Russell y las matemáticas como puramente sintácticas

EMILIO MÉNDEZ PINTO

En su *Is Mathematics Purely Lingustic?*,[1] Russell respondió afirmativamente a la cuestión acerca de si las matemáticas son puramente sintácticas:

> [L]as proposiciones de la lógica y la matemática son puramente lingüísticas, y […] tienen que ver con la sintaxis. Cuando una proposición "*p*" parece tener lugar, lo que tiene realmente lugar es "'*p*' es verdadero". Todas las *aplicaciones* de la matemática dependen de este principio: "'*p*' es verdadero" implica "*p*". Todas las proposiciones de la matemática y la lógica son afirmaciones sobre el uso correcto de cierto número pequeño de palabras. Si es válida, esta conclusión puede considerarse como un epitafio a Pitágoras (Russell 1999, pp. 126-127; cursivas en el original).

En las líneas que siguen expondré esta idea russelliana de que las matemáticas son puramente sintácticas. Para esto, primero expondré la concepción russelliana acerca de la naturaleza de las proposiciones lingüísticas, para después exponer su concepción acerca de la naturaleza de las proposiciones matemáticas una vez asumida su concepción sobre las proposiciones lingüísticas.

El propósito de las líneas que siguen es, pues, meramente expositivo. Creo que este ejercicio tiene algún valor, tan sólo sea porque, hasta donde sé, el texto de Russell en cuestión no es muy conocido, al menos en la filosofía analítica hispanohablante. Junto con su *The Retreat from Pythagoras* (incluido en Russell 1959), *Is Mathematics Purely Lingustic?* es la manifestación más clara del anti-platonismo matemático que defendió Russell los últimos años de su vida, una postura que contrasta con el platonismo matemático presente en sus primeras obras filosófico-matemáticas (particularmente, en Russell 1903 [1996]).

Espero en otra ocasión poder discutir aspectos exegéticos relativos a Russell 1999 – como la influencia de Carnap en el gradual anti-platonismo russelliano – o aspectos que parecen tener un pie en lo exegético y otro pie en la doctrina filosófica de Russell 1999 – como

[1] Escrito en 1950 y publicado por primera vez en Lackey (comp.) 1973. Aquí sigo la versión en castellano de Francisco Rodríguez Consuegra publicada en Russell 1999, pp. 113-127.

la cuestión de si su anti-pitagorismo es *realmente* anti-pitagorismo y no anti-platonismo disfrazado de (o confundido con) anti-pitagorismo. Creo que lo segundo es el caso, ya sea que consideremos al pitagorismo matemático clásico u original (aquel desarrollado en Samos, Crotona, etc., alrededor del 530 a.C.) o a versiones contemporáneas del pitagorismo matemático.[2]

Sobre las proposiciones lingüísticas

Parecería que, a fin de ofrecer una respuesta medianamente satisfactoria a la pregunta de si las matemáticas son puramente lingüísticas, hemos de ofrecer definiciones medianamente satisfactorias de "matemáticas" y de "lingüística(s)" que, de alguna manera, relacionen ambos términos en el sentido que se pretende. Y esta es precisamente la estrategia que sigue Russell, que expondré a continuación. Russell 1999 comienza por ofrecer una definición de las proposiciones lingüísticas, y sus tesis al respecto son las siguientes.

Hay dos tipos de proposiciones lingüísticas: las que dependen del vocabulario (como "Napoleón es Bonaparte") y las que dependen de la sintaxis (como "un perro marrón es un perro").[3] No es difícil llevar esta dicotomía a un argot fregeano – en el que hay una diferencia, en cuanto a significancia cognitiva (sentido) se refiere, entre ambos *tipos* de proposición – o a un argot quineano – en el que la proposición "Napoleón es Bonaparte" pasaría por una verdad sintética y la proposición "un perro marrón es un perro" pasaría por una verdad analítica. Estas observaciones serán importantes un poco más adelante, cuando consideremos qué entiende Russell (1999) por "proposiciones matemáticas".

