Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge
zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 11 (2019)

Mit Beiträgen von:

G. Gabriel/S. Schlotter | K. Herrmann | D. Koenig

T. Mormann | M. Neuber | S. Shokrani

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 8 (2017)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2017

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Wissenschaftsphilosophie im Marburger Neukantnianbismus

Thomas Mormann

1 Mathematische versus logische Wissenschaftsphilosophie.

Die Wissenschaftsphilosophie als eigenständige philosophische Disziplin ist relativ jung. Ihre Anfänge lassen sich auf das letzte Drittel des 19. Jahrhunderts datieren. In dieser kurzen Zeit hat die Wissenschaftsphilosophie gleichwohl erhebliche Wandlungen durchgemacht, die genauer zu verstehen und aufzuarbeiten sich eine eigene Disziplin, die Geschichte der Wissenschaftsphilosophie zur Aufgabe gemacht hat.

Einen in der zeitgenössischen Diskussion recht vernachlässigten Ansatz der frühen Wissenschaftsphilosophie bilden die verschiedenen Strömungen des Neukantianismus, der bis in die ersten Jahrzehnte des 20. Jahrhunderts in Deutschland eine dominierende Rolle spielte. Angesichts der monopolartigen Stellung der analytischen Wissenschaftsphilosophie angelsächsischer Provenienz scheint die neukantianische Wissenschaftsphilosophie heute bestenfalls noch ein philosophiehistorisches Interesse beanspruchen zu können. Ich möchte zeigen, daß dies zumindest für die neukantianische Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule (Cohen, Natorp, Cassirer) zu kurz greift. Die Marburger Schule vertrat einen sehr originellen wissenschaftsphilosophischen Ansatz, den ich als "mathematische Wissenschaftsphilosophie" bezeichnen möchte, der dadurch gekennzeichnet war, daß er die Mathematik – in noch genauer zu beschreibender Weise – ins Zentrum ihrer Aufmerksamkeit stellte.

Für die Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule war die Mathematik die konstituierende Methode der Naturwissenschaften überhaupt. Sie war Garant und Ausdruck für die Einheit und Wissenschaftlichkeit der Naturwissenschaften. Zugleich sei die Einsicht in diese Tatsache der Garant für die Wissenschaftlichkeit der (Wissenschafts-)Philosophie. Für diesen Ansatz argumentierte Hermann Cohen, der Gründer und das Haupt der Marburger Schule, seit Beginn seiner philosophischen Laufbahn unermüdlich, zuletzt 1912 in seiner *Einleitung von Friedrich Albert Langes Geschichte des Materialismus*:

> [K]ritische Philosophie, (d.h. wissenschaftliche Philosophie in der Nachfolge Kants, TM) ist diejenige, welche nicht nur schlechthin mit der Wissenschaft Zusammenhang hat, und auch nicht schlechthin mit der Naturwissenschaft, sondern in erster Linie mit der Mathematik, und erst durch sie, und an ihrer Hand mit der Naturwissenschaft.
>
> Die Mathematik gilt demzufolge als eine Methode der Naturwissenschaft, und zwar als diejenige, mit welcher die Naturwissenschaft in eigentlicher Bedeutung erst Wissenschaft wird: ohne welche jeder andere Anfang der Naturwissenschaft somit als ein unmethodischer erkennbar wird, wenngleich Jahrhunderte mit einem solchen sich begnügen mögen und begnügen müssen mögen. In diesem Kontext der Philosophie mit der Mathematik, als der Grundmethode der Naturwissenschaft, sind Platon, Descartes und Leibniz die Führer der Philosophie; ihnen hat Kant sich angeschlossen und ist er anzuschließen. (Cohen 1914, 59).

Dieses Verständnis des Zusammenhanges von Philosophie, Naturwissenschaft und Mathematik war die gemeinsame Grundüberzeugung *aller* Mitglieder der Marburger Schulgemeinschaft. Es scheint deshalb passend, die Marburger Wissenschaftsphilosophie als eine *mathematische Wissenschaftsphilosophie* zu charakterisieren. *Mathematische Wissenschaftsphilosophie* ist also keineswegs dasselbe wie *Philosophie der Mathematik*im heutigen Sinne. Den Marburger Philosophen war es um die Rolle der Mathematik in der wissenschaftlichen Begriffsbildung insgesamt zu tun.

Die Gründungsurkunde der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie ist zweifellos Hermann Cohens *Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte* (1883). In auf den ersten Blick durchaus exzentrisch anmutender Weise beschreibt Cohen die zentrale Aufgabe der Wissenschaftsphilosophie so:

> Die Begründung des *Infinitesimalbegriffs* ist in zwiefacher Hinsicht ein Anliegen der Philosophie. Erstlich ist das Gewissen der traditionellen

> Logik nicht beruhigt, bevor sie diesen Grundbegriff der mathematischen Naturwissenschaften, soweit ihre Mittel reichen, beschrieben und nach ihren Normen erklärt hat. Ferner aber bleibt in dem Verzeichnis der Grundlagen und Grundsätze der Erkenntnis eine unersetzliche Lücke, solange dieses fundamentale Werkzeug als eine Voraussetzung des mathematischen und demzufolge des Natur-Erkennens nicht anerkannt und abgegrenzt ist.
>
> ...
>
> Der Begriff der infinitesimalen Größe kann daher als ein eindringliches Beispiel gelten für die Notwendigkeit der Ergänzung der Logik durch ein anderes, verwandtes, aber zu unterscheidendes Untersuchungsgebiet. (Cohen 1883, §1)

Dieses mit der Logik verwandte, aber gleichwohl von ihr "zu unterscheidende Untersuchungsgebiet" bezeichnet Cohen als "Erkenntniskritik". Aus einer kantianischen Perspektive, so führt er dann aus, sei "Erkenntniskritik" gleichbedeutend mit der transzendentalen Logik; denn ihre Aufgabe sei die Entdeckung der synthetischen Grundsätze oder derjenigen Grundlagen des Erkennens, auf welchen die Wissenschaft sich aufbaut und von deren Geltung sie abhängt. Mit dieser These der Notwendigkeit einer transzendentalen Logik für ein philosophisches Verständnis der modernen Naturwissenschaften und der Mathematik vertrat der Marburger Neukantianismus eine der Wissenschaftsphilosophie analytischer Prägung entgegengesetzte Position.

Die zentrale Stellung des Infinitesimalbegriffs blieb eine Invariante von Cohens Wissenschaftsphilosophie, die sich von *Das Prinzip der Infinitesimal-Methode* (1883), über *Die Logik der reinen Erkenntnis* bis hin zur *Einleitung* in Friedrich Albert Langes *Geschichte des Materialismus* (1912) durchhielt. Andere Autoren der Marburger Schule, insbesondere Natorp und Cassirer, sind Cohen in seiner Fixierung auf den Infinitesimalbegriff als den zentralen Begriff der Wissenschaftsphilosophie nur halbherzig gefolgt, gleichwohl haben alle Cohens infinitesimalzentrierten Ansatz als Ausgangspunkt ihrer eigenen Überlegungen genommen. Zugleich waren sie bemüht, diskret, aber unmißverständlich deutlich zu machen, daß sie nicht bereit waren, allen von Cohens oft verwegenen metaphysischen Thesen bedingungslos zuzustimmen.[1]

1. Eine sehr detaillierte Darstellung der zahlreichen Kritiken, die Cohens *Das Princip* von seiten der verschiedensten Autoren erfahren hat, findet sich in Giovanellis Artikel „Hermann Cohen's *Das Princip der Infinitesimal-Methode: The history of an unsuccessful book* (Giovanelli 2016).

