UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Setor de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Ciências – Física

PEDRO JEFERSON MIRANDA

SOBRE A EMERGÊNCIA E A LEI DE PROPORCIONALIDADE INTRÍNSECA

Ponta Grossa

2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

Setor de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Pós-Graduação em Ciências – Física

PEDRO JEFERSON MIRANDA

SOBRE A EMERGÊNCIA E A LEI DE PROPORCIONALIDADE INTRÍNSECA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências, área de concentração Física, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia

Ponta Grossa

2018

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Miranda, Pedro Jeferson

M672 Sobre a emergência e a lei de proporcionalidade intrínseca/ Pedro Jeferson Miranda. Ponta Grossa, 2018.
189f.

Tese (Doutorado em Ciências - Área de Concentração: Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia.

1.Emergência. 2.Teoria de categorias. 3.Biologia teórica. 4.Teoria de fluxo. I.Guardia, Giuliano Gadioli La. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Doutorado em Ciências. III. T.

CDD: 512.6

TERMO DE APROVAÇÃO

PEDRO JEFERSON MIRANDA

"SOBRE A EMERGÊNCIA E A LEI DE PROPORCIONALIDADE INTRÍNSECA"

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador: Prof. Dr. Giuliano Gadioli La Guardia
Departamento de Matemática - UEPG/PR

Prof. Dr. Antônio Sérgio Magalhães de Castro
Departamento de Física – UEPG/PR

Prof. Dr. Marcelo Firer
Departamento de Matemática – UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
Departamento de Matemática -UFPR

Prof. Dr. Marciano Pereira
Departamento de Matemática - UEPG/PR

Ponta Grossa, 02 de agosto de 2018

Dedico esta tese ao Doutor Angélico, que do alto dos Céus intercede por nós, seus discípulos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelos recursos internos com que me agraciou e me capacitou para a composição desta tese.

Agradeço à minha mãe, Maria Isabel, pelo cuidado e carinho que sempre tem me prestado. Assim como agradeço ao meu padrasto Valderi, pela sua amizade e suporte incondicional.

Agradeço à minha namorada, Laís Amanda Jovine Massalak, pelo amor incondicional e apoio em todos os momentos de alegria e tristeza pelos quais passei.

Agradeço ao Professor Giuliano pela excelente formação matemática que tem me proporcionado. Pela preciosa amizade que tem me presenteado cuja extensão, pretendo eu, seja para toda a vida.

Agradeço ao Dr. André F. Garcia pelos conselhos, incentivos, advertências, suporte e amizade.

Agradeço ao Professor Carlos Nougué, a cujos ensinamentos filosóficos devo, em grande parte, os conhecimentos que me permitiram fundamentar a seção histórica e metafísica desta tese.

Agradeço à Professora Ivana de Freitas Barbola a minha inserção no mundo científico, o apoio que sempre tem prestado e os seus valiosos conselhos.

Agradeço ao meu grande amigo Vinícius Salem que, além de me proporcionar excelente apoio intelectual, tem servido como bastião moral, num mundo compelido pelo pensamento entrópico.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro por meio de bolsas.

Agradeço à Confraria Tomista Pontagrossense, ambiente de refrigério, luz e paz, onde encontrei valiosos elementos para a cultura do espírito, momentos distendidos para o oportuno descanso da mente, e o convívio enriquecedor de seletos amigos.

E finalmente agradeço a todos aqueles colegas e amigos que de algum modo estiveram envolvidos na produção deste trabalho e contribuíram para a sua forma final.

Causa causarum, miserere mei.

Cícero

Resumo

Esta tese tem por principal objetivo formalizar e modelar a emergência e a Lei de Proporcionalidade Intrínseca (LPI). Ambos os conceitos são trabalhados e precisados metafisicamente e, então, matematizados. Tal formalização matemática é realizada por meio da Teoria de Categorias utilizando constructos, functores underlying e a categoria dos conjuntos. A Lei de Proporcionalidade Intrínseca é o conjunto das operações internas e suas propriedades que estão nos objetos de um constructo que compõe uma emergência. A aplicação direta desse resultado ocorre em sistemas biológicos concebidos como todos substanciais vivos. A decomposição de um sistema biológico de diversos modos suscita uma aplicação deste modelo: como é possível que diferentes decomposições de um mesmo sistema gerem categorias com propriedades tão diferentes? Esse fenômeno é modelado e explicado pela aplicação direta da emergência e da LPI. Essa aplicação é mediada por meio de Biologia Relacional concebida pelo biólogo matemático Robert Rosen. Além disso, construímos neste trabalho uma Teoria de Nocautes e a aplicamos em um estudo de caso ecológico.

Palavras-chave: emergência, teoria de categorias, biologia teórica, teoria de fluxo.

Abstract

This thesis has as main aim the formalization and the modeling of the emergence and of the Intrinsic Proportionality Law (IPL). Both concepts are initially worked and metaphysically specified for then, in a second moment, be turned into a mathematical concept. Such mathematical formalization is made by means of Category Theory, utilizing constructs, underlying functors and the category of sets. The Intrinsic Proportionality Law is a set of operations and its properties that are within objects of a construct that composes an emergence. The direct application of this result is made on biological systems conceived as living substantial wholes. The decomposition of such a system, by several ways, evokes an application: how is it possible that different decompositions of the same system generate categories with different properties? This phenomenon is modeled and explained by the direct application of emergence and IPL. Such application is mediated by means of Relational Biology, which was conceived by the mathematical biologist Robert Rosen. Additionally, we also built in this work a Knockout Theory and applied it in an ecological study case.

Keywords: emergence, category theory, theoretical biology, flux theory.

Lista de ilustrações

Figuras

Quadros

Lista de tabelas

Sumário

CAPÍTULO 1. Introdução

Passando sorrateiramente pelas vicissitudes disciplinares do meio acadêmico, esta tese se endereça ao complexo problema científico enunciado no século XIX: a teorização da emergência. Esse problema é pouco discutido atualmente na academia, uma vez que se trata da reconsideração de uma das causas esquecidas pela Modernidade: a Causa Formal. No entanto, e paradoxalmente, poucos são aqueles que não admitem que o todo seja maior do que a soma de suas partes.

Tomado à parte, um ente emergente é aquele no qual seu efeito no todo não advém da relação simples das causas nas partes. Em outras palavras, o ente emergente não é dedutível das partes, mas pressupõe algo das partes. Como poderia assim o ser? Este é, de fato, um problema Kantiano: "Como conhecer sem conhecer a coisa em si?". Para resolver essa querela, primeiramente elucidaremos o motivo pelo qual o estudo de entes emergentes se encontra atualmente fora do horizonte da Ciência Moderna. Em segundo plano, apresentar-se-ão as teorias emergentes até os dias de hoje, de modo a configurar o *status quaestionis*[1]. Por fim, lançaremos mão de uma teoria biológico-físico-matemática para alçar nossos fundamentos para a descrição e formalização do problema. Dessa forma, propomos um tratamento matemático e formal para a emergência de modo a permitir que reinterpretemos outros fenômenos relacionados à luz destes novos resultados.

A primeira dificuldade que devemos contornar é a própria enunciação do problema. Mostraremos que a emergência em si não fora tratada analiticamente, pois se refere a um conceito abstrato e sutil, como o era o antigo phlogiston[2] e calórico dos físicos do século XVII. A solução para o problema do calórico, por exemplo, foi dada com a quantificação da quantidade de calor, ou simplesmente calor. Do mesmo modo, propomos a formalização do que se denomina Lei de Proporcionalidade Intrínseca, que constitui o aspecto empírico direto do fenômeno da emergência. Este procedimento passa por um modelo inicial baseado na teoria de grafos, pela demonstração da limitação dessa teoria e, finalmente, pela sua categorificação. A categorificação é o processo pelo qual um modelo matemático, seja ele qual for, é reescrito em termos da Teoria de Categorias.

---

[1] O estado da investigação. Este conceito é quase sempre confundido com estado da arte.
[2] Substância hipotética que era liberada por corpos durante a combustão.

Antes de adentramos nas disposições gerais dos capítulos, bem como nos objetivos desta tese, enunciaremos algumas advertências ao leitor. Em primeiro lugar, esta tese é o produto de um trabalho cuja metodologia está assentada na Física – principalmente nos métodos de Física Teórica –, mas é acrescida de outras metodologias, donde se justifica sua inserção neste programa de pós-graduação. Em segundo lugar, enfatizamos que em cada capítulo deste manuscrito, utilizaremos uma metodologia científica particular. Isso significa que a linguagem usada será adaptada no mesmo tom desta metodologia. Por exemplo, o Capítulo 2 contém um breve histórico, donde utilizamos o método historiográfico. O Capítulo 4 e 7 são extremamente formais, portanto utilizaremos uma linguagem mais direta e objetiva, a fim de evitar ambiguidades, e assim por diante. Fica evidenciado, com isso, que este trabalho não é exatamente especializado no sentido de se limitar a uma só ciência. Entretanto, é especialista no sentido de lançar mão de conhecimentos muito particulares de diversas ciências, como: Metafísica, Física, Matemática e Biologia.

Considerando tais advertências, o principal objetivo desta tese é formalizar o que se denomina emergência e Lei de Proporcionalidade Intrínseca. Para tanto, organizamos os capítulos que compõe este manuscrito da seguinte maneira.

O Capítulo 2 é constituído de um breve histórico do pensamento racional e científico ocidental e de uma digressão metafísica centrada no conceito de emergência. De modo complementar, são discutidos os princípios metafísicos que devem ser considerados a fim de que o problema central da tese se torne cientificamente tratável e enunciável (*i. e.*, análise apriorística ou análise metateórica). O Capítulo 3 consiste em apresentar um desenvolvimento em parte histórico e em parte conceitual sobre os fenômenos da emergência e da Lei de Proporcionalidade Intrínseca. Objetiva-se, desta forma, estabelecer o *status quaestionis* do problema enunciado pioneiramente no século XIX. No Capítulo 4 apresentamos e operacionalizamos a Teoria de Categorias. Essa teoria é o suporte matemático no qual propomos a formalização da emergência e da Lei de Proporcionalidade Intrínseca. No Capítulo 5 apresentamos e desenvolvemos a Biologia Relacional, que é o crivo empírico que utilizaremos para transladar do fenômeno à teoria. No Capítulo 6 apresentamos uma aplicação direta do capítulo anterior – A Teoria de Nocautes. Neste âmbito, desenvolvemos e aprofundamos o conceito de importância de agentes biológicos e fazemos uma aplicação em um estudo de caso para uma rede de polinizadores estudados nos Campos Gerais do Paraná. O Capítulo 7 concentra o resultado central deste trabalho. Em tal capítulo formalizaremos a emergência e a Lei de Proporcionalidade Intrínseca e, com efeito, os entes emergentes. Por fim, o Capítulo 8 compreende uma síntese de todos os capítulos a fim de organizar a contribuição definitiva desta tese de doutorado.

1.1. Objetivos

O objetivo principal desta tese é a formalização da emergência e da Lei de Proporcionalidade Intrínseca. Para que este objetivo seja de fato alcançado, organizamo-nos em torno dos seguintes objetivos secundários:

a) Discernir o motivo histórico pelo qual o fenômeno da emergência é pouco estudado na academia. Delinear, com base no histórico apresentado, a metafísica subjacente à Ciência Moderna e sua relação com o estudo da emergência. Enunciar um postulado que estabelece o critério apriorístico desta tese.

b) Estabelecer o *status quaestionis* sobre o assunto emergência de modo a posicioná-lo no seu nicho científico. Descrever sucintamente as teorias mais recentes com respeito à emergência. Construir uma síntese das teorias emergentistas com base no critério apriorístico estabelecido nesta tese.

c) Apresentar, desenvolver e operacionalizar a Teoria de Categorias com vistas ao estudo da Biologia Relacional e à formalização da emergência e da Lei de Proporcionalidade Intrínseca.

d) Apresentar e desenvolver a Biologia Relacional. Criar uma Teoria de Fluxo de Informação de modo a possibilitar identificar entes emergentes pela medida da irredutibilidade.

e) Desenvolver uma Teoria de Nocautes em diagramas de bloco abstratos, de modo a fundamentar uma medida universal de importância biológica. Aplicar as medidas de irredutibilidade e de importância biológica em um estudo de caso.

f) Matematizar o conceito de emergência e de Lei de Proporcionalidade Intrínseca. Provar novos resultados provenientes desta formalização no que concerne aos fenômenos biológicos e os entes emergentes.

CAPÍTULO 2. Contexto e alcance

Este capítulo tem como primeiro objetivo apresentar o desenvolvimento do pensamento racional desde sua origem na Grécia Antiga até a criação da Ciência Moderna – em que a última perdura como a concepção contemporânea de ciência. Para isso, utilizaremos como fio condutor o conhecimento pelas causas – que é o sentido *latu* de ciência, como concebida por Aristóteles[3]. O desenvolvimento do pensamento racional encerra-se diametralmente no histórico do uso das causas como critério científico. Defendemos que todo cientista é alguém que busca conhecer um fenômeno por meio de causas. Esse intento é fundamental para esta tese, pois o objeto central da mesma depende da reconsideração de uma causa esquecida na Ciência Moderna: a Causa Formal.

É importante notar que uma discussão sobre causalidade não pode se dar no âmbito das ciências particulares, uma vez que as mesmas pressupõem tais conceitos aprioristicamente. Desta maneira, iremos lançar mão de uma digressão metafísica para discutir e mostrar em que medida que a desconsideração da Causa Formal dentro de uma ciência – seja ela a Física, a Biologia ou a Matemática – impossibilita o estudo da emergência como um fenômeno cientificamente tratável. A partir desta digressão, iremos estabelecer qual seja o fundamento apriorístico no qual esta tese se assenta.

2.1. Breve histórico

A fim de que nos refiramos precisamente à emergência e à Lei de Proporcionalidade Intrínseca, é forçoso que nos atenhamos no desenvolvimento do próprio pensamento racional – isto é, no desenvolvimento do pensamento científico[4]. Sabe-se com grande suporte historiográfico que o marco, ou seja, o início do uso da razão de modo consciente ocorre com Tales de Mileto (624-545 a. C.), na Jônia. O filósofo jônico, Tales, é de fato o primeiro a propor uma solução ao problema da matéria primitiva. Qual seja este problema: de quê as coisas são feitas. Ao observar a necessidade primeira para os homens, animais e plantas, Tales

[3] Para destrinchar esta questão, que parece algo muito elusivo, preparamos uma nota que se encontra compilada no Anexo D, ao fim deste manuscrito.

[4] Não faremos nenhuma distinção entre filosofia e ciência, uma vez que ambas se referem ao mesmo movimento humano: o conhecimento pelas causas.

elenca a Água[5] como o elemento principiante da matéria primitiva. Com efeito, com essa proposta, o jônico inaugura a História da Filosofia Ocidental. Diz-se isso, pois, diferentemente dos *poiités* e *technítes*[6] – que explicavam tudo em termos de mitos, lendas e procedimentos dos quais não conheciam os princípios –, Tales está a vislumbrar o que mais tarde Aristóteles irá descobrir e precisar como a Causa Material[7] (LLOYD, 1970, p. 16-23) (NERY, 1936, p. 33-34) (ARISTÓTELES, (335 a 323 a. C.)/2012, p. 48, 83-102)[8] (AQUINO, 1272/2016, p. 66).

Na mesma esteira seguiam os contemporâneos e herdeiros do pensamento de Tales. Anaximandro de Mileto (588 a 524 a. C.) indagara: por que a Água e não outra substância? Influenciado pela obra da Hesíodo, a Teogonia[9], o milésio nota que antes da existência da Terra e do Céu, Hesíodo se refere a uma matéria indeterminada, o chamado Caos. Desta maneira, compunha sua teoria material das coisas pelo princípio que denominara *ápeiron*, ou seja, a matéria maximamente indeterminada. Nota-se que Anaximandro diverge de Tales quanto à definição de matéria primitiva, mas corrobora com o fato de que as coisas têm um princípio material em comum.

Anaxímenes de Mileto – contemporâneo de Anaximandro – conclui que este esteve adentrando terrenos muito abstratos. Guardando algo da generalidade do *ápeiron*, conclui que a matéria primeira é o Ar. Tudo quanto existe, desta maneira, é produto da condensação e rarefação do Ar. Heráclito de Efeso (535 a 465 a. C.) capta de seus antecessores o fato de escolherem os elementos primordiais pela sua mobilidade e capacidade de gerar a variabilidade em outros seres. Com efeito, conclui que não poderiam ser nem a Água nem o Ar os elemento primordiais, mas o Fogo. Tal assertiva ocorre com a observação de que o Fogo é o elemento maximamente ornado de mobilidade e simultaneamente material, rejeitando o *ápeiron* de Anaximandro. Sabemos que estes filósofos-fisicos não puderam alçar-se além do plano puramente material e sensível, mas para sua época, tais conjeturas foram avanço incomensurável, pois estavam a tatear o princípio pelo qual as coisas são feitas (LLOYD, 1970, p. 16-23) (NERY, 1936, p. 35-36).

Não tardou para que surgisse Empédocles de Acragas (495 a 435 a. C.) e sintetizasse um sistema Elemental que considerava a Água, o Ar, o Fogo e incluía a Terra, o elemento da

[5] O termo água aqui se encontra em maiúsculo, pois indica não a substância água no sentido usual, mas uma Água Elemental, ou seja, uma substância sutil.
[6] Ênfase nas palavras gregas que correspondiam ao que hoje podemos aproximadamente entender como poetas e pragmáticos, classes predominantes na época de Tales.
[7] De quê as coisas são feitas.
[8] Note que intervalo de anos dos escritos da maturidade de Aristóteles, nos quais se inclui a Metafísica, varia de 335 a 323 a. C., daí a indicação na citação.
[9] Uma cosmogonia mitológica.

estabilidade. Nota-se que a essencial diferença entre Empédocles e outros pré-socráticos é a mudança de um sistema de um único elemento primordial para um sistema de quatro elementos primordiais irredutíveis entre si no sentido de que um não poder gerar o outro. Adversamente, argumentava e dava mais ênfase na afirmação de que tudo que existe é produto de uma combinação desses elementos por meio de misturas fortuitas. Isso implica que as coisas vêm a ser por si mesmas. Apesar de parecer incoerente, essa ideia não incluía as causas pelas quais os seres vêm a ser ou deixam de ser[10]. Faltavam-lhe os princípios pelos quais as coisas se organizavam. Anaxágoras de Clazômenas (500 a 428 a. C.) observa este erro quando afirma que não é possível que os princípios elementais tenham organizado a si próprios. Com efeito, defendia que é necessária a existência de um *noûs*[11] para dar forma às matérias primordiais elementais nas diversas coisas existentes. Note-se que, aqui, Anaxágoras está a vislumbrar a Causa Formal[12] e, por conseguinte, a Causa Eficiente[13] e Causa Final[14]. No entanto, tais causas serão apenas cabalmente descobertas e precisadas por Aristóteles (ARISTÓTELES, (335 a 323 a. C.)/2012, p. 83-102). Entrementes, tomando a ideia de Empédocles e elevando-a em número, chega-se a uma teoria material cética da realidade, em que o número dos elementos primordiais é ilimitado. Demócrito de Abdera (460 a 370 a. C.) é o proponente dessa teoria Elemental. Em sua concepção materialista – onde o universo é uma dualidade de Matéria e Vácuo –, a causa do movimento dos átomos é o próprio Vácuo. A seu modo, esta concepção recua ao pensamento de Anaximandro e Anaxímenes. Em outras palavras: considera-se novamente o infinito e o indeterminado como base para a formação de tudo quanto existe por meio da condensação e rarefação, mas resguardando-se do abstrato *ápeiron*. Por fim, é com Demócrito que se encerram as tentativas racionais de explicar o movimento por meio de princípios e suas consequências. A próxima fase no pensamento histórico é, em verdade, uma decadência. Entramos, pois, na época sofística (NERY, 1936, p. 54-62).

A época sofística foi marcada por formadores de opinião que lançavam mão de artifícios retóricos para que ganhassem anuência de um público particular. Isso significa que a preocupação com a verdade das coisas – a preocupação científica demonstrada pelos pré-socráticos –, dá lugar ao malabarismo de palavras vãs. Não entraremos em mais detalhes sobre essa época, só citaremos o maior de seus representantes e sua máxima: Protágoras de

---

[10] Em termos filosóficos: da geração e da corrupção.
[11] Uma enteléquia, uma forma, uma ordem, um arquétipo.
[12] Aquilo que a coisa é.
[13] Aquilo pelo qual a coisa é.
[14] Aquilo para o qual a coisa é.

Atenas (480 a 410 a. C.) é considerado o maior sofista de todos os tempos; sua atuação profissional baseava-se na seguinte assertiva “o homem é a medida de todas as coisas”. Neste âmbito, a verdade era apenas um estado fugaz proveniente de quem assim o julgasse, nada se relacionando com a realidade, mas com a *doxa*[15] (PLATÃO, 385 a. C./2007).

O sofismo teve o início de seu fim com Sócrates de Alopécia (470 a 399 a. C.), munido de sua maiêutica[16] e ironia, destronizava os faróis da *doxa*, ou seja, os sofistas. Com efeito, nascia uma forte dualidade entre *philosophia*[17] e *doxa*. A querela entre estes dois movimentos encontra seu fim com a filosofia sendo vencedora. Não é pouco evidente que assim o seja, pois a filosofia, ou ciência, é pautada na genuína busca pela verdade. Neste sentido, Sócrates destrói pessoalmente o sofismo por meio de diálogos abertos ao público. Sabe-se que nunca deixara nenhum escrito, mas que um dos melhores de seus discípulos, Platão, sintetizara por escrito o melhor de seus diálogos. Mas filtremos todo o contexto para obtermos o ganho científico proporcionado por Sócrates. Pode-se dizer, sem receio de errar, que Sócrates abre o caminho para a real Filosofia (*i. e.*, Ciência): a que conduziria a Aristóteles. Com efeito, deu a primeira prova, ainda que imperfeita, da existência do *noûs* de que falava Anaxágoras. Mas acima de tudo, Sócrates lança os fundamentos da Lógica por meio de sua prática maiêutica, fundamentos estes que serão aperfeiçoados e cingidos por Aristóteles (NERY, 1936, p. 75-85). A Lógica compõe parte do conhecimento dialógico imorredouro do qual hoje sempre fruímos, seja nas ciências, nas matemáticas ou na produção técnica.

Tem-se notícia de Sócrates pelos escritos denominados Diálogos de Platão (427 a 347 a. C.). Platão é nativo de Atenas, fundou a Academia Platônica. Conhecido por ser o primeiro a alcançar alguns dos princípios da Metafísica, tratou de temas mais voltados à filosofia moral e ao mundo das Formas Eternas, vulgarmente conhecido como o Mundo das Ideias, isto é, *eidos*[18]. Para ele, toda forma existe enquanto substância mesma, e existia onde ele denominara sobrecéu, ou Hiperurânio. Seu realismo exacerbado levou-o a esta conclusão; não só por isso, mas também por ser, sem embargo, um mau lógico (NERY, 1936, p. 86-106) (AQUINO, 1272/2016, p. 117-134).

O mais talentoso dos alunos de Platão foi Aristóteles de Estagira (384 a 322 a. C.). Rompendo com o realismo extremado de seu mestre, funda o Liceu e alcança a Filosofia por

---

[15] Opinião pouco provável.
[16] Arte de parir homens, de trazê-los à luz.
[17] Atribui-se a criação deste termo a Pitágoras de Samos. Indica o amor, ou amizade, a sabedoria.
[18] Forma.

antonomásia[19]. Em primeiro lugar corrige o erro de Platão, considerando que as formas não podem estar separadas das coisas. Redescobre, define e delimita as quatro causas pelas quais as ciências devem se alçar. Quais sejam estas causas: a material, a formal, a eficiente e a final. Recebendo a herança dialética de Sócrates e Platão, escreve seu Órganon, que é a Lógica no sentido amplo, mas que se compõe da *Praedicamenta*, da *Peri Hermeneias*, da *Analytika priora*, da *Analytika posteriora*, da Tópica e das Refutações Sofísticas (ARISTÓTELES, (335 a 323 a. C.)/2010). Além destas obras dialéticas e lógicas no sentido estrito, cabe adicionar uma Retórica (ARISTÓTELES, (335 a 323 a. C.)/2013) e uma Poética (ARISTÓTELES, (335 a 323 a. C.)/2011) que fecha o quadro dos quatro discursos de Aristóteles (CARVALHO, 2013). Em especial, essa obra monumental sobrevive e tem profunda relevância atual. Indo além, Aristóteles compõe um sistema gnosiológico onde o conhecimento é construído com base nos sentidos, ou seja, inaugura e estabelece o critério empírico de todas as ciências. Com efeito, estabelece os critérios da jurisprudência, do mecanismo da prova lógica, do método indutivo e dos princípios do conhecimento. Todos estes pormenores podem ser considerados aplicações diretas do Método da Análise de Discurso. Chegando ao auge de seu pensamento, elabora a Metafísica, ciência por antonomásia. Estabelece o primado da substância enquanto aquilo que subsiste em si e do ente enquanto aquilo que é. Define os polos intelectuais de Matéria e da Forma, por conseguinte de Ato e Potência e por fim, das causas gerais do ser, como acima descritas. Além do esclarecimento da Análise de Discurso e da Metafísica, lança as sementes nas quais estão incluídas as ciências especiais, quais sejam: a Física, a Química, a Biologia e a Psicologia. Com efeito, dir-se-á pelos séculos dos séculos que Aristóteles é O Filósofo (NERY, 1936, p. 108-147) (ARISTÓTELES, (335 a 323 a. C.)/2012) (ARISTÓTELES, (335 a 323 a. C.)/2010).

Depois da morte de Aristóteles, seus discípulos divergiram de seu esforço racional para entender e descrever a natureza por meio do conhecimento das causas. Segue-se, então, a segunda grande decadência do pensamento ocidental. Esta decadência vem precedida de uma renúncia geral às ciências básicas e um apreço às ciências do *agere*[20]. Para ilustrar tal movimento, parafrasea-se Aristipo: “Para quê as matemáticas, se elas não falam nem do bem nem do mal?”. Seguindo na mesma esteira, florescem as escolas estoicas e epicuristas, que estão pouco preocupadas com o estudo da natureza – a não ser dela tirar alguns pressupostos –, mas preocuparam-se em criar doutrinas de estilos de vida de acordo com certas ideias sobre a felicidade (NERY, 1936, p. 148-164).

---

[19] Por excelência.
[20] Do bem agir, a saber: a ética, a econômica e a política.

Em se tratando do *Corpus Aristotelicum*[21], faz-se necessário uma pequena digressão sobre sua história, em particular, sobre a época ressaltada no ponto arquimédico entre a Alta e a Baixa Idade Média (séc. XI). É quase certo que a irrecuperável perda de boa parte da obra de Aristóteles deva-se ao incêndio acometido sobre a biblioteca de Alexandria, ocorrido por volta de 200 d. C.. Aproximadamente em 50 a. C., Andrônico de Rodes organiza a obra aristotélica e a leva a Roma. No entanto, devido à divisão do Império Romano no ano 345 d. C., a obra foi levada de Roma para Alexandria. Na Alexandria egípcia, – sob os cuidados do Império Romano do Oriente, ou seja, bizantino – o *Corpus Aristotelicum* fora traduzido para outras línguas semíticas, como o hebraico e o árabe. E, após longos séculos, foi apenas no século XII que as obras de Aristóteles voltam ao Ocidente, em especial, devido à reconquista da Península Ibérica pelas Cruzadas Cristãs. Faz-se nota de exceção ao Órganon, que se manteve no Ocidente e foi comentado por Agostinho (354-430) e Boécio (480-524) (ARISTÓTELES, (335 a 323 a. C.)/2010, p. 17-33). De fato, o retorno destas obras se deu pela sua paulatina tradução e comentários realizados por Alberto Magno (1193-1280) e Tomás de Aquino (1225-1274), em especial o último[22]. Com os ensinamentos de *Il Filosofo*[23], o Aquinate alça altos voos na Metafísica e nas suas ciências subalternas, ajudando a compor, desta maneira, um sistema pedagógico único: a escolástica e a filosofia tomista, que constitui a síntese dos pensamentos de Platão, Aristóteles e Agostinho. Especificamente, Tomás sintetiza a Teoria da Participação de Platão, a Teoria Aristotélica da Substância e a *Ratio-Fidei* inaugurada por Agostinho. A ordenação das ciências às suas devidas causas volta ao quadro do pensamento científico. Além disso, a lógica e dialética ganham grande força neste período (NERY, 1936, p. 213-267).

Após a morte de Tomás de Aquino, o que sucede é uma decadência intelectual; os motivos são diversos e complexos, desde disputas políticas até problemas educacionais. Em suma, pode-se afirmar com segurança que o principal motivo dessa decadência é a incapacidade da geração de tomistas pós-Tomás de alcançá-lo e desenvolvê-lo. Isso implicou em uma progressiva degeneração do pensamento, cuja consequência, já nos séculos XIV a XVI, é dupla: por um lado o pietismo, isto é, a negação de toda e qualquer ciência; e por outro lado o mecanicismo e materialismo filosófico que iram lançar as sementes da Ciência Moderna. De modo geral, o último fruto desta decadência resultou na negação da Física Geral e da Metafísica, encolhendo-se na matematização da cosmologia – ou seja, da física especial –

[21] O conjunto da obra de Aristóteles.
[22] Fizemos um salto histórico de aproximadamente 800 anos, pois estamos a acompanhar o fio condutor do *Corpus Aristotelicum.*
[23] O Filósofo.

criando assim o que é conhecido como *ciência média*[24] (ABBAGNANO, 2012, p. 891) (GRANT, 1996, p. 168-205).

É importante notar que a dita ciência média não é problema, uma vez que trouxe grandes contribuições para a História do Pensamento Ocidental. A dificuldade científica é trazida pelo materialismo filosófico, as causas Formal e Final são desconsideradas nesta escola de pensamento filosófico. Isso implica que seu fruto – a ciência média – é a ciência da Causa Material e da Causa Eficiente, conquanto esta esteja subsumida naquela. Este pensamento tem suas raízes ainda na Idade Média (BOCCALETTI, 2016, p. 25-57), com diversos filósofos argumentando sobre o que vem a ser chamada Teoria do Ímpeto. Esta teoria tem como seu principal representante Joannes Buridanus (1300-1358). No entanto, se formos ainda mais a fundo, tem sua pré-concepção com Alberto Magno em sua *Opera Omnia*:

> *"Todo movimento é proveniente da vitória de uma força motiva sobre o movente quando esta força opera; é necessário que a potencialidade passiva da coisa movida seja proporcional a ela."* [25] (MAGNO, 1256/1890, p. 33)

Aos familiarizados com a Física Newtoniana, a citação direta de Alberto Magno é quase que como uma descrição da Segunda Lei de Newton. Para efeito de comparação, vamos a ela:

> *"Um força imprimida é uma ação exercida sobre um corpo a fim de alterar seu estado, seja de repouso, seja de movimento uniforme em linha direita (reta)."* [26] (NEWTON, 1726/1871, p. 2)

Talvez esta seja uma das melhores evidências, além das historiográficas (GRANT, 1996, p. 127-167), de que muito da Física Newtoniana já estava incluída na física dos escolásticos. Apesar desta grande semelhança, é um abismo a diferença entre estas duas "físicas" em termos de suas subjacentes metafísicas. Isso se dá pelo nascimento do materialismo filosófico que irá redundar no mecanicismo (ABBAGNANO, 2012, p. 755-756). Alguns expoentes do mecanicismo são: Copérnico (1473-1543), Galileu (1564-1642), Kepler (1571-1630), Descartes (1596-1650) Newton (1643-1727) e Hume (1711-1776). De modo geral, o mecanicismo progride enormemente, e lança as bases para a Mecânica Clássica de

[24] É o que hoje nos referimos como Física.
[25] "*Omnis motus provenit es virtutis moventis victoria super móbile, et cum illa virtus movei, oportet potentiam passivam eius, quod movetur, sibi esse proportionalem.*"
[26] "*Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.*"

que hoje temos notícia, além das grandes contribuições no âmbito da eletricidade e do magnetismo, estas, posteriormente sintetizadas por Maxwell (1831-1879).

Note-se que do século XVI até meados do século XX, a Física – agora a tomando no sentido moderno – é a Ciência Moderna por antonomásia, tanto pela descrição de diversos fenômenos como pela sua capacidade preditiva. No entanto, esta mesma Física Moderna encontra dupla limitação: uma já no início do século XX, e outra na qual estamos atualmente vivenciando. A primeira trata-se da Mecânica Quântica, que não pode ser completamente entendida em termos clássicos. A segunda é a irredutibilidade dos fenômenos de vida, âmbito este que esta tese se encontra.

Entrementes, recuando no período do século XVII ao século XIX, historiadores naturais[27] buscavam harmonizar esta nova física com os fenômenos de vida. Desta tentativa, surgem duas escolas de pensamento: os fisicalistas e os vitalistas. O fisicalismo é a doutrina filosófica na qual tudo que existe pode ser explicado pela Física Clássica, seu maior expoente é Neurath (ABBAGNANO, 2012, p. 539). Por outro lado, o vitalismo é a doutrina filosófica na qual se alega que é impossível uma investigação científica sobre a vida, pois tudo que nela ocorre é irredutível; Louis Pasteur (1822-1895) foi um famoso vitalista (ABBAGNANO, 2012, p. 1201-1202).

É neste contexto de tensão entre vitalismo e fisicalismo que nasce – ao menos de modo explícito – o conceito de emergência (O'CONNOR e WONG, 2015). Emergentistas dos séculos XVIII e XIX se encontram epistemologicamente no meio termo entre estas duas filosofias. Ou seja, rejeitam quaisquer substâncias abstratas – conquanto sejam empiricamente inacessíveis –, mas aceitam que existem certas qualidade e processos que são irredutíveis às partes.

O primeiro a dar um significado filosófico à emergência foi George Henry Lewes (1817-1878)[28] em 1875:

> *"Thus, although each effect is the resultant of its components, the product of its factors, we cannot always trace the steps of the process, so as to see in the product the mode of operation of each factor. In this latter case, I propose to call the effect an emergent."* [29] (LEWES, 1875, p. 368)

---

[27] Pode-se, com ressalvas, considerá-los biólogos.

[28] Embora John Stuart Mill – precursor de Lewes - não tenha cunhado o conceito de emergência, utiliza-o por meio de outras palavras: as leis heteropáticas.

[29] "Assim, embora cada efeito seja resultante de sua componente, o produto de seus fatores, não podemos sempre traçar os passos do processo, de modo a ver no produto a forma de operação de cada fator. No último caso, eu proponho denominar o efeito um emergente."

Desta inicial definição, muitos outros pensadores ornaram suas teorias com variações da emergência, seja em sentido epistemológico ou ontológico. Fato é, que neste contexto histórico, muito se discutia sobre a irredutibilidade das propriedades dos sistemas vivos. Em especial, são notáveis três autores (O'CONNOR e WONG, 2015): John Stuart Mill (1806-1873), Charlie Dunbar Broad (1887-1971) e Samuel Alexander (1859-1938). As teorias destes três serão discutidas no próximo capítulo, onde aprofundaremos o conceito de emergência, dado que é o tema no qual surge nosso objeto de estudo.

Objeto este que se trata da Lei de Proporcionalidade Intrínseca (SANTOS, 2001, p. 76), nascida da influência de muitas escolas filosóficas, tem suas raízes na Teoria Platônica da Participação desenvolvida e aprimorada por Mário Ferreira dos Santos (SANTOS, 1958, p. 56-58). Mário (1907-1968) é um filósofo brasileiro, nascido em Tietê, formulador de um sistema filosófico denominado Filosofia Concreta. Com isto, encerramos este breve histórico que esboça o desenvolvimento, cumes e quedas nos quais passou o pensamento ocidental, em especial, a metafísica.

2.2. Digressão metafísica

2.2.1. Do ângulo da Ciência Moderna

Iremos deliberar neste ponto o que a tradição filosófica acima arrolada trouxe em termos de desenvolvimento do pensamento metafísico, fundamento de qualquer ciência, seja antiga ou moderna. Isto é especialmente evidente àquele que atentar ao fato de que toda ciência pautada em algo existente, ou seja, no ente; pauta-se, sem embargo, no metafísico[30]. Em primeiro lugar, note-se que o fio condutor deste breve histórico é o enfoque que damos às causas que fundamentam as ciências, uma vez que Ciência é o conhecimento pelas causas (ARISTÓTELES, (335 a 323 a. C.)/2009, p. 23).

Aos que argumentam em favor de uma ou de outra formulação moderna do que seja Ciência, convidamos que dirijam a atenção ao Método Científico Cartesiano (DESCARTES, 1637/2009), o qual é universalmente aceito como premissa a todas estas formulações. Neste método, Descartes estabelece uma metafísica merológica, ou seja, reducionista; em que o

[30] A metafísica é a ciência por antonomásia, pois trata do ente enquanto ente. Seja o ente definido como aquilo que é; o ser é o juízo mais universal que podemos fazer acerca de qualquer coisa, daí a máxima abrangência dessa ciência.

estudo exaustivo das partas irá, invariavelmente, conduzir ao conhecimento do todo. Este tipo de universo de discurso é adequado para certos sistemas – aqueles nos quais o todo é redutível às partes –, em especial, sistemas inanimados.

No entanto, tem-se notícia de sistemas denominados resistentes à redução cartesiana, pois os estados do todo substancial[31] são irredutíveis à substancialidade das partes. Os fenômenos que envolvem viventes (*i. e.*, animados) são em especial deste tipo. A título de exemplo, tomemos um conjunto de átomos de alguns elementos, e em seguida, indague-se: é possível deduzir – apenas por meio do conhecimento dos átomos em si mesmos –, as propriedades e funções de uma célula? De fato não o é, pois é necessário que tenhamos notícia empírica do que seja uma célula para que possamos utilizar o conhecimento dos átomos para entendê-la. De outro modo, é possível por meio do conhecimento celular deduzir todo o funcionamento orgânico de um organismo? Novamente, *mutatis mutandis* recai-se na mesma dificuldade.

Em linhas gerais, um cientista está sempre a investigar todos (*i. e*, coisas compostas por partes). Temos notícia de que os todos se dividem em três tipos principais: todos de ordem, todos arbitrários e todos substanciais. O critério de diferenciação destes é o modo pelo qual suas partes interagem – ou mesmo combinam-se como geradoras de causas –, em detrimento deste mesmo todo. Os todos de ordem são aqueles compostos de partes naturais que têm operações próprias independentes do próprio todo, ou de outras partes, que compõe este mesmo todo. Isto se dá em sistemas inorgânicos como sólidos, líquidos, gases, sistemas mineralógicos, formações rochosas, planetas inteiros (conquanto não se considere neles a vida), ou mesmo o universo físico. Os todos arbitrários são ontologicamente equivalentes aos todos de ordem, mas diferente pelo fato de serem artificiais, ou seja, depende de uma deliberação humana para compô-los. É deste tipo qualquer coleção de entes escolhidos por meio de um critério, seja ele qual for. Por fim, os todos substanciais se diferenciam pelo fato de suas partes possuírem suas operações próprias totalmente determinadas pelo todo. Exemplifique-se: o todo substancial que é um animal e suas partes, os órgãos – ou mesmo células, tecidos e sistemas orgânicos que o constituem –, são deste tipo. Qualquer outro ser vivente, invariavelmente, assim o é (NOUGUÉ, 2015, p. 40-41). Do ponto de vista metafísico, a ciência cartesiana ignora os todos substanciais, uma vez que concebe todas as coisas em termos de uma união fortuita de partes – em especial, de átomos. Isso implica que

---

[31] Entenda-se substância não no sentido químico, mas no sentido de completude corpórea.

no âmbito desta perspectiva, os todos ou são do tipo natural ou artificial – ou seja, de ordem ou arbitrários.

O estudo analítico dos todos substanciais é um problema epistemológico para a ciência cartesiana, uma vez que a metafísica em que esta se encontra aninhada é reducionista (ABBAGNANO, 2012, p. 984). A Biologia Moderna herdou o reducionismo cartesiano por influência direta da Física Clássica. A Biologia descobre e descobriu coisas, mas no âmbito das propriedades coletivas, ou seja, das propriedades redutíveis. Entrementes, existem dois traços metodológicos que são característicos neste universo reducionista: o critério empírico de constatação de uma teoria e o critério estatístico de um teste de hipóteses. Estas duas características escondem um motivo epistemológico em seu âmago. A Ciência Moderna é empírica (ABBAGNANO, 2012, p. 377-383) – no sentido experimental e observacional –, pois alberga em algum grau uma ideia intuitiva e sutil dos todos substanciais. Exemplifique-se: alguém interessado em estudar tratamentos de uma nova substância química em certa espécie de planta, deve, em primeiro plano, conhecer a estrutura química do produto. Em segundo plano, deve testar a resposta celular a esta substância; e, por fim, deve verificar a resposta individual (*i. e.*, da planta) da substância.

É paradoxal que ao mesmo tempo em que uma ciência que se diz reducionista necessite confirmação empírica em muitos graus organizacionais para um único efeito. Se os fenômenos fossem realmente redutíveis às partes, bastar-lhe-ia conhecer os efeitos nas partes para deduzir o efeito no todo. Mas, na prática, não é assim que se procede, pois todo bom cientista experimental sabe intuitivamente que alguma relação especial[32] pode haver entre as partes de modo a gerar um efeito não esperado (*i. e.*, não dedutível) que esteja no todo, mas que não se verifica nas partes.

Assim, alguém que queira testar uma teoria científica no âmbito reducionista, terá que particionar seus experimentos e testes estatísticos o quanto puder para obter um resultado cientificamente coerente e preciso. Com o conjunto de seus resultados, busca “cercar” o problema sobre o qual se debruçou. Ainda sobre a universalidade do uso da estatística nas ciências (ABBAGNANO, 2012, p. 425-426), queremos aduzir sua motivação – que como no caso do critério empírico –, está associada a uma ideia natural e sutil dos todos substanciais. Quando se realiza um teste de hipóteses – em especial no âmbito de sistemas vivos –, deseja-se obter o resultado que melhor expresse a totalidade do fenômeno – ao menos daquilo que eles têm em comum. Em outras palavras, deseja-se descobrir o que naquele conjunto de

[32] No próximo capítulo – ao estudar os conceitos de J. S. Mill –, precisaremos esta relação ao nos referir às leis heteropáticas.

observações é mais essencial[33] e mais acidental[34]. Ou seja, o que é universal e o que é casual. Iremos ver mais adiante que esta investigação de fato é uma vontade frustrada[35] de identificar no fenômeno aquilo que denominamos Lei de Proporcionalidade Intrínseca.

Mas antes de adentrarmos neste conceito, é necessário que façamos uma discussão em torno do tema das causas. Uma vez que o modo com que a consideração ou desconsideração de algumas delas afete diretamente no modo de operação nas ciências. Mas como advertência, deixamos notar que não estamos de modo algum criticando o critério empírico e o estatístico no uso das ciências. Só analisamos alguns dos motivos pelos quais estes critérios foram incorporados no estudo dos todos substanciais.

2.2.2. Do ângulo das causas

Ao retornarmos nossa atenção ao breve histórico que proporcionamos anteriormente, fica claro que algumas vezes nos referimos a declínios do pensamento metafísico na história. O primeiro que citamos é o declínio sofista – em especial no século V a. C. –, o segundo declínio, pós Aristóteles (séc. III a. C.), que fizemos notar a negação geral das ciências especulativas em detrimento das ciências do *agere*. Em terceiro lugar, citamos os efeitos do incêndio da biblioteca de Alexandria e desaparecimento do *Corpus Aristotelicum* no ocidente. Por fim, tem-se o declínio pós Tomás (séc. XIV e XV), devido à incapacidade das gerações futuras de manter pujante o tomismo e a Escolástica[36].

É possível generalizar a dois motivos estes principais declínios do pensamento ocidental: o desinteresse generalizado pela busca genuína pela verdade (*i. e.,* distanciamento da filosofia) e a voluntária redução das causas descobertas e precisadas por Aristóteles. Como este trabalho não é de natureza fundamentalmente filosófica, iremos nos ater ao segundo motivo. Lembremo-nos que a aurora do pensamento ocidental se dá pelo vislumbre da Causa Material por Tales de Mileto. Segue-se então a Anaxágoras, que vislumbra a Causa Formal e por consequência as causas Final e Eficiente. Aristóteles sintetiza todas estas causas e define

[33] Essência é o conjunto de características imóveis – ou seja, que não mudam – em um ente. Cada tipo de substância corresponde a uma única essência.
[34] Acidentes são atributos móveis do ser, quais sejam: quantidade, qualidade, ubiquação, tempo, estado, ação, paixão, relação e hábito. Todos estes nove acidentes, juntamente com a substância, correspondem às categorias aristotélicas do ser.
[35] Frustrada no sentido de que, na maioria dos casos, obtêm aproximações estatísticas, ajustes de curvas e probabilidades.
[36] A alguém cético acerca da importância da Escolástica e do tomismo na Baixa Idade Média, convidamos para que consulte a obra de Edward Grant sobre os fundamentos medievais da Ciência Moderna (GRANT, 1996).

Ciência como o conhecimento gerado pela investigação destas causas mediante os efeitos observáveis na natureza e na sociedade (ARISTÓTELES, (335 a 323 a. C.)/2009, p. 23)

Desde a Antiguidade, Aristóteles mostra em que medida estas quatro causas são irredutíveis entre si. Ora, a investigação de uma causa em um fenômeno não permite que se conheça o efeito de outra causa. Logo, o conhecimento de quê as coisas são feitas [Causa Material], não permite que se saiba o que a coisa é [Causa Formal], nem permite que se saiba para o que a coisa é [Causa Final], nem pelo que a coisa é [Causa Eficiente]. A interpolação destas causas terá invariavelmente o mesmo resultado.

Em primeiro lugar, há de se notar que não existe matéria não informada, ou seja, não é possível existir matéria sem o ser[37]. Como é possível que esta assertiva não seja autoevidente? Elaboremos um exemplo de como esta irredutibilidade das causas se dá. Tomemos um átomo de carbono 12 eletronicamente equilibrado, e investiguemo-lo do ângulo da Causa Material. Materialmente[38] ele é composto de certo número de prótons, elétrons e nêutrons. É possível saber – somente utilizando o conhecimento da composição interna (material) do átomo de carbono –, se ele pertence a um cristal, a um animal ou a uma planta? Parece-nos que não. Ainda, é possível saber, pelo conhecimento de sua composição, como ele veio a estar nesta forma? Ele poderia vir de um decaimento radioativo, ou de uma reação química, ou uma reação nuclear, etc. Então não é possível saber como ele veio a ser com a informação de sua Causa Material. Por fim, é possível saber o estado futuro deste átomo? Se ele irá compor um benzeno, ou uma proteína ou um grafeno? Não é possível deduzir isto só pelo conhecimento de sua materialidade.

Esta mesma análise pode ser realizada com qualquer ente abaixo de átomo e acima, como moléculas, células, tecidos e órgãos. Na mesma esteira, o conhecimento da materialidade (composição atômica) de uma molécula, não permite que eu conheça os efeitos de suas outras causas. Pois uma mesma composição atômica pode estar arranjada espacialmente de diversas maneiras, gerando efeitos muito diferentes. O mesmo ocorre com células, que materialmente são compostas por moléculas e macromoléculas. O conhecimento desta composição não permite que se conheçam totalmente as operações celulares. Este mesmo raciocínio pode ser aplicado a outros níveis organizacionais, o resultado é o mesmo: o conhecimento restrito apenas à materialidade não permite aduzir outros conhecimentos. Seria muito limitante uma ciência encurralar-se apenas na Causa Material, mas é isso que propõe o

[37] Sem que exista em alguma forma. Em última análise, sem que seja alguma coisa.
[38] Tomemos matéria aqui no sentido aristotélico: aquilo que alberga a potencialidade para receber o ser pela forma e de individua-lo enquanto ente.

cartesianismo. No entanto, sabemos que a Ciência Moderna explica e descreve muitos fenômenos, e assim o faz compensando a falta da investigação das outras causas – além da material e eficiente –, utilizando o método experimental e o teste de hipóteses estatístico. O experimento para conhecer como se dá o comportamento de um sistema sob algumas circunstâncias, que indica forte relação com a Causa Final. E a estatística para conhecer o que há de essencial em um fenômeno, ou seja, o que há de mais formal e frequente. Sabemos que ambos os métodos são aproximativos, nunca exatos, pois não podemos, usualmente, acessar todos os fenômenos de um mesmo tipo, mas concluir com base em uma amostra.

É importante notar que em especial na Idade Moderna, tem-se uma espécie de esquecimento de duas causas: a formal e a final. Isto implicou em uma ciência que estuda apenas a Causa Material e a Causa Eficiente. Particularmente, após Newton, a Causa Eficiente foi subsumida na Causa Material, na medida em que tudo se resume a corpos e forças que medeiam interações entre corpos. É neste âmbito que nasce o reducionismo enquanto concepção metafísica de uma ciência cartesiana. No entanto, já no século XIX, percebe-se que esta ciência reducionista não concebe certos fenômenos, a saber: os fenômenos emergentes. Daí toda a escola emergentista, desde Lewes até a contemporaneidade.

Este trabalho não veio negar nem abolir a Ciência Moderna, mas recolocar no seu plano investigativo a Causa Formal e a Causa Final, para que os entes emergentes se tornem objeto de investigação. A emergência é o fenômeno pelo qual um ente se torna um todo substancial. Ou seja, as partes operam em função do todo. Isso implica que a soma do conhecimento das partes não é igual ao conhecimento do todo. Lembrando que conhecemos os efeitos no todo pelo seu direto acesso empírico; e o conhecimento das partes da análise do todo (*i. e.*, cartesianismo). Com efeito, note-se, a Causa Material não pode ser a causa da emergência, uma vez que é conhecimento das partes. Também não pode ser a Causa Eficiente, pois um sistema emergente mantém sua integridade ao mesmo tempo em que muda acidentalmente[39]. Desta maneira, deve necessariamente ser a Causa Formal e Final que dá o tom investigativo e científico ao fenômeno da emergência. A Causa Formal informa a matéria como ela deve se comportar essencialmente. Isso implica que as partes de um todo substancial – isto é, de um todo emergencial –, deve obedecer a leis e regras demandadas pelo todo. A Causa Final determina qual é o estado que um todo substancial deve alcançar no tempo, mediante sua natureza[40].

[39] Isto é, movimenta-se no sentido metafísico, ou seja, seus acidentes variam.
[40] A natureza de um ente é o que confere sua operação própria.

Esta digressão metafísica permite que observemos que o fenômeno da emergência só pode ser compreendido, investigado e formalizado no âmbito das quatro causas, em especial das causas Formal e Final. Como o método cartesiano ignora estas causas, nunca seria possível estudar tal fenômeno formalmente. Atentando apenas para esta afirmação, esse aprofundamento metafísico se justifica. Mais ainda, esta análise permite que determinemos o modo de investigar a emergência, ou seja, por qual dispositivo teórico-empírico. Entrementes, queremos enfatizar que as tentativas de formalizar a emergência nos séculos XIX e XX foram frustradas, devido a uma natural divergência entre a ordem do conhecer e a ordem do ser. Na concepção reducionista, as partes são anteriores na ordem da existência em relação ao todo substancial. Numa concepção emergentista, o todo substancial é anterior na ordem da existência em relação às partes. Este discernimento faz toda a diferença para a descrição precisa deste fenômeno, uma vez que a Causa Formal é aquela que dá o ser, ou em termos metafísicos, atualiza a matéria em uma corporeidade[41]. Esta confusão da ordem do conhecer com a ordem do ser, se deu, muito provavelmente, como um efeito colateral do método cartesiano de análise. Pois, com o tempo, os cientistas se convenceram de que as coisas sempre vêm “de baixo para cima”, ou seja, que as coisas vêm a ser das partes para o todo.

A título de esclarecimento, tomemos a substância cão: sua causa material são seus átomos, moléculas ou mesmo células, que são integrados na forma cão. A forma cão é uma modalidade de ser, esta modalidade é o efeito de sua causa formal: é a animação desta matéria, constituindo o fenômeno de vida animal canina. Como a forma atualiza a matéria em uma modalidade, esta contém em si atributos essenciais que denominamos propriedades: esta tese endereça-se ao estudo desta substância e propriedades especiais. Para fechar o quadro da análise causal da substância cão: a causa eficiente é o meio pelo qual o cão vem a ser. Um cão vem a ser pela fecundação de um óvulo canino por um esperma canino[42] e sua posterior diferenciação celular. E, por fim, a causa final é aquilo para o qual tende naturalmente[43] todo cão: a reprodução e a sobrevivência. Depois desta breve explicação sobre as causas, é necessário que cheguemos ao cabo desta digressão metafísica, a fim de obter o ganho conceitual que será objeto de formalização matemática.

---

[41] A matéria comunica o que há de potencial e acidental em um corpo e a forma comunica o que há de atual e essencial. Ontologicamente, a forma dá o ser à matéria, na terminologia correta: a forma atualiza a matéria.

[42] Esta é de fato a Causa Eficiente. A análise das causas eficientes – isto é, do movimento – pode ser remontada desde causas próximas até causas remotas. No caso do cão uma causa próxima é a fecundação. Por outro lado, é possível considerar causas remotas, como é o caso das condições planetárias do sistema solar para que possa existir vida na Terra, e por consequência vida canina.

[43] Tomar nota para o fato de que um acidente – como é o caso de um cão que não se reproduza ou não sobreviva – não frustra a finalidade de uma substância. Em outras palavras, a natureza de um ente não é frustrada pela privação acidental dos meios de realizá-la.

2.2.3. Do ângulo da emergência

A emergência é o fenômeno pelo qual um todo substancial vem a ser. Isto implica em propriedades não dedutíveis do conhecimento das partes. No entanto, como podemos acessar diretamente este fenômeno e descrevê-lo? Em outras palavras, de que modo algumas partes confluem para o benefício do todo? Antes de tudo, deixemos claro que iremos matematizar a emergência em si, e também aquilo que lhe é apreensível empiricamente: a Lei de Proporcionalidade Intrínseca (SANTOS, 1958) (SANTOS, 2001). Tal Lei associa o comportamento do todo como uma demanda necessária às partes, de acordo com este mesmo todo. Podemos enunciá-la formalmente da seguinte maneira:

Postulado 1. *Toda modalidade existencial implicada em um todo substancial admite uma Lei de Proporcionalidade Intrínseca única e constante. Esta Lei organiza as relações intrínsecas das partes de modo a gerar a operação própria no todo substancial mediante sua modalidade.*

Com isso, é necessária uma explicitação do que se enuncia neste postulado. O termo modalidade existencial indica o tipo de substância que se está a considerar. Ao fixarmos a Lei de Proporcionalidade Intrínseca (LPI), estamos afirmando que as modalidades não se alteram essencialmente, mas podem alterar-se acidentalmente. E por fim, afirma-se que a LPI é a ordem necessária entre as partes – de suas relações particulares específicas internas e externas – em função do todo.