Para saber que "un perro marrón es un perro" (nuestra proposición lingüística dependiente de la sintaxis) no necesitamos conocer, según Russell, el significado de las palabras "perro" y "marrón", sino únicamente saber:

a) qué se quiere decir con "un" y con "es un";

b) que "perro" y "marrón" son lo que Russell llama *palabras-clase*, y

---

[2] Cfr. e. g., Steiner 1998.
[3] Tanto la terminología como los ejemplos son de Russell 1999.

c) que, cuando tales palabras-clase se yuxtaponen de cierta manera (como lo hacen en nuestra proposición), "lo que se significa es su parte común" (Russell 1999, p. 118).

Así pues, todo lo que necesitamos para saber que "un perro marrón es un perro" es cierto conocimiento sintáctico.

Algo muy distinto sucede con la proposición "eso es un perro marrón", que ya no depende exclusivamente de la sintaxis, sino también, en argot russelliano, del vocabulario. La diferencia entre ambas proposiciones estriba en que, mientras que con la proposición "un perro marrón es un perro" estamos diciendo que ""si '*x* es un perro marrón' es verdadero, entonces '*x* es un perro' es verdadero"" (Russell 1999, p. 188), la verdad o la falsedad de "eso es un perro marrón" depende de si el perro es marrón o no lo es. Así, en una proposición dependiente del vocabulario, *no hay mención de la "verdad"*.

¿Es posible transformarla en una proposición en la que sí haya mención de la "verdad"? En otras palabras, ¿es posible transformar una proposición dependiente del vocabulario en una proposición dependiente (exclusivamente) de la sintaxis? Sí, simplemente añadiendo la cláusula "es verdad que" antes de la proposición en cuestión. Russell expuso esta maniobra como sigue:

> Pero si digo: "es verdad que[4] ese perro es marrón", digo algo que, *aunque implicado por mi anterior enunciado*, ya no es sobre el perro, *sino sobre una oración*. Hablando de forma general, ""*p*" es verdadero" es una afirmación completamente diferente de "*p*". Por regla general, la única manera de determinar que "*p*" es verdadero es determinar que *p*. Sé que "eso es un perro marrón" es verdadero porque puedo ver que eso es un perro marrón. Pero puedo saber que *p* sin saber que ""*p*" es verdadero" y viceversa. (Russell 1999, p. 118; las cursivas son mías).

Así, para Russell, la forma habitual de las proposiciones dependientes de la sintaxis es "'*p*' es verdadero", y no "*p*". Esta circunstancia, aunada a los hechos de que una proposición lingüística sintáctica es una afirmación *acerca de una oración*, y de que dicha afirmación está implicada por lo que afirma una proposición dependiente del vocabulario, serán elementos centrales del siguiente apartado.

[4] "es cierto que…", en la traducción de Rodríguez Consuegra de Slater (ed.) 1997.

Sobre las proposiciones matemáticas

La relevancia del apartado anterior resultará clara si consideramos que el propósito principal de Russell 1999 fue ofrecer una definición de proposiciones matemáticas que cumpla con las *desiderata* de que las proposiciones matemáticas sólo contengan palabras sintácticas[5] y de que tales proposiciones puedan "verse como verdaderas a causa de los significados de las palabras sintácticas que contienen" (Russell 1999, p. 125).

En otras palabras, su propósito fue ofrecer una definición de proposiciones matemáticas que diera cuenta del supuesto hecho de que, cuando aparentemente tiene lugar una proposición matemática "*p*", lo que en realidad tiene lugar es "'*p*' es verdadera". Esto, de ser cierto, haría que una proposición matemática *p* sea, en realidad, una afirmación *A* acerca de una oración *O* y que *A* esté implicada por lo que afirma una proposición *p** que, a diferencia de *p*, sí depende del vocabulario. Y, según vimos antes, uno puede saber que *p** sin saber que *p*, y viceversa.