In *The Principles of Mathematics* (1903) unterzog Bertrand Russell Cohens "Infinitesimalphilosophie" einer vernichtenden Kritik. Ihm zufolge waren Infinitesimale für die Erklärung von Stetigkeit[2] "überflüssig", und überdies "fehlerhaft und selbstwidersprüchlich". Insbesondere, so Russell, gäbe es nicht so etwas wie "infinitesimale, d.h., unendlich kleine Strecken". Russell berief sich für diese Thesen auf die Mathematiker Weierstrass, Dedekind, und insbesondere auf Cantor. Dieser scheute sich bekanntlich nicht, Infinitesimale als "Cholerabazillen der Mathematik" zu bezeichnen und sich entsprechend vehement für die Ausrottung dieser "Krankheitserreger" einzusetzen.

Russells These, der Begriff des Infinitesimals hätte sich durch die Arbeiten Cantors, Dedekinds und Weierstraß' als grundsätzlich widersprüchlich und inkohärent erwiesen und sei deshalb endgültig und mit Recht aus der Mathematik zu verbannen, ist bei näherem Besehen, falsch:

(1) Russells These ist falsch in mathematischer Hinsicht: Infinitesimale sind keine widersprüchlichen Scheinbegriffe.

(2) Russells These ist falsch in wissenschaftshistorischer Hinsicht: Infinitesimale wurden nicht aufgrund der Arbeiten von Cantor, Dedekind, und Weierstraß aus dem mathematischen Diskurs verbannt. Richtig ist, daß Infinitesimale im Bereich der Analysis von vielen Mathematikern, aber nicht von allen, mit einem gewissen Argwohn betrachtet wurden.

Der Infinitesimalbegriff, den insbesondere logische Empiristen von Carnap bis hin zu Quine gern als Paradebeispiel eines überwundenen logischen Scheinbegriffes präsentierten (cf. Carnap 2004 (1928), 5), erweist sich bei näherem Besehen keineswegs als solcher. Schaut man genauer hin, war auch die Einstellung der logischen Empiristen zum Problem des Infinitesimalbegriffs keineswegs eindeutig. Der Mathematiker und logische Empirist Hans Hahn, eines der führenden Mitglieder des Wiener Kreises, veröffentlichte 1907 die umfangreiche Arbeit *Über die nichtarchimedischen Größensysteme* (Hahn 1907) die bis heute als eine der grundlegenden Arbeiten über diese Klasse von Größensystemen gilt.[3] *Nichtarchimedische Größensysteme* aber sind, wie gleich genauer erklärt werden soll, Größensysteme, die infinitesimale, also unendlich kleine, gleichwohl von 0 verschiedene Größen enthalten, die miteinander verglichen werden können.

2. In moderner Terminologie meint Russells „Stetigkeit" wohl „Differenzierbarkeit". Russell ist sich offenbar nicht darüber im Klaren, daß es überall stetige, nirgends differenzierbare Funktionen gibt.

3. Bei den anderen Mitgliedern des Wiener Kreises, also Hahns engsten philosophischen Weggefährten, sind seine mathematischen und philosophischen Arbeiten zur Relevanz der nichtarchimedischen Mathematik jedoch kaum auf Interesse gestoßen. Eine Ausnahme bildet höchstens sein Student Friedrich Waismann.

Cohens Wissenschaftsphilosophie, die dem Begriff des Infinitesimals eine zentrale Stellung einräumte, läßt sich charakterisieren als ein *nichtarchimedischer* Ansatz. Aus der Tatsache, daß solche Größen heute durchaus als mathematisch "vernünftige" Entitäten angesehen werden, läßt sich natürlich keineswegs ableiten, daß auch Cohens "nichtarchimedische" Wissenschaftsphilosophie dieses Prädikat verdient. Immerhin aber läßt sich behaupten, daß sein Ansatz nicht von vornherein eine Totgeburt war, wie dies in der Nachfolge von Russell von analytischen Philosophen wie Carnap, Quine und vielen anderen behauptet worden ist. Ich glaube, man kann sogar zeigen, daß eine mathematische Wissenschaftsphilosophie, die in gewisser Weise an den Marburger Ansatz anschließt, einen Beitrag auch zur aktuellen wissenschaftsphilosophischen Diskussion leisten könnte.

Für diese These möchte ich im Folgenden so argumentieren: Im zweiten Teil dieser Arbeit möchte ich zunächst den Begriff der nichtarchimedischen Größensysteme und seine Geschichte etwas genauer betrachten.[4] Das bezweckt, den Begriff der "infinitesimalen" Größe vom Verdacht, er wäre notwendigerweise "absurd", "inkonsistent" oder sonstwie defizient, zu befreien. Danach soll etwas genauer die Entwicklung der Marburger Schule ins Auge gefaßt werden. Die von Cohen inaugurierte "Infinitesimalmetaphysik" der Marburger Schule hat im Verlauf der Zeit durchaus bedeutsame Wandlungen durchgemacht. Das gilt für Cohens Auffassungen selbst, aber natürlich erst recht, wenn man auch die Arbeiten der anderen Mitglieder betrachtet. Die mathematische Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule geht keineswegs in Cohens infinitesimal-zentriertem Ansatz auf. Natorp, in *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften* (Natorp 1910), und Cassirer in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Cassirer 1910) haben Cohens Ansatz in verschiedene Richtungen fortgeschrieben, die in mancher Hinsicht nur schwer oder gar nicht mit Cohens ursprünglichen Intentionen vereinbar sind. Diese Diskrepanzen sind in den internen Diskussionen der Marburger nur implizit zur Sprache gekommen. Dieses Thema der inneren Entwicklung der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie soll in Grundzügen im dritten Teil behandelt werden. Anschließend möchte ich im vierten Teil auf Abraham Robinsons "Non-Standardanalysis" eingehen, die als endgültige Rehabilitation eines Leibnizianischen, auf dem Infinitesimalbegriff aufbauenden Kalküls angesehen werden kann.

4. Für eine ausführliche Darstellung der Entstehung einer nichtarchimedischen Mathematik konsultiere der Leser Philip Ehrlich voluminösen Artikel *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception* (Ehrlich 2006).

