36. Der Logische Aufbau der Welt: Formale Gesichtspunkte

Konstitutionstheorie und Konstitutionssysteme

Die philosophisch relevanten formalen Gesichtspunkte des *Logischen Aufbaus der Welt* werden sichtbar, wenn man dieses Werk als Skizze einer allgemeinen und umfassenden Konstitutionstheorie betrachtet, d.h., als Theorie von Konstitutionssystemen. Ein Konstitutionssystem im Sinne Carnaps zielte auf eine übersichtliche Darstellung eines Wissensgebietes (oder auch der Wissenschaft insgesamt). Dafür werden geeignete Mittel der Logik, Mathematik, Ordnungstheorie und anderer formaler Disziplinen verwendet. Eine Theorie von Konstitutionssystemen ist deshalb notwendig auch eine formale Theorie. Nelson Goodman formulierte diese grundlegende Einsicht bereits in *The Significance of Der Logische Aufbau der Welt* (Goodman 1963). Dort beschreibt er die Funktion eines Konstitutionssystems („constructional system") und die daraus resultierenden Eigenarten eines solchen Systems anschaulich so:

> "The function of a constructional system is not to recreate experience but rather to map it. Though a map is derived from observations of a territory, the map lacks the contours, colors, sounds, smells and life of the territory, … It may even be very little like other equally good maps of the same territory. A map is schematic, selective, conventional, condensed, and uniform. And these characteristics are virtues rather than defects" (Goodman (1963, 552-553).

Goodmans „kartographische" Auffassung von Konstitutionstheorie als einer Theorie des Designs und der Funktion von „Karten", d.h., Repräsentationen von Wissensgebieten, verliert sich nicht in metaphysischen Erörterungen darüber, was ein Konstitutionssystem „ist", sondern konzentriert sich pragmatisch auf das Problem, wozu Konstitutionssysteme gut sind, welche Funktion sie haben. Insbesondere gilt:

> „The choice is not between misrepresentation and meticulous reproduction. The relevant question about a map is whether it is serviceable and accurate in the way intended.” (Goodman (1963, ibd.).

Auch Carnap betonte im *Aufbau* den schematischen und selektiven, d.h. strukturellen Charakter jeder wissenschaftlichen Erkenntnis. Als veranschaulichendes Beispiel führte er die Karte des europäisch-asiatischen Eisenbahnnetzes an, die nicht die Entfernungen, sondern nur die Zusammenhangsverhältnisse der Stationen angibt (*Aufbau*, § 43). Die philosophisch relevanten „formalen“ Gesichtspunkte des *Aufbaus* sind in diesem „konstruktivistischen“ Charakter dieses Werkes beschlossen.

Jeder Karte eines Gebietes liegt die „geometrische Hypothese“ zugrunde, die behauptet, das infrage stehende Gebiet lasse sich mithilfe der Begriffe dieser Geometrie in geeigneter Form repräsentieren. Geometrie ist hier in einem sehr allgemeinen Sinne zu verstehen und meint keinesfalls nur die euklidische Geometrie.

Konstitutionssysteme sind durch ihre Konstitutionsmethoden charakterisiert. Carnap ging davon aus, dass es für seine Konstitutionstheorie nur eine Methode der Konstitution gab, die Quasianalyse. Diese konnte iteriert werden und ermöglichte es so, ausgehend von gewissen Grundgegenständen immer komplexere Gegenstände aufzubauen. Das Ergebnis war ein stufenförmiges Konstitutionssystem, in dem verschiedene Konstitutionsstufen unterschieden werden können. Alle Gegenstände eines Carnapianischen Systems sind somit entweder Grundgegenstände oder konstituierte Gegenstände (= Quasigegenstände). Klassisches mathematischen Beispiel eines solchen Stufensystems ist das System der Zahlbegriffe (*Aufbau* § 42). Tatsächlich werden im *Aufbau* höhere Konstitutionsstufen des empirischen Wissens nicht expliziert konstruiert, sondern nur „in andeutender Umschreibung gegeben“ (*Aufbau* § 123). Deshalb wird im Folgenden nicht weiter auf die Konstitution höherer Stufen eingegangen, da das zu den grundlegenden formalen Aspekten der Theorie nichts Neues beitragen würde.