Esclarecendo isso, o que é necessário para que formalizemos a LPI? É necessário que formalizemos um modelo abstrato – isto é, ausente de modalidade existencial – que permita descrever todos substanciais, particularmente os todos substanciais vivos. Em seguida é necessário criar um método empírico que conecte esse modelo abstrato aos entes concretos. São três as classes de entes que iremos trabalhar: substâncias, propriedades e acidentes. Assim sendo, com base no modelo, é necessário criar um método para identificar cada uma destas classes de entes. Ainda, definir e explorar as propriedades da LPI neste modelo base. A teoria matemática que iremos utilizar é apresentada e desenvolvida no Capítulo 4. E o modelo a que nos referimos será tratado minuciosamente no Capítulo 5 sobre Biologia Relacional. Nele analisamos a Teoria de Grafos e parte da Teoria de Categorias como linguagem matemática do modelo. A formalização da emergência e da LPI serão apresentadas no Capítulo 7, considerando os sistemas biológicos como modelo e buscando formalizar as classes de entes.

2.3. Considerações finais do capítulo

Neste capítulo, apresentamos um breve histórico de modo a estabelecer o objeto de investigação desta tese. Concluímos que a história do pensamento ocidental é marcada por declínios e auges. Particularmente, os declínios são de dupla natureza: em primeiro lugar o desprezo pela verdade, e em segundo lugar a redução das causas. Seja Ciência o conhecimento pelas causas, a redução das causas influencia mais forçosamente sobre nossa análise. Ao estudarmos as quatro causas de Aristóteles, nota-se claramente que a Ciência Moderna deixa de considerar a Causa Formal e a Causa Final. Esta consideração metafísica, implícita no Método Cartesiano, faz com que o fenômeno da emergência saia do quadro de investigação científica.

Assim, nesta discussão, reconsideramos as causas faltantes, de modo a encontrar o nexo racional entre emergência e causalidade. E este nexo dá-se naturalmente pela Lei de Proporcionalidade Intrínseca, objeto de nossa formalização. Definiu-se, por meio de um postulado, do que se trata esta lei e a relação que ela tem com os todos substanciais. Esta definição permite que saiamos do âmbito da Metafísica e passemos ao âmbito das ciências particulares (Física, Química, Biologia, etc.), tornando o objeto formalizável. Além desta definição, delineou-se que é necessário um modelo básico no qual os entes associados à emergência sejam acessíveis empiricamente.

Como consideração última deste capítulo, advertimos que o uso de parte da Filosofia Aristotélica não desqualifica nosso intento. Sabe-se que muito das ciências particulares de Aristóteles fora substituído, como a *Physika*. Mas que aquilo que concerne à Lógica e à Metafísica se mantém firme e continua sendo objeto de estudo e trabalho na área da Filosofia (ADLER, 2014). Sobre a extensão da digressão metafísica, observamos que o problema da emergência só se tornou tratável cientificamente pela análise do método cartesiano, pela reconsideração das quatro causas e pela desnudação do que seja emergência. Essa investigação não pode ser realizada pelo método usual das ciências particulares, pois demanda uma ciência mais abrangente, qual seja esta ciência: a Metafísica.

CAPÍTULO 3. Teoria dos entes emergentes

Este capítulo tem como objetivo estabelecer o *status quaestionis*[44] do conhecimento sobre emergência de modo a posicionar o mesmo no seu nicho científico. Em segundo plano, busca-se conhecer as principais e mais influentes teorias emergentes. Esta investigação permite que colecionemos conceitos úteis à nossa própria teoria de modo a evitar certos erros que uma teoria emergente possa conter. Com efeito, apresentamos os principais filósofos e cientistas que propõem teorias emergentes do século XIX ao XX. Além disso, apresentaremos as teorias mais recentes que tocam de algum modo na questão do todo substancial ou mesmo no próprio conceito de emergência.

3.1. Das teorias pioneiras

O conceito de emergência é profundamente tratado no âmbito da filosofia moderna, em especial, na Escola Britânica Emergentista. Como descrito anteriormente, o primeiro a cunhar o termo foi George H. Lewes (LEWES, 1875, p. 368). Desde então, convenciona-se que entidades emergentes – sejam substâncias ou propriedades – surgem de modo irredutível a partir entidades mais fundamentais. De modo geral, note-se que o interesse pelo fenômeno da emergência volta ao quadro atual nas ciências naturais, devido às novas investigações na área da Teoria de Redes Complexas (O'CONNOR e WONG, 2015).

De acordo com Victor Caston – em sua revisão filosófica e histórica dos epifenômenos e emergência (CASTON, 1997, p. 350) (O'CONNOR e WONG, 2015) –, o primeiro pensador emergentista foi Claudius Galenus (129 a 217), médico e filósofo romano de origem grega. No entanto, propostas formais a fim de sistematizar o fenômeno se dão, cabalmente, entre o século XIX e XX. Essa proposta nasce em uma tensão filosófica da época. Essa tensão pode ser sintetizada na seguinte questão: são os processos vitais, ulteriormente, fruto de processos físico-químicos ou fruto de uma matéria abstrata vital? Os emergentistas – como que serpenteando entre as duas propostas – desenvolvem um meio

[44] Estado da investigação.

termo: ao mesmo tempo em que se esquivam de qualquer referência a substâncias abstratas[45], retém qualidades e processos vitais que realmente são irredutíveis às partes. A seguir, elucidaremos o que há de mais importante em algumas destas concepções emergentistas do século XIX e XX de acordo com o repositório online da *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (O'CONNOR e WONG, 2015).

3.1.1. Sobre as Leis Heteropáticas de J. S. Mill

De acordo com John S. Mill, todos os corpos organizados organicamente[46] e compostos por partes – que são materialmente iguais os corpos inanimados[47] –, são fruto da justaposição destas partes de maneira não análoga a agentes físicos[48]. Assim, é certo que não há soma[49] na qual as ações das partes sejam separáveis da ação do todo (MILL, 1843/1974, p. 371). Desta observação, Mill propõe os efeitos heteropáticos, que tem como causa as leis heteropáticas. Analogamente, propõe os efeitos homopáticos, consequências das leis homopáticas (MILL, 1843/1974, p. 374). Esta taxionomia de leis é o contraste que Mill dá ao analisar a ação conjunta de causas, que em sua concepção, dá-se de dois modos concretos e operacionais: o mecânico e o químico. No modo mecânico ocorrem as operações vetoriais em que, por exemplo, a soma vetorial é exatamente igual ao efeito individual de cada vetor somado.

Esse tipo de modo operacional está presente em toda a Física Clássica quando se somam campos, vetores, escalares, etc. Em especial, esse é um tipo particular de Composição de Causas, que Mill denomina lei homopática. O resultado da soma vetorial é, neste âmbito, um efeito homopático, assim como a operação de soma, ou a multiplicação de vetor por escalar, ou o produto escalar, ou o produto vetorial; estes são todos exemplos de leis homopáticas.

Por outro lado, o modo operacional químico, de acordo com este autor, viola a Composição das Causas, uma vez que a ação conjunta de muitas causas não é a soma dos efeitos individuais. Em especial, defende que reações químicas são deste tipo. Exemplifica-se isso por meio de uma reação de neutralização, em que sal e água são produtos da neutralização de um ácido e de uma base (O'CONNOR e WONG, 2015). Note-se que o sal e a

[45] De fato, isto constitui um erro metafísico, pois estabelece um recuo ao realismo platônico.
[46] Parece um pleonasmo, mas em verdade queremos nos referir aos todos substanciais orgânicos.
[47] Corpos inorgânicos, ou seja, todos de ordem.
[48] Não são agentes do tipo reativos como o são os sistemas newtonianos.
[49] Ou mesmo relações simples de ordem, comutações, composições, uniões, interseções, associações, etc.

água podem ter uma origem diferente daquela da reação de neutralização; isso implica que o efeito particular do ácido e da base é “esquecido” no produto. Além disso, há uma mudança de natureza: a soma de ácido e base gera sal e água, que são compostos de natureza muito diferentes. Assim, para Mill, este produto não é de modo algum a soma dos efeitos dos reagentes. Com isso, e de acordo com sua terminologia, os produtos sal e água é o efeito heteropático – resultado de uma lei heteropática –, que neste caso é a reação de neutralização.

As leis heteropáticas foram identificadas pela Escola Britânica Emergentista como o fenômeno da emergência. Entrementes, Mill defendera que apenas no âmbito da Física as leis homopáticas são realmente observadas, uma vez que processos químicos – e além destes, como os processos biológicos – são todos (inteiros) regidos por leis heteropáticas. Em outras palavras, o fenômeno da emergência ocorre no âmbito da Química até o da Psicologia, conquanto esta esteja subordinada à Fisiologia (MILL, 1843/1974, p. 374).

Ao analisar as leis presentes em cada nível organizacional, tais como o físico, químico, biológico ou psicológico, Mill argumenta que tanto as leis homopáticas quanto leis heteropáticas estão ali presentes. De modo que as leis heteropáticas de um nível superior suplantam[50] todas as leis do nível inferior, sejam homopáticas ou heteropáticas. Ou seja, um sistema em um dado nível organizacional obedece a leis mecânicas e químicas, como outro qualquer. No entanto, tais leis, que estão no mesmo nível de modo a compor um todo, não interferem na lei heteropática do todo, mas são absorvidas por ela (MILL, 1843/1974, p. 376).

Enfim, comentemos as conclusões que tomamos sobre as contribuições de Mill para a presente teoria emergente. De modo geral, a separação e a clara delimitação das leis homopáticas e heteropáticas – particularmente, como interação de causas – nos é muito útil, uma vez que pode ser facilmente assimilada por nossa própria teoria. Analogamente, podemos utilizar os conceitos de efeitos homopáticos e heteropáticos como critérios de análise de um fenômeno genérico para identificá-lo como emergente ou não emergente. No entanto, fazemos uma observação da afirmação de Mill de que os fenômenos químicos – e acima deles, no geral – são heteropáticos. De fato, não se verifica isso teoricamente, dado que reações, estruturas químicas, funções químicas, etc., podem ser previstas e descritas com grande precisão pela Química Teórica (SZABO e OSTLUND, 1996). Mas, note-se que, na época de Mill, a Mecânica Quântica e a Física Estatística – fundamentos e pressupostos da Química teórica –, não estavam bem desenvolvidas, de modo que uma previsão de estruturas e reações químicas não lhe eram apreensíveis, daí sua precipitação. Entrementes, reconhecemos que os estudos de

[50] Utilizam a seu favor.

Mill abriram caminhos e deram conceituações para a análise de fenômenos realmente heteropáticos; fenômenos estes que são objeto de nossa investigação.

3.1.2. Sobre a Lei Trans-ordinal de C. D. Broad

Se John Stuart Mill tratava do problema da emergência de modo ontológico[51], complementarmente Charlie Dunbar Broad o tratou num viés inicialmente epistemológico[52]. Assim o faz percorrendo a questão da comunicabilidade entre as ciências especiais, tais como a Física, a Química e a Biologia[53]. De modo geral, Broad não está apenas interessado em responder a questão concernente à querela entre mecanicistas e vitalistas. Pois ele também procura dar uma resposta à pergunta: estão as ciências mais específicas totalmente subordinadas às mais básicas? Em última análise, à Física? Para tanto, questiona a diferença ontológica entre os fenômenos inorgânicos e orgânicos (BROAD, 1925, p. 3-4).

O autor em questão estabelece que a comunicabilidade entre as ciências possa ser vista do ângulo mecanicista e do ângulo emergentista. Do ponto de vista mecanicista, expressa que só existe um tipo de material e um tipo lei elementar de composição, que gera toda a complexidade existente[54]. Estabelece que todas as substâncias e fenômenos sejam apenas arranjos deste mesmo material determinado pela lei elementar de composição. Assim, um mecanicista, na concepção de Broad, afirma que: há apenas uma ciência, aquela que estuda este material e esta lei de composição universal. Particularmente, esta ciência é a Física. Assim todas as outras ciências estão subordinadas a ela (BROAD, 1925, p. 44-52) (O'CONNOR e WONG, 2015).

Por outro lado, do ângulo emergentista, Broad descreve que existem duas leis de organização dos diferentes tipos de matéria agregada: a lei intra-ordinal e a lei trans-ordinal. As leis intra-ordinais são aquelas que ocorrem no mesmo nível e tipo de agregado material, disso decorrem as ciências particularizadas. Entretanto, as leis trans-ordinais – que caracterizam a emergência – determinam propriedades em um nível superior utilizando as propriedades do nível inferior de modo não dedutível. Com isso, e sem perda de generalidade, é possível denominar as leis trans-ordinais como leis emergentes. Com efeito, as ciências

[51] Da ordem do ser.
[52] Da ordem do conhecer.
[53] Problema este que não existia antes da ciência moderna, uma vez que estas ciências eram articuladas pela filosofia aristotélico-tomista.
[54] Isto é exatamente o que abordamos no capítulo anterior quando falamos da exclusão da Causa Formal e Final.

particulares não são irredutíveis entre si, mas albergam alguma superposição no que concerne ao objeto de estudo[55] (BROAD, 1925, p. 61).

Adicionalmente, defende que as leis emergentes não precisam ser metafisicamente definidas, nem necessitam de condições de contorno e nem princípios específicos dos elementos do nível inferior. Isso implica que, na perspectiva de Broad, os elementos em um nível inferior não são afetados quando estão sob a ação de uma lei emergente. Ainda, em se tratando da análise epistemológica das leis emergentes, o autor defende que não há nada de misterioso sobre elas. Afirma que estas leis podem e devem ser critério científico de análise dos fenômenos, conquanto que se acesse diretamente o ente emergente, e se saibam suas propriedades, uma vez que é impossível deduzir a propriedade emergente pelo conhecimento das partes (BROAD, 1925, p. 79).

Com isso, e pela primeira vez na história, um autor se refere explicitamente à imprevisibilidade do fenômeno emergente pelo conhecimento das partes. Com efeito, a formalização de uma lei emergente decorre somente do conhecimento direto do ente emergente – ou seja, pelo acesso empírico ao todo substancial, instância na qual as partes estão submetidas a uma lei trans-ordinal. Por fim, argumenta que a imprevisibilidade não é ontológica, mas é consequência da irredutibilidade epistemológica do todo às partes (BROAD, 1925, p. 78) (O'CONNOR e WONG, 2015). Ou seja, é possível conhecer e determinar a lei trans-ordinal pelo conhecimento mútuo do efeito nas partes em detrimento do conhecimento do todo.

Enfim, elenquemos as novidades conceituais proporcionadas pelas concepções de Broad à nossa teoria ao mesmo tempo em que apontamos para suas limitações. Em primeira instância, Broad argumenta em favor da irredutibilidade e imprevisibilidade dos entes emergentes em detrimento das partes. Isto se refere diretamente ao que dissertamos na digressão metafísica, de que a causa material – que corresponde ao conhecimento das partes – não pode determinar o comportamento do todo, pois concerne à causa formal. Isso reincide na irredutibilidade das quatro causas descobertas por Aristóteles. Broad confirma esse fato com sua teoria. Adicionalmente, o autor estabelece que a lei trans-ordinal é algo que ocorre em níveis hierárquicos diferentes, algo que iremos adaptar em nossa teoria. Embora este autor tenha introduzido alguns conceitos úteis para o estudo, não dá nenhum subsídio empírico ou teorético que auxilie para que alguém verifique o fenômeno emergente. Adicionalmente,

[55] É possível estudar um corpo animal com vistas na sua composição atômica, química, bioquímica, celular, tecidual, sistêmica, etc.; ao mesmo tempo em que o objeto de estudo permanece inalterado.

defende que não há mudança no *modus operandi*[56] das partes quando sob a ação de uma lei trans-ordinal. Isto não é observado empiricamente, pois uma vez que os estados futuros das partes são regidos pela lei trans-ordinal, implica que haverá mudança nos estados das partes, embora não haja mudança em sua natureza. Estes erros dialéticos são objeto de crítica dos mecanicistas. A crítica, no geral, não corresponde à realidade dos fatos, mas apenas a um erro metodológico de Broad.

3.1.3. Sobre o Fisicalismo não redutível de S. Alexander

Samuel Alexander é contado dentre os emergentistas britânicos, uma vez que herdou alguns aspectos do pensamento desta escola filosófica. Em primeira instância, note-se que este autor se preocupa mais com a epistemologia da emergência do que com sua ontologia. Deixando os aspectos ontológicos e metafísicos obscuros, este autor gera dificuldades no entendimento de suas teorias sobre emergência (ALEXANDER, 1920, p. 5-6) (O'CONNOR e WONG, 2015). Em suma, preocupa-se primeiramente com os fenômenos da consciência dado na matéria, e por meio deles, adentra no tema da emergência. Neste ínterim, defende que os fenômenos mentais não estão correlacionados de modo simples à matéria. Mas que há, neste enlace, uma qualidade distinta que emerge ao mesmo tempo em que não é uma resultante trivial de interações (ALEXANDER, 1920, p. 5-7, 14, 55) (O'CONNOR e WONG, 2015).

Ao analisar a postura geral da escola emergentista que vem na esteira de Alexander, Timothy O'Connor e Hong Yu Wong apontam para o fato de que alguns processos físico-químicos têm a qualidade da vida, mas, ao mesmo tempo, esta qualidade não está em si nestes processos (O'CONNOR e WONG, 2015). Para resolver este aparente paradoxo, diz-se que a nova qualidade ocorre nestes processos, mas tem raízes em outra ordem de processos. Deste modo, a existência de qualidades emergentes é dada sob o critério de um fato bruto e empírico (ALEXANDER, 1920, p. 46-47). Denominar uma estrutura como organismo, é equivalente a afirmar que há neste conjunto de processos físico-químicos a qualidade da vida (ALEXANDER, 1920, p. 62-64).

Ao descrever as características desta qualidade da vida, o autor enumera: autorregulação, plasticidade, resposta comportamental e reprodução (ALEXANDER, 1920, p. 63, 70). Apesar de Alexander parecer tomar o tom de emergentista, supõe que um Calculador Laplaciano com poder computacional ilimitado – com acesso a todos os princípios básicos da

---

[56] Modo de operação.

Física e acesso a todas as condições iniciais do universo pré-biótico – pode, em última análise, prever toda a distribuição de matéria em termos físicos (O'CONNOR e WONG, 2015).

Para harmonizar este aparente paradoxo, Alexander argumenta que as qualidades emergentes são novidades supervenientes[57] de um tipo distinto de processos físico-químicos. Ao mesmo tempo em que defende que continuam sendo processos fundamentalmente físico-químicos. Em especial, os fenômenos mentais são desta natureza. Esta superveniência é que comporta a teoria de Alexander como um fisicalismo não redutível. Ou seja, são fenômenos fundamentalmente físicos, mas que têm leis supervenientes. Desta tese nasce a escola epistemológica de emergência, donde se defende que a percepção de emergência é fruto de uma descontinuidade do modo com que se conhecem os fenômenos supervenientes, mas em verdade, não há real diferença ontológica.

3.2. Das teorias contemporâneas

De modo geral, o que une o pensamento da Escola Emergentista Britânica é sua visão da natureza em camadas hierárquicas discretas. Cada uma destas camadas tem uma ciência que a estuda como objeto científico[58], sendo a camada básica e fundamental regida pela Física, e as próximas camadas regidas por outras ciências especiais[59] como a Química, Biologia, Psicologia, e assim por diante. O que divide esta escola de pensamento é a forma pela qual estas camadas se relacionam. Em primeira mão, temos a visão de Mill e Broad de advogar em favor de que esta relação seja fundamentalmente ontológica, ou seja, é parte integrante da natureza e do ser. Em oposição a isto, tem-se a visão de Alexander, que defende que esta relação é um artefato epistemológico; em outras palavras, a percepção de descontinuidade entre as camada é um acidente da forma com que humanos fazem ciência (O'CONNOR e WONG, 2015). Deste embate filosófico são geradas duas escolas: a ontológica e a epistemológica.

---

[57] Superveniência se refere um fenômeno que ocorre do todo para as partes. Este conceito é característico nesta escola de pensamento. Mas note-se que a superveniência em última instância se refere à Causa Formal.
[58] Na terminologia aristotélico-tomista, trata-se do sujeito da ciência.
[59] Esta é uma taxionomia científica característica da Escola Emergentista Britânica.

3.2.1. Sobre a Escola Epistemológica

Esta escola emergentista é a mais popular na contemporaneidade. Neste âmbito, a emergência é produto do limite humano da compreensão de sistemas complexos. Há duas versões teóricas comuns dessa escola: a preditiva e a de padrão irredutível. A versão preditiva estabelece que as propriedades emergentes sejam características sistêmicas que não podem ser preditas, ou verificadas, num estágio pré-emergente, ou seja, nas partes. A versão de padrão irredutível estabelece que as propriedades emergentes sejam características sistêmicas governadas por leis próprias – definidas por uma ciência particular –, que são irredutíveis a teoria física básica por motivos conceituais (O'CONNOR e WONG, 2015). Um dos principais autores que advogam por esta tese é Jerry Alan Fodor (1935-2017) (FODOR, 1974). Em segundo plano – misturando diversos conceitos metafísicos e científicos –, tem-se Karl Raimund Popper (1902-1994) e John Carew Eccles (1903-1997). Em se tratando de emergência, Popper estabelece que os níveis hierárquicos, incluindo suas interações, dependem de um indeterminismo fundamental da ciência Física. Isso implica que cada nível está aberto a influências causais de níveis inferiores e superiores (POPPER e ECCLES, 1977, p. 34-35). Outros pensadores com visão epistemológica sobre a emergência podem ser identificados na contemporaneidade, mas esta caracterização não é utilizada por eles mesmos. Ou seja, na contemporaneidade os estudiosos de emergência não se identificam em uma das duas escolas de pensamento. Por fim, queremos enfatizar que o estudo da emergência esteve principalmente associado à filosofia acadêmica e à Metafísica. Há poucos autores que se aventuram em modelar este fenômeno fisicamente ou matematicamente, devido, usualmente, à imprecisão de suas considerações apriorísticas[60].

3.2.2. Sobre a Escola Ontológica

A escola ontológica de emergência, assim como a epistemológica, divide-se em duas correntes. Uma corrente da emergência superveniente, que é bem definida e tem propósitos claros, e uma corrente difusa, alternativa, que alberga inúmeras concepções emergentistas (O'CONNOR e WONG, 2015). A visão de mundo da escola superveniente estabelece que a realidade seja constituída de estruturas físicas simples ou composta, conquanto que as coisas

[60] Algo que já deixamos estabelecido no Capítulo 2.

compostas nem sempre sejam simples agregados de coisas simples[61]. Assim como a escola epistemológica, concebe-se que existem níveis hierárquicos entre os compostos, mas diferem desta por defenderem que estes níveis estão intrinsecamente arraigados na realidade física. Desta maneira, cada nível hierárquico possui uma espécie de lei própria que suplanta os fenômenos do nível inferior sem modificar sua natureza, mas modificando seus estados[62]. À suplantação do nível inferior por uma lei superior se dá o nome de superveniência (O'CONNOR e WONG, 2015).

Da corrente alternativa de emergência ontológica, temos a emergência não superveniente. Essa tese é defendida principalmente por Timothy O'Connors, que afirma que a superveniência em si não é compatível ao se considerar a dinâmica do surgimento das propriedades emergentes. Desta maneira, este autor rejeita a superveniência e advoga em favor de um tratamento dinâmico do surgimento das propriedades emergentes, particularmente em fenômenos mentais e neurológicos (O'CONNOR e WONG, 2005).

Ainda nesta mesma corrente ontológica, tem-se a emergência como fator de fusão. O principal propugnador desta tese é Paul Humphreys (filósofo vivo e contemporâneo da Universidade da Virgínia). O autor também rejeita a superveniência como critério explicativo da emergência, e estabelece que as propriedades emergentes resultem de uma interação essencial – ou melhor, uma fusão essencial – entre as partes e suas leis. Diz-se que a interação é nomologicamente[63] necessária à propriedade emergente. Quando entes básicos se fundem, seus poderes causais são mitigados e cessam de existir como coisas separadas (HUMPHREYS, 1997). A seguir, apresentaremos os autores que influenciaram diretamente ou indiretamente em nossa própria concepção de emergência.

3.3. Dos autores subsidiários desta obra

Nesta seção, iremos apresentar sucintamente os autores que contribuíram indiretamente – ou mesmo que têm teorias que influenciam conceitualmente o pensamento contemporâneo – para a formulação do problema da emergência e da LPI. No geral, muitos se referem ao mesmo fenômeno utilizando uma terminologia pouco usual. Outros colaboraram no sentido de restringir nossa análise matemática a uma linguagem específica, que é a Teoria

[61] É uma ideia intuitiva da noção de todo substancial e todo de ordem o qual não é muito claro a esta escola de pensamento.
[62] Acidentes: quantidade, qualidade, ubiquação, temporalidade, estado, ação, paixão, postura, etc.
[63] Que vem do conhecimento de leis universais.

de Categorias. Ademais, as teorias destes autores nos auxiliam para a descrição precisa do nosso fenômeno de interesse. A síntese destas contribuições será realizada na próxima seção.

3.3.1. A Teoria Geral de Sistemas de Ludwig von Bertalanffy

L. von Bertalanffy nos apresenta em sua Teoria Geral de Sistemas as possibilidades de modelagem matemática de alguns tipos de sistemas de acordo com sua linearidade e tipologia equacional (BERTALANFFY, 1968, p. 20). A tipologia de sistemas desta classificação está disposta Quadro 1. Enfatizamos que a metodologia de equações algébricas e diferenciais não pode ser aplicada para resolver o problema que propomos, uma vez que o fenômeno emergente é de natureza não linear, que pode envolver inúmeras equações algébricas, ordinárias ou parciais. Isso implica que uma aproximação clássica do problema é extremamente dificultosa. Esta observação indica que a matemática a ser utilizada para a formalização da emergência e LPI deve ser mais abstrata e geral.

	Equações lineares			**Equações não-lineares**		
Tipo de equação	Uma equação	Algumas equações	Inúmeras equações	Uma Equação	Algumas equações	Inúmeras equações
Algébrica	Trivial	Fácil	Muito difícil	Muito difícil	Muito difícil	Muito Difícil
Diferencial ordinária	Fácil	Difícil	Muito difícil	Muito difícil	Extremamente difícil	Extremamente difícil
Diferencial parcial	Difícil	Muito difícil	Extremamente difícil	Extremamente difícil	Impossível	Extremamente difícil

QUADRO 1. Classificação dos problemas matemáticos.
Fonte: Traduzido e adaptado de BERTALANFFY, L. V. **General System Theory:** Foundations, Development, Applications. New York: George Braziller, 1968, p. 20.
Nota: As equações algébricas de uma e algumas equações são tratáveis, assim como as diferenciais ordinárias dos mesmos tipos. Adicinalmente, em alguns casos, é possível trabalhar a equação diferencial partial. Fizemos uma atualização da classificação dos tratamentos matemáticos.

3.3.2. A Autopoiesis de Humberto R. Maturana e Francisco J. Varela

A autopoiesis[64] é o fenômeno pelo qual um ente cria a si mesmo (MATURANA e VARELA, 1980, p. 88-95). Um sistema autopoiético é definido como uma unidade por sua organização autopoiética[65]. Em especial, é a capacidade intrínseca que seres vivos têm de produzirem a si próprios, por meio do crescimento, regeneração e reprodução. Deste modo, todo ser vivo é um sistema autopoiético concebido e representado por uma rede complexa fechada de produções moleculares, celulares, teciduais, etc. Termodinamicamente sabemos que o sistema vivo é um sistema aberto ao influxo de matéria e energia, que busca minimizar a produção de entropia para manter sua ordem (SPANNER, 1953).

Em outras palavras, um sistema biológico – que é também um todo substancial, fruto do fenômeno emergente donde se observa a LPI – é um sistema autopoiético, onde suas operações internas devem favorecer sua autogeração. Estes autores fazem algumas observações importantes para que a realização da autopoiese seja efetivada (MATURANA e VARELA, 1980, p. 88). Listemo-nas:

i. As funções das componentes do sistema (*i. e.*, átomos, moléculas, células tecidos) só têm pleno sentido em função da LPI[66].
ii. As componentes devem possuir propriedades específicas para a realização da LPI.
iii. As componentes devem ser produzidas dentro de um contexto “topológico”[67] para que tenha sua função efetivada.
iv. A LPI constitui um domínio fechado especificado somente por si mesmo; suas operações constitutivas definem um “espaço” no qual o sistema concreto se realiza. A dimensão deste “espaço” [68] são as relações de produção.

Estas informações sobre a autopoiesis – ou seja, a LPI – nos indica algumas das propriedades que devem ser consideradas ao formalizarmos o fenômeno. No geral, muito do que é tratado por Robert Rosen em seu modelo de (M, R)-systems responde a estas propriedades.

---

[64] Significa literalmente produzir a si próprio.
[65] A autopoiesis de Maturana e Varela é exatamente a LPI de que fala Mario Ferreira.
[66] Preferimos usar o termo LPI uma vez que constitui uma terminologia mais clara e geral do que autopoiesis.
[67] No sentido de estrutura de interações.
[68] No sentido de conjunto de todas as interações possíveis.

3.3.3. A Constructal Law de Adrian Bejan

A Constructal Law estabelece que um sistema físico finito, submetido às Leis da Termodinâmica, tende naturalmente a uma configuração que permita máximo fluxo de matéria, energia e informação (BEJAN, 2016). A esta configuração Bejan dá o nome de arquitetura de fluxo. Com este conceito, Bejan define o "estado morto" de um sistema como a ausência de uma arquitetura de fluxo, conquanto defina a vida como a presença desta arquitetura de fluxo. Adicionalmente, define a evolução biológica[69] como sendo a sequência de configurações de fluxo que um sistema vivo exibe no tempo. Isto implica na necessidade de uma "topologia" da distribuição das relações das partes, como se refere Maturana e Varela. Excluindo as particularidades destas teorias, notamos que ambas as teorias estão se referindo ao mesmo fenômeno por meios e conceitos diferentes. Ademais, Bejan propõe que a Constructal Law seja uma lei universal, como são as Leis da Termodinâmica (BEJAN, 2017).

3.3.4. A Emergência Forte e a Emergência Fraca de David J. Chalmers

Chalmers identifica dois tipos de emergências que correspondem a fenômenos completamente diferentes: a emergência forte e a fraca. Particularmente, os autores da Escola Britânica Emergentista se referiam à emergência forte, que é caracterizada pelo fenômeno emergente essencial não dedutível das partes. Em contrapartida, a emergência fraca – explorada principalmente por autores contemporâneos – é caracterizada pelo fenômeno emergente não esperado das partes (CHALMERS, 2006, p. 244-254). Particularmente, os termos que diferenciam cada tipo de emergência para Chalmers são: não dedutível e não esperado.

Note-se que alguns tipos de entes são todos substanciais inorgânicos, como o são os cristais, amorfos, gases e líquidos. Pois é possível prever algumas de suas propriedades macroscópicas por meio do conhecimento das propriedades microscópicas. A Física Estatística é a ciência das leis homopáticas e de todos substanciais inorgânicos regidos pela emergência fraca. Pois surgem novas propriedades por uma relação físicas das partes, mas estas propriedades são dedutíveis, embora não sejam esperadas. Por exemplo, os condensados de Bose-Einstein, a superfluidez, a viscosidade de líquidos, a teoria de bandas em sólidos, etc.

---

[69] Para Bejan, as evoluções tanto dos sistemas inanimados quanto dos animados são produto de uma mesma lei, a Constructal Law.

Por outro lado, os todos substanciais orgânicos – que o são em toda força do termo – possuem propriedades que não são esperadas, muito menos deduzidas das partes. Para exemplificar: o ciclo celular, a homeostase, a contração muscular, a sinapse, a cognição, etc. Este trabalho endereça-se especialmente à emergência forte, pois estamos tratando em particular de fenômenos biológicos, ou seja, de todos substanciais vivos.

3.3.5. Os Campos Morfogenéticos de Rupert Sheldrake

Inspirado nos campos físicos mediados por partículas bosônicas, – e por uma teoria de campos especiais criada por biólogos do início do século XX – Sheldrake propõe que os sistemas vivos se desenvolvem e vêm a ser por meio de campos morfogenéticos. Estes campos agem à distância e são não-materiais. Um campo morfogenético é sempre gerado por meio de um germe morfogenético que passa a existir nas vizinhanças deste germe influênciando outras matérias orgânicas de mesma natureza (SHELDRAKE, 2013, p. 97). Sheldrake exemplifica esta hipótese na gestação da girafa. Defende que enquanto o embrião de girafa está crescendo no útero de sua mãe, ele – conquanto seja matéria orgâniza com potencialidade para se tornar girafa – entra em ressonância com o campo morfogenético de sua mãe, que permite que ele tenha características biológicas e etológicas[70] de girafa.

Particularmente, esta hipótese se aplica a sistemas biológicos, mas Sheldrake defende que este fenômeno ocorre em todos os tipos de sistemas, incluindo os inorgânicos. Ao que nos parece, é uma tentativa de explicar o fenômeno emergente por meio de uma teoria de campos biológicos. A tentativa é frustrada, tendo em vista a dificuldade de provar tal hipótese, uma vez que não se consegue demonstrar os efeitos e causas destes campos morfogenéticos independentemente.

A tendência de não restringir os fenômenos vivos à causalidade material – como se observa com Sheldrake –, reforça a noção de que o que todo deve preceder às partes. Ou seja, a causa formal precede a causa material no fenômeno da vida. Isso implica que ao formalizarmos a emergência e a LPI, é necessário que façamos uma aproximação “top-bottom”[71].

---

[70] Comportamentais.
[71] De cima para baixo. Partindo do todo e explicando as partes.

3.3.6. As Hiperestruturas como Matéria Abstrata de Nils A. Baas

Por fim, Baas introduz o conceito de hiperestrutura utilizando Teoria de Categorias para descrever a hierarquia entre os níveis organizacionais, como: átomos, moléculas, células, tecidos, etc. Adicionalmente, a partir da generalização do procedimento categórico das hiperestruturas, postula que existe uma matéria abstrata que determina a relação intrínseca entre os níveis e as estruturas dentro de uma hiperestrutura (BAAS, 2006). O autor foi o primeiro a utilizar a Teoria de Categorias para tentar aproximar o problema dos fenômenos hierárquicos, e, por extensão, emergentes. Entretanto, Baas não demonstra como é possível partir dos dados empíricos e chegar à teoria que ele propõe, ou seja, a teoria não tem crivo empírico. Adicionalmente, pode-ser afirmar, com alguma segurança, que o autor é muito descritivo e não prova nenhum resultado novo do ponto de vista matemático. Por outro lado, nos indica que a Teoria de Categorias tem a possibilidade de modelar hierarquias de entes diferentes, dada sua generalidade dentro das matemáticas.

3.4. Observações sobre os autores contemporâneos e síntese

É impressionante o paralelo conceitual e metafísico que estes autores contemporâneos têm com os antigos filósofos gregos. A título de exemplo, note-se como a Matéria Abstrata de Baas, e o vitalismo do século XIX, se coadunam com o *ápeiron* de Anaximandro. Analogamente, como o conceito de autopoiesis e superveniência se aproximam do *noûs* de Anaxágoras; ou como a Constructal Law de Bejan se aproxima do ideal pitagórico de Harmonia e do atomismo de Demócrito. Enfim, fazemos notar estes paralelos para enfatizar como que a emergência é um fenômeno universal, apreensível à maioria, mas de difícil formalização. Assim, tanto nossos ancestrais quanto nossos contemporâneos têm muitos fundamento já trabalhados para nos oferecer, na medida em que nosso intento é a formalização da emergência e da LPI.

A revisão de literatura que concerne estes pensadores nos coloca a par do *status quaestionis* do conhecimento sobre a emergência, ao mesmo passo que nos dá muitos conceitos úteis à formalização. Para aferir a contribuição de cada autor apresentado neste capítulo, tomaremos como critério o postulado enunciado no final do Capítulo 2.

Mill nos mostra que as partes geram efeitos nos quais as causas ocorrem de modo heteropático, ou seja, não é possível separar as partes enquanto causas no todo. Em outras palavras, algo é "esquecido" [72] entre a composição das partes para gerar o todo substancial.

Broad nos indica que a emergência é fruto de uma lei trans-ordinal, onde um nível hierárquico superior determina o que ocorre num nível inferior. Isso contribui para o fato de que o todo tem preferência na ordem do ser em um todo substancial.

Alexander com seu fisicalismo irredutível nos mostra que as partes não mudam essencialmente, mas podem mudar acidentalmente. Ou seja, os átomos não deixam de serem átomos quando compõe um ser vivo. Isso significa que em um todo substancial, este mesmo todo age sobre a acidentalidade das partes e não sobre sua natureza.

O estudo das escolas emergentistas contemporâneas, nos coloca no âmbito da escola ontológica, pois defendemos que a emergência não é fruto da nossa incapacidade de conhecer os sistemas vivos, mas é de fato um fenômeno físico específico.

Bertalanffy, em sua Teoria Geral de Sistemas, coloca os limites matemáticos de modelagem de fenômenos utilizando uma classificação geral das equações. Sua exposição nos conscientiza que uma aproximação usual do problema da emergência é muito difícil, uma vez que a complexidade das relações das grandezas neste âmbito é não linear e lançam mão de toda sorte de equações, sejam elas algébricas, diferenciais ordinárias e parciais.

Maturana e Varela, com seu conceito de autopoiesis, – que a propósito é muito consultado por biólogos de diversas formações – conceitua algumas das propriedades resultantes da LPI e da emergência. Estas propriedades essenciais nos orientam em como a modelagem e formação devem ser realizadas.

Bejan, apesar de ser reducionista, postula que é necessário que haja uma nova lei termodinâmica que dê conta de explicar a construção de sistemas que maximizam o fluxo e minimizam a produção de entropia. Também propomos que haja uma lei de ordem, mas que cada todo substancial tenha sua própria lei, e não como este autor propõe: uma mesma lei universal constructal para todos os fenômenos.

Chalmers estabelece um critério empírico muito útil para classificar todos substanciais: a emergência fraca e emergência forte. De modo que os todos substanciais inorgânicos, como sólidos, líquidos e gases, são frutos da emergência fraca. E os todos substanciais orgânicos são frutos da emergência forte. Neste trabalho, nos debruçamos sobre a emergência forte.

---

[72] Este conceito é extremamente útil, uma vez que a definição de emergência depende de um dispositivo matemático denominado functor forgetful.

Sheldrake indica com seus campos morfogenéticos que a forma precede à matéria. Reforçando a primazia da Causa Formal sobre a Causa Material nos fenômeno da vida. Conquanto não corroboremos com a hipótese dos campos morfogenéticos.

Baas introduz o uso da Teoria de Categorias para modelar hierarquias. Deste autor tiramos o motivo e inspiração para estudar esta teoria e formalizar o fenômeno da emergência e da LPI.

3.5. Considerações finais do capítulo

Apresentamos neste capítulo o *status quaestionis* do conhecimento sobre emergência, desde sua enunciação por Lewes até as atuais tentativas de sua definição e formalização. Neste ínterim, conseguimos explorar ideias que são úteis à nossa própria concepção de emergência. Alguns dos atributos da emergência que nos referimos são: heteropática, trans-ordinal, superveniente, não trivial, autopoiética, universal na modalidade existencial, forte[73], primada pela forma e matematicamente categórica. Todos esses atributos confluem para nossa concepção da emergência e, por consequência, da LPI.

[73] Referindo-se à emergência forte de Chalmers.

CAPÍTULO 4. Teoria de Categorias

Neste capítulo faremos uma pausa na discussão sobre emergência para apresentar alguns elementos matemáticos da Teoria de Categorias. Iremos abordar as principais definições, teoremas, proposições e corolários dessa teoria. Nosso principal objetivo, com isso, é a apresentar e a operacionalizar.

4.1. Origem da teoria e aplicações

Na transição do século XIX para o século XX houve profundas mudanças na visão científica no mundo moderno. A formalização da Mecânica Quântica e os resultados teóricos da Relatividade Restrita de Einstein causaram grande paradoxo na visão mecanicista da Física desde então. Pois, a partir destes acontecimentos, não mais poderíamos dizer que as leis da Física são universais, mas dependiam da escala extensiva e das condições de contorno do sistema físico. Isso implica que a Física agora é constituída de discursos que descrevem sistemas dentro de "universos" estanques: a Mecânica Quântica trata do mundo atômico e subatômico; a Mecânica Clássica (fundamentalmente newtoniana) tratava do mundo mesoscópico e parte do macroscópico; a Relatividade Geral e Restrita tratava do mundo em que os elementos físicos tendem a velocidades próximas a velocidade da luz.

Apesar desse aparente paradoxo, um conceito central surge dentro deste paradigma e pode ser explicitado com a seguinte asserção: não há uma única perspectiva correta da realidade. Isso significa que podemos mudar de contextos e perspectivas para explicar fenômenos reais, mas se quisermos ter uma Ciência unificada e interdisciplinar, um novo objetivo nos é oferecido: encontrar os meios para transladarmos entre os contextos e perspectivas dentro da Física como um todo, de modo a encontrar um fundamento geral que a unifique. E é neste contexto histórico-científico que a Teoria de Categorias é concebida.

A Teoria de Categorias foi descoberta na década de 40 por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane com seus trabalhos sobre *Foundations of Algebraic Topology* (EILENBERG e STEENROD, 1952) e *Homology* (MACLANE, 1963), respectivamente. Como o nome de suas obras sugere, a Teoria de Categorias foi especialmente desenvolvida para tratar simultaneamente de dois diferentes campos da Matemática: a Álgebra e a

Topologia. Antes destes dois matemáticos, algumas generalizações entre estes campos eram possíveis por meio da Teoria de Cohomologias, mas insuficiente para os objetivos requeridos por Eilenberg e Mac Lane. Mais especificamente, alguns invariantes algébricos já eram conhecidos e razoavelmente bem compreendidos nessa época, mas a Teoria de Categorias veio – dentre outras coisas – dar a linguagem de "equivalências" entre alguns desses invariantes já desenvolvidos na Topologia Algébrica.

Na antiguidade o termo categoria era associado aos conceitos puros de predicamentos possíveis acerca do real. Segundo Aristóteles, podemos predicar de um ente real até dez categorias, que albergam as potências significativas do ser. Avançando no tempo, na Era Pós-Iluminista, temos Kant, com sua Crítica á Razão Pura defende que as "categorias clássicas" nada mais são que aspectos de uma forma pura a ser encontrada secundariamente no real. E é neste sentido que a matemática moderna capta o conceito de categoria: a expressão de um puro objeto matemático com estruturas supra-abstratas. Não obstante, criada a categoria matemática, sempre que falarmos desta, estaremos nos referindo ao seu conceito matemático formal.

Inicialmente, a Teoria de Categorias era mais uma linguagem muito abstrata utilizada para tratar problemas muito específicos. Isso gerava uma áurea de dificuldade e de pouco pragmatismo da teoria. Foi então, em 1958, que Alexander Grothendieck aplica a teoria de modo a construir uma nova maquinaria matemática na forma de uma nova Teoria de Cohomologias (GROTHENDIECK, 1958), que permitia um avanço sem precedentes na descrição do comportamento de equações algébricas. Em sequência, Bill Lawvere, em 1963, viu grande potencial na Teoria de Categorias e profere a audaciosa afirmação de que "esta teoria é o novo fundamento para toda a Matemática".

Desde o início do século XIX, matemáticos têm procurado por um novo fundamento da matemática e tinham até então a Teoria de Conjuntos para isso (LAWVERE, 1963). No entanto, a afirmação audaciosa de Lawvere traz uma conclusão profunda acerca do fundamento da Matemática. Explicitamente, à luz da Teoria de Categorias, a Teoria de Conjuntos é apenas uma categoria com algumas propriedades interessantes. Lawvere também é responsável por elucidar como que teorias algébricas inteiras podem ser interpretadas como variações de estruturas categóricas, ajudando a unificar diversas estruturas algébricas sob uma categoria.

Em 1980, Joachim Lambek inicia seus estudos que visam demonstrar como procedimentos e programas utilizados nas ciências computacionais se referem a tipos específicos de categorias, assim como a estrutura gramatical das línguas naturais (PRELLER e J, 2007) (LAMBEK e SCOTT, 2011). Analogamente, Eugenio Moggi introduz na teoria a noção categórica de monadas que são aplicadas nas ciências computacionais (MOGGI, 1991). Importantes contribuições neste campo também foram realizadas por Daniel Kan e com sua modelagem categórica (DWYER, P, *et al.*, 2004).

Até então, a Teoria de Categorias e seu desenvolvimento tiveram fundamental interesse no campo da abstração da abstração, como diriam seus críticos. E sua aplicabilidade estava centrada na generalização da matemática pura. Foi só no início do século XXI que a mesma se torna reconhecida pela comunidade matemática como um método viável, isso implica em cursos de Álgebra e Topologia que incluem o tópico de categorias como tema avançado. De importante citação, o curso do Prof. Spivak no MIT centraliza toda uma metodologia de ensino dessa teoria para cientistas, prevendo prontamente importantes aplicações nas ciências naturais, principalmente na Física e na Biologia.

Em se tratando de Ciência e categorias, alguns trabalhos fundamentais realizados por Baez e Dolan tiveram grande repercussão ao dar novo sentido à Mecânica Quântica por meio dessa teoria (BAEZ e DOLAN, 2004). A categorificação também tem papel muito importante no sentido de transformar sistemas reais em sistemas categóricos (BAEZ, 1998). E finalmente a categorificação de álgebras de altas dimensões como aplicação no estudo de gravitação quântica (BAEZ, 1999). Esta é, aproximadamente, a evolução do estado da arte do assunto desenvolvido neste capítulo. A seguir daremos algumas justificativas do estudo da Teoria de Categorias, que juntamente com o histórico, permite uma aproximação científica do tema.

4.1.1. Motivação da teoria

O conceito de categoria é presente em toda parte na Matemática, unificando-a. O mesmo ocorre nas ciências, pois frequentemente podemos associar abstrações matemática a sistemas reais e estes, por sua vez, são abordados pelas ciências particulares. Algumas estruturas matemáticas frequentemente utilizadas na Física, como: conjuntos, espaços vetoriais, grupos, espaços topológicos, espaços de Banach, variedades, autômatos, etc; podem ser unidas por meio da categoria que implica em maior poder de generalização e interpretação destes sistemas.

A possibilidade de generalização de sistemas Físicos à luz da Teoria de Categorias funciona como uma nova linguagem suprateórica. Esta abordagem permite a abstração de problemas matemáticos de difícil manuseio provenientes destes sistemas, facilitando a descrição, modelagem e solução.

Além dessas características generalizantes, a presente teoria possibilita o desenvolvimento de um simbolismo que gera uma abstração automática das estruturas matemáticas por meio dos diagramas comutativos. Esse dispositivo facilita a identificação das próprias categorias nos diversos contextos e suas propriedades.

Adicionalmente, a teoria permite a transposição de um problema de uma área para outra área, suprido o functor adequado, de modo a facilitar a solução. Por exemplo, um problema de topologia algébrica pode ser resolvido tanto por vias puramente algébricas ou topológicas, mediante o correto functor.

O conceito de categoria é dual, ou seja, quando definimos uma categoria qualquer, automaticamente definimos seu dual e suas propriedades. Isso é verdadeiro, pois a teoria é construída sobre a premissa da dualidade, e cada resultado pertinente a uma categoria específica também será pertinente a sua dual. Essa característica da teoria facilita a descrição em que a dualidade é naturalmente observada, como é o caso de espaços de Hilbert e da Álgebra Bra-ket da Mecânica Quântica (*i. e.*, notação de Dirac).

Além dessas características da teoria, alguns trabalhos sobre a representação de sistemas biológicos sob a perspectiva da Teoria da Categoria têm servido de inspiração para a presente tese (ROSEN, 1958B) (ROSEN, 1958A) (ROSEN, 1959). Adicionalmente os estudos sobre categorificação de diversos ramos da mecânica quântica (BAEZ, 1998) (BAEZ, 1999) (BAEZ e DOLAN, 2004).

4.2. Teoria *per se*

Nesta seção, apresentaremos o conteúdo clássico da teoria de categorias. A primeira referência do assunto é o livro *Categories for the Working Mathematician* (MACLANE, 1998) escrito por Saunder Mac Lane, um dos fundadores da teoria. Nesta tese adotaremos o livro *Abstract and Concrete Category: the joy of cats* (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990), por se tratar da obra mais completa e atualizada, com excelente formalismo matemático.

4.2.1. Categorias e functores abstratos

Basicamente, a Teoria de Categorias é complementar à Teoria de Conjuntos, e também à Teoria de Classes[74]. As seguintes estruturas matemáticas são exemplos de categorias:

i. A classe de todos os conjuntos e as funções entre eles.
ii. A classe de todos os espaços vetoriais e as transformações lineares entre eles.
iii. A classe de todos os grupos, anéis ou álgebras, e todos os homomorfismos entre eles.
iv. A classe de todos os espaços topológicos e todas as funções contínuas entre eles.

Notemos que, o conceito de categoria abordado aqui, deve ser amplo o suficiente de modo a albergar qualquer um destes conjuntos estruturados (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990).

Definição 4.1. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 21) Uma c*ategoria é uma quádrupla* $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ *que consiste em*

1) *uma classe* $\mathcal{O}$*, os quais os membros são denominados* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-objetos,*

2) *para cada par* (A, B) *de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-objetos, existe um conjunto* $hom(A, B)$ *cujos membros são denominados* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-morfismos de A em B. Um dado morfismo* $f \in hom\ (A, B)$ *pode ser escrito como* $f: A \rightarrow B$ *ou* $A \xrightarrow{f} B$.

3) *para cada* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-objeto A, existe um morfismo* $A \xrightarrow{id_A} A$ *denominado* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-identidade em A,*

4) *uma lei de composição* que associa a cada par de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-morfismos* $A \xrightarrow{f} B$ *e* $B \xrightarrow{g} C$, *um* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-morfismo* $A \xrightarrow{g \circ f} C$ *denominado composta de f e g. Este item é sujeito às seguintes condições:*

a) *a composição é associativa, ou seja, para morfismos* $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ *e* $C \xrightarrow{h} D$, *a equação* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ *é satisfeita,*

---
[74] Apresenta-se sucintamente a Teoria de Classes no item A.2 no Anexo A ao fim deste manuscrito.

b) $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-identidades agem como identidades com relação à composição de morfismos, isto é, para um dado* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *tem se que* $id_B \circ f = f$ *e* $f \circ id_A = f$,

c) *os conjuntos* $hom(A, B)$ *da categoria* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *são mutuamente disjuntos.*

Seja $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ uma categoria, então

1) a classe $\mathcal{O}$ de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos é usualmente denotada por $\mathcal{O}b(\boldsymbol{\mathcal{A}})$;

2) a classe de todos os $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismos, denotada por $\mathcal{M}or(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, é definida como a união de todos os conjuntos $hom(A, B)$ em $\boldsymbol{\mathcal{A}}$**;**

3) se $A \xrightarrow{f} B$ é um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo, então A é o dominio de *f*, $dom(f)$; e B é o contradomínio de *f*, $cod(f)$. Notemos que a condição *c* do Item 4 da definição 4.1, implica que cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo possui um único domínio e um único contradomínio, pois os conjuntos $hom(A, B)$ são mutuamente disjuntos. Entretanto, esta condição é dada apenas por razões de precaução, pois uma vez que todas as condições a e b são satisfeitas é fácil forçar a condição c simplesmente trocando a notação de cada morfismo f em $hom(A, B)$ por sua representação tripla (A, f, B). Por esta razão, quando for necessário verificar que alguma entidade é categoria, vamos negligenciar a condição c,

4) a composição $\circ$ é uma operação binária parcial na classe $\mathcal{M}or(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. Isso implica que para um par qualquer (f, g) de morfismos pode ser definida a composição $f \circ g$ se, e somente se, o domínio de *f* coincidir com o contradomínio de *g*,

5) se considerarmos mais de uma categoria utilizaremos os subscritos $hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ para evitar ambiguidade.

Definição 4.2. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 25) *Se* $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\mathcal{O}, hom_{\mathcal{A}}, id, \circ)$ *é categoria, então a categoria dual ou oposta* **de** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *é* $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}} = (\mathcal{O}, hom_{\mathcal{A}^{op}}, id, \circ^{op})$, *em que* $hom_{\mathcal{A}^{op}}(A, B) = hom_{\mathcal{A}}(B, A)$ *e* $f \circ^{op} g = g \circ f$.[75]

Do modo com que a categoria dual é definida, cada afirmação $\mathcal{S}_{\mathcal{A}^{op}}(X)$ concernente à um objeto X de uma categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$, pode ser traduzida em seu equivalente lógico $\mathcal{S}^{op}_{\mathcal{A}}(X)$ concernente ao objeto X na categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Essa observação permite que associemos, em dois

[75] Notemos que as categorias $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$ têm os mesmos objetos, mas com morfismos de sentido invertido.

passos, para cada propriedade $\mathcal{P}$ dos objetos em uma categoria à sua propriedade dual na categoria dual correspondente.

Procedimento 1: consideremos a propriedade $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(X)$ dos objetos X na categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$: $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(X) \equiv$ para qualquer $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A, existe exatamente um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $f: A \to X$.

Passo 1: Em todas as ocorrências de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(X)$ troque por $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$ de modo a obter a propriedade $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}}(X) \equiv$ para qualquer $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$-objeto A, existe exatamente um $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$-morfismo $f: A \to X$.

Passo 2: Traduza $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}}(X)$ em seu equivalente lógico $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(X) \equiv$ para qualquer $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A, existe exatamente um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $f: X \to A$.

De modo mais direto, podemos dizer que $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(X)$ é obtido de $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(X)$ simplesmente trocando o sentido de todos os morfismos e a ordem em que são compostos. É importante notar que, com frequência, $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(X)$ não é equivalente à $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(X)$. Por exemplo, seja ***Set*** a categoria em que por objetos são conjunto e os morfismos são funções. Uma propriedade $\mathcal{P}_{\boldsymbol{Set}}(X)$ é satisfeita se, e somente se, X for conjunto unitário[76], enquanto que a propriedade dual $\mathcal{P}_{\boldsymbol{Set}}^{op}(X)$ é satisfeita se, e somente se, X for o conjunto vazio.[77] Ainda, da mesma maneira que podemos associar propriedades a objetos, o mesmo pode ser realizado em morfismos.

Procedimento 2: consideremos a propriedade $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(f)$ dos morfismos f na categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$:

$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(f) \equiv$ existe um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $B \xrightarrow{g} A$ com $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A = A \xrightarrow{id_A} A$. Em que $g \circ f = id_A$ em $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Passo 1: Todas as ocorrência de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(f)$ é trocado por $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$ de modo a obter a propriedade $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}}(f) \equiv$existe um $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$-morfismo $B \xrightarrow{g} A$ com $\xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} A = A \xrightarrow{id_A} A$. Em que $g \circ f = id_A$ em $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$.

