIII a considerar que una función es, propiamente, una expresión, como '$2x^2 + x$', en la cual se indica cómo obtener el valor asociado a cada argumento[181]. Desde el punto de vista de Frege, esta perspectiva es errónea: no puede tomarse por función la expresión que permite referirse a ella. Ahora bien, es en el contexto de una expresión donde es posible extraer tanto la función como el argumento.

Frege da inicio a su análisis de la noción de función limitándose únicamente a considerar términos aritméticos:

"People call x the argument, and recognize the same function again in

$$\begin{array}{c} `2 \cdot 1^3 + 1', \\ `2 \cdot 4^3 + 4', \\ `2 \cdot 5^3 + 5', \end{array}$$

only with different arguments, viz. 1, 4, and 5. From this we may discern that it is the common element of these expressions that contains the essential peculiarity of a function; i.e. what is present in

$$`2 \cdot x^3 + x'$$

over and above the letter 'x'. We could write this somewhat as follows:

$$`2 \cdot (\ \ )^3 + (\ \ )'." \text{ [Frege, 1891, p. 140]}$$

Las expresiones que denotan funciones deben poner de manifiesto la necesidad de ser complementadas con el argumento, esto es, con el nombre de un objeto. En la extracción del componente funcional de una expresión es patente que función y objeto deben ser radicalmente distinguidos. Por esta razón, Frege aísla la función común en $2 \cdot 1^3 + 1$ y $2 \cdot 2^3 + 2$ como $2 \cdot (\ \ )^3 + (\ \ )$. Esta notación pone de relieve la insaturación de las funciones:

[181] M. Kline ofrece en *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* [Kline, 1972, vol. II, pp. 400-436] un tratamiento detallado de la definición de las funciones matemáticas como expresiones en la práctica matemática del siglo XVIII. En 'From Lagrange to Frege: Functions and Expressions' [Panza, 2015], M. Panza plantea la relación que hay entre las concepciones de función del matemático J. L. Lagrange (1736-1813), y la que Frege considera a partir de 1891 y desarrolla en *Grundgesetze*.

> "I am concerned to show that the argument does not belong with a function, but goes together with the function to make up a complete whole; for a function by itself must be called incomplete, in need of supplementation, or 'unsaturated'. And in this respect functions differ fundamentally from numbers. Since such is the essence of functions, we can explain why, on the one hand, we recognize the same function in '$2 \cdot 1^3 + 1$' and '$2 \cdot 2^3 + 2$', even though the numbers these expressions mean are different, whereas, on the other hand, we do not find one and the same function in '$2 \cdot 1^3 + 1$' and '$4 - 1$' in spite of their equal numerical values. Moreover, we now see how people are easily led to regard the form of an expression as what is essential to a function. We recognize the function in the expression by imagining the latter as split up, and the possibility of thus splitting it up is suggested by its structure." [Frege, 1891, pp. 140-141]

Generalmente, en una expresión como '$2 \cdot 1^3 + 1$' se distingue entre los símbolos del argumento y de la función. La función es una entidad insaturada y, por lo tanto, el argumento no forma parte de ella. A su vez, el argumento es siempre un objeto, y para que pueda formar una totalidad con la función, ésta debe hacer patente su insaturación. Al fin y al cabo, no es posible formar una entidad saturada a partir de dos objetos; es preciso un tercer elemento insaturado que ponga en relación a los objetos. De modo similar, una función y un argumento no podrían formar una totalidad si la función no fuese insaturada. Las expresiones que designan, respectivamente, funciones y objetos reflejan esta característica esencial. Por ello, Frege representa las funciones con espacios vacíos, como, por ejemplo '$2 \cdot (\ \ )^3 + (\ \ )$'. Estos espacios son rellenados por los símbolos correspondientes a los argumentos, de modo que la expresión resultante es el nombre del valor que la función asigna a cada argumento. Ahora bien, destacar el hecho de que las funciones sean insaturadas y los objetos sean saturados no constituye una definición; al fin y al cabo, función y objeto son nociones lógicamente simples y, en cuanto tales, no admiten definición.

Como es patente a partir de nuestra explicación, en *Funktion und Begriff* Frege retoma el planteamiento iniciado en la carta a Marty de 1882, que hemos comentado en el apartado 5.5.4, generalizándolo para el caso de las funciones. La noción de función posee, desde la perspectiva de Frege, una naturaleza lógica, y caracteriza con precisión la noción informal de concepto. Al fin y al cabo, la distinción entre concepto y objeto es de naturaleza filosófica; la noción intuitiva de concepto es propia de la lógica tradicional.

En 'Über Begriff und Gegenstand' [Frege, 1892b], el autor proporciona nuevos criterios de distinción entre conceptos y objetos:

> "A concept (as I understand the word) is predicative. On the other hand, a name of an object, a proper name, is quite incapable of being used as a grammatical predicate." [Frege, 1892b, p. 183]

Así pues, los criterios básicos de distinción entre concepto y objeto, más allá de las propiedades de insaturación y saturación (desarrolladas para el caso general de función y objeto), son lógicos. Con ello, Frege no está tanto asignando a estas nociones tales propiedades como únicas marcas esenciales, sino que establece modos de reconocimiento.

Una vez ha establecido la distinción entre concepto y objeto y ha dejado claro que una función no es, en ningún caso, una expresión, Frege se plantea la necesidad de caracterizar la igualdad entre funciones. Ello es una muestra de los esfuerzos por parte de Frege en *Funktion und Begriff* para analizar la noción de función, que concluirán en el planteamiento de *Grundgesetze*. La ecuación '$f_1 = f_2$' no expresa que f_1 y f_2 sean la misma función, sino que proporcionan el mismo valor para cada argumento. En palabras del autor:

> "If we write
> $$x^2 - 4x = x(x - 4)$$
> we have not put one function equal to the other, but only the values of one equal to those of the other. And if we so understand this equation that it is to hold whatever argument may be substituted for x, then we have thus expressed that an equality holds generally." [Frege, 1891, p. 142]

Frege plantea que la igualdad en general de los valores que dos funciones asignan a cada argumento equivale a la igualdad entre sus respectivos cursos de valores. Así introduce la noción de *curso de valores*, que será tratada con más detalle cuando consideremos el tratamiento de esta noción en *Grundgesetze*, en el apartado 6.3.3. De modo similar a la introducción de las extensiones de conceptos en *Grundlagen*, el autor no ofrece en *Funktion und Begriff* [Frege, 1891] una definición de la noción de curso de valores.

Para identificar los cursos de valores de las funciones, Frege recurre a la analogía geométrica de la curva determinada por la función. Pero más allá de esta indicación intuitiva, no hay ninguna otra aclaración al respecto por parte del autor. Si en *Grundlagen* Frege propone el principio ($P_=$) para determinar el contenido de las igualdades numéricas, en *Funktion und Begriff*, tal y como acabamos de plantear, la igualdad entre cursos de valores se determina mediante una versión preliminar de la ley básica (V) de *Grundgesetze*.

Valores de verdad como valores de funciones

El siguiente paso en *Funktion und Begriff* [Frege, 1891] consiste en extender el análisis en términos de función y objeto al significado de enunciados aritméticos, y no aplicarlo únicamente a operaciones básicas. Bajo esta nueva perspectiva, una función puede extraerse de ecuaciones y de inecuaciones. Así, procediendo de modo similar a la descomposición de $3 > 2$, $(\ )^2 = 1$ es una función. En sentido matemático, '$(\ )^2 = 1$' no denota una función, del mismo modo que '$(\ ) > 2$' tampoco refiere a una función. Ahora bien, las entidades insaturadas como $(\ )^2 = 1$ pueden verse como funciones si se entiende, por un lado, que proporcionan un valor y, por el otro, que este valor es un objeto. La diferencia fundamental respecto a la perspectiva de análisis anterior está en la naturaleza de los valores de estas funciones: en este caso, no se trata del resultado de una operación, sino la saturación de aquello que denota un enunciado aritmético. Frege considera que el significado de estos enunciados es un *valor de verdad*:

> "I now say: 'the value of our function is a truth-value', and distinguish between the truth-values of what is true and what is false. I call the first, for short, the True; and the second, the False. Consequently, e.g., what '$2^2 = 4$' means is the True just as, say, '2^2' means 4. And '$2^2 = 1$' means the False. Accordingly
>
> $$\text{`}2^2 = 4\text{'}, \text{`}2 > 1\text{'}, \text{`}2^4 = 4^2\text{'};$$
>
> all mean the same thing, viz. the True, so that in
>
> $$(2^2 = 4) = (2 > 1)$$
>
> we have a correct equation." [Frege, 1891, p. 144]

Así pues, las ecuaciones denotan valores de verdad, del mismo modo que los términos aritméticos designan números.

El último paso en la aplicación del análisis en términos de función y objeto consiste en extender este análisis a enunciados en general. Se trata simplemente de una generalización del paso anterior: todo enunciado puede dividirse en dos componentes, uno completo y otro incompleto. El primero denota un objeto, y es el argumento de la función. Esta función pone en relación el argumento con su valor, que es el significado del enunciado inicial: un valor de verdad. En *Funktion und Begriff* [Frege, 1891], Frege da un ejemplo de este análisis:

> "Statements in general, just like equations or inequalities or expressions in Analysis, can be imagined to be split into two parts; one complete in itself, and the other in need of supplementation, or 'unsaturated'. Thus, e.g., we split up the sentence
>
> 'Caesar conquered Gaul'
>
> into 'Caesar' and 'conquered Gaul'. The second part is 'unsaturated' – it contains an empty place; only when this place is filled up with a proper name, or with an expression that replaces a proper name, does a complete sense appear. Here too I give the name 'function' to what is meant by this 'unsaturated' part. In this case the argument is Caesar." [Frege, 1891, pp. 146-147]

Naturalmente, según lo expuesto en el apartado 5.5.4, no hay un único análisis admisible para un enunciado relacional. En cualquier caso, las posibilidades de descomposición de enunciados bajo el la distinción entre función y argumento, a la que se asocia la separación entre insaturación y saturación, no son las mismas que en *Begriffsschrift*. Al fin y al cabo, una función en el sentido de 1879 no es un componente insaturado, sino simplemente aquella parte de una expresión que se considera fijo.

Tras esta generalización, cualquier objeto puede ser el argumento de una función que, por otra parte, puede ser simple o compleja. De acuerdo con ello, el valor de la correspondiente función será siempre un objeto y, en algunos casos, específicamente un valor de verdad[182]. Esta circunstancia permite establecer dos aspectos relevantes. En primer lugar, posibilita especificar con claridad los conceptos. Un concepto es, simplemente, un caso particular de función, aquella cuyos valores son valores de verdad:

> "[A] concept is a function whose value is always a truth-value. Again, the value of the function
>
> $$(x+1)^2 = 2(x+1)$$
>
> is always a truth-value. We get the True as its value, e.g., for the argument -1, and this can also be expressed thus: -1 is a number less

[182] En el apartado 1.3.1 hemos insistido en que el modo mediante el cual Frege toma como guía el concepto aritmético de función para desarrollar su noción de función en *Begriffsschrift* no puede entenderse como una generalización: la noción de función del texto de 1879 no resulta de ampliar la naturaleza de los posibles argumentos y valores de una función matemática. Contra lo que afirman G. Baker y P. Hacker en 'Functions in *Begriffsschrift*' [Baker; Hacker, 2003, pp. 283-284], esta generalización, tal y como exponemos, no tiene lugar hasta 1891 con la publicación de *Funktion und Begriff* [Frege, 1891].

> by 1 than a number whose square is equal to its double. This expresses the fact that -1 falls under a concept.” [Frege, 1891, p. 146]

En segundo lugar, la generalización de la noción de función conlleva una exigencia metodológica. Según esta exigencia, deben definirse adecuadamente las funciones para que estén completamente determinadas, esto es, para que asignen un valor a cada argumento. Con ello, Frege respeta su concepción de la generalidad que expresan los símbolos lógicos, y a la cual hemos hecho referencia en el apartado 5.4. El autor confirma este segundo elemento en *Funktion und Begriff* [Frege, 1891]:

> “What rules we lay down is a matter of comparative indifference; but it is essential that we should do so – that ‘$a + b$’ should always have meaning, whatever objects may be inserted in place of ‘a’ and ‘b’. This involves the requirement as regards concepts, that, for any argument, they shall have a truth-value as their value; that it shall be determinate, for any object, whether it falls under the concept or not. In other words: as regards concepts we have a requirement of sharp delimitation; if this were not satisfied it would be impossible to set forth logical laws about them.” [Frege, 1891, p. 148]

La confirmación del desarrollo de este nuevo esquema, de naturaleza ontológica y de aplicación tanto semántica como sintáctica, debe verse en su traslado a la conceptografía. El sistema formal de *Grundgesetze* refleja los cambios que Frege ha concebido respecto a la naturaleza de la conceptografía desde 1879, como veremos en los siguientes capítulos.

5.6.3 Revisión de la conceptografía

El desarrollo filosófico de Frege tras la publicación de *Begriffsschrift* no puede analizarse de forma completamente aislada del desarrollo del sistema formal de *Grundgesetze*. Ya incluso desde 1880 el autor avanza elementos que conformarán la conceptografía de 1893. Así pues, por un lado, la formulación elaborada en los artículos publicados entre 1891 y 1892 de la distinción entre función y objeto y, por el otro, la conocida separación entre sentido y significado[183] deben explicarse en relación al objetivo, manifiesto en los escritos de Frege, de garantizar formalmente los resultados filosóficos de *Grundlagen*.

[183]Usamos ‘significado’ como traducción del sustantivo alemán ‘*Bedeutung*’. Véase la nota 194.

Nuevas reglas de inferencia

El primer elemento a considerar en este largo proceso de revisión de la conceptografía de 1879 es la introducción de nuevas reglas de inferencia. El reconocimiento explícito, por parte de Frege, al uso de una única regla de inferencia en el sistema formal de *Begriffsschrift*, debe tomarse, como el mismo autor indica, simplemente como una indicación metodológica. En efecto, en el apartado 2.2.2 se ha expuesto que Frege reconoce que nuevas reglas de inferencia, que permitan la transición de varios juicios a un único juicio, pueden ser introducidas a conveniencia para abreviar las demostraciones. Y, de hecho, en el apartado 3.3.4 se han comentado algunas de estas nuevas reglas. Por ejemplo, se ha considerado [MP′], que es una regla derivada de [MP], o [IE], que posibilita reemplazar en una fórmula un símbolo por otro, siempre que se añada en la fórmula (a modo de antecedente de un condicional) la igualdad entre los dos símbolos.

Precisamente, la demostración considerada en el apartado 3.3.4 proviene de 'Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift' [Frege, 1880], donde el autor recurre a proposiciones de *Begriffsschrift* para usarlas como reglas. En este mismo texto, sin embargo, Frege adopta otra estrategia:

> "Here the $\times$ between two formulae indicates the transition spelt out above [you can transform a judgement with something denied as a condition by presenting the affirmation of the condition denied as a consequence and making the denial of the original consequence a condition]. The sign $\cdot\!-\!\!-\!\cdot\!-\!\!-\!\cdot\!-\!\!-\!\cdot$ (...) indicates a rule that abbreviates the other route followed above. It runs as follows:
>
> If two judgements (...) have a common consequence (...) and one has a condition contradicting a condition of the other (...), we may form a new judgement (...) by attaching to the common consequence (...) the conditions of the two original judgements (...) minus the contradictory ones (...), but in which conditions common to both judgments are only written once." [Frege, 1880, p. 45]

Dadas las circunstancias, no debería resultar sorprendente que, por un lado, Frege introduzca nuevas reglas de inferencia y, por el otro, no ofrezca ninguna justificación para su uso. Se trata de una práctica ocasional del autor de la que ya se han estudiado otras muestras.

Sin embargo, se produce en este punto una novedad significativa. Las nuevas reglas de inferencia disponen de notación específica y, más aún, se trata de reglas y de notación que Frege usa en *Grundgesetze*, y que reconstruiremos con detalle en el apartado 7.2.2: las reglas de Contraposición y de

Eliminación de subcomponentes. Por esta razón, y a la luz del comentario de Frege en 1882 respecto al desarrollo de un nuevo tratado de lógica que se ha señalado en el apartado 5.4, el modo como el autor introduce estas dos nuevas reglas de inferencia debe verse dentro de un contexto de transición entre *Begriffsschrift* y *Grundgesetze*.

Revisión del lenguaje

El segundo elemento a destacar en este período que pone de manifiesto aspectos de la conceptografía de *Grundgesetze* es la modificación del lenguaje. En *Funktion und Begriff* [Frege, 1891], Frege traslada el planteamiento filosófico relativo a la distinción entre función y objeto a los símbolos lógicos de la conceptografía. No hay en este artículo una presentación genuina del nuevo lenguaje, sino únicamente la aplicación de la discusión precedente a los símbolos de la conceptografía.

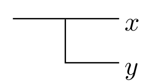
En el artículo de 1891, Frege hace patente el abandono la denominación 'barra de contenido' y su substitución por 'horizontal'; la horizontal es una función que asigna el valor de verdad verdadero al argumento Verdadero (esto es, al valor de verdad), y el valor de verdad falso a cualquier otro argumento. Así, esta función asigna el valor Falso, además de a cualquier enunciado falso, a todo contenido no aseverable[184]. Por consiguiente, por medio de este símbolo, al significado de toda expresión que deba manejar la conceptografía se le asigna un valor de verdad.

Esta circunstancia es fundamental, dado que el siguiente paso es una nueva definición de las conectivas. Justamente, en el apartado 1.2.3, hemos defendido que la definición de las conectivas en *Begriffsschrift* no es veritativo-funcional. Hasta 1891, donde Frege hace un tratamiento sistemático de los valores de verdad, no le es propiamente posible definir el valor de verdad de una expresión compleja en virtud del valor de verdad de sus componentes. Y no es casual que en este mismo artículo tenga lugar una definición de la negación y del condicional en estos términos. Así, la presentación de la negación es la siguiente:

[184]De aquí en adelante y especialmente a lo largo de los capítulos siguientes, en aras de la brevedad, nos referiremos al valor de verdad verdadero y al valor de verdad falso mediante 'lo Verdadero' y 'lo Falso', respectivamente. Estas denominaciones, a pesar de lo artificiales que puedan parecer en castellano, traducen del original alemán '*das Wahre*' y '*das Falsche*', respectivamente. Se trata de una traducción equivalente a la de la mayoría de traducciones inglesas de *Grundgesetze*, de *Funktion und Begriff* [Frege, 1891] y 'Über Sinn und Bedeutung' [Frege, 1892a]; y de una solución similar a la adoptada por U. Moulines en su traducción a una serie de textos de Frege [Frege, 1996, pp. 147-197].

> “The next simplest function, we may say, is the one whose value is the False for just those arguments for which the value of $—\, x$ is the True, and, conversely, is the True for the arguments for which the value of $—\, x$ is the False. I symbolize it thus:
>
> $$-\!\!\!\top\!\!\!-\, x,$$
>
> and here I call the little vertical stroke the stroke of negation.” [Frege, 1891, p. 150]

El condicional es presentado como una función de dos argumentos, esto es, como una relación:

> “The value of the function
>
> 
>
> is to be the False if we take the True as the y-argument and at the same time take some object that is not the True as the x-argument; in all other cases the value of this function is to be the True. The lower horizontal stroke, and the two bits that the upper one is split into by the vertical, are to be regarded as horizontals in our sense. Consequently, we can always regard as the arguments of our function $—\, x$ and $—\, y$, i.e., truth-values.” [Frege, 1891, p. 154]

Es claro que ambas conectivas son definidas veritativo-funcionalmente, de un modo análogo, salvando las distancias, a las presentaciones formales actuales. Y debe ser patente la diferencia de estas nuevas definiciones, según las cuales Frege establece que la negación y el condicional son funciones, con la presentación de estas dos conectivas en *Begriffsschrift*. Consideraremos con detalle la naturaleza de las funciones primitivas de la conceptografía de *Grundgesetze* en el apartado 6.4.3.

La presentación de la noción de generalidad pone de manifiesto la profundidad de los cambios que ha sufrido el planteamiento de Frege en cuanto a la conceptografía. El lenguaje de este sistema formal debe transmitir la distinción entre función y objeto y, para garantizarlo, adquiere símbolos distintos para referir con generalidad a cada categoría ontológica. Así pues, el lenguaje dispone de letras de función, que expresan generalidad sobre funciones, y de letras individuales o de objeto, que expresan generalidad sobre objetos. Estos símbolos poseen una interpretación, y son usados en las fórmulas del lenguaje de acuerdo con las reglas sintácticas pertinentes a esta interpretación. La distinción entre función y argumento, entendida como recurso lingüístico para el análisis de expresiones, que determina la noción de generalidad en la conceptografía de *Begriffsschrift*, simplemente no se considera. Por consiguiente, a partir de 1891, la cuantificación se distingue lógicamente según la interpretación de las letras, de modo que se diferencia la cuantificación sobre funciones de la cuantificación sobre objetos.

De acuerdo con ello, en *Funktion und Begriff* [Frege, 1891], la generalidad es una función cuyos argumentos pueden ser o bien objetos o bien funciones:

> "I now take the sign
>
> $$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- f(\mathfrak{a})$$
>
> to mean the True when the function $f(x)$ always has the True as its value, whatever the argument may be; in all other cases
>
> $$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- f(\mathfrak{a})$$
>
> is to mean the False. For our function $x = x$ we get the first case. Thus
>
> $$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- f(\mathfrak{a})$$
>
> is the True; and we write this as follows:
>
> $$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$
>
> The horizontal stroke to the right and to the left of the concavity are to be regarded as horizontals in our sense. Instead of '$\mathfrak{a}$', any other Gothic letter could be chosen; except those which are to serve as letters for a function, like $\mathfrak{f}$ and $\mathfrak{F}$." [Frege, 1891, pp. 150-151]

En este contexto, Frege usa los términos 'función' y 'argumento' con un sentido radicalmente distinto al que tienen en *Begriffsschrift*. Precisamente por ello, las diferencias entre esta presentación de la generalidad y la propia del texto de 1879 no se reducen al uso explícito de valores de verdad: Frege atribuye a la siguiente combinación de símbolos:

$$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!- f(\mathfrak{a})$$

un contenido semántico, que se distancia fundamentalmente del manejo puramente sintáctico que se hace de la cuantificación en *Begriffsschrift*.

La posibilidad de considerar tanto objetos como funciones como posibles argumentos en las funciones que se consideran en el caso de la generalidad exige valorar una especificación en la noción de función. En *Grundlagen*, la distinción entre características y propiedades de conceptos lleva a Frege a considerar conceptos que caen bajo otro concepto:

> "If, for example, we collect under a single concept all concepts under which there falls only one object, then oneness is a component characteristic of this new concept. Under it would fall, for example, the concept "moon of the Earth", though not the actual heavenly body called by this name. In this way we an make one concept fall under another higher or, so to say, second level concept." [Frege, 1884, §53, p. 65]

La distinción entre *órdenes conceptuales*, introducidos para poder diferenciar entre conceptos bajo los cuales caen objetos y entre conceptos bajo los cuales caen otros conceptos, es completamente ajena a *Begriffsschrift*. De hecho, es un paso relevante para poder considerar formalmente la noción de concepto, cuyo tratamiento en *Grundlagen* es riguroso, pero informal.

En 1891, Frege ha conseguido sistematizar la distinción entre órdenes conceptuales. El paralelo formal de esta distinción aplicada a la noción de función propia de *Grundgesetze* es la de *nivel funcional*. Así lo plantea en *Funktion und Begriff* [Frege, 1891]:

> "Now just as in x^2 we have a function whose argument is indicated by 'x', I also conceive of
>
> $$-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-\, f(\mathfrak{a})$$
>
> as the expression of a function whose argument is indicated by 'f'. Such a function is obviously a fundamentally different one from those we have dealt with so far; for only a function can occur as its argument. Now just as functions are fundamentally different from objects, so also functions whose arguments are and must be functions are fundamentally different from functions whose arguments are objects and cannot be anything else. I call the latter first-level, the former second-level, functions. In the same way, I distinguish between first-level and second-level concepts." [Frege, 1891, p. 153]

Las funciones consideradas hasta el momento, cuyos argumentos son objetos, son de primer nivel, y las funciones cuyos argumentos son funciones de primer nivel son de segundo nivel; hemos avanzado esta distinción en el apartado 4.3.2 y la consideraremos con detalle en el apartado 6.3.4.

La jerarquización en niveles de las funciones hace patente, una vez más, el distanciamiento definitivo de Frege respecto a la conceptografía de *Begriffsschrift*. En el sistema formal de 1879, por un lado, no tiene ningún sentido considerar una función cuyo argumento es otra función y, por el otro, dado que no se considera la denotación de los símbolos funcionales, sino simplemente el hecho de tomarlos como componente que permanece fijo, la distinción entre niveles funcionales no tiene lugar. Al fin y al cabo, la noción de función de *Begriffsschrift* no es en ningún caso una versión imprecisa y menos desarrollada de la función de *Grundgesetze* que Frege avanza en 1891. En realidad, sólo cuando el autor reemplaza, a partir de 1880-1881, el esquema función-argumento por el esquema concepto-objeto, se vuelve necesario formalizar la noción de concepto. Este proceso de formalización culmina en la noción de función de *Grundgesetze*, cuya característica definitoria es la insaturación.

Parte III

Grundgesetze (1893-1903)

Capítulo 6

Lenguaje de *Grundgesetze*

6.1 Introducción

Grundgesetze es, sin lugar a dudas, la obra magna de Frege y la culminación de su ambicioso proyecto de justificar la reducción de la aritmética a lógica. Para llevar a cabo esta reducción, Frege revisó profundamente la conceptografía de *Begriffsschrift* con el fin de adaptarla completamente a la obtención de los teoremas de la aritmética. Como hemos visto a lo largo del capítulo 5, el proceso de revisión de la conceptografía de 1879 fue muy complejo. Al fin y al cabo, el sistema formal de *Begriffsschrift* no estaba concebido para realizar el proyecto logicista y tampoco disponía de la potencia deductiva necesaria para hacerlo. Así pues, entre los años 1880 y 1893 Frege desarrolló aquellos recursos que, desde su perspectiva, son necesarios para que la conceptografía pueda ser una herramienta adecuada para la culminación de este proyecto. Los cambios son tan profundos que las únicas similitudes que guardan las dos versiones de la conceptografía se reducen, prácticamente, a un sistema bi-dimensional de notación.

El elemento básico en estos cambios es la modificación radical de la noción de función. En *Begriffsschrift*, esta noción caracteriza aquel componente en una expresión que se considera fijo en relación a la posibilidad de variar el componente restante. En *Grundgesetze*, Frege adopta la noción matemática de función como base para desarrollar una noción lógica de función: una categoría ontológica que se caracteriza por su insaturación y por asignar un valor a cada entidad adecuada para saturarla. Este cambio radical es consecuencia directa de la necesidad de que, desde la perspectiva de Frege, las proposiciones de la conceptografía posibiliten la definición de las entidades aritméticas básicas y describir la estructura ontológica del universo.

La completa transformación de la noción de función va asociada a un cambio de gran calado: con el propósito de justificar la tesis logicista, Frege desarrolla una teoría formalizada con un universo formado por objetos y funciones. Esta teoría dispone de un conjunto de axiomas específicos de su universo y de una serie de herramientas lógicas que posibilitan su formalización. En *Grundgesetze* no hay distinción entre estos dos elementos; desde la perspectiva de Frege, la teoría desarrollada en este texto es, genuinamente, lógica. Ahora bien, queremos ocuparnos exclusivamente de la parte formal de la teoría lógica de *Grundgesetze*, esto es, del fragmento que podría verse, como la conceptografía de 1879, como un sistema formal en sentido moderno. Así pues, únicamente consideramos el fragmento de la teoría que en la actualidad denominaríamos propiamente 'lógica'. Llamaremos 'conceptografía' a este fragmento. Considerar únicamente la conceptografía de *Grundgesetze* permite realizar una comparación directa con la conceptografía de *Begriffsschrift* y, por lo tanto, apreciar completamente la evolución del desarrollo formal de Frege. Así pues, no forma parte de nuestros intereses contribuir a la cuestión de la vigencia del logicismo. Precisamente por ello, no trataremos la paradoja de Russell en el capítulo presente.

A lo largo de este capítulo proporcionaremos, por un lado, una exposición general de los elementos básicos de *Grundgesetze* y, por el otro, una reconstrucción del lenguaje de la conceptografía de 1893-1903. Tras esta introducción, la segunda sección (6.2) ofrecerá una discusión de carácter histórico acerca de la concepción de Frege en *Grundgesetze* de la naturaleza y la justificación de las leyes lógicas. La tercera sección (6.3) expondrá las nociones básicas que constituyen el universo de la teoría lógica de *Grundgesetze*. Tras estas secciones, pasaremos a considerar propiamente la conceptografía de 1893-1903. En la cuarta sección (6.4) se presentarán los componentes primitivos de su lenguaje, de tal manera que se introducirán tanto las condiciones sintácticas que regulan su uso como su interpretación semántica. Finalmente, la quinta sección (6.5) reconstruirá las directrices de naturaleza sintáctica que regulan la formación de expresiones complejas y las substituciones[185].

[185]Estando este capítulo en un momento avanzado de redacción, hemos tenido noticia de 'The logical system of Frege's *Grundgesetze*' [Cadet; Panza, 2015]. En este artículo, M. Cadet y M. Panza ofrecen una reconstrucción alternativa de la conceptografía de *Grundgesetze*. Con un planteamiento similar al nuestro, Cadet y Panza también extraen, en el artículo citado, los subsistemas para la lógica proposicional y la lógica de segundo orden de la conceptografía. Indicaremos en notas a pie tanto las coincidencias como las divergencias más significativas.

6.2 Leyes lógicas: naturaleza y justificación

En el Prólogo de *Grundgesetze*, Frege ofrece una caracterización de las leyes de la lógica que, en gran medida, precisa y desarrolla su planteamiento al respecto presente en 'Logik' [Frege, 1882e], que hemos considerado en el apartado 5.3. En el texto de 1893, el contexto de la exposición de Frege es una discusión con la lógica de orientación psicologista. Uno de los aspectos en los que el autor más insiste en esta discusión es en la necesidad de desvincular completamente las leyes de la lógica de la psicología, y esta desvinculación es la culminación de un proceso que tiene su inicio, al menos, en 'Logik' [Frege, 1882e] y en *Grundlagen*.

El punto de partida del planteamiento de Frege es la distinción entre leyes descriptivas y leyes prescriptivas:

> "It is commonly granted that the logical laws are guidelines which thought should follow to arrive at the truth; but it is too easily forgotten. The ambiguity of the word "law" is here fatal. In one sense it says what is, in the other it prescribes what ought to be. Only in the latter sense can the logical laws be called laws of thought, in so far as they legislate how one ought to think. Every law stating what is the case can be conceived as prescriptive, one should think in accordance with it, and in that sense it is accordingly a law of thought. This holds for geometrical and physical laws no less than for the logical. The latter better deserve the title "laws of thought" only if thereby it is supposed to be said that they are the most general laws, prescribing how to think wherever there is thinking at all." [Frege, 1893, p. xv]

Las leyes de la psicología describen los procesos a través de los cuales tiene lugar el pensamiento y, en particular, el razonamiento. No establecen criterios a los que debe adecuarse un razonamiento correcto; estas leyes se limitan a caracterizar cómo se produce el pensamiento. Las leyes de la lógica, en cambio, indican cómo debe ser un razonamiento correcto, de modo que toda argumentación válida debe aplicarlas. Así pues, las leyes de la lógica pueden considerarse leyes del pensamiento sólo en la medida en que poseen carácter prescriptivo, y no meramente descriptivo[186].

[186]De acuerdo con lo que plantea M. Beaney en 'Analytic Philosophy and History of Philosophy' [Beaney, 2013b, p. 233], el origen del anti-psicologismo de Frege en la consideración de la naturaleza de las leyes de la lógica debe remontarse a Kant. En efecto, en la conocida como *Jächse Logik* [Kant, 1800], Kant plantea una distinción análoga a la de Frege respecto a las leyes del pensamiento:

En este sentido, las leyes lógicas regulan la justificación de lo verdadero y, por ello, son parte constituyente de toda demostración (*Beweis*). Al fin y al cabo, una demostración, esto es, el modo de justificación propio de la lógica, muestra de forma absolutamente incontrovertida que una proposición es verdadera. Ser verdadero, desde el punto de vista de Frege, debe distinguirse de ser tomado como verdadero (*Fürwahrgehalten werden*) o, dicho en otras palabras, del reconocimiento de verdad[187]. Una demostración muestra que una proposición es verdadera, mientras que una justificación no lógica proporciona razones para que una proposición sea tomada como verdadera (en virtud de las cuales puede ser sometida a aseveración). La distinción entre ser verdadero y ser tomado como verdadero permite a Frege establecer un criterio para especificar la naturaleza de las leyes de la lógica:

> "Some logicians, to be sure, do presuppose *psychological* principles in logic. But to bring such principles into logic is just as absurd as to derive morals from life. If we were to take principles from psychology, i.e., from observations concerning our understanding, we would merely see *how* thinking does take place and *how* it *is* under various subjective obstacles and conditions; this would lead then to cognition of merely *contingent* laws. In logic, however, the question is not about *contingent* but about *necessary* rules; not how we do think, but how we ought to think. The rules of logic must thus be derived not from the *contingent* but from the necessary use of the understanding, which one finds in oneself apart from all psychology. In logic we do not want to know how the understanding is and does think and how it has previously proceeded in thought, but rather how it ought to proceed in thought. Logic is to teach us the correct use of the understanding, i.e, that in which it agrees with itself." [Kant, 1800, p. 529]

Véase también *Kritik der reinen Vernunft* [Kant, 1781, A54/B78]. Este planteamiento puede hallarse, además, en *Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie* [Herbart, 1813, §34, pp. 53-54], de Herbart. Desde la perspectiva de G. Gabriel en 'Existenz- und Zahlaussage. Herbart und Frege' [Gabriel, 2001, pp. 110-111], tanto Herbart como Frege siguen a Kant en la defensa de la independencia de la lógica frente a la psicología.

[187] Mediante el estudio detallado de las fuentes textuales de Kant, F. Brentano (1838-1917) y el propio Frege, M. Kremer argumenta convincentemente en 'Judgement and Truth in Frege' [Kremer, 2000] en favor de considerar que Frege usa las expresiones '*fürwahrhalten*' y '*als wahr anerkennen*' (respectivamente, 'tomar como verdadero' y 'reconocer como verdadero') de modo equivalente. Esta asociación es relevante en la interpretación del planteamiento epistemológico de Frege y esclarecedor respecto a sus influencias filosóficas. Además, posibilita entender la posición del autor en *Grundgesetze* como un estadio más elaborado de su posición en 'Logik' [Frege, 1882e] y *Grundlagen.*

Seguimos el planteamiento de G. Gabriel en 'Frege's epistemology's in disguise' [Gabriel, 1996, pp. 367-370] según el cual una demostración establece las razones para que una proposición sea verdadera, mientras que una justificación no-lógica proporciona razones para que un sujeto tome una proposición como verdadera. Esta asociación permite comprender la vinculación entre el planteamiento temprano de Frege de 'Logik' [Frege, 1882e] y el maduro de *Grundgesetze.*

> "(...) I can only say: being true is different from being taken to be true, be it by one, be it by many, be it by all, and is in no way reducible to it. It is no contradiction that something is true that is universally held to be false. By logical laws I do not understand psychological laws of taking to be true. If it is true that I write this in my room on 13th July, 1893, while the wind is howling outside, then it remains true even if all humans should later hold it to be false. If being true is thus independent of anyone's acknowledgement, then the laws of being true are not psychological laws either but boundary stones which are anchored in an eternal ground, which our thinking may wash over but yet cannot displace. And because of this they set the standards for our thinking if it wants to attain the truth." [Frege, 1893, pp. xvi-xvi]

La verdad de las leyes de la lógica puede asociarse a su validez intrínseca, esto es, al hecho de que reflejan la estructura de las argumentaciones correctas y, por lo tanto, son aplicables con completa generalidad. Como Frege indica, la validez de estas leyes no está de ningún modo causada por el hecho de que sean tomadas como verdaderas; son verdaderas independientemente del hecho de que alguien las reconozca como tal. Esto significa que las leyes lógicas pueden ser tomadas como falsas e, incluso, que es posible razonar incorrectamente. Su validez no impide que pueda llevarse a cabo un razonamiento sin aplicar la ley lógica correspondiente. Ahora bien, Frege ha planteado el carácter prescriptivo de estas leyes: regulan toda argumentación que tenga la pretensión de corrección. Así pues, tomar una ley lógica como verdadera garantiza un sentido distinto de validez, a saber, su validez para nosotros[188]. Cuando un sujeto aprehende el significado de una ley lógica y asevera aquello que expresa en un juicio, aprecia la necesidad de usar este juicio para razonar correctamente, y únicamente bajo estas condiciones puede considerarse una ley del pensamiento. Así pues, el hecho de que las leyes de la lógica sean verdaderas permite que, a su vez, sean tomadas como verdaderas para expresarlas en un juicio y, en último término, causa su validez para nosotros, esto es, su carácter normativo, y no al revés. Es en este sentido en el que las leyes de la lógica pueden considerarse prescriptivas.

[188]La aplicación de las propiedades de 'validez en sí' y 'validez para nosotros' (respectivamente, '*Geltung an sich*' y '*Geltung für uns*') a las leyes de la lógica, implícita en el planteamiento de Frege (aunque no use explícitamente estos términos), es un indicio más de la influencia que recibió de Windelband. Véase 'Die Prinzipien der Logik' [Windelband, 1912, p. 18]. Tomamos esta nueva vinculación entre Frege y Windelband del artículo 'Frege and the German Background to Analytic Philosophy' [Gabriel, 2013, pp. 288], de G. Gabriel.

Recapitulando, las leyes lógicas tienen, en primer lugar, carácter prescriptivo, puesto que establecen los criterios que debe seguir toda inferencia correcta. En segundo lugar, son un componente constitutivo de toda demostración, en la medida en que son las herramientas para mostrar que una proposición es verdadera. Finalmente, la normatividad de las leyes de la lógica es causada por su validez[189].

Frege aborda la cuestión acerca de cómo las leyes lógicas, en tanto que proposiciones universalmente válidas, pueden ser justificadas. Su planteamiento es paralelo al de 'Logik' [Frege, 1882e], que hemos considerado en el apartado 5.3. Toda justificación de una ley lógica pretende demostrar su verdad; aunque sólo las justificaciones de naturaleza lógica logran tal objetivo. Tal y como hemos planteado, las justificaciones lógicas adquieren la forma de una demostración. Desde la perspectiva de Frege, la única demostración admisible para una ley lógica es su derivación a partir de otras leyes lógicas. En este sentido, es posible probar la validez de los teoremas lógicos, puesto que pueden obtenerse por medio de de una inferencia. Sin embargo, hay casos en los que una deducción tal no es posible, por lo que hay leyes lógicas, las leyes básicas, cuya verdad no puede justificarse lógicamente:

> "As to the question, why and with what right we acknowledge a logical law to be true, logic can respond only by reducing it to other logical laws. Where this is not possible, it can give no answer. Stepping outside logic, one can say: our nature and external circumstances force us to judge, and when we judge we cannot discard this law—of identity, for example—but have to acknowledge it if we do not want to lead our thinking into confusion and in the end abandon judgement altogether. I neither want to dispute nor to endorse this opinion, but merely note that what we have here is not a logical conclusion. What is offered here is not a ground of being true but of our taking to be true." [Frege, 1893, p. xvii]

Dado que no es posible justificar por medios lógicos una ley básica, Frege desvincula de la lógica el reconocimiento de su verdad. Ahora bien, todo acto de razonamiento que pretenda alcanzar la verdad y que tenga, por lo tanto, la pretensión de ser correcto, debe reconocer la verdad de las leyes básicas (al menos, de aquellas que intervienen en el razonamiento), y esta circunstancia puede considerarse una suerte de justificación. El reconocimiento de

[189]El planteamiento de *Grundgesetze* es reproducido de forma más sucinta, pero prácticamente sin cambios, en 'Der Gedanke. Eine logische Untersuchung' [Frege, 1918, pp. 342-343].

la verdad de una ley básica, por lo tanto, es necesario si se pretende llevar a cabo una argumentación. Como hemos dicho, la necesidad de estas leyes no está justificada por medios lógicos, ya que es únicamente una necesidad para el sujeto. Desde la perspectiva de Frege, la pretensión de razonar correctamente sin reconocer la verdad de alguna ley básica, que es una ley de la verdad y, por lo tanto, prescriptiva acerca de lo que puede reconocerse como verdadero, es un absurdo[190].