Vorbilder für Carnaps konstruktivistische Konstitutionstheorie waren Hilberts axiomatischer Aufbau der Geometrie und allgemeiner die logische Rekonstruktion der Begriffe der Mathematik, wie sie Whitehead und Russell in den *Principia Mathematica* in Angriff genommen hatten. Über die Affinitäten zu den mathematischen und logischen Konstitutions–projekten von Hilbert und Whitehead/Russell hinaus sah Carnap inhaltliche Beziehungen der quasianalytischen Konstitutionstheorie zur in der Philosophie seiner Zeit sehr populären Unter–scheidung von Sein und Gelten:

> „Im Grunde genommen geht auch der in der neueren Philosophie viel betonte Unterschied zwischen dem Seienden und dem Geltenden auf den Unterschied zwischen eigentlichen Gegenständen und Quasigegenständen zurück. Wird nämlich ein Quasigegenstand auf Grund gewisser Elemente seines Ausgangs–gebietes konstituiert, so „gilt" er für diese Elemente. … Über die übliche Auffassung von Seiendem und Geltendem geht die Konstitutionstheorie dadurch hinaus, dass sie diese Gegenüberstellung als ein Verhältnis ansieht, das sich immer wieder erneuert und von Stufe zu Stufe weiterführt." (Aufbau § 42)

Der Aufbau enthält wie gesagt nur Skizzen dieses grandiosen Konstitutionssystems, das alle Gebiete des Wissens umfassen sollte (alias „Der logische Aufbau der Welt").

Quasizerlegung und Quasianalyse

Die für Carnaps Konstitutionssysteme charakteristische Konstitutionsmethode war die Quasianalyse. Die bescheidenen Anfänge dieses Projektes finden sich in dem Manuskript *Die Quasizerlegung. Ein Verfahren zur Ordnung nichthomogener Mengen mit den Mitteln der Beziehungslehre* (Carnap 1923). Dort beschreibt Carnap die Aufgabe der „Quasizerlegung" (im *Aufbau* „Quasianalyse") allgemein so:

> „Die Aufgabe der Quasizerlegung kann so formuliert werden: gegeben eine Menge von Elementen und für jedes Element die Angabe, mit welchen der übrigen es verwandt ist. Gesucht eine Beschreibung dieser Menge, die nur diese Angaben benutzt, aber den Elementen derart Quasibestandteile oder Quasimerkmale

> zuschreibt, dass es möglich wird, jedes einzelne Element für sich, ohne Bezug auf andere, aufgrund seiner Quasibestandteile zu behandeln.“

Diese allgemeine Beschreibung der „Quasizerlegung“ lässt sich folgendermaßen präzisieren: Die zu quasianalysierende „nichthomogene Menge“ ist eine Menge S, auf der eine reflexive und symmetrische Relation ~ definiert ist, die als „Verwandtschaft-“ oder „Ähnlichkeits–relation“ zu interpretieren ist. Elemente a und b, die in der Relation ~ stehen, werden als ähnlich oder verwandt angesehen. Das werde mit a ~ b bezeichnet. Gesucht werden „Quasimerkmale“ oder „Quasibestandteile“, die man den Elementen von S so zuordnet, dass die Ähnlichkeitsbeziehungen, die zwischen den Elementen von S bestehen, durch Beziehungen zwischen den Mengen von Quasibestandteilen wiedergegeben werden, die den Elementen von S zugeordnet werden. Eine solche Quasianalyse der Ähnlichkeitsstruktur (S, ~) muss nach Carnap die folgenden Bedingungen erfüllen:

(C1) Sind zwei Elemente verwandt, so stimmen sie in (mindestens) einem Quasibestandteil überein.

(C2) Sind zwei Elemente nicht verwandt, so stimmen sie in keinem Quasibestandteil überein.

(C3) Sind zwei Elemente a und b „verwandtschaftsgleich“, (d.h., ist a mit allen und nur den Elementen verwandt wie b, so sind ihnen dieselben Quasibestandteile zugeordnet. d.h., dem a kommen alle und nur die Quasibestandteile zu wie dem b.