Passo 2: Traduzir $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}}(f)$ para seu equivalente lógico $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(f) \equiv$ existe um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $A \xrightarrow{g} B$ com $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A = A \xrightarrow{id_A} A$. Em que $f \circ g = id_A$ em $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

---

[76] Um conjunto unitário é qualquer conjunto que tenha apenas um membro, ou seja, qualquer conjunto de cardinalidade 1.

[77] Se A é conjunto unitário, então qualquer função de A a um conjunto arbitrário B é injetiva, e o único conjunto não unitário com mesma propriedade é o conjunto vazio.

Por exemplo, seja $\boldsymbol{Set}$ a categoria que tem conjuntos por objetos e funções como morfismos. A propriedade $Q_{\boldsymbol{Set}}(f)$ é satisfeita se, e somente se, *f* é injetiva[78] com domínio não vazio ou a identidade no conjunto vazio, enquanto que a propriedade dual $Q_{\mathcal{A}}^{op}(f)$ é satisfeita se, e somente se, *f* é sobrejetiva[79].

Se propriedades mais complexas são envolvidas, como $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A, B, \dots, f, g, \dots)$ que envolve *A*, *B*,... e morfismos *f*, *g*,... na categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, também podemos dualiza-la de modo similar. Se $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A, B, \dots, f, g, \dots)$ satisfaz todos os $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos *A*, *B*, ... e todos os $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismos *f*, *g*, ... então dizemos que $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ tem a propriedade $\mathcal{P}$ ou que $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ é satisfeita. Se $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ é satisfeita, pelos procedimentos 1 e 2, temos que $\mathcal{P}^{op}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ também é satisfeita. Este resultado nos remete ao seguinte princípio fundamental da Teoria de Categorias.

O Princípio de Dualidade para Categorias afirma que (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 27)**:** *Sempre que a propriedade $\mathcal{P}$ é válida para toda categoria, então a propriedade $\mathcal{P}^{op}$ também é válida para toda categoria.*

Prova: A prova segue imediatamente de duas consequências da definição de categoria dual e da equivalência lógica de propriedades. Se para toda categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ e propriedade $\mathcal{P}$ forem satisfeitas

I. $(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op})^{op} = \boldsymbol{\mathcal{A}}$, e
II. $\mathcal{P}^{op}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ é satisfeita se, e somente se, $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op})$ também o for.

I) Por definição, $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}} = (\mathcal{O}, hom_{\mathcal{A}^{op}}, id, \circ^{op})$ e $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\mathcal{O}, hom_{\mathcal{A}}, id, \circ)$. Então basta provarmos as igualdades $(hom_{\mathcal{A}^{op}})^{op} = hom_{\mathcal{A}}$ e $(\circ^{op})^{op} = \circ$, pois os objetos e identidades se mantêm constantes ao longo das categorias $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Vamos supor que $A, B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}})$, logo $hom_{\mathcal{A}^{op}}(A, B) = hom_{\mathcal{A}}(B, A) \Rightarrow \left(hom_{\mathcal{A}^{op}}(A, B)\right)^{op} = (hom_{\mathcal{A}}(B, A))^{op} \Rightarrow \left(hom_{\mathcal{A}^{op}}(A, B)\right)^{op} = hom_{\mathcal{A}}(A, B)$. Como os objetos *A* e *B* são arbitrários, então $(hom_{\mathcal{A}^{op}})^{op} = hom_{\mathcal{A}}$.

Agora, vamos supor que $f, g \in \mathcal{M}or(\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}})$, logo $f \circ^{op} g = g \circ f \Rightarrow (f \circ^{op} g)^{op} = (g \circ f)^{op} \Rightarrow (f \circ^{op} g)^{op} = f \circ g$. Como os morfismos *f* e *g* são arbitrários, então $(\circ^{op})^{op} = \circ$.

---

[78] Se $f: X \to Y$ é função, e se $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, então *f* é função injetora.
[79] Se $f: A \to B$ é função, e se $\forall b \in B, \exists a \in A: b = f(a)$, então *f* é função sobrejetora.

II) ($\Rightarrow$) Supor a propriedade $\mathcal{R}^{op} = \mathcal{R}^{op}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. Podemos definir que se $\mathcal{R}^{op}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ é satisfeita, então $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(X)$ e $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(f)$ são satisfeitas para qualquer $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto X e $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo *f*. Como $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(X) \Leftrightarrow \mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op}}(X)$ e $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(f) \Leftrightarrow \mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op}}(f)$, então $\mathcal{R}(\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}})$ é satisfeita quando $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op}}(X)$ e $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op}}(f)$ forem satisfeitas. Isso implica que $\mathcal{R}^{op}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \Rightarrow \mathcal{R}(\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}})$.

($\Leftarrow$) Analogamente, vamos supor a propriedade $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}})$. Então definimos que se $\mathcal{R}(\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}})$ é satisfeita, então $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op}}(X)$ e $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op}}(f)$ também devem satisfeitas para qualquer $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$-objeto X e $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$-morfismo *f*. Como $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op}}(X) \Leftrightarrow \mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(X)$ e $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op}}(f) \Leftrightarrow \mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(f)$, então $\mathcal{R}^{op}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ é satisfeita quando $\mathcal{P}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(X)$ e $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}^{op}(f)$ forem satisfeitas. Isso implica que $\mathcal{R}(\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}) \Rightarrow \mathcal{R}^{op}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$.

Com isso temos que $\mathcal{R}^{op}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \Rightarrow \mathcal{R}(\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}})$ e $\mathcal{R}(\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}) \Rightarrow \mathcal{R}^{op}(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, logo $\mathcal{R}^{op}(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \Leftrightarrow \mathcal{R}(\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}})$. ■

Devido a esse princípio, cada resultado na Teoria de Categoria tem duas formulações equivalentes; no entanto, ao provamos uma delas a outra é automaticamente satisfeita. Frequentemente a propriedade dual $\mathcal{P}^{op}$, em relação a uma propriedade $\mathcal{P}$, é denotada como $co - \mathcal{P}$. Se $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{op}$, então a propriedade é denominada autodual.

Definição 4.3. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 28) *Um morfismo $f: A \rightarrow B$ em uma categoria é denominado isomorfismo quando existe um morfismo $g: B \rightarrow A$ com $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$. O morfismo g é denominado inverso de f.*

Da definição acima, segue-se diretamente que a propriedade “ser isomorfismo” é autodual. Ou seja, *f* é isomorfismo em $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ se, e somente se, *f* também o for em $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$.

Proposição 4.1. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 28) *Se $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ e $h: B \rightarrow A$ são morfismos tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ h = id_B$, então $g = h$.*

Prova: $h = id_A \circ h = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (id_B) = g \Rightarrow h = g$. ■

A Proposição 4.1 refere-se à unicidade do inverso de um morfismo. Denotaremos o inverso de um isomorfismo *f* por f^{-1}. Note-se como $id_A = {id_A}^{-1}$, donde se segue que toda identidade é isomorfismo.

Proposição 4.2. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 29)**:**

I. *Se* $A \xrightarrow{f} B$ *é isomorfismo, então* $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ *também será isomorfismo e* $(f^{-1})^{-1} = f$.

II. *Se* $A \xrightarrow{f} B$ *e* $B \xrightarrow{g} C$ *são isomorfismos, então* $A \xrightarrow{g \circ f} C$ *também será isomorfismo e* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Prova: I) Como $f: A \to B$ é isomorfismo, existe $g: B \to A$, tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$; pela Proposição 4.1, o inverso é único, donde $g = f^{-1}$. É claro que $g^{-1} = f$, isto é, $(f^{-1})^{-1} = f$

II) Pela associativa pela e definição de inverso de morfismo, temos que $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_C$. Analogamente, $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_B \circ f = f^{-1} \circ f = id_A$. ■

O conceito de isomorfismo é uma relação de equivalência na classe $Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. A reflexividade segue do fato de que identidades sempre são isomorfas; a simetria e a transitividade seguem imediatamente da Proposição 4.2. Objetos isomorfos são "essencialmente" os mesmos.

Um importante aspecto da Teoria de Categorias é que os morfismos, mais do que os objetos, são centrais no conceito de categoria. Isso significa que podemos definir categoria apenas em termos de morfismos, sem utilizar o conceito de objetos. Isso será revisado mais tarde. No entanto, para chegarmos a tal resultado, devemos apresentar um dos conceitos fundamentais da teoria: os functores.

Definição 4.4. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 29,30) *Se* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *são categorias, então um functor F de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *em* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *é a função que associa cada* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-objeto A, um* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*-objeto* $F(A)$ *e cada* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-morfismo* $A \xrightarrow{f} A'$, *um* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*-morfismo* $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(A')$, *tal que*

1) *F preserva a composição de morfismos, ou seja,* $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ *se* $f \circ g$ *é definida, e*

2) *F preserva os morfismos identidade, isto é,* $F(id_A) = id_{F(A)}$ *para cada* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-objeto A.*

Podemos denotar functores de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ a $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ por $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ ou $\boldsymbol{\mathcal{A}} \xrightarrow{F} \boldsymbol{\mathcal{B}}$. Também é possível utilizar as notações simplificadas FA e Ff ao invés de $F(A)$ e $F(f)$, respectivamente. Em sentido de síntese, podemos denotar ambas as notações na forma de uma notação atômica de aplicação de functor $F\left(A \xrightarrow{f} B\right) = FA \xrightarrow{Ff} FB$. Note que um functor $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ é tecnicamente uma família de funções, ou seja, uma função de $Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ para $Ob(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ e, para cada par (A, A') de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos, existe uma função de $hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A, A')$ para $hom_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(FA, FA')$. Como functores preservam morfismos-identidade e como existe uma bijeção entre a classe dos objetos e a classe dos morfismos-identidade em uma categoria, a parte correspondente a função entre objetos na família F é totalmente determinada pela parte correspondente à função entre tais morfismos. Como citado no início desta seção, veremos mais adiante uma definição mais geral de categoria que é independente dos objetos. Desse modo, functores entre categorias poderiam ser definidos como funções simples entre suas classes de morfismos preservando identidade e composição.

Um exemplo de functor em uma categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, é o functor identidade $id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}}$ definido por $id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\left(A \xrightarrow{f} B\right) = A \xrightarrow{f} B$ para todo $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A e B e para todo $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $f: A \to B$. Outro exemplo é o functor constante: sejam $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ categorias e seja B um $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-objeto; defina o functor constante $C_B: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ de valor B, como sendo $C_B\left(A \xrightarrow{f} A'\right) = B \xrightarrow{id_B} B$. O functor constante C_B associa cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos a um único $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-objeto B, e associa cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo a um único $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-morfismo identidade, id_B.

Exemplos de constructos são: a categoria dos espaços vetoriais $\boldsymbol{Vec}$, a categoria dos espaços topológicos $\boldsymbol{Top}$, a categoria dos grupos $\boldsymbol{Grp}$, a categoria dos anéis $\boldsymbol{Rng}$, dentre outras.

Definição 4.5. *Se $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é uma categoria, então existe um functor forgetful*[80] $U: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$, *tal que, para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A associa um conjunto $U(A)$ e a cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo f uma função $U(f)$ tal que $U(f) = f$.*[81]

[80] Ao longo de toda a exposição dessa teoria, iremos manter os nomes dos conceitos matemáticos em inglês, pois assim evitamos neologismos desnecessários e imprecisos.
[81] A categoria ***Set*** é a categoria de conjuntos e funções.

O functor forgetful, como o próprio nome sugere, é de grande importância para a Teoria de Categorias, pois muito frequentemente trabalhamos com constructos. É um functor que reduz a abstração diminuindo a escala em que trabalhamos.

Definição 4.6. *Um constructo é uma categoria* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *domínio do functor underlying.*

O functor forgetful, como o próprio nome sugere, é de grande importância para a Teoria de Categorias, pois muito frequentemente trabalhamos com constructos. É um functor que reduz a abstração diminuindo a escala em que trabalhamos.

Definição 4.7. *Seja* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *uma categoria e seja A um* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-objeto. Então, existe um functor covariante hom-functor* $hom(A,-)\colon \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$ *definido como*

$$hom(A,-)\left(B \xrightarrow{f} C\right) = hom(A,B) \xrightarrow{hom\,(A,f)} hom(A,C)$$

em que $\mathrm{hom}(A,f)\,(g) = f \circ g$, *onde* $g \in hom(A,B)$ *e* $(f \circ g) \in \mathrm{hom}(A,C)$.

Para melhor entendimento desse functor, vejamos com o mesmo atua. Fixado um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos A o functor $hom(A,-)$ associa os $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos B *e* C, e para cada morfismo $B \xrightarrow{f} C$, um morfismo $hom\,(A,f)$ entre os objetos $hom(A,B)$ e $hom(A,C)$ tal que, para um dado $g \in hom(A,B)$ o functor mapeia g ao morfismo $\mathrm{hom}(A,f)\,(g) = f \circ g$.

Definição 4.8. *Seja* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *uma categoria e A um* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-objeto. O functor contravariante hom-functor* $hom(-,A)\colon \boldsymbol{\mathcal{A}}^{op} \to \boldsymbol{Set}$ ***é*** *definido como*

$$hom(-,A)\left(B \xrightarrow{f} C\right) = hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(B,A) \xrightarrow{\mathrm{hom}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\,(f,A)} \mathrm{hom}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(C,A)$$

em que $\mathrm{hom}(f,A)\,(g) = g \circ f$, *onde* $g \in hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(B,A)$ *e* $(g \circ f) \in hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(C,A)$.

Note que o hom-functor contravariante efetua o processo inverso do hom-functor covariante. Isso fica mais claro ao reescrevermos a atuação do functor sobre o morfismo

$B \xrightarrow{f} C,$

$hom(-,A)\left(B \xrightarrow{f} C\right) =$

$hom_{\mathcal{A}}(B,A) \xrightarrow{\mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(f,A)} \mathrm{hom}_{\mathcal{A}}(C,A) =$

$hom_{\mathcal{A}^{op}}(A,B) \xrightarrow{\mathrm{hom}_{\mathcal{A}^{op}}(A,f)} \mathrm{hom}_{\mathcal{A}^{op}}(A,C).$

Analogamente ao functor covariante, o functor contravariante $hom(-,A)$ associa para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$-objetos ($= \boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos) A, B, C, e para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$-morfismo $B \xrightarrow{f} C$, um morfismo $hom\,(f,A)$ entre os objetos $hom_{\mathcal{A}}(B,A)$ e $hom_{\mathcal{A}}(C,A)$ tal que, para um dado $g \in hom_{\mathcal{A}}(B,A)$ o functor atribui g ao morfismo $\mathrm{hom}(A,f)\,(g) = f \circ g$.

Definição 4.9. *Seja $\mathcal{P}A$ o conjunto das partes de A e $\mathcal{P}B$ o conjunto das partes de B. O functor covariante powerset $\mathcal{P}$: $\boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Set}$ é definido como $\mathcal{P}\left(A \xrightarrow{f} B\right) = \mathcal{P}A \xrightarrow{\mathcal{P}f} \mathcal{P}B$; tal functor associa para cada $X \subseteq A$ o conjunto $\mathcal{P}f(X)$, que é a imagem de X pela função f.*

Definição 4.10. *O functor contravariante powerset $\mathcal{Q}$: $\boldsymbol{Set^{op}} \to \boldsymbol{Set}$ é definido como $\mathcal{Q}\left(A \xrightarrow{f} B\right) = \mathcal{Q}A \xrightarrow{\mathcal{Q}f} \mathcal{Q}B$, em que $\mathcal{Q}A$ é o conjunto das partes de A e $\mathcal{Q}B$ o conjunto das partes de B. Para cada $X \subseteq A$ o functor associa ao conjunto $\mathcal{Q}f(X)$,* que é a pré-imagem $f^{-1}[X]$ de X sob a função $f: B \to A$.

Definição 4.11. *Para um inteiro qualquer n, o functor de n-ésima potência $\mathcal{S}^n$: $\boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Set}$ é definido como $\mathcal{S}^n\left(X \xrightarrow{f} Y\right) = X^n \xrightarrow{f^n} Y^n$, em que $f^n(x_1, \dots, x_n) = \big(f(x_1), \dots, f(x_n)\big)$.*

Proposição 4.3. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 32) *Todo functor F: $\boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ preserva isomorfismo, isto é, sempre que $A \xrightarrow{k} A'$ é $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-isomorfismo, então $F(k)$ é $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-isomorfismo.*

Prova: Se k é isomorfismo, então existe k^{-1} tal que $k \circ k^{-1} = id_{A'}$ e $k^{-1} \circ k = id_A$. Como o functor preserva composição, temos que $F(k) \circ F(k^{-1}) = F(k \circ k^{-1}) = F(id_{A'}) = id_{FA'}$. De modo similar, $F(k^{-1}) \circ F(k) = F(k^{-1} \circ k) = F(id_A) = id_{FA}$. ■

Proposição 4.4. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 33) *Se* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *e* $G: \boldsymbol{\mathcal{B}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ ***são*** *functores, então a composta* $G \circ F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ *definida por* $G \circ F\left(A \xrightarrow{f} A'\right) = G(FA) \xrightarrow{G(Ff)} G(FA')$ *é functor.*

Prova: Queremos provar que $G \circ F$ é functor. Para isso, temos que mostrar:

I. $G \circ F$ preserva composições de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismos e

II. $G \circ F$ preserva identidades de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

I) Sejam $A \xrightarrow{f} A'$ e $A' \xrightarrow{g} A''$ morfismos, de modo que existe a composta $g \circ f: A \to A''$. Tornando a composta $g \circ f$ na forma de relação atômica da categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, temos $A \xrightarrow{g \circ f} A''$. Agora basta utilizarmos as propriedades de functores de *F* e *G*.

$$F\left(A \xrightarrow{g \circ f} A''\right) = FA \xrightarrow{F(g \circ f)} FA'' = FA \xrightarrow{Fg \circ Ff} FA'' \Rightarrow$$

$$G \circ F\left(A \xrightarrow{g \circ f} A''\right) = G\left(FA \xrightarrow{F(g \circ f)} FA''\right) = G(FA) \xrightarrow{GFg \circ GFf} G(FA''). \blacksquare$$

Em que A, A'' são $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos, FA, FA'' são $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-objetos e $G(FA), G(FA'')$ são $\boldsymbol{\mathcal{C}}$-objetos.

II) Pelo definição de categoria, sempre existe um morfismo identidade $id_A: A \to A$. Com isso, basta utilizarmos as propriedades de functores de *F* e *G*.

$$F\left(A \xrightarrow{id_A} A\right) = FA \xrightarrow{F(id_A)} FA = FA \xrightarrow{id_{FA}} FA \Rightarrow$$

$$G \circ F\left(A \xrightarrow{id_A} A\right) = G\left(FA \xrightarrow{F(id_A)} FA\right) = G\left(FA \xrightarrow{id_{FA}} FA\right) = G(FA) \xrightarrow{id_{G(FA)}} G(FA). \blacksquare$$

Definição 4.12. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 33) *Seja* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *functor, será isomorfismo se existir o functor* $G: \boldsymbol{\mathcal{B}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}}$ *tal que* $G \circ F = id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ *e* $F \circ G = id_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$. *Se o functor F é isomorfismo então as categorias* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *são denominadas isomorfas.*

O functor *G* definido acima é totalmente determinado pelo functor *F*. E é único, usualmente denotado por F^{-1}. Quando dizemos que uma categoria é isomorfa a outra, é o mesmo que dizermos que existe uma relação de equivalência sobre o conglomerado de todas as categorias. Nestes termos, categorias isomorfas são consideradas "essencialmente" as mesmas (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990).

Definição 4.13. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 34) *Seja* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *functor,*

1) *F é denominado embedding se for injetivo nos morfismos, e*

2) *F é denominado faithful se houver a restrição em todos os conjuntos hom de modo que* $F: hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A, A') \rightarrow hom_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(FA, FA')$ *é injetivo.*

3) *F é full se a restrição de F a cada conjunto hom é sobrejetiva, e*

4) *F é denominado amnestic se para todo* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-isomorfismo f for identidade sempre que Ff também é identidade.*

Proposição 4.5. *Seja* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *functor. F é embedding se, e somente se, é faithful e injetivo nos objetos.*

Prova: ($\Rightarrow$) Se F é embedding, então $\forall f, g \in hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\, tal\; que\; f \neq g \Rightarrow Ff \neq Fg$. Supor que $f, g \in hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A, A')$, ou seja, $A \xrightarrow{f} A'$ e $A \xrightarrow{g} A'$. Se $f \neq g$, então $F\left(A \xrightarrow{f} A'\right) \neq F\left(A \xrightarrow{g} A'\right) \Rightarrow FA \xrightarrow{Ff} FA' \neq FA \xrightarrow{Fg} FA' \Rightarrow Ff \neq Fg$. Sejam A e A' objetos tal que $A \neq A'$. Então $id_A \neq id_{A'}$; como F é embedding segue-se que $F(id_A) \neq F(id_{A'}) \Rightarrow id_{FA} \neq id_{FA'}$, donde $FA \neq FA'$.

($\Leftarrow$) Sejam f e g $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismos com $f \neq g$. Devemos provar que $Ff \neq Fg$. Se $dom(f) \neq dom(g)$, então $dom(Ff) \neq dom(Fg) \Rightarrow Ff \neq Fg$. O caso em que $cod(f) \neq cod(g)$ é análogo ao caso anterior. Suponha então que $f, g: A \rightarrow B$ e $f \neq g$. Como $f, g \in$ hom(A, B), e como F é faithful, segue-se $Ff \neq Fg$.■

Proposição 4.6. *Seja* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *functor. F é isomorfismo se, e somente se, F é full, faithful e bijetivo nos objetos.*

Prova: ($\Rightarrow$) Se F é isomorfismo, então existe um functor $G: \boldsymbol{\mathcal{B}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ tal que $G \circ F = id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\; e\; F \circ G = id_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$. Como F é uma função bijetora de $Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ para $Ob(\boldsymbol{\mathcal{B}})$, bem com uma bijeção de $\mathcal{M}or(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ para $\mathcal{M}or(\boldsymbol{\mathcal{B}})$, o resultado é imediato.

($\Leftarrow$) Sabemos que F é bijetora nos objetos. Como F é injetora e sobrejetora em todo conjunto $hom_{\mathcal{A}}$, segue-se que F é bijetora tanto nos objetos como nos morfismos, logo F possui inversa. Assim, F é isomorfismo. ■

Proposição 4.7. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 35) *Sejam $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ functores. Então:*

I. *Se F e G são isomorfismos, então $G \circ F$ também será.*

II. *Se $G \circ F$ é embedding, então F também será.*

III. *Se F é sobrejetor nos objetos e se $G \circ F$ é full, então G também será full.*

Prova: I) Utilizando a associatividade de functores e a definição de inverso de um functor, temos que $(G \circ F) \circ (F^{-1} \circ G^{-1}) = G \circ (F \circ F^{-1}) \circ G^{-1} = G \circ id_{\mathcal{B}} \circ G^{-1} = G \circ G^{-1} = id_{\mathcal{C}}$. Analogamente $(F^{-1} \circ G^{-1}) \circ (G \circ F) = F^{-1} \circ (G^{-1} \circ G) \circ F = F^{-1} \circ id_{\mathcal{B}} \circ F = F^{-1} \circ F = id_{\mathcal{A}}$

II) Como $G \circ F$ é embedding, então $\forall f, g \in \mathcal{M}or(\mathcal{A}): f \neq g \Rightarrow G(Ff) \neq G(Fg)$. Os casos em que $dom(f) \neq dom(g)$ e $cod(f) \neq cod(g)$ são análogos à demonstração da Proposição 4.5. Supor que $f, g: A \to B$ com $f \neq g$; como $G \circ F$ é embedding, temos que $G(Ff) \neq G(Fg) \Rightarrow G(FA \xrightarrow{Ff} FA') \neq G\left(FB \xrightarrow{Fg} FB'\right)$. Como G é função, segue-se que $FA \xrightarrow{Ff} FA' \neq FB \xrightarrow{Fg} FB'$.

III) Sejam B, B' in $\mathcal{B}$-objetos. Devemos provar que para cada $f_{\mathcal{C}} \in hom_{\mathcal{C}}(G(B), G(B'))$, existe $f_{\mathcal{B}} \in hom_{\mathcal{B}}(B, B')$ tal que $G(f_{\mathcal{B}}) = f_{\mathcal{C}}$. Como F é sobrejetor nos objetos, existem $A, A' \in \mathcal{O}b(\mathcal{A})$ tal que $B = FA$ e $B' = F(A')$. Como $G \circ F$ é full, então dado $f_{\mathcal{C}} \in hom_{\mathcal{C}}([G \circ F](A), [G \circ F](A')) = hom_{\mathcal{C}}(G(B), G(B'))$, existe $f_{\mathcal{A}} \in hom_{\mathcal{A}}(A, A')$ tal que que $[G \circ F](f_{\mathcal{A}}) = f_{\mathcal{C}}$. Tomando $f_{\mathcal{B}} = F(f_{\mathcal{A}})$, segue-se que $G(f_{\mathcal{B}}) = f_{\mathcal{C}}$, donde G é full. ■

Proposição 4.8. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 35) *Seja $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um functor full e faithful.*

1) *Para todo $\mathcal{B}$-morfismo $f: FA \to FA'$, existe um único $\mathcal{A}$-morfismo $g: A \to A'$ de modo que $Fg = f$.*
2) *g é $\mathcal{A}$-isomorfismo se, e somente se, f é $\mathcal{B}$-isomorfismo.*

Prova: 1) Como F é full, para todo $f \in hom_{\mathcal{B}}(FA, FA'), \exists g \in hom_{\mathcal{A}}(A, A')$ tal que $Fg = f$. Como F é faithful, se $f \in hom_{\mathcal{B}}(FA, FA')$, então $\exists!\, g \in hom_{\mathcal{A}}(A, A'): Fg = f$. Portanto, *existe um único* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-morfismo* $g: A \to A'$ *tal que* $Fg = f$.

2) ($\Rightarrow$) Segue-se diretamente da Proposição 4.3.

($\Leftarrow$) Se f é $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-isomorfismo, então existe $f^{-1}: FA' \to FA$ tal que $f \circ f^{-1} = id_{FA'}$ e $f^{-1} \circ f = id_{FA}$. Como F é functor, segue-se que $id_{FA} = f^{-1} \circ f = F(g^{-1}) \circ F(g) = F(g^{-1} \circ g) = F(id_A)$. Como F é faithful, segue-se que $g^{-1} \circ g = id_A$. Analogamente, $id_{FA'} = f \circ f^{-1} = F(g) \circ F(g^{-1}) = F(g \circ g^{-1}) = F(id_{A'})$. Assim, $g \circ g^{-1} = id_{A'}$, donde g é $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-isomorfismo. ■

Corolário 4.1. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 35) *Todo functor* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *que é full e faithful, reflete isomorfismo, isto é, sempre que* g *é* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-morfismo, tal que* Fg *é* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*-isomorfismo, então* g *é* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-isomorfismo.*

Prova: A demonstração é imediata pela aplicação da Proposição 4.8.

Definição 4.14. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 36) *Seja* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *functor, F é denominado equivalência se é functor full, faithful e isomorfo-denso, ou seja, para qualquer* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*-objeto B, existe algum* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-objeto A tal que* $F(A)$ *é isomorfo a B. Diz-se que as categorias* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *são equivalentes se existe uma equivalência entre as mesmas.*

É fácil ver que a equivalência entre categorias é uma relação de equivalência no conglomerado de todas as categorias. Como mencionado anteriormente, categorias isomorfas são consideradas “essencialmente” as mesmas (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990). De um modo geral, categorias isomorfas tem um sentido de igualdade mais restrito que categorias equivalentes.

Proposição 4.9. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 37) *Se* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *é uma equivalência, então existe uma equivalência* $G: \boldsymbol{\mathcal{B}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Prova: Para cada $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-objeto B, existe (pelo menos) um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A, tal que $F(A) = B$ pelo critério de densidade de F; então defini-se $G(B) = A$ é $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto, e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-isomorfismo

$\varepsilon_B: F(G(B)) \to B$. Como F é full e faithful, então para cada $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-isomorfismo $g: B \to B'$ existe um único $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-isomorfismo $G(g): G(B) \to G(B')$, em que $F\big(G(g)\big) = \varepsilon_B{}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_B: F(G(B)) \to F(G(B'))$.

Como $G(g)$ é única por definição, então também será o único $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo com o qual o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} F(G(B)) \arrow[r, "F(G(g))"] \arrow[d, "\varepsilon_B"'] & F\big(G(B')\big) \arrow[d, "\varepsilon_{B'}"] \\ B \arrow[r, "g"] & B' \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Que *G* preserva identidade segue imediatamente da unicidade requerida no diagrama acima. Mas o fato que *G* preserva a composição segue da unicidade, da comutatividade do diagrama abaixo e do fato que *F* preserva composição.

$$\begin{tikzcd} F\big(G(B)\big) \arrow[r, "F(G(g))"] \arrow[d, "\varepsilon_B"'] & F\big(G(B')\big) \arrow[r, "F(G(h))"] \arrow[d, "\varepsilon_{B'}"] & F(G(B'')) \arrow[d, "\varepsilon_{B''}"] \\ B \arrow[r] & B' \arrow[r] & B'' \end{tikzcd}$$

Assim *G* é functor e é full pois para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $f: G(B) \to G(B')$, o morfismo $\varepsilon_{B'} \circ F(f) \circ \varepsilon_B{}^{-1}: B \to B'$ tem a propriedade $g \circ \varepsilon_B = \varepsilon_{B'} \circ F(f)$. Isso implica, pela unicidade (*), que $f = G(g)$. Adicionalmente, G é faithful dado que $B \overset{g_1}{\to} B'$ e $B \overset{g_2}{\to} B'$ com $G(g_1) = G(g_2) = f$, de modo que a aplicação da unicidade, nos dá $g_1 = \varepsilon_{B'} \circ F\big(G(g_1)\big) \circ \varepsilon_B{}^{-1} = \varepsilon_{B'} \circ F(f) \circ \varepsilon_B{}^{-1} = \varepsilon_{B'} \circ F(G(g_2))) \circ \varepsilon_B{}^{-1} = g_2$. Finalmente, *G* é isomorfo-denso, pois para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto, o $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-isomorfismo isomorfismo $\varepsilon_{FA}: F(G(FA)) \to FA$ é imagem de algum $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-isomorfismo *x*, $G(FA) \overset{x}{\to} A$. ■

Proposição 4.10. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 37) *Sejam* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *e* $G: \boldsymbol{\mathcal{B}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}}$ *equivalências, então* $H \circ F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}}$ *é equivalência.*

Prova: Utilizando os resultados da Proposição 4.7, basta provarmos que $H \circ F$ é isomorfismo-denso. Dado um $\boldsymbol{\mathcal{C}}$-objeto C, e como ambos F e H são isomorfismo-densos, consideremos que para um $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-objeto B e isomorfismo $h: H(B) \rightarrow C$; e para um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A, com isomorfismo $k: F(A) \rightarrow B$. Implica que $h \circ H(k): (H \circ F)(A) \rightarrow C$ é isomorfismo. ■

Definição 4.15. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 38) *As categorias* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *são denominadas dualmente equivalentes se* $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *são equivalentes.*

Definição 4.16. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 38) *Dado um functor* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$*, o functor dual (ou oposto)* $F^{op}: \boldsymbol{\mathcal{A}^{op}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}^{op}}$ *é o functor definido por*

$$F^{op}\left(A \xrightarrow{f} A'\right) = FA \xrightarrow{Ff} FA'.$$

O functor F^{op} é a função dual de $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$, em que os objetos são preservados mas a inversão no sentido dos morfismos são carregados; logo $(F^{op})^{op} = F$.

Proposição 4.11. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 39) *Cada uma das seguintes propriedades de functores são auto-duais: isomorfismo, embedding, faithful, full, isomorfo-denso e equivalência.*

Prova: A proposição segue diretamente do Princípio da Dualidade de Categorias e pelas propriedades de functor.

Podemos pensar que os functores agem como morfismos em uma “supra-categoria”, em que objetos são categorias e morfismos são functores. Desta ideia surge o conceito de categoria de categorias. No entanto, ao definirmos esse tipo de estrutura, uma das restrições na definição de categoria é violada: a coleção de todos objetos de uma categoria formam uma classe. Entretanto, note que, ao compor uma “categoria de todas as categorias”, a coleção de objetos pode não ser classe, mas sim conglomerado próprio.

Definição 4.17. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 39) *Uma categoria* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *será denominada categoria pequena se a classe de seus objetos* $Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *é conjunto. De outra maneira será categoria grande.*

É importante notar que quando $Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ é conjunto, então $Mor(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ também deve ser conjunto devido à compatibilidade hierárquica na Teoria de Classes. Isso também implica que a quádrupla que define a categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}}), hom, id, \circ)$ é conjunto.

Definição 4.18. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 40) *A categoria* $\boldsymbol{Cat}$ *de categorias pequenas tem como objetos, categorias pequenas, morfismos entre* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *todos os functores de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *a* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*, identidades como functores identidade e composição como composição usual de functores.*

1. O conceito de $\boldsymbol{Cat}$ segue imediatamente dos fatos
   a. como cada categoria pequena é conjunto, o conglomerado de todas as categorias pequenas é uma classe, e
   b. para cada par ($\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$) *de categorias pequenas, o conglomerado de todos os functores de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *a* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *é um conjunto.*
2. $\boldsymbol{Cat}$ não é categoria pequena. Isso pode ser verificado pelo fato de que existem full embeddings de cada constructo, por exemplo, $\boldsymbol{Set}$ ou $\boldsymbol{Mon}$**,** em $\boldsymbol{Cat}$**.**

Devido ao fato de que, pelo Paradoxo de Russel, não podemos formar uma categoria de todas as categorias em sentido restrito, é necessário que lancemos mão de um novo conceito que satisfaça as propriedades de uma coleção de todas as categorias.

Definição 4.19. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 40) *Uma quasicategoria é uma quádrupla* $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ *definida de forma semelhante ao conceito de categoria a menos de duas generalizações: a coleção de objetos* $\mathcal{O}$ *pode não ser classe e cada coleção* $\hom(A, B)$ *pode não ser conjunto. Explicitamente:*

1) $\mathcal{O}$ *é conglomerado e seus membros são denominados objetos.*

2) Para cada par (A, B) *de objetos, existe um conglomerado* $\hom(A, B)$ *denominado conglomerado de todos os morfismos de* A *a* B.

3) *Para cada objeto A, existe um morfismo identidade $id_A: A \to A$.*

4) *Para cada par de morfismos, $f: A \to B$ e $g: B \to C$, existe uma composta de morfismos $g \circ f: A \to C$ sujeita a seguintes condições:*

i. *A composição é associativa.*

ii. *Morfismos identidades agem como identidades com relação à composição de morfismos.*

iii. *O conglomerado* hom (A, B) *é disjunto par a par.*

Definição 4.20. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 40) *A quasicategoria $\boldsymbol{CAT}$ de todas as categorias tem como objetos todas as categorias, como morfismos de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ a $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ todos os functores $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$, como identidades, todos os functores identidade $id_{\mathcal{A}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}}$, e como composição, as composições usuais de functores.*

1. Como toda classe é conglomerado, então toda categoria é quasicategoria.

2. A quasicategoria $\boldsymbol{CAT}$ é uma quasicategoria própria, isso implica que não é categoria no sentido da Definição 4.1.

3. Notemos que todo conceito na Teoria de Categorias tem um análogo natural a sua quasicategoria subjacente. A notação para essas quasicategorias são iguais aos seus conceitos categóricos. Consequentemente, as noções de functores entre quasicategorias, de equivalências, de quasicategorias discretas e thin; estão automaticamente definidas.

4. A partir do conceito de $\boldsymbol{CAT}$ podemos gerar resultados análogos aos encontrados em categorias; Isso permite que generalizemos algumas propriedades independente do contexto "local" evitando cair no paradoxo de Russell.

Anteriormente, em uma nota de roda-pé, explicitamos uma correspondência bijetiva entre a classe de objetos e a classe de morfismos identidade em uma categoria qualquer. Ademais, ao explorarmos a propriedade de compatibilidade da identidade com a composta de morfismos, é possível que definamos categoria independente de sua classe de objetos. Tal definição deve ser essencialmente equivalente àquela dada na Definição 4.1. Por hora, consideremos o conceito de álgebra binária parcial para definir categoria livre de objetos.

Definição 4.21. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 41)

1) Uma álgebra binária parcial é um par $(X,*)$ *que consiste de uma classe* X *e uma operação binária parcial* $*$ *em* X*, isto é, uma operação binária é definida em uma subclasse de* $X \times X$.

2) Se $(X,*)$ *é uma álgebra binária parcial, então um elemento* u *de* X *é denominado unidade de* $(X,*)$ *se* $x * u = x$ *sempre que* $x * u$ *é definido e* $u * y = y$ *sempre que* $u * y$ *é definido.*

Definição 4.22. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 42) *Uma categoria livre de objetos é uma álgebra binária parcial* $\boldsymbol{\mathcal{C}} = (M,\circ)$ *em que os membros de* M *são denominados morfismos que devem satisfazer as seguintes condições:*

1) Condições de correspondência: para os morfismos f, g e h, as seguintes condições são equivalentes:

a. $g \circ f$ e $f \circ g$ são definidas,

b. $h \circ (g \circ f)$ é definida, e

c. $(h \circ g) \circ f$ é definida.

2) Condições de associatividade: se os morfismos f, g, e h satisfizerem as condições de correspondência então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

3) Condição de existência de unidade: para todo morfismo f, existe unidades u_C *e* u_D *de* $(M,\circ)$ *tal que* $u_C \circ f$ *e* $f \circ u_D$ *são definidas.*

4) Condição de smallness: para todo par de unidades (u_1, u_2) *de* $(M,\circ)$ *a classe* $hom(u_1, u_2) = \{f \in M | f \circ u_1 \text{ e } u_2 \circ f \text{ são } definidas\}$ *é um conjunto.*

Proposição 4.12. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 42) *Se* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *é categoria, então*

1) $(Mor(\boldsymbol{\mathcal{A}}),\circ)$ *é uma categoria livre de objetos, e*

2) Um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-morfismo é uma* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-identidade se, e somente se, for uma unidade de* $(Mor(\boldsymbol{\mathcal{A}}),\circ)$.

Prova: $(Mor(\boldsymbol{\mathcal{A}}),\circ)$ é, por construção, uma álgebra binária parcial, em que $f \circ g$ é definida se, e somente se, o domínio de *f* coincidir com o contradomínio de *g*. Assim, cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-identidade é uma unidade. Se $A \xrightarrow{u} B$ é uma unidade em $(Mor(\boldsymbol{\mathcal{A}}),\circ)$, então $u = u \circ id_A = id_A$, em que a primeira equação é satisfeita, pois id_A é uma $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-identidade; e a segunda equação é satisfeita pois u é uma unidade. Assim provamos o Item 2. A partir do Item 2, o Item 1 é imediato.■

4.2.2. Subcategorias

Definição 4.23. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 48)

1) Uma categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é subcategoria de uma categoria $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

a. $Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}}) \subseteq Ob(\boldsymbol{\mathcal{B}})$;

b. para cada $A, A' \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, implica que $hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A, A') \subseteq hom_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(A, A')$;

c. para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A, a $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-identidade em A é a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-identidade em A;

d. a lei de composição em $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é restrição da composição em $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

2) $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é denominada full subcategoria de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ se, além das condições anteriores, $hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A, A') = hom_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(A, A')$.

Notadamente, uma full subcategoria é definida ao especificarmos sua classe de objetos. Além disso, se $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ é um functor full ou injetivo nos objetos, então a imagem de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ sob F é uma subcategoria de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

Definição 4.24. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 49) *Para toda subcategoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ de uma categoria $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, existe um functor inclusão $E: \boldsymbol{\mathcal{A}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$. Além disso, cada functor inclusão é*

i. um functor embedding,

ii. um functor full se, e somente se, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é full subcategoria de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

Proposição 4.13. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 49)

1) Um functor $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ é (full) embedding se, e somente se, existir uma (full) subcategoria $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ com functor inclusão $E: \boldsymbol{\mathcal{C}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ e isomorfismo $G: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ com $F = E \circ G$.

2) Um functor $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *é faithful se, e somente se, existem os functores embeddings* $E_1: \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *e* $E_2: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ *e uma equivalência* $G: \boldsymbol{\mathcal{C}} \to \boldsymbol{\mathcal{D}}$ *tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\mathcal{A}} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "E_2"'] & \boldsymbol{\mathcal{B}} \\
\boldsymbol{\mathcal{C}} \arrow[r, "G"] & \boldsymbol{\mathcal{D}} \arrow[u, "E_1"']
\end{tikzcd}$$

Prova: *1)* (⇒) Construamos a subcategoria $\boldsymbol{\mathcal{C}}$: $Ob(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ é a classe dos $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ -objetos $F(A)$ em que A é um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto; a classe $\mathcal{M}or(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ é a classe dos $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-morfismos Ff, em que $f: A \to A'$ é um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo; a composição é a composição de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ e as identidades são as $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ -identidades id_{FA}. Defina o functor $G: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ de modo que $G\left(A \xrightarrow{f} A'\right) = FA \xrightarrow{Ff} FA'$. É claro que G é isomorfismo e $F = E \circ G$. O caso em que F é full a demonstração é análoga à anterior.

(⇐) Como a composição de functores embeddings é embedding, o resultado segue trivialmente.

2) (⇒) Supor que $E_1: \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ é o functor inclusão da full subcategoria $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ que tem como objetos todas as imagens sob F. Seja $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ uma categoria com $Ob(\boldsymbol{\mathcal{C}}) = Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, em que $hom_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}(A, A') = hom_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(FA, FA')$ e as identidades e composições são definidas de acordo com $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Desta maneira, $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ é facilmente identificada como categoria. Com isso, defina-se os functores $E_2: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ e $G: \boldsymbol{\mathcal{C}} \to \boldsymbol{\mathcal{D}}$ como $E_2\left(A \xrightarrow{f} A'\right) = A \xrightarrow{Ff} A'$ e $G\left(C \xrightarrow{g} C'\right) = FC \xrightarrow{g} FC'$. Assim, E_2 é embedding e G é uma equivalência de modo que $F = E_1 \circ G \circ E_2$.

(⇐) Se E_1 e E_2 são embeddings e G é equivalência (full, faithful e isomorfo-denso), então F é faithful pela natureza composta de functores faithful.■

Definição 4.25. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 50) *Uma categoria* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *é denominada fully embeddable em* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *se existir um full embedding* $\boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$*, ou, equivalentemente, se* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *é isomorfo a uma full subcategoria de* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$**.**

Definição 4.26. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 50,51) *Uma full subcategoria $\mathcal{A}$ de uma categoria $\mathcal{B}$ é denominada*

1) fechada para isomorfismos se para todo $\mathcal{B}$-objeto que é isomorfo a algum $\mathcal{A}$-objeto, é também um $\mathcal{A}$-objeto;

2) densa se cada $\mathcal{B}$-objeto é isomorfo a algum $\mathcal{A}$-objeto.

Se $\mathcal{A}$ é full subcategoria de $\mathcal{B}$, então as seguintes condições são equivalenntes

i. $\mathcal{A}$ é uma subcategoria isomorfa-densa de $\mathcal{B}$**;**

ii. O functor inclusão $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ é isomorfo-denso;

iii. O functor inclusão $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ é equivalência.

Definição 4.27. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 51) *Um esqueleto de uma categoria é uma subcategoria full, isomorfa-densa de modo que quaisquer dois objetos distintos não são isomorfos.*

Proposição 4.14. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 51)

1) Toda categoria tem um esqueleto.

2) Dois esqueletos quaisquer de uma categoria são isomorfos.

3) Qualquer esqueleto de uma categoria $\mathcal{C}$ é equivalente a $\mathcal{C}$.

Prova: *1)* Segue do Axioma da Escolha aplicada na relação de equivalência (ou seja, isomorfismo de categorias) na classe de objetos de categorias. O Axioma da Escolha nos diz que para cada sobrejeção entre conglomerados, existe uma injeção tal que sua composição é a identidade.

2) Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ esqueletos de $\mathcal{C}$. Então cada $\mathcal{A}$-objeto A é isomorfo em $\mathcal{C}$ a um único $\mathcal{B}$-objeto. Denote tal $\mathcal{B}$-objeto por $F(A)$ e escolha para cada $\mathcal{A}$-objeto A um $\mathcal{C}$-isomorfismo $f_A\colon A \to F(A)$. Então o functor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é definido por $F\left(A \xrightarrow{h} A'\right) = FA \xrightarrow{f_A^{-1}} A \xrightarrow{h} A' \xrightarrow{f_{A'}} FA'$ é uma isomorfismo.

3) A inclusão de um esqueleto de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$ é uma equivalência.■

Corolário 4.2. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 52) *Duas categorias são equivalentes se, e somente se, seus esqueletos forem isomorfos.*

Definição 4.28. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 52) *Seja* $\mathcal{A}$ *uma subcategoria de* $\mathcal{B}$*, e seja B um* $\mathcal{B}$*-objeto.*

1) Uma $\mathcal{A}$*-reflexão para um objeto B, é um* $\mathcal{B}$*-morfismo* $B \xrightarrow{r} A$ *de B para um* $\mathcal{A}$-objeto *A com a seguinte propriedade universal:*

a. para qualquer $\mathcal{B}$*-morfismo* $B \xrightarrow{f} A'$ *de B a algum* $\mathcal{A}$-objeto *A', existe um único* $\mathcal{A}$*-morfismo* $f': A \to A'$ *tal que o seguinte triângulo comuta:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f'"] \\ & A' \end{tikzcd}$$

Por um "abuso de linguagem" um objeto A é denominado $\mathcal{A}$*-reflexão de B se existir uma* $\mathcal{A}$*-reflexão* $B \xrightarrow{r} A$ *de B com contradomínio A.*

2) $\mathcal{A}$ *é denominada subcategoria reflexiva de* $\mathcal{B}$ *se todo* $\mathcal{B}$*-objeto existir uma* $\mathcal{A}$*-reflexão.*

4.2.3. Categorias e functores concretos

Vimos anteriormente que constructos são categorias nos quais os objetos são conjuntos estruturados. Se considerarmos tais constructos como categorias abstratas, perderemos muito das informações contidas, particularmente, nos objetos. Para que e estas informações não sejam perdidas, lança-se mão do conceito de categoria concreta.

Definição 4.29. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 61) *Seja* $\mathcal{X}$ *categoria. Uma categoria concreta sobre* $\mathcal{X}$ *é uma par* $(\mathcal{A}, U)$*, em que* $\mathcal{A}$ *é uma categoria e* $U: \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ *é um functor faithful. Usualmente, o functor U é denominado forgetful (ou underlying) da categoria concreta e* $\mathcal{X}$ *é denominado categoria base de* $(\mathcal{A}, U)$.

Uma categoria concreta que tem como base a categoria $\boldsymbol{Set}$, é denominada constructo. Toda categoria abstrata $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ pode ser considerada como categoria concreta, considerando-se o functor identidade $id_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ como sendo o functor forgetful. Podemos, por abuso de notação, denotar a categoria concreta $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, U)$ como $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Ademais, como functores faithful são injetivos nos conjuntos *homs*, assumimos que $hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A, B)$ é subconjunto de $hom_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(UA, UB)$ para cada par (A, B) de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos. Esta convenção permite que expressemos o seguinte tipo de propriedade: sejam A e B $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos, e f um $\boldsymbol{\mathcal{X}}$-morfismo, tal que $UA \xrightarrow{f} UB$, existe um único $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $A \to B$ em que $U(A \to B) = UA \xrightarrow{f} UB$. Notemos que U não precisa ser necessariamente injetivos nos objetos, por exemplo, se $UA \xrightarrow{id_X} UB$ é um $\boldsymbol{\mathcal{X}}$-morfismo não implica necessariamente que $A = B$ ou que $id_X = id_A$, embora isso implique que $UA = UB = X$. Para evitar possíveis confusões em tais circunstâncias, denominamos um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $A \xrightarrow{f} B$ uma identidade carregada se $Uf = id_X$.

Definição 4.30. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 63) *Seja* $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, U)$ *categoria concreta sobre* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$*.*

1) *A fibra de um **X**-objeto X é uma classe preordenada que consiste de todos os **A**-objetos A* com $U(A) = X$ ordenado por:
    a) $A \leq B$ *se, e somente se,* $id_X: UA \to UB$ *é um **A**-morfismo.*
    b) ***A**-objetos A e B são considerados equivalentes se* $A \leq B$ *e* $B \leq A$.

Assim como functores são considerados tipos de morfismos entre categorias abstratas, do mesmo modo podemos compor functores concretos que associam categorias concretas.

Definição 4.31. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 65) *Se* $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, U)$ *e* $(\boldsymbol{\mathcal{B}}, V)$ *são categorias concretas sobre* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, *então um functor concreto de* $(\boldsymbol{\mathcal{A}}, U)$ *para* $(\boldsymbol{\mathcal{B}}, V)$ *é um functor* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *com* $U = V \circ F$. *Denota-se este functor como* $F: (\boldsymbol{\mathcal{A}}, U) \to (\boldsymbol{\mathcal{B}}, V)$.

Proposição 4.15. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 65)

1) *Todo functor concreto é faithful.*
2) *Todo functor concreto é completamente determinado pelos valores nos objetos.*
3) *Objetos que são identificados por um functor concreto full são equivalentes.*

4) *Todo functor concreto full e amnestic é embedding.*

Prova:

1) Segue diretamente do Item II da Proposição 4.7.
2) Sejam F, g
3) $G: (\boldsymbol{\mathcal{A}}, U) \rightarrow (\boldsymbol{\mathcal{B}}, V)$ functores concretos tais que $G(A) = F(A)$ para cada ***A***-objeto A. Então para qualquer ***A***-morfismo $A \overset{f}{\rightarrow} A'$ existe um ***B****-morfismo* $GA = FA \overset{Ff}{\underset{Gf}{\rightrightarrows}} FA' = GA'$, em que $V(Ff) = U(f) = V(Gf)$. Como V é faithful, $Ff = Gf$; assim $F = G$.
4) Sejam *A* e *A'* ***A****-objetos*, onde $FA = FA'$ $(= B)$. Então, utilizando a Proposição 4.8., a identidade $id_B: FA \rightarrow FA'$ pode ser associada ao ***A***-isomorfismo $g: A \rightarrow A'$. Isso implica que *A* e *A'* são equivalentes.
5) Como *F* é full, faithful e injetiva nos objetos, então *F* é embedding. ■

Definição 4.32. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 75) *Seja* $T: \boldsymbol{\mathcal{X}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}$ *functor. Uma* $\boldsymbol{Alg}(T)$ *é uma categoria concreta sobre* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$*, nos quais os objetos* (X, h) *são denominados T-algebras em que* X *é um* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$*-objeto e* $h: T(X) \rightarrow X$ *é um* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$*-morfismo. Os morfismos* $f: (X, h) \rightarrow (X', h')$*, denominados T-homomorfismos, são* $\boldsymbol{\mathcal{X}}$*-morfismos* $f: X \rightarrow X'$ *tal que o diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "T(f)"'] & X \arrow[d, "\mathrm{f}"] \\
T(X') \arrow[r, "h'"] & X'
\end{tikzcd}$$

O functor forgetful T é dado por $\left|(X, h) \overset{f}{\rightarrow} (X, h')\right| = X \overset{f}{\rightarrow} X'$.

4.2.4. Transformações naturais

Para captar o conceito subjacente à ideia de transformação natural, tomemos um espaço vetorial de dimensão finita *V*. Consideremos que *V'* é seu dual e *V''* seu segundo dual.

Sabemos que *V* e *V'* são isomorfos, assim como *V* e *V"* o são. No entanto, existe um isomorfismo "natural" $\tau: V \to V''$ no qual cada vetor $\boldsymbol{x}$ é avaliado no ponto *x* pelo funcional $\tau(x): V' \to \mathbb{R}$. A seguir, fornecemos uma definição formal para uma noção intuitiva de isomorfismo natural e transformação natural.

Definição 4.33. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 83) *Sejam* $F, G: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *functores. Uma transformação natural τ de F para G, denotado por* $\tau: F \to G$ *ou* $F \xrightarrow{\tau} G$, *é uma função que associa acada* $\boldsymbol{A}$*-objeto A, um* $\boldsymbol{B}$*-morfismo* $\tau_A: FA \to GA$ *de modo que a seguinte condição de naturalidade é satisfeita: para cada* $\boldsymbol{A}$*-morfismo* $A \xrightarrow{f} A'$ *o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\tau_A} & GA \\ {\scriptstyle Ff}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gf} \\ FA' & \xrightarrow{\tau_{A'}} & GA' \end{array}$$

A transformação natural é o dispositivo teórico que lançamos mão para analisar operações de conjuntos estruturados como objetos. Exemplificamos: Seja $U: \boldsymbol{Grp} \to \boldsymbol{Set}$ um functor forgetful e seja $S: \boldsymbol{Grp} \to \boldsymbol{Set}$ o functor quadrado (*i. e.*, toma o grupo e o leva no produto cartesiano do seu conjunto subjacente), $S\left(G \xrightarrow{f} H\right) = G^2 \xrightarrow{f^2} H^2$. Isso implica que para cada grupo $G \in Ob(\boldsymbol{Grp})$, existe uma operação de multiplicação $\tau_G: G^2 \to G$. Deste modo, a transformação natural $\tau = (\tau_A)$ é uma família de aplicações de *S* a *U*. A condição de naturalidade simplesmente implica que para $x, y \in G$, existe $f(x * y) = f(x) * f(y)$ para algum homomorfismo de grupo $G \xrightarrow{f} H$. Desta maneira, para cada operação de grupo, anéis, corpos, etc, é um tipo de transformação natural. Entretanto, é necessário que supramos os functores adequados para analisar o domínio e o contradomínio desta operação.

Definição 4.34. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 84) *Se* $G, G': \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *são functores e* $G \xrightarrow{\tau} G'$ *é uma transformação natural, então*

1) *para cada functor* $F: \boldsymbol{\mathcal{C}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}}$, *a transformação natural* $\tau F: G \circ F \to G' \circ F$ *é definida por* $(\tau F)_C = \tau_{FC}$.
2) *Para cada functor* $H: \boldsymbol{\mathcal{B}} \to \boldsymbol{\mathcal{D}}$, *a transformação natural* $H\tau: H \circ G \to H \circ G'$ *é definido por* $(H\tau)_A = H(\tau_A)$.

De modo análogo, a transformação natural $G'^{op} \xrightarrow{\tau^{op}} G^{op}$ é definida por ${\tau_A}^{op} = \tau_A$.