Tan sólo sea porque no podemos saber algo falso, parece claro que podemos perfectamente (trivialmente, si se quiere) saber que *p** sin saber que *p*. Pero lo relevante, para los propósitos de Russell 1999, está en cómo podemos saber si *p* (e. g., "'2 + 2 = 4' es verdadero") sin saber que *p** (e. g., "2 + 2 = 4").

La razón de Russell para saber que podemos saber si *p* sin saber que *p** estriba en que, siendo *p** una proposición, está sujeta al principio del tercero excluido,[6] y entonces no sólo

[5] Las variables *no* forman parte de este conjunto de palabras sintácticas por una razón que Russell ofrece un poco antes: la representación – mediante variables – de una proposición de las matemáticas puras es una condición necesaria, pero no suficiente, de la misma, porque "muchas proposiciones que la poseen no se sabe que sean verdaderas o falsas, excepto posiblemente en virtud de evidencia extralógica" (Russell 1999, p. 122). Lo que Russell llama "evidencia extralógica" es, en este contexto, evidencia empírica, y para mostrar que hay proposiciones que, no obstante estar representadas mediante variables, *no* son proposiciones matemáticas, Russell considera el caso de la proposición "existen al menos tres objetos en el mundo", que puede representarse, simbólicamente (formalmente), como sigue:

$$(\exists \phi, a, b, c) : \phi a \,.\, \phi b \,.\, \phi c : \psi a \,.\, \sim \psi x \,.\, \chi b \,.\, \sim \chi x \,.\, \theta c \,.\, \sim \theta x$$
$$. \supset .\,_{x,\psi,\chi,\theta} \sim \phi x : (\exists f) \,.\, fa \,.\, \sim fb : (\exists g) \,.\, ga \,.\, \sim gc : (\exists h) \,.\, hb \,.\, \sim hc$$

La verdad (falsedad) de esta proposición no está sujeta a comprobación lógica, sino a comprobación empírica, y por lo tanto, para Russell, no es una proposición de las matemáticas (puras) o de la lógica. Ya en 1919, Russell (Russell 2021, p. 204, nota 3) había considerado la inferencia – ubicua en *Principia Mathematica* – de que existe al menos un individuo como un "defecto en pureza lógica". En este tenor, no es ninguna casualidad que lo que para Russell 1999 son "palabras sintácticas" hayan sido, en algunos de sus trabajos anteriores, constantes lógicas.

[6] Principio que, junto con los de identidad (lo que sea que es, es) y de contradicción (nada puede ser y no ser), Russell (1912) consideró principios lógicos autoevidentes. Quizá el haberlos considerado así sea la razón por la

sucede que podemos decir que "*p** es verdadera o falsa" o que "si *p**, o '*p**' o 'no *p**' es verdadera", sino que, tratándose de la forma general del tercero excluido (pues *p** es *cualquier* proposición de las matemáticas puras), solamente bajo esta forma general "nos sentimos inclinados a introducir el término 'verdadero'. La cuestión de la ocurrencia o la no ocurrencia de la palabra 'verdadero' es importante, puesto que […] es completamente diferente afirmar '*p*' que afirmar "'*p*' es verdadero". Lo último es siempre lingüístico [sintáctico]; lo primero, en general, no lo es." (Russell 1999, pp. 123-124.)

Así, siguiendo a Russell, afirmar que "2 + 2 = 4" (nuestra *p**) es algo muy distinto a afirmar que "'2 + 2 = 4' es verdadero" (nuestra *p*), pues *p*, mas no *p**, depende exclusivamente de la sintaxis (y es por esto por lo que, según vimos arriba, en una proposición como *p**, que no depende *exclusivamente* de la sintaxis, no hay mención de la "verdad").

Ahora bien, ya que el principio del tercero excluido es una afirmación exclusivamente dependiente de la sintaxis – tanto porque "la forma correcta de establecerla resulta ser "'*p*' es verdadera o '*p*' es falsa" (Russell 1999, p. 124), y por tanto *hay una mención explícita de la "verdad"*, como porque "la ley del tercero excluso es puramente verbal" (Russell 1999, p. 124) – resulta claro cómo es que, recurriendo únicamente a nuestro conocimiento sintáctico, podemos saber que *p* sin saber que *p**.