(C4) Es kommt kein Quasibestandteil vor, nach dessen Wegnahme die Bedingungen (C1) – (C3) noch erfüllt wären.

Die beiden ersten Bedingungen (C1) und (C2) kommen auch im *Aufbau* vor (*Aufbau* § 70). Die Bedingung (C4) ist eine Art *Occams razor*, der sicherstellt, dass keine „überflüssigen“ Quasibestandteile Verwendung finden. Die beiden Bedingungen (C3) und (C4) werden im

Aufbau nicht erwähnt. Das macht, wie wir sehen werden, die quasianalytische Konstitutionsmethode des *Aufbaus* anfällig für „Gegenbeispiele“.

Quasianalyse als Repräsentation

Bevor wir darauf eingehen, ist es jedoch zweckmäßig, den in (C1) – (C4) konzeptuellen Kern der Quasianalyse als einer theoretischen Repräsentation zu explizieren. Damit wird auch die enge Beziehung von Carnaps quasianalytischer Konstitutionstheorie mit Goodmans „kartographischer“ Auffassung von Konstitutionstheorie bestätigt.

Dazu einige terminologische Vorbereitungen. Ist S eine Menge von Elementen, auf der eine reflexive und symmetrische Ähnlichkeits- oder Verwandtschaftsrelation $\sim \subseteq S \times S$ definiert ist, bezeichnen wir (S, ~) als eine *Ähnlichkeitsstruktur*. Für $x \in S$ werde die Menge $\{y; x \sim y\}$ mit co(x) bezeichnet. Anschaulich ist co(x) als Menge der zu x benachbarten oder ähnlichen Elemente zu interpretieren. Die Potenzmenge einer Menge Q werde mit 2^Q bezeichnet. Auf 2^Q existiert eine Ähnlichkeitsstruktur, die für $P, P' \in 2^Q$ definiert wird durch $P \sim P' := P \cap P' \neq \emptyset$ oder $P = P' = \emptyset$. Ist $Q' \subseteq Q$ eine Teilmenge von Q, so sei die Abbildung $2^Q \xrightarrow{i_{QQ'}} 2^{Q'}$ durch $i_{QQ'}(P) := P \cap Q'$ definiert. Mit diesen terminologischen Festsetzungen lässt sich Carnaps Charakterisierung der Quasianalyse durch die folgenden Bedingungen (C1)’ - (C4)’ als Repräsentation von S in 2^Q so reformulieren:

<u>Definition</u>. Sei (S, ~) eine Ähnlichkeitsstruktur und Q eine Menge von Quasibe–standteilen. Eine (repräsentationale) Quasianalyse von (S, ~) ist eine Abbildung $S \xrightarrow{f} 2^Q$, die die folgenden vier Bedingungen erfüllt:

(C1)’ $x \sim y \Rightarrow f(x) \sim f(y)$.

(C2)’ $f(x) \sim f(y) \Rightarrow x \sim y$.

(C3)’ $co(x) = co(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

(C4)’ Ist $Q' \subset Q$ eine echte Teilmenge von Q, so erfüllt die zusammengesetzte Abbildung $S \xrightarrow{i_{QQ'} f} 2^{Q'}$ nicht alle Bedingungen (C1)’ – (C3)’.♦

Die Quasianalyse ist eine „immanente Gebietsbehandlung“, die Quasibestandteile $q \in Q$ müssen nicht „von außen importiert“ werden, sondern werden in der Basisstruktur (S, ~) konstituiert. Das ergibt sich aus der Tatsache, dass $S \xrightarrow{f} 2^Q$ eine immanente extensionale „Gebietsbehandlung“ definiert, indem man einen Quasibestandteil $q \in Q$ durch seine Extension $f^{-1}(q) := \{s; q \in f(s)\} \in 2^S$ ersetzt.