Definição 4.35. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 85) *Sejam* $F, G: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *functores.*

1) *Uma transformação natural* $F \xrightarrow{\tau} G$, *cujas componentes* τ_A *são isomorfismos, é denominada isomorfismo natural de F para G. Mais geralmente, uma transformação natural de F para G, cujas componentes pertencem a uma classe específica M de* ***B****-morfismos é denominada uma* ***M****-transformação.*
2) *F e G são denominados naturalmente isomorfos, denotados* $F \cong G$, *dado que existe um isomorfismo natural de F para G.*

Definição 4.36. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 87) *Um functor* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$ *é denominado representável por um* ***A****-objeto A, se F é naturalmente isomorfo ao hom-functor* $hom(A, -): \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$.

Note-se que o functor forgetful é usualmente representável. Por exemplo, $U: \boldsymbol{Vec} \to \boldsymbol{Set}$ é representado por um espaço vetorial $(\mathbb{R}, 1)$; $U: \boldsymbol{Grp} \to \boldsymbol{Set}$ é representado por um grupo de inteiros $(\mathbb{Z}, id)$; $U: \boldsymbol{Top} \to \boldsymbol{Set}$ é representado por qualquer espaço topológico com apenas um elemento.

Definição 4.37. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 87) *Se* $F, G, H: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *são functores e* $F \xrightarrow{\sigma} G$ *e* $G \xrightarrow{\tau} H$ *são transformações naturais, então a composição de transformações naturais* $\tau \circ \sigma: F \to H$ *é uma transformação natural que associa a cada* ***A****-objeto A um morfismo* $\tau_A \circ \sigma_A: F(A) \to H(A)$.

Definição 4.38. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 87) *Sejam* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *categorias. O functor quasicategoria* $[\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}]$ *tem como objetos todos os functores de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *para*

***$\boldsymbol{\mathcal{B}}$*, *como morfismos de F para G, todas as transformações naturais de F para G, como identidades, todas transformações naturais identidades, e como composição, as composições de transformações naturais.*

Note-se que se $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ são categorias pequenas, então $[\boldsymbol{\mathcal{A}},\boldsymbol{\mathcal{B}}]$ é categoria. Se $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é categoria pequena e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ é categoria grande, então $[\boldsymbol{\mathcal{A}},\boldsymbol{\mathcal{B}}]$, embora seja uma categoria própria, é isomorfa a alguma categoria. De modo geral, quasicategorias são isomorfas a categorias denominadas categorias legítimas e são tratadas como categorias. Se $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ são categorias grandes, então $[\boldsymbol{\mathcal{A}},\boldsymbol{\mathcal{B}}]$ geralmente não será isomorfa nenhuma categoria. Tais quasicategorias são denominadas ilegítimas. De modo geral, uma transformação natural entre functores de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ para $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ são isomorfismos naturais se, e somente se, forem isomorfismos em $[\boldsymbol{\mathcal{A}},\boldsymbol{\mathcal{B}}]$.

Proposição 4.16. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 88) *Para qualquer functor $F\colon \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$, qualquer $\boldsymbol{A}$-objeto A e qualquer elemento $a \in F(A)$, existe uma única transformação natural $\tau\colon \mathrm{hom}\,(A,-) \to F$ com $\tau_A(id_A) = a$.*

Prova: Seja $\tau_B(f) = \big(F(f)\big)(a)$. Os valores pontuais estabelece que τ é transformação natural. Se $\delta\colon \mathrm{hom}(A,-) \to F$ tal que $\delta_A(id_A) = a$, então pela condição de naturalidade de δ, tem-se que $\delta_B(f) = \delta_B(f \circ id_A) = (\delta_B \circ \mathrm{hom}(A,f))(id_A) = (F(f) \circ \delta_A)(id_A) = F(f)(a) = \tau_B(f) \Rightarrow \delta_B(f) = \tau_B(f)$.■

Corolário 4.3. (Lema de Yoneda) (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 88) *Se $F\colon \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$ é um functor e A é um $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto, então a função $Y\colon [\mathrm{hom}(A,-)\,,F] \to F(A)$ definida por $Y(\sigma) = \sigma_A(id_A)$ é uma bijeção, em que $[\mathrm{hom}(A,-)\,,F]$ é o conjunto de todas as transformações naturais de $\mathrm{hom}(A,-)$ para F.* ■

Teorema 4.1. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 88) *Seja $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ uma categoria. O functor $E\colon \boldsymbol{\mathcal{A}} \to [\boldsymbol{\mathcal{A}}^{op},\ \boldsymbol{Set}]$ definido por $E\left(A \xrightarrow{f} B\right) = \mathrm{hom}(-,A) \xrightarrow{\sigma_f} \mathrm{hom}(-,B)$, em que $\sigma_f(g) = f \circ g$ é full e embedding.*

Prova: A função claramente preserva identidade e composições, logo, é functor. Se f e f' são membros distintos do conjunto $\hom(A, B)$, então σ_f e $\sigma_{f'}$ diferem em id_A, logo, E é faithful. O fato de que E é full segue-se diretamente do Corolário 4.3. ■

4.3. Considerações finais do capítulo

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos da Teoria de Categorias, a saber: categoria abstrata, functores, categoria concreta, functor concreto e transformação natural. Em especial, formalizaremos o conceito de emergência por meio do functor forgetful de constructos. Mas antes de fazê-lo, é necessário que apresentemos a teoria biológica no qual se assenta a emergência empiricamente – a Biologia Relacional de Robert Rosen.

CAPÍTULO 5. Biologia Relacional

Os três capítulos anteriores tiveram caráter propedêutico, uma vez que são preparatórios ao nosso intento maior de formalização e matematização da emergência e da LPI. Neste capítulo apresentaremos a teoria biológica que proverá o crivo entre a Teoria de Categorias e a Biologia, com vistas na empiricidade do modelo. Em primeiro plano, exporemos o principal sobre o pensamento desta escola biológica, e, em seguida, iremos descrever alguns elementos matemáticos necessários para entendê-la. Posteriormente, apresentamos um método para decompor um sistema biológico em suas partes mediante uma medida de irredutibilidade.

5.1. Biofísica Matemática

O fundador da Biofísica Matemática foi Nicolas Rashevsky (1899-1972), cientista russo naturalizado americano (CULL, 2007). Rashevsky teve formação em Física, em particular, em Física Teórica. Ao conceber a Biofísica Matemática, aproxima a relação que a Física Experimental e Física Teórica possuem para daí abstrair essa nova ciência. Em outras palavras, busca criar uma biologia teórica que sirva à biologia experimental da mesma maneira que ocorre na Física. Dois grandes princípios são enunciados para que essa nova ciência se realize:

i. A teoria da Biofísica Matemática deve ser quantitativa.
ii. Os estudiosos dessa ciência devem estar em contato pleno com os experimentos.

Essa nova ciência, criada na década de 20, surge como uma nova escola de pensamento na Universidade de Chicago: a Biologia Relacional. Um dos mais brilhantes alunos de Rashevsky foi Robert Rosen (1934-1998), principal propugnador da Biologia Relacional (LOUIE, 2011). Segundo tal escola, após sua consolidação com Rosen, postula-se que: a Biologia é um assunto intrinsecamente concernente à organização das relações. Em outras palavras, retomando o que apresentamos no capítulo anterior, a vida não é caracterizada por suas estruturas físico-químicas, mas sim por sua relação específica e intrínseca: a vida não é sobre a matéria[82], mas é sobre a forma, a finalidade e os meios (LOUIE, 2011).

Especificamente, o lema geral que concerne à Biologia Relacional é: ignore a matéria e fique com as relações subjacentes à mesma. Essa premissa está profundamente relacionada à ideia de que a função deve preceder as estruturas no estudo de sistemas biológicos, ao passo que, na Biologia Clássica, a filosofia que impera é inversa, pois estrutura implica função. Mas, perguntemo-nos, o que é mais universal, a estrutura ou a função?

A Biologia Relacional defende que é a função, uma vez que uma mesma função biológica pode ser configurada[83] de diversas maneiras estruturais. A título de exemplo, consideremos a insulina humana, a insulina bovina e a insulina suína. Todas são sinalizadoras celulares que codificam a mesma função biológica: a entrada de glicose na célula. Outro exemplo clássico é a origem embrionária das asas em animais que se dá pela analogia[84]. As asas de um inseto, as asas de uma ave e as asas de um morcego têm origens e estruturas muito diferentes, mas têm a mesma função: permitir o voo. Como último exemplo, tomemos o nicho da detritivoria[85]. Muitos animais que ocupam esse nicho podem ser muito diferentes, de minhocas a besouros. No entanto, o que unifica todos eles no mesmo nicho não são suas "estruturas" [86], mas a função ecológica que desempenham. Seria possível citar inúmeros exemplos de casos em que a função é mais geral do que a estrutura. Assim, tomamos este dado da realidade, aprioristicamente, como princípio da Biologia Relacional.

Nos trabalhos seminais de Rosen foram enunciados alguns princípios biológicos gerais – além desse supracitado. Para formalizar esses princípios em uma teoria biológica, Rosen utilizou inicialmente a Teoria de Grafos para a representação de sistemas. Entretanto, Rosen verificou que a referida teoria é insuficiente para esse propósito. Assim, foi o pioneiro a suplantar a Teoria de Grafos pela Teoria de Categorias para a representação de sistemas biológicos. Com efeito, iremos apresentar os principais elementos teóricos da Teoria de Grafos com o intuito de facilitar a exposição e investigação da Biologia Relacional.

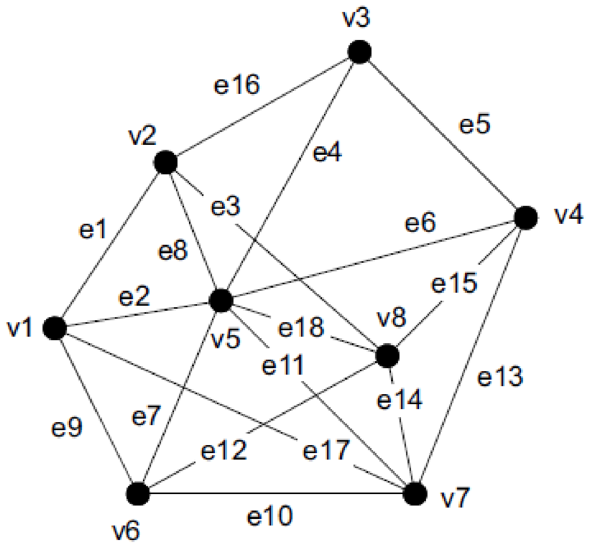
---

[82] Fazendo alusão à Causa Material de Aristóteles.
[83] Atualizada na terminologia metafísica.
[84] Órgãos que têm mesma função, mas origem embrionária diferente.
[85] Animais que vivem na serrapilheira e se alimentam de detritos.
[86] Que neste caso são as próprias espécies.

5.2. Fundamentos matemáticos

5.2.1. Teoria de grafos

Antes de definirmos formalmente o conceito de grafo, exibiremos um exemplo ilustrativo. (STEEN, 2010, p. 18). Na Figura 1 abaixo, podemos observar um exemplo de grafo não direcionado.



$$V(G) = \{v_1, \ldots, v_8\}$$
$$E(G) = \{e_1, \ldots, e_{18}\}$$

$$\begin{array}{ll} e_1 = \langle v_1, v_2 \rangle & e_{10} = \langle v_6, v_7 \rangle \\ e_2 = \langle v_1, v_5 \rangle & e_{11} = \langle v_5, v_7 \rangle \\ e_3 = \langle v_2, v_8 \rangle & e_{12} = \langle v_6, v_8 \rangle \\ e_4 = \langle v_3, v_5 \rangle & e_{13} = \langle v_4, v_7 \rangle \\ e_5 = \langle v_3, v_4 \rangle & e_{14} = \langle v_7, v_8 \rangle \\ e_6 = \langle v_4, v_5 \rangle & e_{15} = \langle v_4, v_8 \rangle \\ e_7 = \langle v_5, v_6 \rangle & e_{16} = \langle v_2, v_3 \rangle \\ e_8 = \langle v_2, v_5 \rangle & e_{17} = \langle v_1, v_7 \rangle \\ e_9 = \langle v_1, v_6 \rangle & e_{18} = \langle v_5, v_8 \rangle \end{array}$$

FIGURA 1. Representação pictórica de grafo.
Fonte: Adaptado de STEEN, M. **Graph and Complex Networks**. [S.l.]: Maarten van Steen, 2010, p. 21.
Nota: À esquerda: o grafo. À direita: V(G) é o conjunto de vértices do grafo G; E(G) é o conjunto de arestas do grafo G. Cada um dos pares $e_k = \langle v_i, v_j \rangle$ indica uma aresta *k* composta pelos vértices v_i e v_j.

Definição 5.1. *Seja V um conjunto finito, e seja* $R(V) = \{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$ *uma relação simétrica sobre V* [87]*. O par ordenado* $G = (V, E)$ *em que* $E \subseteq R(V)$ *é denominado grafo em V. Os elementos de V são denominados vértices e os elementos de E, arestas.*

O conjunto de vértices de um grafo G é denotado por $V_G = V(G)$ e o conjunto de arestas por $E_G = E(G)$. Assim, podemos denotar $G = (V_G, E_G)$. Esse tipo de grafo, particularmente, é denominado grafo simples. O número de vértices de um dado grafo G é $|V_G| = v_G$ e o número de arestas é $|E_G| = e_G$. Como se vê na Figura 1, um grafo pode ser

[87] Algumas notações e noções preliminares estão disponíveis no item A.1 no Anexo A ao fim deste manuscrito.

representado pictoricamente por meio de uma ilustração planificada[88] de seus vértices e arestas. Também é possível generalizar o conceito de grafo simples considerando *loops* [89] e/ou arestas paralelas de modo a gerar um multigrafo.

Definição 5.2. *Um multigrafo é uma tripla ordenada* $G(V, E, \psi)$*, em que* V *é o conjunto de vértices,* E *é o conjunto de arestas e* ψ *é uma função* $\psi: E \rightarrow R(V) \cup \{(v, v) |\ v \in V\}$ *que associa a cada aresta* $e \in E$ *um par ordenado, ou seja,* $\psi(e) = (u, v)$*.*

Notemos que é possível em um multigrafo que $\psi(e_1) = \psi(e_2)$. Este é o caso em que duas arestas são paralelas a um mesmo par de vértices. Do ponto de vista algébrico, não há diferença entre esses dois vértices, uma vez que ambos são definidos pelo mesmo par de vértices. Mais tarde iremos retornar a essa questão, mas adiantamos que a Teoria de Grafos é insuficiente para os propósitos de modelagem deste capítulo.

Retomando o conceito de grafo simples, é notável que uma mesma aresta possa ser denotada como $e = (u, v) = (v, u)$ pois não há direcionalidade na aresta. Assim, se considerarmos direção nas arestas, temos uma nova classe de grafos, denominada grafos direcionados, ou dígrafos.

Definição 5.3. *Um grafo direcionado é um par ordenado* $D = (V, E)$*, em que* V *é o conjunto de vértices e* E *o conjunto de arestas direcionadas, tal que* $E \subseteq V \times V$*.*

É importante notar que, diferentemente do caso de grafo simples, no grafo direcionado as arestas direcionadas, ou arcos, são diferenciadas por possuir uma origem e um término. Para exemplificar este artefato, observemos os arcos e_4 e e_5 do grafo direcionado da Figura 2. Diferentemente de um grafo simples e de um multigrafo, $e_4 \neq e_5$ pois $(v_2, v_3) \neq (v_3, v_2)$. Além da propriedade de arestas direcionadas, é possível imbuir um grafo direcionado com coloração, rotulação e peso nas arestas.

[88] Planificado no sentido de que pode ser representado em um plano. Usualmente esta representação implica que cruzamento de arestas.
[89] Arestas que definida pelo par $e = \langle u, v \rangle$ conquanto $u = v$.

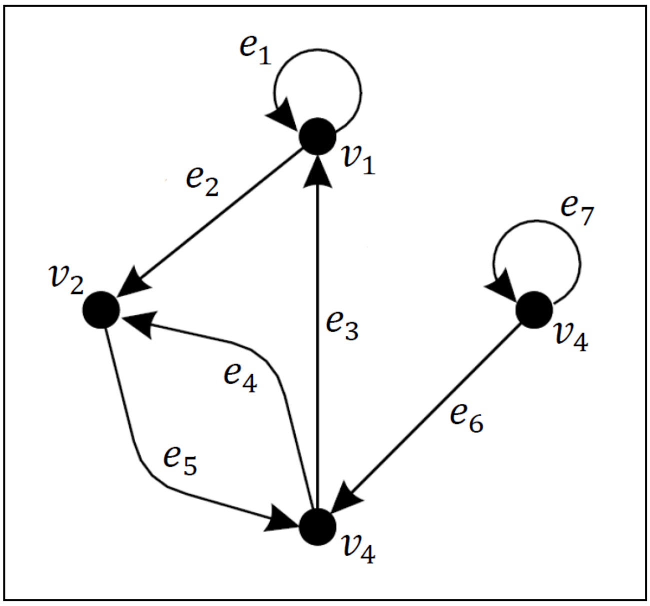


FIGURA 2. Representação pictórica de grafo direcionado.
Fonte: Adaptado de STEEN, M. **Graph and Complex Networks**. [S.l.]: Maarten van Steen, 2010, p. 60.

Um conceito importante é o conceito de isomorfismo de grafo. Para iniciar esta discussão, notemos a princípio que um mesmo grafo pode ter uma representação pictórica diferente, mas sendo essencialmente o mesmo par ordenado G. Para ratificar esta diferença pictórica, observemos a Figura 3.

Definição 5.4. *Dois grafos G e H são isomorfos, denotado por $G \cong H$, se existir uma bijeção $\alpha: V_G \to V_H$ tal que para cada $(u, v) \in E_G$ existe um único $(\alpha(u), \alpha(v)) \in E_H$, para todo $u, v \in G$, e reciprocamente.*

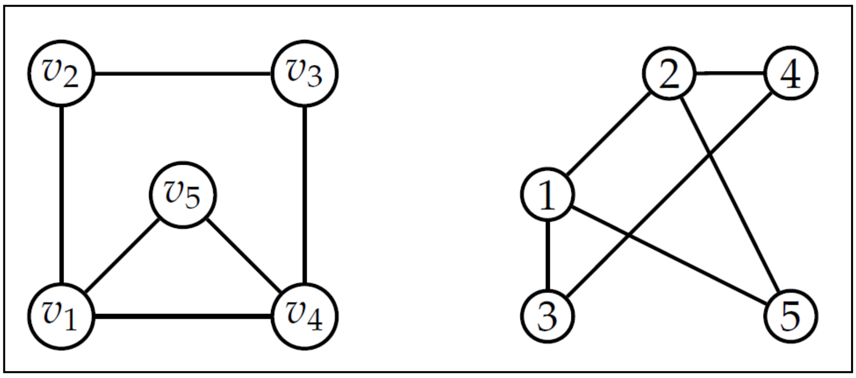


FIGURA 3. Exemplo de grafos isomorfos.
Fonte: o autor.
Nota: À esquerda, o grafo tem rotulação em termos de v_i em que $i \leq 5$. À direita, a rotulação se dá por números naturais. Apesar da disposição pictórica, ambos são essencialmente iguais, ou seja, são isomorfos.

No caso da Figura 3, há apenas uma mudança na rotulação dos vértices e uma disposição espacial diferente, mas esses grafos são essencialmente os mesmos. Ou seja, desfrutam das mesmas propriedades estatísticas. Além da forma pictórica, é possível representar um grafo por meio de matrizes. A matriz de adjacência possui toda a informação necessária para construir um grafo, assim como para abstrair suas propriedades.

Definição 5.5. *Seja $G = (V, E)$ grafo simples e $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o conjunto de seus vértices. A matriz de adjacência de G é uma matriz quadrada $n \times n$, denotada A_G, com entradas $a_{ij} = 1$ se houver uma aresta (v_i, v_j), e $a_{ij} = 0$, se não houver nenhuma aresta entre os vértice i e j. Se G é grafo simples, então a matriz A_G é simétrica.*

Por exemplo, os grafos da Figura 3 têm a mesma matriz de adjacência:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Notemos que como estes grafos são isomorfos, então possuem uma matriz de adjacência em comum. Como a permuta de linha e colunas de uma matriz não altera a essencialmente, implica que é possível que enunciemos o seguinte um teorema fundamental. Mas antes de enunciar e provar este teorema, é necessário que definamos o conjunto vizinho de um vértice e o grau de um vértice.

Definição 5.6. *Sejam G grafo e $v \in V(G)$ vértice, o conjunto de vizinhos $N(v)$ de v é o conjunto de vértices, exceto v, adjacente a v:*

$$N(v) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in V(G) \mid v \neq w, \exists e \in E(G) : e = (u, v)\}. \tag{2}$$

Definição 5.7. *O número de arestas incidentes em um vértice v é denominado grau do vértice v, denotado por $d(v)$.*

Com efeito, os *loops* são contados duas vezes. A ordenação decrescente dos valores de $\mathrm{d}(\mathrm{v_i})$, onde $1 \leq \mathrm{i} \leq v_G$ é denominado sequência de graus. Seja a ordenação $\mathrm{d}(\mathrm{v_1}) \geq$

$\mathrm{d}(\mathrm{v}_2) \geq \mathrm{d}(\mathrm{v}_3) \geq \cdots \geq \mathrm{d}(\mathrm{v}_\mathrm{n})$, então a sequência de graus é $S_G = [\mathrm{d}(\mathrm{v}_1), \mathrm{d}(\mathrm{v}_2), \mathrm{d}(\mathrm{v}_3), \ldots, \mathrm{d}(\mathrm{v}_\mathrm{n})]$. É importante notar que o grau pode ser calculado diretamente da matriz de adjacência de um grafo simples, por meio da soma das entradas da linha ou da soma das entradas da coluna. Ou seja,

$$\mathrm{d}(\mathrm{v}_\mathrm{i}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}. \tag{3}$$

A título de exemplo, a sequência de graus da matriz (1) é dada por $S_{(1)} = [3, 3, 2, 2, 2]$. Note-se que a ordem das somas das linhas ou colunas não altera a sequência de graus, pois a sequência é uma ordenação. Com estes conceitos matemáticos, é possível que provemos com facilidade o teorema sobre isomorfismo de grafos.

Teorema 5.1. *Dois grafos simples G e H são isomorfos se, e somente se, possuírem uma mesma matriz de adjacência em comum. Com efeito, dois grafos isomorfos têm a mesma matriz de adjacência.*

Prova: $(\Rightarrow)$ Se G e H são isomorfos, então existe uma bijeção $\alpha: V_G \to V_H$. Assim sendo, tomemos um vértice qualquer $u \in V_G$ e o conjunto de seus vizinhos $N(u) = \{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$. Por definição, cada aresta $e_i = (u, v_i) = (v_i, u)$ de V_G incidente a u, é mapeado por α a uma aresta $\alpha(e_i) = \langle \alpha(u), \alpha(v_i) \rangle$ do grafo *H*. Como cada aresta $\alpha(e_i)$ é incidente ao vértice $\alpha(u)$, implica que ao menos todos as arestas incidentes a u terão correspondência a $\alpha(u)$. Com efeito, tem-se que $\mathrm{d}(\mathrm{u}) \leq \mathrm{d}\big(\alpha(u)\big)$.

Analogamente, consideremos um vértice *w* que é adjacente ao vértice $\alpha(u)$ no grafo *H*. Por definição de isomorfismo de grafo, temos que uma aresta $e_m = \langle \alpha(u), w \rangle$ tem um único correspondente em *G*, tal que $\alpha^{-1}(e_m) = \langle \alpha^{-1}\big(\alpha(u)\big), \alpha^{-1}(w) \rangle \Rightarrow \alpha^{-1}(e_m) = \langle u, \alpha^{-1}(w) \rangle$. Isso significa que toda aresta incidente em $\alpha(u)$ em *H*, implica em uma aresta $\alpha^{-1}(e_m)$ incidente a u, em *G*. Logo, $\mathrm{d}\big(\alpha(u)\big) \leq \mathrm{d}(\mathrm{u})$. Assim, $\Big(\mathrm{d}(\mathrm{u}) \leq \mathrm{d}\big(\alpha(u)\big)\Big) \wedge \Big(\mathrm{d}\big(\alpha(u)\big) \leq \mathrm{d}(\mathrm{u})\Big) \Rightarrow \mathrm{d}(\mathrm{u}) = \mathrm{d}\big(\alpha(u)\big)$ para todo vértice *u* de *G*. Que implica que *G* e *H* tem a mesma sequência de graus.

Assim, como *G* e *H* são isomorfos, então $|V_G| = |V_H|$ e $|E_G| = |E_H|$. Isso implica que a matriz de adjacência de *G* e *H*, respectivamente A_G e A_H, é $n \times n$. Como todas as entradas

das matrizes A_G e A_H são 1 ou 0, existe uma matriz permutação, tal que $A_G = PA_HP^t$. Onde a matriz P é uma matriz $n \times n$ que possui entradas p_{ij} com o critério: se $(v_i, v_j) \in E_G \Leftrightarrow (\alpha(v_i), \alpha v_j) \in E_H$, então $p_{ij} = 1$. De outro modo, $p_{ij} = 0$. Como o critério é garantido por definição, então sempre que dois grafos forem isomorfos, haverá uma matriz permutação que associa suas matrizes de adjacência. Logo, há pelo menos uma matriz de adjacência em comum entre *G* e *H*.

($\Leftarrow$) Se as matrizes $A_G = A_H$, então a sequência de graus dos grafos G e H são iguais. Para que as sequências de grau sejam iguais, tem-se necessariamente que $|V_G| = |V_H|$ e $|E_G| = |E_H|$, logo $G \cong H$. ■

De modo geral, quando um vértice v_i de um grafo *G* tem grau $\mathrm{d}(v_i) = 0$, diz-se que esse vértice é isolado. Quando $\mathrm{d}(v_i) = 1$ o vértice é denominado folha. Também se define o grau mínimo de um grafo *G* como $\delta(G) = \min\{\mathrm{d(v)} \mid \mathrm{v} \in G\}$. Analogamente o grau máximo é definido como $\Delta(G) = \max\{\mathrm{d(v)} \mid \mathrm{v} \in G\}$.

Definição 5.8. *Um grafo H é subgrafo de um grafo G, denotado por $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Um subgrafo $H \subseteq G$ gera G se todo vértice de G se encontra em H, ou seja, $V(G) = V(H)$.*

Ademais, um subgrafo $H \subseteq G$ é um subgrafo induzido se $E(H) = E(G) \cap E(V(H))$. Neste caso, H é induzido pelo conjunto $V(H)$ de vértices. De modo geral, em um subgrafo induzido $H \subseteq G$, o conjunto $E(H)$ de arestas consiste em todas $e \in E(G)$ tal que $e \in E(V(H))$. Para cada subconjunto não vazio $X \subseteq V(G)$, existe uma correspondência única ao grafo induzido $G[X] = (A, E(G) \cap E(X))$. Para cada subconjunto $F \in E(G)$ de arestas, existe um único subgrafo correspondente de *G* tal que $G[F] = (V_G, F)$.

Entrementes, quando se estuda processos dinâmicos em grafos – como a caminhada aleatória –, é frequente o uso de um dispositivo matemático denominado matriz de transição, ou matriz de probabilidade.

Definição 5.9. *Seja G grafo simples e $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o conjunto de seus vértices. A matriz de transição de G é uma matriz quadrada $n \times n$, denotada P_G, com* *entradas* $p_{ij} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}$ *se houver uma aresta* (v_i, v_j), *e* $p_{ij} = 0$, *se não houver nenhuma aresta.*

Note-se que se G é grafo simples, então P_G é simétrica. A matriz de transição tem duas propriedades características: todas as entradas são não negativas e, se o grafo é simples, então os elementos das linhas ou colunas somam 1. A matriz de transição de um grafo pode descrever uma Cadeia de Markov. Este assunto será discutido mais detidamente nas próximas seções.

5.2.2. Limitações da Teoria de Grafos

A análise de redes complexas, muito difundida em diversos campos de pesquisa, depende de resultados prescritos na Teoria de Grafos. Apesar de grafos formarem estruturas interessantes para representar e gerar quantificadores estatísticos, dois problemas de ordem teórica podem surgir no processo de descrição de fenômenos complexos (ROSEN, 1958B). O primeiro problema é devido ao fato de que em alguns sistemas, um mesmo vértice pode gerar um output que serve de input para mais de um vértice. O segundo trata-se da possibilidade de que um vértice possa gerar mais de um output com efeito diferente para uma mesma componente[90]. Para ilustrar esses casos observemos a Figura 4.

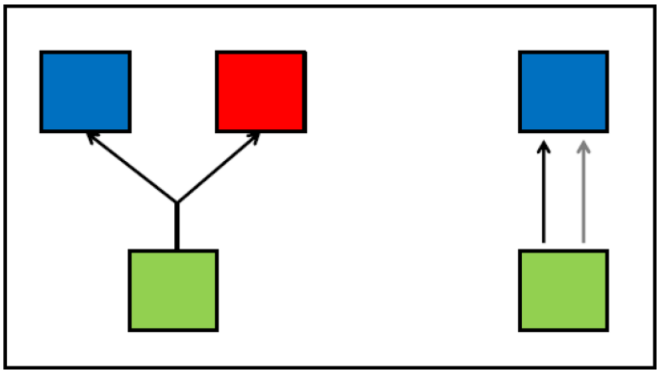


FIGURA 4. Interações não modeláveis por meio da Teoria de Grafos.
Fonte: autor.
Nota: à esquerda: um mesmo output é input a vértices diferentes. À direita: dois outputs diferentes servem de input ao mesmo vértice.

[90] Notemos que o multigrafo permite que descrevamos pictoricamente duas arestas, mas suas funções biológicas representariam o mesmo par ordenado de vértices.

Esses fatos indicam que a Teoria de Grafos é insuficiente para gerar uma modelagem completa de sistemas biológicos. Para resolver este problema, Rosen categorificou o (M, R)-system passando de grafo para categoria. Entretanto, este autor não demonstra formalmente que não há perda de generalidade ao fazer esta substituição. Para eliminar qualquer dúvida de que na categorificação de grafo não há perda de generalidade, provemos o seguinte teorema:

Teorema 5.2. *Todo grafo gera uma categoria.*

Prova: Devemos provar que todo grafo G é uma quádrupla $\boldsymbol{\mathcal{G}} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$. Construamos tal quádrupla. A classe de objetos é $\mathcal{O}b(\boldsymbol{\mathcal{G}}) = V$, e a classe de morfismos $\mathcal{M}or(\boldsymbol{\mathcal{G}})$ é igual ao conjunto de todos os caminhos (*i. e.*, sequencia finita de arestas de *A*). A composição $\circ$ é a composição de caminhos direcionados de arestas e as identidades são os caminhos vazios. Provemos a associatividade i), preservação da identidade ii) e disjuntividade mútua dos conjuntos *hom* iii). Sejam *A*, *B*, *C* e *D* *vértices*, e sejam $A \xrightarrow{f} B,\ B \xrightarrow{g} C\ e\ C \xrightarrow{h} D$ caminhos direcionados e considere os caminhos vazios (ou *loops*) $A \xrightarrow{id_A} A$ e $B \xrightarrow{id_B} B$.

i) $h \circ (g \circ f) = h \circ \left(A \xrightarrow{g \circ f} C\right) = A \xrightarrow{h \circ g \circ f} D$. Analogamente, $(h \circ g) \circ f = \left(B \xrightarrow{h \circ g} D\right) \circ f = A \xrightarrow{h \circ g \circ f} D \ \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, donde se verifica a associativa.

ii) $id_B \circ f = \left(B \xrightarrow{id_B} B\right) \circ f = A \xrightarrow{f} B = f$. $f \circ id_A = f \circ \left(A \xrightarrow{id_A} A\right) = A \xrightarrow{f} B = f$, logo, há preservação de identidades.

iii) Como uma aresta é univocamente determinada por um par ordenado de vértices, a interseção de qualquer aresta ou conjunto de arestas será o conjunto vazio, devido ao fato do domínio de um ser contradomínio de outro. Assim, os conjuntos *hom* são mutuamente disjuntos. ■

5.2.3. Categorificação

Baseando-nos no Teorema 5.2, fica evidenciado que a representação categórica contém a representação de grafos para sistemas biológicos. No entanto, as duas dificuldades apresentadas no processo de modelagem por grafos são transferidas à categoria induzida por um grafo. Assim, procedemos com a categorificação direta do sistema: representam-se as componentes do sistema como conjuntos de morfismos $\{f_k\}$ e inputs e output de componentes como conjuntos A_i. A composição é a composição usual de morfismos e a identidade é a identidade usual de conjuntos. Estas características permitem que prescrevamos uma categoria geradora denotada por $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$, que possui como classe de objetos $\mathcal{O}b(\boldsymbol{\mathcal{C}_g}) = \{A_i\}$, classe de morfismos $\mathcal{M}or(\boldsymbol{\mathcal{C}_g}) = \bigcup\{f_k\}$. O efeito do morfismo é determinado pelo ouput de modo que $f_k: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m \longrightarrow B_k$. A componente modelada por essa categoria é hom $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m, B)$, que é o conjunto de morfismos que possui em comum o domínio. Assim, se uma componente *M* gera um mesmo output que é input a mais de uma componente, isso simplesmente significa que alguns morfismos que estão em *M* são iguais. E que se uma componente *M* gera mais de um output a uma mesma componente, implica que cada output é o elemento de conjuntos diferente gerado por *M*.

5.3. Fundamentos biológicos

5.3.1. Preliminares

Os fenômenos biológicos frequentemente dependem de uma variedade de relações complexas, inter-relações, *feedbacks*, autorregulações, etc. Devido a esse fato, é difícil encontrar uma teoria geral que possibilite dissertar sobre estes fenômenos. Como dissemos anteriormente, Rashevsky foi o responsável por fornecer tal aspecto teórico e matemático à Biologia. Seu modo de operar era divido em dois tipos: a biologia métrica e a biologia relacional (RASHEVSKY, 1954).

A biologia métrica toma como critério apriorístico o reducionismo. Esta ciência permite que conheçamos e cataloguemos as estruturas biológicas assim como suas partes. Quase toda a biologia moderna caminha neste sentido gerando muitos resultados e *insights*, como a descoberta do DNA, das cadeias metabólicas, dos sistemas orgânicos, do conectoma, e assim por diante. Neste trabalho, iremos tomar um caminho de mão dupla: consideraremos todas as descobertas e achados desta biologia métrica ao mesmo tempo em que damos a estes resultados sentido relacional. Em outras palavras, queremos unir as biologias métrica e relacional. Para tanto, iniciemos esta análise por aquilo que ambas as biologias têm em comum: o sistema biológico *per se*.

5.3.2. Sistemas biológicos

Para apresentar este assunto, iremos nos referir ao trabalho seminal de Rosen no que concerne à Teoria Relacional de Sistemas Biológicos (ROSEN, 1958A). Para descrever tal teoria e a desenvolver, iremos proceder formalmente. Assim, definamos dois conceitos básicos: sistema biológico e metabolismo.

Definição 5.10. *Um sistema biológico é um todo substancial vivo.*

As principais características dos seres vivos *latu sensu* são: a assimilação, o crescimento e a reprodução. A assimilação é o fenômeno pelo qual um organismo capta matéria, energia e informação de seu ambiente e visa sua própria construção, ou seja, autopoiesis. O crescimento é o fenômeno pelo qual um organismo cresce em massa, extensão, e movimento. Com efeito, o crescimento, neste sentido, também inclui a cicatrização, regeneração e reprodução assexuada. Por fim, a reprodução é o fenômeno pelo qual um organismo vivo perpetua-se no tempo. Isso se dá por uma tensão entre variabilidade e hereditariedade. Estes três fenômenos ocorrem mediante um fenômeno mais fundamental: o metabolismo.

Definição 5.11. *O metabolismo é a sequência de operações internas de um todo substancial vivo.*

Note-se que o metabolismo só pode iniciar com a entrada de matéria, energia ou informação no sistema vivo. A este conjunto, que usualmente chamamos materiais básicos, dá-se o nome de *environmental input materials*[91]. Este conjunto de materiais básicos é transformado em novos materiais os quais são utilizados em benefício do organismo. Ao fim desta sequência de operações, tem-se o que se denominada *environmental output materials*, ou numa terminologia mais simplificada: materiais residuais. Um dos principais objetos de estudo da Biologia Moderna é conhecer, descrever e prever essa sequência de operações.

[91] Tradução livre de materiais de entrada ambientais.

5.3.3. Componente de um sistema e diagrama de bloco

Um sistema biológico pode ser analisado sob duas perspectivas gerais. A primeira dela consiste em considerar um sistema como uma coleção de partes que denominamos componentes do sistema.

Definição 5.12. *Uma componente de um sistema é uma porção material do sistema que produz um conjunto de outputs por meio da operação de um conjunto de inputs.*

As componentes do sistema se relacionam por meio de inputs e outputs. Em outras palavras, o output de uma componente pode ser tomado como input à outra componente e assim sucessivamente. Obviamente, há outras interações sistêmicas além do compartilhamento de input e outputs, como, por exemplo, a operação interna das componentes. No entanto, na primeira perspectiva do sistema biológico, diz-se que a solução do sistema deriva da completa enumeração das componentes do sistema e de suas relações por meio de inputs e outputs. Rosen denomina essa solução como *coarse structure problem*[92] (ROSEN, 1958A). A título de exemplo, consideremos alguns sistemas de modo a identificar suas componentes e suas relações. Uma célula pode ser compreendida como um sistema biológico, em que suas componentes são macromoléculas e moléculas; e suas relações são de dois tipos: interações de constituição e interações metabólicas, como, por exemplo, o ciclo do ácido cítrico, cadeia respiratória, produção de proteínas, etc. Em todos estes processos celulares, existe uma "maquinaria" enzimática, que relaciona um conjunto de substratos a um conjunto de produtos, utilizando um número finito de enzimas, de modo a formar uma cadeia de produção Outro exemplo é o caso de tecidos, órgãos, sistemas orgânicos, etc. Esses fenômenos são mediados por meio de interações materiais como: células, humores, interleucinas, sinalizadores celulares, sinapses, etc. A biologia é farta de fenômenos nos quais cabe o conceito acima delineado.

Como é notável, o número de componentes e interações pode ser difícil de enumerar e delimitar. Devido a isto, propõe-se o uso do diagrama de bloco ou diagrama de fluxo para representar sistemas biológicos. A obtenção de um diagrama de bloco é realizada por meio de um acesso direto e empírico ao fenômeno (MIRANDA, LA GUARDIA, *et al.*, 2016). Para organizar este procedimento, consideremos:

[92] Na tradução livre: problema da estrutura bruta.

I. Identificar todos os agentes (componentes) que participam diretamente no fenômeno e simbolizá-los por meio de blocos, caixas, círculos ou vértices.
II. Se houver uma interação entre as componentes A e B por meio de matéria, energia ou informação, então haverá uma seta direcionada de A a B.
III. Associar ao diagrama uma origem, que corresponde a uma componente do sistema no qual toda a matéria, energia e informação entram no sistema. Isso implica que todas as outras componentes que tiverem grau de entrada[93] igual à zero, recebem uma seta da componente origem.
IV. Associar ao diagrama um término, que corresponde a um componente sorvedouro do sistema de toda matéria, energia e informação. Isso implica que todas as outras componentes que tiverem grau de saída[94] igual à zero, recebem uma seta que aponta em direção a este término.
V. No geral, teremos que a origem e o término de um sistema representam o ambiente externo, ou seja, tudo aquilo que não compõe e nem é operado no sistema. Isso significa que, na prática, a origem coincide com o término[95].

Este procedimento algorítmico irá gerar um diagrama como disposto no exemplo da Figura 5. Note-se que qualquer sistema pode ser decomposto em componentes e relações entre componentes. O critério empírico que permite esta identificação é função das ciências particulares, como: Biologia Celular, Histologia, Fisiologia, Anatomia, etc. Por hora, nossa preocupação é abstrair o tipo de sistema de modo a considerar um sistema genérico. Queremos que este sistema genérico seja geral o suficiente para explicar e modelar os casos particulares estudados por estas ciências particulares.

É importante notar que cada componente do diagrama da Figura 5 representa um elemento sem estrutura, ou seja, não conhecemos necessariamente o modo de sua operação – na terminologia de Rosen – como se fosse uma caixa preta. Analogamente, é possível compreender as componentes de um sistema considerando as operações internas. Neste caso, estamos a tratar da *fine structure problem*[96] (ROSEN, 1958A). A relação entre as estruturas bruta e fina é semelhante à relação que os estados microscópios e macroscópicos têm na Termodinâmica. Na mesma esteira segue a relação entre biologia métrica e biologia

[93] Corresponde ao número de setas que chegam até o vértice.
[94] Corresponde ao número de setas que saem do vértice.
[95] Esta consideração apriorística é especialmente aplicável a sistemas biológicos uma vez que são sistemas termodinamicamente abertos.
[96] Tradução livre: problema de estrutura fina.

relacional. No entanto, diferentemente da Física Estatística, os macroestados não dependem totalmente dos microestados.

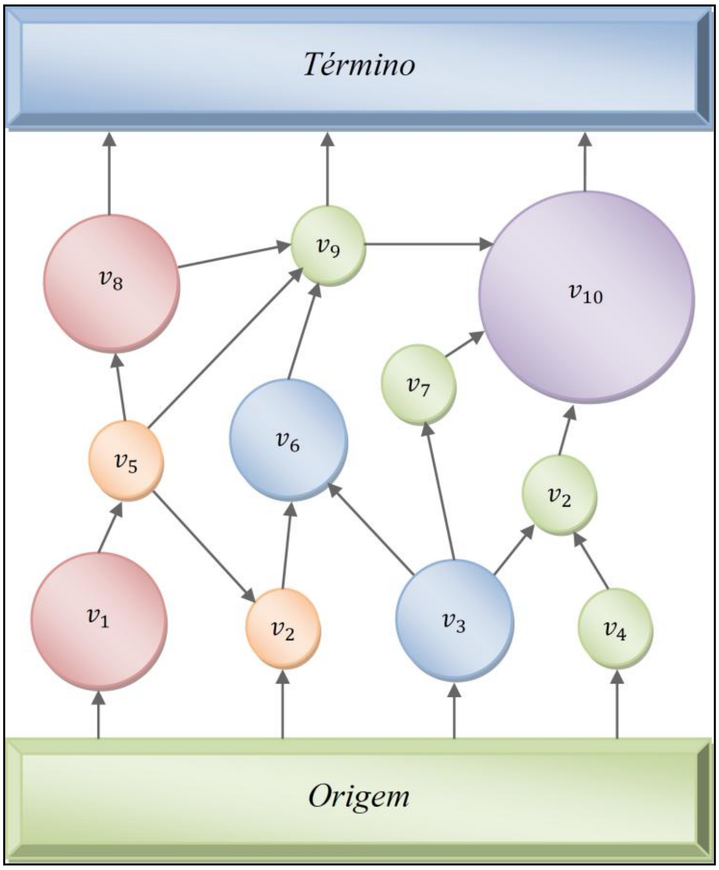


FIGURA 5. Exemplo de diagrama de bloco.
Fonte: autor.

A principal diferença entre a estrutura bruta e a fina é que aquela abstrai apenas a função, enquanto que esta estabelece a exata composição física e operação interna. Por exemplo, as insulinas humana, bovina e suína diferem na estrutura química, mas têm a mesma função biológica: permitir que glicose entre nas células. Quando abstraímos a estrutura bioquímica da insulina e consideramos apenas sua função, encontramo-nos no âmbito da estrutura bruta. Por outro lado, quando estamos estudando as minúcias da estrutura bioquímica da insulina, estamos no contexto da estrutura fina. Assim, é possível notar que dois sistemas quaisquer podem ter estruturas brutas idênticas, mas diferir profundamente em suas estruturas finas.

É notável o fato de que os dispositivos observacionais da Biologia nos fornecem informações acerca da estrutura fina. Isto implica que é necessário que utilizemos estas informações para abstrair sistemas genéricos que refletem sua estrutura bruta. Este procedimento é uma indução[97], ou seja, do específico para o geral. Mas na medida em que asserções possam ser feitas às estruturas brutas, invariavelmente se fará às estruturas finas, uma vez que estas estão contidas naquelas (ROSEN, 1958A).

Além destas duas perspectivas gerais, é possível conceber o sistema biológico por meio de outras duas perspectivas particulares: a individual e a substancial. Na perspectiva individual, construímos o diagrama de bloco com cada agente físico particular que ocorre no sistema. Por exemplo, seriam consideradas todas as células individuais, moléculas, tecidos, etc. [98]. Por outro lado, podemos considerar cada tipo de componente como uma única componente que representa simultaneamente todos os particulares do sistema. O problema da estrutura bruta tem esta premissa implícita.

O âmbito que estamos tratando os sistemas biológicos é o da estrutura bruta, ou seja, da Biologia Relacional. A primeira coisa que se nota ao compormos um diagrama de bloco é que o mesmo pode ser compreendido, inicialmente, como um grafo direcionado. No entanto, como mostramos na seção anterior, todo grafo é categoria. E o modelo de grafo não permite que modelemos dois tipos de interações possíveis em sistemas biológicos (ver Figura 4). Seria possível, ainda dentro da Teoria de Grafos, conceber um grafo com propriedades que incluíssem estes tipos de interações. No entanto, a teoria perderia seu apelo pragmático e clareza intuitiva. Assim, iremos categorificar o diagrama de bloco proveniente de dados experimentais e/ou observacionais.

5.3.4. Representação formal dos sistemas biológicos

A caracterização final do sistema formal que conceberemos depende, em primeiro lugar, da forma com a qual concebemos as componentes do sistema. Seja H uma componente do sistema capaz de receber um número finito *m* de inputs e um número finito *n* de outputs. É importante notar que as componentes do sistema agem seletivamente no conjunto de inputs para gerar cada output. Seja o conjunto de inputs de uma componente H do sistema denotado por $In(H)$ e o conjunto de outputs $Out(H)$, temos que, para cada operação do sistema que gera um output qualquer, existe um subconjunto $X \subseteq In(H)$ de input para cada operação que existe em H que gera um subconjunto $Y \subseteq Out(H)$ de outputs. Rosen denominou $In(H)$

[97] Indução *latu sensu*.
[98] Dependendo do fenômeno em pauta, torna-se necessário modelar cada ente individual em um diagrama de bloco. Por exemplo, um biólogo interessado em estudar as relações entre células do mesmo tipo deve, invariavelmente, modelar cada uma destas células no diagrama de bloco.

como o conjunto de inputs admissíveis de H e $Out(H)$ como o conjunto de outputs admissíveis de H, de modo que este dois conjuntos são totalmente determinados pela componente H. A título de exemplo, concebamos um dos tipos mais simples de componente, que recebe um número *m* de inputs e gera um único output: uma aplicação catabólica (Figura 6A). Da mesma maneira, podemos conceber uma componente que recebe um único input e gera um número *n* de outputs: uma aplicação anabólica (Figura 6B). Como uma componente biológica age dos dois modos e com várias operações, concebemos uma componente M generalizada com *m* inputs e *n* outputs operacionalizados com *k* operações (Figura 6C).

Especificamente, cada input e output são concebidos como um conjunto particular. Desta maneira, existe uma correspondência que determina que para cada seta direcionada ρ_i, existe um conjunto A_i. Com efeito, a aplicação *f* da componente A) da Figura 6, onde para cada m-upla $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)$, tal que $a_i \in A_i$ de modo que $1 \leq i \leq m$, é definida como $f: A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_m \longrightarrow B$. Analogamente, tem-se para a componente B) da Figura 6: $f: A \longrightarrow B_1 \times B_2 \times B_3 \times \ldots \times B_n$. E finalmente no caso C) temos $f_k: A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_m \longrightarrow B_1 \times B_2 \times B_3 \times \ldots \times B_n$. Particularmente, Rosen determina que para cada conjunto B_k, haverá uma aplicação f_k (ROSEN, 1958B), restringindo a possibilidade de mapear os conjuntos A e B na forma de produtos cartesianos. Apesar desta diferença, o que abstraímos aqui é ao fato de que as componentes do sistema são concebidas como um conjunto de aplicações f_k que determinam todos os inputs e outputs, como requerido na Definição 5.13. A partir desta simples consideração acerca das componentes do sistema, podemos construir a representação formal de um sistema biológico por meio de uma categoria.

Definição 5.13. *Todo sistema biológico pode ser representado por uma categoria* $\boldsymbol{\mathcal{M}} = (\mathcal{O}, hom, id, \circ)$ *que consiste em:*

1) *Uma classe* $\mathcal{O}$*, os quais os membros são produtos cartesianos entre inputs e outputs. Se* M *é um* $\boldsymbol{\mathcal{M}}$*-objeto, então* M *constitui um subconjunto do produto cartesiano de todos os conjuntos que são componentes básicos do sistema, de modo que* $M \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$.
2) *Para cada par* (M_i, M_j) *de* $\boldsymbol{\mathcal{M}}$*-objetos, existe um conjunto* $hom(M_i, M_j) = H$ *os quais os membros são denominados* $\boldsymbol{\mathcal{M}}$*-operações. Denotamos inputs como* $In(H) = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_m$ *e outputs como* $Out(H) = B_1 \times B_2 \times B_3 \times \ldots \times B_n$.

3) Para cada $\mathcal{M}$-*objetos M, existe uma operação* $M \xrightarrow{id_M} M$ *denominado* $\mathcal{M}$-*identidade.*

4) *Uma lei de composição* que associa a cada par de $\mathcal{M}$-*operações* $M_i \xrightarrow{f} M_j$ *e* $M_j \xrightarrow{g} M_k$, *uma* $\mathcal{M}$-*operação* $M_i \xrightarrow{g \circ f} M_j$ *denominado composta de f e g.*[99]

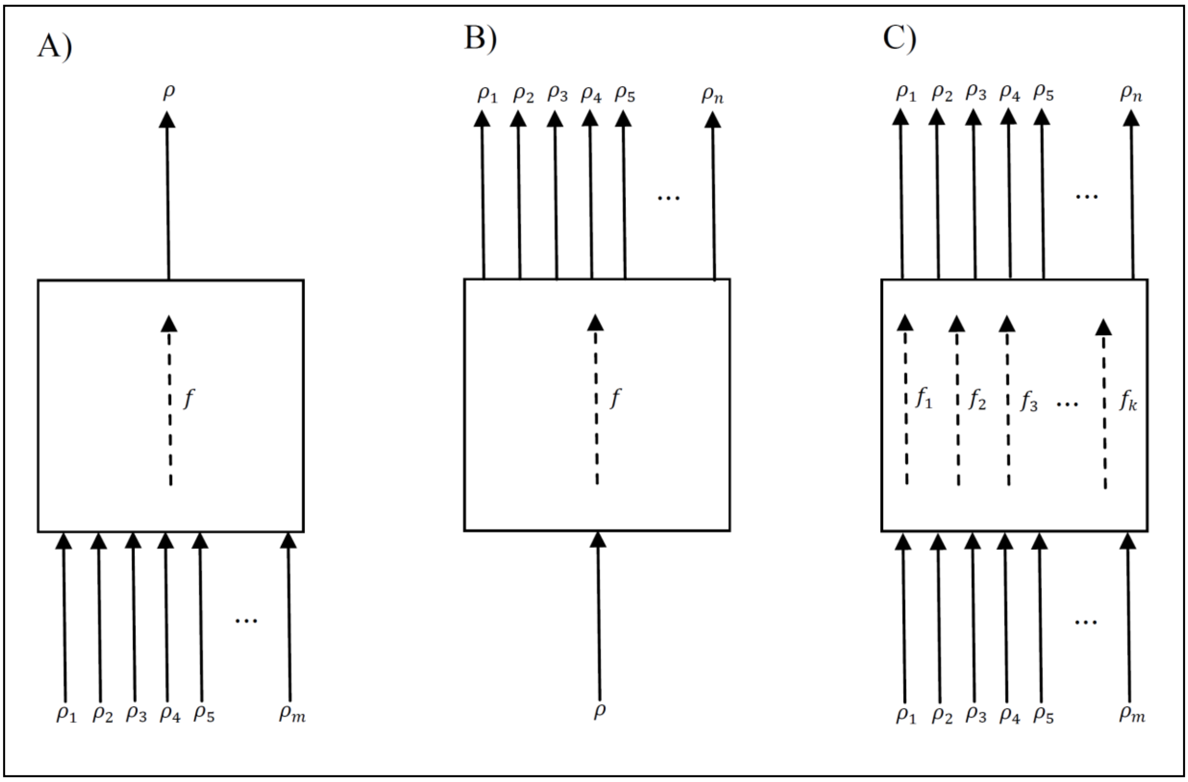


FIGURA 6. Exemplos de componentes de um sistema.
Fonte: autor.
Notas: A) Exemplo de componente catabólica. B) Exemplo de componente anabólica. C) Exemplo de componente generalizada.

Assim, as componentes do sistema são os conjuntos *hom*, os inputs e outputs produtos cartesianos e as compostas de operações são sequências de operações. Nesta representação de sistema biológico é possível compreender em um só dispositivo matemático o conteúdo das Definições 5.11, 5.12 e 5.13. Em outras palavras, a representação de sistema biológico por meio de categoria compreende o todo substancial vivo, uma vez que modela as partes e suas relações totais e possíveis. Adicionalmente, modela quais são os agentes

[99] A composição de operações está sujeita às mesmas condições que a categoria abstrata definida no Capítulo 4.

biológicos – ou seja, as componentes – em termos de suas operações. Finalmente, modela o metabolismo por meio de composição de operações.

É importante enfatizar que os problemas concernentes à representação de grafos desaparecem. Se uma componente H_1 gera dois, ou mais, inputs b_i e b_j a outra componente H_2, isso simplesmente implica que existe um par ordenado $(b_i, b_j) \in B_i \times B_j$ gerada por meio de uma aplicação $f \in H_1$ tal que $f: A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_m \longrightarrow B_i \times B_j$, de modo que $r(f) \subseteq In(H_2)$. Da mesma maneira, se uma componente H_1 gera o mesmo input b_i a duas componentes H_2 e H_3, implica simplesmente que, pelo menos, $In(H_2) \cap In(H_3) = B_i$ tal que $b_i \in B_i$.

Na medida em que estas dificuldades são superadas pela categorificação do sistema biológico, resta saber como determinar corretamente quem são as componentes do sistema. É notável o fato de que um sistema real possa ser abstraído de diversas maneiras de modo a gerar diagramas diversos para um mesmo fenômeno. Por exemplo, tomando um organismo vivo como nosso sistema biológico, de quantas maneiras é possível decompô-lo? É possível o decompor em seus átomos constituintes, em suas moléculas, em suas células, em seus tecidos, etc. Cada uma destas decomposições gerará uma representação do mesmo sistema, mas com componentes de naturezas diferentes.