6.3 Universo de *Grundgesetze*

Dedicaremos esta sección a exponer los elementos básicos que constituyen la teoría lógica de *Grundgesetze*: las nociones de función y objeto, así como las que se definen a partir de ellas como casos particulares, esto es, las nociones de concepto y relación, y de valor de verdad y curso de valores, respectivamente. Finalmente, analizaremos la complejidad que manifiesta la noción lógica de función y el hecho de que la distinción entre función y argumento debe reflejar esta complejidad.

6.3.1 Función y objeto

El universo de *Grundgesetze* está compuesto de dos tipos de entidad: *funciones* y *objetos*. Así pues, función y objeto son categorías de carácter ontológico bajo las que cae toda entidad que sea de consideración para la lógica. Dado que son nociones primitivas, función y objeto no admiten definición; Frege únicamente proporciona algunas indicaciones para clarificar la naturaleza de cada una de ellas. Estas indicaciones se reducen a plantear que función y objeto son categorías complementarias. En palabras de Frege, “I count as an *object* everything that is not a function” [Frege, 1893, §2, p. 7].

[190]Frege mantuvo su concepción de la naturaleza de las leyes básicas incluso después de derivar la paradoja del sistema formal de *Grundgesetze*. En ‘Logik in der Mathematik’ [Frege, 1914] pone de manifiesto un planteamiento similar al que acabamos de presentar:

> “The axioms are truths as are the theorems, but they are truths for which no proof can be given in our system, and for which no proof is needed. It follows from this that there are no false axioms, and that we cannot accept a thought as an axiom if we are in doubt about its truth; for it is either false and hence not an axiom, or it *is* true but stands in need of proof an hence is not an axiom. Not every truth for which no proof is required is an axiom, for such a truth might still be proved in our system, and it is possible for a truth to be an axiom in one system and not in another.” [Frege, 1914, p. 205]

En el apartado 1.3.1 hemos explicado por qué la noción de función de *Begriffsschrift* no puede identificarse con la noción matemática de función, a pesar de que hay cierto grado de analogía entre ellas. En un contexto matemático, una función es una asignación de un único valor a cada argumento adecuado. Tal y como hemos señalado en el apartado 5.6.2, a partir de 1891 Frege adopta la noción matemática de función como base para la noción de función de *Grundgesetze*.

Por lo tanto, es significativo que, al inicio del párrafo de *Grundgesetze* en el que se presenta la noción de función, Frege incluya una nota en la que remite a *Funktion und Begriff* [Frege, 1891] y 'Über Begriff und Gegenstand' [Frege, 1892b], y en la que afirma: "[m]y *Begriffsschrift* (Halle a.S., 1879) no longer corresponds entirely to my present standpoint; it is therefore to be consulted as an elucidation of what is presented here only with caution" [Frege, 1893, p. 5][191].

La asociación de las funciones de *Grundgesetze* con funciones en sentido matemático lleva a Frege a aclarar lo que, desde su perspectiva, es una confusión relativamente frecuente en la práctica matemática del siglo XVIII: la confusión entre el símbolo de una función y la función misma[192]. El autor entiende que las funciones son, propiamente, aquello que designa un tipo particular de expresión:

> "If the task is to give the original reference of the word 'function' as used in mathematics, then it is easy to slip into calling a function of x any expression that is formed from 'x' and certain specific numbers by means of the notations for sum, product, power, difference, etc. This is incorrect, since it presents the function as an *expression*, as a combination of signs, and not as what is designated by these. One will therefore be tempted to say 'reference of an expression' instead of 'expression'." [Frege, 1893, §1, p. 5]

Las expresiones que designan funciones, esto es, los nombres de funciones, tienen una única característica clave, a saber, "[t]he expression of a *function* is *in need of completion*, *unsaturated*" [Frege, 1893, §1, p. 5], Así pues, la única indicación que Frege ofrece para reconocer una función es el hecho de que sea designada por una expresión incompleta, lo cual refleja su naturaleza *insaturada*.

[191]Por esta razón, cuando el contexto no sea lo suficientemente claro, en lo sucesivo indicaremos explícitamente a qué concepto de función nos referimos y distinguiremos entre 'función de *Begriffsschrift*' (o 'función de 1879') y 'función de *Grundgesetze*'.

[192]Respecto a la concepción de la noción de función en la práctica matemática del siglo XVIII y a la crítica de Frege a esta concepción, véase la nota 181.

Inspirándose en el modo mediante el cual letra 'x' indica en matemáticas la insaturación de una función, Frege concibe un modo de señalar en las explicaciones de la conceptografía que el nombre de una función es incompleto. Para este propósito, usa la letra griega 'ξ':

> "The letter 'x' serves only to hold open places for a number-sign that is to complete the expression, and so marks the special kind of need for completion that constitutes the peculiar nature of the function just designated. In the sequel, instead of 'x' the letter 'ξ' will be used for this purpose. This place-holding is to be understood in such a way that all places occupied by 'ξ' must always be filled just by the same, and never by different signs." [Frege, 1893, §1, p. 6]

A diferencia de las funciones, que se reconocen en el hecho de que las expresiones que las designan son incompletas, los nombres de objetos, esto es, los nombres propios, son completos y no requieren saturación: "names of objects, the *proper names*, do not in themselves carry argument places; like the object themselves, they are saturated" [Frege, 1893, §2, p. 7]. Parece razonable afirmar que, desde el punto de vista de la lógica, la característica relevante de los objetos es que un enunciado que exprese la identidad de un objeto consigo mismo es siempre verdadero[193].

Frege presenta la noción de *argumento* de forma complementaria a la de función. La incompleción del nombre de una función esta indicada por las apariciones de 'ξ', que señalan los lugares de argumento. El nombre de una función puede requerir ser completado en distintos lugares, y cada uno de ellos estará indicados por una aparición de 'ξ'. El argumento de una función es aquello que designa cada símbolo que ocupa todos los lugares de

[193] Una buena muestra de la completa generalidad con la que Frege concibe la aplicación de estas nociones lógicas puede hallarse en el no publicado 'Dialog mit Pünjer über Existenz' [Frege, 1883], redactado poco antes de la publicación de *Grundlagen*:

> "85. PÜNJER: How do you explain 'There are living beings'?
>
> 86. FREGE: As follows: the statement that A, no matter what I take A to be, does not fall under the concept 'living being' is false.
>
> 87. PÜNJER: What are we supposed to have in mind by A?
>
> 88. FREGE: The meaning I assign to A is not meant to be subject to any restriction at all. If I am meant to say anything about it, it can only be something self-evident, such as $A = A$." [Frege, 1883, p. 59]

A pesar de que la publicación de *Grundgesetze* tiene lugar diez años después de la elaboración de este texto, su planteamiento respecto a la naturaleza de los objetos que la lógica maneja es vigente en 1893.

argumento del nombre de una función. Por ejemplo, la expresión '$(2+3.\xi^2).\xi$' designa una función unaria y tiene dos lugares de argumento distintos; ahora bien, todas las apariciones de 'ξ' son reemplazables por el nombre de un único argumento, que puede ser, por ejemplo, '1'.

Dado el modo en que se han presentado tanto la distinción entre función y argumento como la distinción entre función y objeto, provisionalmente sucede que sólo los objetos pueden ser argumentos. Sin embargo, más adelante comprobaremos que la noción de función es compleja, y que no siempre sucede que los argumentos de una función son objetos. De hecho, Frege adapta la distinción entre función y argumento a medida que desarrolla la complejidad de la noción de función. En determinados casos, una función de un tipo específico puede ser el argumento de otra función con algunas características particulares. Así pues, en ocasiones es posible combinar dos funciones de características distintas, de modo que una función, de naturaleza insaturada, pueda formar una entidad saturada junto con un argumento también insaturado.

El nombre de una función es siempre incompleto, y el nombre de un argumento complementa al de la función para formar una expresión completa. El resultado de saturar el nombre de una función mediante el nombre de un argumento es el nombre de un objeto; el *valor* que la función asigna al argumento:

> "The function is completed by the argument; and that which results from this completion I call the *value* of the function for the argument. Thus we obtain a name of the value of a function for an argument if we fill in the argument places of the name of the function with the name of the argument." [Frege, 1893, §1, p. 6]

Toda función de *Grundgesetze* asigna un valor a cada uno de sus argumentos. En este sentido, la explicación de Frege captura la naturaleza de las funciones matemáticas, aunque es particularmente cuidadoso en separar nítidamente el aspecto lingüístico del aspecto semántico. En cualquier caso, la asignación de un valor para cierto argumento por parte de una función es paralelo a la formación del nombre complejo a partir de la combinación del nombre de una función y el nombre de un argumento: el nombre complejo así formado siempre designa el valor correspondiente. Por ejemplo, el valor que la función $(2+3.\xi^2).\xi$ asigna al argumento 1 es el significado del nombre '$(2+3.1^2).1$', esto es, 5. Ni el nombre de un argumento ni el nombre del valor forman parte del nombre de una función; éste es incompleto por naturaleza y sólo cuando es completado por el nombre de un argumento proporciona como resultado el nombre del correspondiente valor. De ello se desprende que la expresión que designa el valor de una función para cierto argumento es siempre completa.

Una modificación respecto a este panorama teórico inicial, presente ya en *Begriffsschrift* y, de hecho, una de sus contribuciones novedosas y remarcables, es la capacidad del lenguaje de referirse a funciones de más de un argumento. En *Grundgesetze*, probablemente por razones metodológicas, Frege sólo introduce la notación correspondiente a funciones binarias, pero es claro que no hay ningún impedimento teórico para considerar funciones con más de dos argumentos. Esencialmente, las funciones binarias se distinguen de las funciones unarias por el hecho de que deben ser saturadas por dos argumentos. Como veremos, esta circunstancia plantea una diferencia de carácter ontológico fundamental.

Si los lugares de argumento de las funciones unarias se indican mediante la consonante griega 'ξ', es preciso usar una nueva letra para indicar los lugares de argumento de las funciones binarias, 'ζ'. Así, el nombre '$(\xi + \zeta)^2 + \zeta$' designa una función binaria, que requiere ser saturada por dos argumentos no necesariamente distintos. Frege asocia la doble saturación de las funciones binarias a un proceso progresivo, dividido en dos pasos, por medio de dos argumentos. El resultado de este proceso es que la función asigna un valor para sus dos argumentos. En palabras de Frege:

> "So far only functions with a single argument have been talked about; but we can easily pass on to *functions with two arguments*. These stand *in need of double completion* insofar as a function with one argument is obtained after their completion by one argument has been effected. Only after yet another completion do we arrive at an object, and this object is then called the *value* of the function for the two arguments." [Frege, 1893, §4, p. 8]

Frege plantea cómo puede concebirse una función unaria a partir de una función binaria: una función unaria resulta de saturar parcialmente una función binaria con un argumento. Por ejemplo, la función binaria $(\xi+\zeta)^2+\zeta$ pasa a ser la función unaria $(3 + \zeta)^2 + \zeta$ si se completa con el argumento 3, cuyo nombre ocupa los lugares de argumento correspondientes a 'ξ'. Esta perspectiva permite una gran flexibilidad en el tratamiento de las funciones, ya que siempre podrá considerarse que el lugar de un símbolo que forme parte del nombre de una función unaria corresponde al lugar de argumento de una función binaria previa.

Desde una perspectiva puramente lógica, una función unaria es una entidad que asigna un valor a cada argumento. En este sentido, la noción de función de *Grundgesetze* captura la naturaleza de la noción matemática de función. Ahora bien, Frege extiende la noción lógica de función respecto al referente matemático en dos sentidos de fundamental importancia. Ambos han sido anunciados con anterioridad para destacar las diferencias entre la noción de función de *Begriffsschrift* y la propia de *Grundgesetze*.

En primer lugar, en palabras de Frege, "the domain of what is admissible as an argument has to be expanded and extended to objects in general" [Frege, 1893, §2, p. 7]. Así pues, cualquier objeto puede ser el argumento de una función del universo, de modo que las funciones de la conceptografía deben definirse para tomar como argumento absolutamente cualquier objeto.

En segundo lugar, Frege se ve forzado a extender el dominio de posibles valores de las funciones. Si $\xi^2 = 4$ es una función, el resultado de saturarla con un objeto, como por ejemplo 0, debe ser un objeto: el valor de la función para el argumento 0. Esto significa que '$0^2 = 4$' debe designar un objeto. La dificultad está en determinar la naturaleza del objeto designado por '$0^2 = 4$'. Desde la perspectiva de Frege, $0^2 = 4$ es un *valor de verdad*:

> "[I]f I take the numbers $0, 1, 2, 3$, one after another, as the argument of the function, $\xi^2 = 4$, then I do not obtain numbers.
>
> '$0^2 = 4$, '$1^2 = 4$', '$2^2 = 4$', '$3^2 = 4$'
>
> are expressions of thoughts, some true, some false. I express it like this: the value of the function $\xi^2 = 4$ is either the *truth-value* of the true, or that of the false." [Frege, 1893, §2, pp. 6-7]

Así, por un lado, se estipula que aquello que designan los enunciados, como '$0^2 = 4$', son valores de verdad. Dado que los enunciados pueden verse como el nombre del valor que asigna una función como '$\xi^2 = 4$' a un argumento, como 0, este valor debe ser un objeto, puesto que su nombre es completo. Por lo tanto Frege concluye que los valores de verdad son objetos del universo. Esta circunstancia es absolutamente imprescindible para poder tratar los objetos y relaciones como tipos particulares de funciones.

Ambos aspectos se apoyan en un planteamiento semántico que Frege desarrolla en *Funktion und Begriff* [Frege, 1891], 'Über Sinn und Bedeutung' [Frege, 1892a] y, finalmente, en 'Über Begriff und Gegenstand' [Frege, 1892b], escritos entre 1891 y 1892. De acuerdo con este planteamiento, de modo similar a como un nombre propio designa un objeto, un enunciado designa un valor de verdad. Toda expresión que designa un objeto, sea un valor de verdad o un objeto cualquiera, se considera un nombre propio. Y, de hecho, dado que, como veremos, los nombres propios son, en general, el resultado de complementar el nombre de una función con el de un argumento, Frege no distingue entre términos y enunciados: todos los nombres propios de la conceptografía (aquellos que designan un objeto, sea de la naturaleza que sea) son, en este sentido, términos. Los enunciados se consideran, por tanto, términos; únicamente se distinguen del resto de nombres propios porque designan valores de verdad y no cualquier otro objeto.

Frege resuelve la dificultad de que dos nombres propios distintos puedan designar un mismo objeto con su célebre distinción entre sentido (*Sinn*) y significado (*Bedeutung*)[194]. Un nombre expresa un sentido y refiere o designa a su significado. Diremos, por ejemplo, que un nombre propio como '$2 + 2$' designa un objeto, 4, y expresa un sentido, que captura el particular modo de presentación del objeto; y análogamente que un nombre de función como '$\xi + \zeta$' expresa un sentido y designa una función (la operación suma). Frege también explica estas relaciones entre nombres y su significado recurriendo a ejemplos:

> "I distinguish, however, the *reference* [Bedeutung] of a name from its *sense*. '2^2' and '$2 + 2$' do not have the same *sense*, and nor do '$2^2 = 4$' and '$2+2 = 4$' have the same *sense*. The sense of a name of a truth-value I call a *thought*. I say further that a name *expresses* its sense and *refers to* [*bedeutet*] its reference. I *designate* with a name that which it refers to." [Frege, 1893, §2, p. 7]

Aunque Frege no lo afirma explícitamente en *Grundgesetze*, únicamente contempla la existencia de dos posibles valores de verdad: verdadero y falso[195]. Por lo tanto, una función como $\xi > 2$ sólo puede asignar dos valores: lo Verdadero o lo Falso.

[194] Usaremos 'significado' como traducción del sustantivo alemán '*Bedeutung*'. Esta elección no es, ni mucho menos, estándar. En la traducción de *Grundgesetze* de P. Ebert y M. Rossberg a la que recurrimos para las citas, se emplea '*reference*' para este mismo propósito. Ambos traductores son consistentes en la traducción de los derivados de '*Bedeutung*'; especialmente en las distintas formas del verbo '*bedeuten*'. Ahora bien, ésta no es la única opción: M. Black, en su traducción de 'Über Sinn und Bedeutung' [Frege, 1892a], traduce '*Bedeutung*' por '*meaning*' y M. Furth, en su traducción parcial a *Grundgesetze* [Frege, 1964b], toma '*denotation*' como el equivalente de este sustantivo. Añadiremos el término original alemán entre corchetes en aquellas citas en las que pueda haber alguna ambigüedad en la traducción.

[195] Véase el planteamiento de Frege acerca de esta cuestión en 'Über Sinn und Bedeutung' [Frege, 1892a]:

> "We are therefore driven into accepting the truth-value of a sentence as constituting what it means [als seine Bedeutung anzuerkennen]. By the truth-value of a sentence I understand the circumstance that it is true or false. There are no further truth-values. For brevity I call the one the True, the

Considerar los valores de verdad como objetos e introducirlos en el dominio de posibles valores de una función lógica (al tomarlos como el significado de un enunciado) puede parecer, de acuerdo con la presentación de Frege, un paso natural, pero es el resultado de un largo proceso de desarrollo cuyo inicio puede situarse en 1884, con la publicación de *Grundlagen*. Este proceso no culmina hasta la publicación de *Funktion und Begriff* [Frege, 1891]. La justificación estrictamente formal de la tesis logicista, que exige, desde el punto de vista de Frege, la introducción de cursos de valores como nociones básicas en la teoría lógica, depende en gran medida de este paso.

6.3.2 Concepto y relación

Una vez que los valores de verdad pueden considerarse objetos y que, en cuanto tales, son valores admisibles para las funciones, es posible llevar a cabo un paso fundamental en la jerarquía ontológica de *Grundgesetze*: la inclusión de los conceptos como un tipo particular de función unaria. Ciertamente, este movimiento está lejos de ser gratuito, dado que permite poner en estrecha relación la noción de función con una noción, la de concepto, que en opinión de Frege es sin lugar a dudas de naturaleza lógica.

En *Grundgesetze*, un *concepto* es una función unaria cuyos valores son siempre valores de verdad. De cada uno de los objetos a los que un concepto asigna lo Verdadero como valor, Frege afirma que caen bajo el concepto. Así se refleja en la conceptografía una de las relaciones más relevantes en lógica. Por ejemplo, dado que el valor del concepto $\xi^2 = 1$ para el argumento 1 es lo Verdadero, decimos que 1 cae bajo el concepto $\xi^2 = 1$, esto es, el concepto *ser una raíz cuadrada de 1*.

De modo similar a la introducción de la noción de concepto como un tipo particular de función unaria, Frege presenta las *relaciones* como funciones binarias cuyos valores son siempre valores de verdad:

> "The functions with two arguments $\xi = \zeta$ and $\xi > \zeta$, always have a truth-value as value (at least if the signs '$=$' and '$>$' are explained in the appropriate way). Such functions we will suitably call relations." [Frege, 1893, §4, p. 8]

---

other the False." [Frege, 1892a, p. 163]

El hecho de que sólo haya dos valores de verdad obedece a una exigencia de determinación propia de la definición de los conceptos lógicos, como veremos a continuación.

Respecto al uso de 'Verdadero' y 'Falso' para referirse al valor de verdad verdadero y al valor de verdad falso, respectivamente, véase la nota 184.

Nuevamente, mediante la limitación de los posibles valores, el autor introduce en la conceptografía una noción que, desde su perspectiva, es genuinamente lógica. La representación de las relaciones en este sistema formal tiene en cuenta el orden de los argumentos, de acuerdo con el lugar de argumento que ocupan sus respectivos nombres. Al fin y al cabo, '$3 > 2$' y '$2 > 3$' no significan lo mismo. Si el valor que una relación asigna a los argumentos es lo Verdadero, decimos que el primero de los argumentos está en la relación con el segundo. Por ejemplo, 3 está en la relación $\xi > \zeta$ con 2, lo cual equivale a afirmar que $3 > 2$ es lo Verdadero.

Frege introduce en *Grundgesetze* una exigencia de determinación en la definición de conceptos, que está presente en sus escritos a partir de 1884 y que, al menos implícitamente, es planteada en *Begriffsschrift*[196]. Esta exigencia es de carácter lógico y se aplica a aquellos conceptos admisibles en la conceptografía. En palabras de Frege:

> "A definition of a concept (a possible predicate) must be complete; it has to determine unambiguously for every object whether it falls under the concept or not (whether the predicate can be applied to it truly). Thus, there must be no object for which, after the definition, it remains doubtful whether it falls under the concept, even though it may not always be possible, for us humans, with our deficient knowledge, to decide the question. Figuratively, we can also express it like this: a concept must have sharp boundaries." [Frege, 1903, §56, p. 69]

La necesidad de que esté determinado, para cualquier objeto, si cae o no bajo un concepto es coherente con la presencia de dos valores de verdad. Los conceptos vagos, como, tomando el ejemplo de *Begriffsschrift*, *ser un puñado de judías*, no están determinados en este sentido y, por lo tanto, no son admisibles en lógica. Como Frege indica, la posibilidad de determinar, para todo objeto del universo, si cada uno cae o no bajo un concepto no depende de las capacidades cognoscitivas de un sujeto, ni siquiera depende del modo de presentación de los objetos; basta con que la definición de un concepto contemple la asignación de un valor a cada objeto. Naturalmente, esta cuestión es relativa a los integrantes del universo de *Grundgesetze*.

Frege extiende la exigencia de determinación en las definiciones de conceptos a todo tipo de funciones [Frege, 1903, §63, p. 75]. Así pues, para que una función cualquiera sea admisible en lógica, a cada argumento debe

[196]Véase nuestro tratamiento de la noción de determinación de *Begriffsschrift* en la nota 21.

asignársele un valor. En este sentido, no puede estar indeterminado en la definición de una función qué valor le corresponde a un argumento cualquiera.

El criterio de determinación en la definición de funciones ha suscitado cierta polémica en los estudios históricos recientes sobre la obra de Frege. En *Frege's Conception on Logic* [Blanchette, 2012a, cap. III, pp. 55-76] y en 'Frege on Shared Belief and Total Functions' [Blanchette, 2012b], P. Blanchette ofrece una interpretación distinta a la que aquí presentamos de este criterio, que denomina 'totality requirement'. Su planteamiento ha sido reconsiderado en 'Reply to Cook, Rossberg and Wehmeier' [Blanchette, 2015]. En opinión de Blanchette, el requisito de totalidad conlleva consecuencias inaceptables:

> "Frege is often held, and with a good deal of textual support, to have thought that every referring one- place function-term of first level must refer to a function that's defined over every object. This bizarre view, if upheld strictly, would have the result either (a) that such ordinary function terms as "+2" refer to functions that are defined over such objects as the Eiffel Tower, despite the fact that no competent user of the term is in possession of criteria that would determine the result of applying that function to that object, or (b) that such ordinary function-terms fail to refer. The disruptive effects of adopting the latter view include the conclusion that, given Frege's general semantic views, no sentence of ordinary arithmetic has a truth-value." [Blanchette, 2015, p. 3]

Dadas las circunstancias, Blanchette propone una interpretación alternativa de este requisito basada en dos elementos clave. En primer lugar, el requisito de totalidad debería interpretarse como un requisito restringido a un dominio específico de una disciplina matemática particular (típicamente, la aritmética) [Blanchette, 2015, p. 5]. En segundo lugar, Blanchette propone una reformulación de carácter lingüístico del requisito de totalidad, según la cual toda función designada por un término funcional debe estar definida, según su naturaleza, para cualquier objeto, función o n-tupla de la disciplina a los que sea posible referirse en el lenguaje [Blanchette, 2015, p. 6].

La interpretación de Blanchette ha sido discutida por R. T. Cook y K. Wehmeier en 'Comments on Patricia Blanchette's Book: *Frege's Conception on Logic*' [Cook, 2015] y 'Critical Remarks on *Frege's Conception on Logic* by Patricia Blanchette' [Wehmeier, 2015], respectivamente. Por su parte, Blanchette incluye en 'Reply to Cook, Rossberg and Wehmeier' [Blanchette, 2015] una réplica a estos artículos.

En sus artículos, Cook y Wehmeier plantean una serie de dificultades técnicas a las que debe hacer frente la interpretación de Blanchette. No es nuestra intención considerar aquí estas dificultades. Haremos, por contra, dos comentarios de carácter general.

En primer lugar, parece conveniente tratar de aclarar el sentido que tiene el requisito de totalidad para funciones en *Grundgesetze*. Tal y como hemos planteado, este requisito no es de naturaleza epistemológica, sino ontológica: establece un criterio para la definición de funciones, según el cual debe estar determinado, para cada argumento, que la función asigne un valor. Este criterio es independiente de nuestra capacidad para averiguar dicho valor. En este sentido, se trata de un requisito similar a la exigencia planteada por Frege de que todo enunciado de carácter científico tenga un valor de verdad, y que éste sea o bien lo Verdadero, o bien lo Falso. Ciertamente, hay multitud de enunciados de disciplinas científicas para los que es difícil, desde una perspectiva subjetiva, asignar un valor de verdad. Pero esta circunstancia no afecta en lo más mínimo a la exigencia de que, desde la perspectiva de Frege, tales enunciados tengan, de hecho, un valor de verdad. Así pues, el requisito de totalidad para funciones, como reflejan las definiciones de las funciones primitivas de la conceptografía de *Grundgesetze*, conlleva, simplemente, la necesidad de que, además de determinar un valor pertinente para aquellos argumentos relevantes en un contexto determinado, las funciones también asignen un valor, aunque sea arbitrario, para el resto de argumentos. Por ejemplo, tal y como expondremos en el apartado 6.4.2, en la definición de la función horizontal se asigna un valor relevante a todo argumento que sea un valor de verdad, y un valor arbitrario (el valor de verdad Falso) a cualquier otro argumento. Sin duda, debe aceptarse que, siguiendo el ejemplo de Blanchette, decidir el valor de la función $+2$, en el caso de que esta función se defina en la conceptografía, para Torre Eiffel como el argumento, puede plantear dificultades de tipo epistemológico. No obstante, desde la perspectiva de Frege, el valor que dicha función asigna a la Torre Eiffel debe estar perfectamente determinado en la definición su definición.

En segundo lugar, y para concluir, debemos remarcar que la teoría desarrollada en *Grundgesetze* es, desde la perspectiva de Frege, puramente lógica. Su universo contiene cualquier objeto porque, siendo la lógica la disciplina más general, sus leyes deben ser universalmente válidas[197]. Plantear, como

[197] En el artículo no publicado 'Logik' [Frege, 1897], escrito en los años que separan la publicación de los dos volúmenes de *Grundgesetze*, Frege hace un comentario general acerca de la lógica que hace patente su plena generalidad:

> "[T]he task we assign to logic is only that of saying what holds with the utmost generality of all thinking, whatever its subject-matter. We must

hace Blanchette, que las funciones de *Grundgesetze* estén concebidas para ser definidas en un dominio matemático específico es contrario, por un lado, al objetivo general de este texto y, por el otro, a la concepción que Frege manifiesta tener en multitud de ocasiones acerca de las proposiciones de la lógica.

6.3.3 Curso de valores y extensión de concepto

La noción de *curso de valores* es primitiva en la teoría lógica que constituye *Grundgesetze*. Sin embargo, no forma parte de la lógica que vamos a considerar, esto es, del fragmento puramente formal de la teoría desarrollada en este texto.

En *Grundgesetze* no hay ninguna definición explícita de los cursos de valores, y Frege ni siquiera ofrece indicaciones aclaratorias acerca de su naturaleza. El único elemento significativo al respecto es el hecho de que todo curso de valores es relativo a una función. Siguiendo la analogía geométrica presente en *Funktion und Begriff* [Frege, 1891], el curso de valores de una función puede asociarse a la curva descrita por la función:

> "The method of analytic geometry supplies us with a means of intuitively representing the values of a function for different arguments. If we regard the argument as the numerical value of an abscissa, and the corresponding value of the function as the numerical value of the ordinate of a point, we obtain a set of points that presents itself to intuition (in ordinary cases) as a curve. Any point on the curve

---

> assume that the rules of our thinking and for our holding something to be true are prescribed by the laws of truth. The former are given along with the latter. Consequently we can also say: logic is the science of the most general laws of truth." [Frege, 1897, p. 129]

Compárese con la valoración de Blanchette acerca de la universal validez de las leyes de la lógica:

> "[O]ne might think, a law of logic is not the kind of thing that can be "false of" any domain. But here, the apparent difficulty is not a difficulty for Frege. Frege does not subscribe to the modern view of the laws of logic as "true in" every domain: his laws of logic quite explicitly contain existential commitments falsified by, e.g., any finite domain, any domain lacking value-ranges, and so on. Basic Law V is a self-evident truth, in Frege's view, and a law of logic; this means that if one's theory is to satisfy the laws of logic, then its domain must contain a value-range for every function, and the value-ranges must obey Law V." [Blanchette, 2015, pp. 11-12]

> corresponds to an argument together with the associated value of the function." [Frege, 1891, pp. 141-142]

Más allá de esta indicación de carácter intuitivo, en lugar de una definición explícita, Frege introduce un criterio de igualdad entre cursos de valores:

> "I use the words
>
> > "the function $\Phi(\xi)$ has the same *value-range* as the function $\Psi(\xi)$"
>
> always as co-referential with the words
>
> > "the functions $\Phi(\xi)$ and $\Psi(\xi)$ always have the same value for the same argument"." [Frege, 1893, §3, p. 7]

Este criterio de igualdad entre cursos de valores corresponde, en su formulación rigurosa en la conceptografía, a una ley básica, que Frege denomina ley básica (V). Esta ley básica estipula el uso de los cursos de valores en la conceptografía por medio de igualdades, pero no hay una definición explícita análoga a la que se va a ofrecer, por ejemplo, de las funciones primitivas de la conceptografía. De hecho, el uso por parte de Frege de cursos de valores en la conceptografía presupone de forma implícita dos elementos clave. Por un lado, se asume que los cursos de valores son objetos del universo y que, por lo tanto, son argumentos aceptables de las funciones de la conceptografía. Por el otro, se mantiene un principio de comprensión, según el cual a toda función de primer nivel le corresponde un curso de valores.

La ley básica (V) es la piedra angular del intento de Frege de fundamentar lógicamente la aritmética. Tal y como hemos comentado en el apartado 5.6.2, Frege introduce informalmente esta ley básica en *Funktion und Begriff*:

> "The possibility of regarding the equality holding generally between values of functions as a particular equality, viz. an equality between value-ranges is, I think, indemonstrable; it must be taken to be a fundamental law of logic." [Frege, 1891, p. 142]

Tradicionalmente se considera que la *extensión de un concepto* es la colección de objetos que caen bajo el concepto. Si bien en *Grundgesetze* no hay extensiones de concepto en este sentido, sí se dispone de cursos de valores de conceptos, que desempeñan un papel análogo al de las extensiones de concepto de la lógica tradicional.

La vinculación entre cursos de valores y extensiones de concepto podría llevar a asociar la noción de curso de valores con la de clase. El mismo Frege lleva a cabo una asociación tal:

> "When logicians have long spoken of the extension of a concept and mathematicians have spoken of sets, classes, and manifolds, then such a conversion [of a generality of an equality into an equality] forms the basis of this too; for, one may well take it that what mathematicians call a set, etc., is really nothing but the extension of a concept, even if they are not always clearly aware of this." [Frege, 1903, §147, p. 148]

Desde el punto de vista de Frege, la noción de clase es aceptable en la medida que es entendida como extensión de concepto. En este sentido, el autor defiende que la ley básica (V) es la base de ambas nociones.

6.3.4 Niveles funcionales y tipos de argumento

Las categorías de función y objeto son complementarias y exhaustivas de toda entidad del universo. Las funciones son insaturadas y los objetos son saturados. Es preciso, sin embargo, destacar que la noción de función es compleja, y que a su vez se divide en categorías distintas, ya que hay distintos modos en los cuales una función puede ser insaturada. Esta circunstancia responde, en parte, a una nueva extensión por parte de Frege de la noción matemática de función, en la medida en que los posibles argumentos no tienen por qué ser únicamente objetos. Hay dos criterios para distinguir tipos de funciones: la ariedad y la naturaleza de los argumentos correspondientes.

Por razones de conveniencia, en *Grundgesetze* únicamente hay dos tipos de funciones según su ariedad: funciones unarias y binarias. Frege considera explícitamente que funciones con distinta ariedad pertenecen a categorías distintas dado su distinto grado de insaturación:

> "*Functions with two arguments* are just as fundamentally distinct from *functions with one argument* as the latter are from *objects*. For, while the latter are fully *saturated*, functions with two arguments are less saturated that those with one argument, which are already *unsaturated*." [Frege, 1893, §21, p. 37]

En cuanto a la naturaleza de los argumentos, las funciones se organizan en *niveles*: una función de primer nivel tiene objetos como argumentos, una función de segundo nivel tiene funciones de primer nivel como argumentos, una función de tercer nivel tiene funciones de segundo nivel como argumentos y así sucesivamente[198]. En *Grundgesetze*, Frege no recurre más que a funciones de primer, segundo y tercer nivel, por mucho que reconozca la posibilidad de considerar funciones de niveles superiores. Finalmente, una función puede tener nivel desigual (*ungleichstufige Function*), si es una función no unaria cuyos argumentos pertenecen a categorías ontológicas distintas. Por ejemplo, una relación podría tener objetos y funciones de primer nivel como argumentos. Más allá de plantear esta posibilidad, Frege no hace uso explícito de este tipo de funciones a lo largo de *Grundgesetze*.

Así pues, limitándonos a aquellas categorías cuyos integrantes aparecen explícitamente en *Grundgesetze*, el universo de la conceptografía se divide en los siguientes tipos de entidad:

1. Objetos.

2. Funciones de primer nivel unarias: aquellas que tienen un único objeto como argumento. En particular:

   - Conceptos de primer nivel son funciones de primer nivel unarias.

3. Funciones de primer nivel binarias: aquellas que tienen dos objetos como argumentos. En particular:

   - Relaciones de primer nivel son funciones de primer nivel binarias.

4. Funciones de segundo nivel unarias: aquellas que tienen una única función de primer nivel como argumento. En particular:

   - Conceptos de segundo nivel son funciones de segundo nivel unarias.

5. Funciones de tercer nivel unarias: aquellas que tienen una única función de segundo nivel como argumento.

Las funciones de segundo y tercer nivel son saturadas por funciones. Esta compleción tiene en cuenta que tanto la función como el argumento son insaturados, de tal modo que el valor resultante sea siempre saturado, esto es, un objeto. Iremos viendo ejemplos de estos tipos de funciones a lo largo del capítulo[199].

[198]Esta jerarquización de las funciones en niveles sistematiza una división en órdenes conceptuales bosquejada por Frege en *Grundlagen*, y que hemos considerado en el apartado 5.6.3. En términos propios de *Grundgesetze*, un concepto de segundo orden es un concepto de segundo nivel, cuyos argumentos son funciones de primer nivel unarias.

[199]Dado que los argumentos de una función no tienen por qué ser siempre objetos, es claro

6.4 Componentes del lenguaje de la conceptografía

Como hemos planteado, el objetivo de este capítulo es reconstruir el lenguaje de la lógica de *Grundgesetze*. Este texto contiene una teoría con un universo que contiene nociones como la función de curso de valores o la función de artículo determinado, que son introducidas en el sistema formal mediante leyes básicas específicas. Así pues, esta teoría contiene elementos que, desde la perspectiva actual, no son estrictamente de naturaleza lógica. Por conceptografía, y más específicamente, por conceptografía de *Grundgesetze*, entendemos exclusivamente el fragmento puramente lógico de la teoría desarrollada en *Grundgesetze*. Dado que consideraremos únicamente este sistema formal, en la exposición que sigue dejaremos fuera de consideración los cursos de valores y la función de artículo determinado.

La conceptografía dispone de un sistema de notación muy complejo: su lenguaje incluye un elevado número de símbolos que llevan aparejadas multitud de condiciones sintácticas. En consecuencia, la notación de *Grundgesetze* resulta más difícil de leer si cabe que la propia de *Begriffsschrift*, al menos bajo una óptica contemporánea.

El lenguaje de la conceptografía de *Grundgesetze* se compone de tres tipos de símbolos: los símbolos lógicos, las letras y los símbolos auxiliares (paréntesis y letras auxiliares). Los símbolos lógicos son la barra de juicio y la horizontal, la negación, el condicional, el símbolo de igualdad y el símbolo de generalidad[200].

A lo largo de esta sección, presentaremos cada uno de los símbolos del lenguaje de la conceptografía: las letras y el conjunto de símbolos lógicos.

---

que la distinción entre función y argumento, y la distinción entre función y objeto, a pesar de que están íntimamente relacionadas y son interdependientes, no coinciden exactamente. Ahora bien, para adaptar la división entre función y argumento, en cada caso concreto, a la complejidad ontológica de la conceptografía, Frege distingue entre tipos de argumento [Frege, 1893, §23, p. 40]. La clasificación entre argumentos relevante en la conceptografía es, por lo tanto, un reflejo de la clasificación de los tipos de entidad:

1. Argumentos del primer tipo: objetos.
2. Argumentos del segundo tipo: funciones de primer nivel unarias.
3. Argumentos del tercer tipo: funciones de primer nivel binarias.

Así pues, por ejemplo, una función de segundo nivel binaria es aquella que tiene argumentos del tercer tipo.

[200] La traducción inglesa a *Grundgesetze* realizada por P. Ebert y M. Rossberg [Frege, 2013] incluye un apéndice, 'How to read *Grundgesetze*' [Cook, 2013], en el que R. Cook proporciona una explicación general de la lógica de *Grundgesetze* para facilitar la lectura de la traducción. En particular, Cook presenta las funciones primitivas de*Grundgesetze*, pero no ofrece una exposición completa de su lenguaje.

Estos últimos, a excepción de la barra de juicio, son símbolos de las funciones primitivas de la conceptografía de *Grundgesetze*[201].

6.4.1 Letras

Tanto en la parte expositiva de *Grundgesetze* como en sus demostraciones, Frege recurre a una amplia variedad de letras distintas. Cada uno de los tipos de letra tiene un uso distinto. De todas las letras usadas por Frege tanto en la presentación como en el uso de la conceptografía, distinguimos aquellas que se usan con fines explicativos y que no forman parte de su lenguaje, de aquellas que son letras de este sistema formal.

Letras griegas auxiliares

De modo parecido al proceder propio de *Begriffsschrift*, Frege dedica la primera parte de *Grundgesetze*, titulada 'Exposition of the concept-script' a presentar los elementos básicos de la conceptografía y a describir su uso. Hay una serie de símbolos que se usan en los ejemplos tanto en la exposición de Frege como en la nuestra. Estos símbolos no pertenecen al lenguaje de la conceptografía, pero son indispensables para su explicación.

Los símbolos a los que nos referimos se identifican fácilmente al ser siempre consonantes griegas. Estos símbolos no son, propiamente, letras de la conceptografía, por lo que no expresan generalidad. Cuando son minúsculas, son indicadores de alguna posición y cuando son mayúsculas, son usadas para referirse sin distinción a entidades del universo.

Ya hemos introducido 'ξ' y 'ζ' como indicadores de posición. Las consonantes griegas minúsculas no representan ninguna entidad; son meros indicadores de la insaturación de una función. Por esta razón, este tipo de símbolos puede usarse en combinación con consonantes griegas mayúsculas o con otros símbolos del lenguaje de la conceptografía para formar nombres de funciones. Dado que en la conceptografía hay distintos tipos de funciones, Frege usa distintas consonantes griegas minúsculas como indicadores de posición para señalar los lugares de argumento de funciones de distintos niveles. Así, 'ξ' y 'ζ' son indicadores de los lugares de argumento que corresponden a objetos, 'φ' y 'ψ' son indicadores de los lugares de argumento que corresponden a funciones de primer nivel, y finalmente 'μ_β' y '$\mu_{\beta\gamma}$' son

[201]La notación propia de la conceptografía de *Grundgesetze* es muy parecida a la propia de *Begriffsschrift*, pero, a pesar de todo, no es exactamente la misma. Usaremos, a lo largo de este capítulo, formas distintas de representar cada una de estas notaciones, con el fin de que las expresiones de uno y otro sistema formal sean fieles a su aspecto en el texto original.

indicadores de los lugares de argumento que corresponden a funciones de segundo nivel (cuyos argumentos, a su vez, son funciones de primer nivel unarias y binarias, respectivamente). Los símbolos 'β' y 'γ' no son, en sentido estricto, indicadores de lugares de argumento. Su propósito es doble: por un lado, especifican la ariedad del argumento de la función que ocupa el lugar de 'μ_β' o '$\mu_{\beta\gamma}$' y, por el otro, hacen patente la circunstancia de que la función de segundo nivel que ocupa el lugar de 'μ_β' o '$\mu_{\beta\gamma}$' debe saturar los lugares de argumento de la función de primer nivel (unaria o binaria, respectivamente) que corresponde a su argumento[202].