Die durch (C1)’ – (C4)’ definierte repräsentationale Formulierung der Quasizerlegung korrespondiert gut mit dem von Goodman erwähnten kartographischen Charakter einer quasianalytischen Konstitution: Die Ähnlichkeitsstruktur (S,~) entspricht dem Gebiet, das zu kartographieren ist, die quasianalytische Abbildung $S \xrightarrow{f} 2^Q$ entspricht der Kartierung des Gebietes durch eine Karte, die die Struktur von (S, ~) schematisch und selektiv in $(2^Q,\sim)$ abbildet.

Die Abbildung f ist (partiell) strukturerhaltend: So wird etwa die durch ~ definierte Nachbarschaftsstruktur auf S erhalten, indem benachbarte Elemente $a, b \in S$ auf benachbarte Elemente $f(x), f(y) \in 2^Q$ abgebildet werden. Darüber hinaus induziert die reiche Struktur von $(2^Q,\sim)$ auch neue Strukturen auf (S, ~): Die partielle mengentheoretische Ordnung $\subseteq$ von $(2^Q,\sim)$ induziert eine partielle Ordnung auf S durch $x \leq y := f(x) \subseteq f(y)$. Dieses Wechselspiel von Induktion und Reduktion von Strukturen ist charakteristisch für jede kartographische Abbildung: auf der einen Seite vereinfacht eine Karte die Struktur des repräsentierten Gebietes, auf der anderen Seite induziert sie neues Wissen über die Struktur des Gebietes, das sich aus der Struktur der Karte ergibt. Die Quasianalyse von Ähnlichkeitsstrukturen macht dieses Wechselspiel in vereinfachter und stilisierter Form sichtbar.

Die Interpretation der quasianalytischen Konstitution als Repräsentation macht deutlich, dass diese Methode leicht verallgemeinert werden kann: Strukturerhaltende Abbildungen („Karten“) lassen sich offenbar nicht nur für Ähnlichkeitsstrukturen (S, ~), sondern allgemein für relationale Strukturen definieren. Es ist eine *empirische* Frage, welche Strukturen durch eine quasianalytische Repräsentation erhalten, welche ignoriert und welche sinnvoll induziert werden können. Das bestimmt das Design und der Zweck, für den eine Karte eines Wissensgebietes entworfen ist. Die Konstitutionstheorie als allgemeine Theorie von Konstitutionssystemen ist deshalb keine rein formale (mathematische oder logische) Theorie, sondern hat auch empirische Aspekte, die sich aus ihrer Anwendung auf real existierende Wissensgebiete ergeben.

Existenz und Eindeutigkeit quasianalytischer Repräsentationen

Versteht man eine Quasizerlegung als eine strukturerhaltende Repräsentation einer Ähnlichkeitsstruktur durch eine andere „kanonische“ Struktur stellen sich sofort die beiden folgenden Fragen:

(1) Gibt es für jede Ähnlichkeitsstruktur (S, ~) eine quasianalytische Repräsentation S—f—>2^Q, die die Bedingungen (C1) – (C4) erfüllt?

(2) Wenn ja, ist die Repräsentation S—f—>2^Q eindeutig bestimmt oder gibt es wesentlich verschiedene solcher Repräsentationen?

Wie schon Carnap gezeigt hat, ist die die Frage (1) mit ja zu beantworten. Für jede (endliche) Ähnlichkeitsstruktur kann man immer eine Quasianalyse konstruieren, die (C1) – (C4) erfüllt. Das zeigt sich so: Man definiere einen *Ähnlichkeitskreis* von (S, ~) als eine Teilmenge T von S, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $\forall x,y\ (x, y \in T \Rightarrow x \sim y)$, (ii) $\forall x\ (x \notin T \Rightarrow \exists y\ (y \in T$ und non $(x \sim y)))$.

Bezeichne SC(S) die Menge der Ähnlichkeitskreise von (S, ~). Dann sei die Abbildung $S \xrightarrow{f} SC(S)$ definiert durch $f(s) := \{T;\ s \in T \in SC(S)\}$. Dann ist leicht zu sehen, dass f die Bedingungen (C1)' – (C3)' erfüllt. Durch Wegnahme überflüssiger Ähnlichkeitskreise T kann man aus f eine Abbildung erhalten, die (C1)' - (C4)' erfüllt.