Muito provavelmente, Rosen era reducionista. E quando este problema se apresentou a ele, o mesmo apenas indicou que é possível, matematicamente, encontrar uma forma canônica dentre as diversas representações do mesmo sistema (ROSEN, 1958B). Nós, por outro lado, vamos assimilar todas estas representações categóricas do mesmo sistema para formalizar a emergência e a LPI.

Como este procedimento será trabalhado definitivamente no Capítulo 7, iremos focar na forma com que o biólogo (*i. e.*, cientista experimental) pode transformar um fenômeno de interesse em uma representação categórica. Rosen denomina sua representação categórica como *abstract block diagram*[100]. Apesar de nosso modelo não corresponder exatamente ao seu modelo, uma vez que não restringimos a aplicação f_k a um único contradomínio, iremos denominar o modelo resultante de uma decomposição como diagrama de bloco abstrato.

[100] Tradução livre: diagrama de bloco abstrato.

5.3.5. Construção do diagrama de bloco abstrato

As principais diferenças entre o diagrama de bloco – que é um grafo direcionado – e o diagrama de bloco abstrato – que é uma categoria – são a forma com que suas componentes se relacionam. O procedimento algorítmico, que gerou o diagrama da Figura 5, tem como critério o seguinte: se houver alguma relação entre duas componentes, então haverá uma seta direcionada entre eles. Isso significa que não importa o número, nem a forma com que eles interagem, mas que apenas interagem.

No caso do diagrama de bloco abstrato, importa o número de modos com que duas componentes interagem, pois isso altera a representação final do sistema biológico. Com efeito, é necessário que organizemos um método eficaz e claro de como abstrair tal diagrama de um sistema biológico real, como uma célula, tecido, órgão, etc. Para fazer isso, iremos nos pautar no algoritmo de construção do diagrama de bloco e refiná-lo.

O Item I indica que é necessário identificarmos quem são os agentes biológicos que agem no sistema, ou fenômeno, e representá-lo com um bloco no diagrama. Na discussão anterior indicamos que estes agentes biológicos são os conjuntos de operações H de uma categoria $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Nós consideraremos dois modos de abstrair o agente H: um arbitrário e um informacional.

O modo arbitrário tem um simples critério empírico: o agente deve ser irredutível às suas partes. Toda a Biologia é divida em ciências particulares que se centralizam naturalmente nestes agentes. A Biologia Celular tem como sujeito da ciência[101] a célula; a Histologia tem como sujeito da ciência os tecidos; a Fisiologia tem como sujeito da ciência os sistemas orgânicos; a Anatomia tem como sujeito da ciência as partes de um organismo; e assim por diante. O modo arbitrário de concepção de agentes biológicos tem como vantagem a facilidade de acesso aos mesmos, uma vez que muito conhecimento sobre eles já está disponível na literatura. Assim, por exemplo, se os agentes do sistema são células, não seria impossível enumerar a forma com que estas células interagem, assim como quais são as operações internas das mesmas.

Por outro lado, o modo informacional, tem como critério a “densidade informacional” como indicador de agente biológico. Essa densidade deve corresponder à sua irredutibilidade enquanto ente físico. Um agente biológico deve ser caracterizado pela sua

[101] Este é um termo técnico da epistemologia.

independência, ou seja, ele deve ser um todo substancial em si mesmo. Para identificar todos substanciais empiricamente, dedicamos a próxima seção apenas para este fim.

No entanto, é necessário que terminemos a refinação do procedimento algorítmico de construção do diagrama de bloco abstrato antes de adentrarmos na metodologia específica de identificação de agentes biológicos. Assim, o Item II estabelece que se houver um compartilhamento de matéria, energia ou informação entre duas componentes haverá uma seta direcionada entre elas. Com o modelo de categoria, iremos considerar que todo tipo de matéria, energia e informação devem ser inputs individuais que irão compor a interação destas duas componentes. Os Itens III a V nos diz que devemos associar ao sistema o ambiente que deve ser concebido como uma origem e um término; no diagrama abstrato será um componente E que constitui a fusão de ambos. A componente E não pode ser restringida simplesmente pelos outputs que não servem como input a outras componentes do sistema; nem como os inputs que não são provenientes de outras componentes do sistema, mas sim como uma componente que representa todas as interações que as outras componentes do sistema têm com sua vizinhança. Ou seja, a componente que representa o ambiente pode ter algum input output em comum com outras componentes.

Por exemplo, tomemos a célula como sistema biológico. Suas componentes, na decomposição arbitrária, podem se representadas pelas suas organelas. E todo o meio extracelular que esta célula está sujeita, representa o ambiente. Um polipeptídio produzido por um ribossomo pode sair da célula, assim como pode ser utilizado por outra organela da célula. Assim, este polipeptídio constitui tanto um output para o ambiente quanto para outra organela. Esclarecido isto, voltemos à questão da decomposição informacional do sistema biológico.

5.4. Decomposição informacional: fase empírica

Na seção anterior sugerimos duas formas de abstração do conceito de componentes de um sistema biológico, uma arbitrária e outra informacional. Nesta seção, iremos focar nesta última. O método que iremos utilizar se relaciona diretamente com o assunto do próximo capítulo, uma vez que os quantificadores dependem de Cadeias de Markov que determinam padrões de informação. Para tornar esta discussão facilitada, iremos aplicar esta técnica inicialmente a um grafo direcionado e então o categoficaremos.

5.4.1. Comunidades e grafos direcionados

A decomposição informacional depende, a princípio, de uma decomposição relacional – neste sentido somos cartesianos[102]. Tomemos um sistema biológico e o decompomos em suas partes de modo arbitrário: moléculas, células, tecidos, etc. Utilizando o procedimento algorítmico de construção do diagrama de bloco, obteremos um grafo direcionado *G*. Por meio de outro procedimento algorítmico denominado *Walktrap Algorithm*[103] (WTA) é possível identificar porções mais densas em um grafo (PONS e LATAPY, 2006). Estas porções mais densas, denominadas *cliques*[104] ou comunidades, são subconjuntos de vértices contidos no conjunto de vértices que define o grafo *G*. A principal característica destas comunidades é o fato de que elas possuem uma grande densidade de setas direcionadas entre os vértices que a compõe em relação ao número de setas direcionadas que ocorrem entre comunidades. Em outras palavras, comunidades são mais densas internamente e mais esparsas entre si. Queremos utilizar estas porções mais densas do grafo como os agentes biológicos e testar sua irredutibilidade.

De acordo com Pons e Latapy (2006), a noção de comunidade é de difícil formalização, uma vez que depende do "quão conectados" estão os vértices em uma comunidade. De modo geral, podemos considerar uma partição $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ do conjunto de vértices de um grafo $G = (V, E(V))$, onde $(\forall i,\ C_i \subseteq V)$ representa uma boa estrutura de comunidades se a proporção de setas direcionadas dentro de C_i é alta comparado com a proporção de setas direcionadas entre eles. O WTA tem como modelo base a caminhada aleatória no grafo e a tendência de caminhantes ficarem presos em conjuntos densos de vértices de alta conectividade. Estes conjuntos, por meio da quantificação desta tendência, estabelece qual a partição ideal para um dado grafo *G*. Como o problema da determinação das comunidades já foi resolvido por Pons e Latapy, não iremos entrar no mérito de seu modelo particular. Mas iremos utilizar estes resultados para determinar comunidades após a decomposição de um sistema biológico. Este procedimento é realizado mediante o pacote Igraph (CZARDI e NEPUSZ, 2006) da Linguagem Interpretativa R (TEAM R DEVELOPMENT CORE, 2008).

Vamos supor um diagrama de bloco, produto da decomposição de um sistema biológico genérico. Também iremos supor que, utilizando o WTA, encontramos a partição $\mathcal{P}$

---

[102] Como dissemos ao fim do Capítulo 2, acreditamos que a Ciência Moderna reducionista deve estar aliada ao pensamento emergentista.
[103] Tradução livre: algoritmo de armadilhas de caminhada.
[104] Aglomerados.

que corresponde adequadamente à estrutura de comunidades de um grafo. Daí vem a pergunta: podemos reduzir as comunidades à vértices sem perda de generalidade? Para responder a esta questão central, é necessário que lancemos mão de uma nova Teoria de Fluxo de Informação em redes complexas (MIRANDA, LA GUARDIA, *et al.*, 2016).

5.4.2. Teoria de Fluxo de informação e índice de irredutibilidade

A partir de um grafo direcionado (*i. e.* diagrama de bloco), concebemos uma Caminhada Aleatória neste grafo – de modo similar que Pons e Latapy fazem. Estas caminhadas podem ser entendidas como um processo estocástico em tempo discreto no qual um caminhante genérico – que representa uma unidade de informação – segue os caminhos direcionados passando por vértices e arestas (MIRANDA, LA GUARDIA, *et al.*, 2016). Para que esta dinâmica esteja bem definida, consideremos as seguintes condições:

I. Todos os caminhantes são criados na componente E que representa o ambiente de modo que o número total de caminhantes que existe no tempo t no diagrama de bloco é $N(t) = t$. Isso implica que em cada unidade de tempo, um caminhante é criado e caminha uma vez.
II. O caminhante só pode mudar de posição entre vértices que estejam conectados por uma seta direcionada. Com isso, o caminhante deve respeitar a direcionalidade das arestas.
III. Se um caminhante se encontra numa componente i, considerando que i esteja conectada por uma seta direcionada a outra componente j, a probabilidade do caminhante sair de i e alcançar j, no intervalo de tempo $\Delta t = 1$, é de $p_{ij} = \frac{1}{k_{out_i}}$, onde k_{out_i} é o grau de saída da componente i definida por $k_{out_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

Na medida em que o tempo discorre, mais caminhantes são criados na rede numa proporção linear. Com efeito, é conveniente conceber um vetor de estado que sintetize a informação sobre a posição de todos os caminhantes de um grafo G no tempo t. Denominamos este vetor como vetor posicional, denotado, por

$$W_G(t) = \Big(w_1(t), w_2(t), \dots, w_{N(t)=t}(t)\Big). \qquad (4)$$

Em que $W_G(t)$ é um vetor de *t* coordenadas, $w_k(t)$ é a posição (*i. e.*, vértice) do *k*-ésimo caminhante no tempo *t*. Como estamos interessados em explorar a propriedade de caminhantes mudarem de posição, temos que em um tempo suficientemente grande a probabilidade um caminhante mudar da posição *i* para posição *j* é igual a frequência na qual isso é observado no grafo. Como estamos trabalhando com grafos direcionados, a probabilidade de um caminhante chegar a *j* por meio de *i* não é necessariamente igual à probabilidade do mesmo chegar a *i* por meio de *j*. Considerando estes fatos, podemos computar a quantidade de caminhantes em um vértice qualquer por meio de um novo vetor de estado, denominado vetor de topológico[105] denotado por

$$S_G(t) = \big(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_n(t)\big). \tag{5}$$

Em que $\sigma_k(t)$ é o número de caminhantes no *k*-ésimo vértice no tempo *t* e n é o número de vértices do grafo *G*. Como queremos encontrar a frequência relativa de caminhantes, basta calcularmos o valor da razão relativa de caminhantes em cada vértice, ou seja

$$f_k(t) = \frac{\sigma_k(t)}{N(t)}. \tag{6}$$

Em que $f_k(t)$ é denominado fluxo do *k*-ésimo vértice no tempo *t*. Com esta formulação, podemos definir o principal vetor de estado informacional – denominado vetor de fluxo – para um grafo *G* e tempo *t* como

$$F_{V(G)}(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big). \tag{7}$$

Este vetor é o principal gerador de quantificadores nesta presente tese. Note-se que, este vetor tem $n = |V(G)|$ coordenadas. Altos valores de $f_k(t)$ indicam que o vértice k está sendo ativado constantemente, ao passo que valores baixos de $f_k(t)$ indicam o contrário. Podemos interpretar o valor de $f_1(t)$ como uma maior densidade de informação sendo

[105] Topológico no sentido atribuído na Teoria de Grafos.

processada por este vértice, pois as componentes do vetor de fluxo são organizadas decrescentemente.

Devido à forma com que construímos o grafo, implica que o mesmo é conectado, uma vez que todos os vértices de grau de saída nulo estão conectados ao término; e todos os vértices de grau de entrada nulo são conectados à origem. Quando fundimos a origem e o término, conectamos o grafo. Um grafo conectado é aquele no qual, tomando dois vértices arbitrários quaisquer, implica que sempre existe pelo menos um caminho direcionado entre eles (STEEN, 2010, p. 37). Em um grafo conectado, quando t tende ao infinito, implica que existe um vetor de fluxo estacionário $F_{V(G)}(t \to \infty)$ (MIEGHEM, 2011, p. 63-65). Podemos calcular o vetor de fluxo de duas maneiras diferentes: algoritmicamente e algebricamente.

Para calcular exatamente (*i. e.*, algebricamente) o vetor de fluxo $F_{V(G)}(t \to \infty)$, é necessário que exploremos as propriedades da matriz de transição P proveniente do grafo G onde o fluxo de informação decorre. Como estamos tratando no âmbito de grafos direcionados, as entradas da matriz de transição são dadas por $p_{ij} = \frac{1}{k_{out_i}}$, que constitui a probabilidade de um caminhante de se mover do vértice i ao j. Supondo que o grafo é fixo, ou seja, o número de vértices e setas direcionadas é fixo, podemos representar a evolução temporal do fluxo de informação utilizando a equação de operação

$$F_{V(G)}(t+1) = PF_{V(G)}(t). \tag{8}$$

Para uma condição inicial qualquer $t = 0$, o estado genérico no tempo t, será:

$$F_{V(G)}(t) = P^t F_{V(G)}(t = 0). \tag{9}$$

Note-se que para calcular exatamente $F_{V(G)}(t \to \infty)$, torna-se forçoso que calculemos exatamente P^∞. Para realizar tal tarefa, lançamos mão da Teoria de Matrizes não Negativas e Cadeias de Markov (SENETA, 1973, p. 22). Com efeito, consideremos que a equação de autovalor dada em (8) e (9) são uma Cadeira de Markov, onde a transição de estados é dada pela operação da matriz de transição P. Por meio do cálculo do espectro da matriz T – ou seja, o conjunto $\{\lambda_i\}$ de autovalores de T (MIEGHEM, 2011, p. 63) – é possível identificar se existe o vetor estacionário $F_{V(G)}(t \to \infty)$ e calculá-lo exatamente. Para tanto, é necessário testarmos se o conjunto de autovalores de P segue os critérios de Matrizes não Negativas de Perron-Frobenius (SENETA, 1973, p. 18), quais sejam:

i. $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$.
ii. $|\lambda_1| = 1$.
iii. $|\lambda_i| \leq 1$, para todo $2 \leq i \leq n$.

Satisfeitas estas condições, temos que existe um autovetor estacionário u tal que $u = P.u \Rightarrow 1.u = P.u$. Ou seja, o autovetor correspondente ao autovalor 1 é u. O vetor u é um autovetor direito, pois a soma de todas as linhas da matriz P é 1. Isso implica que a probabilidade é conservada no processo da Caminhada Aleatória sob o regime de uma Cadeia de Markov P. Com isso, o cálculo de $F_{V(G)}(t \to \infty)$ é dada pela normalização do vetor u (MIRANDA, LA GUARDIA, *et al.*, 2016). Este resultado foi extensivamente utilizado em um estudo de caso no fenômeno imunológico da Tolerância Oral (MIRANDA, DELGOBO, *et al.*, 2015). Adicionalmente, iremos utilizar esta Teoria de Fluxo de Informação em um estudo de caso no próximo capítulo.

Ademais, podemos simplificar o método de cálculo do vetor de fluxo $F_{V(G)}(t \to \infty)$ por meio do seguinte procedimento:

I. Calcular a matriz de transição de um grafo G por meio das probabilidades $p_{ij} = \frac{1}{k_{out_i}}$.
II. Testar as condições de Matrizes não Negativas de Perron-Frobenius para o conjunto de autovalores $\{\lambda_i\}$ da matriz P.
III. Se as condições forem satisfeitas, encontrar o autovetor correspondente ao autovalor de valor 1 e o normalizar[106].

A fim de demonstrar que este procedimento algébrico é eficaz, apresentamos o algoritmo que calcula recursivamente, para um grande número de iteradas (10^7) a equação $F_{V(G)}(t+1) = PF_{V(G)}(t)$. Este algoritmo foi implementado em linguagem R e se encontra ao fim do manuscrito no Anexo B2. No nosso trabalho sobre Tolerância Oral, o método

[106] Como usualmente as matrizes de transição são de alta ordem, é necessário que se calcule os autovalores computacionalmente. Para tanto, incluímos um método eficaz de calcular $F_{V(G)}(t \to \infty)$ algebricamente no Anexo B1.

algorítmico se aproximou em 90% do método algébrico. No entanto, uma forma otimizada do algoritmo permitiu que aumentássemos a precisão para 99,9% [107].

Com isso, podemos voltar à discussão sobre comunidades, particularmente na questão que levantamos: podemos reduzir a comunidade a um único vértice sem perda de generalidade? Para responder a esta questão, iremos lançar mão da teoria de informação recém-apresentada. Em primeiro lugar, supondo que tenhamos concebido um grafo direcionado G como prescrito no método de construção de um diagrama de bloco; e que tenhamos encontrado o conjunto partição $\mathcal{P} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ que represente coerentemente a estrutura de comunidades por meio da WTA; definimos o vetor de fluxo para cada comunidade C_k como no tempo t como $F_{C_k}(t)$ que tem $|C_k|$ coordenadas. Note-se que $F_{C_k}(t)$ é um vetor que contém apenas as coordenadas correspondentes aos seus vértices, pois $C_k \subseteq V(G)$.

Assim, se existe o vetor estacionário $F_{V(G)}(t \to \infty)$, implica que todas as suas componente também são estacionárias, logo existe o vetor estacionário $F_{C_k}(t \to \infty)$ para qualquer comunidade C_k. Em nosso trabalho seminal sobre fluxo de informação, denominamos a sequência decrescente de valores das componentes de $F_{V(G)}(t \to \infty)$ como distribuição padrão. Isso implica que existe uma distribuição padrão para cada $F_{C_k}(t \to \infty)$.

Se quisermos saber se $F_{C_k}(t \to \infty)$ é redutível a um vértice, é necessário que saibamos se a distribuição observada neste vetor se aproxima da distribuição uniforme. A distribuição uniforme indica o caso no qual os vértices que compõe a comunidade têm a mesma importância no processamento de informação em relação ao grafo. Logo, a diferença entre a distribuição uniforme e o fluxo padrão da comunidade permite que quantifiquemos um índice de irredutibilidade desta comunidade. Para tanto, consideremos que a distribuição uniforme de uma comunidade C_k seja dada por

$$F_{C_k'}(t \to \infty) = \left(\frac{1}{|C_k|}, \frac{1}{|C_k|}, \ldots, \frac{1}{|C_k|}\right). \tag{10}$$

Este vetor de fluxo é estacionário e tem $|C_k|$ coordenadas. Com isso, definimos a diferença entre a distribuição padrão e a distribuição uniforme – considerando que ambos sejam estacionários e que tenham o mesmo número de coordenadas $|C_k|$ – de uma comunidade qualquer como

[107] Incluímos apenas a forma optimizada do algoritmo no Anexo B2.

$$D_{C_k} = F_{C_{k'}}(t \to \infty) - F_{C_k}(t \to \infty) = \left(\Delta f_1, \Delta f_2, .., \Delta f_{|C_k|}\right). \quad (11)$$

Em que $\Delta f_i = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{|C_k|} - f_i(t)\right]$ para $1 \leq i \leq |C_k|$. Evidentemente, os valores de Δf_i serão positivos se $\frac{1}{|C_k|} > f_i(t)$ e negativos se $\frac{1}{|C_k|} < f_i(t)$. Se o valor de Δf_i é positivo, isso significa que a componente na distribuição uniforme está superestimada em relação à distribuição padrão. Analogamente, se o valor de Δf_i é negativo, a componente na distribuição uniforme está subestimada. Para ambos os casos, é necessário que generalizemos os valores de Δf_i em termos de um erro relativo para cada Δf_i:

$$\mu_i = \begin{cases} \dfrac{\Delta f_i}{1/|C_k|}, & para\ \Delta f_i \geq 0 \\ \dfrac{|\Delta f_i|}{f_i(t \to \infty)}, & para\ \Delta f_i < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Em que μ_i é o erro relativo do desvio dado por Δf_i que escala com o valor de maior densidade informacional (MIRANDA, LA GUARDIA, *et al.*, 2016). Com isso, e considerando todos os erros médios relativos, podemos definir um erro médio relativo

$$\mathrm{M}_{C_k} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{|C_k|} \mu_i}{|C_k|} = \langle \mu_i \rangle. \quad (13)$$

Este é o índice de irredutibilidade da comunidade C_k. Em primeiro lugar, é um índice, pois $\mathrm{M}_{C_k} \in [0,1]$. Altos valores de M_{C_k} indicam altos desvios entre a distribuição observada e a uniforme, que implica que a comunidade é, na mesma proporção, irredutível. Invariavelmente, baixos valores deste índice indicam que a densidade de processamento de informação nesta comunidade pode ser simplificada, ou seja, reduzida. O índice de irredutibilidade permite que mensuremos se um conjunto de agentes básicos e interagentes possuem características sistêmicas e organizacionais. Isto permite que criemos um critério empírico para a observação da emergência a partir de um processo de decomposição de um sistema biológico.

Como enfatizamos nas seções anteriores, o modelo de grafo pode não ser ideal para modelar certas interações, daí vem a questão: é possível calcular o fluxo de informação de um modelo baseado no diagrama de bloco abstrato (*i. e.*. categoria)?[108]

5.4.3. Categorificação da Teoria de Fluxo de Informação

Para calcularmos o vetor de fluxo para um diagrama de bloco abstrato é necessário que recordemos que, na representação de grafos, as componentes biológicas são vértices ou comunidades, enquanto que em categorias, as componentes são os conjuntos *hom*. Com efeito, é necessário que criemos um método para transladarmos de uma representação a outra a fim de calcular o vetor de fluxo. Em primeiro lugar, é importante discernir que no diagrama de bloco, os vértices representam elementos materiais, como moléculas e células, enquanto que, na representação de diagrama de bloco abstrato, as "setas" são os elementos materiais. Para resolver esta diferença, é necessário que sigamos o seguinte procedimento a fim de tornar abstrato um diagrama de bloco:

I. Todos os vértices que pertencem a uma dada comunidade comporão operações constitutivas[109].
II. Todos os caminhos direcionados contidos em uma comunidade comporão operações de transformação[110].
III. Cada seta direcionada que ocorre entre comunidades, ou vértice que representa comunidade, será associada a um objeto A.
IV. Todas as setas direcionadas que não possuem origem ou término são completadas pela componente ambiente E.

Com efeito, a categorificação do grafo dá-se, em primeiro lugar, por considerar as comunidades discernidas pelo método WTA. Em que as operações correspondem aos

[108] Nos casos em que não é justificável conectar o grafo por meio do vértice *environment*, analisamos a dinâmica não linear gerada por estudos de espectros de grafos em que o maior autovalor da matriz de transição é diferente de zero. Esse estudo gerou uma generalização do cálculo do Expoente de Lyapunov (LA GUARDIA e MIRANDA, 2018), que mede o afastamento médio de uma órbita de um sistema. Esses resultados são apresentados no Anexo C1.
[109] Operações constitutivas são morfismos $f \in \mathrm{H_i}$ tal que $d(f) = r(f)$ e $\mathrm{H_i}$ é um conjunto *hom*. Ademais, é possível que existam comunidades de um só vértice, isso implica que esta componente possuirá apenas uma operação constitutiva.
[110] Operações de transformação são morfismos $f \in \mathrm{H_i}$ não restrita à igualdade $d(f) = r(f)$.

caminhos direcionados nesta comunidade. Para esclarecer este procedimento, consideremos a categorificação do diagrama de bloco ilustrada na Figura 7.

Analisando a Figura 7, podemos facilmente identificar todos os objetos e morfismos. O conjunto H_1 tem como input o produto cartesiano $In(H_1) = (A \times B \times C \times Z \times Y)$ e como output $Out(H_1) = (A \times B \times C \times V \times T)$. Os morfismos contidos no conjunto $H_1 = \hom\big(In(H_1), Out(H_1)\big)$ são: $a = A$, $b = B$, $c = C$, $f_1 = V \circ X \circ Z$, $f_2 = T \circ X \circ Z$, $f_3 = V \circ W \circ N \circ Z$, $f_4 = T \circ W \circ N \circ Z$, $f_5 = V \circ W \circ Y$ e $f_6 = T \circ W \circ Y$. Analogamente, $In(H_2) = (E \times V)$, $Out(H_2) = (E \times U)$ e $H_2 = hom\left(In(H_2), Out(H_2)\right)$ são: $e = E$ e $f_7 = U \circ V$. Por fim, $In(H_3) = (D \times F \times G \times T)$, $Out(H_3) = (D \times F \times G \times P)$ e $H_3 = hom\left(In(H_3), Out(H_3)\right)$ são: $d = D$, $f = F$, $g = G$, $f_8 = P \circ Q \circ T$ e $f_9 = P \circ R \circ S \circ T$. Esse procedimento enfatiza que toda modelagem em grafos está contida na modelagem com categoria, mas o inverso não é verdadeiro.

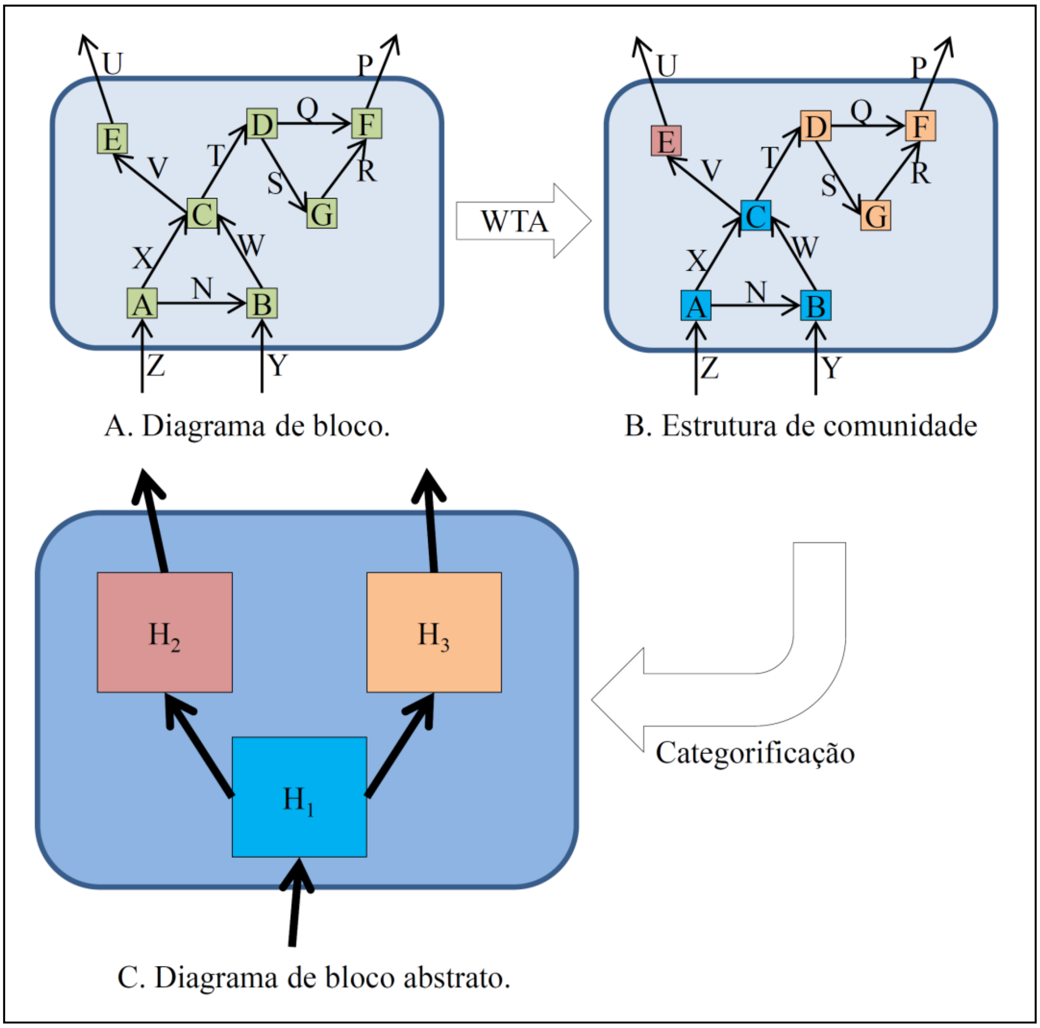


FIGURA 7. Exemplo de categorificação de um diagrama de bloco.
Fonte: autor.

É importante ratificar que a modelagem com grafos limita as possibilidades que podem ser totalmente modeladas por categorias. Por exemplo, na Figura 7, se $V = T$, então $f_1 = f_2$, caso tal que não seria modelável pelo grafo, mas poderia ser generalizado para $f_1 = f_2: Z \to V \times V$. Analogamente, se quiséssemos que houvesse outra seta direcionada de A a C, seria necessário criar outro caminho direcionado. Com isto, enfatizamos que o processo de modelagem ideal de sistemas biológicos deve conceber diretamente a categoria. De outro modo, seria possível, após a categorificação de um diagrama de bloco, inserir *ad hoc* as interações provenientes dos dois casos não modeláveis por Teoria de Grafos. No entanto, evitamos este tipo de procedimento, uma vez que a teoria final perde sua clareza e caráter pragmático. Iremos retornar a este assunto no próximo tópico.

Ademais, nos interessa conceber os conjuntos *hom* como agentes biológicos e toda a matéria, energia e informação, que servem como input as mesmas, devem ser consideradas como objetos. Com estes conceitos, é possível que definamos uma matriz de transição categórica.

Definição 5.14. *Seja $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ categoria e $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$ a classe de seus conjuntos hom. A matriz de transição categórica de $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ é uma matriz quadrada $k \times k$, denotada $P_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}$, com entradas* $p_{ij} = \frac{|Out(H_i) \cap In(H_j)|}{|Out(H_i)|}$.

Como temos por definição que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, então os conjuntos *hom* são ideais para representar agentes biológicos. Por este motivo, definimos a matriz de transição categórica em termos da probabilidade de transição entre os conjuntos *hom*. Para exemplificar, tomemos a matriz de transição categórica da categoria induzida por grafo da Figura 7. Esta matriz está disposta na Tabela 1. Notemos que apesar de categorias possuírem identidades para cada objeto, não existem necessariamente identidades para os conjuntos *hom*.

TABELA 1. Matriz de transição categórica do diagrama abstrato da Figura 7.

	E	H_1	H_2	H_3
E	0	$\frac{\lvert Out(E) \cap In(H_1)\rvert}{\lvert Out(E)\rvert} = 1$	$\frac{\lvert Out(E) \cap In(H_2)\rvert}{\lvert Out(E)\rvert} = 0$	$\frac{\lvert Out(E) \cap In(H_3)\rvert}{\lvert Out(E)\rvert} = 0$
H_1	$\frac{\lvert Out(H_1) \cap In(E)\rvert}{\lvert Out(H_1)\rvert} = 0$	0	$\frac{\lvert Out(H_1) \cap In(H_2)\rvert}{\lvert Out(H_1)\rvert} = 0{,}5$	$\frac{\lvert Out(H_1) \cap In(H_3)\rvert}{\lvert Out(H_1)\rvert} = 0{,}5$
H_2	$\frac{\lvert Out(H_2) \cap In(E)\rvert}{\lvert Out(H_2)\rvert} = 1$	$\frac{\lvert Out(H_2) \cap In(H_1)\rvert}{\lvert Out(H_2)\rvert} = 0$	0	$\frac{\lvert Out(H_2) \cap In(H_3)\rvert}{\lvert Out(H_2)\rvert} = 0$
H_3	$\frac{\lvert Out(H_3) \cap In(E)\rvert}{\lvert Out(H_3)\rvert} = 1$	$\frac{\lvert Out(H_3) \cap In(H_1)\rvert}{\lvert Out(H_3)\rvert} = 0$	$\frac{\lvert Out(H_3) \cap In(H_2)\rvert}{\lvert Out(H_3)\rvert} = 0$	0

Fonte: autor.

É importante notar que a probabilidade é conservada na matriz representada pela Tabela 1, uma vez que a soma das entradas de cada linha é 1. Com isso, podemos proceder de modo completamente análogo à Teoria de Fluxo de Informação para diagramas de bloco. Ou seja, podemos conceber uma Caminhada Aleatória na categoria (*i. e.*, diagrama de bloco abstrato). Assim como no caso de grafos direcionados conectados, temos uma matriz estocástica direita[111] para o caso da matriz gerada de uma categoria pela Definição 5.15. Para que esta condição continue sendo válida, consideremos a dinâmica para a Caminhada Aleatória em categorias:

I. Todos os caminhantes são criados na componente E que representa o ambiente de modo que o número total de caminhantes que existe no tempo *t* no diagrama de bloco é $N(t) = t$. Isso implica que em cada unidade de tempo, um caminhante é criado e caminha uma vez.
II. O caminhante só pode mudar de posição entre conjuntos *homs* H_i e H_j (*i. e.*, componentes) se, e somente, se existir pelo menos um objeto $M = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, tal que $M \in Out(H_i)$ e $M \in In(H_j)$.
III. Se um caminhante se encontra numa componente H_i, considerando que $Out(H_i) \cap In(H_j) \neq \emptyset$, então a probabilidade de que um caminhante sair de H_i e alcance H_j no intervalor de tempo $\Delta t = 1$ é de $p_{ij} = \frac{|Out(H_i) \cap In(H_j)|}{|Out(H_i)|}$.

Analogamente, definimos um vetor posição da categoria $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ no tempo *t* como

$$W_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(t) = \Big(w_1(t), w_2(t), \ldots, w_{N(t)=t}(t)\Big). \tag{14}$$

Em que $W_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(t)$ é um vetor de *t* coordenadas, $w_j(t)$ é a posição (*i. e.*, *hom*) do *j*-ésimo caminhante no tempo *t*. Na mesma esteira, definimos o vetor densidade

$$S_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(t) = \big(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \ldots, \sigma_k(t)\big). \tag{15}$$

[111] Uma matriz estocástica direita é uma matriz quadrada em que a soma das entradas de cada uma das linhas é 1.

Em que $\sigma_i(t)$ é o número de caminhantes no *i*-ésimo conjunto *hom* no tempo *t* e k é o número de conjuntos *hom* do da categoria $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Assim, definimos a frequência relativa de caminhantes em cada componente *hom*

$$f_k(t) = \frac{\sigma_k(t)}{N(t)}. \tag{16}$$

Em que $N(t)$ é o número de caminhantes no tempo *t* e $f_k(t)$ é denominado fluxo do *k*-ésimo conjunto *hom* no tempo *t*. Com efeito, o vetor de fluxo de uma categoria $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ no tempo *t* é

$$F_k(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)\big). \tag{17}$$

Este vetor tem o mesmo significado dinâmico que o vetor de fluxo para grafos definido anteriormente. Considerando que a categoria é conectada, no sentido de sempre existir uma composta de morfismos que conecte dois objetos quaisquer na categoria $\boldsymbol{\mathcal{M}}$; podemos concluir que existe um vetor de fluxo estacionário $F_k(t \to \infty)$ (MIEGHEM, 2011, p. 63-65). O cálculo deste vetor é completamente análogo ao caso anterior. Em outras palavras, calculamos o conjunto $\{\lambda_i\}$ da matriz de transição categórica $P_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}$, testamos os critério de Matrizes não Negativas de Perron-Frobenius (SENETA, 1973, p. 18): $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, $|\lambda_1| = 1$ e $|\lambda_i| \leq 1$, para todo $2 \leq i \leq n$. Normalizamos o autovetor associado ao autovalor de valor 1 e o normalizamos obtendo, com efeito, o vetor $F_k(t \to \infty)$ exato. Com isto, finalizamos a categorificação da Teoria de Fluxo de Informação. Como é factível, se fossem calculadas comunidades de modo similar ao de grafos, redundaria no mesmo modo de calcular o índice de irredutibilidade para comunidades de conjuntos *hom* em categorias.

5.4.4. Hierarquização entre decomposições

Na seção anterior, abstraímos uma categoria de um grafo – ou seja, um diagrama de bloco abstrato de um diagrama de bloco – tomando como critério que as comunidades dos grafos são os conjuntos *homs*. Também ratificamos que este procedimento transporta todas as dificuldades presentes na representação de grafos – como fora explicitado na Seção 5.2.4. Com isso, é necessário que criemos um diagrama de bloco abstrato diretamente dos dados empíricos, como foi sugerido na Seção 5.3.4, Explicitamente, consideram-se arbitrariamente as partes de um todo substancial como agentes (*i.e.,* moléculas, células, tecidos, etc.), representando-os com conjuntos *hom*. As operações desses conjuntos – se forem apreensíveis – serão representadas por morfismos. E os objetos são produtos cartesianos determinados pelo critério de pertencerem ao mesmo conjunto *hom* como input ou output.

Outro possível método de construção direta de um diagrama de bloco abstrato é pela decomposição da menor partícula possível do sistema e, a partir desta decomposição, aplica-se sucessivamente o método do WTA, de modo que as comunidades sejam representadas por conjuntos *hom*, num escala sucessiva.

Independente do modo de concepção deste tipo de diagrama, notamos que um mesmo sistema biológico pode ser decomposto de diversas maneiras. Vamos supor, a título de exemplo, que tomamos um organismo simples, multicelular, que possui tecidos bem definidos e órgãos simples[112]. Com isso, montemos diagramas de bloco abstratos por meio da decomposição de suas moléculas, organelas, células, tecidos, órgãos e sistemas orgânicos. Cada uma destas decomposições gerará um diagrama de bloco diferente para o mesmo sistema biológico. Para esclarecer este esquema, consideremos a Figura 8 que explicita uma hierarquia de decomposições deste tipo para um organismo simples qualquer: uma planária (*Dugesia sp.*) (STORER, USINGER, *et al.*, 1989, p. 354-359).

Por um lado, cada decomposição constitui o mesmo organismo. Mas explicitamos certas interações que não estão contidas nas outras decomposições. Por exemplo, uma decomposição dos sistemas orgânicos (Figura 8B) contém interações características que não estão presentes na decomposição dos tecidos (Figura 8C), e assim, sucessivamente. É importante notar que, do ponto de vista formal, cada decomposição gera uma categoria, em que as componentes do sistema (*i. e.,* conjuntos *hom*) são os agentes biológicos do nível hierárquico correspondente, e suas interações são inputs e outputs (*i. e.,* objetos).

De fato, uma representação – fruto de uma decomposição – são interações especiais da matéria. Podemos conceber um nível inferior arbitrário: como o nível atômico ou macromolecular. No nosso caso, como estamos estudando sistemas biológicos, escolhemos o nível mais baixo como o nível das macromoléculas. Fazemos isso uma vez que uma macromolécula pode ser obtida em processos não bioquímicos.

---

[112] Por exemplo, um platelminto.

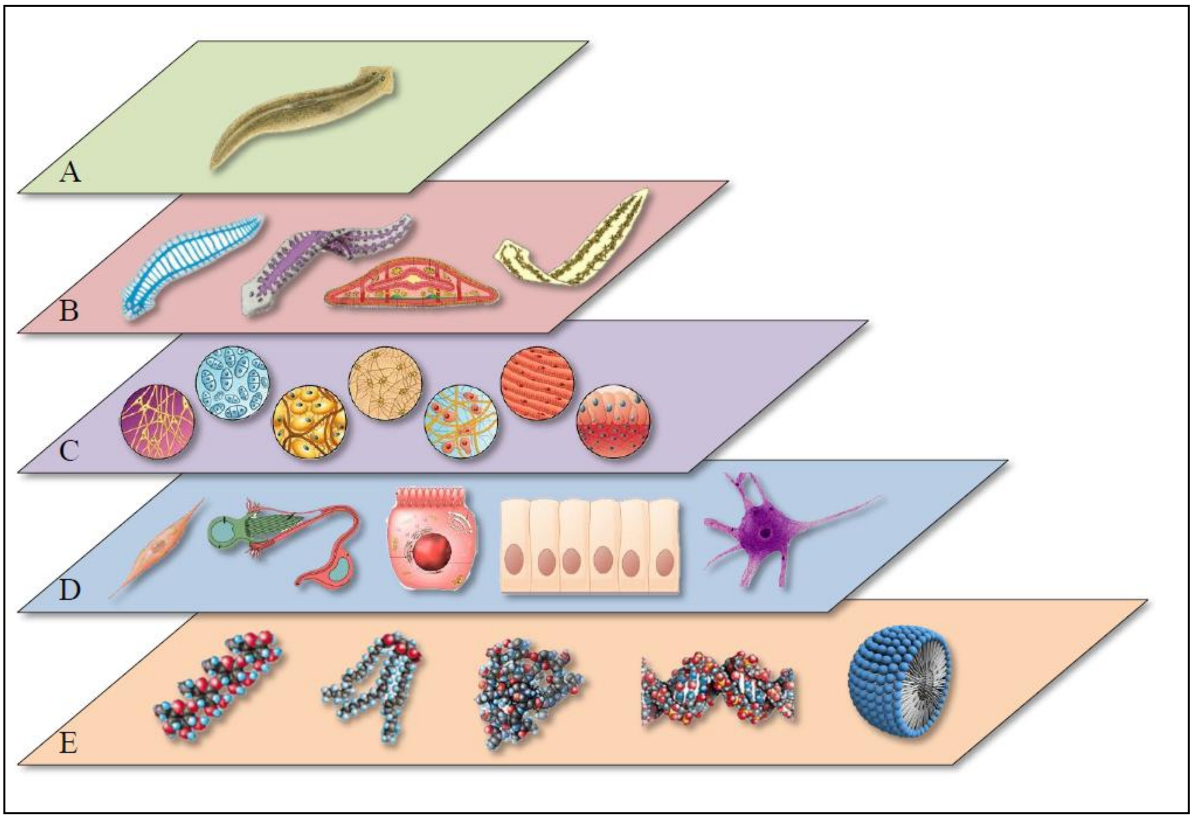


FIGURA 8. Decomposição pictórica de uma *Dugesia sp*.
Fonte: figura composta adaptada e modificada de diversas fontes: planária (WORLDBUILDING, 2016), sistemas orgânicos (SILVA, 2012) (HALE, 2018), tecidos (PINTEREST, 2018), tipos celulares (CHRONIC DISEASES RESOURCES ONLINE, 2018) (WIKIPEDIA, 2017) (DESIGNUA, 2018) (WIKIPEDIA, 2018) (QUORA, 2016) e macromoléculas (THANE, 2015) (PENA, 2011).
Nota: Plano de análise das componentes: A) Organismo completo; B) Decomposição em sistemas orgânicos; C) Decomposição em tecidos; D) Decomposição em células; E) Decomposição em macromoléculas.

Tomando como critério que as macromoléculas são o nível inferior, então todos os níveis hierárquicos são, em verdade, operações entre conjuntos cartesianos entre estas macromoléculas. Por exemplo, uma célula é um conjunto de operações constitutivas e de transformação que atua sobre um input – ou seja, um produto cartesiano destas macromoléculas – e os encaminha a um output de mesma natureza. Um tecido, ou órgão ou um sistema orgânico faz a mesma coisa.

A questão da emergência não é solucionada com a apresentação desta hierarquia e os conjuntos *homs*. Ao mesmo tempo, sabemos que a emergência não é um fenômeno que se dá num nível, mas entre níveis. Assim, considerando que os objetos básicos são os mesmos em todos os níveis, e que os conjuntos *hom* de um nível contêm propriamente os conjuntos *homs* de um nível inferior, resta a pergunta: onde está o fenômeno emergente? A emergência, de acordo com nossa construção teórica, deve ser encontrada no produto cartesiano dos objetos que servem de input e output às componentes biológicas. Em outras palavras, existe uma propriedade intrínseca nos produtos cartesianos que constituem os inputs e outputs para os agentes biológicos. Para resolver e formalizar este efeito, iremos utilizar o conceito de categoria concreta e functor forgetful. Isto será realizado plenamente no Capítulo 7. Até agora, nosso intento foi mostrar que a emergência é um fenômeno apenas empiricamente perceptível quando analisamos um mesmo sistema em diversas escalas.

Ademais, outra questão surge naturalmente nessa discussão: é possível conhecer um agente biológico mais central? Esta questão, fundamental para o processo de tomada de decisão em designs experimentais em biologia, é respondida no próximo capítulo.

5.5. Considerações finais do capítulo

Neste capítulo, oferecemos uma base empírica biológica que possibilita a abstração dos elementos matemáticos básicos a fim de modelar sistemas biológicos genéricos. Além disso, no próprio processo de decomposição do sistema biológico – do fenômeno real – surge a questão da emergência. Ou seja, o tratamento do modelo como categoria traz à luz a discrepância organizacional entre níveis hierárquicos de um mesmo sistema biológico. Além deste intento, também discutimos quais foram os primeiros cientistas que tiveram a preocupação de aproximar a matemática abstrata com a Biologia. Fizemos uma pequena revisão sobre a Teoria de Grafos, de modo a possibilitar sua categorificação, ou seja, sua substituição pela Teoria de Categorias. Para tanto, mostramos que toda representação de categoria contém a representação de grafo. Na mesma medida, concebemos uma Teoria de Fluxo de Informação para redes complexas e a categorificamos. Dito isso, ao fim deste capítulo, surgiram duas questões: como conhecer a centralidade de um agente biológico em um diagrama de bloco abstrato; e como definir a emergência no modelo de hierarquização das componentes um mesmo sistema. A primeira pergunta será respondida no próximo capítulo por meio da Teoria de Nocaute a segunda no Capítulo 7.

CAPÍTULO 6. Teoria de Nocautes

Este capítulo tem dois objetivos gerais: definir quantitativamente a importância de agentes biológicos por meio da Teoria de Nocautes e aplicar essa teoria, assim como os resultados apresentados no capítulo anterior, em um estudo de caso. O cálculo da importância de agentes biológicos é um grande ferramental teórico que orienta e indica a tomada de decisão para a estruturação de designs experimentais. A aplicação desses resultados teóricos em um estudo de caso ratifica que o modelo é aplicável e gera resultados quantitativos e biologicamente coerentes. Esses atributos são usualmente buscados para qualquer metodologia teórica que se apresente como modelo gerador de quantificadores. Adicionalmente, escolhemos aplicar o modelo em uma classe de sistema de alta complexidade: uma rede de interação entre polinizadores e recursos florais.

6.1. Medida da importância de agentes biológicos

No capítulo anterior, mencionamos a questão da importância dos agentes biológicos que compõem um sistema biológico – sejam esses vértices em um grafo ou conjuntos *hom* em uma categoria. De modo geral, Rosen (ROSEN, 1958A) definiu que a importância dos agentes biológicos é determinada pelo número de outputs do sistema que deixam de serem produzidos quando esse agente é “silenciado”[113] no sistema. Nesta seção, iremos definir e precisar esta intuição inicial proposta por Rosen.

6.1.1. Teoria de Nocautes em grafos

Para definirmos a importância de agentes biológicos, é necessário que utilizemos os conceitos básicos enunciados no capítulo anterior, mais especificamente na seção sobre Teoria de Fluxo de Informação. Para tanto, vamos supor que um grafo direcionado G de modo a abstrairmos deste, um vetor de fluxo estacionário $F_{V(G)}(t \to \infty)$, conquanto o grafo G seja conectado. A este vetor de fluxo particular damos o nome de fluxo padrão. Os vértices do grafo G representam os agentes biológicos, e é sobre estes que calculamos sua importância.

[113] Ou seja: removido, desativado ou apagado.

Para isso, iremos proceder de modo análogo ao cálculo do índice de irredutibilidade. Temos como premissa que a remoção de um agente biológico afeta em algum grau o fluxo de informação no sistema biológico. Assim, se removermos um vértice de um grafo inicial G, teremos como resultado um grafo nocauteado[114] *G'*, ou seja, faltante de um agente biológico. Conquanto o nocaute – a remoção intencional de um vértice – não torne o grafo não conectado, é possível calcularmos exatamente o vetor de fluxo estacionário do novo grafo *G'*, ou seja, $F_{V(G')}(t \to \infty)$.

Por meio do vetor de fluxo gerado de *G'* e do fluxo padrão (*i. e.*, vetor estacionário do grafo original) é possível saber o impacto local no fluxo em termos do desvio

$$D_{G,G'} = F_{V(G)}(t \to \infty) - F_{V(G')}(t \to \infty) = (\Delta f_1, \Delta f_2, .., \Delta f_n), \quad (18)$$

em que $\Delta f_i = \lim_{t\to\infty}[f_i(t) - f'_i(t)]$, onde $f_i(t)$ é o fluxo do i-ésimo vértice no tempo *t* no grafo *G* e $f'_i(t)$ é o fluxo do i-ésimo vértice no tempo *t* no grafo *G'*. Como esperado, os valores de Δf_i podem ser negativos ou positivos. Se for positivo, significa que o fluxo local sofreu uma diminuição devido ao nocaute. Se for negativo, significa o contrário. Em todo caso, o erro relativo é dado por

$$\mu_i = \begin{cases} \dfrac{\Delta f_i}{f_i(t \to \infty)}, & para\ \Delta f_i \geq 0 \\ \dfrac{|\Delta f_i|}{f'_i(t \to \infty)}, & para\ \Delta f_i < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Este cálculo é assim realizado, pois Δf_i tem proporcionalidade com a maior densidade (MIRANDA, LA GUARDIA, *et al.*, 2016). Mediante o conjunto dos erros relativos locais, definimos o erro médio relativo concernente ao nocaute como uma medida global de impacto no fluxo de informação na rede. Formalmente,

$$\mathrm{M}_{G,G'} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mu_i}{n} = \langle \mu_i \rangle. \quad (20)$$

[114] Terminologia inspirada no knockout de genes em culturas celulares.

O valor de $\mathrm{M}_{G,G}$ – o erro médio relativo para o nocaute *G'* de *G* – varia entre zero e um, uma vez que é um índice normalizado, e os valores de Δf_i também variam neste mesmo intervalo fechado. Este índice é a quantificação do impacto causado pela remoção de um agente biológico que tem uma função dentro de um sistema biológico. Com isso, formalizamos a importância dos agentes biológicos por meio desta medida. É importante enfatizar que, diferentemente de outras medidas de centralidade usualmente utilizadas pela teoria de redes complexas, o erro médio relativo é de caráter global e dinâmico, pois seu critério é fruto do processamento de informação montado sobre uma rede de interações (MIRANDA, DELGOBO, *et al.*, 2015).

Em particular, esta metodologia é útil para que o cientista experimental tenha em mãos uma prévia de quais são os agentes biológicos mais relevantes em seu estudo. Com isso, é possível que os agentes mais centrais sejam tratados mais detidamente, economizando recursos experimentais e logísticos neste tipo de empreendimento. Ademais, observa-se por experiência, que muitos biólogos se defrontam com sistemas biológicos complexos, nos quais é muito difícil conhecer quem são os agentes realmente mais relevantes. Nossa metodologia provê este tipo de solução para sistemas biológicos de naturezas variadas. Em particular, aplicamos esta metodologia no complexo problema de Tolerância Oral, onde queríamos saber quais são os agentes imunológicos mais importantes envolvidos neste fenômeno (MIRANDA, DELGOBO, *et al.*, 2015). Na próxima seção, iremos categorificar esta metodologia e, em seguida, aplica-la a um fenômeno complexo ecológico.

6.1.2. Teoria de nocautes em categorias

Como no caso de grafos, iremos nocautear o agente biológico. Porém, no caso de categorias, o que é nocauteado é um conjunto *hom*. Além disso, o cálculo do vetor de fluxo $F_{k'}(t \to \infty)$ é completamente análogo, assim como o fluxo padrão $F_k(t \to \infty)$. De modo geral, no caso de se considerar uma categoria, é possível nocautear não só os conjuntos *homs*, mas também algum input ou output particular, uma vez que, dependendo da hierarquia, o mesmo possa ser interpretado biologicamente. No entanto, no caso do nocaute de um objeto *A*, é preciso notar que mudanças na matriz de probabilidade será mediante a mudança de todas as probabilidades $p_{ij} = \frac{|Out(H_i) \cap In(H_j)|}{|Out(H_i)|}$, tal que $A \in Out(H_i)$ ou $A \in In(H_j)$. Isso decorre do fato de que um mesmo ouput pode servir de input a diversos conjuntos *homs*. Com esta curta explanação sobre a categorificação da Teoria de Nocautes, passemos a uma aplicação direta desta teoria no âmbito da ecologia teórica.

6.2. **Estudo de caso:** nocautes de espécies em uma rede de polinizador-planta

Essa tese tem um viés fundamentalmente teórico, ou seja, de gerar resultados analíticos e algébricos de modo a articulá-los a fim de descrever e criar quantificadores a uma extensa gama de fenômenos biológicos. Nesta seção, mudaremos nosso enfoque para uma aproximação mais aplicada, experimental e estatística. Ademais, gostaríamos de enfatizar que, neste estudo, utilizaremos um fenômeno ecológico que tem um critério relacional – ou seja, critério para interação de agentes biológicos – simples: a presença de pólen como indicador de fluxo de informação em espécies de lepidópteros[115]. Por critério relacional simples entende-se que os agentes biológicos interagem por meio de um único critério empírico. Isso significa que, na prática, será gerado um diagrama de bloco que corresponde exatamente ao seu diagrama de bloco abstrato, devido a este único critério empírico. Em outras palavras, utilizaremos a Teoria de Fluxo de Informação para grafos, que neste caso particular é equivalente à sua categoria subjacente. Assim o fizemos, pois a Teoria de Nocautes foi concebida ainda no âmbito de Teoria de Grafos, e sua categorificação é posterior a sua aplicação neste estudo de caso.

6.2.1. Preliminares

Uma presente preocupação em estudos de ecossistemas terrestres – em particular, em interações de polinizadores e plantas – é a capacidade teórica de determinar e modelar comunidades ecológicas (CAMPBELL, YANG, *et al.*, 2012). De fato, é razoável atribuir esta dificuldade à interdependência e complexidade intrínsecas que tais comunidades possuem. Por exemplo, o efeito do desaparecimento de uma espécie, ou mais que uma espécie, pode gerar um efeito cascata na rede de espécies interagentes; de modo extremo, a perda de uma espécie de função central pode gerar o colapso total de comunidades ecológicas inteiras (BROOK, SODHI e BRADSHAW, 2008). Especificamente, investigações sobre redes de

[115] Insetos que possuem asas ricas de escamas. Tecnicamente, membros da Ordem Lepidoptera.

polinizadores e plantas (*i. e.*, comunidade) são essenciais devido às atuais baixas de diversidade de polinizadores – logo, de suas funções ecológicas. Tais baixas impactam diretamente na produção de alimentos e na dinâmica de ecossistemas naturais (WASER e OLLERTON, 2006) (WILLMER, 2011) (GARRATT, COSTON, *et al.*, 2014). Adicionalmente, investigações sobre as características de redes de polinizadores e plantas são importantes recursos para entender relações coevolucionárias (BASCOMPTE e JORDANO, 2007).