Clarificaremos el uso de 'β' con dos ejemplos. En primer lugar, dado que '$\xi < \zeta$' es el nombre de una función de primer nivel binaria, '$\mu_{\beta\gamma}(< (\beta, \gamma))$' es el nombre de una función de tercer nivel cuyos argumentos son funciones de segundo nivel que se aplican a la relación $\xi < \zeta$, que es una función de primer nivel binaria. Así, si la siguiente función de segundo nivel[203]:

$$\begin{array}{l} \top\!\!-\, \varphi(2,x) \\ \llcorner\!\!-\, \varphi(x,2) \end{array}$$

se toma como argumento de la función de tercer nivel $\mu_{\beta\gamma}(< (\beta, \gamma))$, el valor resultante es el siguiente:

$$`\begin{array}{l} \top\!\!-\, 2 < x \\ \llcorner\!\!-\, x < 2\text{'}. \end{array}$$

Ahora bien, si el lugar de '$\mu_{\beta\gamma}$' en $\mu_{\beta\gamma}(< (\beta, \gamma))$' lo ocupa una expresión simple, como puede ser, si el lenguaje de la conceptografía dispone de ella, una constante para funciones de segundo nivel '$\omega_{\beta\gamma}$', entonces el nombre

[202]Frege menciona en distintas ocasiones a lo largo de *Grundgesetze* que las consonantes griegas minúsculas no forman parte del lenguaje de la conceptografía. Por ejemplo, respecto a 'ξ', el autor afirma:

> "With this [the use of 'ξ'], however, nothing is meant to be stipulated for the concept-script. Rather, 'ξ' itself will never occur in the concept-script developments; I will only use it in the exposition of the concept-script and in elucidation." [Frege, 1893, §1, p. 6, nota 1]

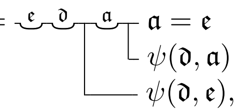
Y, más adelante, respecto a 'μ', Frege es aún más claro:

> "[W]e mark the argument places by 'μ_β' and '$\mu_{\beta\gamma}$', just as we mark the argument places of the second and third kind by 'φ' and 'ψ', and those of the first kind by 'ξ' and 'ζ'. Like the former letters, incidentally, 'μ_β' and '$\mu_{\beta\gamma}$' are not to be regarded as signs of the concept-script, but serve us only provisionally." [Frege, 1893, §24, p. 41]

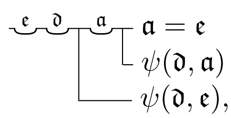
[203]Presentaremos los símbolos correspondientes a la negación y al condicional en el apartado 6.4.3.

propio resultante sí contiene apariciones de 'β' y 'γ': '$\omega_{\beta\gamma}(<(\beta,\gamma))$'. En tal caso, el cometido de 'β' y 'γ', además de indicar la ariedad de la relación $<(\xi,\zeta)$, es hacer patente que '$\omega_{\beta\gamma}(<(\beta,\gamma))$' es un nombre propio y que, por lo tanto, designa un objeto, esto es, una entidad saturada.

En segundo lugar, veamos en un ejemplo el papel que juegan 'β' y 'γ' en la definición de una función de segundo nivel. En la conceptografía puede definirse la noción de función matemática, de modo similar a como Frege procede en *Begriffsschrift* presentando la Proposición (115). La siguiente definición de la función de segundo nivel[204]:

$\mathrm{Fun}_{\beta\gamma}(\psi(\beta,\gamma)) =$ 

expresa que todo argumento $\psi(\xi,\zeta)$ al que la función $\mathrm{Fun}_{\beta\gamma}(\psi(\beta,\gamma))$ asigne como valor lo Verdadero es una función (de primer nivel binaria) en sentido matemático. Nótese que, pese a que las dos expresiones que flanquean la anterior igualdad nombran funciones de segundo nivel, únicamente en '$\mathrm{Fun}_{\beta\gamma}(\psi(\beta,\gamma)$' es necesario que aparezcan los símbolos 'β' y 'γ'. Al fin y al cabo, la expresión siguiente:



indica explícitamente cuáles son los argumentos que corresponden a la función de primer nivel unaria $\psi(\xi,\zeta)$[205].

[204]Presentaremos los símbolos correspondientes a las funciones de igualdad, condicional y generalidad en los apartados 6.4.4, 6.4.3 y 6.4.5, respectivamente.

[205]En el contexto de una explicación acerca de la formación de nombres propios a partir de la compleción del nombre de una función de segundo nivel con una función de primer nivel, Frege plantea un comentario acerca de la imposibilidad de saturar una función de primer nivel con otra de primer nivel. En sus propias palabras:

> "We take the foregoing into consideration along with the case where the argument-sign in '$X(\xi)$' is replaced by '$\Phi(\xi)$': '$X(\Phi(\xi))$'. It is common, yet inaccurate, to speak here of a function of a function; for if we remind ourselves that functions are fundamentally different from objects and that the value of a function for an argument is to be distinguished from the function itself, then we can see that a function-name can never take the place of a proper name, because it will involve empty places corresponding to the unsaturatedness of the function. If we say 'the function $\Phi(\xi)$', then we should never forget that 'ξ' belongs with the function-name only by way of making the unsaturatedness recognisable. Another function thus can never occur as argument of the

Por lo que respecta al segundo grupo de consonantes griegas, Frege usa, en primer lugar, '$\varGamma$', '$\varDelta$', '$\varTheta$', '$\varLambda$', '$\varXi$', '$\varPi$', 'P' y '$\varSigma$' para referirse en general a objetos sin distinción. Normalmente, excepto '$\varGamma$' y '$\varDelta$', estos símbolos sólo tienen interpretación proposicional. En segundo lugar, para referirse en general a funciones de primer nivel tanto unarias como binarias, Frege recurre a '$\varPhi(\xi)$', '$\varPhi(\xi,\zeta)$', '$\varPsi(\xi)$' y $\varPsi(\xi,\zeta)$. Finalmente, Frege utiliza '$\varOmega_\beta(\varphi(\beta))$' y '$\varOmega_{\beta\gamma}(\psi(\beta,\gamma))$' para referirse en general a funciones de segundo nivel cuyos argumentos son funciones de primer nivel unarias y binarias, respectivamente. El símbolo '$\varOmega_\beta(\varphi(\beta))$' es un nombre de función de segundo nivel, y únicamente tiene un argumento, cuyo lugar está indicado mediante 'φ'. Tal y como ya hemos planteado, el símbolo 'β' no es un indicador de un lugar de argumento adicional, sino que marca tanto la ariedad del argumento de la función $\varOmega_\beta(\varphi(\beta))$ como el hecho de que esta misma función debe saturar los lugares de argumento de la función de primer nivel unaria que ocupe el lugar de φ. En este sentido, el uso de 'β' en '$\varOmega_\beta(\varphi(\beta))$' es meramente auxiliar y, como hemos visto en los ejemplos que hemos planteado, no tiene por qué aparecer en nombres de función de segundo nivel de la conceptografía[206]. Así pues, la siguiente función:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\varphi(\mathfrak{a}),$$

puede ser un ejemplo de '$\varOmega_\beta(\varphi(\beta))$', dado que es una función de segundo nivel cuyo nombre dispone de un único lugar de argumento (correspondiente a una función de primer nivel unaria), indicado mediante 'φ'. Ahora bien, la función:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\psi(\mathfrak{a},\xi),$$

> function $X(\xi)$, although the value of a function for an argument can do so, for instance $\varPhi(2)$, in which case the value is $X(\varPhi(2))$." [Frege, 1893, §20, pp. 36-37]

En consecuencia, '$X(\varPhi(\xi))$' no es el resultado de completar el nombre de la función '$X(\xi)$' con el nombre del argumento '$\varPhi(\xi)$'.

[206]Podría plantearse, aunque Frege no lo haga, una notación específica para funciones de segundo nivel binarias. Reproduciendo las convenciones notacionales de Frege, una posibilidad de expresar una función tal usando consonantes griegas es la siguiente:

$$\varOmega_{\varphi(\beta)\psi(\gamma)}(\varphi(\beta),\psi(\gamma)).$$

Sería incluso posible disponer de un modo análogo de expresar funciones de tercer nivel binarias. Ahora bien, introducir una notación precisa para estos fines añadiría al lenguaje una gran complejidad. Además, en *Grundgesetze*, Frege no recurre en ninguna ocasión a este tipo de funciones. Así pues, disponer de un modo de notación para representar en el lenguaje funciones de segundo nivel binarias es completamente ajeno a nuestros intereses.

no puede ser un ejemplo de '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$', puesto que es una función de nivel desigual, con dos lugares de argumento indicados mediante 'ψ' y 'ξ' (correspondientes a una función de primer nivel binaria y a un objeto, respectivamente).

Las consonantes griegas mayúsculas pueden usarse combinadas para formar expresiones complejas. Por ejemplo, las expresiones '$\Phi(\Delta)$' o '$\Omega_\beta(\Phi(\beta))$' sirven para referirse en general objetos y, en algunos casos (si '$\Phi(\xi)$' y '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' refieren a conceptos cualesquiera de primer y de segundo nivel, respectivamente), a un valor de verdad. Por lo tanto, de ahora en adelante, diremos que Δ, $\Psi(\Delta, \Gamma)$ o $\Omega_{\beta\gamma}(\Psi(\beta, \gamma))$ son objetos[207].

Letras latinas de la conceptografía

En *Begriffsschrift*, las letras expresan generalidad sobre un recorrido de expresiones adecuadas. Por contra, las letras latinas de *Grundgesetze* expresan generalidad sobre un dominio de entidades[208]. En consecuencia, Frege plantea que las letras de la conceptografía, a diferencia de los nombres propios, no designan un objeto en particular, sino que simplemente indican (*andeuten*) [Frege, 1893, §17, p. 32]. Hay una completa jerarquización de las letras, que es un reflejo de la complejidad ontológica de la conceptografía. El lenguaje de este sistema formal dispone de letras de objeto, letras de función de primer nivel y letras de función de segundo nivel.

En primer lugar, hay un conjunto de letras de objeto, que expresan generalidad sobre el dominio de objetos del universo. Frege usa las letras 'a', 'b', 'c', 'd' como *letras de objeto*. Como es manifiesto en *Grundgesetze*, el lenguaje de la conceptografía puede ampliarse a conveniencia recurriendo a letras latinas minúsculas (excepto 'f', 'g' y 'h', que tienen un uso específico).

[207]M. Cadet y M. Panza incluyen en 'The logical system of Frege's *Grundgesetze*' [Cadet; Panza, 2015, p. 34] las consonantes griegas mayúsculas como constantes en el lenguaje. Se trata, sin embargo, meramente de un recurso técnico provisional. A pesar de que plantearemos la posibilidad de disponer de un recurso similar con otro tipo de símbolos, no incorporamos, siguiendo el planteamiento de Frege, las consonantes griegas mayúsculas en el lenguaje de la conceptografía. El autor afirma explícitamente en *Grundgesetze*, de modo similar a como hace con las consonantes griegas minúsculas, que las consonantes griegas mayúsculas no forman parte del lenguaje de la conceptografía:

> "I here use the *capital Greek letters* as they were names referring to something, without stating their reference. Proceeding within concept-script itself, they, just as 'ξ' and 'ζ', will not occur." [Frege, 1893, §5, p. 9, nota 3]

[208]Adoptamos la convención según la cual, de ahora en adelante, cuando aludamos a las letras de la conceptografía nos referiremos, en general y cuando el contexto sea lo suficientemente claro, a las letras latinas.

En segundo lugar, Frege usa 'f', 'g', 'h', 'F', 'G', 'H' como *letras de función de primer nivel*, esto es, como letras que expresan generalidad sobre un dominio de funciones cuyos argumentos son objetos. El uso de minúsculas y mayúsculas sirve para distinguir las letras que expresan generalidad sobre funciones en general, 'f', 'g' y 'h', de las letras que expresan generalidad sobre conceptos, 'F', 'G', 'H'. Todas estas letras pueden ser tanto unarias como binarias; el contexto indicará, en casa caso, su ariedad. De hecho, todas las letras de función de primer nivel aparecen en la conceptografía junto a un paréntesis con un lugar de argumento, si son unarias, o dos lugares separados por una coma, si son binarias.

Finalmente, se usan las letras 'M_β' y '$M_{\beta\gamma}$' como *letras de función de segundo nivel*. Las letras de función de segundo nivel aparecen junto a dos elementos. En primer lugar, tienen un subíndice, 'β' o '$\beta\gamma$', que, como hemos planteado, indica la ariedad de la función que constituye el argumento de 'M_β' y, además, la circunstancia de que todas sus instancias complejas deben saturar los lugares de argumento de las funciones de primer nivel unarias que corresponden a su argumento. En segundo lugar, aparecen junto a un paréntesis que encierra un lugar de argumento. Por lo tanto, 'β' y 'γ' son símbolos auxiliares del lenguaje de la conceptografía y siempre van asociados a una letra latina 'M_β' o '$M_{\beta\gamma}$'; su papel en el lenguaje es, desde una perspectiva estrictamente sintáctica, similar al de los cuantificadores. Así pues, por ejemplo, '$M_\beta(\varphi(\beta))$' expresa generalidad sobre un dominio de funciones cuyos argumentos son funciones de primer nivel unarias y '$M_{\beta\gamma}(\psi(\beta,\gamma))$' expresa generalidad sobre un dominio de funciones cuyos argumentos son funciones de primer nivel binarias. Por otro lado, '$M_\beta(f(\beta))$' es una expresión de la conceptografía e indica los valores de funciones de segundo nivel cuyos argumentos son funciones de primer nivel unarias.

6.4.2 Barra de juicio y horizontal

A partir de la redacción del artículo no publicado 'Logik' [Frege, 1882e], Frege distingue explícitamente entre el reconocimiento de verdad y el hecho de ser verdadero. Tomando esta distinción como punto de partida, desde la perspectiva de *Grundgesetze*, el hecho de que un enunciado designe un valor de verdad no equivale a reconocer que el pensamiento expresado por el enunciado es verdadero. El acto de reconocimiento de la verdad de un pensamiento se denomina juicio: aseverar consiste en efectuar un juicio.

Frege insiste en el hecho de que en la mera presentación de las nociones básicas de la conceptografía no se produce ninguna aseveración. Los nombres y las ecuaciones que se han usado como ejemplos designan determinados objetos, pero desde la perspectiva de Frege incluirlos en el texto no equivale a realizar un juicio. Así, siguiendo el ejemplo del autor, una ecuación como '$(2+3=5)=(1=2)$' expresa que dos valores de verdad (los correspondientes a $(2+3=5)$ y a $(1=2)$) son el mismo y, por lo tanto, designa lo Falso. Sin embargo, el nombre '$(2+3=5)=(1=2)$' no es un juicio, puesto que no conlleva la aseveración de que $(2+3=5)$ es el mismo objeto que $(1=2)$. Para poder emitir el juicio correspondiente, Frege introduce el símbolo complejo '$\vdash$':

> "(...) I let the sign '$\vdash$' precede the name of the truth-value, in such a way that, e.g., in
>
> $$\text{'}\vdash 2^2 = 4\text{'},$$
>
> it is asserted that the square of 2 is 4. I distinguish the *judgement* from the *thought* in such a way that I understand by a *judgement* the acknowledgement of the truth of a *thought*. The concept-script representation of a judgement by means of the sign '$\vdash$' I call a *concept-script proposition* or *proposition* for short." [Frege, 1893, §5, p. 9]

Así, mediante el símbolo '$\vdash$' Frege introduce en la conceptografía la posibilidad de expresar juicios, esto es, de llevar a cabo el acto de reconocimiento de cierto pensamiento como verdadero. Este acto de aseveración es, desde la perspectiva del autor, imprescindible, porque es el único recurso del que dispone la conceptografía para hacer explícito que el pensamiento expresado por un enunciado es verdadero.

De modo similar a *Begriffsschrift*, donde el símbolo '$\vdash\!\!\!-\!\!\!-$' se presenta como la combinación de dos símbolos, la barra de juicio y la barra de contenido, en *Grundgesetze* Frege distingue entre las dos barras que componen '$\vdash$'. Sin embargo, su significado es distinto. Por un lado, la barra de juicio no tiene ningún papel específico más que expresar el acto de aserción, pero adquiere sentido sólo en combinación con la horizontal. Por el otro, la horizontal (que en *Begriffsschrift* es llamada 'barra de contenido') adquiere una naturaleza funcional[209]:

> "I regard '$\vdash$' as composed of the vertical stroke, which I call the *judgement-stroke*, and the horizontal stroke, which I now propose to

[209]Frege comenta en una nota a pie el cambio de denominación de esta horizontal o barra de contenido [Frege, 1893, §5, p. 9, nota 2]. Las nociones de sentido y significado posibilitan un análisis semántico más adecuado que la noción de contenido aseverable, propia de *Begriffsschrift*, de modo que, en 1893, a Frege le resulta más pertinente y exacto denominar la barra en cuestión, simplemente, 'horizontal'.

> label simply the *horizontal* (...). I regard it as a function-name such that:
>
> $$— \varDelta$$
>
> is the True when $\varDelta$ is the True, and is the False when $\varDelta$ is not the True. Accordingly,
>
> $$— \xi$$
>
> is a function whose value is always a truth-value, or a concept according to our stipulation. Under this concept there falls the True and only the True." [Frege, 1893, §5, pp. 9-10]

En *Grundgesetze*, la horizontal no expresa simplemente, como sí sucede en *Begriffsschrift* con la barra de contenido, que cierta combinación de símbolos se toma como un todo; es un símbolo funcional y, en cuanto tal, atribuye un valor a cada uno de sus argumentos. Naturalmente, la horizontal también conserva la función que en *Begriffsschrift* se atribuye a la barra de contenido:

> "For, in order to dispense with brackets, I specify that everything standing right of the horizontal, occupying the argument place of the function $— \xi$, should be conceived as a whole unless brackets prohibit this." [Frege, 1893, §5, p. 10]

Puesto que el valor de la función designada por la horizontal es siempre un valor de verdad, debe considerarse que, en realidad, la horizontal designa un concepto. Bajo este concepto cae únicamente el valor de verdad Verdadero, lo cual excluye no únicamente lo Falso, sino además cualquier otro objeto del universo. Ahora bien, para que el valor de '$— \varDelta$' sea lo Verdadero, es necesario que $\varDelta$ sea lo Verdadero, esto es, esté formado por un concepto saturado por un objeto que cae bajo él o por una relación saturada por dos objetos que están en dicha relación. Para cualquier otro posible argumento $\varGamma$, sea lo Falso o, simplemente, un objeto distinto de los valores de verdad, '$— \varDelta$' designa lo Falso[210]. Por ejemplo, si $\varPhi(\xi, \zeta)$ es una función binaria, $— \varPhi(\varDelta, \varGamma)$ es lo Verdadero si (1) $\varPhi$ es una relación y (2) $\varDelta$ está en la relación $\varPhi$ con $\varGamma$: esto es, si $\varPhi(\varDelta, \varGamma)$ es lo Verdadero; y $— \varPhi(\varDelta, \varGamma)$ es lo Falso

[210] Sólo hay dos tipos de argumento (esto es, valores de verdad u objetos que no son valores de verdad) porque toda expresión completa designa siempre un objeto, y no hay otra posibilidad, como, por ejemplo, que dicha expresión no tenga significado. Frege manifiesta que "[n]ames without reference must not occur in concept-script" [Frege, 1893, §5, p. 9, nota 3], de modo que la función designada por la horizontal es un concepto bien definido. Esta apreciación respecto a la necesidad de que todo nombre tenga significado es importante, y supone una exigencia relevante en cuanto a las expresiones aceptables en la conceptografía.

en cualquier otra situación, esto es, cuando (independientemente de si Φ es una relación) '$\Phi(\Delta, \Gamma)$' designa cualquier objeto que no sea lo Verdadero. Por consiguiente, Frege plantea que "the function $—\Phi(\xi)$ is a concept, and the function $—\Psi(\xi, \zeta)$ is a relation, irrespective of whether or not $\Phi(\xi)$ is a concept or $\Psi(\xi, \zeta)$ is a relation" [Frege, 1893, §5, p. 10].

Podemos resumir este planteamiento por medio de la tabla siguiente[211]:

—	
V	V
F	F
O	F

La presentación de *Grundgesetze* de esta función primitiva añade una importante modificación respecto a la explicación análoga de *Begriffsschrift*, puesto que, al ser la horizontal definida funcionalmente, de hecho, como nombre de un concepto, permite reconocer como verdaderos pensamientos que en el texto de 1879 se consideraban no aseverables. Por ejemplo, en *Begriffsschrift*, '$2 + 1$' no expresa un contenido aseverable y, por lo tanto, la expresión que sigue:

$$—\!\!—\, 2 + 1$$

no es aceptable en la conceptografía de 1879. La especificación y el refinamiento de esta barra que tiene lugar en *Grundgesetze* garantiza que toda expresión bien formada pueda situarse a su derecha; en el caso del nombre de un objeto particular, que no sea lo Verdadero, la horizontal simplemente le atribuirá el valor de lo Falso. Así pues, en *Grundgesetze*, el siguiente nombre:

$$`— 2 + 1'$$

es perfectamente aceptable: designa lo Falso, porque $2 + 1$ no designa lo Verdadero, sino el objeto 3. Con ello se hace patente la pérdida de necesidad de distinguir entre los contenidos aseverables y los que no lo son, puesto que,

[211]En esta tabla y en las siguientes se definen de modo esquemático algunas de las funciones primitivas de la conceptografía de *Grundgesetze*: en la columna izquierda figuran los posibles argumentos, y en la derecha los valores que la función les asigna. En esta tabla y en las siguientes adoptamos la convención según la cual 'V' y 'F' designan los valores de verdad Verdadero y Falso, respectivamente, y 'O' representa un objeto cualquiera distinto de los dos posibles valores de verdad.

R. Cook, en 'How to read *Grundgesetze*' [Cook, 2013], también resume la definición de la horizontal [Cook, 2013, p. A6], la negación [Cook, 2013, p. A6] y el condicional [Cook, 2013, p. A7] en tablas similares que ofrecemos en nuestra exposición. Además, Cook proporciona definiciones, por medio de tablas análogas, de la conjunción, la disyunción y de la conjunción de fórmulas negadas [Cook, 2013, pp. A9-A10].

por un lado, la restricción de las capacidades de denotación de los nombres y, por el otro, la definición precisa de la naturaleza de la horizontal, convierten tal distinción en vacua.

6.4.3 Conectivas

Como hemos avanzado en el apartado 1.2.3, hasta que Frege no introduce la noción de valor de verdad, no le es posible definir veritativo-funcionalmente las conectivas de la conceptografía. De hecho, la ausencia de valores de verdad en *Begriffsschrift* es una poderosa razón para concluir que, en este texto, tanto la negación como el condicional no reciben una definición tal por parte de Frege. En *Grundgesetze*, las conectivas son nombres de funciones que asignan un determinado valor de verdad dependiendo de sus argumentos. Hemos contemplado los precedentes de esta definición en el apartado 5.6.3.

Negación

La barra de juicio sirve para expresar el acto de aseveración por medio del cual se expresa un juicio: el reconocimiento de la verdad de un pensamiento. Sin embargo, Frege constata que la conceptografía no dispone de un símbolo análogo que permita afirmar la falsedad de un pensamiento y, así, reconocerlo como falso. Un símbolo tal sería innecesario, porque disponer de la negación en el lenguaje basta para este cometido. La negación designa una función que atribuye valores de verdad; designa, por lo tanto, un concepto:

> "The value of the function
>
> $$\top\, \xi$$
>
> is to be the False for every argument for which the value of the function
>
> $$-\!\!-\, \xi$$
>
> is the True; and it is to be the True for all other arguments.
>
> We thus have in
>
> $$\top\, \xi$$
>
> a function whose value is always a truth-value: it is a concept under all objects fall with the sole exception of the True." [Frege, 1893, §6, p. 10]

De acuerdo con la exposición de Frege, $\top\, \xi$ es un concepto complementario a $—\, \xi$[212]. Mientras que bajo $—\, \xi$ únicamente cae lo Verdadero, bajo $\top\, \xi$ cae sólo lo Falso. De hecho, para que $\top\, \Delta$ sea lo Verdadero, no es necesario que 'Δ' designe lo Falso: basta con que Δ no sea lo Verdadero. Así pues, $\top\, 2^2$ es lo Verdadero y, por lo tanto, la expresión siguiente:

$$\vdash\!\top\, 2^2$$

expresa el juicio verdadero según el cual 2^2 no es lo Verdadero.

Podemos expresar esquemáticamente la definición de Frege de la negación mediante la tabla siguiente:

$\top$	
V	F
F	V
O	V

Condicional

En *Grundgesetze*, el condicional también recibe una definición veritativo-funcional. En palabras de Frege:

> "Next, in order to be able to designate the subordination of concepts and other important relations, I introduce the function with two arguments

$$\left[\begin{matrix}\xi\\ \zeta\end{matrix}\right.$$

[212]Frege menciona que complementar el símbolo de negación con distintas barras horizontales para formar un nombre propio compuesto no cambia el significado del nombre propio y que, por esa razón, puede ser fructífero considerar que el símbolo de negación está formado por dos barras horizontales y una barra de negación:

> "[The negation function] is a concept under which all objects fall with the sole exception of the True. From this it follows that '$\top\, \Delta$' always refers to the same as '$\top\, (—\, \Delta)$', as '$—\, \top\, \Delta$' and as '$—\, \top\, (—\, \Delta)$'. We therefore regard '$\top$' as composed of the small vertical stroke, the *negation-stroke*, and the two parts of the horizontal stroke each of which can be regarded as a *horizontal* in our sense." [Frege, 1893, §6, p. 10]

Ahora bien, ver el símbolo de la función de negación como un símbolo complejo únicamente se basa en el hecho de que '$\top\, (—\, \Delta)$', '$—\, \top\, \Delta$' y '$\top\, \Delta$' tienen el mismo significado. Así pues, contra lo que puede parecer, la función $\top\, \xi$ es simple: no es, en realidad, el resultado de la composición de dos horizontales y una función de negación primitiva, aunque sea útil verla así en determinados contextos. De hecho, si '$\top$' fuese un símbolo compuesto, no podría usarse la función negación (cuyo símbolo, como tal, debería ser una única barra vertical) en la conceptografía y, por supuesto, no se correspondería con la definición que le proporciona Frege, porque no sería necesario asignar un valor a cualquier argumento que no fuese un valor de verdad (dado que la horizontal únicamente asigna valores de verdad como valores). La función de negación es, por lo tanto, primitiva.

> by means of the specification that its value shall be the False if the True is taken as the ζ-argument, while any object that is not the True is taken as ξ-argument; that in all other cases the value of the function shall be the True. According to this and the previous stipulations, the value of this function is also determined for value-ranges as objects." [Frege, 1893, §12, p. 20]

El símbolo correspondiente al condicional designa, por tanto, una relación binaria, que siempre atribuye un valor de verdad a cada pareja de argumentos. Nuevamente, de acuerdo con el planteamiento de Frege, los argumentos aceptables para la función condicional no son únicamente valores de verdad: esta relación está definida para cualquier pareja de argumentos del primer tipo, sean de la naturaleza que sean[213]. Así pues, podemos resumir la definición de Frege con la siguiente tabla:

$\sqsubset$	V	F	O
V	V	F	F
F	V	V	V
O	V	V	V

Las características sintácticas de la conceptografía permiten combinar los símbolos de las conectivas lógicas para formar expresiones complejas.

[213]De modo similar a la función de negación, el condicional es, de acuerdo con la exposición de Frege, una función simple. Las barras horizontales que preceden al lugar del argumento 'ξ' y al lugar del argumento 'ζ', así como la barra horizontal situada más a la izquierda del nombre de la función, forman parte del nombre del condicional. Ahora bien, dado que complementar el símbolo de condicional con distintas barras horizontales para formar un nombre propio compuesto no modifica el significado de este nombre, Frege plantea que puede ser fructífero aprovecharse de esta circunstancia en determinados contextos:

> "It follows that
>
> $$\begin{array}{l} \top\, \Gamma \\ \llcorner\, \Delta \end{array}$$
>
> is the same as:
>
> $$-\left(\begin{array}{l} \top\, (-\,\Gamma) \\ \llcorner\, (-\,\Delta) \end{array} \right)$$
>
> and therefore that in
>
> $$\begin{array}{l} `\top\, \Gamma' \\ \llcorner\, \Delta \end{array}$$
>
> we can regard the horizontal stroke before 'Δ', as well as each of the two parts of the upper horizontal stroke partitioned by the vertical, as *horizontals* in our particular sense." [Frege, 1893, §12, p. 20]

Naturalmente, por razones similares a las que hemos planteado para el caso de la negación, este hecho no implica que el símbolo de condicional es, de hecho, un símbolo compuesto.

En particular, es posible definir el resto de conectivas lógicas a partir del condicional y la negación. Veamos, por ejemplo, la introducción en la conceptografía de la conjunción:

> "The function $\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\!\!\lceil\; \xi, \\ \quad\llcorner\; \zeta\end{array}$ or $\begin{array}{l}\top\,\top\!\!\lceil\; \xi, \\ \qquad\llcorner\; \zeta\end{array}$ always has the True as value, when the function $\begin{array}{l}\top\!\!\lceil\; \xi \\ \;\llcorner\; \zeta\end{array}$ has the False as value, and conversely. Hence $\begin{array}{l}\top\!\!\top\!\!\!\!\lceil\; \mathit{\Gamma} \\ \quad\llcorner\; \mathit{\Delta}\end{array}$ is the True if and only if $\mathit{\Delta}$ is the True and $\mathit{\Gamma}$ is not the True. (...)
>
> $$\begin{array}{l}\vdash\!\top\!\!\top\!\!\!\!\lceil\; 3 > 2 \\ \qquad\llcorner\; 2 + 3 = 5\end{array}$$
>
> in words: 3 is greater than 2 *and* the sum of 2 and 3 is 5." [Frege, 1893, §12, pp. 20-21]

De forma similar puede introducirse la disyunción.

6.4.4 Igualdad

Frege introduce el signo de igualdad (*Gleichheit*) en *Grundgesetze* con la mayor concisión y parquedad de palabras. Esta circunstancia llama especialmente la atención teniendo en cuenta las dificultades que plantea el símbolo análogo de la conceptografía de 1879, '≡', en *Begriffsschrift*. En *Grundgesetze*, el autor se limita a afirmar lo siguiente:

> "We have already used the equality-sign rather casually to form examples but it is necessary to stipulate something more precise regarding it.
>
> $$`\mathit{\Gamma} = \mathit{\Delta}'$$
>
> refers to the True, if $\mathit{\Gamma}$ is the same as $\mathit{\Delta}$; in all other cases it is to refer the False." [Frege, 1893, §7, p. 11]

Ciertamente, con las herramientas expresivas que se han desarrollado para la conceptografía, la formulación que se escoge para la igualdad es suficiente. Afirmar que $\mathit{\Gamma}$ y $\mathit{\Delta}$ son lo mismo equivale a decir que los signos '$\mathit{\Gamma}$' y '$\mathit{\Delta}$' tienen el mismo significado. Naturalmente, son signos distintos, y ello puede hacer patente una diferencia de sentidos expresados. En tal caso, el signo de igualdad será informativo, pero es igualmente aplicable en el caso de la igualdad entre símbolos idénticos. La función designada por el símbolo de igualdad atribuye, pues, el valor de verdad Verdadero a aquellos argumentos idénticos, aunque los nombres de estos argumentos expresen sentidos distintos. A cualquier otro par de argumentos, es decir, a cualquier par de argumentos no necesariamente idénticos, la función igualdad atribuye el valor de lo Falso. La inconsistencia notacional que exige la presentación de la conceptografía de 1879 desaparece completamente, gracias a la introducción de la distinción entre sentido y significado.

De este modo, aunque Frege no lo hace explícito, es claro que la igualdad es una relación, ya que es completada por dos argumentos y siempre atribuye como valor un valor de verdad.

En un sentido actual, el símbolo de igualdad de *Grundgesetze* es un símbolo relacional que vincula términos. Al fin y al cabo, en el lenguaje de la conceptografía, incluso las expresiones que, desde el punto de vista actual, son fórmulas, designan objetos y, por ello, estrictamente, deberían considerarse términos. Desde esta perspectiva, tiene sentido plantearse una igualdad como '$(2 + 3 = 5) = 1$': esta expresión está perfectamente bien formada y designa lo Falso, puesto '$(2 + 3 = 5)$' y '1' no tienen el mismo significado, ya que lo Verdadero no es el mismo objeto que el número 1. Por esta razón, debemos concluir que Frege no distingue en 1893 entre la igualdad entre valores de verdad y la igualdad entre otros objetos (que no sean valores de verdad). Ahora bien, mediante la función de igualdad y la horizontal, la conceptografía dispone de las herramientas para expresar el concepto *ser un valor de verdad* [Frege, 1893, §5, p. 10]:

$$\xi = (\text{---}\, \xi).$$

Este concepto asigna lo Verdadero a todo argumento que sea un valor de verdad y lo Falso a cualquier otro objeto, ya que Δ y $\text{---}\, \Delta$ sólo serán el mismo objeto si Δ es un valor de verdad.

El hecho de que expresiones como '$(2 + 3 = 5) = 1$' sean perfectamente aceptables en el lenguaje diluye la posibilidad de interpretar la igualdad de *Grundgesetze* de modo similar a como hemos interpretado la igualdad de *Begriffsschrift* en el apartado 1.2.4. Consideremos algunos ejemplos concretos. El nombre '$2 = 3$' expresa que '2' y '3' tienen el mismo significado, esto es, que 2 es el mismo objeto que 3. Por lo tanto, '$2 = 3$' designa lo Falso. Sin embargo, es fácil ver que '$(2 \leftrightarrow 3)$' designa lo Verdadero[214]. Y, de hecho, '$(\text{---}\, 2) = (\text{---}\, 3)$' expresa que '$\text{---}\, 2$' y '$\text{---}\, 3$' designan al mismo objeto. Dado que tanto $\text{---}\, 2$ como $\text{---}\, 3$ son lo Falso, '$(\text{---}\, 2) = (\text{---}\, 3)$' designa lo Verdadero. Este ejemplo indica, pues, que en *Grundgesetze* el bicondicional

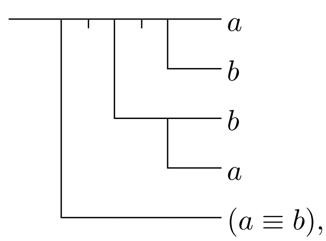
[214]Entendemos que un bicondicional como $(a \leftrightarrow b)$ es simplemente una abreviatura del

y la siguiente relación compleja:

$$(\text{—}\, \xi) = (\text{—}\, \zeta),$$

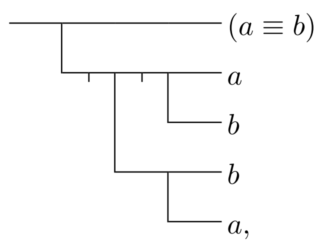
a la que nos referiremos como igualdad (entre valores de verdad), asignan el mismo valor a cualquier pareja de argumentos[215].

En el apartado 4.2.2 hemos mostrado que, si bien es posible demostrar en la conceptografía de 1879 que el siguiente condicional es deducible:



(6.1)

también es posible mostrar que el condicional siguiente:

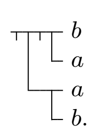


(6.2)

por el contrario, no es deducible.

Como veremos en el apartado 4.2.1, en la conceptografía de *Grundgesetze* es posible demostrar la equivalencia entre la igualdad (entre valores de verdad) y el bicondicional, esto es, pueden deducirse los siguientes condicio-

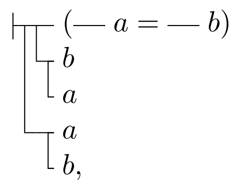
condicional siguiente:



[215]Puede hallarse una explicación similar de la relación entre la igualdad y el bicondicional que puede establecerse en *Grundgesetze* en 'How to read *Grundgesetze*' [Cook, 2013, p. A12].

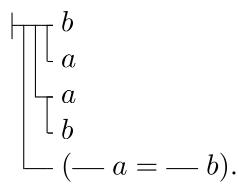
nales:

Pr. (IVa)



(6.3)

y



(6.4)

De hecho, Frege explícitamente demuestra el condicional (6.3), que denomina (IVa) [Frege, 1893, §51, p. 68][216].

6.4.5 Generalidad

Uno de los recursos notacionales más fructíferos de la conceptografía es la cuantificación: este sistema formal permite expresar explícitamente que cierta letra expresa generalidad, de tal manera que, en una fórmula del lenguaje, es posible incluir tanto una cuantificación múltiple como una cuantificación restringida a una sub-fórmula. La conveniencia de que el alcance de la generalidad que expresa una letra no afecte al conjunto de una fórmula, sino únicamente a una de sus partes, motiva el uso de la tipografía gótica. El razonamiento de Frege al respecto es similar en *Grundgesetze* al presente en *Begriffsschrift* [Frege, 1879a, §11, p. 131-132].

Notación y definiciones

Toda aplicación de la función de generalidad conlleva el uso de tipografía gótica. Frege usa '$\mathfrak{a}$', '$\mathfrak{b}$', '$\mathfrak{c}$', '$\mathfrak{d}$' como *letras góticas de objeto*, y '$\mathfrak{f}$', '$\mathfrak{g}$', '$\mathfrak{F}$', '$\mathfrak{G}$' como *letras góticas de función de primer nivel.* Las letras góticas se usan exclusivamente con la introducción de la función de generalidad.

Frege introduce, en primer lugar, la función de la conceptografía que expresa generalidad sobre letras de objeto. El nombre de esta función, '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \varphi(\mathfrak{a})$',

[216]Nótese que, en rigor, el condicional (6.1) no es exactamente el mismo que el condicional (6.4) y que, análogamente, el condicional (6.2) no es el mismo que (6.3). Sin embargo, es fácil mostrar que (6.1) y (6.4) son condicionales equivalentes y que, análogamente, (6.2) y (6.3) también lo son.

se compone de una concavidad que contiene una letra gótica, que indica la letra que expresa generalidad. De ahora en adelante, llamaremos 'cuantificador' a la concavidad que contiene una letra gótica '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' en el nombre de la función de generalidad. En palabras de Frege:

> "[W]e now have the following explanation:
>
> let
>
> $$\text{`}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})\text{'}$$
>
> refer to the True if the value of the function $\Phi(\xi)$ is the True for every argument, and otherwise the False (...)." [Frege, 1893, §8, p. 12]

Denominaremos a esta función 'generalidad sobre objetos'. Dado que únicamente asigna valores de verdad como valores, se trata de un concepto. En efecto, la expresión '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$' es siempre el nombre de un valor de verdad: designa lo Verdadero si $\Phi(\Delta)$ es lo Verdadero para cualquier argumento Δ, y lo Falso en cualquier otro caso. Por otra parte, los argumentos del concepto $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \varphi(\mathfrak{a})$ no son objetos, sino, como indica la letra 'φ', funciones de primer nivel unarias, de modo que la generalidad sobre objetos es un concepto de segundo nivel.

Podemos formular la definición de Frege de la función de generalidad sobre objetos del modo siguiente:

(G1) El valor de la función:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \varphi(\mathfrak{a})$$

para el argumento $\Phi(\xi)$ es lo Verdadero si el valor de la función $\Phi(\xi)$ es lo Verdadero para cualquier objeto que ocupe el lugar de ξ; en cualquier otro caso es lo Falso.

Para presentar la generalidad sobre funciones, Frege necesita introducir, en primer lugar, las letras de función y, en segundo lugar, la noción de nivel aplicada a las funciones. Por esta razón, la presentación en *Grundgesetze* de las dos funciones de generalidad, sobre objetos y sobre funciones, está sensiblemente separada. Sin embargo, por razones expositivas, presentamos estas dos funciones conjuntamente.