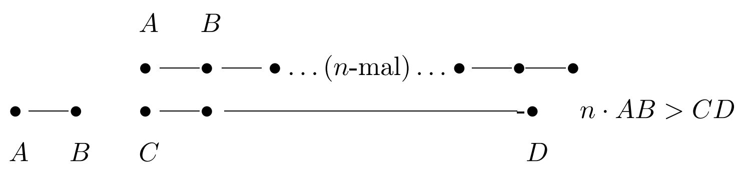
2 Archimedische und nichtarchimedische Größensysteme.

In der Mathematik werden Größensysteme mit unendlich kleinen Größen als *nichtarchimedische* Größensysteme bezeichnet, Größensysteme mit ausschließlich endlichen Größen nennt man *archimedische* Größensysteme. Ein paradigmatisches Beispiel für ein archimedisches System ist das System der natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, <)$ mit dem üblichen $<$-Begriff. Ein nichtarchimedisches System hingegen wäre ein solches, das

> Größen [enthält], die unendlich nahe bei Null liegen und dennoch – "absurderweise" (Quine 1980, 428) – von einander und von 0 verschieden sind.

Die offizielle Charakterisierung *archimedischer* geometrischer Größen ("Strecken") findet sich in David Hilberts *Grundlagen der Geometrie*:

(2.1) Archimedisches Axiom der Geometrie (Hilbert 1899, §8, V1). Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß das n-malige Hintereinander-Abtragen der Strecke AB auf dem durch CD gehenden Halbstrahl über den Punkt D hinausführt:



Dieses *archimedische* Axiom scheint uns, wohl weil wir an eine euklidisch strukturierte Welt gewöhnt sind, ziemlich selbstverständlich. Infinitesimale, also nichtarchimedische Größen sind "absurde" Größen, die dieses Axiom *nicht* erfüllen. Wäre AB eine Größe, die bezüglich CD das archimedische Axiom *nicht* erfüllte, wäre AB relativ CD unendlich klein, oder – aus der umgekehrten Perspektive – CD wäre unendlich groß in Bezug auf AB, da kein Vielfaches von AB jemals größer als CDu sein könnte.

Die Nichterfüllung des archimedischen Axioms besagt gerade, daß es "*unendlich kleine*" und "*unendlich große*" Strecken gibt. In unserer euklidischen Beschränktheit, können wir uns nichtarchimedische Größen nicht "vorstellen". Sie widersprechen der gewöhnlichen Anschauung. Seit den 80er Jahren des 19. Jahrhunderts war jedoch wohlbekannt, daß es solche nichtarchimedischen Systeme gab. In den *Grundlagen der Geometrie* § 12 zeigte Hilbert insbesondere, daß es Systeme gibt, die alle anderen Axiome der euklidischen Geometrie erfüllen, aber nicht das archimedische Axiom.

Tatsächlich stand Hilbert nicht nur als Mathematiker nichtarchimedischen Systemen sehr aufgeschlossen gegenüber. Er wies explizit darauf hin, daß sie nicht nur mathematisch, sondern auch wissenschaftsphilosophisch interessant sein könnten. Die Unabhängigkeit des archimedischen Axioms von den anderen geometrischen Axiomen sei, so Hilbert, auch für die Physik von prinzipiellem Interesse:

> ...denn sie (i.e., die Unabhängigkeit, TM) führt zu folgendem Ergebnis: die Tatsache, daß wir durch Aneinanderfügen irdischer Entfernungen die Dimensionen und Entfernungen der Körper im Weltenraume erreichen, d.h. durch irdisches Maß die himmlischen Längen messen können, ebenso die Tatsache, daß sich die Distanzen im Atominnern durch das Metermaß ausdrücken lassen, sind keineswegs bloß eine logische Folge der Sätze über Dreieckskongruenzen und der geometrischen Konfiguration, sondern erst ein Forschungsresultat der Empirie. Die Gültigkeit des Archimedischen Axioms in der Natur bedarf eben im bezeichneten Sinne gerade so der Bestätigung durch das Experiment wie etwa der Satz von der Winkelsumme im Dreieck im bekannten Sinne. (Hilbert 1917, 408-409)

Um die mathematische Sinnhaftigkeit nichtarchimedischer Strukturen nachzuweisen, genügt es, allgemeine "Größensysteme" zu betrachten, wie sie ausführlich schon Hans Hahn untersucht hatte. Hahn definierte "Größensysteme" als linear geordnete kommutative Gruppen $G = (G, +, \leq, 0)$, also als Strukturen, für die eine assoziative und kommutative Addition "+" und eine lineare Ordnung "<" definiert waren, die den üblichen Axiomen genügten, wie sie etwa für das System der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \leq, 0)$ gelten. Bezeichnet man das neutrale Element von G mit 0, so heißen Elemente, für die gilt $0 < a$, positiv, und Elemente b, die $b < 0$ erfüllen, negativ. Ein Größensystem G erfüllt das archimedische Axiom genau dann, wenn gilt:

(2.2) Archimedisches Axiom für Algebraische Grössensysteme (Hahn 1907, 606). Ein Größensystems $(G, <)$ heißt archimedisch genau dann, wenn es für alle positiven Größen a und b mit $a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $na > b$ ($na := (a+a+...+a)$ (n-mal)) gilt. Andernfalls ist es nichtarchimedisch.$\diamondsuit$

Offenbar ist das System der ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$, $+$, $\leq$, 0) ein archimedisches System. Für die Gruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Paare ganzer Zahlen erhält man durch die folgende Definition eine nichtarchimedische Ordnung (vgl. Hahn 1908, 609):

$$\begin{aligned}(a,b) &< (a',b'), \text{ wenn } a < a' \\ (a,b) &< (a,b'), \text{ wenn } b < b'\end{aligned}$$

In dieser nichtarchimedischen Ordnung sind die Paare $(0, b)$ in Bezug auf die Paare (a, b) mit $0 < a$ infinitesimal, d.h. unendlich klein in Bezug auf alle Zahlenpaare (a, b), $a > 0$. Das Größensystem $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <)$ ist also nichtarchimedisch. $\diamondsuit$

Größensysteme wie $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <)$ mögen "künstlich" erscheinen und sicherlich leisten sie nichts für das Verständnis der im traditionellen Infinitesimalkalkül verwendeten unendlich kleinen Größen $dx, dy, \ldots$. Immerhin aber zeigen sie, daß der Begriff der unendlich kleiner Größen keineswegs grundsätzlich "absurd" wäre. Sie verdanken ihre "Absurdität" wohl eher einem unbewußten Festhalten an der Forderung der "Anschaulichkeit", die wesentlich durch Gewohnheit bestimmt werden dürfte.