Ademais, há, de fato, um aumento no número de pesquisas envolvendo redes de interações entre plantas e polinizadores. No entanto, tais investigações são frequentemente centradas em inspeções de polinizadores delimitados ao nível de comunidades de modo a enfatizar medidas topológicas[116] em redes de interações (*i. e.*, grafos) (MEMMOTT, 1999) (DICKS, CORBET e PYWELL, 2002) (OLESEN e JORDANO, 2002) (OLESEN, BASCOMPTE, *et al.*, 2007) (BASCOMPTE, JORDANO, *et al.*, 2003) (JORDANO, BASCOMPTE e OLESEN, 2006) (VÁZQUEZ e AIZEN, 2004) (SANTAMARIA e RODRIGUEZ-GIRONÊS, 2007) (PETANIDOU, KALLIMANIS, *et al.*, 2008) (BORCH, GONZÁLEZ, *et al.*, 2009) (SPIESMAN e INOUYE, 2013) (BLÜTHGEN, 2010) (SOARES, FERREIRA e LOPES, 2017) (BALLANTYNE, BALDOCK e WILLMER, 2018).

Neste estudo de caso centralizamos nossas investigações em um ensemble[117] bem conhecido de polinizadores. Em termos mais precisos, trabalhamos com um grupo de organismos que têm em comum: a geografia, a filogenia e a partição de recursos (FAUTH, BERNARDO, *et al.*, 1996). Particularmente, escolhemos trabalhar com o ensemble de borboletas nectívoras – eventualmente polinizadoras – em uma estepe *latu sensu* na região fitogeográfica denominada Campos Gerais do Paraná. Essa escolha não é arbitrária, pois este ensemble permite que façamos asserções mais precisas acerca deste grupo de insetos. Adicionalmente, ao restringirmos o grupo de estudo a um ensemble, evitamos generalizações indevidas (BLÜTHGEN, 2010). Isso é especialmente importante na medida em que temos como meta secundária gerar resultados que dão suporte aos protocolos da Biologia da Conservação em nível de espécies (MAGURRAN, 2004). Com isso, é necessário fazermos uma pequena digressão sobre este táxon de Hexapoda, para que se conheça seu potencial bioindicador.

---

[116] No sentido de medidas de redes complexas;
[117] Termo técnico definido por Fauth (2006).

6.2.2. Rhopalocerofauna

Borboletas[118] (Lepidoptera: Papilionoideae e Hesperioideae) constituem um rank taxonômico[119] de alta diversidade e distribuição global. Esta Ordem de Hexapoda frequentemente tem propriedades úteis ao biomonitoramento e como indicadores de qualidade ambiental em ecossistemas terrestres (BROWN, 1997). Adicionalmente, borboletas nectívoras são agentes polinizadores de numerosas espécies de plantas em ecossistemas tropicais (FAEGRI e VAN DER PIJL, 1979). Devido a isso, têm funções fundamentais na estruturação e dinâmica de populações vegetais. Assim, estas funções podem ser valoradas e quantificadas, por exemplo, pelo número de espécies que dependem dos serviços de polinização deste grupo de insetos. No geral, plantas com flores que atraem particularmente borboletas demonstram a síndrome da psicofilia. Essa síndrome é caracterizada principalmente por flores grandes, de intensa coloração – variando de branco a vermelho – e com produção de odores muito específicos (ANDERSON, NILSSON, *et al.*, 2002).

Além destas características intrínsecas deste grupo, as borboletas são um táxon que possui características ideais para estudos de campo devido ao formato conspícuo de seus corpos, tamanho e coloração; tais características tornam a identificação e contagem de indivíduos mais fáceis de serem realizados em campo. Isso implica que os dados coletados nos estudos campais são mais precisos e as amostras destas coletas tendem a representar melhor a comunidade biológica de interesse. Estamos cientes de que não existem dados específicos sobre os hábitos de visitação floral de borboletas, assim como as condições locais de tempo nos quais estes eventos ocorrem. Todas essas características justificam a escolha desse grupo de insetos para este estudo de caso. Com isso, podemos definir as metodologias utilizadas para estudar esta comunidade biológica.

6.2.3. Metodologia I: coleta campal de dados

A coleta de dados foi realizada em uma região de campo, mais especificamente em estepe *latu sensu* (Reino Neotropical) em uma área conhecida como Represa dos Alagados com aproximadamente 20 hectares. Esta região se encontra nos arredores da cidade de Ponta Grossa, Paraná, Brasil (UTM 594000 e 7230000). Esta área está a 975 m acima no nível do

[118] Ou seja, rhopalocerofauna.
[119] Uma classificação arbitrária com base em um hábito animal.

mar e 226 km de distância da costa marítima. Um transecto de coleta foi estabelecido para padronização da coleta. Tal transecto é um caminho que tem área de 20 x 4000 m², situado em campos limpos e cerrados na região fitogeográfica dos Campos Gerais do Paraná. Essa vegetação natural é encontrada na borda do Segundo Planalto do Paraná, na Escarpa Devoniana (MAACK, 1948); tal vegetação é considerada como remanescentes preservados devido ao seu baixo interesse agrícola e isolamento imposto pela escarpa.

As coletas campais foram realizadas de janeiro até abril de 2011, pois este período é a estação de máxima floração da região e de maior atividade das borboletas. As coletas foram realizadas semanalmente entre os horários de 9h00 até 16h00 horas, totalizando 6 horas de esforço amostral por coleta (utilizamos 1 hora para descanso). Com efeito, sendo 16 coletas campais, implica que o esforço amostral total foi de 96 horas. Neste período, dentro do transecto delimitado, todas as flores foram coletadas, identificadas e fixadas como exsicatas. As exsicatas estão depositadas no Museu de Artrópodes dos Campos Gerais. Ademais, utilizamos para tal estudo apenas espécies de plantas que servem como recurso floral para o ensemble de borboletas estudado. A confirmação empírica de que uma espécie de planta é um recurso floral a alguma espécie de borboleta ocorre por meio de dois critérios: pela presença de um número mínimo de grãos de pólen nos corpos das borboletas e pelo testemunho ocular da visitação da borboleta na flor. Ademais, o transecto definido é percorrido duas vezes em todos os eventos de coleta. O ponto de início do transecto foi sempre alterado para evitar o efeito de hora-local.

A observação ocular da visitação por parte das borboletas às flores ocorre pelo seguinte procedimento: primeiro investigamos se a borboleta encontra-se exatamente sobre a flor; em seguida, verifica-se se a sua proboscis é ejetada a fim de tentar se alimentar de algum recurso floral ali presente. Esta observação, desta forma, permite que confirmemos ocularmente se a borboleta se utiliza diretamente dos recursos florais oferecidos pela planta. Em cada coleta campal, pelo menos dois indivíduos de cada espécie de borboleta foram capturados por meio de redes entomológicas e alocados individualmente em “killing-vials”[120] para posterior análise de carga polínica. Um fenômeno frequentemente observado em campo são os aglomerados de indivíduos da mesma espécie sobre a mesma planta. Quando isso ocorre, fazemos apenas um registro da interação. De fato, estamos interessados em coletar informações sobre as interações entre espécies de borboletas e espécies de plantas; neste ínterim, registramos o instante (hora) do evento. Além do registro de interação entre espécies

[120] Tradução livre: frasco de morte.

e a hora do ocorrido, registramos a cada interação: a temperatura (Cº), a velocidade do vento (m/s) e a umidade relativa do ar (%). Esses dados climatológicos permitem que façamos correlações entre a atividade de forrageiro das borboletas e as variáveis climáticas, de modo a indicar quais sejam as condições físicas ideais para essa atividade. A coleta de dados climatológicos foi realizada por meio da Estação Meteorológica Portátil Kestrel 3500. Estas informações são muito importantes, uma vez que não existe nenhum registro de correlação entre a atividade de forrageio de borboletas e as variáveis físicas (*i. e.*,, climáticas) que influenciam o comportamento das mesma. Como as borboletas têm hábitos predominantemente diurnos, não foi necessário fazermos estudos noturnos.

6.2.4. Metodologia II: análise de cargas polínicas

No total, foram observadas 621 interações entre planta e borboleta e coletados 88 indivíduos (média ± desvio padrão: 2,84 ± 0,2 por espécie) dos quais 54 tiveram carga polínica consideráveis (>20). Para montar lâminas com grãos de pólen, foram preparados cubos de glicerina de aproximadamente 2 mm^3 para reter os grãos de pólen que estavam sobre o corpo de cada indivíduo. As partes no corpo das borboletas onde se observou maior proporção de grãos de pólens aderidos são: pedipalpos, proboscis, pernas, antenas, pêlos ventrais e especialmente a cabeça. Após a rentenção destes grãos, o cubo de glicerina foi colocado sobre uma lâmina; então, com ao auxílio de uma chama fraca, o cubo foi derretido sobre a mesma. Com isso, foi possível selar a lâmina por meio de lamínula e parafina. Montada a lâmina, a observação e contabilidade dos grãos de pólen foram realizadas por meio de microscopia óptica sob as objetivas de 40x e 100x (com imersão em óleo) Para evitar contaminação de outras fontes, todo o procedimento de coleta de grão de pólen foi realizado em torno de uma chama fraca.. Além disso, os instrumentos foram esterilizados entre cada procedimento de coleta de grãos.

Para efeito de criação de um banco de dados, montamos lâminas de grãos de pólen pela coleta direta das plantas florescentes na época da coleta. Com isso, é possível identificar diretamente de quais plantas as borboletas estão sendo intermediadoras. Assim como as excicatas, todas as borboletas coletadas foram fixadas, isto é, montadas com alfinites entomológicos e depositadas no Museu de Artrópodes dos Campos Gerais. A identificação dos grão de pólen provenientes das borboletas foi realizada por meio da comparação direta das lâminas montadas das plantas florescentes. Enfim, o critério empírico de carga polínica se dá pela observação de pelo menos 20 grãos de pólen correspondentes a uma espécie vegetal. Em outras palavras, a espécie de borboleta recebe uma interação com uma planta por meio da evidência indireta pela presença de grãos de pólen da mesma.

6.2.5. Metodologia III: análise quantitativa dos dados

Por meio da evidência de campo e pela evidência de carga polínica, observamos 31 espécies de borboletas (Quadro 3) que se relacionam com 12 espécies de plantas florescentes (Quadro 2). Nos casos em que não foi possível a identificação ao nível de espécie, tanto para borboletas quanto para plantas, foram utilizadas morfo-espécies. Ademais, por meio dessas evidências, montamos uma matriz de interação, em que a entrada é 1 se houver pelo menos uma evidência de interação, e zero se não houver nenhuma interação. Particularmente, Borch *et al.* (2009) analisaram esta questão e concluíram que uma suplementação da análise polínica por uma intensiva coleta campal resultou em características mais realistas da rede de interações entre insetos e plantas. Especificamente, tanto a conectância global como a conectividade entre plantas e borboletas aumentaram. Este é o cenário preciso no qual as redes de polinizadores e plantas ocorre (BORCH, GONZÁLEZ, *et al.*, 2009).

Espécies de plantas	**Simbolo**
Aspilia setosa	I
Calea hispida	II
Calea longifolia	III
Eupatorium palmare	IV
Eupatorium sp. 1	V
Euparorium sp. 2	VI
Vernonia megapotamica	VII
Vernonia sp. 1	VIII
Vernonia sp. 2	IX
Vernonia sp. 3	X
Vernonia sp. 4	XI
Alternanthera brasiliana	XII

QUADRO 2. Lista de espécies de plantas florescentes.
Fonte: autor.

A matriz proveniente das evidências empíricas é uma matriz de adjacência de um grafo direcionado. Além disso, o grafo em questão é bipartite, ou seja, os vértices que representam as plantas interagem apenas com os vértices que representam borboletas, e vice versa. Com isso, temos um grafo com um total de 43 vértices mais o vértice que representa o ambiente[121]. Com efeito, o vértice que representa o ambiente conecta-se a todas as plantas por arestas direcionadas que iniciam nele próprio e terminam nas plantas, e é conectado por arestas direcionadas que iniciam nas borboletas e terminam nele (Figura 9).

Espécies de borboletas	**Acrônimos**
Actinote melanisans Oberthür, 1917	ACM
Adelpha hyas hyas (Doyère, [1840])	AHH
Agraulis vanillae maculosa (Stichel, 1907)	AVM
Anthanassa ptolyca ptolyca (H.W. Bates, 1864)	APP
Danaus plexippus erippus (Linnaeus, 1758)	DPP
Dryadula phaetusa (Linnaeus, 1758)	DRP
Dryas iulia alcionea (Cramer, 1779)	DIA
Epityches eupompe (Geyer, 1832)	EPE
Eunica eburnea Fruhstorfer, 1907	EUE
Heliconius erato phyllis (Fabricius, 1775)	HEP
Junonia evarete evarete (Cramer, 1779)	JEE
Marpesia petreus petreus (Cramer, 1776)	MPP
Mechanitis lysimnia lysimnia (Fabricius, 1793)	MLL
Methona themisto themisto (Hübner, 1818)	MTT
Polygonia sp.1	POS
Pseudoscada erruca (Hewitson, 1855)	PSE
Tegosa orobia orobia (Hewitson, 1864)	TOO
Temenis laothoe meridionalis Ebert, 1965	TLM
Vanessa braziliensis (Moore, 1883)	VAB
Hemiargus hanno hanno (Stoll, 1790)	HHH
Leptores cassius cassius (Cramer, 1775)	LCC
Paiwarria aphaca (Hewitson, 1867)	PAA
Strymon bazochii (Godart, [1824])	STB
Strymon rana (Schaus, 1902)	STR
Aphrissa statira statira (Cramer, 1777)	ASS
Eurema elathea flavescens (Chavannes, 1850)	EEF
Eurema phiale paula (Röber, 1909)	EPP
Pyrisitia nise tenella (Boisduval, 1836)	PNT
Copaeodes jean favor Evans, 1955	CJF
Heliopetes omnira (Butler, 1870)	HEO
Urbanus dorantes dorantes (Stoll, 1790)	UDD

QUADRO 3. Lista de espécies de borboletas.
Fonte: autor.

Calcularemos o nocaute para cada espécie representada por um vértice neste grafo de modo a gerar um valor de erro médio relativo (EMR). Quanto maior o erro, mais importante será a espécie nocauteada para tal ensemble. Ademais, queremos saber se a rede se organiza em comunidades. Para calcular as comunidades, iremos utilizar o WTA. Adicionalmente, iremos calcular o erro médio relativo da comunidade como um todo, assim como seu índice de irredutibilidade.

[121] Como delineado na seção sobre representação de sistemas biológicos.

6.2.6. Resultados e discussão

O grafo resultante das evidências direta e por carga polínica pode ser visualizado na Figura 9. Ademais, por meio do método do WTC, distingue-se 3 comunidades no grafo, nas quais colorem-se os vértices da seguinte forma: Comunidade 1 com vértices verdes, a Comunidade 2 com vértices azuis e a Comunidade 3 com vértices roxos. As composições de cada comunidade estão dispostas no Quadro 4. Analisando estas composições, podemos afirmar que a Comunidade 1 apresenta indícios de componente gigante da rede. A componente gigante é a porção mais conectada que alberga a maior parte dos vértices. Além disso, observando a composição das Comunidades 2 e 3, nota-se que uma espécie de planta é o vértice mais conectado nas mesmas. Mais especificamente, a espécie X é o *hub*[122] da Comunidade 2, enquanto que a espécie XII o é da Comunidade 3.

Comunidade	**Composição**
Comunidade 1 (34 espécies mais o ambiente)	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, XI, ACM, AHH, APP, DPP, DRP, DIA, EPE, EUE, JEE, MPP, MLL, MTT, POS, TOO, VAB, PCC, PAA, STB, STR, EEF, EPP, PNT, CIF, HEC, Ambiente
Comunidade 2 (4 espécies)	X, TLM, ASS, UDD.
Comunidade 3 (5 espécies)	XII, AVM, HEP, PSE, HHH.

QUADRO 4. Lista da composição de espécies de cada comunidade observada.
Fonte: autor.

A Tabela 2 sumariza os dados acerca dos nocautes de espécies. Note-se que os maiores valores de EMR são observados para as espécies vegetais. Isto é esperado, uma vez que as plantas são mais centrais no fenômeno da interação insetos planta. Ou seja, as plantas são subsidiárias de recursos florais ao ensemble estudado, donde se segue sua maior relevância da rede de interações.

Os gêneros mais relevantes utilizados como principais recursos florais ao ensemble de borboletas são: *Eupatorium, Vernonia* e *Aspilia*. Esses três gêneros pertencem à família Asteraceae que, por sua vez, pertence à ordem Asterales. São plantas que apresentam hábito de erva, subarbustos ou arbustos; com folhas alternas ou opostas sem estípula; presença de inflorescências do tipo capítulo. Asteraceae possui distribuição cosmopolita sendo a maior

[122] Vértice de maior conectância dentro de um conjunto definido.

família de Eucotiledôneas, com até 1700 gêneros e 30 mil espécies. No Brasil, possui boa representatividade com 260 gêneros e 2 mil espécies (SOUZA e LORENZI, 2012).

TABELA 2. Lista dos nocautes de espécies.

Espécies	**Erro médio relativo**	**Desvio padrão**
Recurso floral		
Aspilia setosa	0,1304	±0,1549
Calea hispida	0,0987	±0,1542
Calea longifolia	0,1009	±0,1488
Eupatorium palmare	0,1327	±0,1754
Eupatorium sp. 1	0,1380	±0,1750
Euparorium sp. 2	0,1318	±0,1697
Vernonia megapotamica	0,1308	±0,1657
Vernonia sp. 1	0,1187	±0,2014
Vernonia sp. 2	0,1066	±0,1605
Vernonia sp. 3	0,1333	±0,1772
Vernonia sp. 4	0,1120	±0,1425
Alternanthera brasiliana	0,1293	±0,1621
Borboleta		
Actinote melanisans Oberthür, 1917	0,0508	±0,1493
Adelpha hyas hyas (Doyère, [1840])	0,0444	±0,1490
Agraulis vanillae maculosa (Stichel, 1907)	0,0388	±0,1507
Anthanassa ptolyca ptolyca (H.W. Bates, 1864)	0,0343	±0,1497
Danaus plexippus erippus (Linnaeus, 1758)	0,0461	±0,1492
Dryadula phaetusa (Linnaeus, 1758)	0,0471	±0,1488
Dryas iulia alcionea (Cramer, 1779)	0,0399	±0,1504
Epityches eupompe (Geyer, 1832)	0,0542	±0,1490
Eunica eburnea Fruhstorfer, 1907	0,0311	±0,1501
Heliconius erato phyllis (Fabricius, 1775)	0,0566	±0,1508
Junonia evarete evarete (Cramer, 1779)	0,0314	±0,1500
Marpesia petreus petreus (Cramer, 1776)	0,0287	±0,1500
Mechanitis lysimnia lysimnia (Fabricius, 1793)	0,0471	±0,1488
Methona themisto themisto (Hübner, 1818)	0,0628	±0,1501
Polygonia sp.1	0,0328	±0,1496
Pseudoscada erruca (Hewitson, 1855)	0,0730	±0,1532
Tegosa orobia orobia (Hewitson, 1864)	0,0413	±0,1495
Temenis laothoe meridionalis Ebert, 1965	0,0347	±0,1521
Vanessa braziliensis (Moore, 1883)	0,0395	±0,1494
Hemiargus hanno hanno (Stoll, 1790)	0,0533	±0,1501
Leptores cassius cassius (Cramer, 1775)	0,0259	±0,1503
Paiwarria aphaca (Hewitson, 1867)	0,0346	±0,1504
Strymon bazochii (Godart, [1824])	0,0306	±0,1500
Strymon rana (Schaus, 1902)	0,0410	±0,1497
Aphrissa statira statira (Cramer, 1777)	0,0386	±0,1544
Eurema elathea flavescens (Chavannes, 1850)	0,0460	±0,1492
Eurema phiale paula (Röber, 1909)	0,0658	±0,1497
Pyrisitia nise tenella (Boisduval, 1836)	0,0408	±0,1506
Copaeodes jean favor Evans, 1955	0,0536	±0,1490
Heliopetes omnira (Butler, 1870)	0,0366	±0,1493
Urbanus dorantes dorantes (Stoll, 1790)	0,0602	±0,1513

Fonte: autor.

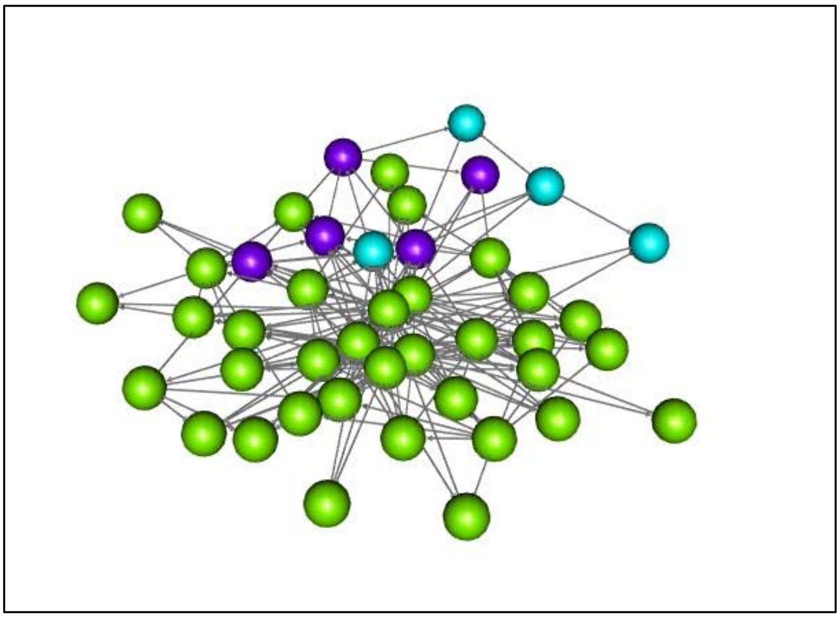


FIGURA 9. Grafo bipartite direcionado das borboletas e plantas florescentes.
Fonte: autor.
Notas: a coloração de cada vértice indica a comunidade a que pertence. Comunidade 1: verde; comunidade 2: azul; e comunidade 3: roxo.

Dentre as espécies de borboletas observadas, aquelas que apresentaram maior valor de EMR – logo, maior importância no fluxo de informação nesta de interação – são: *Pseudoscada erruca*, *Eurema phiale paula*, *Methona themisto themisto* e *Urbanus dorantes dorantes* (Figura 10). Diferentemente do caso das plantas utilizadas como recurso floral, existe uma grande diversidade quanto às famílias e subfamílias das espécies de borboletas mais relevantes. A espécie *Urbanus dorantes dorantes* pertence à família Hesperidae, subfamília Eudaminae. Essa espécie tem um voo muito vigoroso, de alta velocidade, quando comparado a outras espécies. Devido a seu estilo de forrageio, é necessário que se alimente frequentemente devido às suas demandas energéticas. As ervas e subarbustos do gênero *Vernonia* têm curtos ciclos de vida e rápida floração, provendo aos seus polinizadores muitas inflorescências em capítulos, onde numerosos nectários estão presentes. A relação entre a espécie *Urbanus d. d.* e o gênero vegetal *Vernonia* são complementares, pois os serviços de polinização oferecidos pela borboleta com rápido voo suplementa o rápido ciclo de vida do vegetal. Em outras palavras, é vantajoso para ambas as espécies, pois esta espécie vegetal possui ricos nectários, que supre a necessidade energética desta espécie de borboleta, ao passo que o alcance de território promovida por esta espécie de borboleta permite que muitas inflorescências sejam polinizadas, de modo a gerar frutos que se dispersam anemocoricamente em grande frequência.

A espécie *Eurema phiale paula* pertence à família Pieridae e subfamília Coliadinae. Esta espécie, de tamanho reduzido, frágil e de voo pouco vigoroso, ocorre em abundância nos campos limpos e cerrados. São generalistas, e preferem estar sempre próximo a suas fontes de alimento. Com isso, tendem a se alimentarem mais de espécies subarbustivas do que em ervas. Devido à sua fragilidade, a estratégia de sobrevivência é adaptada na produção de muitos indivíduos (estratégia r). Em termos de polinização, muito provavelmente esta espécie seja composta por indivíduos polinizadores eventuais e generalistas, como estabelece a literatura especializada (BORCH, GONZÁLEZ, *et al.*, 2009) (FAEGRI e VAN DER PIJL, 1979).

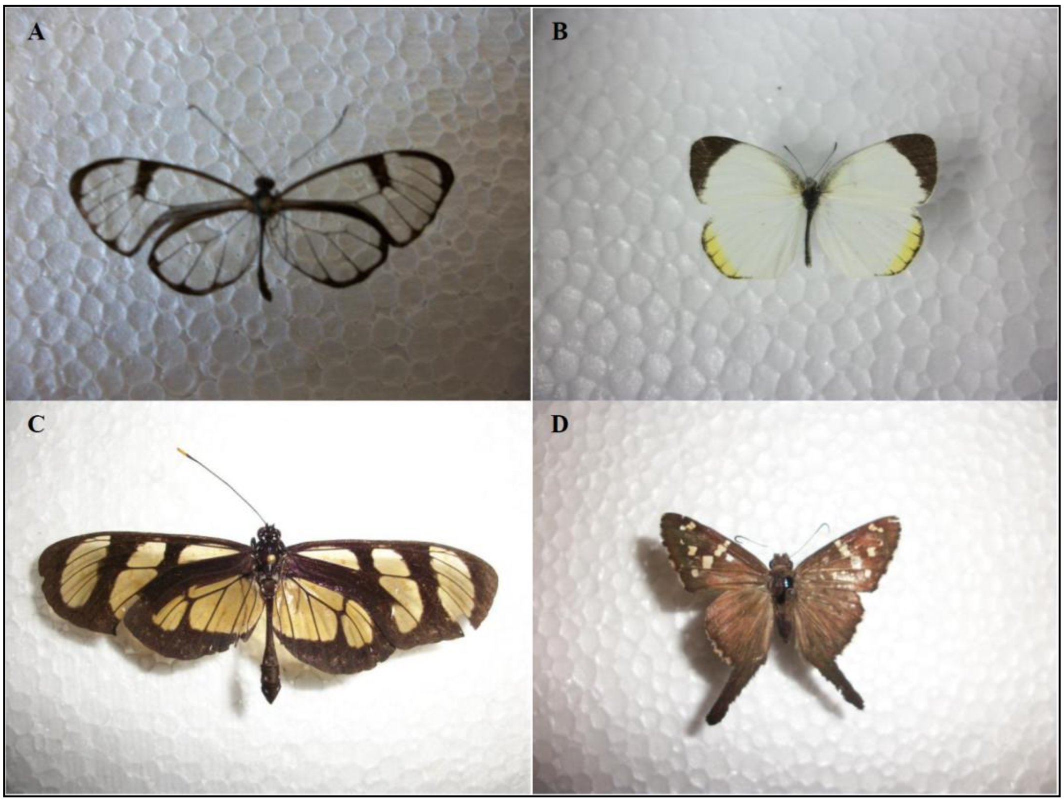


FIGURA 10. Fotografia de indivíduos das quatro espécies de borboletas mais relevantes.
Fonte: autor.
Nota: A) *Pseudoscada erruca*, B) *Eurema phiale paula*, C) *Methona themisto themisto* e D) *Urbanus dorantes dorantes*.

A espécie *Methona themisto themisto* pertence à família Nymphalidae e subfamília Ithomiidae, conhecida popularmente como borboleta-do-manacá. Essa borboleta é frequentemente encontrada na região de borda, entre campos e florestas, ou em regiões arbustivas em campos cerrados; evitam expor-se diretamente à luz solar. Tem o curioso comportamento de tanatose[123] quando manuseada. No processo de análise polínica, é a espécie que albergou maior número de grãos de pólen aderidos em seu corpo (>500 grãos). A grande parte dos grãos é de espécies do gênero *Eupatorium*. Esse fato é esperado, uma vez que esse gênero vegetal ocorre em regiões de borda e campos cerrados, ambientes preferidos por esta espécie de borboleta. No entanto, há evidências de grãos de pólen de outras espécies que indicam que a espécie *Methona themisto themisto* tende a se especializar em polinização de espécies do gênero *Eupatorium*, mas podem ser polinizadores eventuais de outros gêneros, como: *Vernonia*, *Calea* e *Aspilia*.

A espécie *Pseudoscada erruca* pertence à família Nymphalidae e a subsfamília Danainae, é a espécie mais abundante observada em campo, com atividades de forrageio semelhante à *Methona themisto themisto*. Ou seja, preferem regiões sombreadas, pouco expostas à luz solar e ao vento. Nossa experiência de campo indica que esta espécie evita sair da flor, a não ser quando perturbada. Ocorrem em agrupamentos, forrageando de modo pouco seletivo, mas preferem fontes de recursos florais subarbustivos e arbustivos, devido à proteção. Essa espécie indicou maior EMR como esperado, uma vez que é uma espécie abundante, pouco especialista, capaz de reter muitos grãos de pólen. É importante enfatizar que borboletas com poucas escamas em suas asas permitem que mais grãos de pólen fiquem aderidas nas mesmas, pois a presença abundante de escamas alares dificulta a aderência do pólen ao corpo da borboleta. Podemos afirmar isso tanto no caso da *Pseudoscada erruca* quanto no caso da *Methona themisto themisto*.

Ademais, estudando o EMR das comunidades (Tabela 3), notamos que a Comunidade 1, atua como uma componente gigante ao resto da rede de interações (SOARES, FERREIRA e LOPES, 2017), isto é, as espécies que a compõe, assim como suas interações, funcionam como um arcabouço ecológico, donde as relações podem ser alteradas pelas vicissitudes ecológicas de cada população biológica presente neste ensemble. O valor do índice de irredutibilidade (Tabela 4) confirma esta característica de componente gigante.

TABELA 3. Erro médio relativo e desvio padrão de cada comunidade observada.

Comunidade	**Erro médio relativo**	**Desvio padrão**
Comunidade 1 (34 espécies mais o ambiente)	0,9994	±0,0041
Comunidade 2 (4 espécies)	0,1982	±0,2592
Comunidade 3 (5 espécies)	0,2721	±0,2739

Fonte. autor.

[123] Fingir-se de morto.

TABELA 4. Índice de irredutibilidade e desvio padrão de cada comunidade observada.

Comunidade	**Índice de irredutibilidade**	**Desvio padrão**
Comunidade 1 (34 espécies mais o ambiente)	0,9994	±0,0034
Comunidade 2 (4 espécies)	0,4896	±0,2925
Comunidade 3 (5 espécies)	0,4996	±0,2834

Fonte: autor.

Os gráficos das variáveis climáticas estão sumarizados na Figura 11. Os quatro gráficos dispostos nesta figura têm como critério de frequência a atividade de forrageio de borboletas deste ensemble. Na Figura 11A, notamos que os horários de maior atividade estão entre 11h00 e 13h30, especialmente no ponto em que o sol está mais agudo. Ademais, a Figura 11B indica que as temperaturas ideais de forrageamento estão entre 25 e 28,5ºC. Borboletas são insetos que dependem da temperatura do ambiente para que sua atividade metabólica seja fortalecida. Nota-se que temperaturas mais baixas (<19) ou mais altas (>33) a atividade de forrageamento diminui abruptamente. Na Figura 11C, algo semelhante ocorre nas medidas de umidade relativa do ar, no entanto, a atividade começa a ser efetiva a partir de 43% e aumentando até 65%, depois disso, decai até 86% para então decair abruptamente. Por outro lado, na Figura 11D, a velocidade do vento influencia consideravelmente na atividade das borboletas. Isso ocorre pelo fato de que a área alar das borboletas são muito amplas para um inseto, tornando o voo difícil, ou mesmo impossibilitando-o para velocidade maiores que 7 m/s, Algumas espécies são mais resilientes aos ventos fortes, como o são as espécies da família Hesperidae. O formato de suas asas e vigor no voo permitem que os membros desta família mantenham-se em atividade mesmo com a presença de vento moderado.

Por fim, queremos enfatizar que o método aplicado nesse estudo permite que conheçamos o efeito exato do nocaute de uma espécie. Ou seja, é possível calcular o impacto a uma espécie *i* devido ao nocaute de qualquer outra espécie. Isso é realizado calculando o erro relativo μ_i. Este tipo de informação e medida é muito relevante no processo de tomada de decisão na área de Biologia da Conservação. Além disso, este método pode substituir as bem conhecidas distribuições de abundância (MAGURRAN, 2004). Quando se deseja saber a forma que um ensemble se relaciona ecologicamente, lança-se mão de amostragens intensivas de modo a submeter os dados de riqueza e abundância a ajustes de curvas. Se uma distribuição possuir bom ajuste a alguma distribuição teórica pré-definida, então se induz que aquela comunidade biológica é modelada com alto grau de confiança por essa teoria pré-definida (MAGURRAN, 2004). Este tipo de procedimento não permite saber, de modo exato e preciso, como cada espécie interage com o próximo e com o todo. Nosso método, além de determinar a medida desta interação, permite que conheçamos o efeito global caso sua atividade seja nocauteada.

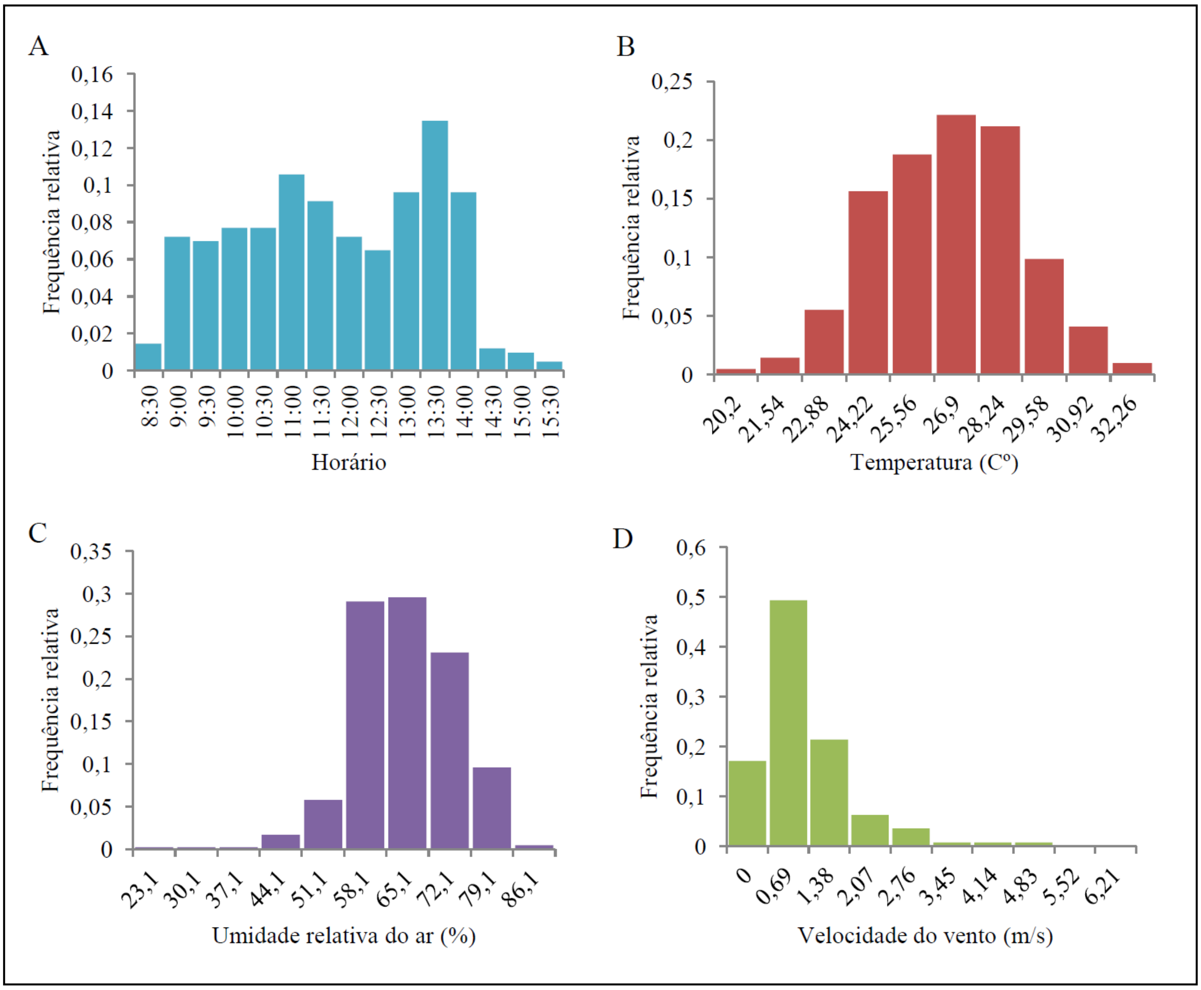


FIGURA 11. Conjunto de gráficos sobre as variáveis climáticas.
Fonte: autor.
Nota: Em todos os gráficos, a frequência relativa se refere à atividade de forrageamento das borboletas que são calculados pelo número de interações observadas naquele intervalo pelo número total de observações no estudo.

6.3. Considerações finais do capítulo

Neste capítulo, revisitamos o conceito de importância de agente biológico definido inicialmente por Rosen e desenvolvido por nós mediante o cálculo do erro médio relativo entre o fluxo e o vetor de fluxo de um diagrama nocauteado. Esta importância pode ser calculada exatamente, uma vez que o modo com que concebemos tais diagramas torna-o conectado. Isso implica que os critérios de Perron-Frobenius serão sempre satisfeitos e os vetores de fluxo estacionários existirão e poderão ser calculados exatamente.

Além disso, aplicamos tal teoria de nocautes em um caso concreto. Particularmente, neste estudo de caso, utilizamos apenas um critério empírico – a evidência de interação entre inseto e planta. Isto implica que o diagrama de bloco equivale ao diagrama de bloco abstrato. Em outras palavras, o grafo direcionado equivale estruturalmente à sua categoria subjacente. Neste estudo, calculamos o valor exato dos EMR de cada espécie de modo a subsidiar a Biologia da Conservação com informação acerca das espécies mais importantes naquele ensemble. Com isso, mostramos que este tipo de estudo pode ser aplicado analogamente para diversas áreas, de modo a gerar quantificadores biológicos exatos.

CAPÍTULO 7. Emergência e Lei de Proporcionalidade Intrínseca

Neste capítulo formalizaremos tanto o conceito de emergência quanto o conceito de LPI. Esses conceitos foram precisados metafisicamente no Capítulo 3, por meio de uma análise do *status quaestionis* do assunto. Adicionalmente, no estudo da Biologia Relacional realizado no Capítulo 5, especificamente no estudo das decomposições de sistemas biológicos, nota-se que uma hierarquia de decomposições surge naturalmente. Essas decomposições geram categorias com propriedades muito diferentes, ao mesmo tempo em que representam formalmente o mesmo sistema (*i. e.*, fenômeno). Além disso, provamos alguns resultados matemáticos a partir da modelagem da emergência mediante a Teoria de Categorias. A partir desses resultados, propomos uma discussão e uma reelaboração do modo com o qual concebemos sistemas biológicos e como podemos estudá-los à luz da formalização proposta. Do mesmo modo, faremos uma análise das implicações metafísicas dos conceitos e resultados encontrados.

7.1. Teoria de Categorias, emergência e LPI

7.1.1. Preliminares

Para tratar formalmente das modelagens da emergência e da LPI, lançaremos mão principalmente dos seguintes conceitos matemáticos já discutidos no Capítulo 4: categoria abstrata, functor, isomorfismo de categorias, constructo, transformações naturais e quasicategorias[124]. Lembremo-nos que toda a presente modelagem aplica-se à afirmação apriorística sobre todos substanciais como estabelecido no Postulado 1 (Capítulo 2):

Postulado 1. *Toda modalidade existencial implicada em um todo substancial admite uma Lei de Proporcionalidade Intrínseca (LPI) única e constante. Esta Lei organiza as*

[124] Na medida da necessidade, iremos apresentar conceitos avançados da Teoria de Categorias.

relações intrínsecas das partes de modo a gerar a operação própria no todo substancial mediante sua modalidade.

Em especial, a modalidade vida se refere aos sistemas biológicos que são, fundamentalmente e consequentemente, todos substanciais. Nesse sentido, a LPI é o efeito direto que tem como causa o fenômeno emergente. Disso decorre nossa proposta de formalização desses dois fenômenos conjugados. Como apresentado no Capítulo 5, sabemos que a partir de diversas decomposições do mesmo sistema, encontram-se diagramas de blocos abstratos com propriedades diferentes. Para tornar tal fato apreensível matematicamente – com efeito, cientificamente –, iniciaremos nossa análise das propriedades internas (*i. e.*, intrínsecas) dos objetos de um constructo genérico.

7.1.2. Emergência

Nesta seção, definiremos emergência em termos de um constructo no sentido de categorias, um conjunto de operações internas (*i. e.*, estrutura interna) e um functor GU[125] (introduzido por nós na literatura). Adicionalmente, provaremos alguns novos resultados no que concerne a esta definição matemática de emergência.

Definição 7.1. *Uma estrutura interna em uma categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é definida em termos de seus objetos (denominados conjuntos estruturados) da seguinte maneira: existe um conjunto finito de operações internas gerais dos $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos dado por $e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \left\{e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}{}^{(1)}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}{}^{(2)}, \dots, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}{}^{(n)}\right\}$, que consiste de operações de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos tal que para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A , tem-se $e_A = \left\{e_A{}^{(1)}, e_A{}^{(2)}, \dots, e_A{}^{(n)}\right\}$ operações de modo que $e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}{}^{(i)}$ e $e_A{}^{(i)}$ tem as mesmas propriedades para todo $i = 1,2, \dots, n$. Uma categoria $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ que possui uma estrutura interna é denominada constructo.*

A título de exemplo, consideremos a categoria de todos os anéis $\boldsymbol{\mathcal{R}ing}$ que possui um conjunto de operações internas $e_{\boldsymbol{\mathcal{R}ng}} = \left\{e_{\boldsymbol{\mathcal{R}ng}}{}^{(1)} = +_{\boldsymbol{\mathcal{R}ng}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{R}ng}}{}^{(2)} = \cdot_{\boldsymbol{\mathcal{R}ng}}\right\}$. Sejam A e B objetos de $\boldsymbol{\mathcal{R}ing}$, ou seja, A e B são anéis. Então $+_A$ é igual a $+_B$, assim como $\cdot_A$ é igual a $\cdot_B$. Portanto, $\boldsymbol{\mathcal{R}ing}$ é um constructo.

[125] Generalized underlying functor.

Assim, a principal categoria que não possui operações internas é a categoria $\boldsymbol{Set}$, uma vez que $e_{\boldsymbol{Set}} = \emptyset$. Com efeito, podemos definir um functor de age sobre qualquer constructo e "esquece" toda a estrutura subjacente aos seus objetos, tendo em vista o domínio em $\boldsymbol{Set}$. A Teoria de Categorias usual possui um functor que tem essa característica – o functor forgetful ou underlying. Entretanto, considera-se que tal functor seja faithful[126]. No presente modelo, enfraquecemos a hipótese para que o functor não seja necessariamente faithful.

Definição 7.2. *Seja $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ um constructo. Um generalized underlying functor (GU) $U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$ é um functor tal que para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $f: A \to B$, tem-se $U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\left(A \xrightarrow{f} B\right) = \underline{A} \xrightarrow{U_{\mathcal{A}} f} \underline{B}$, em que $\underline{A}$ é $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A considerado apenas como conjunto, ou seja, excetuada de suas operações internas.*

Note que o functor $U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, além de "esquecer" a estrutura interna, pode esquecer a injetividade nos morfismos.

Definição 7.3. *Uma emergência é uma tripla ordenada $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$ em que $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é um constructo, $e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ é um conjunto finito de operações internas dos objetos de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ e $U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ é o functor GU. A ordem $\mathcal{O}(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$ é a cardinalidade de $e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$.*

Com isso, fica claro que uma emergência no sentido matemático é um conjunto de objetos que são conjuntos estruturados em relação à sua contraparte de operações internas que são "esquecidas" pelo functor GU. No Capítulo 3, enfatizamos diversas vezes que a emergência – em especial a emergência forte (CHALMERS, 2006) – não pode ser dedutível das partes. De fato, o functor GU associa a cada conjunto estruturado seu respectivo conjunto sem que se considerem suas operações internas. Isso implica que não é possível por meio da investigação de cada conjunto individual, deduzir ou prever as propriedades dos objetos do constructo. Ademais, essa definição de emergência satisfaz à heteropatia de Mill (MILL, 1843/1974, p. 371), uma vez que os elementos dos conjuntos subjacentes, sem estrutura, se combinam como causas de modo a ficarem "invisíveis". Mais precisamente, as partes são os membros dos conjuntos subjacentes, ou mesmo seus subconjuntos; no entanto, não se sabe

---

[126] Ou seja, injetor nos conjuntos *homs*.

como tais partes irão se relacionar, de modo a gerar uma propriedade específica no constructo resultante.

Adicionalmente, essa definição de emergência satisfaz à trans-ordinalidade de Broad (BROAD, 1925, p. 61), dado que o conjunto subjacente a um conjunto estruturado tem suas leis estabelecidas no nível hierárquico superior, isto é, o constructo. Analogamente, essa definição de emergência satisfaz o fisicalismo não redutível de Alexander (ALEXANDER, 1920, p. 62-64), pois as partes – que são subconjuntos e membros de conjuntos – não se modificam essencialmente nos processos emergentes, mas acidentalmente. Em outras palavras, os membros do conjunto subjacente não mudam, mas a forma com que são operados é não redutível. Ademais, não utilizamos nenhuma aproximação por meio de equações que quantificam grandezas mensuráveis, logo, não estamos restritos ao quadro de Bertalanffy (BERTALANFFY, 1968, p. 20). Entrementes, tratemos de alguns resultados imediatos proveniente da definição de emergência.

Proposição 7.1. *Seja* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$ *uma emergência. Então* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}^{op}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}, e_{\mathcal{A}^{op}}, U_{\mathcal{A}^{op}})$ *também é emergência. Adicionalmente,* $\mathcal{O}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{O}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}^{op}})$.

Prova: Como $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é constructo, segue-se que $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$ também é constructo. Considerando o functor underlying usual $U_{\mathcal{A}^{op}}: \boldsymbol{\mathcal{A}^{op}} \to \boldsymbol{Set}$, o resultado é observado. Pela definição de $\boldsymbol{\mathcal{A}^{op}}$ segue diretamente que ambas as emergências têm mesma ordem. ■

7.1.3. Homomorfismo e strong homomorfismo

Nesta subseção definiremos o conceito de (strong) homomorfismo entre emergência. Este conceito é uma ferramenta matemática que permite estabelecer correlações entre emergências. Isso implica que emergências abstraídas de todos substanciais vivos podem ser relacionadas, comparadas e manipuladas por meio deste tipo de homomorfismo.

Definição 7.4. *Sejam* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$ *e* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\mathcal{B}}, U_{\mathcal{B}})$ *emergências. Diz-se que* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ *é homomorfa a* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ *se existe um functor* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$, *denominado functor homomorfismo, tal que* $U_{\mathcal{B}} \circ F = U_{\mathcal{A}}$ *. Em outras palavras, o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\mathcal{A}} \arrow[r, "U_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "F"'] & \boldsymbol{Set} \\
\boldsymbol{\mathcal{B}} \arrow[ur, "U_{\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Denotaremos emergências homomorfas por $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$. Para evitar notação carregada, podemos utilizar a notação $F: \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ para representar um homomorfismo de $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ a $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$.

Definição 7.5. *Sejam* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$, $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\mathcal{B}}, U_{\mathcal{B}})$ *e* $\mathcal{E}_{\mathcal{C}} = (\boldsymbol{\mathcal{C}}, e_{\mathcal{C}}, U_{\mathcal{C}})$ *emergências e* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *e* $G: \boldsymbol{\mathcal{B}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ *functores homomorfismos. A composta de functores homomorfismos* $G \circ F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ *é um functor homomorfismo se* $U_{\mathcal{C}} \circ (G \circ F) = U_{\mathcal{A}}$ *e se o diagrama seguinte comutar:*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\mathcal{A}} \arrow[r, "U_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "F"'] & \boldsymbol{Set} \\
\boldsymbol{\mathcal{B}} \arrow[ur, "U_{\mathcal{B}}"'] \arrow[d, "G"'] & \\
\boldsymbol{\mathcal{C}} \arrow[uur, "U_{\mathcal{C}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Fica claro que a partir da Definição 7.4 a composta $G \circ F$ é um functor homomorfismo de $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ a $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$. Disso decorrem naturalmente quais sejam as propriedades dos functores homomorfismos entre categorias $\sim_h$.

Proposição 7.2. *Sejam* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$, $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\mathcal{B}}, U_{\mathcal{B}})$ *e* $\mathcal{E}_{\mathcal{C}} = (\boldsymbol{\mathcal{C}}, e_{\mathcal{C}}, U_{\mathcal{C}})$ *emergências. Então as seguintes assertivas são satisfeitas:*

1) *A relação* $\sim_h$ *é reflexiva, ou seja,* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ *para todas emergências.*
2) *A relação* $\sim_h$ *é transitiva: se* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ *e* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$, *então* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$.

Prova: 1) Dada uma emergência $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, o functor identidade $Id_{\mathcal{A}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}}$ satisfaz $U_{\mathcal{A}} \circ Id_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}}$, logo $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$.

2) Assumamos que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$. Assim, existem functores $T_1: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *e* $T_2: \boldsymbol{\mathcal{B}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ *tal que* $U_{\mathcal{B}} \circ T_1 = U_{\mathcal{A}}$ *e* $U_{\mathcal{C}} \circ T_2 = U_{\mathcal{B}}$. *Sabemos que* $T_1 \circ T_2$ *também é functor e* $(U_{\mathcal{C}} \circ T_2) \circ T_1 = U_{\mathcal{B}} \circ T_1 = U_{\mathcal{A}}$. *Logo,* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ *por meio do functor* $T_2 \circ T_1$. ■

É importante notar que homomorfismos entre emergências não são necessariamente simétricos.

Definição 7.6. *Sejam* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$ *e* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\mathcal{B}}, U_{\mathcal{B}})$ *emergências. Diz-se que* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ *é isomorfo a* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$, *ou seja,* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$, *se existe um isomorfismo* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *tal que* $U_{\mathcal{B}} \circ F = U_{\mathcal{A}}$, *ou seja, o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\mathcal{A}} \arrow[r, "U_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "F"', "\cong"] & \boldsymbol{Set} \\
\boldsymbol{\mathcal{B}} \arrow[ur, "U_{\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta.

Proposição 7.3. *Sejam* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$ *e* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\mathcal{B}}, U_{\mathcal{B}})$ *emergências, tal que* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} \sim_h \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$. Se $U_{\mathcal{A}}$ e $U_{\mathcal{B}}$ são ambos embeddings, então $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$.

Prova: Por hipótese, existe um functor $F_1: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ tal que $U_{\mathcal{B}} \circ F_1 = U_{\mathcal{A}}$. Temos que mostrar que F_1 é um isomorfismo de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ a $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Novamente, por hipótese, existe um functor

$F_2: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $U_{\mathcal{A}} \circ F_2 = U_{\mathcal{B}}$. Assim, $U_{\mathcal{A}} \circ (F_2 \circ F_1) = U_{\mathcal{B}} \circ F_1 = U_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}} \circ Id_{\mathcal{A}}$. Como $U_{\mathcal{A}}$ é embedding, então $F_2 \circ F_1 = Id_{\mathcal{A}}$. Analogamente, $U_{\mathcal{B}} \circ (F_1 \circ F_2) = U_{\mathcal{A}} \circ F_2 = U_{\mathcal{B}}$. Como $U_{\mathcal{B}}$ também é embedding, então $F_1 \circ F_2 = Id_{\mathcal{B}}$. Logo, F_1 é um isomorfismo de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, donde $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$. ■

Proposição 7.4. *Todo isomorfismo entre emergências é uma relação de equivalência $\cong$ no conglomerado de todas as emergências e no conglomerado de todos os functores.*

Prova: Devemos provar que $\cong$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Seja $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$ emergência. Primeiramente devemos mostrar que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$. De fato, $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ como categoria e $id_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é isomorfismo, donde $U_{\mathcal{A}} \circ id_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}}$. Portanto, $\cong$ é reflexiva.

Sejam $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mathrm{e}_{\mathcal{A}}, \mathrm{U}_{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}, \mathrm{e}_{\mathcal{B}}, \mathrm{U}_{\mathcal{B}})$ emergências, tal que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$. Assim, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ como categorias, o que implica que $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$. De fato, existe um functor isomorfismo $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ com $U_{\mathcal{B}} \circ F = U_{\mathcal{A}}$; então $U_{\mathcal{B}} = U_{\mathcal{A}} \circ F^{-1}$. Logo $\cong$ é simétrica.

Sejam $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$, $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}, e_{\mathcal{B}}, U_{\mathcal{B}})$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, e_{\mathcal{C}}, U_{\mathcal{C}})$ categorias, em que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} \cong \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$. É claro que $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ como categorias. Adicionalmente, sabemos que existem os functores $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tal que $U_{\mathcal{B}} \circ F = U_{\mathcal{A}}$ e $U_{\mathcal{C}} \circ G = U_{\mathcal{B}}$. Consequentemente, que $(U_{\mathcal{C}} \circ G) \circ F = U_{\mathcal{A}} \Rightarrow U_{\mathcal{C}} \circ (G \circ F) = U_{\mathcal{A}}$. Como $G \circ F: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ é isomorfismo, segue-se que $\cong$ é transitiva. ■

Com estas considerações, podemos enunciar a definição de strong homomorfismo.

Definição 7.7. *Sejam $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}, e_{\mathcal{B}}, U_{\mathcal{B}})$ emergências. Diz-se que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ são strong homomorfas se existir um functor $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, denominado strong homomorfismo, tal que $U_{\mathcal{B}} \circ F = U_{\mathcal{A}}$ e $|e_{\mathcal{A}}| = |e_{\mathcal{B}}|$. Denotamos $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \sim_{st} \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ para simbolizar que $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ é strong homomorfa a $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$.*

Proposição 7.5. *A relação $\sim_{st}$ é reflexiva e transitiva.*

Prova: Completamente análoga à Proposição 7.2. ■

Note-se que como no caso dos homomorfismos, os strong homomorfismos não são necessariamente simétricos.