Die Frage (2) nach der Eindeutigkeit einer quasianalytischen Repräsentation lässt sich nicht ganz so leicht beantworten. Zudem hat diese Frage eine besondere Brisanz, da viele Kritiker von Carnaps Konstitutionstheorie der Meinung sind, die Nichteindeutigkeit der quasianalytischen Konstitution sei als eine definitive und endgültige Widerlegung dieser Methode zu werten. Zahlreiche Autoren haben deshalb versucht, die quasianalytische Konstitutionstheorie des *Aufbaus* durch Angabe von Gegenbeispielen, also Ähnlichkeitsstrukturen mit mehreren Quasianalysen zu widerlegen.

Fast alle in der Sekundärliteratur diskutierten „Gegenbeispiele" beziehen sich nur auf die Bedingungen (C1)' und (C2)' und lassen (C3)' und (C4)' außer Betracht. Das gilt insbesondere für das wohl bekanntestes Beispiel, das Goodmansche Tripel, das durch die folgende einfache „Eigenschaftsliste" definiert ist: <1ab, 2bc, 3ac>. Diese Liste besagt, dass die Objekte 1 und 2 einander ähnlich sind, da sie die gemeinsame Eigenschaft b haben, dass 2 und 3 ähnlich sind, da sie die gemeinsame Eigenschaft c haben, und dass 1 und 3 dank der gemeinsamen Eigenschaft a zu einander ähnlich sind. Nun ist leicht zu sehen, dass man eine andere Quasianalyse für die Ähnlichkeitsstruktur ({1, 2, 3}, ~) finden kann, die (C1) - (C4) erfüllt, indem man den einander ähnlichen Elementen 1, 2, und 3 eine allen gemeinsame Eigenschaft x zuordnet, also die sehr einfache Liste <1x, 2x, 3x> aufstellt. Fordert man nur die Erfüllung der Bedingungen (C1) und (C2), gibt es also mehr als eine Quasianalyse für ({1, 2, 3}, ~), nämlich <1ab, 2bc, 3ac> und <1x, 2x, 3c>. Besteht man hingegen auf der Erfüllung von (C1) – (C4), gibt es nur eine Quasianalyse, die diese Bedingungen erfüllt, eben <1x, 2x, 3x>, da das Goodmansche Tripel zwar die Bedingungen (C1), (C2) und (C4) erfüllt, nicht aber (C3). Analog kann man zeigen, dass fast alle in der Sekundärliteratur diskutierten „Gegenbeispiele“ die Bedingungen (C1) – (C4) nicht erfüllen. Tatsächlich aber gibt es Ähnlichkeitsstrukturen, die mehrere, wesentlich verschiedene Quasianalysen haben (Mormann 1994, Brockhaus 1963).

Die philosophisch interessante Frage ist nun, ob aufgrund dieser Nichteindeutigkeit der Ansatz der quasianalytischen Konstitution grundsätzlich gescheitert ist. Diese Auffassung ist von vielen Kritikern der Quasianalyse vertreten worden. Wie wohl als erste Joelle Proust ausgeführt hat (vgl. Proust 1989)), ist diese These bei näherem Besehen keineswegs plausibel: aus der Perspektive einer formalen Konstitutionstheorie gibt es keine überzeugenden Gründe, eine „gegebene“ quasianalytische Repräsentation vor allen anderen auszuzeichnen. Wenn eine Ähnlichkeitsstruktur so beschaffen ist, dass sie mehrere quasianalytische Repräsentationen erlaubt, ist das genauso sehr oder so genau so wenig beunruhigend wie wenn eine empirische Theorie oder Datenstruktur mehrere theoretische Erklärungen zulässt (vgl. Mormann 1994, 1995). Die kartographische Interpretation quasianalytischer Konstitutionssysteme unterstützt die These, dass es für ein Wissensgebiet mehrere verschiedene Karten geben kann, die dieses Gebiet adäquat darstellen.