Gleichwohl gibt es ein grundsätzliches Problem mit dieser Art von nichtarchimedischen Größensystemen, wie seit Ende des 19. Jahrhunderts in der Mathematik diskutiert wurden. Dies hatte Felix Klein, der Inaugurator des *Erlanger Programms*, bereits 1908 so formuliert:

> Es liegt nun natürlich die Frage nahe, *ob man auf solche Zahlensysteme gestützt der traditionellen Begründung der Infinitesimalrechnung mit unendlich kleinen Größen eine durchaus exakte, modernen Ansprüchen genügende Gestaltung geben,* d.h. gewissermaßen auch eine *nichtarchimedische Analysis* aufbauen könnte. Die erste und hauptsächlichste Aufgabe dieser Analysis wäre, den Mittelwertsatz:
>
> $$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$
>
> aus den hier vorauszusetzenden Axiomen zu beweisen. Ich will einen Fortschritt in dieser Richtung nicht geradezu als unmöglich bezeichnen; bisher ist aber jedenfalls von keinem der vielen Forscher, die sich mit aktual unendlich kleinen Größen beschäftigt haben, dazu etwas Positives geleistet worden. Klein (1908, 236)

Kleins Pessimismus hinsichtlich der Aussichten, einen „brauchbaren“ Infinitesimalbegriff zu formulieren, war zu seiner Zeit und noch lange darüber hinaus unter Mathematikern weit verbreitet. Auch Hermann Weyl, zehn Jahre später in *Philosophie der Mathematik und der Naturwissenschaft* (Weyl 1918), kam zu der resignierten Feststellung, es sei zwar keineswegs unmöglich, eine folgerichtige "nichtarchimedische" Größenlehre aufzubauen, "in welcher das (meistens nach Archimedes benannte) Axiom des Eudoxos nicht gilt; aber man sieht sofort, daß sie für die Analysis gar nichts leistet." Ähnlich äußerte sich Abraham Fraenkel, einer der Pioniere der modernen Mengentheorie.[5]

All diesen pessimistischen Einschätzungen zum Trotz gelang es Fraenkels Schüler Abraham Robinson schließlich doch, nichtarchimedische Systeme zu konstruieren, die das Kleinsche Kriterium erfüllten, in denen eine strenge Ableitung des Mittelwertsatzes und damit eine Infinitesimalrechnung im klassischen Sinne möglich war. Damit waren die letzten Zweifel an der Vernünftigkeit und Leistungsfähigkeit nicht-archimedischer Systeme ausgeräumt.

Nur in einem sehr eingeschränkten Sinne kann man diese Entwicklung so beschreiben, daß die Marburger Wissenschaftsphilosophie, die in Opposition zur dominierenden mathematischen Orthodoxie an der Sinnhaftigkeit des Infinitesimalbegriffs festgehalten hatte, gegenüber dieser "Recht behalten hätte". Immerhin aber läßt sich sagen, dass die Geschichte des Infinitesimalbegriffs belegt, dass die erfolgreiche Mathematisierung eines Begriffs durchaus nicht immer im ersten Anlauf erfolgreich sein muss, sondern einen sehr langen Zeitraum in Anspruch nehmen kann.

3 Von Cohen zu Natorp und Cassirer.

Dass die Marburger mathematische Wissenschaftsphilosophie dem Infinitesimalbegriff eine zentrale Stellung einräumte, heisst nicht, alle Mitglieder der Schule hätten diesen Begriff in der selben Weise verstanden oder ihr Verständnis des Infinitesimalbegriffs hätte im Lauf der Zeit keine Entwicklung durchlaufen. Insbesondere kann man nicht davon ausgehen, Cohens Begriff des Infinitesimals, so wie er ihn in *Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte* (Cohen 1883) präsentiert, wäre schlicht derselbe, den er mehr als dreißig Jahre später in der *Einleitung* zu Langes *Geschichte des Materialismus* (Cohen 1914) formulierte. Erst recht ist die Annahme unbegründet, andere Mitglieder der Schule wie Natorp

5. Für eine ausführlichere Darstellung dieses Skeptizismus, einen für den klassischen Differential- und Integralkalkül brauchbaren Infinitesimalbegriff zu formulieren, siehe Kanovei et al. (2018) und die dort angegebene Literatur.

und Cassirer hätten hinsichtlich der Interpretation des Infinitesimalbegriffs vollständig mit Cohen überein gestimmt. Das gilt ungeachtet der Tatsache, daß sie, sogar noch über Cohens Tod hinaus, bemüht waren, Differenzen mit dem Gründer der Schule nicht in der philosophischen Öffentlichkeit zu verhandeln.

Cohens Verständnis des Infinitesimalbegriffs hat im Verlauf seiner philosophischen Karriere keineswegs unbedeutende Veränderungen durchlaufen, die als Ausdruck grundsätzlicher Veränderungen der philosophischen Landschaft vom 19. zum 20. Jahrhundert gelesen werden können, nämlich als Auswirkung dessen, was des öfteren als "Krise der Anschauung" bezeichnet worden ist (cf. Hahn 1988 (1933)).[6]

In *Das Princip* legte Cohen seiner infinitesimalen Wissenschaftsphilosophie noch eine "kantianisierende" Definition der doppelten Bestimmung des Infinitesimalbegriffs durch Anschauung und Denken zugrunde. Diese Definition wird in *Die Logik der reinen Erkenntnis* (1902) explizit und unmißverständlich aufgegeben. Der Infinitesimalbegriff wird von nun an dezidiert als Produkt des "reinen Denkens" deklariert:

> [D]as *Infinitesimale geht der Ausdehnung vorauf, und liegt ihr zu Grunde: Imo extensione prius*, so bezeichnet Leibniz das Unendlichkleine. *Also im reinen Denken allein ist es gegründet, und kraft desselben vermag es den Grund des Endlichen zu bilden. Der Ursprung ist also der Grund* [des Infinitesimalen, TM]; das [zum reinen Denken gehörende, TM] Urtheil, und keine Empfindung und keine Anschauung (Hervorhebung im Original). Cohen (1902, 106 - 107)

Diese These Cohens über den "Ort des Infinitesimals im reinen Denken" übernehmen Natorp und Cassirer in ihren Versionen der Infinitesimalphilosophie. "Reines Denken" war ein für den Marburger Neukantianismus zentrales Konzept, dem in der modernen Wissenschaftsphilosophie kaum ein Pendant zugeordnet werden kann. Es kann als ein programmatischer Begriff angesehen weren, mit dessen Hilfe sich die Marburger Wissenschaftsphilosophie von anderen, ebenfalls von der modernen Logik und Mathematik inspirierten wissenschaftsphilosophischen Schulen absetzen wollte. Für die Marburger Schule ging Wissenschaftsphilosophie nicht in der relationalen Logik von Frege, Russell und Whitehead auf. Sie betonte vielmehr die Eigenständigkeit des "reinen Denkens", das sich ihrer Überzeugung nach nicht in der relationalen Logik erschöpfte, sondern als wesentlichen Bestandteil noch eine Logik des Infinitesimalen umfasse. Was jedoch diese "Logik des Infinitesimalen" genauer sein sollte, haben die Marburger Philosophen niemals endgültig klären können. Während für Cohen im Mittelpunkt dieser Logik tatsächlich der Begriff

6. Vgl. auch Volkert (1986).

des Infinitesimals stand, kam Cassirer zu der Überzeugung, dass der Zentralbegriff des reinen Denkens im Funktionsbegriff zu erblicken sei.