Definição 7.8. *Sejam* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$ *e* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\mathcal{B}}, U_{\mathcal{B}})$ *emergências. Diz-se que* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ *é strong isomorfa a* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$*, ou seja,* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \sim_{st} \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$*, se*

1) $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *é isomorfo a* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *como categorias.*
2) *Existe um isomorfismo* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$*, tal que* $U_{\mathcal{B}} \circ F = U_{\mathcal{A}}$.
3) $|e_{\mathcal{A}}| = |e_{\mathcal{B}}|$.

Proposição 7.6. *A relação* $\cong_{st}$ *é uma relação de equivalência.*

Prova: Similar à Proposição 7.4.

7.1.4. Produto cartesiano de emergências

Nesta subseção, mostramos que o produto cartesiano de emergências também é emergência. Para tanto, é necessário que enunciemos o conceito de produto cartesiano de categorias.

Definição 7.9. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 24) *Sejam* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *categorias. O produto cartesiano de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *é a categoria* $\boldsymbol{\mathcal{A}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *definida pelas seguintes propriedades:*

1) *Os objetos são pares ordenados* (A, B) *em que* $A \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ *e* $B \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{B}})$.
2) *Sejam* (A, B) *e* (A', B') *objetos. Um morfismo de* (A, B) *para* (A', B') *é definido como sendo* $(f, g): (A, B) \to (A', B')$ *em que* $f: A \to A'$ *e* $g: B \to B'$.
3) *Para cada objeto* (A, B)*, existe uma identidade* $id_{(A,B)} = (id_A, id_B)$.
4) *Sejam* (f, g) *e* (h, i) *morfismos. A composta de morfismos* $(f, g) \circ (h, i)$ *é definida como* $(f \circ h, g \circ i)$.

O conceito de produto cartesiano para um número finito de categorias pode ser generalizado de modo completamente análogo. Definido o produto cartesiano para categorias, é de interesse que possamos comparar tais categorias por meio de functores adequados.

Proposição 7.7. *Sejam* $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}, \boldsymbol{\mathcal{A}_2}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{A}_n}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}_1}, \boldsymbol{\mathcal{B}_2}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{B}_n}$ *categorias de modo que seus produtos cartesianos, respectivamente, sejam* $\boldsymbol{\mathcal{A}_1} \times \boldsymbol{\mathcal{A}_2} \times \dots \times \boldsymbol{\mathcal{A}_n}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}_1} \times \boldsymbol{\mathcal{B}_2} \times \dots \times \boldsymbol{\mathcal{B}_n}$.

Assumamos que $F = \prod_{i=1}^{n} F_i: \boldsymbol{\mathcal{A}_1} \times \boldsymbol{\mathcal{A}_2} \times \ldots \times \boldsymbol{\mathcal{A}_n} \to \boldsymbol{\mathcal{B}_1} \times \boldsymbol{\mathcal{B}_2} \times \ldots \times \boldsymbol{\mathcal{B}_n}$ *seja uma função, em que* $F_i: \boldsymbol{\mathcal{A}_i} \to \boldsymbol{\mathcal{B}_i}$ *é um functor, e F é a aplicação consistindo dos* F_i *componentwise. Então F é functor.*

Prova: Assumamos que $(A_i)_{i=1}^{n} \in \mathcal{O}b(\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}}_i)$. A partir da hipótese dada cima, temos que $F((A_i)_{i=1}^{n}) = \big(F_1(A_1), F_2(A_2), \ldots, F_n(A_n)\big) \in \mathcal{O}b(\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{B}}_i)$. Supor que $(f_1, f_2, \ldots, f_n), (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in \mathcal{M}or(\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}}_i)$ em que $f_i: A_i^{(1)} \to A_i^{(2)}$ e $g_i: A_i^{(2)} \to A_i^{(3)}$ para todo $i = 1,2, \ldots, n$ e $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$ e $A_i^{(3)}$ $\boldsymbol{\mathcal{A}}_i$-objetos. Assim,

$$\begin{aligned}
F[(g_1, g_2, \ldots, g_n) \circ (f_1, f_2, \ldots, f_n)] &= F([g_1 \circ f_1], [g_2 \circ f_2], \ldots, [g_n \circ f_n]) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} (F_1[g_1 \circ f_1], F_2[g_2 \circ f_2], \ldots, F_3[g_n \circ f_n]) \\
&= ([F_1(g_1) \circ F_1(f_1)], \ldots, [F_n(g_n) \circ F_n(f_n)]) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \big(F_1(g_1), F_2(g_2), \ldots, F_n(g_n)\big) \\
&\qquad\qquad \circ \big(F_1(f_1), F_2(f_2), \ldots, F_n(f_n)\big) \\
&= F(g_1, g_2, \ldots, g_n) \circ F(f_1, f_2, \ldots, f_n).
\end{aligned}$$

Seja $(A_i)_{i=1}^{n} \in \mathcal{O}b(\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}}_i)$ e seja $id_{A_i}: A_i \to A_i$ a identidade em A_i para todo $i = 1,2, \ldots, n$. Então

$$\begin{aligned}
F\big(id_{A_1}, id_{A_2}, \ldots, id_{A_2}\big) &\stackrel{\text{def}}{=} \Big(F_1\big(id_{A_1}\big), F_2\big(id_{A_2}\big), \ldots, F_3\big(id_{A_3}\big)\Big) \\
&= \big(id_{F_1(A_1)}, id_{F_2(A_2)}, \ldots, id_{F_n(A_n)}\big) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} Id_{F(\prod_{i=1}^{n} A_i)}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Para aprofundar essa discussão sobre produtos cartesianos entre categoria, é necessário que consideremos o projetor dos mesmos.

Definição 7.10. *Sejam* $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}, \boldsymbol{\mathcal{A}_2}, \ldots, \boldsymbol{\mathcal{A}_n}$ *categorias e considere o produto cartesiano* $\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}}_i$. *Defina a função* $P_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_j}: \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}}_i \to \boldsymbol{\mathcal{A}}_j$ *como segue: se* $(A_i)_{i=1}^{n} \in \mathcal{O}b(\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}}_i)$ *e* $(f_i)_{i=1}^{n} \in \mathcal{M}or(\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}}_i)$, *então* $P_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_j}((f_i)_{i=1}^{n}) = f_j$.

Proposição 7.8. *A função* $P_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_j}: \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}}_i \to \boldsymbol{\mathcal{A}}_j$ *é um functor.*

Prova: Segue diretamente da Proposição 7.7.

Proposição 7.9. *Sejam* $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}, \boldsymbol{\mathcal{A}_2}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{A}_n}$ *constructos. Então a tripla* $\left(\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}}_i, e_{(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i)}, U_j \circ P_{\mathcal{A}_j}\right)$ *é uma emergência, em que* U_j *é um functor GU de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}_j$ *e* $P_{\mathcal{A}_j}$ *é o projetor na j-ésima coordenada.*

Prova: Por meio da Proposição 7.8, $P_{\mathcal{A}_j}$ é functor, donde $U_j \circ P_{\mathcal{A}_j}$ também é functor $U_j \circ P_{\mathcal{A}_j}: \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}}_i \to \boldsymbol{Set}$. Como o produto cartesiano de constructos também é constructo (as operações internas são as operações internas de cada constructo que o compõe), o resultado segue. ■

7.1.5. Representabilidade, subemergência e quasiemergência

A representabilidade de emergências é definida de acordo com a representabilidade de seu correspondente functor GU. Para tanto, é necessário que recorramos à representabilidade na Teoria de Categorias.

Definição 7.11. (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 87) *Um functor* $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$ *é representável se existe um* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-objeto A, tal que F é naturalmente isomorfa ao hom-functor* hom $(A, -): \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$.

Definição 7.12. *Seja* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$ *uma emergência. Diz-se que* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ *é representável se o functor GU* $U_{\mathcal{A}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$ *é representável no sentido da representabilidade dada na Definição 7.11.*

Por exemplo, se considerarmos a categoria $\boldsymbol{\mathcal{V}ec}$ de todos os espaços vetoriais e um functor GU $U: \boldsymbol{\mathcal{V}ec} \to \boldsymbol{Set}$, então a emergência $\mathcal{E}_{\mathcal{V}ec}$ é representada pelo par $(\mathbb{R}, 1)$. Analogamente, se considerarmos a categoria $\boldsymbol{\mathcal{G}rp}$ de todos os grupos e um functor GU $U: \boldsymbol{\mathcal{G}rp} \to \boldsymbol{Set}$, então a emergência $\mathcal{E}_{\mathcal{G}rp}$ é representada pelo par $(\mathbb{Z}, 1)$. Como podemos definir subcategorias por meio de categorias, definiremos também subemergências por meio de emergências.

Definição 7.13. *Seja* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$ *uma emergência. Diz-se que* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}, U_{\boldsymbol{\mathcal{B}}})$ *é uma subemergência de* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ *se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1) $Ob(\boldsymbol{\mathcal{B}}) \subseteq Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$.
2) *Para todo* $A, A' \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{B}})$, *existe um conjunto* $\hom_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(A, A') \subseteq \hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A, A')$.
3) *Para todo* $A \in Ob(\boldsymbol{\mathcal{B}})$, *existe uma identidade* $id_A : A \to A$ *tal que* id_A *considerada como um* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*-morfismo é igual a* id_A *considerada como um* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-morfismo.*
4) *A lei de composição de morfismos em* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *é a restrição da composição de morfismos em* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*.*
5) *O functor inclusão* $E: \boldsymbol{\mathcal{B}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ *satisfaz* $U_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \circ E$.

É importante notar que como $Ob(\boldsymbol{\mathcal{B}}) \subseteq Ob(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, então $e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = e_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ uma vez que as operações internas são determinadas pela natureza dos objetos do constructo $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Entrementes, fica claro da definição acima que toda subemergência é emergência. Adicionalmente, se além das condições observadas na Definição 7.13, a condição $\hom_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(A, A') = \hom_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(A, A')$ for observada, então $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ é uma full subemergência. Note-se que para toda subemergência $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ de $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$, o functor inclusão $E: \boldsymbol{\mathcal{A}} \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}}$ é embedding e será full se, e somente se, $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ é full subemergência. A seguir, definimos emergência induzidas.

Definição 7.14. *Sejam* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$ *e* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}, U_{\boldsymbol{\mathcal{B}}})$ *emergências. Diz-se que* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ *induz* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ *se cada* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*-objeto* $B = (\underline{B}, e_B)$ *induz um* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*-objeto* $A = (\underline{A}, e_B)$, *em que* $\underline{A} = \underline{B}$, *tal que* $e_B \subseteq e_A$.

Novamente, assim como é possível definir a quasicategoria como sendo o conglomerado de todas as categorias, podemos também definir de modo análogo a quasiemergência como o conglomerado de todas as emergências. Esse conceito é muito útil, uma vez que podemos estabelecer relações fundamentais entre emergências.

Definição 7.15. *Uma quasiemergência é uma quádrupla ordenada* $\mathfrak{E} = (Ob(\mathfrak{E}), hom_{\mathfrak{E}}, id, \circ)$, *em que* $Ob(\mathfrak{E})$ *é o conglomerado de todas as emergências,* $hom_{\mathfrak{E}}$ *é o* *conglomerado de todos os homomorfismos entre emergências, id é a classe de todas as identidades de categorias e ∘ é a composta de emergências.*

Naturalmente, a composta de emergências se refere à composta estabelecida na Definição 7.5. Por meio da quasiemergência, é possível definir tipos especiais de emergência, quais sejam: emergências inicial e final.

7.1.6. Emergências source e sink

Assim como se define source e sink no conglomerado de todas as categorias (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 169-205), definimos também emergências que são source ou sink no conglomerado de todas as emergências.

Definição 7.16. *Seja $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$ emergência e assumindo que, para cada $i \in I$, em que I é uma classe, tem-se que $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i} = \left(\boldsymbol{\mathcal{A}_i}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i}, U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i}\right)$ são emergências. Uma emergência source é um par $(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, (F_i)_{i \in I})$, em que $F_i : \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}_i}$ é uma família de functores com domínio $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ indexado por I.*

Um constructo $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é denominado domínio de uma emergência source, assim como a família de constructos $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_{i \in I}$ é denominada o contradomínio da emergência source. Iremos denotar uma source emergência por $(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, F_i)_I$ ou $\left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \xrightarrow{F_i} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i}\right)_I$. Particularmente, embora $F_i : \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}_i}$ seja uma família de functores de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ para $\boldsymbol{\mathcal{A}_i}$, por abuso de noação, denota-se uma emergência source por $\left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \xrightarrow{F_i} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i}\right)_I$.

Definição 7.17. *Se $\mathbb{A} = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \xrightarrow{F_i} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i}\right)_I$ é uma emergência source e se para cada $i \in I$, $\mathbb{A}_i = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i} \xrightarrow{G_{ij}} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij}}\right)_{J_i}$ é emergência source, então $(\mathbb{A}_i) \circ \mathbb{A} = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \xrightarrow{G_{ij} \circ F_i} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ij}}\right)_{i \in I, j \in J}$ é uma emergência source denominada composta de $\mathbb{A}$ e da família $(\mathbb{A}_i)_I$.*

Neste contexto, dada uma emergência source $\mathbb{A} = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \xrightarrow{F_i} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i}\right)_I$ e um functor $F: \boldsymbol{\mathcal{B}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$, utilizaremos a notação $\mathbb{A} \circ F$ para denotar $\mathbb{A} \circ F = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \xrightarrow{F_i \circ F} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i}\right)_I$.

Definição 7.18. *Seja $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ uma categoria. Uma emergência source $\mathbb{F} = (\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, F_i)_I$ é denominada emergência mono-source se para qualquer par de functores $\boldsymbol{\mathcal{B}} \xrightarrow{R} \boldsymbol{\mathcal{A}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}} \xrightarrow{S} \boldsymbol{\mathcal{A}}$ a equação $\mathbb{F} \circ R = \mathbb{F} \circ S$ (isto é, $F_i \circ R = F_i \circ S$ para cada $i \in I$), implica que $R = S$.*

Definição 7.19. *Uma emergência source $\mathbb{P} = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{P}}} \xrightarrow{P_i} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i}\right)_I$ é denominada emergência produto se para toda emergência source $\mathbb{A} = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \xrightarrow{S_i} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}_i}\right)_I$, com mesmo contradomínio que $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, existir um único functor $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}}$, tal que $\mathbb{A} = \mathbb{P} \circ F$. Em outras palavras, o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\mathcal{P}} \arrow[r, "P_i"'] & \boldsymbol{\mathcal{A}_i} \\
\boldsymbol{\mathcal{A}} \arrow[u, "F"] \arrow[ur, "S_i"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta para cada $i \in I$.

Uma emergência produto com contradomínio $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_I$ é denominada produto de $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_I$.

Lema 7.1. *Toda emergência produto é uma emergência mono-source.*

Prova: A prova é similar à Proposição 10.21 em (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 174). ■

Proposição 7.10. *Para toda família* $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_{i\in I}$ *de constructos, as emergências produto de* $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_I$ *são essencialmente únicas. Mais precisamente, se* $\mathbb{P} = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{P}}} \xrightarrow{P_i} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}_i}}\right)_I$ *é uma emergência produto de* $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_I$, *então:*

a) *para cada emergência produto* $\mathbb{Q} = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} \xrightarrow{Q_i} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}_i}}\right)_I$, *existe um isomorfismo* $\boldsymbol{\mathcal{Q}} \xrightarrow{H} \boldsymbol{\mathcal{P}}$, *com* $\mathbb{Q} = \mathbb{P} \circ H$;

b) *para cada isomorfismo* $\boldsymbol{\mathcal{A}} \xrightarrow{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{\mathcal{P}}$, *a emergência source* $\mathbb{P} \circ G$ *é um produto de* $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_I$.

Prova: Completamente análoga à Proposição 10.22 em (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 174).

Dada uma família $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_I$ de constructos, a única emergência produto desta família é denotada por $\left(\prod \boldsymbol{\mathcal{A}_i}, \pi_j\right)_{j\in I}$.

Proposição 7.11. *Dada uma família finita de constructos* $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}, \boldsymbol{\mathcal{A}_2}, \dots, \boldsymbol{\mathcal{A}_n}$, *existe uma emergência produto de* $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_{i=1}^n$. *A emergência produto é a família de projeções* $\pi_j : \prod_{i=1}^n \boldsymbol{\mathcal{A}_i} \to \boldsymbol{\mathcal{A}_j}$, *em que* $\prod_{i=1}^n \boldsymbol{\mathcal{A}_i}$ *é o produto cartesiano de* $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_{i=1}^n$.

Prova: Seja $(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, (F_i)_{i=1}^n)$ uma emergência source com functores $F_i : \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}_i}$. Para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $A \xrightarrow{h} A'$, defina o functor $F : \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \prod_{i=1}^n \boldsymbol{\mathcal{A}_i}$, tal que $F(A) = \big(F_1(A), F_2(A), \dots, F_n(A)\big)$ e $F(h) = \big(F_1(h), F_2(h), \dots, F_n(h)\big)$, em que para cada $i = 1,2,\dots,n$, $F_i(h)$ é uma $\boldsymbol{\mathcal{A}_i}$-mofismo $F_i(A) \xrightarrow{F_i(h)} F_i(A')$. Por definição, é claro que $\pi_i \circ F = F_i$, para cada $i = 1,2,\dots,n$ o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i=1}^n \boldsymbol{\mathcal{A}_i} \arrow[r, "\pi_i"'] & \boldsymbol{\mathcal{A}_i} \\
\boldsymbol{\mathcal{A}} \arrow[u, "F"] \arrow[ur, "F_i"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta.

Com isso, mostraremos que F é único. Para tanto, assumamos que G é um functor $G{:} \to \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mathcal{A}_i}$, tal que $\pi_i \circ G = F_i$, para cada $i = 1,2, \dots, n$. Para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A, segue-se da definição de G que $G(A) = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ para algum $\boldsymbol{\mathcal{A}_i}$-objeto A_i, para cada $i = 1,2, \dots, n$. Assim, $[\pi_i \circ G](A) = F_i(A)$ implica que $F_i(A) = A_i$, para cada $i = 1,2, \dots, n$; logo $F(A) = G(A)$ para todo $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objeto A. Desta maneira, há igualdade entre F e G em termos de suas ações em objetos. Analogamente, para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $A \overset{h}{\to} A'$, tem-se que $G(h) = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ para algum $\boldsymbol{\mathcal{A}_i}$-morfismo h_i, para cada $i = 1,2, \dots, n$; assim, $F(A) = G(A)$. Com isso, há igualdade entre F e G em termos de suas ações em morfismos. ■

Com isso, introduzimos o conceito de emergência sink.

Definição 7.20. *Seja $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$ emergência e assumindo que, para cada $i \in I$, em que I é uma classe, tem-se que $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}_i}} = \left(\boldsymbol{\mathcal{A}_i}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}_i}}, U_{\boldsymbol{\mathcal{A}_i}}\right)$ são emergências.Uma emergência sink é um par $((F_i)_{i \in I}, \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$, em que $F_i{:} \boldsymbol{\mathcal{A}_i} \to \boldsymbol{\mathcal{A}}$ é uma família de functores com contradomínio $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ indexado por I.*

A família de constructos $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_{i \in I}$ é denominada domínio da emergência sink. Iremos denotar uma emergência sink por $(F_i, \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})_I$ ou $\left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}_i}} \overset{F_i}{\to} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\right)_I$.

Definição 7.21. *Uma emergência sink $\mathbb{C} = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}_i}} \overset{C_i}{\to} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{C}}}\right)_I$ é denominado emergência co-produto se para toda emergência sink $\mathbb{B} = \left(\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}_i}} \overset{F_i}{\to} \mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\right)_I$, existir um único functor $H{:} \boldsymbol{\mathcal{C}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}}$, tal que $\mathbb{B} = H \circ \mathbb{C}$. Uma emergência co-produto com domínio $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_I$ é denominado co-produto de $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_I$, isto é, o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\mathcal{C}} \arrow[r, "C_i"'] \arrow[d, "H"'] & \boldsymbol{\mathcal{A}_i} \\
\boldsymbol{\mathcal{A}} \arrow[ur, "F_i"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta para cada $i = 1,2, \dots, n$.

De modo análogo às emergências produto, as emergências co-produto são também únicas a menos de isomorfismo. Como esta prova é similar aquela fornecida à Proposição 7.10, a omitimos aqui. Também, pensando de modo análogo, para a família de constructos $(\boldsymbol{\mathcal{A}_i})_I$, a único emergência co-produto desta família é denotada por $\left(\mu_j, \coprod \boldsymbol{\mathcal{A}_i}\right)_{j\in I}$.

7.1.7. Emergências parcial e relativa

Nesta subseção definimos os conceitos de emergência parcial e emergência relativa. A emergência parcial é importante conceito, pois permite descrever constructos que são emergência em relação a outros constructos.

Definição 7.22. *Sejam $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ constructos. Uma emergência parcial $\mathcal{E}^p_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}}$ é uma tripla ordenada $\mathcal{E}^p_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, V_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}})$, onde $V_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}}\colon \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ é um functor, $|e_{\mathcal{A}}| > |e_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}|$ e o diagrama a seguir*

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\mathcal{B}} \arrow[r, "U_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}"'] & \boldsymbol{Set} \\
\boldsymbol{\mathcal{A}} \arrow[u, "V_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}}"] \arrow[ur, "U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

comuta. O functor $V_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}}$ é denominado functor parcial GU. O grau da emergência parcial $\partial\left[\mathcal{E}^p_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}}\right]$ é definido como $\partial\left[\mathcal{E}^p_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}}\right] = |e_{\mathcal{A}}| - |e_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}|$.

Note-se que, no caso em que $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{Set}$, a emergência parcial $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}}$ é uma emergência no sentido usual. Adicionalmente, da Definição 7.22, segue-se que o functor $V_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}}$ é homomorfismo entre $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, mas não é strong homomorfismo.

Proposição 7.12. *Sejam $\mathcal{E}^p_{\boldsymbol{\mathcal{AB}}}$ e $\mathcal{E}^p_{\boldsymbol{\mathcal{BC}}}$ emergências parciais. Então $\mathcal{E}^p_{\boldsymbol{\mathcal{AC}}}$ é também uma emergência parcial.*

Prova: Sejam $V_{\mathcal{AB}}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $V_{\mathcal{BC}}: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ functores parciais GU. Pela composta de functores temos que $V_{\mathcal{BC}} \circ V_{\mathcal{AB}}: \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ é um functor de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{C}$. É claro que $|e_{\mathcal{A}}| > |e_{\mathcal{B}}|$. Além disso, tem-se que $U_{\mathcal{C}} \circ V_{\mathcal{BC}} = U_{\mathcal{B}}$ e $U_{\mathcal{B}} \circ V_{\mathcal{AB}} = U_{\mathcal{A}}$; donde $U_{\mathcal{C}} \circ (V_{\mathcal{BC}} \circ V_{\mathcal{AB}}) = U_{\mathcal{A}}$, ou seja, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[dr, "U_{\mathcal{C}}"] & \\
\mathcal{B} \arrow[u, "V_{\mathcal{BC}}"] \arrow[r, "U_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{S}et \\
\mathcal{A} \arrow[u, "V_{\mathcal{AB}}"] \arrow[ur, "U_{\mathcal{A}}"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta. Assim, $\mathcal{E}^{p}_{\mathcal{AC}}$ é emergência parcial. ■

A partir da proposição acima, infere-se que a emergência parcial é transitiva, mas não é reflexiva nem simétrica.

Corolário 7.1. *Para cada* $i = 1,2, \dots, n-1$, *em que* $n > 1$ *é um inteiro, assuma que* $\mathcal{E}^{p}_{\mathcal{A}_i\mathcal{A}_{i+1}}$ *é emergência parcial. Então* $\mathcal{E}^{p}_{\mathcal{A}_i\mathcal{A}_n}$ *também é emergência parcial.*

Prova: Segue diretamente por indução em *n* e da Proposição 7.12. ■

É importante notar que o que se apresenta na Proposição 7.12 é algo que se observa naturalmente no contexto de sistemas biológicos. Mais precisamente, é natural que se existir um ente emergente entre duas decomposições A e B de um dado organismo, e se existir outro ente emergente entre as decomposições B e C do mesmo organismo, segue-se é necessário que haja uma emergência entre A e C neste organismo. Este fato é um grande indicativo de que nosso modelo corresponde neste grau ao fenômeno emergente. Dito isso, introduzimos o conceito de emergência relativa.

Definição 7.23. *Sejam* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *constructos. Uma emergência relativa* $\mathcal{E}^r_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ *é uma tripla ordenada* $\mathcal{E}^r_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, R_{\mathcal{AB}})$, *onde* $R_{\mathcal{AB}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *é um functor e* $|e_{\mathcal{A}}| > |e_{\mathcal{B}}|$. *O functor* $R_{\mathcal{AB}}$ *é denominado functor relativo GU. O grau de uma emergência relativa* $\partial[\mathcal{E}^r_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}]$ *é definida como* $\partial[\mathcal{E}^r_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}] = |e_{\mathcal{A}}| - |e_{\mathcal{B}}|$.

Proposição 7.13. *Sejam* $\mathcal{E}^r_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}$ *e* $\mathcal{E}^r_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ *emergências relativas. Então* $\mathcal{E}^r_{\mathcal{A}\to\mathcal{C}}$ *também é emergência relativa.*

Prova: Segue diretamente da definição. ■

Pela proposição apresentada acima, segue-se que a emergência relativa é transitiva, mas não é reflexiva nem simétrica. Com isso, podemos introduzir o conceito de emergência inicial.

Definição 7.24. *Uma emergência* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$ *é emergência inicial se para cada emergência* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\mathcal{B}}, U_{\mathcal{B}})$, *existe um único homomorfismo* $T_{\mathcal{AB}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$, *com* $|e_{\mathcal{A}}| > |e_{\mathcal{B}}|$, *tal que* $\mathcal{E}^r_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, T_{\mathcal{AB}})$ *é emergência relativa.*

Como um exemplo de emergência inicial, consideremos a emergência vazia $\mathcal{E}_{\mathrm{C}(\emptyset)} = \big(\mathrm{C}(\emptyset), e_C = \emptyset, U_{\mathrm{C}(\emptyset)} = Id_{\mathrm{C}(\emptyset)} = \emptyset\big)$, em que $\mathrm{C}(\emptyset)$ é categoria sem objetos e sem morfismos. Entrementes, como é possível definir emergência inicial, também é possível definir emergência final.

Definição 7.25. *Uma emergência* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{A}}, U_{\mathcal{A}})$ *é emergência terminal se para cada emergência* $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\mathcal{B}}, U_{\mathcal{B}})$, *com* $|e_{\mathcal{B}}| \geq 2$, *existe um único homomorfismo* $T_{\mathcal{BA}}: \boldsymbol{\mathcal{B}} \to \boldsymbol{\mathcal{A}}$, *tal que* $\mathcal{E}^r_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, T_{\mathcal{BA}})$ *é emergência relativa.*

A título de exemplo, seja $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ constructo com $|e_{\mathcal{B}}| = 1$ e considere uma categoria $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ que consiste de um único $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-objeto B e um único $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-morfismo $B \xrightarrow{id_B} B$. Podemos formar a emergência $\mathcal{E}_{\mathcal{T}} = (\boldsymbol{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}}, U_{\mathcal{T}})$. Para toda emergência $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ com $|e_{\mathcal{A}}| \geq 2$, existe um único functor $F_{\mathcal{AT}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{T}}$. O functor envia todos os $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos ao objeto B e todos os $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismos à identidade id_B. Como $\mathcal{E}^r_{\mathcal{A}\to\mathcal{T}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{T}}, F_{\mathcal{AT}})$ é emergência relativa, segue-se que $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ é terminal.

7.1.8. Semi-emergência

Para introduzirmos o conceito de semi-emergência, faz-se necessário introduzir o conceito de functor generalized semi-underlying.

Definição 7.26. *Seja $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ constructo. Um functor generalized semi-underlying (GSU) $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ com domínio $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é um functor $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\colon \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$, $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\left(A \xrightarrow{f} A'\right) = \underline{B} \xrightarrow{f'} \underline{B'}$, em que $\underline{B}$ e $\underline{B'}$ são conjuntos e f' uma função, de modo que o functor $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ satisfaz $Im[U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}] = Im[U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$.*

É importante enfatizar que na definição acima, podemos ter $\underline{B} \neq \underline{A}$ e $\underline{B'} \neq \underline{A'}$, consequentemente, pode-se ter que f seja diferente de f'.

Definição 7.27. *Uma semi-emergência é uma tripla ordenada $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$, em que $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ é um constructo, $e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ é conjunto finito de suas operações internas e $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ é um functor (GSU) $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}\colon \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{Set}$. A ordem de $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ é dada por $|e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}|$.*

É extremamente importante notar a definição de semi-emergência é quase análoga a de emergência. No entanto, existe uma importante diferença entre elas: naquele caso, um dado $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos A é enviado por meio de $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ em algum conjunto em $Im[U_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}]$ e não necessariamente em seu conjunto subjacente $\underline{A}$. Este fato é interpretado no contexto de sistemas biológicos como “manter a matéria que compõe o sistemas” e perder o mapeamento entre as estruturas que nele ocorrem, como se espera num fenômeno emergente.

Ademais, semi-emergências são correlacionadas por meio de semi-homomorfismos.

Definição 7.28. *Sejam $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$ e $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}, U^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}})$ semi-emergências. Então $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ e $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ são semi-homomorfas se existir um functor $F\colon \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$, denominado semi-homomorfismo, tal que $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \circ F = U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$. Denotamos $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \simeq^s \mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ para denotar que $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ é semi-homomorfa a $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$.*

Proposição 7.14. *Assuma que as semi-emergências $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$ e $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}, U^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}})$ são semi-homomorfas. Considere que $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ é faithful. Então cada semi-homomorfismo é unicamente determinado por seus valores nos objetos.*

Prova: Sejam $G, F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ semi-homomorfismos, tal que para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-objetos A, $F(A) = G(A)$. Assim, para cada $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-morfismo $A \xrightarrow{f} A'$, temos que $F(A) = G(A) \xrightarrow{F(f)} F(A') = G(A')$ e $F(A) = G(A) \xrightarrow{G(f)} F(A') = G(A')$, em que $[U^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \circ F](f) = U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(f) = [U^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \circ G](f)$. Como $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ é faithful, segue-se que $F(f) = G(f)$ para todo morfismo, logo $F = G$.■

De modo análogo, podemos conceituar strong semi-homomorfismos para semi-emergências.

Definição 7.29. *Sejam $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}, U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}})$ e $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = (\boldsymbol{\mathcal{B}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}, U^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}})$ semi-emergências. Diz-se que $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ e $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ são strong semi-homomorfas se existir um functor $F: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$, denominado strong semi-homomorfismo, tal que $U^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \circ F = U^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ e $|e_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}| = |e_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}|$. Denotamos $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \simeq^s_{st} \mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ para denotar que $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ é strong semi-homomorfa a $\mathcal{E}^s_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$.*

Note-se que semi-isomorfismos e strong semi-isomorfismos podem ser definidos analogamente ao conceito de isomorfismo e strong isomorfismo, respectivamente. Denotam-se ambos como $\equiv^s$ e $\equiv^s_{st}$, respectivamente. Ademais, as definições se semi-emergência e semi-homomorfismo generalizam os conceitos de emergência e homomorfismo. Além disso, tais definições gerais preservam algumas propriedades interessantes.

Proposição 7.15. *As seguintes condições são satisfeitas:*

a. as relações $\simeq^s$ e $\simeq^s_{st}$ são ambas reflexivas e transitivas;
b. as relações $\equiv^s$ e $\equiv^s_{st}$ são ambas relações de equivalência.

Prova: Similar às Proposições 7.2 e 7.4. ■

7.1.9. Lei de Proporcionalidade Intrínseca

Assim como formalizamos e modelamos emergência utilizando conceitos usuais da Teoria de Categorias, da mesma maneira iremos proceder com a LPI. Recordemo-nos que o conceito de emergência é formalizado por meio de uma tripla na qual enfatizamos as operações internas de objetos contidos em uma categoria.

É importante notar que ao longo da exposição do conceito de categorias que são constructos, o que os define fundamentalmente é a natureza dos objetos que os compõem. Por exemplo, dizemos categoria de grupos, categorias de anéis, categoria de espaços vetoriais e assim por diante. Parece-nos que a característica fundamental dessas categorias usuais é o modo com que conjuntos são estruturados por suas operações. Disso decorreu, intuitivamente, a Definição 7.1, donde propomos um conjunto de operações internas $e_{\mathcal{A}}$ de uma categoria $\mathcal{A}$ que ocorre em todos os objetos da mesma. Ou seja, essencialmente $e_{\mathcal{A}} = e_A$ em que A é um $\mathcal{A}$-objeto. Sabemos que a estrutura interna $e_{\mathcal{A}}$ é um conjunto de operações finitas ${e_{\mathcal{A}}}^{(i)}$. Com essa noção básica em mente, podemos formalizar o que seja e_A.

Definição 7.30. *Seja $\mathcal{A}$ categoria, A um $\mathcal{A}$-objeto e $e_A = \{{e_A}^{(1)}, {e_A}^{(2)}, \ldots, {e_A}^{(n)}\}$ a estrutura interna de A. Uma operação interna ${e_A}^{(i)} \in e_A$ é uma relação binária sobre $\underline{A}$, tal que ${e_A}^{(i)} \subset \underline{A} \times \underline{A}$.*

Convencionamos que $\underline{A} = Set_A$. Note-se que por definição, a operação interna tem uma propriedade intrínseca: o fechamento. Além desta propriedade, uma operação interna pode ter outras propriedades. Esta observação implica que uma estrutura interna pode ser caracterizada tanto pelo número de operações internas dos objetos de uma categoria, como quanto pelo número de propriedades que estas operações possuem. De um modo geral, cada operação ${e_A}^{(i)}$ possui um conjunto de propriedades ${p_A}^{(i)} = \{{p_A}^{(i,1)}, {p_A}^{(i,2)}, \ldots, {p_A}^{(i,m)}\}$. O conjunto de todas as propriedades de todas as operações internas de um $\mathcal{A}$-objeto A é p_A. Com isso, a estrutura interna é definida por um conjunto de operações internas e por um conjunto de propriedades para cada um de suas operações internas.

Definição 7.31. *Seja $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ uma emergência. A lei de proporcionalidade intrínseca relativa à $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ é a terna ordenada $\mathcal{L}_{\mathcal{E}_{\mathcal{A}}} = (\mathcal{A}, e_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{A}})$ em que $p_{\mathcal{A}}$ é a união disjunta dos ${p_{\mathcal{A}}}^{(i)}$ e $e_{\mathcal{A}}$ é o conjunto das operações internas dos objetos de $\mathcal{A}$.*

Assim como se define o functor GU parcial, que “esquece” algumas operações internas entre emergência, também é possível que se defina um functor intrínseco GU, que “esquece” algumas propriedades entre emergências.

Definição 7.32. *Sejam* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *e* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *constructos. Uma emergência intrínseca* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ *é uma tripla ordenada* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}} = (\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, W_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}})$, *onde* $W_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *é o functor GU, não necessariamente faithful, e* $|p_{\mathcal{A}}| > |p_{\mathcal{B}}|$. *O functor* $W_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ *é denominado functor intrínseco GU.*

Note-se que, um functor GU pode ser parcial, intrínseco, ou ambos.

Proposição 7.16. *Sejam* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ *e* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{C}}}$ *emergências intrínsecas. Então* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{C}}}$ *é também uma emergência intrínseca.*

Prova: Sejam $W_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{B}}$ *e* $W_{\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{C}}}: \boldsymbol{\mathcal{B}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ *functores intrínsecos GU. Pela composta de functores temos que* $V_{\boldsymbol{\mathcal{B}}\boldsymbol{\mathcal{C}}} \circ V_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{B}}}: \boldsymbol{\mathcal{A}} \to \boldsymbol{\mathcal{C}}$ *é functor. Deste modo,* $|p_{\mathcal{A}}| > |p_{\mathcal{B}}|$ *e* $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{\mathcal{C}}}$ *é emergência intrínseca.*

Para tornar a discussão mais aplicável ao nosso intento de formalização de LPI para sistemas biológicos, iremos fortalecer a hipótese acerca do functor GU considerando que o mesmo seja faithful. Este é o functor underlying usual como apresentado no Capítulo 4. Disso decorre a possibilidade de escrever formalmente quais são as operações características por meio das transformações naturais. Esse procedimento é está presente no livro texto sobre categorias (ADÁMEK, HERRLICH e STRECKER, 1990, p. 83).

Como é possível definir cada operação interna em termos da transformação natural entre os functores cartesiano e underlying, podemos também proceder de modo análogo para desenvolver as propriedades destas operações internas: fechamento, comutatividade, identidade, associatividade, distributividade e elemento inverso.

7.2. Implicações biológicas

7.2.1. Interpretando diagramas de bloco abstratos

Nesta seção utilizaremos nosso modelo categórico de emergência para modelar e interpretar fenômenos biológicos. Vimos no Capítulo 5, que um mesmo sistema, por meio de sucessivas decomposições, pode gerar diversos diagramas de blocos abstratos com propriedades diferentes – ou seja, categorias com propriedades diferentes.

Para explicitar o modo com que procederemos, consideremos um sistema biológico na perspectiva individual[127] – isto é, iremos representar cada componente material do sistema – e decompô-lo na menor unidade funcional possível. Escolhamos arbitrariamente o átomo como unidade funcional mínima como critério de decomposição máxima de um sistema biológico.

Como bem o sabemos, o diagrama de bloco abstrato gerado pelo sistema biológico inicial irá compor uma categoria, como estabelecido na Definição 5.13. Nesta categoria $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, os objetos são produtos cartesianos de inputs e outputs de um sistema, de modo que cada agente biológico do sistema é representado por um conjunto $hom\left(M_i, M_j\right) = H$, em que $M_i, M_j \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$. Como $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ representa um sistema biológico completo, cada um dos seus objetos M_i, possui estrutura interna, ou seja, $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ é constructo.

Associando um functor GU a esta categoria, obteremos uma emergência $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}} = (\boldsymbol{\mathcal{M}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}, U_{\boldsymbol{\mathcal{M}}})$. O functor GU leva o constructo $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ à categoria $\boldsymbol{Set}$, que representa a decomposição máxima do sistema em átomos, ou qualquer outro critério de unidade funcional mínima que se desejar. Analogamente, um functor GU parcial leva o constructo $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ a outro constructo $\boldsymbol{\mathcal{M}_{n-k}}$, onde $|e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}| = n$, $\left|e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n-k}}\right| = k$ e $|e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}| > \left|e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}_{n-k}}\right|$. A emergência induzida por $\boldsymbol{\mathcal{M}_{n-k}}$ é denotada por $\mathcal{E}_{\boldsymbol{n-k}}$. Da mesma maneira, o functor GU intrínseco leva o constructo $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ a outro constructo $\boldsymbol{\mathcal{M}_{m-j}}$, em que $|p_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}| = m$, $\left|p_{\boldsymbol{\mathcal{M}}_{m-j}}\right| = j$ e $|p_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}| > \left|p_{\boldsymbol{\mathcal{M}}_{m-j}}\right|$. Analogamente, a emergência induzida por $\boldsymbol{\mathcal{M}_{m-j}}$ é denotada por $\mathcal{E}_{\boldsymbol{m-j}}$.

Como o procedimento de aplicação dos functores GU parcial e intrínseco em um constructo pode ser complexo, definimos a matriz de proporcionalidade intrínseca que sintetiza toda a informação acerca das operações internas e suas propriedades.

Definição 7.20. *Seja $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}} = (\boldsymbol{\mathcal{M}}, e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}, U_{\boldsymbol{\mathcal{M}}})$ uma emergência, $e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}} = \left\{e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}{}^{(1)}, e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}{}^{(2)}, \ldots, e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}{}^{(n)}\right\}$ sua estrutura interna e $p_{\boldsymbol{\mathcal{M}}} = \left\{p_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}{}^{(1)}, p_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}{}^{(2)}, \ldots, p_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}{}^{(m)}\right\}$ as propriedades que a estrutura interna possui. Uma matriz binária de proporcionalidade intrínseca é uma matriz $n \times m$, denotada $B_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}$, com entrada $b_{ij} = 1$ se a operação $e_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}{}^{(i)}$ tem a propriedade $p_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}{}^{(j)}$ e $b_{ij} = 0$ caso não tenha.*

A matriz $B_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}$ alberga toda a informação sobre modo com o qual o sistema opera em seus objetos. Ademais, sintetiza a operação característica da $\mathcal{L}_{\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{M}}}}$. Com estes dados em mente,

[127] Como explicitado no Capítulo 5.

podemos retornar ao assunto sobre a decomposição do sistema biológico. Com a construção dada acima, fica claro que cada decomposição corresponde ao efeito de um functor parcial ou intrínseco GU.

Se a decomposição muda o número de operações interna dos objetos, então dizemos que é uma decomposição vertical, pois estamos a hierarquizar o sistema de cima a baixo – o exemplo disso é como aquele apresentado na *Dugesia sp.* da Figura 8. A sequência decrescente de emergências $\mathcal{H}_{(\boldsymbol{n}),\boldsymbol{m}} = \{\mathcal{E}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}, \mathcal{E}_{\boldsymbol{n-1},\boldsymbol{m}}, \mathcal{E}_{\boldsymbol{n-2},\boldsymbol{m}}, \dots, \mathcal{E}_{\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{Set}\}$ – que são produto de decomposições sucessivas a partir de uma emergência plena (*i. e.*, com todas as operações, $\mathcal{E}_{\boldsymbol{n}}$) até a categoria $\boldsymbol{Set}$ – é denominada hierarquia vertical. Por outro lado, a sequência decrescente de emergências $\mathcal{H}_{\boldsymbol{n},(\boldsymbol{m})} = \{\mathcal{E}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}}, \mathcal{E}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m-1}}, \mathcal{E}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m-2}}, \dots, \mathcal{E}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{0}}\}$ é denominada hierarquia horizontal.

A solução para a modelagem das decomposições do sistema se dá pela consideração de que cada um das decomposições é, na verdade, uma emergência com operações que não estão presentes em nível hierárquicos inferiores. Por exemplo, o nível hierárquico de célula possui operações a mais que incluem e transcendem as operações em organelas, que constitui um nível inferior na hierarquia $\mathcal{H}_{(\boldsymbol{n}),\boldsymbol{m}}$. Além disso, uma decomposição que gera uma hierarquia horizontal possibilita que comparemos operações com propriedades diferentes. Isso permite que nossa análise de sistemas biológicos se torne muito precisa e minuciosa, uma vez que é possível compreender todos os aspectos algébricos da Lei de Proporcionalidade Intrínseca presente em todos substanciais.

7.3. Implicações metafísicas

7.3.1. Causalidade, emergência e LPI

A formalização da emergência e por consequência da LPI tem grande importância com relação ao assunto da causalidade. No Capítulo 2, enfatizamos algumas vezes que Ciência é o conhecimento pelas causas, e que a Biologia Moderna herdou do cartesianismo a redução das causas, quais sejam: a Causa Material e Eficiente, conquanto esta esteja incluída naquela. O modo com que formalizamos a emergência e a LPI permite que a Causa Formal retorne no âmbito da Biologia como critério de investigação científica. De fato, nossa teoria sobre emergência alberga pelo menos a Causa Material e Formal. A Causa Material se encontra na composição dos objetos da categoria $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ – que por consequência ocorre na emergência $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ –, na forma de $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$. A Causa Formal, por sua vez se encontra no modo com que se define a estrutura interna e suas propriedades, ou seja, a tripla $\mathcal{L}_{\mathcal{E}_{\mathcal{M}}}$ que determina exatamente as operações e as propriedades que agem sobre $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$.

O cenário metafísico que nosso modelo se insere estabelece que a matéria não informada não seja emergente – a isto corresponde a categoria $\boldsymbol{Set}$. Na medida em que avançamos numa hierarquia de todos substanciais vivos, novas propriedades emergem. Isso implica que novas operações e propriedades regem esta mesma matéria, sem a alterar sua natureza. A operacionalização da matéria de um modo específico – ou seja, numa modalidade existencial enquanto participante de um todo substancial –, corresponde à LPI. Note-se que o fenômeno da emergência está intrinsecamente associado à LPI, de fato, existe uma correspondência unívoca entre os mesmos.

É importante enfatizar que para cada todo substancial, existe também uma correspondência unívoca a uma categoria, fruto de uma decomposição por meio de um functor GU. Tal categoria, por sua vez, dá origem a uma emergência se houver uma estrutura interna em seus objetos. Dar sentido matemático ao Postulado 1 e às premissas metafísicas discutidas dos capítulo iniciais é o objetivo central desta tese.

Com isso, perguntamos: são Causas Eficiente e Final também formalizáveis? Para tanto, devemos nos reportar aos princípios gerais estabelecidos na Teoria de Sistemas Antecipatórios de Rosen (ROSEN, 1985/2012). Nessa teoria em particular, Rosen “ressuscitou”[128] a Causa Final e deu sentido à Causa Eficiente, em que categoria representam estados e functores particulares estados de transição. Como estas duas causas precisam de teorias inteiras para ser trabalhadas, iremos deixar tal intento para um trabalho futuro.

7.4. Considerações finais do capítulo

Neste capítulo formalizamos tanto o conceito de emergência quanto o de LPI. Além disso, estudamos as principais características que a emergência deve possuir de acordo com a análise de seu *status quaestionis*. Além disso, provamos alguns resultados a partir da emergência e LPI enquanto estrutura matemática.

[128] Este termo foi utilizado por um referee que fez uma análise de um de nossos artigos.

É importante enfatizar que a presente teoria biológica realoca no plano científico a Causa Formal como geradora de critério de investigação. Ademais, isso implica que devemos considerar sistemas biológicos como todos substanciais nos quais existe uma Lei de Proporcionalidade Intrínseca que determina o modo com que sua matéria deve se relacionar para dar a corporeidade ao ente.

CAPÍTULO 8. Considerações finais

8.1. Conclusões

Esta tese é de natureza multidisciplinar, uma vez que lança mão da Metafísica, da Matemática, da Física e da Biologia, para resolver um problema em comum: a emergência e a LPI.

É metafísica, pois discutimos abundantemente sobre a causalidade e seu papel no desenvolvimento destes conceitos. Em verdade, toda a modelagem da emergência só foi possível devido à sua análise e sua relação com a Causa Formal. Dito de outro modo, disso tiramos o fato de que “algo com mais operações” deve determinar “algo sem operações” (a matéria).

É matemática, pois utilizamos a Teoria de Categorias para formalizar e modelar emergência e LPI. Provamos alguns resultados que provêm diretamente destas formalizações. O principal dispositivo matemático que permitiu essa modelagem foi o functor underlying, generalizado por nós como functor GU. É esse o functor que relaciona dois níveis hierárquicos de modo a “esquecer” ou “perder” estruturas internas.

É física, pois construímos uma Teoria de Nocautes com o intuito de gerar um critério empírico – mais precisamente um critério com base no processo de difusão –, para determinar as unidades funcionais dos todos substanciais vivos. Este procedimento também permitiu que introduzíssemos na literatura uma medida de importância biológica por meio de uma medida de informação em diagrama de blocos e diagrama de blocos abstratos.

É biológica, pois nosso principal intuito foi entender e modelar todos substanciais vivos, ou seja, sistemas biológicos. O conhecimento tácito sobre fenômenos biológicos nos inspirou constantemente tanto na concepção deste trabalho quanto no modo com que formalizamos e modelamos a emergência. Adicionalmente, o fato da necessidade da emergência surgiu explicitamente da decomposição de um sistema vivo e pela constatação de que diferentes decomposições geram categorias com propriedades muito diferentes.

O principal objetivo desta tese foi formalizar o conceito de emergência e de LPI, como foi apresentado no Capítulo 7. Primeiramente, propomos realizar uma discussão sobre o motivo histórico pelo qual pouco se fala sobre este tema, assim como estabelecer um postulado básico que nos sirva de baliza para nosso intento maior de formalização (Capítulo

2). Em seguida, estabelecemos o *status quaestionis* sobre o assunto de modo a colocá-lo no seu contexto investigativo. Para isso, descrevemos as principais teorias emergentes que serviram como base para nossa própria definição de emergência (Capítulo 3). Com isso, apresentamos, operacionalizamos e provamos alguns resultados no âmbito da Teoria de Categorias (Capítulo 4). Do mesmo modo, apresentamos e desenvolvemos a Biologia Relacional como o crivo empírico de nossa teoria ao fenômeno físico; disso resultou uma medida de irredutibilidade e uma medida de importância de agentes biológicos (Capítulo 5). Na mesma esteira, construímos uma Teoria de Nocautes e a categorificamos. Em seguida, aplicamos tal teoria em um caso concreto de modo a gerar quantificadores biológicos em um estudo de caso ecológico (Capítulo 6).

Ao fim do Capítulo 7, abordamos novamente o tema da causalidade e sua relação com a Biologia. Na investigação proposta nesta tese, consideramos as Causas Material e Formal dos sistemas biológicos. É natural que se indague sobre as outras duas causas. Pretendemos tornar tais indagações trabalhos futuros na esteira que segue Rosen em seus Sistemas Antecipatórios.

8.2. Trabalhos publicados e submetidos

8.2.1. Publicados

1. *Oral Tolerance as a Complex Network Phenomenon* (2015): este trabalho, fruto de alguns resultados do mestrado, é uma aplicação direta da Teoria de Nocautes descrita nesta tese.
2. *Theoretical knock-outs on biological networks* (2016): neste artigo formalizamos e generalizamos a Teoria de Nocautes para grafos.
3. *Lyapunov exponent for Lipschitz maps* (2018): neste trabalho propomos a definição do Expoente de Lyapunov para mapas Lipschitz que não são necessariamente diferenciáveis. Ademais, este resultado expande as possíveis aplicações na Teoria de Sistemas Dinâmicos. Este artigo se relaciona com o estudo da tese, pois foi fruto da nossa investigação sobre a Teoria de Matrizes Não Negativas.

8.2.2. Submetidos

1. *Species knock-outs on a plant-pollinator network: a survey on a Neotropical pollinating butterfly ensemble* (2018): este é o trabalho de estudo de caso que apresentamos como exemplo de aplicação da Teoria de Nocautes (Capítulo 6).
2. *On Emergence and Constructs* (2018): este é o artigo onde apresentamos parte de nossos resultados matemáticos a partir da definição de emergência. Com efeito, explicitamos sua aplicabilidade em sistemas biológicos.

8.3. Trabalhos em curso

Estamos a trabalhar em dois artigos matemáticos e dois artigos de aplicação, respectivamente:

1. *The categorification of the Intrinsic Proportionality Law*: neste trabalho formalizamos a LPI e provamos mais resultados no que concerne a sua modelagem de todos substanciais vivos.
2. *On emergence and adjoints*: neste trabalho, provamos mais resultados no que toca à definição inicial de emergência enfatizando sua relação com functores adjuntos.
3. *Knock-outs on a cancer network*: este trabalho é feito em colaboração com o Prof. Dr. Giovani Marino Favero. Nele pretendemos modelar uma neoplasia genérica de modo a conhecer qual o papel do sistema imune no que concernem aos processos de supressão e crescimento do tumor.
4. *Liver inflammation as a complex network phenomenon:* neste trabalho modelamos a relação que o fígado tem com o intestino delgado de modo a estabelecer as relações entre órgãos alvo e fonte de processos inflamatórios. Faremos isso utilizando diagramas de bloco abstratos, uma vez que as interações são de natureza multivariada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 6ª. ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2012.

ADÁMEK, J.; HERRLICH, H.; STRECKER, G. E. **Abstract and Concrete Categories:** the joy of cats. New York: John Wiley and Sons, 1990.

ADLER, M. J. **Aristóteles para todos:** uma introdução simples a um pensamento complexo. Tradução de Pedro Sette-Câmara. São Paulo: É-Realizações, 2014.

ALEXANDER, S. **Space, Time, and Deity**. 1ª. ed. New York: The Humanities Press, v. II, 1920.

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **Chaos:** an Introduction to Dynamical Systems. New York: Springer, 1996.

ANDERSON, S. et al. Floral scents in butterfly-pollinated plants: possible convergence in chemical composition. **Bot. J. of the Linn. Soc.**, v. 140, p. 129-153, 2002.

ANISZEWSKA, D.; RYBACZUK, M. Lyapunov type stability and Lyapunov exponent for exemplary multiplicative dynamical systems. **Nonlinear Dynamics**, v. 54, p. 345-354, 2008.

AQUINO, T. **Comentário à Metafísica de Aristóteles I-IV**. Campinas: Vide Editorial, v. 1, 1272/2016.

ARISTÓTELES. **Física I-II**. Tradução de Lucas Angioni. Campinas: Editora da Unicamp, (335 a 323 a. C.)/2009.

ARISTÓTELES. **Órganon:** Categorias, Da interpretação, Analíticos anteriores, Analíticos posteriores, Tópicos, Refutações Sofísticas. Tradução de Edson Bini. 2ª. ed. Bauru: Edipro, (335 a 323 a. C.)/2010.

ARISTÓTELES. **Poética**. Tradução de Edson Bini. São Paulo: Edipro, (335 a 323 a. C.)/2011.

ARISTÓTELES. **Metafísica**. Tradução de Edson Bini. 2ª. ed. São Paulo: Edipro, (335 a 323 a. C.)/2012.

ARISTÓTELES. **Retórica**. Tradução de Edson Bini. 1ª. ed. São Paulo: Edipro, (335 a 323 a. C.)/2013.

BAAS, N. A. Hyperestructures as Abstract Matter. **Advances in Complex Sciences**, v. 9, p. 157-182, 2006. ISSN 3.

BAEZ, J. C. Categorification. **Arxiv**, 1998.

BAEZ, J. C. Higher-dimensional Algebra and Planck-Scale Physics. **Arxiv**, 1999.

BAEZ, J. C.; DOLAN, J. Higher-dimensional Algebra and Topological Quantum Field Theory. **Arxiv**, 2004.

BALLANTYNE, G.; BALDOCK, K. C. R.; WILLMER, P. G. Constructing more informative plant-pollinator networks: visitation and pollen deposition networks in a hearthland plant community. **Proc. R. Soc. B**, v. 282, p. 20151130, 2018.

BARREIRA, L.; SILVA, C. Lyapunov exponents for continuous transformations and dimension theory. **Discrete Continuous Dynamical Systems**, v. 13, p. 469-490, 2005.

BASCOMPTE, J. et al. The nested assembly of plant-animal mutualistic networks. **Proc. Nat. Acad. Sci. USA**, v. 100, p. 9383-9387, 2003.

BASCOMPTE, J.; JORDANO, P. Plant-animal mutualistic networks: architecture of biodiversity. **Annu. Rev. Ecol. Evol. Syst.**, v. 38, p. 567-593, 2007.

BEJAN, A. Life and evolution as physics. **Communicative & Integrative Biology**, v. 16, p. e1172159, 2016.

BEJAN, A. Evolution in thermodynamics. **Applied Physics Review**, v. 4, p. 011305, 2017.