Schluss

Von einer endgültigen “Widerlegung” ist die Konstitutionstheorie des *Aufbaus* kann deshalb kaum gesprochen werden. Vielmehr sollte man den *Aufbau* als ein frühes Beispiel einer wissenschaftlichen oder mathematischen Philosophie ansehen, das zwar heute in mancher Hinsicht als überholt anzusehen ist, das aber in seiner Grundkonzeption immer noch philosophische Aktualität besitzt (cf. (Goodman (1963, 558)), Mundy (1986), Leitgeb (2013)).

<u>Literatur</u>:

Beaney, Michael: Carnap’s conception of explication. From Husserl to Frege? In: G. Gabriel, C. Klein (eds.), Carnap Brought Home. The View from Jena, Chicago and LaSalle, Open Court, 2000.

Brockhaus, Klaus: Untersuchungen zu Carnaps Logischem Aufbau der Welt. Unveröffent–lichte Dissertation, Universität Münster, 1963.

Carnap, Rudolf: Die Quasizerlegung – ein Verfahren zur Ordnung nichhomogener Mengen mit den Mitteln der Beziehungslehre. Unpublished manuscript RC-081-04-01, University of Pittsburgh, 1923.

Carnap, Rudolf: Der logische Aufbau der Welt, Hamburg, ^{2}1961.

Carus, Andrew W: Carnap and Twentieth-Century Thought, Cambridge, 2007.

Chalmers, David, J. Constructing the World, Oxford 2012.

Decock, Leon, Douven, Igor: 2011, Similarity after Goodman. In: Review of Philosophy and Psychology 2 (2011), 61 – 75.

Damböck, Christian: Die Entwicklung von Carnaps >Aufbau< 1920 – 1928 In: C. Damböck, G. Wolters (Hrg.) Der junge Carnap in historischem Kontext, Veröffentlichungen des Instituts Wiener Kreis 30 (2021), 19 – 53.

Dummett, Michael: Origins of Analytical Philosophy, London/England 1993.

Friedman, Michael: Reconsidering Logical Positivism, Cambridge 1999.

Ganter, Bernhard, Wille, Rudolf: Formale Begriffsanalyse. Mathematische Grundlagen, Berlin/Heidelberg/New York 1996.

Goodman, Nelson: 1963, The significance of >Der Logische Aufbau der Welt<. In: P.S. Schilpp (ed.) The Philosophy of Rudolf Carnap, The Library of Living Philosophers, volume XI, La Salle, Illinois, Open Court, 545 – 558.

Goodman, Nelson: The Structure of Appearance [1951], Dordrecht ^{3}1977.

Goodman, Nelson: Problems and Projects, Indianapolis and New York 1972.

Kleinknecht, Reinhard: Quasianalyse und Qualitätsklassen, Grazer Philosophische Studien 11(1980), 23 – 43.

Leitgeb, Hannes: A New Analysis of Quasi-Analysis. In: Journal of Philosophical Logic: 36 (2007), 181- 226.

Leitgeb, Hannes: Scientific Philosophy, Mathematical Philosophy and All That. In: Metaphilosophy, 44(3) (2013), 267-275.

Mormann, Thomas: A representational reconstruction of Carnap's Quasi-analysis. In: M. Forbes (ed.), PSA 1994, volume 1, 96 – 104.

Mormann, Thomas: New work for Carnap's quasi-analysis. In: Journal of Philosophical Logic 38(3) (2009),249–282.

Moulines, Carlos U.: Making Sense of Carnap's Aufbau. In: Erkenntnis 35 (1991), 263 – 286.

Mundy, Brent: On the General Theory of Meaningful Representation. Synthese 67 (1986), 391-437.

Proust, Joelle: Questions of Form. Logic and the Analytic Proposition from Kant to Carnap. Minneapolis 1989.

Richardson, Alan W.: Carnap's construction of the World. The >Aufbau< and the Emergence of Logical Positivism. Cambridge 1998.

Russell, Bertrand: Our Knowledge of the External World as a Field for Scientific Method in Philosophy [1914], London/New York 1995.

Wedberg, Anders: 1975, How Carnap Built the World in 1928, Synthese 25, 337 – 371.

Thomas Mormann