Cohens in *Das Princip* formulierter Infinitesimalbegriff war also nur der *Ausgangspunkt* der mathematischen Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule, er deckte keineswegs ihre ganze Spannbreite ab. Die anderen Mitglieder der Schule betrachteten *Das Prinzip* nicht als sakrosankten Text, auch wenn sie es kaum je offen oder gar öffentlich, kritisierten, sie betrachteten es als Grundlage und Ausgangspunkt ihrer eigener Überlegungen, deren Ergebnisse keineswegs immer mit Cohens Vorgaben kompatibel waren.

Das gilt selbst für Cohens treuesten Anhänger Natorp, dessen wissenschaftsphilosophisches Hauptwerk *Die Logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften* (Natorp 1910) als Versuch gelesen werden kann, Cohens ziemlich dunkle Ausführungen zur Mathematik und zu den mathematischen Naturwissenschaften, die er in *Die Logik der reinen Erkenntnis* (1902) vorgetragen hatte, verständlicher zu machen. Das hinderte ihn aber keineswegs daran, in *Die Logische Grundlagen* (1910) seine eigene Darstellung des Infinitesimalproblems zu präsentieren, ohne genauer zu explizieren, wo er von Cohens Thesen abwich und wo nicht.

Im Vergleich zu Cassirers im selben Jahr erschienenen Werk *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Cassirer 1910) sind Natorps *Die Logischen Grundlagen* in der Wissenschaftsphilosophie außerhalb der Marburger Schule kaum, und wenn, dann nur ablehnend, zur Kenntnis genommen worden. Und das, obwohl sie in gewisser Hinsicht moderner und mathematisch detaillierter waren als *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*.[7]

Natorp ist der einzige Wissenschaftsphilosoph, der jemals auf die Problematik nicht-archimedischer Größensysteme eingegangen ist. Er versuchte sogar, eine Art Synthese aller zu seiner Zeit in der Mathematik existierenden Theorien des Unendlichen, insbesondere des Unendlichkleinen zu liefern. Dabei stützte er sich, und auch das unterscheidet ihn von allen anderen Wissenschaftsphilosophen seiner Zeit, auf das monumentale Werk des italienischen Mathematikers Guiseppe

7. Ein Beleg dafür ist zum Beispiel, daß Natorp als einer der ersten Wissenschaftsphilosophen überhaupt Einsteins spezielle Relativitätstheorie von 1905 philosophisch zu begreifen versuchte. Wenig überraschend, allerdings auch wenig überzeugend, kam er zu dem Urteil, die idealistische Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule sei durch Einsteins Theorie überzeugend bestätigt worden (cf. Natorp 1910, Siebentes Kapitel, §11 und §12). Cassirer hingegen beschränkte sich in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Cassirer 1910) bewußt auf die „klassische“ Physik und behandelte die Problematik der Relativitätstheorie erst viel später in *Zur Einsteinschen Relativitätstheorie* (Cassirer 1921), einem Werk, das im Gegensatz zu Natorps Ausführungen von Einstein selbst und anderen nichtidealistischen Wissenschaftsphilosophen ernst genommen wurde.

Veronese *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt* (Veronese 1894). Er behauptete, Veroneses Infinitesimale könnten als Quotienten der Form $1/\omega$ von Cantors unendlich großen Ordinalzahlen aufgefaßt werden, was ihn zu der Behauptung verführte, Veronese wäre als Vollender der Cantorschen Revolution in der Mathematik anzusehen. Überdies könnte Veroneses Theorie des Kontinuums als eine überzeugende Bestätigung des Marburger Ansatzes gelesen werden, insofern sie Cohens auf dem Begriff des reinen Denkens beruhende infinitesimale Wissenschaftsphilosophie glänzend bestätige:

> Veronese hat die Mathematik des Unendlichen von jedem Zwang der Berufung auf Anschauung mit vollem Recht freigesprochen. Die unendlich großen und unendlich kleinen Segmente werden nicht mittels der Anschauung bestimmt, sondern durch einen möglichen geistigen (d.h. reinen Denk-)Akt; ... . Natorp (1910, 187)
>
> ...
>
> Die einzige Erweiterung und damit zugleich Berichtigung, deren die Aufstellungen Cantors in prinzipieller Hinsicht noch bedurften, war die Ergänzung nach unten [d.h. durch Infinitesimale, TM]. (ibid., 200)

Diese Behauptungen sind mathematisch unhaltbar: Cantors unendliche Zahlen, seien es nun Ordinalzahlen oder Kardinalzahlen, sind von Veroneses unendlichen Zahlen fundamental verschieden. Auch Robinsons System der hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$ ist von Cantors System der Ordinalzahlen ganz verschieden, insbesondere können Robinsons Infinitesimale durchaus nicht als "Quotienten" $1/\omega$ oder $1/\aleph$ von Cantors unendlichen Ordinal- oder Kardinalzahlen definiert werden.

Natorps *Die Logischen Grundlagen* haben von seiten der Mathematiker fast ausschließlich negative Beachtung gefunden. So schrieb der Mathematiker Abraham Fraenkel, im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts einer der Protagonisten der Mengentheorie, in seinen Lebenserinnerungen:

> [Ich] war aufs tiefste betroffen durch die Behandlung des Unendlichkleinen in der Marburger Schule, angefangen mit Cohens *Prinzip der Infinitesimalmethode*" (1883) bis hin zu Natorps *Logischen Grundlagen* (1910), in welchem Werk das Infinitesimale in direkte Korrespondenz zu Cantors transfiniten Zahlen gebracht wird. Eine ganz andere, legitime und überraschende Ehrenrettung des aktual Unendlichkleinen ist neuerdings – von 1960 an – meinem Schüler Abraham Robinson ... gelungen. Fraenkel (1967, 107-108).

Natorp verfolgte in *Die Logischen Grundlagen* das Projekt, eine tragfähige Verbindung herzustellen zwischen einer ziemlich orthodoxen infinitesimaler Metaphysik Cohenscher Prägung und seiner eigenen (verfehlten) Synthese von Cantors Theorie des Unendlichen und Veroneses nichtarchimedischer Mathematik. Dieses Projekt war zum Scheitern verurteilt, da die von Natorp skizzierte Synthese zwischen Cantors und Veroneses Theorien des Unendlichen an einem nicht korrigierbaren mathematischen Konstruktionsfehler krankte, nämlich der These, daß Infinitesimale schlicht als Kehrwerte $1/a$ von Cantors unendlich großen Zahlen aufgefaßt werden konnten.

Das heißt nicht, daß es keine Möglichkeit gäbe, die mit "Cohen", "Cantor" und "Veronese" abkürzend bezeichneten Ideenkomplexe in einen sinnvollen Zusammenhang zu bringen. Diese Möglichkeit aber lag ganz und gar außerhalb des mathematischen und philosophischen Vorstellungshorizontes von Natorp. Den wesentlichen mathematischen Schritt zu ihrer Realisierung hat Abraham Robinson mit der Entwicklung der *Non-Standardanalysis*getan.