BERTALANFFY, L. **General System Theory:** Foundations, Development, Applications. New York: George Braziller, 1968.

BLÜTHGEN, N. Why network analysis is often disconnected from community ecology: a critique and an ecologist's guide. **Basic. Appl. Ecol.**, v. 11, p. 185-195, 2010.

BOCCALETTI, D. **Galileo and the Equations of Motion**. London: Springer, 2016.

BORCH, J. et al. Plant-pollinator networks: adding the pollinator's perspective. **Ecol. Lett.**, v. 12, p. 409-419, 2009.

BROAD, C. D. **The Mind and Its Place in Nature**. New York: Harcourt, Brace & Company, INC., 1925.

BROOK, B. W.; SODHI, N. S.; BRADSHAW, C. J. Synergies among extinction drivers under global change. **Trends in Ecology & Evolution**, v. 23, p. 453-460, 2008.

BROWN, K. S. Diversity, disturbance, and sustainable use of neotropical forests: insects as indicators for conservation monitoring. **J. of Insec. Cons.**, v. 1, p. 25-42, 1997.

CALDERÓN, Á. **Logica Mayor**. [S.l.]: Ainda no prelo.

CAMPBELL, C. et al. Topology of plant-pollinator network that are vulnerable to collapse from species extinction. **Physics Review E**, v. 86, p. 021924, 2012.

CARVALHO, O. **Aristóteles em Nova Perspectiva:** Introdução à Teoria dos Quatro Discursos. 2ª. ed. Campinas: Vide Editorial, 2013.

CASTON, V. Epiphenomenalism, Ancient and Modern. **The Philosophical Review**, 106, July 1997. 309-363.

CHALMERS, D. J. Strong and Weak Emergence. In: CLAYTON, P.; DAVIES, P. **The Re-Emergence of Emergence:** The emergentist hypothesis from Science to Religion. Oxford: Oxford University Press, 2006. Cap. 12, p. 244-254.

CHRONIC DISEASES RESOURCES ONLINE. Chronic diseases resources online. **smooth muscle cells**, 2018. Disponivel em:

<http://www.cdro.com.au/public/search/list/details?item=muscle-cell-02>. Acesso em: 28 março 2018.

CULL, P. The mathematical biophysics of Nicolas Rashevsky. **BioSystems**, v. 88, p. 178-184, 2007.

CZARDI, G.; NEPUSZ, T. The igraph software package for complex network research. **Interjournal**, Complex Systems, 2006. 1695. URL: http://igraph.org.

DABROWSKI, A. Estimation of the largest Lyapunov exponent from the pertubation vector and its derivative dot product. **Nonlinear Dynamics**, v. 67, p. 283-291, 2012.

DESCARTES, R. **Discurso do Método**. 4ª. ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 1637/2009.

DESIGNUA. Vector - Enterocytes. intestinal absorptive cells. Intestinal epithelial cell with microvilli. **123RF**, 2018. Disponivel em: <https://www.123rf.com>. Acesso em: 28 março 2018.

DICKS, L. V.; CORBET, S. A.; PYWELL, R. F. Compartimentalization in plant-insect flower visitor webs. **J. Anim. Ecol.**, v. 71, p. 32-43, 2002.

DWYER, W. G. et al. Homotopy Limit Functors on Model Categories and Homotopical Categories. **AMS**, p. 181, 2004.

EILENBERG, S.; STEENROD, N. **Foundations of Algebraic Topology**. New Jersey: Princeton University Press, 1952.

FAEGRI, K.; VAN DER PIJL, L. **Principles of Pollination Ecology**. Oxford: Oxford University Press, 1979.

FAUTH, J. E. et al. Simplifying the jargon of community ecology: a conceptual approach. **Amer. Nat.**, v. 147, p. 282-286, 1996.

FEDERER, H. **Geometric Measure Theory**. Berlin: Springer, 1996.

FODOR, J. A. Special Science (Or: the disunity of Science as a working hypothesis). **Synthese**, Dordrecht, v. 28, p. 97-115, 1974.

GARRATT, M. P. D. et al. The identity of crop pollinators helps target conservation for improved ecosystem services. **Biol. Conserv.**, v. 169, p. 128-135, 2014.

GRANT, E. **The Foundations of Modern Science in The Middle Ages:** their religious, institutional, and intellectual contexts. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

GROTHENDIECK, A. **The cohomology theory of abstract algebraic varities**. Processings of the international congress of Mathematicians. Cambridge: Cambridge University Press. 1958. p. 103-118.

HALE, E. Triplobçastic animals. **Pinterest**, 2018. Disponivel em: <https://br.pinterest.com>. Acesso em: 28 março 2018.

HEINONEN, J. **Lectures at the 14th Jykaskyla School**. Lectures on Lipschitz Analysis. Jyvaskyla: [s.n.]. 2004.

HU, D. L.; LIU, X. B.; CHEN, W. Moment Lyapunov exponent and stochastic stability of binary airfoil under combined harmonic and Gaussian white noise excitation. **Nonlinear Dynamics**, v. 89, p. 239-552, 2017.

HUMPHREYS, P. How Properties Emerge. **Philosophy of Science**, Chicago, v. 64, p. 1-17, March 1997.

JORDANO, P.; BASCOMPTE, J.; OLESEN, J. M. The ecological consequences of complex topology and nested structure in pollination webs. In: WASER, N. M.; OLLERTON, J. **Plant-pollinator intections, from specialization to generalization**. Chicago: University of Chicago, 2006. p. 173-199.

KUNZE, M. On Lyapunov exponents for non-smooth dynamical systems with and application to a pendulum with dry friction. **Journal of Dynamical Differential Equations**, v. 12, p. 31-116, 2000.

LA GUARDIA, G. G.; MIRANDA, P. J. Lyapunov exponent for Lupschitz maps. **Nonlinear Dynamics**, v. 92, p. 1217-1224, 2018.

LAMBEK, J.; SCOTT, P. J. Reflections on the categorical foundations of mathematics: foundational theories of classical and constructive mathematics. **The Western Ontario Series in Philosophy of Science**, v. 76, p. 171-186, 2011.

LAWVERE, F. M. **Functorial Semantics of Algebraic Theory**. Proceedings of the national academy of Sciences of the U.S.A. [S.l.]: [s.n.]. 1963. p. 869-872.

LEDRAPPIER, F. Some relations between dimension and Lyapunov exponents. **Communication Mathematics**, v. 81, p. 229-238, 1981.

LEWES, G. H. **Problems of Life and Mind**. London: Kegan Paul, Trench, Turbner, and Co, v. 2, 1875.

LLOYD, G. E. R. **Early Greek Science, Thales to Aristotle**. London: Chatto & Windus, 1970.

LOUIE, A. H. Robert Rosen's Anticipatory system. **Foresight**, 2010. 18-29.

LOUIE, A. H. Essays on More Than Life Itself. **Axiomathes**, 2011. ISSN https://doi.org/10.1007/s10516-011-9153-0.

LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. **Int. J. Control**, v. 55, p. 531-773, 1992.

MAACK, R. Preliminary notes about weather, soil, and vegetation of the Paraná State. Curitiba: Arquivos de Biologia, 1948. p. 102-200.

MACLANE, S. **Homology**. Berlin: Springer-Verlag, 1963.

MACLANE, S. **Categories for the Working Mathematicians**. 2ª. ed. New York: Springer-Verlag, 1998.

MAGNO, A. **Opera Omnia**. Paris: Borgnet, v. III, 1256/1890.

MAGURRAN, A. E. **Ecological Diversity and its measurements**. Princeton: Princeton University Press, 2004.

MARTELLI, M. **Chaos:** Introduction to Discrete Dynamical Systems an Chaos. [S.l.]: Wiley, Hoboken, 1999.

MATURANA, H. R.; VARELA, F. J. **Autopoiesis and Cognition:** the realization of the living. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1980.

MEMMOTT, J. The structure of a plant-pollinator food web. **Ecol. Lett.**, v. 2, p. 276-280, 1999.

MIEGHEM, P. V. **Graph Spectra for Complex Networks**. Combridge: Combridge University Press, 2011.

MILL, J. S. **A System of Logic, Ratiocinative and Inductive being connected view of the principles of evidence and methods of scientific investigation**. 8ª. ed. New York: Routledge & Kegan Paul, v. I, 1843/1974.

MIRANDA, P. J. et al. Oral Tolerance as a complex network phenomenon. **PLoS ONE**, v. 10, p. e0130762, 2015.

MIRANDA, P. J. et al. Theoretical knock-outs on biological networks. **Journal of Theoretical Biology**, v. 403, p. 38-44, 2016.

MOGGI, E. Notions of Computations and Monads. **Information Computation**, v. 93, p. 55-92, 1991.

NERY, J. C. **Evolução do Pensamento Antigo**. Porto Alegre: Barcello, Bertaso & Cia, 1936.

NEWTON, I. **Philosophiae Naturallis Principia Mathematica**. London: Macmillan and Co., 1726/1871.

NOUGUÉ, C. **Suma Gramatical da Língua Portuguesa:** gramática geral e avançada. 1ª. ed. São Paulo: É-Realizações, 2015.

O'CONNOR, T.; WONG, H. Y. The Metaphysics of Emergence. **NOÛS**, Malden, v. 39, p. 658-678, 2005.

O'CONNOR, T.; WONG, H. Y. Emergent Properties. **Site da Stanford Encyclopedia of Philosophy**, 2015. Disponivel em: <https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/properties-emergent/>. Acesso em: 16 Fevereiro 2018.

OLESEN, J. M. et al. The modularity of pollination networks. **PNAS**, v. 104, p. 19891-96, 2007.

OLESEN, J. M.; JORDANO, P. Geographic patterns in plant-pollinator mutualistic networks. **Ecology**, v. 83, p. 2416-2424, 2002.

OTT, E.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. Controlling chaos. **Physics Review Letters**, v. 64, p. 1196, 1990.

PATTANAYAK, A. K. Lyapunov exponents, entropy production, and decoherence. **Physics Review Letters**, v. 83, p. 4526, 1999.

PENA, A. Bioquímica da Célula. **Blogspot**, 2011. Disponivel em: <http://biochemistryofcell.blogspot.com.br>. Acesso em: 28 março 2018.

PETANIDOU, T. et al. Long-term ebservation of a pollination network: fluctuation in species and inteactions, relative invariance of network structure and implications for estimates of specialization. **Ecol. Lett.**, v. 11, p. 564-575, 2008.

PINTEREST. Tipos Celulares ideas. **Pinterest**, 2018. Disponivel em: <https://br.pinterest.com>. Acesso em: 28 março 2018.

PLATÃO. **Diálogos I:** Teeteto (ou Do conhecimento), Sofista (ou Do ser), Protágoras (ou Sofistas). Bauru: Edipro, 385 a. C./2007.

PONS, P.; LATAPY, M. Computing communities in large networks using random walks. **Journal of Graphs Algorithms and Applications**, v. 10, p. 191-218, 2006.

POPPER, K. R.; ECCLES, J. C. **The Self and the Brain**. New York: Springer International, 1977.

PRELLER, A.; J, L. Free compact 2-categories. **Mathematical structures of Computational Science**, p. 309-340, 2007.

QUORA. What are the parts of the neuron and their function? **Quora**, 2016. Disponivel em: <https://www.quora.com/What-are-the-parts-of-the-neuron-and-their-function>. Acesso em: 28 março 2018.

RADEMACHER, H. Uber partielle und totale Differenzier, and decoherence. **I. Math. Ann.**, v. 79, p. 340-359, 1919.

RASHEVSKY, N. **Mathematical Biophysics**. Chicago: Universiy of Chicago Press, 1954.

ROSEN, R. A relational theory of biological system. **Bulletin of Mathematical Bioiphysics**, v. 20, p. 245-260, 1958A.

ROSEN, R. The representation of Biological system from the standpoint of the theory of categories. **Bulletin of Mathematical Biophysics**, v. 20, 1958B.

ROSEN, R. A relational theory of biological systems II. **Bulletin of Mathematical Biophysics**, v. 21, 1959.

ROSEN, R. **Anticipatory Systems**. 2ª. ed. New York: Springer, v. I, 1985/2012.

SADRI, S.; WU, S. Q. Modified Lyapunov exponent, new measure of dynamics. **Nonlinear Dynamics**, v. 78, p. 2731-2750, 2014.

SANTAMARIA, L.; RODRIGUEZ-GIRONÊS, M. A. Linkage rules for plant-pollinator networks: trait complementarity of exploitation barriers? **PLoS Biol.**, v. 5, p. e31, 2007.

SANTOS, M. F. **O Um e o Múltiplo em Platão:** com "Parmênides" diálogo de Platão. 1ª. ed. São Paulo: LOGOS, 1958.

SANTOS, M. F. **A Sabedoria das Leis Eternas:** Enciclopédia das Ciências Filosóficas. São Paulo: É-Realizações, 2001.

SCHERER, D. C. **A raiz antitomista da modernidade filosófica**. 1ª. ed. Formosa: Edicões Santo Tomás, 2018.

SENETA, E. **Non-Negative Matrices and Markov Chains**. London: George Allen & Unwin Ltd, 1973.

SHELDRAKE, R. **Uma Nova Ciência da Vida:** a hipótese da causação formativa e os problemas não resolvidos da Biologia. Tradução de Marcello Borges. 1ª. ed. São Paulo: Editora Cultrix, 2013.

SILVA, I. Biologia. **SlideShare**, 2012. Disponivel em: <https://pt.slideshare.net/maristasegundod/plateomintos>. Acesso em: 28 março 2018.

SOARES, R. G. S.; FERREIRA, P. A.; LOPES, L. E. Can plant-pollinator network metrics indicate enviromental quality? **Ecol. Ind.**, v. 78, p. 361-370, 2017.

SOUZA, V. C.; LORENZI, H. **Botânica Sistemática:** guia ilustrado para identificação das famílias de Fanerógamas nativas e exóticas no Brasil, baseado em APG III. 3ª. ed. Nova Odessa: Instituto Planrarum, 2012.

SPANNER, D. C. Biological Systems and the Principle of Minimum Entropy Production. **Nature**, London, v. 172, p. 1094-5, December 1953.

SPIESMAN, B. J.; INOUYE, B. D. Habitat loss alters the architecture o plant-pollinator interaction networks. **Ecology**, v. 94, p. 2688-2696, 2013.

STEEN, M. **Graph and Complex Networks**. [S.l.]: Maarten van Steen, 2010.

STORER, T. I. et al. **Zoologia Geral**. 6ª. ed. São Paulo: Editora Nacional, v. VIII, 1989.

SZABO, A.; OSTLUND, N. S. **Modern Quantum Chemistry:** introduction fo Advanced Electronic Structure Theory. 1ª. ed. New York: McGraw-Hill, 1996.

TEAM R DEVELOPMENT CORE. A language and environment for statistical computing, Vienna, Austria, 2008. URL: http://www.R-project.org.

THANE, B. GRADE 12 BIOLOGY (SBI4U) MACROMOLECULES. **Slideshare**, 2015. Disponivel em: <http://slideplayer.com>. Acesso em: 28 março 2018.

VÁZQUEZ, D. P.; AIZEN, M. A. Asymetric specialization: a pervasive feature of plant-pollinator interactions. **Ecology**, v. 85, p. 1251-1257, 2004.

WASER, N. M.; OLLERTON, J. **Plant-pollinator interactions:** from specialization to generalization. Chicago: University of Chicago, 2006.

WIKIPEDIA. Flame Cell. **Wikipedia**, 2017. Disponivel em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Flame_cell>. Acesso em: 28 março 2018.

WIKIPEDIA. Intestinal epithelium. **Wikipedia**, 2018. Disponivel em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Intestinal_epithelium>. Acesso em: 28 março 2018.

WILLMER, P. G. **Pollination and Floral Ecology**. Princeton: Princeton University Press, 2011.

WORLDBUILDING. Feasibility of giant flatworm people. **Site da Worldbuilding**, 2016. Disponivel em: <https://worldbuilding.stackexchange.com/>. Acesso em: 28 março 2018.

YOUNG, L. S. Dimension, entropy and Lyapunov exponents. **Ergodic Theory Dynamical Systems**, v. 2, p. 109-124, 1982.

ANEXO A. Definições e notações matemáticas

A.1. Noções e notações básicas

1. Dado X conjunto, $|X|$ denota sua cardinalidade.
2. Se n é um número inteiro, utilizaremos a seguinte notação: $[1, n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $[i, n] = \{i, i+1, \ldots, n\}$.
3. Para qualquer número real x, utilizaremos a notação usual de função solo e teto, respectivamente: $\lfloor x \rfloor = max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ e $\lceil x \rceil = min\{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$.
4. A família $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ de subconjuntos de $X_i \subseteq X$ de um conjunto X é uma partição de X se $X = \bigcup_{i \in \{1,k\}} X_i$ e $X_i \cap X_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$.
5. Sejam X e Y conjuntos, a diferença simétrica entre eles é definida como $X \,\Delta\, Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$, onde $(X \backslash Y) = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$.

A.2. Teoria de Classes

1. Paradoxo de Russel: se $\mathcal{U}$ fosse o conjunto de todos os conjuntos, então um subconjunto $A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \; e \; x \notin x\}$ de $\mathcal{U}$ teria a propriedade $A \in A \iff A \notin A$. Isso implica que não é possível construir um conjunto de todos os conjuntos.
2. Uma classe é uma coleção tal que cada um de seus membros é um conjunto. Para cada propriedade P, é possível formar a classe de todos os conjuntos com esta propriedade.
3. A maior classe é a classe de todos os conjuntos. Esta classe é denominada Universo $\mathcal{U}$. Qualquer outra classe é uma subcoleção de $\mathcal{U}$. Do mesmo modo que se opera com conjuntos, é possível operar com classes. Sejam A e B classes, podemos operar $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times A$, e assim por diante. Com isso, não existem restrições ao definirmos funções, relações, equivalências, etc., entre classes.
4. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são classes, então a n-upla $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ também é classe.

5. Todo conjunto é uma classe. Equivalentemente, todo membro de um conjunto é um conjunto. Isso implica que os conjuntos são classes especiais. Classes que são conjuntos são denominadas classes impróprias ou classes pequenas.
6. Classes que não são conjuntos são denominadas classes próprias ou classes grandes. Essas classes não podem ser membros de qualquer outra classe.
7. Segue naturalmente que – formulado em forma axiomática (Axioma da Realocação[129]) – não existe sobrejeção de um conjunto a uma classe própria.
8. Um problema semelhante ao Paradoxo de Russel surgirá na medida em que tentarmos definir a classe de todas as classes próprias. Para resolver este problema, define-se o conceito de conglomerado.
9. O conceito de conglomerado é criado para lidar com coleções grandes de classes. Em particular, requer-se que um conglomerado:
   i. Toda classe é conglomerado.
   ii. Para toda propriedade *P* é possível formar o conglomerado de todas as classes que têm a propriedade *P*.
   iii. Conglomerados estão sujeitos às operações usuais de conjuntos (união, interseção, produto cartesiano, relações, etc.).
10. Assim, é possível compor o conglomerado de todas as classes. Conglomerados que são classes, são denominados conglomerados impróprios ou pequenos; conglomerados que não são classe são denominados conglomerados impróprio ou grandes.

[129] Tradução livre de *Axiom of Replacement*.

ANEXO B. Algoritmos

B.1. Algoritmo algébrico para o cálculo do vetor estacionário de fluxo

Algoritmo implementado em R (TEAM R DEVELOPMENT CORE, 2008) por meio do pacote Igraph (SZABO e OSTLUND, 1996):

```
library(igraph, Matrix) # Leitura dos pacotes Igraph e Matrix (pacote básico do R).
A<-as.matrix(get.adjacency(g)) # Seja g um objeto-grafo, esta operação abstrai a matriz de adjacência de g.
D<-degree(mg, mode=c("out")) # Esta operação extrai o grau de saída de cada vértice de g e o associa a um vetor D.
J<-dim(A)[1]
I<-dim(A)[1]
for(i in 1:I){v<-D[i];
        for(j in 1:J){A[i,j]<-A[i,j]/v}
        }
mysub <- function(x) {sub(",",".",x)} # Função que muda o separador decimal.
mydata <- (apply(A, 2, mysub )) # Aplicação de função de mudança de separador decimal.
rownames(A)<-NULL
colnames(A)<-NULL
A[is.na(A)]<-0
A<-t(A) # Com isso, obtem-se a matriz de transição A.
##
e<-eigen(A) # Cálculo dos autovalores e autovetores da matriz A.
v<-e$vectors[,1] # Extraímos o autovetor do autovalor 1.
write.table(v, file="v.dat", sep=" ", dec=",")
av<-abs(v) # Tomamos o módulo dos coeficientes do autovetor v.
cv<-sum(av) # Somamos todas os coeficientes de av.
c<-1/cv # Calculamos o coeficiente de normalização de cv.
vc<-c*av # Normalizamos o autovetor v.
vc<-as.matrix(vc)
nam<-V(g)$name # Rotulamos os fluxo obtidos com vc a partir do rótulo dos vértices de g.
nam<-as.matrix(nam)
fa<-data.frame(nam, vc) # Criamos uma tabela com os valores dos fluxo locais e seus rótulos.
```

B.2. Algoritmo numérico para o cálculo do vetor estacionário de fluxo

```
# Sejam L número de amostragens e T tempo computacional da caminhada.
library(igraph, Matrix); imuno<-read.table(file="m.imuno.dat"); g<-graph.data.frame(data, directed=TRUE)
K<-abs(V(G))
nomes<-V(g)$name
matriz<-as.matrix(V(g)$name)
freqs<-as.matrix(V(g)$name)
for(k in 1:K){KO<-nomes[k]; gko<-delete.vertices(g, c(KO));
        matriz<-cbind(matriz, c(V(gko)$name));{
L<-1000;
for(l in 1:L){W<-1; T<-1000; B<-c(); A<-vector(length=W, mode="numeric");
        imuno<-read.table(file="m.imuno.dat");g<-graph.data.frame(imuno, directed=TRUE);
for(i in 1:W){A[i]<-1}
for(t in 1:T){W<-length(A);{
       for(i in 1:W){
              if(degree(gko, mode=c("out"), A[i])==0){A[i]<-A[i];}
              else{vizinhos<-neighbors(gko, A[i], mode="out");
                 if(length(vizinhos)==1){A[i]<-vizinhos[1];}
                                 else{A[i]<-sample(vizinhos,1)}}}
       }; A<-c(A,1)}; if(l==1){B<-c(B, A); write.table(B, file="B.dat")}
               else{B<-c(read.table(file="B.dat")); B<-c(B$x, A);
               write.table(B, file="B.dat")}; B<-c(); A<-c()};
N<-33;
C<-vector(length=N, mode="numeric");
B<-c(read.table(file="B.dat"));
B<-B$x;
for(n in 1:N){N[n]<-n ; S<-length(B);
for(i in 1:S){
        if(B[i]==N[n]){C[n]<-C[n]+1}
        else(C[n]<-C[n]+0)
        }};
C[1]<-0;
f<-C/sum(C); freqs<-cbind(freqs, c(f))}}
freqs<-freqs[,-1]
matriz<-matriz[-33,-1]; write.table(freqs, file="freqsKO.dat", sep=" ", dec=",");
write.table(matriz, file="nomesKO.dat", sep=" ", dec=",")
```

ANEXO C. Dinâmica não linear

C.1. Expoente de Lyapunov para mapas Lipschitz

A Teoria de Sistemas Dinâmica é extensivamente investigada na literatura (ANISZEWSKA e RYBACZUK, 2008) (DABROWSKI, 2012) (HU, LIU e CHEN, 2017) (LEDRAPPIER, 1981) (LYAPUNOV, 1992) (OTT, GREBOGI e YORKE, 1990) (PATTANAYAK, 1999) (SADRI e WU, 2014) (YOUNG, 1982). Lyapunov, em seu trabalho surpreendente, realizou diversas contribuições na investigação acerca da estabilidade do movimento (LYAPUNOV, 1992). De fato, este autor caracterizou amplamente a dinâmica de sistemas. Ademais, os trabalhos acima citados lidaram com investigações neste âmbito, em especial da computação dos expoentes de Lyapunov de sistemas especiais de modo a caracterizá-los.

A principal colaboração deste anexo é propor uma definição de Expoente de Lyapunov para mapas Lipschitz assim como mostrar que estes resultados são válidos para sistemas dinâmicos discretos usuais. Além disso, como mapas Lipschitz não são necessariamente diferenciáveis, ou seja, a existência o limite não é garantida e isso compreende uma maior gama de mapas. Um mapa Lipschitz $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições: para todo $x, y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$, tem-se $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq c$, para algum $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > 0$. Enfatizamos que o presente resultado expande a teoria de sistemas dinâmicos discretos.

Outra vantagem de se trabalhar com mapas Lipschitz, ao invés de mapas diferenciáveis, é fato da não necessidade de se calcular as derivadas de um mapa a fim de se definir seus pontos fixos, sejam atratores ou repulsores. De fato, só pelas características do mapa – seja Lipschitz ou Lipschitz reverso –, é possível estabelecer quais sejam seus atratores e repulsores. Assim, nosso método é mais fácil de ser aplicado quando comparado ao método padrão que lida diretamente com derivadas.

Algumas generalizações do Expoente de Lyapunov definidos sobre mapas contínuos estão presentes na literatura (BARREIRA e SILVA, 2005) (KUNZE, 2000). Em especial em Kunze (2000), o autor considerou o expoente de Lyapunov para sistemas não contínuos para modelar a dinâmica do pêndulo com fricção seca. Complementarmente, com Barreira e Silva (2005), os autores definiram o expoente de Lyapunov em termos de mapas contínuos. No entanto, tal definição é um pouco difícil de ser aplicada na prática. Entrementes, nossa proposta é simples e fácil de ser aplicada de modo a caracterizar atratores, repulsores e expoentes de Lyapunov. Enfatizamos que o número de Lyapunov e todos os conceitos usuais da teoria de sistemas não lineares, para casos discretos, vêm naturalmente de nossas considerações (LA GUARDIA e MIRANDA, 2018).

C.2. Preliminares

Nesta seção apresentaremos resultados e conceitos já conhecidos na literatura, mas que são necessários para o desenvolvimento de nossas considerações. Convencionaremos ao longo desta nota denotar $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e $\mathbb{R}^m$ o espaço vetorial m-dimensional sobre $\mathbb{R}$. Enfatizamos que estamos a considerar apenas sistemas dinâmicos discretos.

Como é usual, uma função cujo domínio é igual ao contradomínio é denominada mapa. Seja $f: A \rightarrow A$ um mapa e $x \in A$. Uma órbita $\mathcal{O}_x$ de x sob f é o conjunto de pontos $\mathcal{O}_x = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x)\}$, em que $f^2(x) = f(f(x))$ e assim, iterativamente. Se existir um ponto p no domínio de f tal que $f(p) = p$, então p é denominado ponto fixo de f.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um mapa. Diz-se que f é mapa Lipschitz se existir uma constante $c \in \mathbb{R}$, com $c > 0$ (denominado constante Lipschitz de f), tal que para todo $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$, em que $|\ldots|$ denota o valor absoluto em $\mathbb{R}$. Em outras palavras, se $x \neq y$, então $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq c$, ou seja, o quociente é limitado. Se para todo $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < c|x - y|$, então f é estritamente mapa Lipschitz.

Dado que $x \in \mathbb{R}$, a vizinhança épsilon N_ϵ de x é definida como $N_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}: |x - y| < \epsilon\}$. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mapa e $x \in \mathbb{R}$, diz-se que f é localmente Lipschitz em x se existir uma ϵ-vizinhança $N_\epsilon(x)$ de x tal que a f restrita a $N_\epsilon(x)$ é Lipschitz. Com isso, introduzimos na literatura o conceito de mapa *Lipschitz reversa*. Est conceito será utilizado a fim de caracterizar sources.

Definição C.1. *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um mapa. Diz-se que f é Lipschitz reversa (LR) se existir uma constante $c \in \mathbb{R}$, com $c > 0$ (denominada constante Lipschitz reversa de f), tal que $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$. Similarmente, f é denominada localmente Lipschitz reversa em x se existir uma ϵ-vizinhança $N_\epsilon(x)$ de x tal que a f restrita a $N_\epsilon(x)$ é Lipschitz reversa.*

Definição C.2. *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um mapa e p um ponto fixo de f. Diz-se que p é sink (ou seja, ponto fixo atrator) se existir um* $\epsilon > 0$ *tal que, para todo* $x \in N_\epsilon(p)$*,* $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = p$*. Por outro lado, se todos os pontos forem suficientemente próximos a p são repelidos do mesmo, então p é denominado source. Em outras palavras, p é source se existem uma* ϵ*-vizinhança* $N_\epsilon(p)$ *tal que, para todo* $x \in N_\epsilon(p)$*, com* $x \neq p$*, existir um inteiro positivo k em que* $|f^k(x) - p| \geq \epsilon$*.*

C.3. Resultados

Nesta seção, apresentaremos as contribuições desta nota. Dividimos a mesma em quatro subseções: sobre a estabilidade de pontos fixos em $\mathbb{R}$, sobre a estabilidade de órbitas periódicas, sobre a estabilidade de mapas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e sobre uma nova definição de expoente de Lyapunov para mapas Lipschitz.

C.3.1. Estabilidade de pontos fixos em $\mathbb{R}$

Iniciamos esta seção recordando alguns conceitos fundamentais da dinâmica de sistemas não lineares (ALLIGOOD, SAUER e YORKE, 1996).

Teorema C.1. (ALLIGOOD, SAUER e YORKE, 1996, p. 10) *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um mapa contínuo e seja p um ponto fixo de f. Se* $|f'(p)| < 1$*, então p é sink. Por outro lado, se* $|f'(p)| > 1$*, então p é source.*

Deste ponto até o fim desta nota, mostramos que trocar a condição de diferenciabilidade pela condição Lipschitz, implica que os resultados encontrados naquele são válidos neste. Como um mapa Lipschitz não precisa ser diferenciável – lembrando que para $x \neq y$, então $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq c$, ou seja, a existência do limite não é garantida. Note-se que podemos usar esta nova aproximação para uma classe de mapas mais ampla, qual seja: mapas nos quais os limites não sejam necessariamente observados. A seguir enunciamos e provamos um teorema que disserta sobre o teste de estabilidade de pontos fixos.

Teorema C.2. *Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa e $p \in \mathbb{R}$ um ponto fixo de f*

1) *Se f é um mapa Lipschitz estritamente local em p, com constante de Lipschitz $c < 1$, então p é sink.*
2) *Se f é um mapa Lipschitz localmente reverso em p, com constante $r > 1$, então p é source.*

Prova: Para mostrar o Item (1), consideramos por hipótese que f é um mapa Lipschitz estritamente local em p com constante de Lipschitz $c < 1$. Então existe uma ϵ-vizinhança $N_\epsilon(p)$ de p tal que $|f(x) - f(p)| < c|x - p|$ para todo $x \in N_\epsilon(p)$. Logo, se $x \in N_\epsilon(p)$, então$|f(x) - f(p)| = |f(x) - p| < c|x - p| < \epsilon$, isto é, $f(x) \in N_\epsilon(p)$. Aplicando o mesmo argumento, segue-se que as iteradas $f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x), \dots$ também pertencem a $N_\epsilon(p)$. Com isso, provemos por indução que inequação $|f^k(x) - p| < c^k|x - p|, \forall x \in N_\epsilon(p)$ é satisfeita para todo $k \geq 1$. É claro que para $k = 1$ a inequação é satisfeita. Assuma que a inequação é verdadeira para k. Devemos provar que $|f^{k+1}(x) - p| < c^{k+1}|x - p|$ também é verdadeira. Como f é um mapa Lipschitz estritamente local em $N_\epsilon(p)$ e como $f^k(x) \in N_\epsilon(p)$, sabemos que $|f^{k+1}(x) - p| < c|f^k(x) - p|$. Por hipótese indutiva, temos que $|f^{k+1}(x) - p| < c^{k+1}|x - p|$. Como $c < 1$ segue-se que $\lim_{k\to\infty} c^{k+1}|x - p| = 0$, logo $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = p$, isto é, p é sink como requerido.

Para provarmos (2), sabemos por hipótese que existe uma ϵ-vizinhança $N_\epsilon(p)$ de p tal que $|f(x) - p| \geq r|x - p|$ para todo $x \in N_\epsilon(p)$. Fixe $x \in N_\epsilon(p)$, com $x \neq p$; se $|f(x) - p| \geq \epsilon$, então o resultado segue. De outro modo, $|f(x) - p| < \epsilon$, que implica que $f(x) \in N_\epsilon(p)$. Utilizando o fato de que f é Lipschitz localmente reversa em $N_\epsilon(p)$, tem-se que $|f^2(x) - p| \geq r|f(x) - p| \geq r^2|x - p|$. Se $|f^2(x) - p| \geq \epsilon$, o resultado segue. Ademais, procedendo de modo similar ao que foi dado acima, tem-se que para um inteiro $k' \geq 1$, tal que $|f^{k'}(x) - p| \geq r^{k'}|x - p| \geq \epsilon$, isto é, $|f^{k'}(x) - p| \geq \epsilon$. Mais precisamente, como $r > 1$ e como $|x - p|$ é um número real positivo e fixo, existe um inteiro positivo suficientemente grande k' tal que $r^{k'}|x - p| \geq \epsilon$, que implica que $|f^{k'}(x) - p| \geq \epsilon$. Logo, p é source. ■

Corolário C.1. *Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa*

1) *Se f é estritamente Lipschitz, com constante $c < 1$, então existe um único ponto fixo p que é sink.*

2) *Se f é Lipschitz reversa, com constante $r > 1$, então todo pontos fixo p é source.*

Prova: O Item (1) é o conhecido Teorema de contração de Banach na linha real (MARTELLI, 1999).

Para mostrar (2), apresentaremos uma prova análoga àquela apresentada no Teorema C.2. Por hipótese, sabemos que $|f(x) - p| \geq r|x - p|$, para todo $x \in N_\epsilon(p)$. Fixemos $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq p$. Se $|f(x) - p| \geq \epsilon$, então o resultado segue. De outro modo, aplicando o fato de que f é Lipschitz reversa em p, tem-se que $|f^2(x) - p| \geq r|f(x) - p| \geq r^2|x - p|$. Se $|f^2(x) - p| \geq \epsilon$, o resultado segue. De outro modo, $|f^2(x) - p| < \epsilon$, como f é Lipschitz reversa em p, segue-se que $|f^3(x) - p| \geq r|f^2(x) - p| \geq r^3|x - p|$. Se $|f^3(x) - p| \geq \epsilon$, então o resultado segue. De outro modo, e repetitivamente, existe um inteiro $k_0 \geq 1$, tal que $|f^{k_0}(x) - p| \geq \epsilon$. ■

C.3.2 Estabilidade de pontos periódicos em ℝ

Partindo do pressuposto que *f* é um mapa em ℝ, um ponto *p* é um ponto periódico de periodicidade *k* se $f^k(p) = p$ e se *k* é o menos inteiro positivo. A órbita de *p*, que consiste em *k* pontos, é denominada órbita periódica de período *k*. Denotaremos uma órbita *p* de período *k* por $\mathcal{O}^k{}_p$. Ademais, se *p* é um ponto *k*-periódico – ou seja, de periodicidade *k* –, então a órbita $\mathcal{O}^k{}_p$ é denominada sink se p é sink para o mapa f^k. Com isso, podemos conceituar os critérios de estabilidade de órbitas periódicas.

Teorema C.3. (ALLIGOOD, SAUER e YORKE, 1996, p. 16) *Seja Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa. Se $|f'(p_k) \ldots f'(p_1)| < 1$, então a órbita k-periódica $\mathcal{O}^k{}_p = \{p_k, \ldots, p_1\}$ é uma sink; se $|f'(p_k) \ldots f'(p_1)| > 1$, então $\mathcal{O}^k{}_p = \{p_k, \ldots, p_1\}$ é uma source.*

Desse teorema segue, pelo que expomos anteriormente, uma nova versão do mesmo, mas considerando mapas Lipschitz reverso – em verdade constitui um teste para pontos periódicos para mapas Lipschitz.

Teorema C.4. *Seja* $g = f^k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um mapa e* $p \in \mathbb{R}$ *um ponto fixo de g.*

1) *Se f é um mapa Lipschitz estritamente local em p, com constante de Lipschitz* $c < 1$, *então* $\mathcal{O}^k{}_p$ *é uma sink periódica.*
2) *Se f é um mapa Lipschitz localmente reverso em p, com constante* $r > 1$, *então* $\mathcal{O}^k{}_p$ *é um source é periódica.*

Prova: (1) Assuma que g é um mapa Lipschitz estritamente local em *p*. Então existe uma ϵ-vizinhança $N_\epsilon(p)$ no qual g é estritamente Lipschitz. Além disso, mostramos no Teorema C.2 que $|g^l(x) - p| < c^l|x - p|$ para todo $x \in N_\epsilon(p)$. Novamente, pelo Teorema C.2, *p* é uma sink para o mapa $g = f^k$, isto é, $\mathcal{O}^k{}_p$ é uma sink periódica.

(2) A prova é a mesma do Item (2) do Teorema C.2 considerando sob o mapa $g = f^k$. ■

C.3.3. Estabilidade de pontos fixos em $\mathbb{R}^m$

Como é usual, denotamos vetores e mapas no $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ com letras em negrito. Consideremos um espaço vetorial real *m*-dimensional $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ imbuído com a norma $\|\ldots\|$ – em particular, a norma euclidiana. Seja $\boldsymbol{p} = \{p_m, \ldots, p_1\}$, $\boldsymbol{v} = \{v_m, \ldots, v_1\} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ dois pontos (*i. e.*, vetores). A ϵ-vizinhança $N_\epsilon(\boldsymbol{p})$ é definida por $N_\epsilon(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}: \|\mathbf{v} - \mathbf{p}\| < \epsilon\}$.

Seja $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ um mapa e seja $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ um ponto fixo de $\boldsymbol{f}$, isto é, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$. Se existe um ϵ-vizinhança $N_\epsilon(\boldsymbol{p})$ tal que para todo $\boldsymbol{v} \in N_\epsilon(\boldsymbol{p})$, $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{p}$, então $\boldsymbol{p}$ é denominado sink, ou ponto fixo atrator. Se existe um $N_\epsilon(\boldsymbol{p})$ tal que para todo $\boldsymbol{v} \in N_\epsilon(\boldsymbol{p})$, exceto para $\boldsymbol{p}$ em si mesmo, eventualmente mapas fora de $N_\epsilon(\boldsymbol{p})$, então $\boldsymbol{p}$ é denominado source ou repulsor.

Se $\boldsymbol{f}$ é um mapa contínuo e $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, representamos $\boldsymbol{f}$ em termos de suas coordenadas $\boldsymbol{f} = \{f_m, \ldots, f_1\}$. Seja $\boldsymbol{\mathcal{D}f}(\boldsymbol{p})$ a matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$ em $\boldsymbol{p}$. Com esta notação em mente, podemos enunciar o seguinte resultado já conhecido.

Teorema C.5. (ALLIGOOD, SAUER e YORKE, 1996, p. 70) *Seja* $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *um mapa e seja* $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$ *um ponto fixo de* $\boldsymbol{f}$. *Se a magnitude de cada autovalor de* $\boldsymbol{\mathcal{D}f}(\boldsymbol{p})$ *é menor que 1, então* $\boldsymbol{p}$ *é sink. Analogamente, se a magnitude de cada autovalor de* $\boldsymbol{\mathcal{D}f}(\boldsymbol{p})$ *é maior que 1, então* $\boldsymbol{p}$ *é source.*

No espaço vetorial $\mathbb{R}^m$, o conceito de mapa Lipschitz segue-se como: Seja $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ um mapa. Diz-se que $\boldsymbol{f}$ é Lipschitz se existe uma constante $c \in \mathbb{R}$, com $c > 0$, tal que para todo $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \Rightarrow \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{w})\| \leq c\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|$, em que $\|\ldots\|$ é a norma sobre $\mathbb{R}^m$. Se para todo $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \Rightarrow \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{w})\| < c\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|$, diz-se que $\boldsymbol{f}$ é estritamente Lipschitz. A seguir, provamos um resultado que segue naturalmente do Teorema C.2 para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$.

Teorema C.6. *Seja $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um mapa e seja $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$ um ponto fixo de $\boldsymbol{f}$.*

1) *Se $\boldsymbol{f}$ é um mapa Lipschitz estritamente local em $\boldsymbol{p}$, com constante de Lipschitz $c < 1$, então $\boldsymbol{p}$ é uma sink.*
2) *Se $\boldsymbol{f}$ é um mapa Lipschitz localmente reverso em $\boldsymbol{p}$, com constante $r > 1$, então $\boldsymbol{p}$ é uma source.*

Prova: As provas de ambos os itens são similares às provas apresentadas no Teorema C.2, apenas mudando o valor absoluto da função $|\ldots|$ em $\mathbb{R}$ e pela norma $\|\ldots\|$ em $\mathbb{R}^m$.

(1) Sabemos que existe uma ϵ-vizinhança $N_\epsilon(\boldsymbol{p})$ tal que $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})\| < c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$ para todo $\boldsymbol{x} \in N_\epsilon(\boldsymbol{p})$. Logo, se $\boldsymbol{x} \in N_\epsilon(\boldsymbol{p})$, então $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})\| < \epsilon$, isto é, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in N_\epsilon(\boldsymbol{p})$. Pelo mesmo argumento segue-se iterativamente que $\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}), \ldots$ também pertencem a $N_\epsilon(\boldsymbol{p})$. Por indução, podemos mostrar que $\left\|\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})\right\| < c^k\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$, para todo $\boldsymbol{x} \in N_\epsilon(\boldsymbol{p})$, é satisfeito para todo $k \geq 1$. Como $c < 1$, segue-se que $\lim_{k\to\infty} c^{k+1}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| = 0$, logo $\boldsymbol{p}$ é sink.

(2) Existe uma ϵ-vizinhança $N_\epsilon(\boldsymbol{p})$ tal que $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}\| \geq r\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$ para todo $\boldsymbol{x} \in N_\epsilon(\boldsymbol{p})$. Considerando que $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{p}$, se $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}\| \geq \epsilon$, não há nada a ser provado. De outro modo, se $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}\| < \epsilon$ implica que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in N_\epsilon(\boldsymbol{p})$. Como $\boldsymbol{f}$ é Lipschitz localmente reversa em $N_\epsilon(\boldsymbol{p})$, tem-se que $\left\|\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}\right\| \geq r^2\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|$. Se $\left\|\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}\right\| \geq \epsilon$, o resultado segue. De outra maneira, $\left\|\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}\right\| < \epsilon$, isto é, $\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{x}) \in N_\epsilon(\boldsymbol{p})$. ■

Corolário C.2. . *Seja $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um mapa*

1) *Se $\boldsymbol{f}$ é estritamente Lipschitz, com constante $c < 1$, então existe um único ponto fixo $\boldsymbol{p}$ que é sink.*

2) *Se* $\boldsymbol{f}$ *é Lipschitz reversa, com constante* $r > 1$, *então todo pontos fixo* $\boldsymbol{p}$ *é source.*

Prova: Novamente, a prova do Item (1) é análoga ao Teorema de Contração de Banach (MARTELLI, 1999). A prova do Item (2) é análoga à prova do Corolário C.1.

C.3.4 Expoente de Lyapunov

Nesta subseção, introduzimos o conceito do Número de Lyapunov e do Expoente de Lyapunov para mapas Lipschitz. Iremos apenas considerar o caso de mapas definidos sobre $\mathbb{R}$ – ou sobre qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ –, pois o procedimento para mapas em $\mathbb{R}^n$ é análogo. Denotamos por $\mathcal{O}_{x_1} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ uma órbita arbitrária com condição inicial $x_1 \in \mathbb{R}$, em que $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2), x_4 = f(x_3)$ e assim sucessivamente. Assumamos que f é um mapa contínuo em $\mathbb{R}$ e $x_1 \in \mathbb{R}$, o Número de Lyapunov $L(x_1)$ da órbita $\mathcal{O}_{x_1} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ é definido como $L(x_1) = \lim_{n\to\infty}(|f'(x_1)| \ldots |f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}$, se o limite existir. O Expoente de Lyapunov é definido como $h(x_1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)[\ln|f'(x_1)| + \cdots + \ln|f'(x_n)|]$, se o limite existir.

Seja $\mathcal{O}_{x_1} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ uma órbita e seja $\mathcal{O}^k{}_{y_1} = \{y_1, \ldots, y_k\}$ uma órbita *k*-periódica. Dizemos que $\mathcal{O}_{x_1}$ é assintoticamente periódica se convergir a uma órbita periódica $\mathcal{O}^k{}_{y_1}$ para algum inteiro $k \geq 1$, $y_1 \in \mathbb{R}$ e $n \to \infty$. Em outras palavras, existe uma órbita periódica $\{y_1, \ldots, y_k\} = \{y_1, \ldots, y_k, y_1, \ldots, y_k, \ldots\}$ tal que $\lim_{n\to\infty}|x_0 - y_0| = 0$.

Até agora, apresentamos os conceitos de Número e Expoente de Lyapunov para mapas diferenciáveis. Nosso objetivo é definir estes mesmos conceitos para mapas Lipschitz, mas para fazê-lo, é necessário que lancemos mão dão Teorema de Rademacher.

Teorema C. 7. (FEDERER, 1996) (RADEMACHER, 1919) *Se* $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *é um mapa Lipschitz, então* $\boldsymbol{f}$ *é diferenciável em quase todos os pontos (Lebesgue) de* $\mathbb{R}^m$.

Uma variante deste mesmo teorema pode ser dada como:

Teorema C.8. (HEINONEN, 2004) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *um conjunto aberto e seja* $\boldsymbol{f}: \Omega \to \mathbb{R}^n$ *um mapa Lipschitz. Então* $\boldsymbol{f}$ *é diferenciável em quase todos os pontos (Lebesgue) em* Ω

A partir do Teorema de Rademacher, podemos garantir que um mapa Lipschitz $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em um conjunto $X = \mathbb{R} - Y$, em que o conjunto Y tem medida de Lebesgue nula. Neste novo contexto, podemos definir o Número e o Expoente de Lyapunov assim como o conceito de órbitas assintoticamente periódicas de mapas Lipschitz.

Definição C.1. *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um mapa Lipschitz e assuma que* $\mathcal{O}_{x_1} \subset X$. *Então o Número de Lyapunov* $L(x_1)$ *da órbita* $\mathcal{O}_{x_1} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ *é definido como*

$$L(x_1) = \lim_{n\to\infty} (|f'(x_1)| \dots |f'(x_n)|)^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

se o limite existir. E o Expoente de Lyapunov $h(x_1)$ *é definido como*

$$h(x_1) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) [\ln|f'(x_1)| + \dots + \ln|f'(x_n)|], \tag{2}$$

se o limite existir.

Relembramos que um mapa $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz, em um intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$, se f é restrito a (a, b). Em termos da localidade de mapas Lipschitz, tem-se a seguinte variante da Definição C.1:

Definição C.2. *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um mapa localmente Lipschitz em um intervalo não degenerado* (a, b) *e assumindo que* $\mathcal{O}_{x_1} \subset (a, b) \cap X$. *Então o Número de Lyapunov* $L(x_1)$ *da órbita* $\mathcal{O}_{x_1} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ *é definida de modo análogo a (1) e (2).*

Com isso, podemos reformular o conceito de órbita assintoticamente periódica em termos de mapas Lipschitz.

Definição C.3. *Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa Lipschitz. Uma órbita $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ é assintoticamente periódica se convergir a uma órbita periódica quando $n \to \infty$. Em outras palavras, existe uma órbita periódica $\{y_1, y_2, \dots, y_k, y_1, y_2, \dots, y_k \dots\}$ tal que* $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$.

O seguinte resultado é uma variante do Teorema C.3 baseado em mapas Lipschitz.

Teorema C.9. *Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa Lipschitz com primeira derivada contínua no conjunto X. Assuma que a órbita $\mathcal{O}_{x_1} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset X$ satisfaz $f'(x_i) \neq 0$ para todo $i = 1,2, \dots$ Se $\mathcal{O}_{x_1}$ é assintoticamente periódica a uma órbita periódica $\mathcal{O}_{y_1} = \{y_1, y_2, \dots, y_k, y_1, y_2, \dots, y_k \dots\}$, então $h(x_1) = h(y_1)$, se ambos expoentes existirem.*

Prova: Como f é mapa Lipschitz, aplicando o Teorema de Rademacher com $n = m = 1$, segue-se que f tem derivada no conjunto X. Como $\mathcal{O}_{x_1} \subset X$, podemos garantir a derivada de todos os pontos de $\mathcal{O}_{x_1}$. A partir deste ponto, a prova segue de modo análogo à prova apresentada para o Teorema C.3. ■

Uma versão do mesmo teorema dado acima pode ser utilizada para mapas Lipschitz locais.

Teorema C.10. *Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa localmente Lipschitz em um intervalo aberto (a, b) com derivadas contínuas no conjunto X. Assuma que a órbita $\mathcal{O}_{x_1} \subset (a, b) \cap X$ satisfaz $f'(x_i) \neq 0$ para todo $i = 1,2, \dots$ Se $\mathcal{O}_{x_1}$ é assintoticamente periódica a uma órbita $\mathcal{O}_{y_1} = \{y_1, y_2, \dots, y_k, y_1, y_2, \dots, y_k \dots\}$, então $h(x_1) = h(y_1)$, se ambos expoentes existirem.*

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um mapa e seja $\mathcal{O}_{x_1}$ uma órbita limitada. Uma órbita $\mathcal{O}_{x_1}$ é caótica se não for assintoticamente periódica e se o Expoente de Lyapunov $h(x_1)$ for maior que zero. Em termos de mapas Lipschitz, tem-se uma nova definição de órbitas caóticas.

ANEXO D. Das perguntas fundamentais

Este anexo constitui uma nota resumida sobre o assunto das perguntas fundamentais, ou seja, das perguntas que fundamentam o processo filosófico e cientifico. O assunto é abordado com base na obra do filósofo tomista Álvaro Calderón, *Lógica mayor*, ainda no prelo (CALDERÓN); e também pela obra de Daniel Scherer, *A Raiz Antitomista da Modernidade Filosófica* (SCHERER, 2018). Em suma, queremos dar uma breve argumentação em favor da afirmação: ciência é o conhecimento pelas causas.

D.1. Da quididade

A quididade é a resposta obtida pela pergunta "Q*uid est?"* ou "*Quid sit?"* ("O que é?"). Podemos considerar que quididade e essência são sinônimas, logo, quando se indaga acerca da quididade de algo, indaga-se, sem embargo, acerca de sua essência. A sutil diferença entre estes termos se encontra no fato de que a quididade se refere propriamente ao concreto, enquanto que essência se refere ao mesmo objeto, mas abstratamente (SCHERER, 2018, p. 24,25).

De acordo com Cálderon, conhecemos a essência de algo por meio de um processo chamado divisão[130] em que o termo é a definição. Uma definição deve discernir claramente os limites daquilo que a coisa é, ou seja, *quod quid est res*. A primeira quididade que se estuda de um ente é a substância. A substância é definida como aquilo que subsiste em si mesmo, que é a contraparte dos acidentes[131], que, por definição, ocorrem em outro. Disso decorre que o princípio de todo o conhecimento não sensitivo dá-se na abstração da substância. Secundariamente dá-se na abstração de seus acidentes.

O terceiro aspecto quiditativo que se pode abstrair de um ente é sua distinção numérica. Uma mesma substância pode dar-se em diversos entes concretos, o discernimento de que certa substância ocorre em um particular é o conhecimento de sua distinção numérica. Por fim, a última quididade que podemos abstrair de um entre é sua distinção genérica, que constitui as similaridades universais que um ente tem com outra classe de entes.

[130] Referindo-se a uma operação particular do intelecto.
[131] Referimo-nos aqui às nove categorias aristotélicas que não sejam a substância.

D.2. Das propriedades

A questão das propriedades de um ente emerge da análise dos nove gêneros de acidentes. Os acidentes podem ser de dois tipos: acidentes próprios, ou propriedades, e acidentes simples. Os acidentes simples são aqueles que podem ou não dar-se numa espécie de entes sem mudar sua essência. Por exemplo, um homem – que constitui uma espécie de animal – pode ser gordo ou magro. Em ambos os casos, isso não muda sua natureza hominídea. Por outro lado, os acidentes próprios (*i. e.*, propriedades) derivam diretamente da essência de um ente e sua ausência demarca uma imperfeição na mesma.

Após perguntar *quid est*, a próxima pergunta diz respeito ao que a coisa é propriamente, ou seja, *quomodo sit* – cuja resposta remete aos aspectos ou atributos que a coisa possui sem não poderia não tê-las. Em suma, enquanto a pergunta *quid est* busca as quididades acima arroladas, a pergunta *quomodo est* busca quais sejam suas propriedades.

A investigação das propriedades admite novas perguntas no âmbito de sua quididade, ou seja, uma vez descoberta uma propriedade é necessário saber o que ela seja. Em segundo plano, se queremos determinar se uma propriedade de fato pertence à coisa, surge o que se denomina questão *quia*. Pois caso a propriedade estudada de fato ocorra na coisa, diz-se *quia ita est*. Finalmente, perguntamos por que algo é – ou seja, *propter quid*. Esta é a pergunta científica por antonomásia, uma vez que investiga a causa. Com isso, três perguntas se desdobram a partir da *quomodo sit*: a pergunta acerca de sua natureza (*quid est*), a pergunta acerca de sua existência (questão *quia*) e a pergunta acerca de suas causas (*propter quid*) (SCHERER, 2018, p. 30).

É importante enfatizar que “não é qualquer porquê que o nome de causa cientifica, mas apenas os porquês necessários...” (CALDERÓN). O porquê acerca de algo dá o termo de uma proposição. O termo deve explicar por que uma propriedade – que constitui uma predicação – cabe a um sujeito. A estrutura gnosiológica de uma proposição, considerando tais fatos é: uma propriedade pertence a um sujeito, pois esta propriedade pertence à causa que é observada no sujeito. Por exemplo: diz-se que uma estátua é feita bronze, quando notamos que sua causa material é o bronze. Assim afirma-se que a estátua é de bronze – enfatizando a notável ação dos verbos de ligação e dos predicativos do sujeito neste tipo de oração assertiva – de fato, esta estrutura constitui a proposição. Colocado de outro modo, a causa é o meio copulativo entre sujeito e predicado; é o termo médio do silogismo demonstrativo (SCHERER, 2018, p. 30).

Essa análise implica que a questão *propter quid* coloca-nos no âmbito de uma ciência, que é definida, por sua vez, pelo seu sujeito de investigação. Diz Scherer (2018) que o silogismo demonstrativo é o silogismo científico. Ou seja, ciência é realmente o conhecimento demonstrativo pelas causas. Ademais, só há ciência do necessário, pois uma demonstração é a explicação de uma relação de necessidade que se alcança perfeitamente com a demonstração *propter quid* – isto é, com o conhecimento pelas causas.