Respecto a la función de generalidad para funciones de primer nivel, Frege afirma:

> "If a concavity with a German function-letter is followed by a combination of signs consisting of the name of a second-level function with one

> argument together with the function-letter in question in its argument places, then this whole refers to the True provided the value of that second-level function is the True for every fitting argument: in all other cases it refers to the False." [Frege, 1903, §24, p. 41]

La función de generalidad para funciones de primer nivel asigna únicamente valores de verdad a sus argumentos: es, por lo tanto, un concepto. Además, dado que sus argumentos son funciones de segundo nivel unarias, se trata de un concepto de tercer nivel. Por ejemplo, la expresión siguiente:

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top\ \mathfrak{f}(1+1)\\ \llcorner\ \mathfrak{f}(2)\end{array}$$

designa lo Verdadero, porque su argumento, esto es, la función de segundo nivel siguiente:

$$\begin{array}{l}\top\ \varphi(1+1)\\ \llcorner\ \varphi(2)\end{array}$$

asigna lo Verdadero a cualquier función de primer nivel unaria que constituya su argumento.

De modo similar a como hemos hecho con la función de generalidad para objetos, precisamos la definición de la función de generalidad para funciones de primer orden unarias como sigue:

(G2¹) El valor de la función:

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$$

para el argumento $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ es lo Verdadero si el valor de la función $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ es lo Verdadero para cualquier función de primer nivel unaria que ocupe el lugar de φ; en cualquier otro caso es lo Falso.

(G2²) El valor de la función:

$$\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\ \mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{g}(\beta,\gamma))$$

para el argumento $\Omega_{\beta\gamma}(\psi(\beta,\gamma))$ es lo Verdadero si el valor de la función $\Omega_{\beta\gamma}(\psi(\beta,\gamma))$ es lo Verdadero para cualquier función de primer nivel binaria que ocupe el lugar de ψ; en cualquier otro caso es lo Falso.

Dado que la distinción entre función y argumento presente en *Grundgesetze* posee una naturaleza semántica, los cuantificadores, en este texto y a diferencia de *Begriffsschrift*, tienen interpretación semántica. En particular, los cuantificadores correspondientes a la función de generalidad sobre objetos expresan generalidad sobre todo objeto del universo. Análogamente, los cuantificadores correspondientes a la función de generalidad sobre funciones de primer nivel expresan generalidad sobre toda función de primer nivel unaria del universo. Frege no hace comentarios acerca del dominio de cada uno de los cuantificadores y, de hecho, no especifica en ninguna ocasión que la totalidad de los objetos o de las funciones de primer nivel que la lógica considera formen una clase.

La interpretación semántica de los cuantificadores es patente en el hecho de que las fórmulas siguientes:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a}) \qquad \text{y} \qquad \vdash\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$$

expresan que los argumentos de las funciones $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \varphi(\mathfrak{a})$ y $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$, esto es, las funciones $\Phi(\xi)$ y $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$, respectivamente, asignan lo Verdadero a cada argumento. La única condición que deben cumplir estos argumentos es pertenecer a una categoría ontológica determinada: objetos en el caso de $\Phi(\xi)$ y funciones de primer nivel unarias en el caso de $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$. La exigencia de determinación para la definición de las funciones garantiza que estas dos funciones asignan un valor a cada argumento.

Como la conceptografía de *Begriffsschrift*, la conceptografía de *Grundgestze* tampoco dispone, entre los símbolos lógicos de su lenguaje, del cuantificador existencial. Ahora bien, en el lenguaje puede expresarse un enunciado existencial mediante la combinación de dos negaciones y un cuantificador universal: $\top\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\top$. En palabras de Frege:

> "Accordingly,
>
> $$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, 2+3.\mathfrak{a}=5.\mathfrak{a}$$
>
> is the True and
>
> $$\text{‘}\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\, 2+3.\mathfrak{a}=5.\mathfrak{a}\text{’}$$
>
> says: *there is* at least one solution for the equation '$2+3.x=5.x$' (...). One sees from this how 'there is' is rendered in the concept-script." [Frege, 1893, §8, p. 12]

Frege especifica que un enunciado existencial como el ejemplificado lleva asociado un requisito de existencia, en el sentido en que el símbolo '$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top$' expresa lo mismo que 'hay al menos un $\mathfrak{a}$'.

Aspectos sintácticos

Las funciones de generalidad, tanto para objetos como para funciones de primer nivel, llevan aparejadas dos elementos de carácter sintáctico: la identificación de la función correspondiente, esto es, el argumento de la función de generalidad, y el alcance del cuantificador.

A pesar del orden de la exposición de Frege, presentaremos, en primer lugar, la noción de alcance del cuantificador. Y dadas las similitudes de naturaleza sintáctica de las dos funciones en consideración, ofreceremos una explicación dual de esta noción. En palabras de Frege:

> "We now call that which follows a concavity with a *German letter*, which together with this same concavity forms the name of the truth-value of: that, for every argument, the value of the corresponding function is the True, the *scope* of the German letter standing over the concavity." [Frege, 1893, §8, p. 13]

El nombre del valor de la función de generalidad sobre objetos está formado a partir del nombre de la función de generalidad '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \varphi(\mathfrak{a})$' y el nombre de la función correspondiente, (esto es, del argumento): el nombre de una función de primer orden unaria, '$\Phi(\xi)$'. El *alcance de un cuantificador* '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' consiste en el nombre '$\Phi(\xi)$'. Decimos que todas las apariciones de la letra gótica '$\mathfrak{a}$' en '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \Phi(\mathfrak{a})$' que ocupan los lugares indicados por 'ξ' en '$\Phi(\xi)$' están dentro del alcance del cuantificador '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' .

Análogamente, el nombre del valor de la función de generalidad sobre funciones de primer nivel está formado a partir del nombre de la función de generalidad '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ \mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$' y el nombre de la función correspondiente (esto es, del argumento): el nombre de una función de segundo orden cuyos argumentos son funciones de primer nivel unarias, '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$'. El *alcance de un cuantificador* '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}$' consiste en el nombre '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$'. Decimos que todas las apariciones de la letra gótica '$\mathfrak{f}$' en '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\ \Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$' que ocupan los lugares indicados por 'φ' en '$\Omega_\beta(\varphi(\beta))$' están dentro del alcance del cuantificador '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}$'[217].

Como es natural, el alcance de un cuantificador puede incluir el alcance de otro, ya sea de una letra del mismo tipo o de tipo distinto. Por ejemplo, el alcance de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' en la expresión siguiente:

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!\begin{array}{l} \text{——}\ \mathfrak{f}(b) \\ \llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{f}(\mathfrak{a}) \end{array}$$

está incluido dentro del alcance de '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}$'. En este caso, decimos que el alcance de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' está subordinado al de '$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}$'.

El argumento de la función de generalidad, que es una función de primer nivel (para la generalidad sobre objetos) o una función de segundo nivel

[217] A partir de esta definición informal es claro cómo puede obtenerse una definición del alcance del cuantificador de una letra de función de primer nivel binaria '$\overset{\mathfrak{g}}{\smile}$'.

(para la generalidad sobre funciones) recibe la denominación 'función correspondiente'. Frege constata que, en multitud de ocasiones, en el nombre del valor de la función de generalidad, es difícil identificar el nombre de la función correspondiente al cuantificador en cuestión. La razón esencial está en el hecho de que en el nombre de la función correspondiente puede haber apariciones de letras góticas. En palabras de Frege:

> "[T]his [the definition of the function of generality over objects] requires supplementation in that one need to state more precisely which function $\Phi(\xi)$ is in each case. We will call it the *corresponding* function. For there could be doubts. $\Delta = \Delta$ is the value both of the function $\Delta = \xi$ and the value of the function $\xi = \xi$, in both cases for the argument Δ. So one might, starting from $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, want to take as the corresponding function $\xi = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = \xi$, or $\xi = \xi$. With our use of the German letters, however, we would in the first two cases not even have a *function* because '$\xi = \mathfrak{a}$' and '$\mathfrak{a} = \xi$' always remain without reference, whatever one may insert for 'ξ'; because the German letter '$\mathfrak{a}$' ought not occur without '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' prefixed, except in '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' itself. Here only $\xi = \xi$ can thus be considered as the corresponding function." [Frege, 1893, §8, pp. 12-13]

Para poder localizar, en el nombre del valor de una función de generalidad, el nombre de la función correspondiente, Frege plantea la siguiente regla:

> "All places, in which a German letter occurs in its own scope, but not within a subordinate scope of the same letter nor above a concavity, are related argument places, namely of the corresponding function." [Frege, 1893, §8, p. 13]

Clarificaremos esta regla mediante un ejemplo del propio Frege. El siguiente nombre:

$$`\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ ((\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = 2.\mathfrak{a}) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}))'$$

es el nombre de un valor de la función de generalidad para objetos. Las apariciones de '$\mathfrak{a}$' en '$(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$' están dentro de un alcance subordinado de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$', esto es, en un alcance de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' incluido en un alcance de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' más general (que afecta a toda la expresión). Así, estas apariciones de '$\mathfrak{a}$' no pueden ser lugares de argumento de la función correspondiente. Únicamente las apariciones de '$\mathfrak{a}$' en '$(\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = 2.\mathfrak{a})$', que están fuera del alcance de la aparición de '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$' en '$(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$', indican lugares de argumento de la función correspondiente. Por consiguiente, la función correspondiente es la siguiente:

$$((\xi + \xi = 2.\xi) = (\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a})).$$

En general, la regla relativa a la función correspondiente de una función de generalidad establece un criterio sintáctico en la formación de expresiones de la conceptografía. Las reglas para la construcción de expresiones complejas en la conceptografía que incluimos en el apartado 6.5.1 capturan el sentido de esta regla y garantizan que una expresión que contenga el nombre de una función de generalidad admita una única lectura, esto es, que la función correspondiente sea unívocamente identificable.

Las letras góticas son símbolos auxiliares en el nombre de la función de generalidad, pero no son las únicas letras de la conceptografía que expresan generalidad. Tal y como hemos planteado en el apartado 6.4.1, las letras latinas, a las que nos referimos simplemente mediante la denominación 'letras', también expresan generalidad. Frege explica esta circunstancia mediante una estipulación, según la cual las letras latinas se consideran cuantificadas universalmente de forma implícita, de modo que "the *scope* of a *Roman letter* is to include everything that occurs in the proposition apart from the judgement-stroke" [Frege, 1893, §17, p. 31]. En consecuencia, dado que las letras siempre expresan generalidad, el uso de las letras góticas está reservado a aquellas ocasiones en las que el alcance de su cuantificador correspondiente no debe consistir en una fórmula entera, sino en una de sus partes. En este sentido, la función de generalidad, tanto para objetos como para funciones, no es el instrumento de la conceptografía para expresar generalidad, sino para expresar generalidad restringida a cierto alcance limitado.

La convención referente a las letras latinas conlleva que toda expresión de la conceptografía en la que aparecen letras latinas que no vaya precedida de una barra de juicio no designa, propiamente, nada, porque no es el nombre de un objeto. Por ejemplo, la expresión '$a = a$' no designa un valor de verdad; meramente lo indica. Es necesario añadirle una barra de juicio (junto con una horizontal) para poder determinar el alcance de la cuantificación implícita que afecta a 'a'. Al fin y al cabo, la expresión '$—\ (a = a)$' podría ser simplemente una parte de una expresión más compleja, por lo que, sin una barra de juicio que la preceda, no puede decirse que '$—\ (a = a)$' tiene el mismo significado que el siguiente enunciado:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{a}).$$

Así pues, los siguientes juicios:

$$\vdash (a = a) \qquad \text{y} \qquad \vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ (\mathfrak{a} = \mathfrak{a})$$

son el acto de reconocimiento del mismo pensamiento[218]. Sea como sea, esta

[218]Véase una explicación alternativa del uso convencional de las letras latinas en la

circunstancia no es, en realidad, problemática, dado que, en palabras de Frege:

> "The use of Roman letters is hereby explained only for the case in which a judgement-stroke occurs. This, however, is always the case in a pure concept-development; since then we always progress from proposition to proposition." [Frege, 1893, §17, p. 31, nota]

Ciertamente, en las explicaciones de la conceptografía puede suceder que las letras latinas se usen de modo inconveniente. De hecho, en este contexto, Frege recurre a una serie de símbolos que no pertenecen al lenguaje de la conceptografía. Sin embargo, el uso genuino de la conceptografía consiste en una sucesión de deducciones compuestas por juicios, esto es, por expresiones bien formadas de la conceptografía precedidas por una barra de juicio. En tal circunstancia, la convención que afecta a las letras latinas no es un inconveniente, sino un recurso notacional de gran relevancia.

6.5 Elementos sintácticos de la conceptografía

La conceptografía de *Grundgesetze* dispone de un lenguaje regimentado, esto es, de un conjunto de símbolos que permite expresar en el lenguaje cada una de las categorías lógicas. Esta circunstancia es esencial para la formulación de reglas sintácticas que especifiquen cómo deben construirse símbolos complejos a partir de símbolos primitivos y, en último término, fórmulas. Una sintaxis regimentada es un componente indispensable de un lenguaje formal actual, y es un elemento que distingue la conceptografía de *Grundgesetze* de la propia de *Begriffsschrift*.

En esta sección presentaremos de forma unitaria los aspectos sintácticos que afectan a los símbolos primitivos de la conceptografía y que Frege introduce junto con la presentación de estos símbolos. En primer lugar, ofreceremos una reconstrucción del conjunto de reglas de formación de expresiones complejas. En segundo lugar, introduciremos el recurso del que dispone la conceptografía para obtener funciones complejas a partir de funciones primitivas. Finalmente, proporcionaremos definiciones precisas de las substituciones que tienen lugar en la conceptografía.

---

conceptografía, por parte de R. Cook, en 'How to read *Grundgesetze*' [Cook, 2013, pp. A13-A16].

En *Reading Frege's* Grundgesetze [Heck, 2012, pp. 59-64], R. Heck proporciona una explicación detallada del tratamiento que deben recibir las letras latinas cuando aparecen simultáneamente y en un mismo contexto en más de una fórmula (por ejemplo, en una demostración).

6.5.1 Formación de expresiones complejas

Frege proporciona algunas indicaciones de carácter general acerca de la correcta formación de nombres en la conceptografía:

> "I call a name *correctly* formed if it consists only of such signs that are primitive or introduced by definition, and if these signs are only used as they were introduced to be used, that is, proper names as proper names, names of functions of first-level with one argument as names of such functions, and so on, so that the argument places are always filled with fitting names or markers. For *correct* formation it is further required, that German (...) letters are always used in accordance with their purpose. Thus a German letter may only stand above a concavity if the concavity is immediately followed by a marker of a truth-vale composed of the name, or marker, of a function with one argument whose argument places are filled by the same German letter. Throughout its scope, a function-letter must occur everywhere either with one or with two argument places. A German letter may occur in an argument place only if a concavity with the same letter stands to the left of it, demarcating its scope. Only a German letter may stand above a concavity." [Frege, 1893, §28, p. 45]

Estas indicaciones, junto con algunas condiciones sintácticas que Frege va añadiendo a lo largo de su exposición en la primera parte de *Grundgesetze*, son los únicos recursos que proporciona este texto respecto a la correcta construcción de expresiones complejas. En este sentido, las reglas de formación de expresiones complejas que siguen son una reconstrucción de las que Frege plantea implícitamente en *Grundgesetze*.

Nuestra reconstrucción es, en conjunto, coherente con la práctica de Frege en *Grundgesetze* y, en la medida de lo posible, trata de recoger sus indicaciones sintácticas informales. Ahora bien, hay que tener en cuenta que la presentación de Frege del lenguaje de la conceptografía es incompleta y presenta algunas ambigüedades que señalaremos en el momento oportuno. Es claro que el autor no está interesado en proporcionar un método general para resolver estas ambigüedades, porque no pretende hacer el lenguaje más complejo de lo que estrictamente requieren las demostraciones de *Grundgesetze*. La ausencia de símbolos de funciones de un nivel superior al segundo es una buena muestra de ello. Por consiguiente, dado que nuestra pretensión es simplemente reconstruir, en la medida de lo posible, las reglas sintácticas que Frege plantea en *Grundgesetze* para el lenguaje de la conceptografía, no hemos ofrecido una definición general para la construcción de expresiones complejas (sino una definición de aquellas expresiones complejas a las que sí recurre el autor)[219].

Desde la perspectiva de Frege, la construcción de nombres en la conceptografía consiste en combinar expresiones completas y expresiones incompletas, esto es, expresiones que designan objetos y expresiones que designan funciones, para formar una expresión compleja siguiendo una serie de criterios de carácter sintáctico. Proporcionar reglas para la construcción de expresiones que designan funciones (que exige el uso de consonantes griegas auxiliares, como 'ξ' o 'φ', que no forman parte del lenguaje) puede ser adecuado en ciertos contextos, pero en el que estamos considerando únicamente añadiría un grado innecesario de complejidad[220]. En nuestra opinión, es preferible plantear la construcción de expresiones complejas únicamente a partir de expresiones completas más simples del lenguaje de la conceptografía. Por consiguiente, sistematizaremos las indicaciones generales de Frege y las formularemos con precisión para formar expresiones completas complejas a partir de componentes del lenguaje de la conceptografía.

Frege no dispone de un modo de referirse con generalidad a los elementos del lenguaje. En sus explicaciones, suple esta carencia encerrando las consonantes griegas mayúsculas entre comillas. Sin embargo, estos símbolos, tal y como han sido presentados, no son, en sentido estricto, adecuados para llevar a cabo la tarea para la cual se usan las metavariables en las presentaciones formales actuales. En nuestra presentación de *Begriffsschrift* en los capítulos 1 y 2 no hemos llevado a cabo una reconstrucción del lenguaje como la que planteamos a continuación. Ahora bien, en esta reconstrucción del lenguaje de *Grundgesetze*, será conveniente disponer de un modo de referirse genéricamente a componentes del lenguaje. Por consiguiente, adoptaremos dos convenciones. En primer lugar, modificaremos el uso de Frege en *Grundgesetze* de las consonantes griegas mayúsculas y utilizaremos estos

[219]M. Cadet y M. Panza ofrecen una reconstrucción alternativa de estas reglas de formación, y distinguen entre aquellas que permiten formar términos proposicionales (con o sin igualdad) [Cadet; Panza, 2015, pp. 34-35; p. 56] de las que permiten formar términos en un lenguaje de segundo orden [Cadet; Panza, 2015, pp. 67-73; pp. 81-83].

Partiendo de una perspectiva distinta, R. G. Heck y G. Landini ofrecen también reglas para la definición de las expresiones de la conceptografía en '*Grundgesetze der Arithmetik* I §§29-32', [Heck, 1997, pp. 439-440] y *Frege's Notations* [Landini, 2012, pp. 29-41; 52-53], respectivamente. No consideramos estos estudios porque no son, propiamente, reconstrucciones y, en este sentido, no alcanzan el mismo nivel de detalle que la reconstrucción que presentamos a continuación.

[220]En particular, ofrecer reglas para la construcción expresiones incompletas es conveniente para una rigurosa formulación de las substituciones de la conceptografía. Véase el apartado 6.5.2.

símbolos como si fuesen metavariables. Así pues, de ahora en adelante las consontantes griegas mayúsculas pasarán a tomar valores sobre el conjunto de expresiones bien formadas del lenguaje de la conceptografía. En segundo lugar, tomaremos como nombre de una expresión la expresión misma, lo cual nos permitirá evitar, en gran medida, el uso de comillas. A partir de ahora, el uso de comillas estará reservado a las citas de Frege y a aquellas ocasiones en las que nuestra exposición lo haga necesario.

De acuerdo con estas convenciones, $\Phi(\Delta)$ es una expresión compuesta cualquiera en la que hay un número arbitrario de apariciones de la expresión Δ. Análogamente, $\Psi(\Delta, \Gamma)$ es una expresión compuesta cualquiera que contiene apariciones de Δ y Γ. Finalmente, $\Omega_\beta(\Phi(\beta))$ y $\Omega_{\beta\gamma}(\Psi(\beta,\gamma))$ son expresiones compuestas cualesquiera en las que hay al menos una aparición de $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi,\zeta)$, respectivamente. La aparición de β y γ en las metavariables $\Omega_\beta(\Phi(\beta))$ y $\Omega_{\beta\gamma}(\Psi(\beta,\gamma))$ plantea cierto grado de tensión con el uso de estos símbolos en las letras de la conceptografía M_β y $M_{\beta\gamma}$. Por un lado, $M_\beta(f(\beta))$ es un símbolo del lenguaje que contiene apariciones del símbolo auxiliar β. En particular, si $f(\xi)$ es substituida en $M_\beta(f(\beta))$ por una instancia compleja, como por ejemplo, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(g(\mathfrak{a}) = g(\xi))$, esta instancia contendrá apariciones de β en los lugares correspondientes a ξ: $M_\beta(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(g(\mathfrak{a}) = g(\beta)))$. Por el otro, $\Omega_\beta(\Phi(\beta))$ es una expresión del metalenguaje que se usa exclusivamente para referirse a expresiones en las que aparece $\Phi(\xi)$. En este caso, β es únicamente un indicador de la ariedad de $\Phi(\xi)$, de modo que no tiene por qué aparecer en una instancia de $\Omega_\beta(\Phi(\beta))$ como puede ser $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(g(\mathfrak{a}) = g(a))$, donde $g(\xi)$ es vista como $\Phi(\xi)$.

Todas las expresiones que en nuestra exposición contengan alguna consonante mayúscula griega deben verse como metavariables y no como expresiones de la conceptografía en sí mismas. Nótese que, por ejemplo, $f(a)$ puede verse a la vez como $\Phi(\Delta)$ y como $\Omega_\beta(\Phi(\beta))$, aunque, por lo general, para referirnos a expresiones simples como $f(a)$ usaremos $\Phi(\Delta)$. Sin embargo, de acuerdo con nuestro planteamiento, a no puede verse como $\Phi(\Delta)$, porque a no es una expresión compuesta[221]. En la enumeración de reglas de formación que sigue, si $\Phi(\Delta)$ y $\Phi(a)$ aparecen en el mismo contexto, entendemos que $\Phi(a)$ es el resultado de reemplazar en $\Phi(\Delta)$ todas las apariciones de Δ por a, a menos que se indique lo contrario.

[221] Naturalmente, es distinto decir que la letra latina de objeto a no puede verse como $\Phi(\Delta)$ a aceptar que, en determinados contextos, una instancia de substitución adecuada de $f(a)$ pueda ser la letra a. Veremos ejemplos de este tipo de substitución en el apartado 7.3.2.

Reglas para la correcta formación de expresiones

La construcción de expresiones complejas de la conceptografía bosquejada por Frege requiere únicamente disponer de letras latinas de los tipos adecuados y de los símbolos lógicos de la conceptografía. Por consiguiente, para poder formular un conjunto de reglas de construcción de expresiones complejas no es necesario suponer que en la conceptografía hay un conjunto de objetos y de funciones cuyos nombres pertenecen a su lenguaje. Sin embargo, en algunos contextos puede ser conveniente suponer que se dispone de un conjunto tal de símbolos propios.

Así pues, suponemos que el lenguaje de la conceptografía dispone de un conjunto de símbolos propios, que incluye nombres propios primitivos y nombres primitivos de función de primer nivel[222].

Mediante las reglas que figuran a continuación establecemos una definición recursiva de una *expresión correctamente formada*. Con esta denominación recogemos la terminología a la que recurre Frege para referirse específicamente a nombres correctamente formados (*rechtmässig gebildeten Namen*) [Frege, 1893, §28, p. 45].

Una expresión correctamente formada de la conceptografía se construye mediante las siguientes reglas de formación:

(R1) Las letras latinas de objeto son expresiones correctamente formadas.

(R2) Los nombres propios primitivos son expresiones correctamente formadas.

(R3) Si Δ y Γ son expresiones correctamente formadas, entonces:

- (a) $f(\Delta)$ es una expresión correctamente formada.
- (b) $g(\Delta, \Gamma)$ es una expresión correctamente formada.

(R4) Si $\theta(\xi)$ y $\tau(\xi, \zeta)$ son símbolos primitivos de función de primer nivel, y Δ y Γ son expresiones correctamente formadas, entonces:

[222] Decimos que estos símbolos son, o pueden ser, los símbolos primitivos del lenguaje de la conceptografía, aunque, en caso necesario, podríamos disponer de más símbolos primitivos. En particular, si es conveniente introducir símbolos propios para funciones de segundo nivel, la construcción de las expresiones que los contienen es análoga a la regla (R5).

Considerar que el lenguaje de la conceptografía dispone de símbolos propios no es ajeno al planteamiento de Frege en *Grundgesetze*. En sus ejemplos, usa numerales como si fuesen nombres de objeto, y símbolos de operaciones aritméticas como si fuesen nombres de función de primer nivel. Y, de hecho, disponer de nombres de objeto primitivos (o, en términos modernos, de constantes individuales) es necesario para poder deducir los teoremas de la aritmética.

(a) $\theta(\Delta)$ es una expresión correctamente formada.

(b) $\tau(\Delta, \Gamma)$ es una expresión correctamente formada.

(R5) Si $\Phi(a)$ es una expresión correctamente formada en la que aparece a y $\Psi(a,b)$ es una expresión correctamente formada en la que aparecen a y b, entonces:

(a) $M_\beta(\Phi(\beta))$ es una expresión correctamente formada.

(b) $M_{\beta\gamma}(\Psi(\beta,\gamma))$ es una expresión correctamente formada[223].

(R6) Si Δ es una expresión correctamente formada, entonces:

(a) $— \Delta$ es una expresión correctamente formada.

(b) $\top \Delta$ es una expresión correctamente formada.

(R7) Si Δ y Γ son expresiones correctamente formadas, entonces:

(a) $\begin{array}{l} \top \Delta \\ \lfloor \Gamma \end{array}$ es una expresión correctamente formada.

(b) $(\Delta = \Gamma)$ es una expresión correctamente formada.

(R8) Si $\Phi(a)$ es una expresión correctamente formada en la que aparece a, entonces:

$$\smile\!\!\!\!^{\mathfrak{a}}\ \Phi(\mathfrak{a})$$

es una expresión correctamente formada, donde $\Phi(\mathfrak{a})$ es el resultado de reemplazar algunas o todas las apariciones de a en $\Phi(a)$ por $\mathfrak{a}$.

(R9) Si ι es un nombre propio primitivo y $\Phi(\iota)$ es una expresión correctamente formada en la que aparece ι, entonces:

$$\smile\!\!\!\!^{\mathfrak{a}}\ \Phi(\mathfrak{a})$$

es una expresión correctamente formada, donde $\Phi(\mathfrak{a})$ es el resultado de reemplazar algunas o todas las apariciones de ι en $\Phi(\iota)$ por $\mathfrak{a}$.

[223] En primer lugar, la expresión $M_\beta(\Phi(\beta))$ es el resultado de substituir todas las apariciones de a en $\Phi(a)$ por β y, de modo similar, la expresión $M_{\beta\gamma}(\Psi(\beta,\gamma))$ es el resultado de substituir todas las apariciones de a y b en $\Psi(a,b)$ por β y γ, respectivamente. Por lo tanto, en $M_\beta(\Phi(\beta))$ y en $M_{\beta\gamma}(\Psi(\beta,\gamma))$ no hay ninguna aparición de a o b.

En segundo lugar, hay que tener en cuenta que, tal y como hemos presentado las metavariables, tanto las expresiones correctamente formadas $M_\beta(\Phi(\beta))$ y $M_{\beta\gamma}(\Psi(\beta,\gamma))$ como las expresiones correctamente formadas $f(a)$ y $g(a,b)$ pueden verse, respectivamente, como $\Omega_\beta(\Phi(\beta))$ y $\Omega_{\beta\gamma}(\Psi(\beta,\gamma))$.

Finalmente, la obtención de las expresiones correctamente formadas $M_\beta(f(\beta))$ y $M_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))$ resulta de la aplicación de (R5)-(a) y (R5)-(b) tomando las expresiones correctamente formadas $f(a)$ y $g(a,b)$ como $\Phi(\Delta)$ y $\Psi(\Delta,\Gamma)$, respectivamente.

(R10) Si $\Omega_\beta(f(\beta))$ es una expresión correctamente formada en la que aparece f, entonces:

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$$

es una expresión correctamente formada, donde $\Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$ es el resultado de reemplazar algunas o todas las apariciones de f en $\Omega_\beta(f(\beta))$ por $\mathfrak{f}$.

(R11) Si $\theta(\xi)$ es un nombre primitivo de función de primer nivel unaria y $\Omega_\beta(\theta(\beta))$ es una expresión correctamente formada en la que aparece θ, entonces:

$$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\, \Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$$

es una expresión correctamente formada, donde $\Omega_\beta(\mathfrak{f}(\beta))$ es el resultado de reemplazar algunas o todas las apariciones de θ en $\Omega_\beta(\theta(\beta))$ por $\mathfrak{f}$.

(R12) Si $\Omega_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))$ es una expresión correctamente formada en la que aparece g, entonces:

$$\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\, \Omega_{\beta\gamma}(\mathfrak{g}(\beta,\gamma))$$

es una expresión correctamente formada, donde $\Omega_{\beta\gamma}(\mathfrak{g}(\beta,\gamma))$ es el resultado de reemplazar algunas o todas las apariciones de g en $\Omega_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))$ por $\mathfrak{g}$.

(R13) Si $\tau(\xi,\zeta)$ es un nombre primitivo de función de primer nivel binaria y $\Omega_{\beta\gamma}(\tau(\beta,\gamma))$ es una expresión correctamente formada en la que aparece τ, entonces:

$$\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\, \Omega_{\beta\gamma}(\mathfrak{g}(\beta,\gamma))$$

es una expresión correctamente formada, donde $\Omega_{\beta\gamma}(\mathfrak{g}(\beta,\gamma))$ es el resultado de reemplazar algunas o todas las apariciones de τ en $\Omega_{\beta\gamma}(\tau(\beta,\gamma))$ por $\mathfrak{g}$.

Tras presentar las reglas para la correcta formación de expresiones complejas, es pertinente plantear una serie de observaciones que permitan explicar aquellos aspectos que puedan parecer menos claros. En particular, mencionaremos los aspectos en los que nuestra reconstrucción se distancia de las indicaciones sintácticas que plantea Frege en *Grundgesetze*. Finalmente, ofreceremos un ejemplo de aplicación de estas reglas.

En sentido estricto, para construir una expresión correctamente formada de la conceptografía, las reglas (R2), (R4), (R9), (R11) y (R13) no son necesarias. Hemos incluido estas reglas únicamente para reflejar la posibilidad de que el lenguaje de la conceptografía disponga de un conjunto de símbolos propios.

El uso de paréntesis en la formulación de la regla (R7)-(b) diverge ligeramente de la práctica de Frege. Ésta se rige por criterios de conveniencia para evitar ambigüedades y por el significado de la horizontal, según la cual toda combinación de símbolos que figuran a la derecha de una horizontal se considera como un todo.

Por ejemplo, en *Grundgesetze* pueden hallarse las siguientes proposiciones:

$$
\begin{aligned}
&\vdash a = a,\\
&\vdash\!\!\top (\text{—}\, a) = (\top\, a),\\
&\vdash (\text{—}\, a = b) = (a = b).
\end{aligned}
$$

En nuestra exposición, sin embargo, preferimos uniformizar la introducción de paréntesis. De acuerdo con la regla (R7)-(b) (que se complementa con (R6)), las proposiciones de la conceptografía citada deberían formarse del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\vdash (a = a),\\
&\vdash\!\!\top (\text{—}\, a = \top\, a),\\
&\vdash ((\text{—}\, a = b) = (a = b)).
\end{aligned}
$$

Nótese que no hay ambigüedad posible en la lectura de estas proposiciones. Por ejemplo, $(\text{—}\, a = b)$ es el resultado de aplicar la regla (R7)-(b) a las expresiones correctamente formadas $\text{—}\, a$ y b. Esta misma expresión no puede ser el el resultado de aplicar (R6)-(a) a la expresión correctamente formada $(a = b)$, porque, en tal caso, debería ser $\text{—}\, (a = b)$.

Ahora bien, la variación en el uso de los paréntesis que introducimos mediante la regla (R7)-(a) provoca que aparezcan paréntesis redundantes en expresiones correctamente formadas. Por ejemplo, el resultado de aplicar (R3)-(a) y (R5)-(a) a las expresiones bien formadas $(f(a) = g(a))$ y $(a = a)$ es, respectivamente, $M_\beta((f(\beta) = g(\beta)))$ y $f((a = a))$. Eliminaremos, en lo sucesivo, los paréntesis que sean redundantes.

La particular formulación de las reglas (R8), (R10) y (R12) permite construir expresiones que, por razones sintácticas, pueden parecer sorprendentes e inadecuadas. Por ejemplo, la aplicación de (R8) a la siguiente expresión correctamente formada:

$$(f(a) = g(a))$$

permite obtener:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(f(\mathfrak{a}) = g(a)).$$

En cualquier caso, hay ejemplos de este tipo de expresiones en *Grundgesetze*. Por ejemplo, en el apartado siguiente mencionaremos la expresión siguiente:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(f(\mathfrak{a}, a) = g(\mathfrak{a}, a)) \\ \;\llcorner\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(f(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{d})), \end{array}$$

que aparece como paso intermedio en la demostración de una proposición de la conceptografía. Hay que tener en cuenta, además, que las reglas de construcción mencionadas no son reglas de introducción del cuantificador en el cálculo. Cuando introduzcamos estas reglas de inferencia, en el apartado 7.2.2, se plantearán todas las restricciones pertinentes.

Adicionalmente, la formulación de la regla (R8), y por motivos similares la de las reglas siguientes, no coincide con los criterios sintácticos planteados explícitamente por Frege para evitar conflictos en el alcance de la cuantificación en el proceso de formación de expresiones complejas. En efecto, Frege afirma:

> "If in the name of a function German letters already occur, within whose scopes lie argument places of this function, then a German letter distinct from these is to be chosen in order to form the corresponding expression of generality." [Frege, 1893, §8, p. 14]

Tal y como hemos formulado (R8), a partir de la siguiente expresión correctamente formada:

$$[(a + a = 2.a) = \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(a = \mathfrak{a})],$$

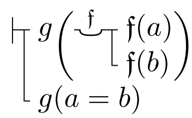
podría obtenerse, mediante la aplicación de esta regla, la expresión:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,[(\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = 2.\mathfrak{a}) = \overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,(\mathfrak{a} = \mathfrak{a})],$$

que es exactamente lo que Frege pretende evitar con su comentario. Este cambio respecto al planteamiento del autor en *Grundgesetze* es inocuo por lo que respecta a las reglas de formación de expresiones complejas, pero no lo es por lo que respecta al cálculo. La indicación de Frege es pertinente en los casos de cuantificación y, por esta razón, la incorporaremos en la definición de los cambios alfabéticos de letras góticas en el apartado 6.5.2.

Veamos, por último, un ejemplo de aplicación de las reglas para la correcta formación de expresiones de la conceptografía. Consideremos la Proposición (III), que es una ley básica de *Grundgesetze*:

Pr. (III)

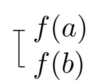


Formamos (III) mediante el siguiente procedimiento dividido en pasos:

1. Por (R1), a y b son expresiones correctamente formadas.

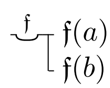
2. Por (R3)-(a) aplicada a (1), $f(a)$ y $f(b)$ son expresiones correctamente formadas.

3. Por (R7)-(a) aplicada a (2),

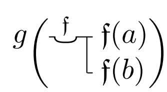
   es una expresión correctamente formada.

4. Por (R10) aplicada a (3),

   es una expresión correctamente formada.

5. Por (R3)-(a) aplicada a (4),

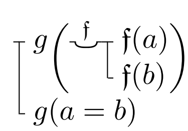
   

   es una expresión correctamente formada.

6. Por (R7)-(b) aplicada a (1), $(a = b)$ es una expresión correctamente formada.

7. Por (R3)-(a) aplicada a (6), $g(a = b)$ es una expresión correctamente formada.

8. Por (R7)-(a) aplicada a (7) y (5),

   es una expresión correctamente formada.

Nombres propios y marcas de objeto

Frege plantea una distinción para las expresiones de la conceptografía, según contengan o no letras latinas. Esta distinción refleja dos modos completamente distintos de interpretar semánticamente un conjunto de símbolos. De acuerdo con la teoría semántica presente en *Grundgesetze*, todas las expresiones de la conceptografía que no contienen letras latinas designan objetos. Tanto lo que, desde la perspectiva de la lógica actual, denominaríamos términos cerrados como las sentencias designan objetos, de modo que, en rigor, deberían considerarse, desde la perspectiva de la conceptografía, términos. De hecho, en este sistema formal no se distinguen aquellos términos que designan valores de verdad del resto: todos ellos son, de acuerdo con Frege, nombres propios:

> "I will not call the German, Roman and Greek letters occurring in concept-script *names* since they are not to refer to anything. In contrast, I do call, for example, '$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$' a *name* since it refers to the True; it is a *proper name*. Thus, I call *proper name* or *name* of an object any sign, be it simple or complex, that is to refer to an object, but not such a sign that merely indicates an object." [Frege, 1893, §26, p. 43]

Ahora bien, la mayoría de las expresiones de la conceptografía contiene letras latinas. Estas letras no designan, propiamente, entidades como objetos o funciones, sino que expresan generalidad. En consecuencia, una expresión que contiene letras latinas no puede considerarse un nombre propio. Según la terminología de Frege, una expresión tal es una marca de objeto:

> "I shall call *names* only those signs or combinations of signs that refer to something. Roman letters, and combinations of signs in which those occur, are thus not *names* as they merely *indicate*. A combination of signs which contains Roman letters, and which always results in a proper name when every Roman letter is replaced by a name, I will call a *Roman object-marker*." [Frege, 1893, §17, pp. 32-33]

Los nombres propios son los componentes básicos para la formación de marcas de objeto en la conceptografía. Desde una perspectiva actual, las marcas de objeto pueden verse o bien como fórmulas con variables libres o bien como términos abiertos.

Todas las expresiones correctamente formadas generadas a partir de las reglas de formación que hemos proporcionado son nombres propios o marcas de objeto. De hecho, es posible definir con precisión un nombre propio o una marca de objeto a partir de una expresión correctamente formada:

1. Si Δ es una expresión correctamente formada tal que en Δ no aparece ninguna letra latina, entonces Δ es un *nombre propio*.

2. Si Δ es una expresión correctamente formada tal que en Δ aparece al menos una letra latina, entonces Δ es una *marca de objeto*.

Proposiciones de la conceptografía

La conceptografía no maneja, propiamente, marcas de objeto o nombres propios, sino expresiones que incluyen en su extremo izquierdo una barra de juicio. Frege reserva un término técnico para estas expresiones: las denomina 'proposiciones de la conceptografía'. En sus propias palabras:

> "I reckon the judgement-stroke to belong neither with the *names* nor with the *markers*; it is a sign of its own kind. A sign which consists of a judgement-stroke and a name of a truth-value with a prefixed horizontal, I call a *concept-script proposition*, or *proposition*, where there can be no doubt. Likewise, I call a *concept-script proposition* (or *proposition*) a sign which consists of a judgement-stroke and a Roman-marker of a truth-value with a prefixed horizontal[224]." [Frege, 1893, §26, p. 44]

Una *proposición de la conceptografía* va asociada a un juicio, esto es, a un acto de reconocimiento de la verdad del pensamiento expresado por el nombre propio o marca de objeto que la forma. Por lo tanto, sólo aquellas expresiones que expresen un pensamiento que sea reconocido como verdadero pueden ser convertidas en juicios. En la conceptografía, el reconocimiento de la verdad de un pensamiento se establece por medio de una demostración, esto es, por medio de su deducción a partir de las leyes básicas y las reglas de inferencia. Dicho en otras palabras, una proposición de la conceptografía es un teorema de su cálculo. En este sentido, una proposición no resulta simplemente de añadir una barra de juicio y una horizontal a cualesquiera marcas de objeto o nombres propios y, por lo tanto, la formación de proposiciones no es un estadio final en los procesos de construcción de expresiones correctamente formadas. Naturalmente, esto no contradice el hecho, planteado por Frege, de que una proposición es siempre una marca de objeto o un nombre propio precedida por una horizontal y al que se añade una barra de juicio. En particular, sólo puede añadirse la barra de juicio para formar

[224]Para referirse en general a las marcas de objeto y a las marcas de función, Frege emplea la expresión '*lateinische Marke*' (que es traducida como '*Roman-marker*'). En referencia a la cita de *Grundgesetze* que acabamos de incluir, hay que tener en cuenta, en cualquier caso, que la marca latina de un valor de verdad es necesariamente una marca de objeto.

una proposición a un nombre de lo Verdadero o a una marca de objeto que indique lo Verdadero.