Eine Andeutung einer möglichen Versöhnung der *Non-Standardanalysis* und der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie aber findet man schon bei Cassirer, genauer gesagt, in der mathematischen Philosophie, die Cassirer in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* entwickelt hat. Darauf möchte ich nun eingehen. Das läuft darauf hinaus, der mathematischen Wissenschaftsphilosophie des Marburger logischen Idealismus eine gewisse programmatische Zukunftsfähigkeit zuzugestehen.

Während Natorps *Logische Grundlagen* sich bewußt und sehr deutlich in die Tradition von Cohen infinitesimaler Erkenntnislogik stellten, ist Cassirers *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* nur noch locker mit Cohens Ansatz verbunden, auch wenn Cassirer bemüht war, diesen Eindruck zu vermeiden. Wie aus dem Briefwechsel der beiden hervorgeht, hatte Cohen selbst durchaus ein Gespür für die Tatsache, dass Cassirer mit *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* einen Weg einschlug, der ihn von Cohens ursprünglichen Ansatz immer weiter entfernte (cf. Cassirer 2009).

Im Gegensatz zu Cohen sah Cassirer den Infinitesimalkalkül nur als einen Kalkül unter anderen. Die "Logik der Mathematik" sei, so Cassirer, im Sinne von Grassmanns *Ausdehnungslehre* (Grassmann 1844) eine Logik der Kalküle, von denen der Infinitesimalkalkül eben nur einer sei.

Der wissenschaftlichen Erkenntnis, sei sie nun Erkenntnis der Mathematik oder der empirischen Wissenschaften, gehe es immer um begriffliche Analyse und Synthese.

Diese Forderung des Zusammendenkens von empirischer Wissenschaft und Mathematik war für Cassirer ein unverzichtbares Erbe der Cohenschen idealistischen Wissenschaftsphilosophie. Logik und Mathematik auf der einen und empirische Erkenntnis auf der anderen Seite ließen sich nicht trennen:

> Was die kritische Philosophie sucht und was sie fordern muß, ist eine *Logik der gegenständlichen Erkenntnis* [alias transzendentale Logik, TM]. Cassirer (1907, 42)
>
> ...
>
> Erst wenn wir begriffen haben, daß dieselben Grundsynthesen, auf denen Logik und Mathematik beruhen, auch den wissenschaftlichen Aufbau der Erfahrungserkenntnis beherrschen, daß erst sie es uns ermöglichen, von einer festen gesetzlichen Ordnung unter Erscheinungen und somit von ihrer gegenständlichen Bedeutung zu sprechen: erst dann ist die wahre Rechtfertigung der Prinzipien erreicht. (ibid., 45)
>
> ...
>
> Der Blick der Philosophie darf – wenn man dieses Verhältnis einmal schroff und paradox ausdrücken will – weder auf die Mathematik noch auf die Physik gerichtet sein; er richtet sich einzig auf den Zusammenhang beider Gebiete. (ibid., 48)

Die Explizierung dieser, der Mathematik und den mathematischen Naturwissenschaften gemeinsamen, konstituierenden Synthesen kann als Cassirers Fortsetzung und Erweiterung von Cohens Infinitesimalmetaphysik angesehen werden. Diese "gemeinsamen Synthesen" lassen sich allgemein beschreiben als die Einführung idealer Elemente, durch die eine idealisierende begriffliche Vervollständigung und Vereinheitlichung erreicht wird.

Das paradigmatische Beispiel einer solchen *Vervollständigung* in der Mathematik war für Cassirer die Vervollständigung des Systems der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zum System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Damit schließt sich der Kreis: Der Übergang von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu Robinsons nichtarchimedischem, infinitesimal vervolllständigten System $\mathbb{R}^*$ kann ebenfalls als Vervollständigung beschrieben, analog zu der besser bekannten, "klassischen" Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$. Man kann also Robinsons Non-Standardanalysis als eine Bestätigung von Cassirers allgemeinem Schema der mathematischen Begriffsentwicklung ansehen, eben als *Vervollständigung* (cf. Mormann 2008).

Cassirer bettete also Cohens infinitesimal-zentrierten Ansatz in einen allgemeineren Zusammenhang ein, wodurch seiner Auffassung nach das Wesen von Cohens Ansatz jedoch nicht tangiert werde. Eine solche infinitesimale Vervollständigung *in extenso* konstruiert zu haben, ist das Verdienst Abraham Robinsons. Cassirer konnte sie also nicht kennen. Gleichwohl paßt Robinsons Vervollständigung sehr gut in den von Cassirer skizzierten Rahmen einer Mathematik und mathematische Naturwissenschaften umfassenden Wissenschaftsphilosophie. Dafür auch auf Robinsons Nicht-Standardanalyse einzugehen, empfiehlt sich, gerade für ein besseres Verständnis der Marburger Wissenschaftsphilosophie, auch wenn dies zunächst anachronistisch anmuten mag.

4 Hyperreelle Zahlen und andere Vervollständigungen.

Eine philosophische (und nicht rein philosophiehistorische) Einschätzung der Marburger mathematischen Wissen-schaftsphilosophie kommt nicht darum herum, kurz auf die von Abraham Robinson inauguierte Non-standardanalysis einzugehen, auch wenn es keine direkten Beziehungen zwischen beiden gegeben hat: die Marburger Wissenschaftsphilosophie war längst vor Robinson von der historischen Bühne abgetreten, und Robinson ist auf die Marburger Schule, wenn überhaupt, nur sehr *en passant* eingegangen (cf. Robinson 1966, 278). Warum das mathematische Faktum der Non-Standardanalysis trotzdem für eine philosophische Einschätzung der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie relevant sein könnte, soll in diesem letzten Teil dieses Textes etwas genauer begründet werden.

Aus einer mathematikhistorischen Perspektive betrachtet kann man die auf einem System hyperreeller Zahlen basierende Nichtstandardanalyse als Versuch charakterisieren, eine im modernen Sinne hinreichend strenge Begründung für das Rechnen mit infinitesimalen, also unendlich kleinen Zahlen zu finden, wie sie der Leibnizsche Infinitesimalkalkül verwendete. In den Händen von Leibniz und anderen „genialen“ Mathematikern des 17. und 18. Jahrhunderts führte dieser Kalkül zwar zu richtigen und interessanten Ergebnissen, gleichwohl mußten ihre Methoden Mathematikern späterer Generationen nicht selten als logisch dubios erscheinen.

Leibniz’ Intention war es, das System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu einem System $^*\mathbb{R}$ zu erweitern derart, daß das erweiterte System $^*R$ neben den „gewöhnlichen“ reellen Zahlen auch infinitesimale Zahlen enthielt, die jedoch „dieselben“ Regeln wie die endlichen Zahlen erfüllten.