Según esta concepción sintáctica acerca de la naturaleza de las matemáticas, todo lo que necesitamos para *demostrar* algo matemáticamente es "decir en otras palabras parte o todo lo que se dice en las premisas. Si de un teorema *A* se deduce un teorema *B*, debe ser el caso que *B* repite *A* (o parte de él) en otros términos. Y la verdad de *A* debe resultar de los significados de las palabras utilizadas al establecerlo" (Russell 1999, pp. 124-125). Ya que, bajo esta concepción de las matemáticas, la verdad de *p* se sigue únicamente de los significados de sus palabras (no es, pues, una verdad que, en argot russelliano, dependa del vocabulario), *p* es una verdad analítica o una proposición verdadera en virtud de su forma. Esto, para el Russell de 1999, es algo ineludible, pues "[h]agamos lo que hagamos no podemos librarnos nunca de la necesidad de tomar en consideración las relaciones no verbalizadas entre las palabras. Cuando cualquiera de tales relaciones se verbaliza, nuevas relaciones no verbalizadas toman su lugar. La

que Russell 1999 llame "ley" a lo que aquí hemos llamado "principio". Para Russell 1912, estos principios lógicos autoevidentes no son innatos (lo que parece salvarlo de objeciones lockeanas), pero sí apriorísticos. Esto último, desde luego, también es controvertible. [Hay una traducción mía al castellano de Russell 1912, disponible en: http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/Colecciones/ReinaCiencias/_docs/Los-problemas-de-la-filosofia.pdf.]

sintaxis está constituida por tales relaciones no verbalizadas" (Russell 1999, p. 125). Así pues, si todo este análisis es correcto, resultaría que:

(a) Las aplicaciones de las matemáticas[7] dependen del principio: "'*p*' es verdadero" implica "*p*".

(b) De (a) se sigue que, cuando *parece* tener lugar una proposición matemática *p*, lo que realmente tiene lugar es "'*p*' es verdadera".

(c) Las proposiciones de las matemáticas son puramente lingüísticas (i. e., sintácticas), pues todas sus proposiciones son afirmaciones sobre el uso correcto de cierto número pequeño de palabras.

(d) Si la conclusión (c) es válida, ello "puede considerarse como un epitafio a Pitágoras" (Russell 1999, p. 127).

Referencias

Russell, B. (2021), *Filosofía Matemática: Introducción*, México, Porrúa/Tecnológico de Monterrey (trad. Méndez Pinto, E.).

Russell, B. (1999), *Análisis filosófico*, Barcelona, Paidós (trad. Rodríguez Consuegra, F.).

Russell, B. (1999), "¿Es la matemática puramente lingüística?", en Russell 1999, pp. 113-127.

Russell, B. (1996), *The Principles of Mathematics*, Nueva York, Norton.

Russell, B. (1973), *Essays in Analysis*, Londres, Allen & Unwin (comp. Lackey, D.).

Russell, B. (1973), "Is Mathematics Purely Linguistic?", en Russell 1973, pp. 295-306.

Russell, B. (1959), *My Philosophical Development*, Londres, George Allen & Unwin.

Russell, B. (1912), *The Problems of Philosophy*, Londres, Williams & Norgate.

[7] En este contexto es importante no confundir las aplicaciones de las matemáticas con las matemáticas aplicadas, porque con "aplicaciones de las matemáticas" Russell está aludiendo a las aplicaciones de las matemáticas a las proposiciones, no al quehacer práctico de las matemáticas. Que, por otra parte, haya una clara dicotomía entre "matemáticas puras" y "matemáticas aplicadas" (dicotomía asumida, p. ej., en Russell 1996) es un problema distinto.

Slater, J. (ed.) (1997), *The Collected Papers of Bertrand Russell, Volume 11: Last Philosophical Testament 1947-68*, Nueva York, Routledge.

Steiner, M. (1998), *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Cambridge, Harvard University Press.