De acuerdo con la convención que asocia las letras latinas de la conceptografía con una cuantificación universal implícita, las expresiones que contienen letras latinas tienen sentido únicamente cuando van precedidas de una barra de juicio, esto es, cuando son proposiciones. Así pues, no toda expresión a la que se añade el símbolo $\vdash$ para formar una proposición es un nombre propio; todo lo contrario, la mayoría de las proposiciones de la conceptografía están formadas a partir de marcas de objeto a las que se añade una horizontal y una barra de juicio. Para facilitar nuestra exposición relativa a los componentes del lenguaje de la conceptografía, de aquí en adelante adoptaremos la siguiente convención terminológica: llamaremos 'sentencia' a cualquier expresión que designe un valor de verdad, y 'fórmula' a cualquier marca de objeto que indique un valor de verdad. De acuerdo con esta convención, toda proposición de la conceptografía está formada por una barra de juicio, una horizontal y o bien una sentencia que designa lo Verdadero o bien una fórmula que indica lo Verdadero[225].

6.5.2 Substituciones

De modo similar a lo que sucede en las demostraciones de *Begriffsschrift*, a menudo Frege somete a las proposiciones que intervienen en una demostración a una serie de substituciones. Así, no usa los teoremas lógicos necesarios del modo en que han sido probados, sino que, usando sus propios términos, los cita, reemplazando algunas de sus letras por otras expresiones de la misma naturaleza. Por ejemplo, puede reemplazarse una letra de objeto por una marca compleja de objeto, o una letra gótica por otra letra gótica del mismo tipo[226].

Hay dos diferencias fundamentales en el tratamiento de las substituciones en *Begriffsschrift* y *Grundgesetze*. En primer lugar, mientras que, en *Begriffsschrift*, Frege no ofrece ninguna indicación acerca de los tipos de

[225] La definición de proposición que, siguiendo el planteamiento de Frege, proporcionamos aquí no es una definición estándar de la noción de proposición. En términos contemporáneos, el concepto de proposición es más cercano a lo que en el contexto de este trabajo se denomina 'sentencia'.

[226] En su reconstrucción del fragmento de lógica de segundo orden de la conceptografía, M. Cadet y M. Panza definen con precisión el hecho de que cierta sucesión de símbolos forma parte de una expresión compleja [Cadet; Panza, 2015, pp. 69-70]. Dado el espíritu de nuestras reglas de formación de expresiones complejas, y la naturaleza de las substituciones que definimos a continuación, proporcionar una definición de esta noción no es completamente necesario.

substitución que tienen lugar en las demostraciones, en el texto de 1893-1903 lista explícitamente los distintos tipos de substituciones como reglas de inferencia: el reemplazo de letras latinas y de letras góticas forman parte del listado de reglas de inferencia de la conceptografía [Frege, 1893, §48, pp. 62-63][227]. En segundo lugar, en *Grundgesetze* no hay tablas de substitución y en *Begriffsschrift* sí. En el texto de 1893-1903, Frege únicamente indica la numeración de la proposición original, pero no especifica en ningún momento a qué substituciones debe someterse. El lector debe deducirlas comparando la proposición citada con el resto de proposiciones que intervienen en la demostración. Únicamente en la primera parte de *Grundgesetze* el autor hace explícitos, en comentarios que acompañan a algunas demostraciones, las substituciones a las que se someten algunas de las proposiciones involucradas.

En nuestra reconstrucción, distinguimos dos tipos de substituciones: cambios alfabéticos y substituciones de letras latinas por nombres complejos. Asimismo, hay distintos casos de substituciones de letras latinas, en función de la naturaleza de la letra latina involucrada; pueden producirse substituciones que afecten a letras de objeto, a letras de función de primer nivel o a letras de función de segundo nivel. A cada uno de estos casos de substitución de una letra latina le corresponderá una regla de inferencia, que presentaremos en el apartado 7.2.2.

Formación de nombres y marcas de función

Frege ofrece algunas indicaciones breves acerca de la obtención de nombres, en virtud de las cuales se establece, en general, cómo se obtienen nombres de funciones de todo tipo. Por ejemplo, para el caso de los nombres de funciones de primer nivel unarias, el autor plantea lo siguiente:

> "If we remove from a proper name some or all occurrences of another proper name that forms part of or coincides with it, but in such a way that these places remain marked as fillable by one and the same

[227]Frege también incluye el reemplazo de vocales griegas minúsculas como una regla de inferencia. Mediante esta regla pueden realizarse transiciones como la siguiente:

$$\frac{\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))}{\dot{\alpha}(\Phi(\alpha)),}$$

donde $\dot{\varepsilon}(\Phi(\varepsilon))$ es el curso de valores de la función $\Phi(\xi)$. Sin embargo, este tipo de substituciones involucra símbolos que no pertenecen a la conceptografía de *Grundgesetze* tal como la entendemos, esto es, a su fragmento propiamente lógico. Por esta razón, en este apartado no vamos a considerar este tipo de substituciones.

arbitrary proper name (as *argument places of the first kind*), then I call that which we obtain in this way a *name* of a first-level function with one argument." [Frege, 1893, §26, p. 43]

Mediante indicaciones análogas, Frege indica cómo se obtienen nombres de funciones de primer nivel binarias y nombres de segundo nivel, así como marcas de funciones.

Estas indicaciones están lejos de ser una definición rigurosa, pero, sin embargo, pueden reconstruirse con facilidad para plantear una serie de reglas de formación de nombres y marcas de funciones. Naturalmente, el resultado de estas reglas no son expresiones de la conceptografía. Sin embargo, disponer de un modo riguroso indicar cuáles son los nombres y marcas de función será de gran utilidad para la presentación de los distintos tipos de substituciones de este sistema formal. Estas reglas de formación dependen de las reglas de construcción de marcas de objeto y de nombres propios que hemos planteado en el apartado 6.5.1.

Hemos mencionado que el lenguaje de la conceptografía puede disponer de nombres primitivos de funciones de primer nivel. Además, se pueden formar nombres de función o marcas de función dentro del lenguaje de acuerdo con las reglas siguientes[228]:

(F1) Si $\Phi(\Delta)$ y Δ son expresiones correctamente formadas, entonces:

(a) Si en $\Phi(\xi)$ no aparece ninguna letra latina, entonces $\Phi(\xi)$ es un nombre de función de primer nivel unaria.

(b) Si en $\Phi(\xi)$ aparece al menos una letra latina, entonces $\Phi(\xi)$ es una marca de función de primer nivel unaria.

(c) Si Δ es un nombre propio, entonces $\varphi(\Delta)$ es un nombre de función de segundo nivel.

(d) Si Δ es una marca de objeto, entonces $\varphi(\Delta)$ es un nombre de función de segundo nivel.

[228] M. Cadet y M. Panza ofrecen una definición general de funciones de tercer nivel y, además, proporcionan reglas para la construcción de expresiones que contienen nombres y marcas de tales funciones [Cadet; Panza, 2015, pp. 62-72; 80-82]. También reconocen que Frege no menciona explícitamente este tipo de funciones en *Grundgesetze*.

De acuerdo con nuestra reconstrucción, hay expresiones en el lenguaje de la conceptografía que contienen los nombres de función tercer nivel $\forall\mathfrak{f}(\mu_\beta(\mathfrak{f}(\beta)))$ y $\forall\mathfrak{g}(\mu_{\beta\gamma}(\mathfrak{g}(\beta,\gamma)))$. Ahora bien, dado que no definimos la construcción de expresiones complejas a partir de nombres y marcas de funciones, y que no se producen en *Grundgesetze* substituciones que involucren nombres o marcas de funciones de tercer nivel, obviamos la definición de reglas de construcción que permitan la formación de nombres o marcas de funciones de este tipo.

(F2) Si $\Psi(\Delta, \Gamma)$, Δ y Γ son expresiones correctamente formadas, entonces:

(a) Si en $\Psi(\xi, \zeta)$ no aparece ninguna letra latina, entonces $\Psi(\xi, \zeta)$ es un nombre de función de primer nivel binaria.

(b) Si en $\Psi(\xi, \zeta)$ aparece al menos una letra latina, entonces $\Psi(\xi, \zeta)$ es una marca de función de primer nivel binaria.

(c) Si Δ y Γ son nombres propios, entonces $\psi(\Delta, \Gamma)$ es un nombre de función de segundo nivel.

(d) Si Δ o Γ son marcas de objeto, entonces $\psi(\Delta, \Gamma)$ es una marca de función de segundo nivel[229].

(F3) Si $\Omega_\beta(\Phi(\beta))$ y $\Phi(\Delta)$ son expresiones correctamente formadas, entonces:

(a) Si en $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ no aparece ninguna letra latina, entonces $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ es un nombre de función de segundo nivel.

(b) Si en $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ aparece al menos una letra latina, entonces $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ es una marca de función de segundo nivel.

(F4) Si $\Omega_{\beta\gamma}(\Psi(\beta, \gamma))$ y $\Psi(\Delta, \Gamma)$ son expresiones correctamente formadas, entonces:

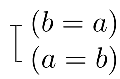
(a) Si en $\Omega_{\beta\gamma}(\psi(\beta, \gamma))$ no aparece ninguna letra latina, entonces $\Omega_{\beta\gamma}(\psi(\beta, \gamma))$ es un nombre de función de segundo nivel.

(b) Si en $\Omega_{\beta\gamma}(\psi(\beta, \gamma))$ aparece al menos una letra latina, entonces $\Omega_{\beta\gamma}(\psi(\beta, \gamma))$ es una marca de función de segundo nivel.

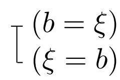
Veamos algunos ejemplos de aplicación de estas reglas. En primer lugar, ofreceremos ejemplos nombres de función. Por un lado, $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} f(\mathfrak{a})$ es una expresión correctamente formada que contiene la letra letra latina f y, por lo tanto, es una marca de objeto que puede verse como $\Omega_\beta(f(\beta))$. Además, si Δ es una expresión correctamente formada, $f(\Delta)$ es también una expresión correctamente formada. Dado que en $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ no aparece ninguna letra latina, por la regla (F3)-(a) $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \varphi(\mathfrak{a})$ es un nombre de función de segundo nivel. Por el otro, la expresión correctamente formada $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} (\mathfrak{a} = \mathfrak{a})$ es un nombre propio. Así pues, nuevamente por (F3)-(a), $\overset{\mathfrak{a}}{\smile} \psi(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ es un nombre de función de segundo nivel.

[229]Nótese que, si $\Psi(\Delta, \Gamma)$ es una expresión correctamente formada, dado que $\Psi(\Delta, \Gamma)$ es también una expresión del tipo $\Phi(\Delta)$ y $\Phi(\Gamma)$, por (F2) $\Psi(\xi, \Gamma)$ y $\Psi(\Delta, \xi)$ son, respectivamente, nombres o marcas de función.

En segundo lugar, la fórmula siguiente:



es una marca de objeto que puede verse como $\Phi(a)$. Además, a, en tanto que letra de objeto, es una expresión correctamente formada. Así pues, por la aplicación de (F1)-(b), la expresión siguiente:



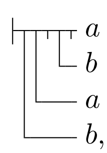
es una marca de función de primer nivel unaria.

Cambios alfabéticos

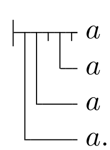
Los cambios alfabéticos consisten en el reemplazo de todas las apariciones de una letra en una expresión por una letra del mismo tipo. Se trata de cambios meramente notacionales, y se producen entre fórmulas lógicamente equivalentes. Hay dos casos distintos de cambios alfabéticos en la conceptografía: de letras latinas y de letras góticas.

Los cambios de letras latinas son triviales, puesto que no hay que observar ninguna restricción para poder aplicarlos. Basta reemplazar cada apariciones de una letra latina en una expresión por una única letra latina del mismo tipo. Por ejemplo, en la obtención de la Proposición (Ig) [Frege, 1893, §49, p. 65], Frege substituye b por a en la Proposición (Ie):

Pr. (Ie)



fruto de lo cual resulta la fórmula siguiente:



Los cambios alfabéticos de letras góticas exigen plantear una restricción para evitar conflictos de cuantificación. En palabras de Frege:

> "When citing a proposition by its label, we may uniformly replace a German letter above a concavity and at all argument places of the corresponding function by one and the same distinct letter, that is, an object-letter by an object-letter and a function-letter by a function-letter, just provided no German letter occurring in a scope enclosed within its own thereby becomes the same as the one whose scope is enclosed." [Frege, 1893, §48, p. 63]

En el apartado 6.4.5, hemos definido la noción de alcance y de función correspondiente relativas a las funciones de generalidad. Podemos reformular la definición de Frege de acuerdo con la reconstrucción que hemos realizado. Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ letras góticas del mismo tipo y sea $\vdash \Delta$ una proposición de la conceptografía que contiene el nombre propio o la marca de objeto $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$. En este caso, decimos que el alcance de $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ es $\Phi(\xi)$. El cambio de $\mathfrak{a}$ por $\mathfrak{b}$ en $\vdash \Delta$ consiste en el reemplazo de toda aparición de $\mathfrak{a}$ en $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$ (también en el cuantificador $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$) por $\mathfrak{b}$, si las apariciones de $\mathfrak{a}$ en $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\Phi(\mathfrak{a})$ no están dentro del alcance de un cuantificador $\overset{\mathfrak{b}}{\smile}$[230].

Las condiciones sintácticas asociadas a la función de generalidad que afectan a los cambios alfabéticos de letras góticas ponen de manifiesto una diferencia entre la conceptografía de *Begriffsschrift* y la de *Grundgesetze*. Tal y como hemos expuesto en el apartado 1.4.2, en la conceptografía de 1879 no se admite que en alcance de un cuantificador aparezca un cuantificador de la misma letra gótica. En *Grundgesetze*, esta circunstancia es perfectamente posible. De hecho, Frege plantea el siguiente ejemplo:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,((\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=2.\mathfrak{a})=(\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a}+\mathfrak{a})).$$

De acuerdo con la explicación que acabamos de ofrecer, sin embargo, esta fórmula no puede ser el resultado de substituir $\mathfrak{e}$ por $\mathfrak{a}$ en la siguiente fórmula:

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,((\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=2.\mathfrak{a})=(\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\,\mathfrak{a}+\mathfrak{e})),$$

porque hay una aparición de $\mathfrak{a}$ en $\overset{\mathfrak{e}}{\smile}\,\mathfrak{a}+\mathfrak{e}$ dentro del alcance de un cuantificador $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$.

A pesar de que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son letras góticas de objeto, la explicación que hemos proporcionado es aplicable sin modificación a los cambios alfabéticos de letras góticas de funciones. Basta que las letras góticas involucradas sean siempre del mismo tipo.

[230] Respecto a la condición que incluimos en esta definición, véanse las observaciones que hemos hecho tras nuestra reconstrucción de las reglas para la correcta formación de expresiones, en el apartado 6.5.1.

Substituciones de letras latinas

Aunque Frege especifica una serie de reglas de inferencia que consisten en la obtención de una proposición que resulta de llevar a cabo ciertas substituciones en una proposición inicial, no ofrece definiciones precisas de los procesos de substitución involucrados en la aplicación de estas reglas. Estas definiciones son implícitas en su presentación de la función de generalidad.

A pesar de la simplificación sintáctica que garantiza el uso de letras con tipografías distintas, es imprescindible formular explícitamente definiciones de las substituciones que pueden tener lugar en la conceptografía, porque la aplicación de algunas de ellas no tiene por qué ser en absoluto trivial. En particular, las substituciones de letras funcionales por nombres o marcas de funciones aplicadas indiscriminadamente pueden conllevar conflictos notacionales.

Definimos cuatro casos distintos de substituciones de letras latinas: de letras de objeto por nombres propios o marcas de objeto, de letras de función de primer nivel unarias por nombres o marcas de función de primer nivel unarias, de letras de función de primer nivel binarias por nombres o marcas de función de primer nivel binarias y de letras de función de segundo nivel por nombres de función de segundo nivel.

Definición 6.1. Si a es una letra latina de objeto, y $\mathit{\Delta}$ y $\mathit{\Gamma}$ son expresiones correctamente formadas, entonces la *substitución* de a por $\mathit{\Delta}$ en $\mathit{\Gamma}$ consiste en el reemplazo de todas las apariciones de a en $\mathit{\Gamma}$ por $\mathit{\Delta}$.

Obsérvese que $\mathit{\Delta}$ no tiene, en tanto que expresión correctamente formada, lugares de argumento. Esta circunstancia es independiente de la posibilidad de que $\mathit{\Delta}$ resulte, por ejemplo, de la saturación de un nombre de función de primer nivel $\mathit{\Phi}(\xi)$, que sí tiene lugares de argumento, con un nombre propio $\mathit{\Gamma}$. Además, de acuerdo con las reglas para la correcta formación de expresiones, todas las letras góticas de $\mathit{\Delta}$ están dentro del alcance de un cuantificador y todas las letras latinas de $\mathit{\Delta}$ no pueden ser ligadas a causa de una substitución. Por esta razón, las substituciones de letras de objeto no incluyen ninguna condición, puesto que no puede producirse ningún conflicto de cuantificación como resultado de su aplicación.

Hay que tener en cuenta, además, que Frege no distingue en absoluto entre aquellas letras de objeto que, en términos actuales, tienen interpretación proposicional, del resto. Todas las letras de objeto de la conceptografía, sin distinción, son marcas de objeto y, como tales, pueden ser substituidas de acuerdo con la definición anterior por otras marcas de objeto o nombres propios.

Ahora bien, las substituciones de letras de función, sean del tipo que sean, son más complejas, porque estas letras, en tanto que marcas de función, sí tienen lugares de argumento. Por esta razón, es preciso contemplar ciertas condiciones que estas substituciones deben respetar para poder ser aplicadas.

Definición 6.2. Si f es una letra latina de función de primer nivel unaria, $\Phi(\xi)$ un nombre o una marca de función de primer nivel unaria, Γ una expresión correctamente formada y se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si f aparece en Γ dentro del alcance de un cuantificador $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$, entonces los lugares de argumento de $\Phi(\xi)$ no están dentro del alcance de $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$.
2. Si f aparece en Γ dentro del alcance de un cuantificador $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}$, entonces los lugares de argumento de $\Phi(\xi)$ no están dentro del alcance de $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}$,

entonces la *substitución* de $f(\xi)$ por $\Phi(\xi)$ en Γ consiste en el reemplazo de todas las apariciones de $f(\xi)$ en Γ por $\Phi(\xi)$.

Veamos un ejemplo concreto de substitución de una letra latina de función de primer nivel unaria. Frege propone substituir f por $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(f(\mathfrak{a},\xi) = g(\mathfrak{a},\xi))$ en la Proposición (IIa):

Pr. (IIa)
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!\top\!\!\!-\!\!-\; f(a) \\ \quad\llcorner\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; f(\mathfrak{a}). \end{array}$$

La Proposición (IIa) es una ley básica de la conceptografía; la denominaremos (**G2a**). La substitución de $f(\xi)$ por $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(f(\mathfrak{a},\xi) = g(\mathfrak{a},\xi))$ en (IIa) es un paso intermedio en la demostración de la Proposición (20) [Frege, 1893, §61, p. 81]. Sin embargo, f aparece en (IIa) dentro del alcance de un cuantificador $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$ y los lugares de argumento de $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(f(\mathfrak{a},\xi) = g(\mathfrak{a},\xi))$ también aparecen dentro del alcance del mismo cuantificador.

Así pues, para poder llevar a cabo esta substitución, es preciso realizar previamente un cambio alfabético en (IIa) de $\mathfrak{a}$ por $\mathfrak{d}$, fruto de lo cual resulta:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!\top\!\!\!-\!\!-\; f(a) \\ \quad\llcorner\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\; f(\mathfrak{d}). \end{array}$$

Una vez se ha realizado este cambio, se cumplen las condiciones de la definición que acabamos de proporcionar, de modo que la substitución propuesta puede llevarse a cabo. Hay que tener en cuenta que $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}(f(\mathfrak{a},\xi) = g(\mathfrak{a},\xi))$ es una marca de función de primer nivel unaria, como indican las apariciones de ξ. El resultado de la substitución es el siguiente:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!\top\!\!\!-\!\!-\!\!-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; (f(\mathfrak{a},a) = g(\mathfrak{a},a)) \\ \quad\llcorner\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\; (f(\mathfrak{a},\mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a},\mathfrak{d})). \end{array}$$

Además, por las particularidades de la demostración en la que esta substitución tiene lugar, Frege somete esta fórmula al cambio alfabético de a por d, fruto de lo cual resulta la siguiente expresión:

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, (f(\mathfrak{a}, d) = g(\mathfrak{a}, d)) \\ \quad \llcorner\!\!-\overset{\mathfrak{d}}{\smile}\!\!-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, (f(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) = g(\mathfrak{a}, \mathfrak{d})). \end{array}$$

Definición 6.3. Si g es una letra latina de función de primer nivel binaria, $\Psi(\xi, \zeta)$ un nombre o una marca de función de primer nivel binaria, Γ una expresión correctamente formada y se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si g aparece en Γ dentro del alcance de un cuantificador $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-$, entonces los lugares de argumento de $\Psi(\xi, \zeta)$ no están dentro del alcance de $-\overset{\mathfrak{a}}{\smile}-$.

2. Si g aparece en Γ dentro del alcance de un cuantificador $-\overset{\mathfrak{f}}{\smile}-$, entonces los lugares de argumento de $\Psi(\xi, \zeta)$ no están dentro del alcance de $-\overset{\mathfrak{f}}{\smile}-$,

entonces la *substitución* de $g(\xi, \zeta)$ por $\Psi(\xi, \zeta)$ en Γ consiste en el reemplazo de todas las apariciones de $g(\xi, \zeta)$ en Γ por $\Psi(\xi, \zeta)$.

Frege únicamente contempla substituciones de letras latinas de función de segundo nivel para obtener instancias de la Proposición (IIb), que es una ley básica de la conceptografía (en el siguiente capítulo la denominaremos (**G2b**)):

Pr. (IIb)
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\, M_{\beta}(f(\beta)) \\ \quad \llcorner\!\!-\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!\!-\, M_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta)). \end{array}$$

> "When we cite law (IIb) we may replace both occurrences of 'M_{β}' by the same name or Roman marker of a second level function with one argument of the second kind." [Frege, 1893, §48, p. 63]

Por esta razón, aunque hemos ofrecido definiciones para la substitución de letras latinas de función de primer nivel tanto unarias como binarias, únicamente ofreceremos una definición de la substitución de letras latinas de función de segundo nivel cuyos argumentos sean funciones de primer nivel unarias, que son las que aparecen en la Proposición (IIb).

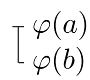
Definición 6.4. Si M_{β} es una letra latina de función de segundo nivel, $\Omega_{\beta}(\varphi(\beta))$ un nombre o una marca de función de segundo nivel, Γ una expresión correctamente formada y se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si M_β aparece en Γ dentro del alcance de un cuantificador $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$, entonces los lugares de argumento de $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ no están dentro del alcance de $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}$.

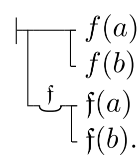
2. Si M_β aparece en Γ dentro del alcance de un cuantificador $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}$, entonces los lugares de argumento de $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ no están dentro del alcance de $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}$,

entonces la *substitución* de $M_\beta(\varphi(\beta))$ por $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ en Γ consiste en el reemplazo de todas las apariciones de $M_\beta(\varphi(\beta))$ en Γ por $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$.

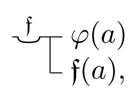
Obsérvese, por ejemplo, que en la demostración de la Proposición (IIIa) [Frege, 1893, §50, pp. 65-66], Frege substituye $M_\beta(\varphi(\beta))$ en (IIb) por la marca de función siguiente:



fruto de lo cual resulta:



Sin embargo, $M_\beta(\varphi(\beta))$ no puede substituirse por la siguiente marca de función:



en la misma ley básica, puesto que M_β aparece en (IIb) dentro del alcance del cuantificador $\overset{\mathfrak{f}}{\smile}$ y, no obstante, φ también aparece en la marca de función dentro del alcance del mismo cuantificador.

Capítulo 7

Lógica de *Grundgesetze*

7.1 Introducción

La conceptografía de *Grundgesetze* es un sistema formal compuesto por una serie de leyes básicas y un conjunto de reglas de inferencia. Estos elementos reflejan las características específicas de la sintaxis y la semántica de este sistema formal. Un elemento esencial al respecto es la presencia de una semántica estructurada según distintas categorías y basada, esencialmente, en la distinción entre función y objeto. De hecho, estas características obedecen a la necesidad de desarrollar una herramienta adecuada para la justificación de la tesis logicista. No en vano, la construcción de la conceptografía *Grundgesetze* está completamente sometida a este objetivo.

Estas características específicas diferencian notablemente el sistema formal de *Grundgesetze* del propio de *Begriffsschrift*. A pesar de que hemos dedicado parte del contenido de los capítulos precedentes a destacar las diferencias entre estos dos textos, la radical separación entre las dos versiones distintas de la conceptografía es patente únicamente cuando se ofrecen reconstrucciones completas.

La conceptografía de *Grundgesetze* es un sistema formal enormemente complejo y probablemente, considerando el desarrollo de la lógica formal y partiendo desde una perspectiva actual, puede decirse que es innecesariamente complejo. Naturalmente, un tratamiento razonable de la conceptografía pasa por simplificar la notación y formular con precisión definiciones que, a pesar de que son implícitas, no han sido planteadas con rigor por Frege. Sin embargo, una reconstrucción histórica, en tanto que genuinamente histórica, no puede renunciar a esta complejidad apelando simplemente a la claridad expositiva y a la posible vinculación del sistema formal de Frege con sistemas formales actuales. En tanto que un sistema formal formulado entre 1893 y 1903, la conceptografía posee una serie de particularidades que pueden ser relevantes y que, por lo tanto, deben ser preservadas en una reconstrucción. Sólo así puede hacerse justicia a su naturaleza y puede ser analizada con justicia en el contexto histórico en el que fue desarrollada.

Dedicaremos este capítulo a ofrecer una reconstrucción completa de la conceptografía contenida en *Grundgesetze*. Tal y como hemos planteado en el capítulo anterior, excluimos de nuestro tratamiento aquellos elementos del sistema formal que no son puramente lógicos; en este sentido, presentamos únicamente la lógica de *Grundgesetze*[231]. Esta reconstrucción se apoyará en la exposición presente en el capítulo 6. Tras esta introducción, en la segunda sección (7.2) se considerará el sistema axiomático de la conceptografía: se formularán sus leyes básicas y sus reglas de inferencia. Un conjunto de reglas de inferencia de especial relevancia son las Reglas de substitución, que recibirán un tratamiento específico en esta sección. Finalmente, la tercera sección (7.3) detallará los sistemas formales que pueden extraerse de la conceptografía: el fragmento de lógica proposicional, el fragmento de lógica proposicional con igualdad, el fragmento de lógica de primer orden y el fragmento de lógica de segundo orden.

7.2 Sistema axiomático

La conceptografía contiene los elementos lógicos del sistema formal propio de *Grundgesetze*; este texto incluye, además, dos leyes básicas específicas para cursos de valores. Como ya hemos planteado, en nuestra presentación nos limitamos a considerar el sistema formal que llamamos 'conceptografía', esto es, el fragmento puramente lógico del sistema formal de *Grundgesetze*.

De acuerdo con el planteamiento adoptado por Frege en *Begriffsschrift*, es metodológicamente conveniente tratar de reducir el número de leyes básicas y, especialmente, de reglas de inferencia al mínimo indispensable. Este planteamiento se ve completamente trastocado en *Grundgesetze*: la conceptografía de 1893-1903 destaca por contener un elevado número de reglas de inferencia y un conjunto sorprendentemente pequeño de leyes básicas.

Se dedicará esta sección a reconstruir el sistema básico de la conceptografía de *Grundgesetze*: se expondrán sus leyes básicas y se presentarán con

[231] Véanse *Reading Frege's* Grundgesetze [Heck, 2012], de R. Heck, y *Frege's Notations* [Landini, 2012, pp. 84-183], de G. Landini, para un tratamiento, desde perspectivas distintas, de los elementos de la conceptografía de 1893-1903 que no tratamos en este capítulo. En particular, en el citado texto, Heck considera con detalle la justificación formal de la tesis logicista que tiene lugar en *Grundgesetze*.

detalle sus reglas de inferencia. Nuestra reconstrucción añadirá los elementos necesarios para garantizar el rigor y tratará así de clarificar las explicaciones de Frege.

7.2.1 Leyes básicas

Frege introduce cada una de las *leyes básicas* de *Grundgesetze* a lo largo de su exposición de los elementos básicos de la conceptografía. A diferencia de *Begriffsschrift*, sin embargo, en *Grundgesetze* las denomina 'leyes básicas' (*Grundgesetze*) y las agrupa en un sumario para facilitar su localización [Frege, 1893, §47, p. 61]. De este conjunto de leyes básicas, las siguientes cinco leyes son de naturaleza lógica[232]:

G1 $a \rightarrow (b \rightarrow a)$.

G2a $\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \rightarrow f(a)$.

---

[232]Véanse las referencias de las leyes básicas para su localización a lo largo de la exposición de Frege en la primera parte de *Grundgesetze* [Frege, 1893, §§18-25, pp. 34-42]:

G1	Pr. (I)	[§18, p. 34]	**G3**	Pr. (III)	[§20, p. 36]
G2a	Pr. (IIa)	[§20, p. 35]	**G4**	Pr. (IV)	[§18, p. 34]
G2b	Pr. (IIb)	[§25, p. 42]			

De modo similar a como hemos hecho en la reconstrucción de la conceptografía de *Begriffsschrift*, para simplificar nuestra explicación y ahorrar espacio, de aquí en adelante se formularán las proposiciones de la conceptografía de *Grundgesetze* en una notación híbrida. Nuevamente, las únicas excepciones a esta práctica serán las citas y algunos ejemplos muy localizados, en los cuales será relevante usar la notación original. En el resto de fórmulas, tanto los cuantificadores como las conectivas de la conceptografía se expresarán según los equivalentes disponibles en notación moderna, pero se respetarán las distintas tipografías usadas por Frege en *Grundgesetze*. Usaremos los símbolos $\rightarrow$ y $\neg$ como abreviaciones para las conectivas. Así, las expresiones $\Delta \rightarrow \Gamma$ y $\neg\Delta$ son, respectivamente, abreviaciones de las siguientes expresiones:

$$\begin{array}{l} \top\, \Gamma \\ \llcorner\, \Delta \end{array} \qquad \text{y} \qquad \top\, \Delta.$$

Ahora bien, esta simplificación notacional no implica que defendamos que la interpretación de los símbolos de la conceptografía y de la lógica clásica actual sea análoga. Con las abreviaciones indicadas buscamos únicamente economizar el espacio. De hecho, la ley básica (IV) de *Grundgesetze* es una proposición que contiene igualdades entre valores de verdad (y no entre objetos cualesquiera):

Pr. (IV) $$\vdash\!\begin{array}{l} (-\!\!-\, a) = (-\!\!-\, b) \\ \llcorner_{\top}\, (-\!\!-\, a) = (\top\, b). \end{array}$$

Por esta razón, no hemos omitido los horizontales que preceden a las letras latinas que aparecen en ella en la formulación de su equivalente en nuestra presentación, (**G4**).

G2b $\forall \mathfrak{f} M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \to M_\beta(f(\beta))$.

G3 $g(a = b) \to g(\forall \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(b) \to \mathfrak{f}(a)))$.

G4 $\neg(\text{---}\, a = \neg \text{---}\, b) \to (\text{---}\, a = \text{---}\, b)$.

La ley básica (**G3**) tiene una naturaleza peculiar si se analiza desde la óptica de los sistemas formales actuales. Las expresiones $(a = b)$ y $\forall \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(b) \to \mathfrak{f}(a))$ son marcas de objeto y, como tales, deberían considerarse términos abiertos. En tanto que marcas de objeto, son un argumento perfectamente aceptable para una función de primer nivel unaria; las marcas $g(a = b)$ y $g(\forall \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(b) \to \mathfrak{f}(a)))$ ponen de manifiesto esta circunstancia. Ahora bien, en términos actuales, $(a = b)$ y $\forall \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(b) \to \mathfrak{f}(a))$ son fórmulas, por lo que el hecho de que ocupen el lugar de argumento de g (que debería interpretarse como una variable de predicado) tiene un difícil encaje en la sintaxis de un sistema formal actual. Así pues, (**G3**) debería expresarse en el metalenguaje del modo siguiente:

$$\Phi(a = b) \to \Phi(\forall \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(b) \to \mathfrak{f}(a))),$$

donde $\Phi(a = b)$ es una fórmula que contiene a $(a = b)$ como subfórmula. En particular, en la conceptografía, una instancia de $g(\mathit{\Delta})$ puede ser $\mathit{\Delta}$. En el apartado 7.3.2 veremos en distintas demostraciones algunos ejemplos del modo como Frege usa la ley básica (**G3**).

7.2.2 Reglas de inferencia

La conceptografía dispone de un amplio conjunto de reglas de inferencia para la deducción de teoremas a partir de las leyes básicas. El elevado número de reglas de inferencia destaca especialmente por el planteamiento metodológico de Frege manifiesto en *Begriffsschrift* y en los artículos elaborados inmediatamente tras su publicación que hemos mencionado en la introducción a esta sección. En *Grundgesetze*, probablemente motivado por las críticas a la notación de la conceptografía y a la longitud de sus pruebas, Frege justifica este cambio en su metodología por razones puramente prácticas:

> "This [Modus Ponens] is the sole mode of inference that I used in my *Begriffsschrift*, and one can even manage with it alone. The demand of scientific parsimony would now usually require this; but considerations of practicality pull in the opposite direction, and here, where I will have to form long chains of inferences, I will have to make some concessions. For an inordinate lengthiness would result if I were not to allow some

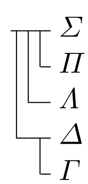
> other modes of inference, as already anticipated in the preface of my little work." [Frege, 1893, §14, p. 26]

Para facilitar nuestra exposición en la presentación de las reglas de inferencia, introduciremos una abreviatura notacional que afecta los condicionales. Toda fórmula o sentencia que resulte de la aplicación sucesiva de la función condicional puede ser vista del siguiente modo:

$$\mathit{\Gamma}_1 \rightarrow (\cdots \rightarrow (\mathit{\Gamma}_n \rightarrow \mathit{\Delta})\ldots).$$

Tal y como Frege presenta el condicional en *Grundgesetze* [Frege, 1893, §12, p. 22], $\mathit{\Delta}$ es el supercomponente (*Oberglied*) y $\mathit{\Gamma}_1, \ldots, \mathit{\Gamma}_n$ son los subcomponentes (*Unterglieder*).

Sin embargo, hay distintas posibilidades de dividir un condicional. Ante una fórmula o sentencia como la siguiente:



pueden llevarse a cabo distintas divisiones entre subcomponentes y supercomponente:

1. El supercomponente $\mathit{\Sigma}$ y los subcomponentes $\mathit{\Gamma} \rightarrow \mathit{\Delta}$, $\mathit{\Lambda}$ y $\mathit{\Pi}$.

2. El supercomponente $\mathit{\Pi} \rightarrow \mathit{\Sigma}$ y los subcomponentes $\mathit{\Gamma} \rightarrow \mathit{\Delta}$ y $\mathit{\Lambda}$.

3. El supercomponente $\mathit{\Lambda} \rightarrow (\mathit{\Pi} \rightarrow \mathit{\Sigma})$ y el subcomponente $\mathit{\Gamma} \rightarrow \mathit{\Delta}$.

La flexibilidad de esta división es fundamental, como veremos, en la aplicación de algunas reglas de inferencia en las demostraciones de la conceptografía.

Con la pretensión de simplificar la notación, abreviaremos las fórmulas o sentencias condicionales del modo siguiente[233]:

$$\mathit{\Gamma}_1, \ldots, \mathit{\Gamma}_n \rightarrow \mathit{\Delta}.$$

[233] R. Cook ofrece, en 'How to read *Grundgesetze*' [Cook, 2013, pp. A8-A9], un tratamiento análogo de la ambigüedad de las denominaciones 'subcomponente' y 'supercomponente' e introduce un modo alternativo, aunque similar, de abreviar los condicionales de *Grundgesetze*.

Cuando el contexto lo permita, expresaremos la sucesión $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ como $\vec{\Gamma}$. En algunas ocasiones es conveniente concatenar sucesiones de subcomponentes. Si $\vec{\Gamma}$ es la sucesión $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ y $\vec{\Delta}$ es la sucesión $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$, una fórmula o sentencia como la que sigue:

$$\Gamma_1 \to (\cdots \to (\Gamma_n \to (\Delta_1 \to (\cdots \to (\Delta_m \to \Lambda)\ldots)))\ldots)$$

será abreviada del siguiente modo:

$$\vec{\Gamma} \to (\vec{\Delta} \to \Lambda),$$

o incluso:

$$\vec{\Gamma}, \vec{\Delta} \to \Lambda.$$

En ese último caso, $\vec{\Gamma}, \vec{\Delta}$ indica una sucesión, por lo que el orden de las sucesiones de subcomponentes es relevante.

En este apartado ofreceremos una reconstrucción de las reglas de inferencia de la conceptografía y expondremos un total de nueve reglas de inferencia primitivas adicionales (alguna de ellas con variantes): Substitución (que comprende cuatro variantes distintas), Fusión de horizontales, Modus Ponens, Permutación de subcomponentes, Fusión de subcomponentes, Transitividad, Contraposición, Generalización, Confinamiento del cuantificador. Además, introduciremos tres reglas derivadas: regla derivada de Contraposición, Ampliación de subcomponentes y Eliminación de subcomponentes. Frege presenta explícitamente en su sumario [Frege, 1893, §48, pp. 61-64], siete de estas reglas.

Reglas de substitución

Hemos proporcionado definiciones precisas de las distintas substituciones que tienen lugar en la conceptografía en el apartado 6.5.2. A partir de ellas, podemos reconstruir las distintas reglas de substitución a las que Frege recurre en *Grundgesetze*.

Ya hemos mencionado que en el texto de 1893-1903 no hay tablas de substitución. Así, en las demostraciones no hay un modo establecido de indicar las substituciones a las que se somete una proposición. Para solventar esta carencia y facilitar la formulación de las reglas de substitución, adoptaremos una convención notacional propia de los lenguajes formales actuales. De aquí en adelante, diremos que $\Gamma\binom{v}{*}$ es el resultado de la substitución de una letra latina cualquiera v por una instancia aceptable $*$ en Γ. Por ejemplo, dado que $2+1$ es un nombre propio y, por lo tanto, una instancia aceptable de una letra latina de objeto, $\Gamma\binom{a}{2+1}$ es el resultado de la substitución de a por $2+1$ en Γ.

Ofrecemos a continuación definiciones de las cuatro reglas de substitución de la conceptografía: para letras latinas de objeto, para letras latinas de función de primer nivel unaria, para letras latinas de función de primer nivel binaria y, finalmente, para letras de función de segundo nivel. Todas ellas dependen de las definiciones de las substituciones de la conceptografía que hemos presentado en el apartado 6.5.2. De acuerdo con la exposición de Frege en *Grundgesetze*, estas reglas de inferencia corresponden a la regla (9) de su sumario [Frege, 1893, §48, pp. 61-64], que se denomina 'Cita de proposiciones: reemplazo de letras latinas'.

Regla de substitución para letras de objeto. Si a es una letra latina de objeto y Δ una expresión correctamente formada, entonces:

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma\binom{a}{\Delta}.}\ [\text{S1}]$$

Regla de substitución para letras de función de 1.$^{\text{er}}$ nivel unaria. Si se cumplen las condiciones de substitución de una letra latina de función de primer nivel unaria f por un nombre o marca de función de primer nivel unaria $\Phi(\xi)$, entonces:

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma\binom{f(\xi)}{\Phi(\xi)}.}\ [\text{S2}]$$

Regla de substitución para letras de función de 1.$^{\text{er}}$ nivel binaria. Si se cumplen las condiciones de substitución de una letra latina de función de primer nivel binaria g por un nombre o marca de función de primer nivel binaria $\Psi(\xi,\zeta)$, entonces:

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma\binom{g(\xi,\zeta)}{\Psi(\xi,\zeta)}.}\ [\text{S3}]$$

Regla de substitución para letras de función de 2.$^{\text{o}}$ nivel. Si se cumplen las condiciones de substitución de una letra latina de función de segundo nivel M_β por un nombre o marca de función de segundo nivel $\Omega_\beta(\phi(\beta))$, entonces:

$$\frac{\vdash \mathit{\Gamma}}{\vdash \mathit{\Gamma}\binom{M_\beta(\varphi(\beta))}{\Omega_\beta(\varphi(\beta))}.}\ [\text{S4}]$$

Ya hemos comentado que, en las demostraciones de *Grundgesetze*, Frege no hace explícitas las substituciones que afectan a las proposiciones que intervienen en ellas. Sin embargo, para facilitar la comprensión de las demostraciones que incluimos, haremos explícita toda aplicación de alguna regla de substitución e indicaremos las substituciones mediante tablas de substitución. Exceptuando el uso de tipos de letras griegas distintas para indicar la insaturación de las funciones (tanto de primer como de segundo nivel), las tablas de substitución que usaremos son similares a las de *Begriffsschrift*, que hemos presentado en el apartado 2.4.2.