Während die Philosophen und Mathematiker des 17. Und 18. Jahrhunderts noch hoffen konnten, dieses Projekt sei realisierbar oder gar schon realisiert, war spätestens seit Ende des 19. Jahrhunderts klar, daß ein solches Projekt undurchführbar ist: Das System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Das heißt, es gibt keine Erweiterung $\mathbb{R}^*$ von $\mathbb{R}$, die Infinitesimale enthält und die alle „Regeln" von $\mathbb{R}$ erfüllt. Diese Tatsache, oder gar ihr Beweis, lag zu Leibniz' Zeiten außerhalb des Horizontes auch der besten Mathematiker, da es ja noch nicht einmal eine exakte Definition der reellen Zahlen gab. Seit mehr als hundert Jahren ist die wesentliche Eindeutigkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ „mathematische Folklore". Damit scheint jedoch ein Leibnizsches Erweiterungsprogramm, das die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu einem System „hyperreeller" Zahlen $^*\mathbb{R}$ mit Infinitesimalen vervollständigen will, endgültig gescheitert.

Bei genauerem Hinsehen erwies sich diese Verabschiedung von Leibniz' Programm jedoch als voreilig. Zwar kann es keine infinitesimale Erweiterung $^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ geben, die zu $\mathbb{R}$ isomorph ist, für die also dieselben Theoreme wie für $\mathbb{R}$ gelten, alle Sätze des Leibnizschen Infinitesimalkalküls sind aber – etwas vereinfacht gesagt – in einer Logik erster Stufe formulierbar, die als Übersetzungen von Sätzen über Sachverhalte in $\mathbb{R}$ erscheinen. Man kann nun zeigen – und das tat Robinson – daß es infinitesimale Erweiterungen $^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ gibt derart, daß die strukturellen Beziehungen zwischen $\mathbb{R}$ und $^*\mathbb{R}$ so sind, daß diese Sätze genau dann wahr sind, wenn ihre Übersetzungen in Sätze über $\mathbb{R}$ wahr sind. Im Jargon der modernen Modelltheorie wird das so ausgedrückt, daß ein „Transfer-Theorem" zwischen $\mathbb{R}$ und $^*\mathbb{R}$ gilt. Insgesamt gelang es so, eine dem Leibnizschen Infinitesimalkalkül sehr ähnliche „Nichtstandardanalyse" zu formulieren, die den Exaktheitsansprüchen der modernen Mathematik genügt und es damit erlaubt, die eleganten Regeln des Leibnizschen Kalküls „ohne schlechtes logisches Gewissen" zu verwenden.

Eine für das Verständnis der Non-Standardanalysis fundamentale Tatsache ist, daß die Konstruktion von $^*\mathbb{R}$ viele Merkmale gemein hat mit der Dedekind- oder Cantor-Vervollständigung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Das heißt, der Schritt von $\mathbb{R}$ zu $^*\mathbb{R}$ ähnelt in vielem dem Schritt von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$. Beide sind Vervollständigungen algebraischer Systeme, die nach sehr ähnlichen Mustern konstruiert werden. Der philosophiehistorisch interessante Punkt ist, daß die Vervollständigungen von Dedekind und Cantor und ihre philosophische Bedeutung von Natorp und Cassirer ausführlich in *Die Logischen Grundlagen* (Natorp 1910) bzw. in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Cassirer 1910) diskutiert werden. Insbesondere für Cassirer war der Begriff der Vervollständigung ein Schlüsselbegriff für das philosophische Verständnis der wissenschaftlichen Begriffsbildung überhaupt.

Für Cassirers Philosophie der Mathematik (und damit auch für seine Wissenschaftsphilosophie insgesamt) war es von entscheidender Bedeutung, diesen Prozeß der Vervollständigung in seinem Wesen zu begreifen. Eine solche Vervollständigung sei nicht einfach als eine bloß extensionale Erweiterung eines mathematischen Gegenstandsbereichs zu verstehen. Eine Vervollständigung im eigentlichen Sinne liege nur dann vor,

> ... wenn sich zeigt, daß die neuen Elemente nicht einfach ... den alten "adjungiert" werden, sondern daß sie eine systematisch-notwendige *Entfaltung* der letzteren sind. Und der Beweis *dieses* Zusammenhangs läßt sich wiederum nicht anders führen als durch den Nachweis, daß zwischen den neuen und den alten Elementen gewissermaßen eine logische Urverwandtschaft besteht: in der Art, daß die neuen Elemente zu den früheren nichts hinzubringen als das, was schon in deren ursprünglichen Sinn enthalten ist und in diesem implizit beschlossen liegt.
>
> ...
>
> In der Tat wird man den Schlüssel für das eigentliche Verständnis der sog. "idealen" Gebilde eben darin zu suchen haben, daß die Idealität keineswegs erst bei ihnen *beginnt*, sondern daß sie in ihnen nur in prägnanter Schärfe und mit besonderem Nachdruck hervortritt. Cassirer (1929, 461)

Bemerkenswert ist nun, daß der Übergang vom archimedischen System $\mathbb{R}$ zu Robinsons nichtarchimedischem $\mathbb{R}^*$ strukturell ganz ähnlich beschrieben werden kann. Der Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}^*$ ist eine idealisierende Vervollständigung im Sinne Cassirers, durch die das System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch "Adjunktion" idealer Elemente zum System $\mathbb{R}^*$ erweitert wird. Diese Erweiterung ist nicht nur eine Erweiterung im extensionalen Sinne, sondern läuft auf eine echte "Tieferlegung der Fundamente" im Sinne Hilberts hinaus.

In strikter Analogie zur Konstruktion der reellen Zahlen als Vervollständigung rationaler Zahlen konstruiert man eine infinitesimale, d.h. nichtarchimedische Vervollständigung $\mathbb{R}^*$ von $\mathbb{R}$. Die Definition von $\mathbb{R}^*$ ist komplizierter als im Fall der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ mithilfe von Cauchyfolgen, sie setzt insbesondere das Auswahlaxiom voraus, um die Existenz geeigneter Ultrafilter zu gewährleisten.

Der für eine neue Einschätzung der Marburger Wissenschaftsphilosophie zentrale Punkt ist nun, daß für Cassirer *Vervollständigungen* im eben erörterten Sinne, also insbesondere die *Vervollständigung* des Systems rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zum System der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die fundamentale Methode der mathematischen und empirischen Begriffsbildung überhaupt darstellten. Da nun die Einführung von Infinitesimalen (und anderen hyperreellen Zahlen), also der Übergang von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^*$, als Vervollständigung beschrieben werden kann, ergibt sich, daß Robinsons Nichtstandard-Analyse sehr gut in den allgemeinen Rahmen der Cassirerschen Wissenschaftsphilosophie paßt.

Im Nachhinein, aus einer Perspektive, in der Robinsons infinitesimale Vervollständigung $^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ bereits bekannt ist, erscheint damit Cassirers auf einem allgemeinen Vervollständigungskonzept beruhende Konzeption als eine weitreichende Verallgemeinerung von Cohens mathematisch krudem, auf den Begriff des Infinitesimals fixierten Ansatz.