Fusión de horizontales

La fusión de horizontales es un recurso de la conceptografía que permite unificar dos horizontales en una única barra. Frege la incluye explícitamente en el conjunto de reglas de inferencia de la conceptografía únicamente en un sumario del cálculo que incluye al final de la primera parte de *Grundgesetze* [Frege, 1893, §48, pp. 61-64]. En palabras de Frege:

> "If as argument of the function $—\xi$ there occurs the value of this same function for some argument, then the horizontals may be fused." [Frege, 1893, §48, p. 61]

La regla de inferencia Fusión de horizontales [FH] permite realizar las siguientes transiciones:

$$\frac{\vdash \mathit{\Phi}(—\,—\,\mathit{\Delta})}{\vdash \mathit{\Phi}(—\,\mathit{\Delta})}\ [\text{FH}] \qquad\qquad \frac{\vdash \mathit{\Phi}(—\,\mathit{\Delta})}{\vdash \mathit{\Phi}(—\,—\,\mathit{\Delta})}\ [\text{FH}]$$

La regla de inferencia que permite la fusión de horizontales tiene sentido únicamente por la particularidad de la construcción de expresiones complejas en el lenguaje de la conceptografía. En rigor, en una presentación moderna de este lenguaje, la fusión de horizontales se omitiría. Por esta razón, no mencionamos [FH] en la presentación en sección 7.3 de los distintos fragmentos que pueden extraerse de la conceptografía de *Grunsgesetze*.

Modus Ponens

Frege presenta Modus Ponens como una regla que permite una mayor flexibilidad que la regla análoga en *Begriffsschrift*:

> "*If a subcomponent of a proposition differs from a second proposition only in lacking the judgement-stroke, then one may infer a proposition which results from the first by suppressing that subcomponent.*" [Frege, 1893, §14, p. 26]

En nuestra presentación, la regla de inferencia Modus Ponens [MP] permite únicamente la siguiente transición:

$$\dfrac{\begin{array}{l}\vdash \Lambda \to (\vec{\Delta} \to \Gamma)\\ \vdash \Lambda\end{array}}{\vdash \vec{\Delta} \to \Gamma}\ [\mathrm{MP}]$$

De acuerdo con la definición de Frege, sería posible la deducción, por ejemplo, de $\vdash \Pi \to (\Lambda \to \Gamma)$ a partir de $\vdash \Delta$ y $\vdash \Pi \to (\Lambda \to (\Delta \to \Gamma))$. Sin embargo, esta transición, como Frege indica, resulta de aplicar, además de Modus Ponens, la regla de Permutación de subcomponentes, que presentamos a continuación.

Permutación de subcomponentes

A pesar de que Frege cuenta la Permutación de subcomponentes en el listado de reglas básicas de la conceptografía [Frege, 1893, §48, p. 61], afirma que, a diferencia de su procedimiento en *Begriffsschrift*, no la hace explícita en sus demostraciones:

> "Strictly speaking, this permutability must be proven for each occurring case, and I have done this for some cases in my little book *Begriffsschrift*, in such a way that it will be straightforward to treat all cases accordingly. In order not to be tied up in excessive prolixity, I will here assume this permutability to be generally granted and in what follows make use of it without further reminder." [Frege, 1893, §12, p.22]

En nuestra presentación haremos explícita como paso en las deducciones cada Permutación de subcomponentes [PS]. Esta regla de inferencia permite intercambiar la posición de dos sucesiones de subcomponentes distintas. Así, [PS] consiste en la transición siguiente:

$$\frac{\vdash \vec{\Pi} \to (\vec{\Lambda} \to (\vec{\Delta} \to \Gamma))}{\vdash \vec{\Pi} \to (\vec{\Delta} \to (\vec{\Lambda} \to \Gamma))}\,[\mathrm{PS}]$$

Para la formulación de [PS], admitimos la posibilidad de que $\vec{\Pi}$ sea una sucesión vacía. Esta circunstancia permitiría realizar la siguiente transición:

$$\frac{\vdash \vec{\Lambda} \to (\vec{\Delta} \to \Gamma)}{\vdash \vec{\Delta} \to (\vec{\Lambda} \to \Gamma)}\,[\mathrm{PS}]$$

Fusión de subcomponentes

Del mismo modo que ocurre con [PS], en las demostraciones Frege no hace explícita la aplicación de la regla de Fusión de subcomponentes; no dispone de una notación específica para ella (como sí ocurre, por ejemplo, con [MP]). No obstante, indicaremos cada caso de aplicación de Fusión de subcomponentes [FS] en las deducciones de esta presentación. Tal y como Frege plantea, [FS] permite obviar las repeticiones de un mismo subcomponente [Frege, 1893, §15, p. 29]. En otras palabras, [FS] consiste en las siguientes transiciones:

$$\frac{\vdash \vec{\Sigma} \to (\Lambda \to (\vec{\Pi} \to (\Lambda \to (\vec{\Delta} \to \Gamma))))}{\vdash \vec{\Sigma} \to (\Lambda \to (\vec{\Pi} \to (\vec{\Delta} \to \Gamma)))}\,[\mathrm{FS}]$$

$$\frac{\vdash \vec{\Sigma} \to (\Lambda \to (\vec{\Pi} \to (\Lambda \to (\vec{\Delta} \to \Gamma))))}{\vdash \vec{\Sigma} \to (\vec{\Pi} \to (\Lambda \to (\vec{\Delta} \to \Gamma)))}\,[\mathrm{FS}]$$

Nuevamente, para la formulación de la regla [FS], admitimos la posibilidad de que las sucesiones $\vec{\Sigma}$, $\vec{\Pi}$ y $\vec{\Delta}$ sean vacías. Nótese que una de las transiciones que proponemos en la definición de [FS] podría, en rigor, eliminarse, porque es redundante; en efecto, cualquiera de las dos transiciones puede obtenerse a partir de [PS] y la transición restante.

Transitividad

La presentación por parte de Frege de la regla de Transitividad posibilita, en virtud de [PS], una gran flexibilidad en su aplicación:

> "If the same combination of signs (either a proper name or Roman object-marker) occurs in one proposition as supercomponent and in another as subcomponent, then a proposition may be inferred in which the supercomponent of the second proposition appears as supercomponent and all subcomponents of both, save that mentioned, appear as subcomponents." [Frege, 1893, §48, p. 62]

En sus demostraciones, el autor opera de modo tal que el orden de los subcomponentes es irrelevante. Pero, dado que haremos explícita cada aplicación de [PS], presentaremos la regla de Transitividad [Tr] de un modo ligeramente distinto al de *Grundgesetze*. De acuerdo con ello, [Tr] consiste en la siguiente transición[234]:

$$\frac{\begin{array}{l} \vdash \vec{\Lambda} \to \Delta \\ \vdash \Delta \to \Gamma \end{array}}{\vdash \vec{\Lambda} \to \Gamma}\,[\mathrm{Tr}]$$

Contraposición

De acuerdo con la explicación informal de Frege [Frege, 1893, §15, p. 27], la regla de Contraposición permite, sea cual sea la división de una sentencia o fórmula dada, intercambiar la posición de un subcomponente con la del supercomponente, siempre que se inviertan sus respectivos valores de verdad. De acuerdo con la teoría semántica de *Grundgesetze*, la fórmula resultante de invertir el valor de verdad de $\neg a$ es a, y no $\neg\neg a$ (aunque el lenguaje permita formar la fórmula $\neg\neg a$). Además, en las demostraciones, Frege aplica esta regla de inferencia con cualquier subcomponente, sin importar su posición.

Ahora bien, Frege no formula con precisión esta regla de inferencia. Tal y como la plantea, pretende realizar transiciones como la siguiente [Frege, 1893, §15, p. 28]:

$$\frac{\vdash \Pi \to (\neg\Lambda \to (\Delta \to \Gamma))}{\vdash \Pi \to (\neg\Gamma \to (\Delta \to \Lambda))}$$

[234] Frege indica la aplicación de la regla de Transitividad mediante la línea de trazos — — — — en lugar de ———, que es específica de Modus Ponens. Sin embargo, dado que indicamos la regla de inferencia usada en cada paso de una deducción, para no hacer más compleja la notación usaremos únicamente una barra ——— para separar gráficamente el resultado de una regla de inferencia. Haremos modificaciones similares en la notación de *Grundgesetze* en aquellos casos en los que haya una notación específica asociada a una regla de inferencia en particular.

Formularemos la regla de Contraposición [Cr] de un modo ligeramente distinto al de Frege, y ofreceremos una regla derivada que posibilite otras transiciones vinculadas a [Cr]. Así pues, [Cr] consiste en las siguientes transiciones[235]:

$$\frac{\vdash \vec{\varLambda} \to (\varDelta \to \neg \varGamma)}{\vdash \vec{\varLambda} \to (\varGamma \to \neg \varDelta)}\,[\mathrm{Cr}] \qquad\qquad \frac{\vdash \vec{\varLambda} \to (\neg\varDelta \to \varGamma)}{\vdash \vec{\varLambda} \to (\neg\varGamma \to \varDelta)}\,[\mathrm{Cr}]$$

En la formulación de [Cr], admitimos que $\vec{\varLambda}$ pueda ser una sucesión vacía.

Reglas de Generalidad

Frege dedica un signo para un una serie de transiciones distintas entre proposiciones para las que ofrece un tratamiento unitario. Todas estas transiciones involucran el reemplazo de todas las apariciones de una letra latina en una proposición por letras góticas de su mismo tipo. Sin embargo, en aras de la claridad, reconstruiremos la exposición de Frege para formular reglas de inferencia distintas.

De acuerdo con la presentación de Frege:

> "*A Roman letter may be replaced wherever it occurs in a proposition by one and the same German letter. At the same time, the latter has to be placed above a concavity in front of one such supercomponent outside of which the Roman letter does not occur. If in this supercomponent the scope of a German letter is contained and the Roman letter occurs within this scope, then the German letter that is to be introduced for the latter must be distinct from the former* (second rule of §8)." [Frege, 1893, §17, pp. 33-34]

En primer lugar, distinguiremos distintas reglas de Generalización, en función del tipo de letras a las que afecten[236].

Regla de Generalización para letras de objeto. Si la letra latina de objeto a no aparece en la fórmula $\varPhi(a)$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall \mathfrak{a}$, entonces:

[235] Frege distingue la aplicación de esta regla de inferencia usando $\times$ en lugar de la barra específica de Modus Ponens, ———.

[236] Para indicar la aplicación tanto de las reglas que denominamos 'de Generalización' como para las que denominamos 'de Confinamiento del cuantificador', Frege recurre al símbolo $\smile$.

$$\frac{\vdash \mathit{\Phi}(a)}{\vdash \forall \mathfrak{a}\, \mathit{\Phi}(\mathfrak{a})}\ [\text{G1}]$$

Nótese que, tal y como Frege indica, en el caso en el que a aparezca en $\mathit{\Phi}(a)$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{a}$, para poder aplicar [G1] debe escogerse una letra gótica distinta de $\mathfrak{a}$, aunque del mismo tipo.

Regla de Generalización para letras de función de 1.$^{\text{er}}$ nivel. Si la letra latina de función de primer nivel unaria f no aparece en la fórmula $\mathit{\Omega}_\beta(f(\beta))$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{f}$, entonces:

$$\frac{\vdash \mathit{\Omega}_\beta(f(\beta))}{\vdash \forall \mathfrak{f}\, \mathit{\Omega}_\beta(\mathfrak{f}(\beta))}\ [\text{G2}]$$

Si la letra latina de función de primer nivel binaria g no aparece en la fórmula $\mathit{\Omega}_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{g}$, entonces:

$$\frac{\vdash \mathit{\Omega}_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))}{\vdash \forall \mathfrak{g}\, \mathit{\Omega}_{\beta\gamma}(\mathfrak{g}(\beta,\gamma))}\ [\text{G2}]$$

En segundo lugar, distinguiremos las reglas de Confinamiento del cuantificador de las reglas de Generalización ya presentadas. Todas las reglas de Confinamiento del cuantificador permiten substituir todas las apariciones de una letra latina en el supercomponente de un condicional por letras góticas del mismo tipo.

Regla de Confinamiento para letras de objeto. Si la letra latina de objeto a no aparece en $\vec{\mathit{\Gamma}}$ y no aparece en $\mathit{\Phi}(\mathfrak{a})$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{a}$, entonces:

$$\frac{\vdash \vec{\mathit{\Gamma}} \to \mathit{\Phi}(a)}{\vdash \vec{\mathit{\Gamma}} \to \forall \mathfrak{a}\, \mathit{\Phi}(\mathfrak{a})}\ [\text{C1}]$$

Regla de Confinamiento para letras de función de 1.$^{\text{er}}$ nivel. Si la letra latina de función de primer nivel unaria f no aparece en $\vec{\mathit{\Gamma}}$ y no aparece en $\mathit{\Omega}_\beta(f(\beta))$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{f}$, entonces:

$$\frac{\vdash \vec{\mathit{\Gamma}} \to \mathit{\Omega}_\beta(f(\beta))}{\vdash \vec{\mathit{\Gamma}} \to \forall \mathfrak{f}\, \mathit{\Omega}_\beta(\mathfrak{f}(\beta))}\ [\text{C2}]$$

Si la letra latina de función de primer nivel binaria g no aparece en $\vec{\Gamma}$ y no aparece en $\Omega_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{g}$, entonces:

$$\frac{\vdash \vec{\Gamma} \rightarrow \Omega_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))}{\vdash \vec{\Gamma} \rightarrow \forall\mathfrak{g}\, \Omega_{\beta\gamma}(\mathfrak{g}(\beta,\gamma))}\ [\mathrm{C2}]$$

Nótese que Frege formula el equivalente a nuestras reglas [C1] y [C2] únicamente para el caso en que $\vec{\Gamma}$ sea una sucesión de subcomponentes formada por el nombre propio o la marca de objeto Γ. Sin embargo, su aplicación en algunas demostraciones hace conveniente generalizar nuestras definiciones a una sucesión de longitud n, $\vec{\Gamma}$. En *Grundgesetze*, Frege ofrece una justificación informal de las reglas de Confinamiento a partir de las reglas de Generalización [Frege, 1893, §17, p. 32]. Naturalmente, esta justificación no es una demostración rigurosa, de modo que no convierte [C] en una regla derivada de [G].

7.2.3 Reglas derivadas

A pesar de que Frege presenta la regla de Eliminación de subcomponentes como si fuese una regla de inferencia más, ofrece una demostración para un ejemplo concreto. Presentaremos esta regla de inferencia como una regla derivada. Adicionalmente, para completar nuestra exposición, introduciremos dos nuevas reglas derivadas: la regla derivada de Contraposición y la regla de Ampliación de subcomponentes.

Derivada de Contraposición

Para facilitar las demostraciones, y capturar el uso de Frege de la regla de Contraposición, formularemos una regla derivada de [Cr], a la que nos referiremos como [Cr′]:

$$(1)\ \frac{\vdash \vec{\Lambda} \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)}{\vdash \vec{\Lambda} \rightarrow (\neg\Gamma \rightarrow \neg\Delta)}\ [\mathrm{Cr}'] \qquad (2)\ \frac{\vdash \vec{\Lambda} \rightarrow (\neg\Delta \rightarrow \neg\Gamma)}{\vdash \vec{\Lambda} \rightarrow (\Gamma \rightarrow \Delta)}\ [\mathrm{Cr}']$$

De modo similar a [Cr], en formulación de [Cr′], la sucesión $\vec{\Lambda}$ puede ser vacía.

Demostraremos, en primer lugar, el caso (1):

1. $\vec{\Lambda} \rightarrow (\Delta \rightarrow \Gamma)$.

2. $a \to (b \to a)$, (**G1**).

3. $\neg\Gamma \to (\neg\Gamma \to \neg\Gamma)$, [S1] en (2):

$$\frac{a \quad\; b}{\neg\Gamma \quad \neg\Gamma}$$

4. $\neg\Gamma \to \neg\Gamma$, [FS] en (3).

5. $\Gamma \to \neg\neg\Gamma$, [Cr] en (4).

6. $\vec{\Lambda} \to (\Delta \to \neg\neg\Gamma)$, [Tr] en (1) y (5).

7. $\vec{\Lambda} \to (\neg\Gamma \to \neg\Delta)$, [Cr] en (6).

En segundo lugar, demostraremos el caso (2):

1. $\vec{\Lambda} \to (\neg\Delta \to \neg\Gamma)$.

2. $\vec{\Lambda} \to (\Gamma \to \neg\neg\Delta)$, [Cr] en (1).

3. $a \to (b \to a)$, (**G1**).

4. $\neg\Delta \to (\neg\Delta \to \neg\Delta)$, [S1] en (3):

$$\frac{a \quad\; b}{\neg\Delta \quad \neg\Delta}$$

5. $\neg\Delta \to \neg\Delta$, [FS] en (4).

6. $\neg\neg\Delta \to \Delta$, [Cr] en (5).

7. $\vec{\Lambda} \to (\Gamma \to \Delta)$, [Tr] en (2) y (6).

Ampliación de subcomponentes

Frege no introduce en el cálculo de la conceptografía de *Grundgesetze* ninguna regla para incluir un subcomponente adicional en un condicional. Sin embargo, en algunas deducciones puede ser conveniente contar con una regla que permita añadir un subcomponente en un único paso. La regla de Ampliación de subcomponentes [AS] permite realizar la siguiente transición:

$$\frac{\vdash \vec{\Delta} \to \Gamma}{\vdash \Lambda \to (\vec{\Delta} \to \Gamma)}\,[\text{AS}]$$

Aplicando la regla n veces, [AS] puede generalizarse para añadir una sucesión de subcomponentes, y no únicamente un subcomponente Λ.

Demostraremos [AS] con la siguiente deducción:

1. $\vec{\Delta} \rightarrow \Gamma$.
2. $a \rightarrow (b \rightarrow a)$, **(G1)**.
3. $(\vec{\Delta} \rightarrow \Gamma) \rightarrow (\Lambda \rightarrow (\vec{\Delta} \rightarrow \Gamma))$, [S1] en (2):

$$\frac{a \qquad\qquad b}{(\vec{\Delta} \rightarrow \Gamma) \quad \Lambda}$$

4. $\Lambda \rightarrow (\vec{\Delta} \rightarrow \Gamma)$, [MP] en (3) y (1).

Eliminación de subcomponentes

Generalizaremos la demostración fregeana de la regla de Eliminación de subcomponentes. El autor presenta la regla del modo siguiente:

> "*If two propositions agree in their supercomponents, while a subcomponent of the one differs from a subcomponent of the other only by a prefixed negation-stroke, we can infer a proposition in which the common supercomponent features as supercomponent, and all subcomponents of both propositions with the exception of the two mentioned feature as subcomponents.*" [Frege, 1893, §16, pp. 30-31]

La regla de Eliminación de subcomponentes [ES] permite deducir[237]:

$$\frac{\begin{array}{l} \vdash \vec{\Lambda} \rightarrow (\neg \Pi \rightarrow \Gamma) \\ \vdash \vec{\Delta} \rightarrow (\Pi \rightarrow \Gamma) \end{array}}{\vdash \vec{\Lambda} \rightarrow (\vec{\Delta} \rightarrow \Gamma)} \text{[ES]}$$

Para la formulación de [ES], admitimos la posibilidad de que $\vec{\Lambda}$ y $\vec{\Delta}$ sean sucesiones vacías.

Dado que las sucesiones $\vec{\Lambda}$ y $\vec{\Delta}$ pueden ser vacías, para demostrar [ES] distinguimos dos casos. En primer lugar, si las sucesiones $\vec{\Lambda}$ y $\vec{\Delta}$ son vacías, ofrecemos la siguiente deducción:

[237]Frege indica la aplicación de la regla de Eliminación de subcomponentes mediante el símbolo $\cdot - \cdot - \cdot - \cdot$.

1. $\neg\Pi \to \Gamma$.
2. $\Pi \to \Gamma$.
3. $\neg\Gamma \to \neg\Pi$, [Cr′] en (2).
4. $\neg\Gamma \to \Gamma$, [Tr] en (3) y (1).
5. $(\Sigma \to \Sigma) \to (\neg\Gamma \to \Gamma)$, [AS] en (4).
6. $\neg\Gamma \to ((\Sigma \to \Sigma) \to \Gamma)$, [PS] en (5).
7. $\neg\Gamma \to (\neg\Gamma \to \neg(\Sigma \to \Sigma))$, [Cr′] en (6).
8. $\neg\Gamma \to \neg(\Sigma \to \Sigma)$, [FS] en (7).
9. $(\Sigma \to \Sigma) \to \Gamma$, [Cr′] en (8).
10. $\Sigma \to (\Sigma \to \Sigma)$, (**G1**).
11. $\Sigma \to \Sigma$, [FS] en (10).
12. Γ, [MP] en (9) y (11).

En segundo lugar, supongamos que $\vec{\Delta}$ o $\vec{\Lambda}$ no son sucesiones vacías. Si $\vec{\Delta}$ es $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ y $\vec{\Lambda}$ es $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$, sea $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ la concatenación de las sucesiones $\vec{\Lambda}$ y $\vec{\Delta}$, donde $k = n + m$. Por el supuesto, $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ no es una sucesión vacía. Ofrecemos, en este caso, la siguiente deducción:

1. $\vec{\Lambda} \to (\neg\Pi \to \Gamma)$.
2. $\vec{\Delta} \to (\Pi \to \Gamma)$.
3. $\vec{\Lambda} \to (\neg\Gamma \to \Pi)$, [Cr] en (1).
4. $\Pi \to (\vec{\Delta} \to \Gamma)$, [PS] en (2).
5. $\vec{\Lambda}, \neg\Gamma, \vec{\Delta} \to \Gamma$, [Tr] en (3) y (4).
6. $\neg\Gamma \to (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k \to \Gamma)$, [PS] en (5).
7. $\neg\Gamma, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{k-1} \to (\neg\Gamma \to \neg\Sigma_k)$, [Cr′] en (7).
8. $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{k-1} \to (\neg\Gamma \to \neg\Sigma_k)$, [FS] en (8).
9. $\vec{\Lambda} \to (\vec{\Delta} \to \Gamma)$ [Cr′] en (9).

7.3 Fragmentos extraíbles de la conceptografía

Las letras de la conceptografía de *Grundgesetze* toman valores sobre dominios especificados de antemano y, en este sentido, pueden considerarse variables. Por esta razón, a pesar de las peculiaridades de carácter sintáctico de la conceptografía de 1893-1903, es posible, adoptando ciertas convenciones, extraer distintos sistemas formales. En particular, puede extraerse de la conceptografía un fragmento proposicional, un fragmento de la lógica proposicional con igualdad, un fragmento de lógica de primer orden y un fragmento de lógica de segundo orden. Ninguno de estos fragmentos coincide propiamente con la conceptografía. Es relevante tener en cuenta, sin embargo, que Frege no pone de manifiesto en ninguna ocasión en *Grundgesetze*, ni implícita ni explícitamente, que contemple una división tal[238].

Todos estos fragmentos extraíbles de la conceptografía comparten una de sus mayores peculiaridades: un elevado número de reglas de inferencia. Es posible obtener algunos resultados acerca de su completud, especialmente cuando se comparan con el correspondiente sistema formal derivable de la conceptografía de *Begriffsschrift*.

La conceptografía de 1893-1903 está concebida exclusivamente para ser aplicada a la teoría lógica de *Grundgesetze*. En nuestra reconstrucción, tratamos de ser fieles a la lógica planteada por Frege, pero también es conveniente hacer abstracción y pretender que el resultado no sea aplicable únicamente a la teoría lógica de *Grundgesetze*, sino a cualquier teoría, como es habitual en la lógica contemporánea. Las tensiones que puedan surgir en nuestra exposición son producto de esta adaptación.

Dedicaremos esta sección a caracterizar los distintos fragmentos que pueden extraerse de la conceptografía de *Grundgesetze*. En primer lugar, presentaremos su lenguaje y la interpretación de sus símbolos. En segundo lugar, enumeraremos sus leyes básicas y reglas de inferencia. Finalmente, discutiremos sus capacidades deductivas.

7.3.1 Fragmento de lógica proposicional

La conceptografía de *Grundgesetze* contiene un fragmento proposicional del que puede extraerse un cálculo para la lógica proposicional. En este fragmento, el universo únicamente contiene dos objetos: el valor de verdad Verdadero

[238] De hecho, en los párrafos §§49-51 de *Grundgesetze* [Frege, 1893, pp. 65-69], Frege deriva algunos teoremas proposicionales haciendo uso de las leyes básicas (**G2b**) y (**G3**). Véase 'The logical system of Frege's *Grundgesetze*' [Cadet; Panza, 2015, pp. 7-8; 22-23], de M. Cadet y M. Panza.

y el valor de verdad Falso. Así pues, las letras toman valores sobre los valores de verdad. En consecuencia, las conectivas están restringidas a este dominio limitado, dado que únicamente pueden tomar valores de verdad como argumento.

El lenguaje del fragmento de lógica proposicional de la conceptografía dispone de las letras proposicionales a, b, c y d, suplementadas con las letras proposicionales necesarias. Además, el condicional y la negación constituyen los símbolos lógicos de este lenguaje.

Sistema axiomático

El fragmento de lógica proposicional consta de una única ley básica:

G1 $a \rightarrow (b \rightarrow a)$.

El cálculo se completa con las siguientes reglas de inferencia: Modus Ponens [MP], Permutación de subcomponentes [PS], Fusión de subcomponentes [FS], Transitividad [Tr], Contraposición [Cr] y Substitución para letras de objeto [S1], que reformularemos del modo siguiente:

Regla substitución para letras proposicionales [S1]. Si Γ es el resultado de substituir en (**G1**) las letras proposicionales a y b por fórmulas cualesquiera, entonces:

$$\vdash \Gamma.$$

Disponer de una regla de substitución como [S1] es conveniente, dado que, como hemos planteado en el apartado 6.5.2, Frege considera explícitamente este tipo de reglas. En este sentido, tratar (**G1**) como un esquema de fórmula contravendría la práctica de Frege y, por lo tanto, sería históricamente inadecuado.

La ley básica (**G1**) es la única específica del fragmento proposicional de la conceptografía. En su presentación en *Grundgesetze*, Frege incluye lo que propiamente es un teorema de (**G1**) como una variante de esta ley básica:

> "If we write 'a' instead of 'b' (in Proposition (I)) we can fuse equal subcomponents so as to obtain in '$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top a\\ \;\;\llcorner a\end{array}$' a special case of (I), which is, without remainder, also to be understood as an instance of (I)." [Frege, 1893, §18, p. 34]

Propiamente, $a \rightarrow a$ debería justificarse a partir (**G1**) por medio de la siguiente deducción:

1. $a \to (b \to a)$, (**G1**).

2. $a \to (a \to a)$, [S1] en (1):

$$\frac{b}{a}$$

3. $a \to a$, Prop. (I): [FS] en (2).

Por esta razón, contra la práctica de Frege, cuando aludamos a esta proposición, la denominaremos 'Prop. (I)' y de este modo la distinguiremos de la ley básica (**G1**).

Completud

Es posible mostrar que el cálculo para la lógica proposicional que acabamos de presentar es equivalente al cálculo proposicional que hemos presentado en el apartado 4.2.1. Hay que tener en cuenta, preliminarmente, que el axioma (**A1**) es exactamente el mismo que la ley básica (**G1**).

En primer lugar, puede demostrarse con facilidad que los axiomas (**A1**)-(**A6**) son teoremas del fragmento proposicional de *Grundgesetze*. La deducción de (**A3**)-(**A6**) es trivial: basta recurrir a (**G1**) y a las reglas [PS], [Cr′] y [Cr]. En la demostración de (**A2**) interviene la ley básica (**G1**) y las reglas [PS], [Tr] y [FS][239]. Finalmente, es obvio que [MP], tal y como se ha formulado en el apartado 4.2.1, es un caso particular de la generalización de esta regla a la que Frege recurre en *Grundgesetze*, y que hemos introducido en el apartado 7.2.2.

En segundo lugar, mostrar que las reglas de inferencia [MP], [PS], [FS], [Tr], [Cr] y [S1] son reglas derivadas del cálculo proposicional presentado en el apartado 4.2.1 es más complejo. La única regla que no plantea dificultades, teniendo en cuenta que los axiomas del citado cálculo se han formulado como esquemas, es [S1]. Ahora bien, dado que en la formulación del resto de reglas intervienen condicionales con sucesiones de subcomponentes de longitud arbitraria, para su justificación es necesario realizar inducciones. En todas ellas, el caso inicial es fácilmente demostrable recurriendo a las pro-

[239] En esta deducción, es preciso demostrar que la siguiente proposición:

$$(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$$

es un teorema. Esta demostración recurre a (**G1**) y a las reglas [PS] y [Tr].

posiciones de *Begriffsschrift* pertinentes[240]. Para la demostración del paso inductivo correspondiente a la justificación de [Tr], [Cr] y [PS], es esencial recurrir a la Proposición (5) de *Begriffsschrift*:

Pr. (5) $$(b \to a) \to ((c \to b) \to (c \to a)).$$

Puesto que el cálculo para la lógica proposicional presentado en el apartado 4.2.1 es completo, la equivalencia entre este cálculo y el fragmento proposicional de la conceptografía de *Grundgesetze* nos permite concluir que este último cálculo también es completo[241].

7.3.2 Fragmento de lógica proposicional con igualdad

Es posible añadir al cálculo del fragmento proposicional de la conceptografía algunas leyes básicas para obtener un cálculo para la lógica proposicional con igualdad. El universo de este nuevo fragmento de la conceptografía se mantiene inalterado respecto al fragmento proposicional que acabamos de presentar; está compuesto únicamente por los valores de verdad. Su lenguaje, además de las letras proposicionales y de los símbolos lógicos del fragmento proposicional, dispone del símbolo de igualdad =.

Sistema axiomático

El fragmento de lógica proposicional con igualdad de la conceptografía incluye las siguientes leyes básicas:

$\mathbf{G_0 1}$ $a \to (b \to a)$.

$\mathbf{G_0 2}$ $(a = b) \to (f(a) \to f(b))$.

$\mathbf{G_0 3}$ $\neg(a = \neg b) \to (a = b)$.

[240]Únicamente es necesario demostrar proposiciones adicionales en la demostración del caso inicial de [FS] y el primer caso de [Cr]. Las proposiciones necesarias son las siguientes:

$$(a \to (a \to b)) \to (a \to b) \tag{7.1}$$
$$(a \to \neg b) \to (b \to \neg a), \tag{7.2}$$

respectivamente. Para la demostración de (7.1) es necesario recurrir a los axiomas (**A2**) y (**A3**) y a la Proposición (27) de *Begriffsschrift*. La fórmula (7.2) se obtiene con la ayuda de los axiomas (**A6**) y (**A4**) y las proposiciones (9) y (5) de *Begriffsschrift*.

[241]M. Cadet y M. Panza ofrecen en 'The logical system of Frege's Grundgesetze' [Cadet; Panza, 2015, pp. 49-52] una justificación alternativa de la completud del fragmento proposicional de la conceptografía de *Grundgesetze*.

Las reglas de inferencia de este cálculo coinciden con las del fragmento proposicional: Modus Ponens [MP], Permutación de subcomponentes [PS], Fusión de subcomponentes [FS], Transitividad [Tr], Contraposición [Cr] y Substitución para letras de objeto [S1]. De modo similar a como hemos procedido para el fragmento de lógica proposicional, reformulamos [S1] del modo siguiente:

Regla de substitución para letras proposicionales [S1]. Si $\mathit{\Gamma}$ es el resultado de substituir en ($\mathbf{G}_0\mathbf{1}$), ($\mathbf{G}_0\mathbf{2}$) o ($\mathbf{G}_0\mathbf{3}$) las letras proposicionales a y b por fórmulas cualesquiera, entonces:

$$\vdash \mathit{\Gamma}.$$

Nuevamente, disponer de una regla de substitución como [S1] evita tratar las leyes básicas como esquemas de fórmula.

La ley básica ($\mathbf{G}_0\mathbf{2}$) no es propiamente una ley básica de *Grundgesetze*, sino que es tratada por Frege como un teorema: la Proposición (IIIc). Esta proposición se deduce en dos pasos. En primer lugar, es preciso obtener, a partir de las leyes básicas (**G3**) y (**G2b**), la Proposición (IIIa) [Frege, 1893, §50, pp. 65-66]:

1. $g(a = b) \rightarrow g(\forall \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(b) \rightarrow \mathfrak{f}(a)))$, (**G3**).
2. $(a = b) \rightarrow \forall \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(b) \rightarrow \mathfrak{f}(a))$, [S2] en (1):

$$\frac{g(\xi)}{\xi}$$

3. $\forall \mathfrak{f} M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \rightarrow M_\beta(f(\beta))$, (**G2b**).
4. $\forall \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(b) \rightarrow \mathfrak{f}(a)) \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a))$, [S4] en (3):

$$\frac{M_\beta(\varphi(\beta))}{\varphi(b) \rightarrow \varphi(a)}$$

5. $(a = b) \rightarrow (f(b) \rightarrow f(a))$, Pr. (IIIa): [Tr] en (2) y (4).

Nótese que, en esta deducción, como hace manifiesta la substitución a la que se somete la letra g en (2), la ley básica (**G3**) es usada proposicionalmente.

En segundo lugar, se deduce (IIIc) a partir de (IIIa) [Frege, 1893, §50, p. 66]:

1. $(a = b) \to (f(b) \to f(a))$, Pr. (IIIa).
2. $(a = b) \to (\neg f(b) \to \neg f(a))$, [S2] en (1):

$$\frac{f(\xi)}{\neg f(\xi)}$$

3. $(a = b) \to (f(a) \to f(b))$, Pr. (IIIc): [Cr$'$] en (2).

La ley básica ($\mathbf{G_0 3}$) también requiere comentarios. Tal y como hemos mencionado en la presentación de las leyes básicas de la conceptografía en el apartado 7.2.1, Frege formula esta ley en la notación de la conceptografía del modo siguiente:

Pr. (IV)
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top\, (\mathrm{—}\ a) = (\mathrm{—}\ b) \\ \ \ \llcorner\!\top\, (\mathrm{—}\ a) = (\ \top\ b), \end{array}$$

esto es, como una proposición que contiene dos igualdades entre valores de verdad [Frege, 1893, §18, p. 34].

Las conectivas asignan valores de verdad a cualquier par de objetos, por lo que $2 \to 3$, $\neg 2$ o $(2 = 3) \to 3$ son sentencias bien formadas y con significado. Es claro que, como ya hemos planteado, en *Grundgesetze* $(a = b)$ y $(a \leftrightarrow b)$ no son fórmulas equivalentes. La equivalencia se produce entre las fórmulas $(a \leftrightarrow b)$ y $(\mathrm{—}\ a = \mathrm{—}\ b)$. Además, hemos mencionado el hecho de que si $\varDelta$ es el nombre de un valor de verdad, entonces:

$$(\varDelta = \mathrm{—}\ \varDelta)$$

es lo Verdadero. Por lo tanto, si nos restringimos a la sintaxis y al uso de las conectivas de los lenguajes formales actuales, esto es, si sólo aceptamos las expresiones como $\neg\varDelta$ o $\varDelta \to \varGamma$ cuando $\varDelta$ y $\varGamma$ son sentencias, tal y como procedemos en la presentación de este fragmento de la conceptografía, entonces podemos presuponer el hecho de que $(\varDelta = \mathrm{—}\ \varDelta)$ es lo Verdadero y formular la ley básica ($\mathbf{G_0 3}$) sin necesidad de incluir ninguna horizontal.

El hecho de que Frege incluya en la conceptografía (**G4**) como ley básica, en lugar de la fórmula $(a = a)$, tal y como hace en *Begriffsschrift*, es fundamental en cuanto a la potencia deductiva del fragmento proposicional con igualdad, como haremos patente a continuación. Ahora bien, $(a = a)$ es un teorema de este sistema formal. Este teorema, la Proposición (IIIe), puede obtenerse a partir de la ley básica (**G3**) [Frege, 1893, §50, p. 66]:

1. $g(a = b) \to g(\forall \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(b) \to \mathfrak{f}(a)))$, (**G3**).

2. $\neg(a = a) \to \neg\forall\mathfrak{f}(\mathfrak{f}(a) \to \mathfrak{f}(a))$, [S2] en (1):

$$\frac{b \quad g(\xi)}{a \quad \neg\xi}$$

3. $\forall\mathfrak{f}(\mathfrak{f}(a) \to \mathfrak{f}(a)) \to (a = a)$, [Cr′] en (2).

4. $a \to a$, Prop. (I).

5. $f(a) \to f(a)$, [S1] en (4):

$$\frac{a}{f(a)}$$

6. $\forall\mathfrak{f}(\mathfrak{f}(a) \to \mathfrak{f}(a))$, [G2] en (5).

7. $(a = a)$, (IIIe): [MP] en (3) y (6).

Equivalencia entre la igualdad y el bicondicional

Sabemos que en la conceptografía de *Begriffsschrift* es posible demostrar la fórmula siguiente:

$$(a = b) \to (a \leftrightarrow b). \tag{7.3}$$

recurriendo a la ley básica (**A7**) y recursos proposicionales[242]. Sin embargo, en el apartado 4.2.2 hemos probado que la fórmula que sigue:

$$(a \leftrightarrow b) \to (a = b). \tag{7.4}$$

no es un teorema de este sistema formal. A partir de este resultado, hemos concluido que el sistema de lógica proposicional con igualdad derivable de la conceptografía de *Begriffsschrift* no es, en los términos planteados en el apartado 4.2.2, una lógica fregeana.

No obstante, puede probarse que tanto (7.3) como (7.4) son teoremas del fragmento de lógica proposicional con igualdad de la conceptografía de *Grundgesetze*.

[242] A lo largo de este apartado, para simplificar la notación, usaremos el símbolo $\leftrightarrow$, que no pertenece al lenguaje de la conceptografía. Consideraremos que la fórmula $(a \leftrightarrow b)$ es una abreviatura de la fórmula siguiente:

$$\neg((a \to b) \to \neg(b \to a)).$$

Para demostrar (7.3), es preciso probar una proposición auxiliar, $(a \leftrightarrow a)$. Esta proposición se obtiene mediante la siguiente deducción[243]:

1. $(a \to \neg a) \to \neg a$, Prop. (Ig).
2. $((a \to a) \to \neg(a \to a)) \to \neg(a \to a)$, [S1] en (1):

$$\frac{a}{(a \to a)}$$

3. $(a \to a) \to \neg((a \to a) \to \neg(a \to a))$, [Cr] en (2).
4. $(a \to a)$, Prop. (I).
5. $\neg((a \to a) \to \neg(a \to a))$, [MP] en (3) y (4).

La fórmula (7.3) se obtiene a partir de la ley básica $(\mathbf{G}_0\mathbf{2})$ y $(a \leftrightarrow a)$.

En *Grundgesetze*, Frege demuestra la proposición (IVa) [Frege, 1893, §51, p. 68]:

Pr. (IVa) $$(b \to a) \to ((a \to b) \to (a = b)),$$

recurriendo a las leyes básicas $(\mathbf{G}_0\mathbf{1})$, $(\mathbf{G}_0\mathbf{2})$ y $(\mathbf{G}_0\mathbf{3})$ y a recursos proposicionales. Claramente, la Proposición (IVa) es equivalente a (7.4)[244]. Concluimos, en consecuencia, que el fragmento de lógica proposicional con igualdad de *Grundgesetze* es una lógica fregeana.

El uso de la ley básica $(\mathbf{G}_0\mathbf{3})$ en la demostración de (IVa) es fundamental y muestra que el poder deductivo del fragmento de lógica proposicional con igualdad de *Grundgesetze* es superior al sistema formal análogo derivable de la conceptografía de *Begriffsschrift*[245]. De hecho, es fácil probar que el cálculo que acabamos de presentar implica el cálculo para la lógica proposicional

[243] Recurrimos en esta demostración a dos proposiciones de *Grundgesetze*: la Proposición (Ig) y la Proposición (I). Ambas se deducen de la ley básica $(\mathbf{G1})$.

[244] Para deducir (7.4) a partir de (IVa), basta aplicar sucesivamente [PS], [Cr′], [PS] y [Cr]. La deducción de (IVa) a partir de (7.4) es similar.

[245] En '„Nichts aufs Gerathewohl und aus Neuerungssucht": Die Begriffsscrhrift 1879 und 1893' [Thiel, 1995], C. Thiel afirma que la conceptografía de *Begriffsschrift* es equivalente a la de *Grundgesetze*:

> "On the axioms of his *Grundgesetze*, which Frege himself collected together, I want just to say, to begin with, that those among them that can be formulated without names for value-ranges and without the description operator are derivable form the axioms of the *Begriffsschrift* of 1879, and vice versa. The proof is awkward because of the differences in the system of rules, but not difficult in principle." [Thiel, 1995, p. 19]

con igualdad que hemos ofrecido en el apartado 4.2.2. Dado que los fragmentos proposicionales de *Begriffsschrift* y *Grundgesetze* son equivalentes, basta con mostrar que es posible obtener los axiomas siguientes:

A7 $(a \equiv b) \to (f(a) \to f(b))$.

A8 $(a \equiv a)$.

recurriendo a ($\mathbf{G}_0\mathbf{1}$), ($\mathbf{G}_0\mathbf{2}$), ($\mathbf{G}_0\mathbf{3}$) y al conjunto de reglas de inferencia indicado. Salvando las diferencias notacionales, es obvio que ambos axiomas pueden obtenerse sin dificultad en este cálculo.

7.3.3 Fragmento de lógica de primer orden

Además de los fragmentos proposicionales, es posible extraer de la conceptografía otros sistemas formales que incluyan a éstos. En particular, puede obtenerse un sistema formal para la lógica de primer orden.

El fragmento que indicamos puede ser interpretado del modo en que interpretamos en lógica actual la lógica de primer orden. En tal caso, sí se restringe la interpretación de las fórmulas, de tal manera que es posible interpretar la ley básica (**G2**) de un modo compatible con la lógica de primer orden.

La naturaleza del sistema obliga a adoptar una convención respecto al conjunto de letras de objeto. Reinterpretamos los símbolos del lenguaje para adaptarlos a las presentaciones actuales de la lógica de primer orden. Por un lado, usamos a, b, c y d para referirnos a sentencias o fórmulas, esto es, a nombres o marcas de valores de verdad bien formados. Por el otro, usamos x, y y z como variables individuales, de modo que estas letras toman valores sobre cualquier objeto del universo que no sea un valor de verdad[246]. Las letras góticas de objeto $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ se usan como letras de objeto, interpretadas como variables individuales, ligadas por un cuantificador universal. El lenguaje del fragmento de lógica de primer orden de la conceptografía consta, además, de las conectivas, del símbolo de igualdad y del cuantificador universal $\forall$. Por último, usamos la letra f como si fuese una metavariable,

Hemos discutido esta cuestión a lo largo de los capítulos precedentes y, en particular, en el apartado 4.4.3. Thiel no ofrece una reconstrucción de las reglas de inferencia de la conceptografía de *Grundgesetze*. Sin embargo, a la vista del resultado que acabamos de obtener, su afirmación parece difícil de sostener.

[246]En la primera parte de *Grundgesetze*, Frege emplea las letras x, y y z como letras de objeto en multitud de ejemplos de naturaleza aritmética. Además, en las deducciones que tienen lugar tras la parte expositiva, usa estas letras de forma generalizada a partir del párrafo §130 [Frege, 1893, p. 162], y de forma ocasional en los párrafos previos.

de modo que toma valores sobre marcas de función de primer nivel unaria. En este caso, f juega un papel similar al que tiene ϕ en las presentaciones actuales de la lógica de primer orden, por lo que $f(x)$ se interpreta como una fórmula cualquiera con una variable x libre.

Sistema axiomático

El fragmento de lógica de primer orden de la conceptografía dispone de un cálculo formado por un conjunto de leyes básicas y de reglas de inferencia. Las leyes básicas este cálculo son las siguientes:

$\mathbf{G}_1\mathbf{1}$ $a \to (b \to a)$.

$\mathbf{G}_1\mathbf{2}$ $\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \to f(x)$.

$\mathbf{G}_1\mathbf{3}$ $(x = x)$.

$\mathbf{G}_1\mathbf{4}$ $(x = y) \to (f(x) \to f(y))$.

En el apartado anterior hemos mencionado que la ley básica ($\mathbf{G}_0\mathbf{2}$) es un teorema de la conceptografía. Dado que las letras de objeto pueden interpretarse tanto como variables proposicionales y como variables individuales, la demostración de este teorema que hemos indicado sirve también para la ley básica ($\mathbf{G}_1\mathbf{4}$).

En *Grundgesetze*, la fórmula $(a = a)$ expresa igualdad entre objetos del universo. De acuerdo con nuestra reconstrucción, la interpretación de las letras de objeto permite separar los objetos del universo de tal manera que a toma valores únicamente sobre lo Verdadero y lo Falso. Esto significa que, con esta interpretación, la fórmula $(a = a)$ expresa únicamente igualdad entre valores de verdad. Por este motivo, es necesario añadir una ley básica, ($\mathbf{G}_1\mathbf{3}$), que establezca la igualdad de un objeto cualquiera (y no únicamente un valor de verdad) consigo mismo.

Las reglas de inferencia del cálculo de lógica de primer orden son Modus Ponens [MP], Permutación de subcomponentes [PS], Fusión de subcomponentes [FS], Transitividad [Tr], Contraposición [Cr], Generalización de letras latinas de objeto [G1], Confinamiento del cuantificador de letras de objeto [C1] y Substitución de letras de objeto [S1].

Completud

Hemos justificado que el fragmento proposicional de la conceptografía de *Grundgesetze* es equivalente al sistema de lógica proposicional completo derivable de la conceptografía de *Begriffsschrift*. Así pues, para mostrar la completud del fragmento de lógica de primer orden que acabamos de presentar, basta con deducir las leyes básicas restantes (esto es, ($\mathbf{G}_1\mathbf{2}$), ($\mathbf{G}_1\mathbf{3}$) y ($\mathbf{G}_1\mathbf{4}$)) y las reglas de inferencia no proposicionales (a saber, [G1], [C1] y [S1]) a partir de un sistema completo para la lógica de primer orden, así como mostrar que este sistema puede obtenerse a partir del fragmento de lógica de primer orden que estamos considerando.

En el apartado 4.2.3, se ha presentado un cálculo completo para la lógica de primer orden derivable de la conceptografía de *Begriffsschrift*. El conjunto de axiomas específicos para la lógica de primer orden de este cálculo es, exceptuando las diferencias notacionales, idéntico al conjunto de leyes básicas ($\mathbf{G}_1\mathbf{2}$)-($\mathbf{G}_1\mathbf{4}$). El uso de tipografía gótica y latina para representar las letras en la conceptografía de *Grundgesetze* hace innecesario especificar en las leyes básicas ($\mathbf{G}_1\mathbf{2}$) y ($\mathbf{G}_1\mathbf{4}$) una condición similar a la que hemos incluido en (**B7**) y (**B9**), esto es, que $\mathfrak{a}$ es libremente substituible por x en ($\mathbf{G}_1\mathbf{2}$) o que x es libremente substituible por y en ($\mathbf{G}_1\mathbf{4}$). Las reglas de Generalización de ambos cálculos coinciden. Por consiguiente, la única diferencia significativa entre ambos cálculos, además de los respectivos fragmentos proposicionales (que en ambos casos es completo) es que la regla [C1] de *Grundgesetze* están formuladas para sucesiones de subcomponentes de longitud arbitraria. Es inmediato obtener la regla de Confinamiento [C] a partir de [C1]. Así pues, en rigor, basta con mostrar que la regla [C1] pueden obtenerse como regla derivada en el cálculo de primer orden presentado en el apartado 4.2.3. Una simple inducción permite obtener el resultado deseado.

7.3.4 Fragmento de lógica de segundo orden

Finalmente, es posible extraer un fragmento de lógica de segundo orden de la conceptografía. Este fragmento es una extensión del fragmento de lógica de primer orden que acabamos de presentar. Sin embargo, las letras de función de primer nivel toman valores sobre las funciones de primer nivel unarias y binarias definidas en este universo, esto es, cuyos argumentos y valores son objetos del universo.

Adoptamos las mismas convenciones notacionales que afectan a las letras de objeto que hemos adoptado para el caso del fragmento de lógica de primer orden. Las letras f y g toman valores sobre el conjunto de funciones de primer nivel y se interpretan como variables de predicado. Además, las letras góticas $\mathfrak{f}$ y $\mathfrak{g}$ se usan como letras de función de primer nivel ligadas por un cuantificador universal. El lenguaje del fragmento de lógica de segundo orden de la conceptografía contiene las conectivas, el símbolo de igualdad y el cuantificador universal. Análogamente al uso que hemos reservado para la letra f en el fragmento para la lógica de primer orden, usamos la letra M_β como una metavariable que toma valores sobre marcas de función de segundo nivel unaria. Así pues, lo que actualmente, en un lenguaje contemporáneo para la lógica de segundo orden, se formularía como Xx y $\phi(X)$, en el lenguaje que nos ocupa es, respectivamente, $f(x)$ y $M_\beta(f(\beta))$.

El cálculo del fragmento de lógica de segundo orden está formado por un conjunto de leyes básicas y de reglas de inferencia. Las leyes básicas de las que consta este cálculo son las siguientes:

G$_2$1 $a \to (b \to a)$.

G$_2$2a $\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \to f(x)$.

G$_2$2b $\forall \mathfrak{f}\, M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \to M_\beta(f(\beta))$.

G$_2$3 $(x = x)$.

G$_2$4 $(x = y) \to (f(x) \to f(y))$.

En el apartado anterior se han hecho los comentarios pertinentes a las leyes básicas (**G$_2$3**) y (**G$_2$4**). Debe hacerse, además, una aclaración respecto a la ley básica (**G$_2$2b**). A pesar de lo que hemos planteado acerca de la ley básica (**G2b**), en este fragmento de la conceptografía, tal y como se interpreta la letra M_β, (**G$_2$2b**) es un esquema de fórmula. Actualmente, en un lenguaje contemporáneo para la lógica de segundo orden, (**G$_2$2b**) se formula del siguiente modo:

$$\forall X \phi(X) \to \phi(Y),$$

donde la variable de predicado X es libremente substituible por Y en $\phi(X)$. La presencia de una tipografías específica en la conceptografía para aquellas letras que están explícitamente ligadas por un cuantificador hace que en la formulación de la ley básica (**G$_2$2b**) sea innecesario añadir una condición similar. Así pues, dada la interpretación que planteamos para M_β, para obtener una instancia de (**G$_2$2b**) no es necesaria una Regla de substitución como [S4], que permita reemplazar letras de función de segundo nivel por nombres o marcas de función de segundo nivel.

Las reglas de inferencia del cálculo de la lógica de segundo orden son las propias del cálculo para la lógica de primer orden, esto es, Modus Ponens [MP], Permutación de subcomponentes [PS], Fusión de subcomponentes [FS], Transitividad [Tr], Contraposición [Cr], Generalización de letras de objeto [G1], Confinamiento del cuantificador [C1], Substitución de letras de objeto [S1], junto con las específicas de la lógica de segundo orden: Generalización de letras de función de primer nivel [G2], Confinamiento del cuantificador [C2] y Substitución de letras de función de primer nivel [S2] y [S3].

De modo similar a como hemos hecho en los apartados anteriores, podemos comparar este fragmento de la conceptografía de *Grundgesetze* con el cálculo para la lógica de segundo orden derivable de la conceptografía de *Begriffsschrift*, que hemos presentado en el apartado 4.2.4. Ya hemos justificado que el fragmento proposicional de ambos cálculos es equivalente y completo. Salvando las diferencias notacionales, los axiomas de estos dos cálculos, además, coinciden. Los comentarios respecto a la tipografía de las letras en el fragmento para la lógica de primer orden que hemos realizado en el apartado anterior pueden aplicarse para las letras de las leyes básicas de este fragmento.

Las reglas de inferencia de Generalización coinciden en ambos cálculos. Por otra parte, dado que las reglas de Confinamiento [C1] y [C2] están formuladas para sucesiones de subcomponentes de longitud arbitraria, es inmediato probar que a partir de ellas puede obtenerse la regla de inferencia [C] (formulada tanto para variables individuales como para variables de predicado). Mediante una inducción sobre la longitud de la sucesión de subcomponentes de [C1] y [C2] puede mostrarse que estas reglas pueden obtenerse en el cálculo para la lógica de segundo orden presentado en el apartado 4.2.4. Finalmente, teniendo nuevamente en cuenta las diferencias notacionales de ambos cálculos y, especialmente, el uso de tipografías distintas para las letras que aparecen dentro del alcance de un cuantificador y las letras que están implícitamente cuantificadas, puede mostrarse que las reglas de Substitución [S2] y [S3] son equivalentes a una Regla de substitución para variables de predicado unarias y binarias.

En consecuencia, podemos concluir que el fragmento de lógica de segundo orden de *Grundgesetze* es equivalente a un cálculo estándar para la lógica de segundo orden.

Conclusions

In this dissertation I have put forward an analysis of the two main stages of development of Frege's logic: *Begriffsschrift*'s concept-script and *Grundgesetze*'s concept-script. On the one hand, I have presented and discussed the main features of these formal systems and discussed why they are different in fundamental ways. On the other, I have explained the process Frege followed in order to modify his position in *Begriffsschrift* and develop what eventually became *Grundgesetze*'s logic. I will now summarise the essential results of my reconstruction.

Begriffsschrift's logic

In spite of what is usually asserted by modern scholars, the formal system of *Begriffsschrift* is extraordinarily singular. I have established in chapters 1, 2 and 3 the main reasons that support this claim: the concept-script does not have either a formal language or a semantics in the modern sense. The main result of this analysis is that the concept-script cannot be seen—in contrast to what is traditionally defended—as a second-order formal system.

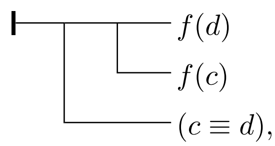
The absence of a formal language in *Begriffsschrift* can be perceived in its lack of syntactic rules of such an important element as the notion of atomic formula. The basic syntactical element of the concept-script is the distinction between function and argument. It decomposes an expression into a variable component, the argument, and a component that remains fixed, the function. I have argued that function and argument do not correspond to ontological categories, i.e., that there is no direct correspondence between a decomposition in terms of function and argument and the ontological structure expressed by a statement. Moreover, I have provided reasons to state that the function-argument analysis is not absolute and can be made in different ways.

In consequence, the minimal expression of the concept-script, '$f(a)$' cannot be uniquely read as an atomic formula. The term '$f(a)$' expresses generality and indicates a division between two components. But it is not even determined which letter is either the fixed component or the variable one: both 'f' and 'a' can be taken to be the argument.

Now I turn to the second basic feature I have highlighted in my reconstruction of *Begriffsschrift*: the lack of semantics of his formal system. One of the most prominent arguments I have put forward in section 1.3 in defence of this perspective is the explanation of the different readings a single letter of the concept-script can receive. This supports the thesis that the formulas of the concept-script cannot be linked to any particular semantic structure: they acquire such a variety of readings that they cannot be assigned a definite meaning.

A single formula of the concept-script such as Proposition (52):

Pr. (52)



can be interpreted, according to a modern perspective and depending on the context, in any of the following ways:

$$x = y \to (\phi(x) \to \phi(y)),$$
$$x = y \to (Xx \to Xy),$$
$$(\phi \leftrightarrow \psi) \to (\Phi(\phi) \to \Phi(\psi)).$$

The last of these readings does not even belong to a formal language, since it contains metalinguistic symbols.

I have presented in section 1.4 the way in which Frege introduces the notion of generality in *Begriffsschrift*. As I have stated there, *Begriffsschrift*'s notion of generality is deeply based on the distinction between function and argument. In an expression, any symbol can be taken to be the argument, be replaced with a corresponding German letter and thus be quantified. According to my reconstruction:

> If '$f(a)$' is any assertible expression where the letter 'a' is taken to be the argument:
>
> $$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\, f(\mathfrak{a})$$
>
> stands for the judgement that $f(A)$ is a fact whatever argument 'A' may be put in place of '$\mathfrak{a}$' preserving the assertibility of the expression.

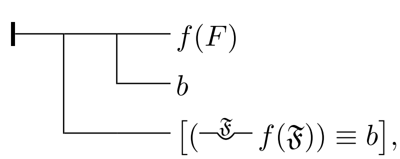
It is clear from Frege's exposition that only arguments—whatever their nature—can be quantified. This means that there is a unique sort of quantification. I have provided arguments in favour of considering the quantification over function letters as a particular case of the quantification over argument letters, and not as a sort of quantification on its own.

Begriffsschrift's quantification theory is only syntactically handled. This formal system provides the inference rules that govern the introduction and the elimination of quantifiers in the calculus and some syntactical limitations for the correct application of these rules. There is no semantic interpretation of the letters, whose generality appears to be of a complete different kind from that of modern variables.

Frege does not offer any definition of the processes of substitution involved in *Begriffsschrift*'s proofs: he does not either specify what is an adequate instance or explain how to solve in general conflicts of quantification—produced by substitutions. However, since the language of the concept-script is not properly a formal language, it is not possible to adapt it to modern standards of rigour that satisfy these two elements. The plasticity of the letters—which is blatantly manifest in the variety of readings they have—forbids the formulation of a general and precise definition of substitutions.

As a matter of fact, I have argued in section 2.3 that Frege does not provide any substitution rule. In a modern second-order formal system, there can be defined three kinds of substitution rules: substitution rule for propositional letters, for individual variables and for predicate variables. In the context of *Begriffsschrift*, when the substitution rule is mentioned in historical studies, it is usual to refer only to the substitution rule for second-order variables. Now, Frege does not formulate such a rule of substitution, that permits to infer the result of substituting a predicate for a second-order variable on a theorem. The addition to the calculus of the concept-script of an inference rule of this kind is—as we have seen—insufficient. In *Begriffsschrift*, there are several substitutions that cannot be explained as being an application of a substitution rule in a second-order calculus.

For instance, in the derivation of Proposition (77), the substitutions that affect the letter 'f' in the following instance of Proposition (68):



which can only be read as follows:

$$(\forall X \phi(X) \leftrightarrow \psi) \to (\psi \to \phi(Y)),$$

are not substitutions of a predicate for a second-order variable.

It is common to claim that Frege's omission of a substitution rule for predicate variables can be explained as epochal sloppiness. According to this view, many historical studies propose to add such a rule in order to interpret *Begriffsschrift*'s concept-script as a second-order logic. Now, the lack of substitution rules should not be attributed to Frege's imprecision, since all steps made in *Begriffsschrift*'s substitutions are valid. The fact is that—as I have suggested—several substitutions can only be metalinguistically justified and hence are not the result of an application of a substitution rule in a second-order calculus. Therefore, the strategy of merely adding this rule to the concept-script hinders us from faithfully reconstructing Frege's work. The particular nature of *Begriffsschrift*'s substitutions imply, on the one hand, that the calculus contained in this work is not a second-order calculus and, on the other, that to assume that the formal system of *Begriffsschrift* can be seen as such is historically both incorrect and inadmissible.

Defending the claim that the concept-script of *Begriffsschrift* is a second-order formal system entails contradicting key elements in Frege's exposition. Such a thesis demands, on the one hand, the presence of a specific ontological structure that determines both the decomposition in terms of function and argument, and the semantics of a formal system; and, on the other, a complete and anachronistic limitation to the flexibility and ambiguity that characterise the letters of the concept-script. Moreover, it presupposes that all proofs in *Begriffsschrift* and, in particular, all substitutions can be reproduced—save by minor details—in a second-order calculus. I have argued throughout chapters 1 and 2 that there is strong textual evidence in *Begriffsschrift* against all these elements.

One of the most relevant aspects I have focused on in chapter 3 is the particular use Frege intends for the formal system developed in *Begriffsschrift*. As I have argued in section 3.3, the language of the concept-script should not be seen as a formal language in the modern sense, but as the base of a system of logistics, that is, as a device for the accurate expression of the logical relations that link statements from a given subject matter. From this perspective, this formal system can be used as a tool for developing a discipline such as arithmetic, so that it provides neither a formalisation nor a reduction. The concept-script, on the one hand, can be employed to express all logical relations between arithmetical statements and, on the other, makes manifest the fact that any mathematical proof can be formulated as a series of strictly regulated steps, regimented with a small set of rules of inference. As a result, the concept-script eliminates all trace of natural language from arithmetic.

The scientific discourses to which the concept-script is adapted determine a specific domain of entities. The proper symbols of this subject matter denote entities in that context, or relations and properties applied to the basic entities. These symbols provide the means to express atomic statements.

This circumstance explains why Frege does not supply any indication about the proper symbols of the language of the concept-script or the process of construction of atomic formulas. In fact, when the formal elements of the concept-script are applied to express, for instance, arithmetical sentences, the reason for the lack of a proper syntax is patently clear. The atomic formulas are given by the arithmetical language and are organically put in relation with the logical symbols of the concept-script, thereby giving rise to complex formulas. The distinction between function and argument in these formulas stands out as a fundamental tool in this complementation, as it provides a natural and useful way to articulate the acquired symbols and apply to them the formal resources of the concept-script.

A system of logistics is not, properly speaking, a formalised theory to which the formal resources of the concept-script are added. Hence, the concept-script is complemented to a subject matter in a particular way. First, there are no deductions with premises in the concept-script and, second, no unique reading can be assigned beforehand to a concept-script formula. Two different circumstances make this evident: the interpretation of the letters and the fact that only particular instances of formulas of the pure concept-script—obtained after performing the appropriate substitutions—intervene in proofs of logistics.

The concept-script does not alter the interpretation of the proper symbols of a scientific discourse, but allows that its own symbols be interpreted according to the particular discourse. Hence, the meaning of the adopted terms and the field of application of the concepts of the subject matter indicates how the instances of the quantified letters must be handled in the calculus. In this way, the syntactic conditions of the concept-script are supplemented with semantic ones: only the meaningful expressions of the scientific discourse taken into consideration can be acceptable instances of the symbols of the concept-script. Any such discourse makes possible to specify the intended interpretation of the letters of the concept-script.

In the context of logistics, quantification is handled in the same way as in *Begriffsschrift*—that is, in a purely syntactical way—in spite of the fact that—in terms of semantics—it acquires an added meaning which is determined by the specific application. There is no modification in the use of the quantifiers in the calculus; they are rather interpreted in such a way that semantical restrictions are added to the usual syntactic ones. Nevertheless, the possibility of reading the quantifiers in the usual manner in arithmetic does not mean that they are semantically interpreted in pure concept-script. Now, the presence of a specific domain of entities that constitute a particular subject matter implies that the quantification of a letter in logistics involves considering a set of adequate instances that may be put in place of the letter. The difference between quantification in logistics and pure concept-script is that the instances in the latter are only syntactically determined, while in the former they are also semantically delimited and thus it is possible to specify such a set of adequate instances.

Transition between *Begriffsschrift* and *Grundgesetze*

The process of development that drove Frege to *Grundgesetze*'s account took nearly fifteen years and is rather complex. As I have stated in chapter 5, one of the most fundamental aspects in this process is that, right after the publication of *Begriffsschrift*, Frege abandons the use of the distinction between function and argument. As radical as this seems, the disappearance of this fundamental distinction in Frege's account has received practically no attention in the historical studies.

Frege confirmed in the early 1880s that the nature of the function-argument scheme had been completely misunderstood by the reviewers of *Begriffsschrift*. This alone can be seen as a relevant reason for the abandonment of this scheme. However, I have proposed two additional causes. First, in the context of the deployment of the logicist project—which began as early as 1880-1881—Frege noticed the need to express in the language the distinction between concept and object. He defended that this distinction is completely fundamental and, in fact, the distinction happens to be absolutely indispensable in the definition of the concept of natural number. Second, the author was aware that the function-argument scheme provided an inadequate analysis of atomic statements, given that it does not capture the semantic structure of these expressions.

As a consequence, Frege adopted—from 1880 on—the distinction between concept and object. The replacement of one distinction with the other should not be seen as an extension of the application of the function-argument scheme. Both structures have completely different aims and, subsequently, divergent natures. I have offered in section 5.5 a detailed analysis of the distinction between concept and object that makes possible to notice these differences. What is essential to the notion of concept is its insaturatedness. While an object is always a saturated entity, a concept is defined as insaturated, that is, as an entity in need of completion. This can shed light on the famous Fregean thesis that the judgement precedes the concept and on how the nature of concepts is associated with their predicativity. I will proceed to explain both aspects.

As an insaturate entity, a concept cannot stand on its own. It needs the completion of an object, and this act of completion takes place in the formation of a statement. Hence, a statement does not—as has been traditionally maintained—come from the connection of two concepts. On the contrary, concepts are obtained through the decomposition of a statement. Thus, the original object of logical analysis are statements. The decomposition in terms of concept and object reveals the semantic structure of these statements. Now, as it is often noted, this decomposition—applied to complex statements—is not unique and can be made in different ways. The multiplicity of possible analyses of a single statement is completely subordinated—which is not the case in *Begriffsschrift*—to the semantic structure of that statement. This means that—contrary to what can be done in the 1879 booklet—the subject of a statement can never be taken as a symbol for a concept: only predicates can be associated with concepts. Therefore, the flexibility of the application of the distinction between function and argument must be distinguished from the multitude of decompositions the distinction between concept and object permits.

As I have explained in section 3.4, in the first years of the decade of 1880, Frege made efforts to emphasise the advantages of the concept-script over the logic developed by the algebraic logicians. Frege claimed that he had provided—on the basis of the combination of the formal features of the concept-script and the distinction between concept and object—a distinctively adequate analysis of categorical judgements. The inclusion of this scheme in the language of the concept-script makes possible to express rigorously basic ontological relations, such as the subordination between concepts or the fact that an object falls into a concept.

From 1891 on Frege took the mathematical notion of function as a basis for a precise characterisation of the notion of concept. As I have suggested in section 5.6, Frege achieved this by stating two fundamental elements: truth-values can be seen as objects and also can be taken as the values that some functions assign to their arguments. The articulation of these two claims focused Frege's development from 1891 to 1893 and provided the philosophical background of the formal theory developed in *Grundgesetze*.

Grundgesetze's logic

In contrast to what Frege aimed at in *Begriffsschrift*, he devised *Grundgesetze* with the sole purpose of the rigorous justification of the logicist thesis. The construction of *Grundgesetze*'s formal system is completely subject to this goal. As a consequence, Frege did not only develop in this work a formal system such as the 1879 concept-script, but also a complete logical theory that serves as a vehicle for the development of the logicist project.

Frege constructs in *Grundgesetze* a formalised logical theory, which has a universe composed of objects and functions and two specific basic laws that are added to the structural ones. I have studied the basic elements of this theory in section 6.3. The distinction between function and object is absolute and classifies each entity in the universe: everything that is not an object is a function and vice-versa. Now, these ontological categories, at the same time, are divided into sub-categories, thereby giving rise to different kinds of functions and objects: there are functions of first-, second- and third-level—which are distinguished by the nature of their arguments—and specific categories of objects, such as truth-values or courses of values. The presence of a universe of such characteristics makes possible to offer an interpretation of the elements of the language.

Even though this whole theory has—according to Frege's account—a logical nature, from a contemporary perspective the formal apparatus can be distinguished from it. I thus obtain a pure formal system which is used as a tool—in addition to other elements—for the formalisation of the theory. I have called this formal system 'concept-script' and have focused on its study in chapter 7. *Grundgesetze*'s concept-script is a formal system composed of five basic laws and a set of inference rules. It is very complex and, in particular, syntactically convoluted. One of its most prominent features is a surprisingly large number of inference rules.

I have focused in chapter 6 on a reconstruction of the language of concept-script, which—as opposed to my reconstruction of *Begriffsschrift*'s concept-script— extends both to its syntax and its semantics. I will overview the main characteristics of both elements.

The main components of the language of the concept-script are object marks, proper names, function marks and function names. Object marks are complete expressions that contain letters, what in a modern formal language would be considered open formulas or open individual terms. Proper names are, in contemporary terms, sentences or closed individual terms. Function marks and function names are incomplete expressions, i.e., what nowadays would be seen as predicates; the former contain letters, while the latter do not. Frege's exposition of the language of the concept-script establishes guidelines for the correct formation of expressions. These guidelines use both complete and incomplete expressions—that is, proper names or object marks and function names or function marks— in order to describe the formation of complex expressions. However, my reconstruction of the definition of the formation of complex expressions is solely based on complete expressions. I have restricted the treatment of incomplete expressions to the definition of substitutions.

Frege's syntactic guidelines concerning the language of the concept-script can be reconstructed—as I have done in section 6.5—in order to formulate recursively a set of rules for the correct formation of complex expressions. Departing from these rules, I offer a characterisation of proper names and object marks. Finally, I provide definitions of the substitutions that take place in the concept-script. The very notion of a precise and rigorous definition of the formation of a basic expression or of substitution is completely absent in *Begriffsschrift*.

Since the concept-script is developed with the aim of justifying the logicist thesis, it is natural that Frege devised only one interpretation for *Grundgesetze*'s formal system: that which comes from the theory developed in this work. However, I have isolated the concept-script and reconstructed it in the fashion of a modern formal system.

The presence of a semantics for the formal system makes possible to interpret the quantifiers. There are then different sorts of quantification, that reflect the regimentation of the universe: quantified object letters take values over the totality of objects and quantified function letters take values over first-level functions. In section 6.4 I have formulated Frege's definitions of the two sorts of quantifications:

(G1) The value of the function:

$$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\, \varphi(\mathfrak{a})$$

for the argument $\Phi(\xi)$ is the True if the value of the function $\Phi(\xi)$ is the True for every object that takes the place of ξ; otherwise it is the False.

(G2) The value of the function:

$$-\!\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\!-\, \mu_{\beta}(\mathfrak{f}(\beta))$$

> for the argument $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ is the True if the value of the function $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ is the True for every first-level unary function that takes the place of φ; otherwise it is the False[247].

These definitions can be compared to *Begriffsschrift*'s definition of generality.

The fact that *Grundgesetze*'s concept-script has a semantics removes to a great extent the flexibility that the letters of *Begriffsschrift*'s concept-script show. In this sense, the letters of the concept-script of 1893-1903 can be univocally interpreted as variables in a modern sense.

Frege's efforts to provide precise syntactic and semantic guidelines to the concept-script—even if they tend to unnecessarily complicate it—facilitates a reconstruction of an axiomatic system that strongly resembles a modern formal system. In section 7.3 I have extracted from the concept-script—although Frege did not intend to do so—four different fragments that are formal systems in the modern sense: a propositional fragment, a fragment of propositional logic with equality, a first-order logic fragment and, finally, a second-order logic fragment.

Once some details of the interpretation of these fragments are set out, several meta-logical results can be obtained. First, I have concluded that the propositional fragment of *Grundgesetze* is equivalent to a complete propositional calculus. Second, I have showed that the deductive power of its fragment of propositional logic with equality is, thanks to basic law (IV):

Pr. (IV)
$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\top (-\, a) = (-\, b) \\ \;\;\llcorner\!\!\top (-\, a) = (\,\top b), \end{array}$$

far superior to the propositional logic with equality that can be extracted from *Begriffsschrift*. Finally, I have offered an informal proof that the first-order logic fragment is equivalent to a complete first-order calculus.

[247] I have provided a similar formulation of the definition of quantification over first-order binary functions.

Apéndice A

Resumen de los fragmentos de la conceptografía de *Grundgesetze*

A.1 Introducción

A.1.1 Preliminares

Para la formulación de las reglas de inferencia, usaremos $\mathit{\Gamma}$, $\mathit{\Delta}$, $\mathit{\Lambda}$, $\mathit{\Pi}$, $\mathit{\Sigma}$ como metavariables para fórmulas. Para facilitar la notación, abreviaremos las fórmulas o sentencias condicionales como:

$$\mathit{\Gamma}_1 \rightarrow (\mathit{\Gamma}_2 \rightarrow (\cdots \rightarrow (\mathit{\Gamma}_n \rightarrow \mathit{\Delta})\ldots)),$$

del siguiente modo:

$$\mathit{\Gamma}_1, \ldots, \mathit{\Gamma}_n \rightarrow \mathit{\Delta}.$$

Cuando el contexto lo permita, expresaremos la sucesión $\mathit{\Gamma}_1, \ldots, \mathit{\Gamma}_n$ como $\vec{\mathit{\Gamma}}$. En los fragmentos de lógica de primer y segundo orden, también usaremos $\mathit{\Delta}$ como una metavariable para nombres propios o marcas de objeto.

Además, para formular las reglas de substitución, usaremos $\mathit{\Phi}(\xi)$ y $\mathit{\Psi}(\xi, \zeta)$ como metavariables para nombres o marcas de función de primer nivel unarias y binarias, respectivamente. En este contexto, diremos que $\mathit{\Gamma}\binom{v}{*}$ es el resultado de substituir una letra latina cualquiera v por una instancia aceptable $*$ en la fórmula $\mathit{\Gamma}$.

A.1.2 Leyes básicas de la conceptografía

Incluimos, para facilitar la comparación entre los distintos fragmentos de la conceptografía y el sistema axiomático del que se extraen, el listado de leyes básicas de la conceptografía:

G1 $a \rightarrow (b \rightarrow a)$.

G2a $\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \rightarrow f(a)$.

G2b $\forall \mathfrak{f} M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \rightarrow M_\beta(f(\beta))$.

G3 $g(a = b) \rightarrow g(\forall \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(b) \rightarrow \mathfrak{f}(a)))$.

G4 $\neg(\text{—}\, a = \neg \text{—}\, b) \rightarrow (\text{—}\, a = \text{—}\, b)$.

A.2 Fragmento de lógica proposicional

Usaremos a y b como letras proposicionales que pertenecen al lenguaje.

A.2.1 Leyes básicas

G1 $a \rightarrow (b \rightarrow a)$.

A.2.2 Reglas de inferencia

1. Substitución de letras proposicionales [S1]: Si Γ es el resultado de substituir en (**G1**) las letras proposicionales a y b por fórmulas cualesquiera, entonces:
$$\vdash \Gamma.$$

2. Modus Ponens [MP]:
$$\frac{\begin{array}{l}\vdash \Lambda, \vec{\Delta} \rightarrow \Gamma \\ \vdash \Lambda\end{array}}{\vdash \vec{\Delta} \rightarrow \Gamma}\ [\mathrm{MP}]$$

3. Permutación de subcomponentes [PS]:
$$\frac{\vdash \vec{\Pi}, \vec{\Lambda}, \vec{\Delta} \rightarrow \Gamma}{\vdash \vec{\Pi}, \vec{\Delta}, \vec{\Lambda} \rightarrow \Gamma}\ [\mathrm{PS}]$$

4. Fusión de subcomponentes [FS]:

$$\frac{\vdash \vec{\Sigma}, \Lambda, \vec{\Pi}, \Lambda, \vec{\Delta} \to \Gamma}{\vdash \vec{\Sigma}, \Lambda, \vec{\Pi}, \vec{\Delta} \to \Gamma}\ [\text{FS}]$$

$$\frac{\vdash \vec{\Sigma}, \Lambda, \vec{\Pi}, \Lambda, \vec{\Delta} \to \Gamma}{\vdash \vec{\Sigma}, \vec{\Pi}, \Lambda, \vec{\Delta} \to \Gamma}\ [\text{FS}]$$

5. Contraposición [Cr]:

$$\frac{\vdash \vec{\Lambda}, \Delta \to \neg\Gamma}{\vdash \vec{\Lambda}, \Gamma \to \neg\Delta}\ [\text{Cr}] \qquad \frac{\vdash \vec{\Lambda}, \neg\Delta \to \Gamma}{\vdash \vec{\Lambda}, \neg\Gamma \to \Delta}\ [\text{Cr}]$$

6. Transitividad [Tr]:

$$\frac{\begin{array}{l}\vdash \vec{\Lambda} \to \Delta \\ \vdash \Delta \to \Gamma\end{array}}{\vdash \vec{\Lambda} \to \Gamma}\ [\text{Tr}]$$

A.3 Fragmento de lógica proposicional con identidad

Usaremos la letra de función de primer nivel f como metavariable para fórmulas, de tal manera que $f(a)$ es una fórmula cualquiera que tiene a a como subfórmula. En este contexto, $f(b)$ es el resultado de reemplazar a por b en $f(b)$.

A.3.1 Leyes básicas

G$_0$1 $a \to (b \to a)$.

G$_0$2 $(a = b) \to (f(a) \to f(b))$.

G$_0$3 $\neg(a = \neg b) \to (a = b)$.

A.3.2 Reglas de inferencia

Coinciden con las reglas de inferencia del fragmento de lógica proposicional: Modus Ponens [MP], Permutación de subcomponentes [PS], Fusión de subcomponentes [FS], Contraposición [Cr], Transitividad [Tr] y la siguiente reformulación de la regla de Substitución de letras proposicionales [S1]:

1. Substitución de letras proposicionales [S1]: Si Γ es el resultado de substituir en ($\mathbf{G}_0\mathbf{1}$), ($\mathbf{G}_0\mathbf{2}$) o ($\mathbf{G}_0\mathbf{3}$) las letras proposicionales a y b por fórmulas cualesquiera, entonces:

$$\vdash \Gamma.$$

A.4 Fragmento de lógica de primer orden

Usaremos las letras a y b para referirnos a sentencias o fórmulas e interpretaremos las letras de objeto x e y como variables individuales y la letra gótica de objeto $\mathfrak{a}$ como una variable individual ligada por un cuantificador universal. Además, la letra de función de primer nivel f será usada como metavariable para fórmulas, de tal manera que $f(x)$ es una fórmula cualquiera con una variable x libre. Así pues, en un lenguaje contemporáneo, $f(x)$ se formula como $\phi(x)$. En este contexto, $f(y)$ es el resultado de substituir x por y en $f(x)$.

A.4.1 Leyes básicas

$\mathbf{G}_1\mathbf{1}$ $a \to (b \to a)$.

$\mathbf{G}_1\mathbf{2}$ $\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \to f(x)$.

$\mathbf{G}_1\mathbf{3}$ $(x = x)$.

$\mathbf{G}_1\mathbf{4}$ $(x = y) \to (f(x) \to f(y))$.

A.4.2 Reglas de inferencia

El fragmento de lógica de primer orden dispone de todas las reglas de inferencia del fragmento de lógica proposicional: Modus Ponens [MP], Permutación de subcomponentes [PS], Fusión de subcomponentes [FS], Contraposición [Cr], Transitividad [Tr] y Substitución de letras de objeto [S1]. La regla [S1] tal y como la hemos formulado para el fragmento de lógica proposicional se aplica únicamente a ($\mathbf{G}_1\mathbf{1}$) y a las letras a y b. Además, este fragmento consta de las siguientes reglas específicas (que reformulamos para adaptarlas a la notación particular de este fragmento):

1. Substitución de letras de objeto [S1]: Si x es una letra latina de objeto y $\varDelta$ una expresión correctamente formada, entonces:

$$\frac{\vdash \varGamma}{\vdash \varGamma(\tfrac{x}{\varDelta}).}\ [\mathrm{S1}]$$

2. Generalización de letras latinas de objeto [G1]: Si la letra latina de objeto x no aparece en la fórmula $f(x)$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{a}$, entonces:

$$\frac{\vdash f(x)}{\vdash \forall\mathfrak{a}\, f(\mathfrak{a})}\ [\mathrm{G1}]$$

3. Confinamiento de letras de objeto [C1]: Si la letra latina de objeto x no aparece en $\vec{\varGamma}$ y no aparece en $f(x)$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{a}$, entonces:

$$\frac{\vdash \vec{\varGamma} \rightarrow f(x)}{\vdash \vec{\varGamma} \rightarrow \forall\mathfrak{a}\, f(\mathfrak{a})}\ [\mathrm{C1}]$$

A.5 Fragmento de lógica de segundo orden

Recurriremos a las mismas convenciones notacionales que afectan a las letras a, b, x, y y $\mathfrak{a}$ para el fragmento de lógica de primer orden. Interpretaremos las letras de función de primer nivel f y g como variables de predicado y las letras góticas de función de primer nivel $\mathfrak{f}$ y $\mathfrak{g}$ como variables de predicado ligadas por un cuantificador universal. La ariedad de las letras se hará explícita en caso necesario. Finalmente, haremos uso de la letra de segundo nivel M_β como metavariable para fórmulas, de modo que $M_\beta(f(\beta))$ es una fórmula cualquiera con una variable f libre. Así pues, en un lenguaje contemporáneo, $M_\beta(f(\beta))$ se formula como $\phi(X)$. En este contexto, $M_\beta(g(\beta))$ es el resultado de substituir g por f en $M_\beta(f(\beta))$.