Folgt man Cassirers These, daß die fundamentalen Begriffsbildungen in der Mathematik und in den mathematischen Naturwissenschaften als *idealisierende Vervollständigungen* zu charakterisieren seien, wird damit eine bemerkenswerte begriffliche Kontinuität zwischen archimedischen und nichtarchimedischen Größensystemen sichtbar. Darüber hinaus hat sich das Problem der Rolle von Idealisierungen in den (Natur)wissenschaften als ein sehr fruchtbares Feld für die zeitgenössische wissenschaftsphilosophische Arbeit erwiesen.

Insgesamt erweist sich damit Cohens auf den Infinitesimalbegriff fokussierte Transzendentalphilosophie keineswegs mehr als so obsolet wie es auf den ersten Blick scheinen möchte.

Literatur

Biagioli, F. 2017, Space, Number, and Geometry from Helmholtz to Cassirer, Springer.

Carnap, R., 2004, Scheinprobleme in der Philosophie und andere metaphysikkritische Schriften, herausgegeben, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Thomas Mormann, Hamburg, Meiner Verlag.

Cassirer, E., 1902, Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen, Hamburg, Meiner.

Cassirer, E., 1907, Kant und die moderne Mathematik, Kant-Studien 12, 1 – 44.

Cassirer, E., 1912, Hermann Cohen und die Erneuerung der kantischen Philosophie, Kant-Studien 17, 252 – 273.

Cassirer, E., 1979 (1945), Reflections on the Concept of Group and the Theory of Perception, in E. Cassirer, Symbol, Myth, and Culture, edited by D.P. Verene, New Haven and London, Yale University Press, 271 – 291.

Cassirer, E., 1929 (1982), Philosophie der symbolischen Formen, Dritter Teil. Phänomenologie der Erkenntnis, Darmstand, Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Cassirer, E., 2009, Briefe, Ausgewählter wissenschaftlicher Briefwechsel. Unter Mitarbeit von Marion Lauschke, Claus Rosenkranz und Marcel Simon-Gadof herausgegeben von John M. Krois, Nachgelassene Manuskripte und Texte. Band 18, XLVIII, 380 Seiten sowie 1 DVD-ROM mit sämlichen etwa 1400 bislang aufgefundenen Briefen von und an Ernst Cassirer, Hamburg, Meiner.

Cohen, H., 1883, Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: Ein Kapitel Zur Grundlegung der Erkenntniskritik, Berlin, Dümmler.

Cohen, H., 1902, Logik der reinen Erkenntnis, Berlin, Bruno Cassirer.

Cohen, H., 1914/1984, Einleitung mit kritischem Nachtrag zur „Geschichte des Materialismus“ von F.A. Lange, edited by H. Holzhey, Hildesheim, Olms.

Ehrlich, P., 2006, The Rise of non-Archimedian Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedian Systems of Magnitudes, Archive of the History of Exact Sciences 60, 1 – 121.

Fraenkel, A.A., 1967, Lebenskreise. Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers, Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt.

Giovanelli, M., 2016, Hermann Cohen's *Das Princip der Infinitesimal-Methode*: The history of an unsuccessful Book, Studies in History and Philosophy of Science 58, 9 – 23.

Grassmann, H., 1844, Die lineale Ausdehnungslehre, Wiegand. Leipzig.

Hahn, H., 1907, Über die nicht-archimedischen Größensysteme, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse 116, 601 – 655. Wieder abgedruckt in Hans Hahn, Gesammelte Abhandlungen Band 1, herausgegeben von L. Schmetterer und K. Sigmund, Springer, Wien/NewYork.

Hahn, H., 1933(1988), Die Krise der Anschauung, in Hahn 1988, 86 – 114.

Hahn, H. 1934 (1988), Gibt es Unendliches?, in Hahn 1988, 115 – 140.

Hahn, H., 1988, Empirismus, Logik, Mathematik, Frankfurt/Main, Suhrkamp Verlag.

Hilbert, D., 1899, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, Teubner.

Hilbert, D., 1917, Axiomatisches Denken, Mathematische Annalen 78, 405 – 415.

Holzhey, H., 1986, Cohen und Natorp. Der Marburger Neukantianismus in Quellen. Band 2, Basel, Schwabe.

Kanovei, V., Katz, K., Katz, M., Mormann, T., 2018, What makes a theory of infinitesimals useful?, A View by Klein and Fraenkel, Journal of Humanistic Mathematics 8(1), 108 – 119.

Katz, M., Sherry, D. 2013, Leibniz' Infinitesimals: Their Fictionality, their Modern Implementations, and their Foes from Berkeley to Russell and Beyond, Erkenntnis 78(3), 571 – 625.

Klein, F., 1924, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Band 1 (Arithmetik, Algebra, Analysis), Berlin, Springer.

Laugwitz, D., 1973, Ein Weg zur Nonstandard-Analyse, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 75, 66 – 93.

Mormann,T., 2008, Idealization in Cassirer's Philosophy of Mathematics, Philosophia Mathematica 16(2), 151 – 181.

Mormann,T., Katz, M., 2013, Infinitesimals as an Issue of Neo-Kantian Philosophy of Science, HOPOS 3(2), 236 – 280.

Moynahan, G.B., 2003, Hermann Cohen's „Das Prinzip der Infinitesimalmethode", Ernst Cassirer, and the Politics of Science in Wilhelmine Germany, Perspectives on Science 11, 35 – 75.

Natorp, P., 1910, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, Leipzig, Teubner.

Prestel, A., 1983, Non-Standard Analysis, in H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, R. Remmert (Hrg.) Zahlen, Berlin usw., Springer, 213 – 234.

Quine, W.V.O., 1980(1976), Wort und Gegenstand (Word and Object), Stuttgart, Re- clam.

Robinson, A., 1966, Non-Standard Analysis, Amsterdam, London, North-Holland.

Russell, B, 1903, The Principles of Mathematics, London, Routledge and Kegan Paul.

Schmieden, C., Laugwitz, D., 1958, Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung, Mathematische Zeitschrift 69, 1 – 39.

Sherry, D., Katz, M., 2014, Infinitesimals, Imaginaries, Ideals, and Fictions, Studia Leibnitiana 44 (2012), no. 2, 166 – 192.

Veronese, G., 1894, Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarerer Form entwickelt, aus dem Italienischen übersetzt von Adolf Schepp, Leipzig, Teubner.

Volkert, Kl., 1986, Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

Adressen der Autoren

Gottfried Gabriel
Institut für Philosophie
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Zwätzengasse 9
D-07743 Jena
gottfried.gabriel@uni-jena.de

Shafie Shokrani
Department Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
shokrani@mathematik.uni-siegen.de

Kay Herrmann
kay.herrmann@phil.tu-chemnitz.de

Daniel Koenig
Department Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
koenig@mathematik.uni-siegen.de

Thomas Mormann
Department of Logic and Philosophy of Science
University of the Basque Country, UPV/EHU
Av. Tolosa, 70
S-20018 Donostia
thomasarnold.mormann@ehu.eus

Matthias Neuber
Philosophisches Seminar
Universität Tübingen
Bursagasse 1
D-72070 Tübingen
matthias.neuber@uni-tuebingen.de