A.5.1 Leyes básicas

G$_2$1 $a \to (b \to a)$.

G$_2$2a $\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}) \to f(x)$.

G$_2$2b $\forall \mathfrak{f}\, M_\beta(\mathfrak{f}(\beta)) \to M_\beta(f(\beta))$.

G$_2$3 $(x = x)$.

G$_2$4 $(x = y) \to (f(x) \to f(y))$.

A.5.2 Reglas de inferencia

El fragmento de lógica de segundo orden dispone de todas las reglas del fragmento de lógica de primer orden: Modus Ponens [MP], Permutación de subcomponentes [PS], Fusión de subcomponentes [FS], Contraposición [Cr], Transitividad [Tr], Substitución de letras de objeto [S1], Generalización para letras de objeto [G1] y Confinamiento de letras de objeto [C1]. Además, consta de las siguientes reglas específicas (que reformulamos para adaptarlas a la notación particular de este fragmento):

1. Generalización de letras de función de 1.$^{\text{er}}$ nivel [G2]: Si la letra latina de función de primer nivel unaria f no aparece en la fórmula $M_\beta(f(\beta))$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall \mathfrak{f}$, entonces:

$$\frac{\vdash M_\beta(f(\beta))}{\vdash \forall \mathfrak{f}\, M_\beta(\mathfrak{f}(\beta))}\ [\mathrm{G2}]$$

   Si la letra latina de función de primer nivel binaria g no aparece en la fórmula $M_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall \mathfrak{g}$, entonces:

$$\frac{\vdash M_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))}{\vdash \forall \mathfrak{g}\, M_{\beta\gamma}(\mathfrak{g}(\beta,\gamma))}\ [\mathrm{G2}]$$

2. Confinamiento de letras de función de 1.$^{\text{er}}$ nivel [C2]: Si la letra de función de primer nivel unaria f no aparece en $\vec{\Gamma}$ y no aparece en $M_\beta(f(\beta))$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall \mathfrak{f}$, entonces:

$$\frac{\vdash \vec{\Gamma} \to M_\beta(f(\beta))}{\vdash \vec{\Gamma} \to \forall \mathfrak{f}\, M_\beta(\mathfrak{f}(\beta))}\ [\mathrm{C2}]$$

Si la letra de función de primer nivel binaria g no aparece en $\vec{\Gamma}$ y no aparece en $M_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))$ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{g}$, entonces:

$$\frac{\vdash \vec{\Gamma} \rightarrow M_{\beta\gamma}(g(\beta,\gamma))}{\vdash \vec{\Gamma} \rightarrow \forall\mathfrak{g}\, M_{\beta\gamma}(\mathfrak{g}(\beta,\gamma))}\,[\text{C2}]$$

3. Substitución de letras de función de 1.$^{\text{er}}$ nivel unaria [S2]: Si f es una letra de función de primer nivel unaria, $\Phi(\xi)$ un nombre o una marca de función de primer nivel unaria, Γ una expresión correctamente formada y se cumplen las siguientes condiciones:

   (a) Si f aparece en Γ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{a}$, entonces los lugares de argumento de $\Phi(\xi)$ no están dentro del alcance de $\forall\mathfrak{a}$.

   (b) Si f aparece en Γ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{f}$, entonces los lugares de argumento de $\Phi(\xi)$ no están dentro del alcance de $\forall\mathfrak{f}$,

   entonces:

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma\binom{f(\xi)}{\Phi(\xi)}.}\,[\text{S2}]$$

4. Substitución de letras de función de 1.$^{\text{er}}$ nivel binaria [S3]: Si g es una letra de función de primer nivel binaria, $\Psi(\xi,\zeta)$ un nombre o una marca de función de primer nivel binaria, Γ una expresión correctamente formada y se cumplen las siguientes condiciones:

   (a) Si g aparece en Γ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{a}$, entonces los lugares de argumento de $\Psi(\xi,\zeta)$ no están dentro del alcance de $\forall\mathfrak{a}$.

   (b) Si g aparece en Γ dentro del alcance de un cuantificador $\forall\mathfrak{f}$, entonces los lugares de argumento de $\Psi(\xi,\zeta)$ no están dentro del alcance de $\forall\mathfrak{f}$,

   entonces:

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma\binom{g(\xi,\zeta)}{\Psi(\xi,\zeta)}.}\,[\text{S3}]$$

Bibliografía

Obras de Frege

[Frege, 1874] FREGE, G. (1874). Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Größenbegriffes gründen. Disertación para la obtención del *Venia docendi* en la Facultad de Filosofía de Jena. Jena: Friedrich Frommann. Reedición en [Frege, 1967], pp. 50-84. Traducción inglesa por H. Kaal en [Frege, 1984], pp. 56-92 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1879a] FREGE, G. (1879a). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle: Louis Nebert. Reedición en [Frege, 1964a], pp. 1-88. Traducción inglesa por S. Bauer-Mengelberg en [van Heijenoort, 1967a], pp. 1-82; y por T. W. Bynum en [Frege, 1972], pp. 101-203 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1879b] FREGE, G. (1879b). Anwendungen der Begriffsschrift. Conferencia en *Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft* de 24 de enero de 1879. Publicada en 1879 en *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, 13,* pp. 29-33. Edición en [Frege, 1964a], pp. 89-93. Traducción inglesa por T. W. Bynum en [Frege, 1972], pp. 204-208 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1880] FREGE, G. (1880–1881). Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift. Originalmente no publicado. Edición en [Frege, 1969], pp. 9-52. Traducción inglesa por P. Long y R. White en [Frege, 1979], pp. 9-46 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1882a] FREGE, G. (1882a). Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, *81*, pp. 48–56. Reedición en [Frege, 1964a], pp. 106-114.

Traducción inglesa por T. W. Bynum en [Frege, 1972], pp. 83-89 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1882b] FREGE, G. (1882b). Über den Zweck der Begriffsschrift. Conferencia en *Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft* de 27 de enero de 1882. Publicada en 1882 en *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, 16*, pp. 1-10. Reedición en [Frege, 1964a], pp. 97-106. Traducción inglesa por T. W. Bynum en [Frege, 1972], pp. 90-100 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1882c] FREGE, G. (1882c). Booles logische Formelsprache und meine Begriffsschrift. Originalmente no publicado. Edición en [Frege, 1969], pp. 53-59. Traducción inglesa por P. Long y R. White en [Frege, 1979], pp. 47-52 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1882d] FREGE, G. (1882?d). 17 Kernsätze zur Logik. Originalmente no publicado. Edición en [Frege, 1969], pp. 189-190. Traducción inglesa por P. Long y R. White en [Frege, 1979], pp. 174-175 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1882e] FREGE, G. (1882–1891?e). Logik. Originalmente no publicado. Edición en [Frege, 1969], pp. 1-8. Traducción inglesa por P. Long y R. White en [Frege, 1979], pp. 1-8 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1883] FREGE, G. (1883?). Dialog mit Pünjer über Existenz. Originalmente no publicado. Edición en [Frege, 1969], pp. 60-75. Traducción inglesa por P. Long y R. White en [Frege, 1979], pp. 53-67 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1884] FREGE, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-matematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Breslau: Wilhelm Koebner. Traducción inglesa por J. L. Austin en [Oxford: Blackwell, 1974] (la paginación de las citas hace referencia a esta edición). Traducción castellana por U. Moulines en [Frege, 1996], pp. 31-144.

[Frege, 1885] FREGE, G. (1885). Über formale Theorien der Arithmetik. Conferencia en *Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft* de 17 de julio de 1885. Publicada en 1885 en *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, 19*, pp. 94-104. Reedición en [Frege, 1967], pp. 103-111. Traducción inglesa por E. H. Kluge en [Frege, 1984], pp. 112-121 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1891] FREGE, G. (1891). *Funktion und Begriff*. Conferencia en *Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft* de 9 de enero de 1891. Jena: Hermann Pohle. Reedición en [Frege, 1967], pp. 125-142. Traducción inglesa por P. Geach en [Frege, 1984], pp. 137-156 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1892a] FREGE, G. (1892a). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, *100*, pp. 25–50. Reedición en [Frege, 1967], pp. 143-162. Traducción inglesa por M. Black en [Frege, 1984], pp. 157-177 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1892b] FREGE, G. (1892b). Über Begriff und Gegenstand. *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, *16*, pp. 192–205. Reedición en [Frege, 1967], pp. 167-178. Traducción inglesa por P. Geach en [Frege, 1984], pp. 182-194 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1893] FREGE, G. (1893). *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. I. Jena: Hermann Pohle. Reedición en [Frege, 1962]. Traducción inglesa parcial por M. Furth en [Frege, 1964b], 1-126. Traducción inglesa por P. Ebert y M. Rossberg en [Frege, 2013] (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1897] FREGE, G. (1897). Logik. Originalmente no publicado. Edición en [Frege, 1969], pp. 137-163. Traducción inglesa por P. Long y R. White en [Frege, 1979], pp. 126-151.

[Frege, 1903] FREGE, G. (1903). *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. II. Jena: Hermann Pohle. Reedición en [Frege, 1962]. Traducción inglesa parcial por M. Furth en [Frege, 1964b], 127-143. Traducción inglesa por P. Ebert y M. Rossberg en [Frege, 2013] (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1914] FREGE, G. (1914). Logik in der Mathematik. Notas para la asignatura del mismo título impartida en la Universidad de Jena del semestre de verano de 1914. Originalmente no publicado. Edición en [Frege, 1969], pp. 219-270. Traducción inglesa por P. Long y R. White en [Frege, 1979], pp. 203-250 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1918] FREGE, G. (1918). Der Gedanke. Eine logische Untersuchung. *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, *1*, pp. 58–77. Reedición en [Frege, 1966], pp. 30-53; y en [Frege, 1967], pp. 342-362. Traducción inglesa por P. Geach y R. H. Stoothoff en [Frege, 1984], pp. 351-372 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1962] FREGE, G. (1962). *Grundgesetze der Arithmetik*. Hildesheim: Georg Olms.

[Frege, 1964a] FREGE, G. (1964a). *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. ANGELLELLI, I. (Ed.), Hildesheim: Georg Olms. Traducción inglesa por T. W. Bynum en [Frege, 1972].

[Frege, 1964b] FREGE, G. (1964b). *The Basic Laws of Arithmetic. Exposition of the System*. FURTH, M. (Ed.), Berkeley: University of California Press.

[Frege, 1966] FREGE, G. (1966). *Logische Untersuchungen*. PATZIG, G. (Ed.), Göttingen: Vandenhoeck und Rupert.

[Frege, 1967] FREGE, G. (1967). *Kleine Schriften*. ANGELELLI, I. (Ed.), Hildesheim: Georg Olms.

[Frege, 1969] FREGE, G. (1969). *Nachgelassene Schriften*. HERMES, H.; KAMBARTEL, F.; KAULBACH, F. (Eds.), Hamburg: Felix Meiner. Traducción inglesa por P. Long y R. White en [Frege, 1979].

[Frege, 1972] FREGE, G. (1972). *Conceptual Notation and Related Articles*. BYNUM, T. W. (Ed.), Oxford: Clarendon Press.

[Frege, 1976] FREGE, G. (1976). *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. GABRIEL, G.; HERMES, H.; KAMBARTEL, F.; VERAART, A. (Eds.), Hamburg: Felix Meiner. Traducción inglesa por B. McGuinness y H. Kaal en [Oxford: Basil Blackwell, 1980] (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Frege, 1979] FREGE, G. (1979). *Posthumous Writings*. HERMES, H.; KAMBARTEL, F.; KAULBACH, F. (Eds.), Chicago: University of Chicago Press.

[Frege, 1984] FREGE, G. (1984). *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*. MCGUINNESS, B. (Ed.), Oxford: Blackwell.

[Frege, 1996] Frege, G. (1996). *Escritos filosóficos.* Mosterín, J. (Ed.), Barcelona: Cátedra.

[Frege, 2013] Frege, G. (2013). *Basic Laws of Arithmetic. Derived using concept-script.* Ebert, P.; Rossberg, M. (Eds.), Oxford: Oxford University Press.

Otras fuentes

[Arnauld; Nicole, 1662] Arnauld, A.; Nicole, P. (1662). *La logique ou L'art de penser: contenant outre les règles communes, plusieurs observations nouvelles, propres à former le jugement.* Paris: C. Savreux. Traducción castellana de G. Quintás en [Madrid: Alfaguara, 1987] (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Boole, 1854] Boole, G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought.* Cambridge: Macmillan. Reedición en [New York: Dover, 1858] (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Herbart, 1813] Herbart, J. F. (1813). *Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie.* Königsberg: August Wilhelm Unzer. Reedición en [Leipzig: Felix Meiner, 1912].

[Hilbert; Ackermann, 1928] Hilbert, D.; Ackermann, W. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik.* Berlin: Springer.

[Kant, 1781] Kant, I. (1781 –1787). *Kritik der reinen Vernunft.* Riga: Johann Friedrich Hartnoch. Reedición como *Kants Werke. Akademie-Textausgabe. IV. Band* (1. Auflage) - *III. Band* (2. Auflage) en [Berlin: Walter de Gruyter & Co, 1968]. Traducción castellana por P. Ribas en [Madrid: Alfaguara, 1998].

[Kant, 1800] Kant, I. (1800). *Immanuel Kants Logik.* Jäsche, G. B. (Ed.), Königsberg: Friedrich Nicolorius. Reedición en *Kants Werke. Akademie-Textausgabe. IX. Band* [Berlin: Walter de Gruyter & Co, 1923], pp. 1-150. Traducción inglesa por M. Young como 'Jäsche Logic' en [Kant, 1992], pp. 520-640 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Kant, 1992] Kant, I. (1992). *Lectures on Logic.* Young, M. (Ed.), Cambridge: Cambridge University Press.

[Leibniz, 1679] LEIBNIZ, G. W. (1679 ?). Ad Specimen Calculi Universalis addenda. Originalmente no publicado. Edición en [Leibniz, 1999], n. 70, pp. 289-296; y en [Leibniz, 1890], pp. 221-227. Traducción inglesa por G. H. R. Parkinson en [Leibniz, 1966], pp. 40-46.

[Leibniz, 1688] LEIBNIZ, G. W. (1688 –1689?). Fundamenta calculi ratiocinatoris. Originalmente no publicado. Edición en [Leibniz, 1999], n. 192, pp. 917-922; y en [Leibniz, 1890], pp. 204-207. Traducción castellana por J. Echeverría en [Leibniz, 1991], pp. 99-106 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Leibniz, 1765] LEIBNIZ, G. W. (1765). *Oeuvres philosophiques latines & françoises de feu Mr. De Leibnitz.* RASPE, R. E. (Ed.), Amsterdam, Leipzig: Jean Schreuder.

[Leibniz, 1840] LEIBNIZ, G. W. (1840). *Opera philosophica quae exstant latina, gallica, germanica omnia.* ERDMANN, J. E. (Ed.), Berlin: G. Eichleri.

[Leibniz, 1890] LEIBNIZ, G. W. (1890). *Philosophische Schriften*, vol. VII. GERHARDT, C. I. (Ed.), Berlin: Weidmann. Reedición en [Hildesheim: Georg Olms, 1961].

[Leibniz, 1966] LEIBNIZ, G. W. (1966). *Logical Papers.* PARKINSON, G. H. (Ed.), Oxford: Clarendon Press.

[Leibniz, 1991] LEIBNIZ, G. W. (1991). *Antología.* ECHEVERRÍA, J. (Ed.), Madrid: Círculo de Lectores.

[Leibniz, 1999] LEIBNIZ, G. W. (1999). *Sämtliche Schriften und Briefe*, *VI*, vol. 4. Berlin: Deutschen Akademie der Wissenschaft.

[Lotze, 1874] LOTZE, H. (1874). *System der Philosophie*, vol. I: Drei Bücher der Logik. Leipzig: Hirzel. Reedición en [Leipzig: Felix Meiner, 1912]. Traducción inglesa por B. Bosanquet en [Oxford: Clarendon Press, 1884].

[Michaëlis, 1880] MICHAËLIS, C. T. (1880). Rezension: G. Frege, *Begriffsschrift. Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft*, *12*, pp. 232–240. Traducción inglesa por T. W. Bynum en [Frege, 1972], pp. 212-218 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Peano, 1895] PEANO, G. (1895). Recensione: G. Frege, *Grundgesetze. Rivista di matematica*, *5*, pp. 122–128.

[Peirce, 1870] Peirce, C. S. (1870). Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus on logic. *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*, *9*, pp. 317–378.

[Peirce, 1880] Peirce, C. S. (1880). On the Algebra of Logic. *American Journal of Mathematics*, *3*, pp. 15–57. Reedición en [Peirce, 1986], pp. 163-209.

[Peirce, 1883] Peirce, C. S. (1883). The Logic of Relatives. En Peirce, C. S. (Ed.), *Studies in logic. By members of the John Hopkins University*, Philadelphia: John Benjamins, pp. 187–203. Reedición en [Peirce, 1986], pp. 453-466.

[Peirce, 1885] Peirce, C. S. (1885). On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation. *American Journal of Mathematics*, *7*, pp. 180–202. Reedición en [Peirce, 1993], pp. 162-190 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Peirce, 1986] Peirce, C. S. (1986). *Writings of Charles S. Peirce*, vol. 4, 1879-1884. Kloesel, C. J. (Ed.), Bloomington: Indiana University Press.

[Peirce, 1993] Peirce, C. S. (1993). *Writings of Charles S. Peirce*, vol. 5, 1884-1886. Kloesel, C. J. (Ed.), Bloomington: Indiana University Press.

[Reck; Awodey, 2004] Reck, E. H.; Awodey, S. (Eds.) (2004). *Frege's Lectures on Logic: Carnap's Student Notes, 1910-1914*. Chicago: Open Court.

[Russell, 1903] Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

[Russell, 1951] Russell, B. (1951). *The Autobiography of Bertrand Russell*, vol. 1: 1872-1914. London: Allen & Unwin.

[Schröder, 1877] Schröder, E. (1877). *Der Operationskreis des Logikkalkuls*. Leipzig: G. Teubner.

[Schröder, 1880] Schröder, E. (1880). Rezension: G. Frege, *Begriffsschrift*. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, *25*, pp. 81–94. Traducción inglesa por T. W. Bynum en [Frege, 1972], pp. 218-231 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Schröder, 1890] SCHRÖDER, E. (1890). *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logic)*, vol. 1. Leipzig: G. Teubner. Reedición en [Schröder, 1966].

[Schröder, 1891] SCHRÖDER, E. (1891). *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logic)*, vol. 2 (1. Abteilung). Leipzig: G. Teubner. Reedición en [Schröder, 1966].

[Schröder, 1895] SCHRÖDER, E. (1895). *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logic)*, vol. 3. Leipzig: G. Teubner. Reedición en [Schröder, 1966].

[Schröder, 1899] SCHRÖDER, E. (1899). On Pasigraphy. Its present State and the pasigraphic Movement in Italy. *The Monist*, *9*, pp. 246–262.

[Schröder, 1905] SCHRÖDER, E. (1905). *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logic)*, vol. 2 (2. Abteilung). MÜLLER, K. E. (Ed.), Leipzig: G. Teubner. Reedición en [Schröder, 1966].

[Schröder, 1966] SCHRÖDER, E. (1966). *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logic). 3 Bände.* MÜLLER, K. E. (Ed.), New York: Chelsea.

[Tannery, 1879] TANNERY, P. (1879). Compte-rendu: G. Frege, *Répresentation écrite des concepts. Revue Philosophique*, *8*, pp. 108–109. Traducción inglesa por T. W. Bynum en [Frege, 1972], pp. 232-234 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Trendelenburg, 1856] TRENDELENBURG, F. A. (1856). *Über Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik.* Berlin: F. Dümmler. Reedición en [Trendelenburg, 1867], pp. 1-47.

[Trendelenburg, 1867] TRENDELENBURG, F. A. (1867). *Historische Beiträge zur Philosophie*, vol. 3: Vermischte Abhandlungen. Berlin: G. Bethge.

[Überweg, 1857] ÜBERWEG, F. (1857). *System der Logik und Geschichte der logischen Lehren.* Bonn: Adolph Marcus. Traducción inglesa por T. M. Lindsay en [London: Longmans, Green, 1871] (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[van Heijenoort, 1967a] VAN HEIJENOORT, J. (Ed.) (1967a). *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Thought.* Cambridge: Harvard University Press.

[Whately, 1845] WHATELY, R. (1845). *Elements of Logic*. Boston: James Munroe.

[Windelband, 1882] WINDELBAND, W. (1882). Was ist Philosophie?. Edición en [Windelband, 1884], vol. I, pp. 1-54.

[Windelband, 1883] WINDELBAND, W. (1883). Kritische oder genetische Methode?. Edición en [Windelband, 1884], vol. II, pp. 99-135.

[Windelband, 1884] WINDELBAND, W. (1884). *Präludien. Aufsätze und Reden zur Philosophie und ihrer Geschichte*. Freiburg, Tübingen: J. C. B. Mohr. Reedición en 2 volúmenes en [Tübingen: J. C. B. Mohr, 1915] (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Windelband, 1912] WINDELBAND, W. (1912). Die Prinzipien der Logik. En RUGE, A. (Ed.), *Encyclopädie der philosophischen Wissenschaften*, vol. I, Tübingen: J. C. B. Mohr, pp. 1–60.

[Wittgenstein, 1921] WITTGENSTEIN, L. (1921). Logisch-Philosophische Abhandlung. *Annalen der Naturphilosophie*, *14*, pp. 185–262. Traducción inglesa como *Tractatus Logico-Philosophicus* por C. K. Odgen en [London: Kegan Paul, Trench, Trubner & Co, 1922].

Bibliografía secundaria

[Antognazza, 2009] ANTOGNAZZA, M. R. (2009). *Leibniz. An Intellectual Biography*. Cambridge: Cambridge University Press.

[Badesa, 2004] BADESA, C. (2004). *The Birth of Model Theory*. Princeton: Princeton University Press.

[Baker, 2001] BAKER, G. P. (2001). ‘Function’ in Frege’s *Begriffsschrift*: Dissolving the Problem. *British Journal for the History of Philosophy*, *9*, pp. 525–544.

[Baker; Hacker, 1984] BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. (1984). *Frege: Logical Excavations*. Oxford. Blackwell.

[Baker; Hacker, 1987] BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. (1987). Dummett’s Dig: Looking-Glass Archeology. *The Philosophical Quarterly*, *37*, pp. 86–99.

[Baker; Hacker, 1989] BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. (1989). The Last Ditch. *The Philosophical Quarterly*, *39*, pp. 471–477.

[Baker; Hacker, 2003] BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. (2003). Functions in *Begriffsschrift*. *Synthese*, *135*, pp. 273–297.

[Beaney, 1997] BEANEY, M. (Ed.) (1997). *The Frege Reader*. Oxford: Blackwell.

[Beaney, 2007] BEANEY, M. (2007). Frege's use of function-argument analysis and his introduction of truth-values as objects. *Grazer Philosophische Studien*, *75*, pp. 93–123.

[Beaney, 2013a] BEANEY, M. (Ed.) (2013a). *Oxford Handbook of the History of Analytic Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.

[Beaney, 2013b] BEANEY, M. (2013b). Analytic Philosophy and History of Philosophy: The Development of the Idea of Rational Reconstruction. En [Reck, 2013a], pp. 231–260.

[Beaney; Reck, 2005] BEANEY, M.; RECK, E. H. (Eds.) (2005). *Gottlob Frege: Critical Assessments of Leading Philosophers. 4 Volumes*. London: Routledge.

[Blanchette, 2012a] BLANCHETTE, P. (2012a). *Frege's Conception of Logic*. Oxford: Oxford University Press.

[Blanchette, 2012b] BLANCHETTE, P. (2012b). Frege on Shared Belief and Total Functions. *The Journal of Philosophy*, *109*, pp. 9–39.

[Blanchette, 2015] BLANCHETTE, P. (2015). Reply to Cook, Rossberg and Wehmeier. *Journal for the History of Analytical Philosophy*, *3*, pp. 1–13.

[Bloom; Suszko, 1971] BLOOM, S. L.; SUSZKO, R. (1971). Semantics for the Sentential Calculus with Identity. *Studia Logica*, *28*, pp. 77–81.

[Bloom; Suszko, 1972] BLOOM, S. L.; SUSZKO, R. (1972). Investigations of the Sentential Calculus with Identity. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *13*, pp. 289–308.

[Boguslaw, 1971] BOGUSLAW, W. (1971). Wittgensteinian Foundations of Non-Fregean Logic. En D'ANGELO, E.; DEGROOD, D.; RIEPE, D. (Eds.), *Contemporary East European Philosophy*, Bridgeport: Spartacus Books, pp. 231–243.

[Boolos, 1985] BOOLOS, G. (1985). Reading the *Begriffsschrift*. *Mind*, *96*, pp. 331–344 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición). Reedición en [Demopoulos, 1995], pp. 163-181; y en [Boolos, 1998], pp. 155-170.

[Boolos, 1987] BOOLOS, G. (1987). The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic. En THOMSON, J. (Ed.), *On Being and Saying: Essays in Honor of Richard Cartwright*, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, pp. 3–20. Reedición en [Demopoulos, 1995], pp. 211-233; y en [Boolos, 1998], pp. 183-202.

[Boolos, 1990] BOOLOS, G. (1990). The Standard Equality of Numbers. En *Meaning and method: essays in honor of Hilary Putnam*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 261–277. Reedición en [Demopoulos, 1995], pp. 234-254; y en [Boolos, 1998], pp. 202-219.

[Boolos, 1993] BOOLOS, G. (1993). Whence the contradiction? *Aristotelian Society Supplementary Volume*, *67*, pp. 213–233. Reedición en [Boolos, 1998], pp. 220-236.

[Boolos, 1998] BOOLOS, G. (1998). *Logic, Logic, and Logic*. Cambridge: Harvard University Press.

[Boolos; Heck, 1998] BOOLOS, G.; HECK, R. G. (1998). *Die Grundlagen der Arithmetik*, §§ 82-83. En SCHIRN, M. (Ed.), *Philosophy of Mathematics Today*, Oxford: Oxford University Press, pp. 407–428. Reedición en [Boolos, 1998], pp. 315-338; y en [Heck, 2011], pp. 68-89.

[Bynum, 1972] BYNUM, T. W. (1972). Editor's Introduction. En [Frege, 1972], pp. 55–80.

[Bynum, 1973] BYNUM, T. W. (1973). On an alleged Contradiction lurking in Frege's *Begriffsschrift*. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *14*, pp. 285–287.

[Cadet; Panza, 2015] CADET, M.; PANZA, M. (2015). The logical system of Frege's *Grundgesetze*: A rational reconstruction. *Manuscrito*, *38*, pp. 5–94.

[Chateaubriand, 2001] CHATEAUBRIAND, O. (2001). *Logical Forms*, vol. 1: Truth and Description. Campinas: CLE-Unicamp.

[Church, 1956] CHURCH, A. (1956). *Introduction to Mathematical Logic*, vol. I. Princeton: Princeton University Press.

[Cook, 2013] COOK, R. T. (2013). Appendix: How to read *Grundgesetze*. En [Frege, 2013], pp. A1–A42.

[Cook, 2015] COOK, R. T. (2015). Comments on Patricia Blanchette's Book: *Frege's Conception of Logic*. *Journal for the History of Analytical Philosophy*, *3*, pp. 1–10.

[Dathe, 2005] DATHE, U. (2005). Frege in Jena: Academic contacts and intellectual influences. En [Beaney; Reck, 2005], pp. 40–53.

[Demopoulos, 1995] DEMOPOULOS, W. (Ed.) (1995). *Frege's Philosophy of Mathematics*. Cambridge: Harvard University Press.

[Duarte, 2009] DUARTE, A. B. (2009). Lógica e Aritmética na Filosofia Matemática de Frege. Tesis doctoral, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

[Dummett, 1973] DUMMETT, M. (1973). *Frege. Philosophy of Language*. London: Duckworth.

[Dummett, 1981a] DUMMETT, M. (1981a). *The Interpretation of Frege's Philosophy*. London: Duckworth.

[Dummett, 1981b] DUMMETT, M. (1981b). Frege's "kernsätze zur logik". *Inquiry*, *24*, pp. 439–448. Reedición en [Dummett, 1991a], pp. 65-78.

[Dummett, 1984] DUMMETT, M. (1984). An Unsuccessful Dig. *The Philosophical Quarterly*, *34*, pp. 379–401. Reedición en [Dummett, 1991a], pp. 158-198.

[Dummett, 1988] DUMMETT, M. (1988). Reply to 'Dummett's Dig', by Baker and Hacker. *The Philosophical Quarterly*, *38*, pp. 87–103. Reedición como 'Second Thoughts' en [Dummett, 1991a], pp. 199-216.

[Dummett, 1991a] DUMMETT, M. (1991a). *Frege and Other Philosophers*. Oxford: Clarendon Press.

[Dummett, 1991b] DUMMETT, M. (1991b). *Frege: Philosophy of Mathematics*. Harvard: Harvard University Press.

[Ferreirós, 2001] FERREIRÓS, J. (2001). The Road to Modern Logic—An Interpretation. *Bulletin of Symbolic Logic*, *7*, pp. 441–484.

[Ferreirós, 2009] FERREIRÓS, J. (2009). Hilbert, Logicism, and Mathematical Existence. *Synthese*, *170*, pp. 33–70.

[Gabriel, 1996] Gabriel, G. (1996). Frege's 'epistemology in disguise'. En Schirn, M. (Ed.), *Frege: Importance and Legacy*, Berlin: de Gruyter, pp. 330–346. Reedición en [Beaney; Reck, 2005], vol. 1, pp. 359-374 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Gabriel, 2001] Gabriel, G. (2001). Existenz- und Zahlaussage. Herbart und Frege. En Hoeschen, A.; Schneider, L. (Eds.), *Herbarts Kultursystem: Perspektiven der Transdisziplinarität im 19. Jahrhundert*, Würzburg: Könighausen, Neumann, pp. 149–162. Traducción inglesa por C. Kästner en [Beaney; Reck, 2005], vol. 1, pp. 109-123 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Gabriel, 2002] Gabriel, G. (2002). Frege, Lotze and the Continental Roots of Early Analytic Philosophy. En Reck, E. H. (Ed.), *From Frege to Wittgenstein*, Oxford: Oxford University Press, pp. 39–51. Reedición en [Beaney; Reck, 2005], vol. 1, pp. 161-175 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Gabriel, 2013] Gabriel, G. (2013). Frege and the German Background to Analytic Philosophy. En [Beaney, 2013a], pp. 280–297.

[Grattan-Guinness, 1977] Grattan-Guinness, I. (Ed.) (1977). *Dear Russell–Dear Jourdain.* London: Duckworth.

[Haaparanta, 2009a] Haaparanta, L. (Ed.) (2009a). *The Development of Modern Logic.* Oxford: Oxford University Press.

[Haaparanta, 2009b] Haaparanta, L. (2009b). The Relations between Logic and Philosophy, 1874-1931. En [Haaparanta, 2009a], pp. 222–262.

[Heck, 1997] Heck, R. G. (1997). *Grundgesetze der Arithmetik* I §§ 29-32. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *33*, pp. 437–474. Reedición en [Heck, 2012], pp. 51-81; 118-134.

[Heck, 2011] Heck, R. G. (2011). *Frege's Theorem.* Oxford: Oxford University Press.

[Heck, 2012] Heck, R. G. (2012). *Reading Frege's* Grundgesetze. Oxford: Oxford University Press.

[Heck, 2015] Heck, R. G. (2015). Formal arithmetic before *Grundgesetze.* De próxima publicación.

[Heck; May, 2011] HECK, R. G.; MAY, R. (2011). The Composition of Thoughts. *Noûs*, *45*, pp. 126–166.

[Heck; May, 2013] HECK, R. G.; MAY, R. (2013). The Function is Unsaturated. En [Beaney, 2013a], pp. 825–850.

[Heis, 2013] HEIS, J. (2013). Frege, Lotze, and Boole. En [Reck, 2013a], pp. 113–138.

[Heis, 2014] HEIS, J. (2014). The Priority Principle from Kant to Frege. *Noûs*, *48*, pp. 268–297.

[Henkin, 1953] HENKIN, L. (1953). Banishing the Rule of Substitution for Functional Variables. *Journal of Symbolic Logic*, *18*, pp. 201–208.

[Hintikka, 1979] HINTIKKA, J. (1979). Frege's Hidden Semantics. *Revue Internationale de Philosophie*, *33*, pp. 716–722.

[Hovens, 1997] HOVENS, F. (1997). Lotze and Frege: The Dating of the 'Kernsätze'. *History and Philosophy of Logic*, *18*, pp. 17–31.

[Kanterian, 2012] KANTERIAN, E. (2012). *Gottlob Frege. A Guide for the Perplexed*. London: Continuum.

[Kienzler, 2009] KIENZLER, W. (2009). *Begriff und Gegenstand*. Frankfurt: Klostermann.

[Kline, 1972] KLINE, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. 3 Volumes*. Oxford: Oxford University Press.

[Korte, 2010] KORTE, T. (2010). Frege's *Begriffsschrift* as *lingua characterica*. *Synthese*, *174*, pp. 283–294.

[Kreiser, 2001] KREISER, L. (2001). *Gottlob Frege. Leben - Werk - Zeit*. Hamburg: Felix Meiner.

[Kremer, 2000] KREMER, M. (2000). Judgment and truth in Frege. *Journal of the History of Philosophy*, *38*, pp. 549–581. Reedición en [Beaney; Reck, 2005], vol. 1, pp. 375-408.

[Landini, 1996] LANDINI, G. (1996). Decomposition and Analysis in Frege's *Grundgesetze*. *History and Philosophy of Logic*, *17*, pp. 121–139.

[Landini, 2012] LANDINI, G. (2012). *Frege's Notations. What They Are and How They Mean*. New York: Palgrave Macmillan.

[Lewis, 1918] Lewis, C. I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California Press.

[Łukasiewicz, 1931] Łukasiewicz, J. (1931). Ein Vollständigkeitbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls. *Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, *24*, pp. 152–183.

[Łukasiewicz, 1934] Łukasiewicz, J. (1934). Z historii logiki zdań. *Przeglad Filozofiezny*, *37*, pp. 417–437. Traducción inglesa como 'On the History of Logic of Propositions' por S. McCall en [McCall, 1967], pp. 66-87 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Macbeth, 2005] Macbeth, D. (2005). *Frege's Logic*. Cambridge: Harvard University Press.

[McCall, 1967] McCall, S. (1967). *Polish Logic. 1920-1939*. Oxford: Clarendon Press.

[Mendelsohn, 2005] Mendelsohn, R. L. (2005). *The Philosophy of Gottlob Frege*. Cambridge: Cambridge University Press.

[Panza, 2015] Panza, M. (2015). From Lagrange to Frege: Functions and Expressions. En Benis-Sinaceur, H.; Panza, M.; Sandu, G. (Eds.), *Functions and Generality of Logic: Reflections on Dedekind's and Frege's Logicisms*, Heidelberg, Dordrecht: Springer, pp. 59–95.

[Parsons, 1965] Parsons, C. (1965). Frege's Theory of Number. En Black, M. (Ed.), *Philosophy in America*, Cornell University Press, pp. 180–203. Reedición en [Demopoulos, 1995], pp. 182-210.

[Peckhaus, 2004] Peckhaus, V. (2004). Calculus ratiocinator versus characteristica universalis? The two traditions in logic, revisited. *History and Philosophy of Logic*, *25*, pp. 3–14. Reedición en [Beaney; Reck, 2005], vol. 1, pp. 176-190.

[Reck, 2013a] Reck, E. H. (Ed.) (2013a). *The Historical Turn in Analytic Philosophy*. New York: Palgrave Macmillan.

[Reck, 2013b] Reck, E. H. (2013b). Frege, Dedeking, and the Origins of Logicism. *History and Philosophy of Logic*, *34*, pp. 242–265.

[Robbin, 1969] Robbin, J. (1969). *Mathematical Logic: A First Course*. New York: W. A. Benjamin.

[Russinoff, 1987] RUSSINOFF, S. I. (1987). On the Brink of a Paradox? *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *28*, pp. 115–131.

[Sluga, 1980] SLUGA, H. (1980). *Gottlob Frege. The Arguments of the Philosophers.* London: Routledge.

[Sluga, 1984] SLUGA, H. (1984). Frege: the early years. En RORTY, R.; SCHNEEWIND, J. B.; SKINNER, Q. (Eds.), *Philosophy in History: Essays in the Historiography of Philosophy*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 329–356.

[Sluga, 1987] SLUGA, H. (1987). Frege Against the Booleans. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *28*, pp. 80–98.

[Stevenson, 1973] STEVENSON, L. (1973). Frege's Two Definitions of Quantification. *The Philosophical Quarterly*, *23*, pp. 207–223.

[Sullivan, 1991] SULLIVAN, D. (1991). Frege on existential Propositions. *Grazer Philosophische Studien*, *41*, pp. 127–149.

[Sullivan, 2004] SULLIVAN, P. (2004). Frege's Logic. En GABBAY, D. M.; WOODS, J. (Eds.), *Handbook of the History of Logic*, vol. III, Amsterdam: Elsevier North Holland, pp. 659–750.

[Suszko, 1968] SUSZKO, R. (1968). Ontology in the *Tractatus* of L. Wittgenstein. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *9*, pp. 7–33.

[Tarski, 1941] TARSKI, A. (1941). On the Calculus of Relations. *Journal of Symbolic Logic*, *6*, pp. 73–89.

[Textor, 2011] TEXTOR, M. (2011). *Frege on Sense and Reference.* London: Routledge.

[Thiel, 1982] THIEL, C. (1982). From Leibniz to Frege: Mathematical Logic between 1679 and 1879. *Studies in Logic and the Foundation of Mathematics*, *104*, pp. 755–770.

[Thiel, 1995] THIEL, C. (1995). „Nichts aufs Gerathewohl und aus Neuerungssucht“: Die Begriffsscrhrift 1879 und 1893. En MAX, I.; STELZNER, W. (Eds.), *Logik und Mathematic: Frege-Kolloquium Jena 1993*, Berlin: de Gruyter, pp. 20–37. Traducción inglesa por M. Beaney en [Beaney; Reck, 2005], vol. 2, pp. 13-28 (la paginación de las citas hace referencia a esta edición).

[Thiel, 2009] Thiel, C. (2009). Gottlob Frege and the Interplay between Logic and Mathematics. En [Haaparanta, 2009a], pp. 196–202.

[Thiel; Beaney, 2005] Thiel, C.; Beaney, M. (2005). Frege's life and work. En [Beaney; Reck, 2005], pp. 23–39.

[van Heijenoort, 1967b] van Heijenoort, J. (1967b). Logic as Calculus and Logic as Language. *Synthese*, *17*, pp. 324–330.

[Wehmeier, 2015] Wehmeier, K. (2015). Critical Remarks on *Frege's Conception of Logic* by Patricia Blanchette. *Journal for the History of Analytical Philosophy*, *3*, pp. 1–9.

[Wehmeier; Schmidt am Busch, 2000] Wehmeier, K.; Schmidt am Busch, H. C. (2000). Auf der Suche nach Freges Nachlaß. En Gabriel, G.; Dathe, U. (Eds.), *Gottlob Frege - Werk und Wirkung*, Paderborn: Mentis, pp. 267–281. Traducción inglesa por K. Wehmeier en [Beaney; Reck, 2005], vol. 1, pp. 54-67.

[Weiner, 2004] Weiner, J. (2004). *Frege Explained*. Chicago, La Salle: Open Court.

[Wright, 1983] Wright, C. (1983). *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen: Aberdeen University Press.

[Zalta, 2015a] Zalta, E. (2015a). Gottlob Frege. *The Standford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2015 Edition), Zalta, E. (Ed.). `http://plato.stanford.edu/archives/fall2015/entries/frege/`.

[Zalta, 2015b] Zalta, E. N. (2015b). Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic. *The Standford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2015 Edition), Zalta, E. (Ed.). `http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/frege-theorem/`.

Índices

Índice conceptual

Índice de nombres