

30.03.2016

ZUR MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTSPHILOSOPHIE DES MARBURGER NEUKANTIANISMUS

Thomas Mormann

1. Mathematische versus logische Wissenschaftsphilosophie. Die Wissenschaftsphilosophie als eigenständige philosophische Disziplin ist relativ jung. Ohne Anspruch auf Genauigkeit lassen sich ihre Anfänge auf das letzte Drittel des 19. Jahrhunderts datieren. Einen in der zeitgenössischen Diskussion lange vergessenen Ansatz der frühen Wissenschaftsphilosophie bilden die verschiedenen Strömungen des Neukantianismus, der bis in die ersten Jahrzehnte des 20. Jahrhunderts in Deutschland eine dominierende Rolle spielte. Angesichts der beinahe monopolartigen Stellung der analytischen Wissenschaftsphilosophie angelsächsischer Provenienz scheint die neukantianische Wissenschaftsphilosophie heute bestenfalls noch ein philosophiehistorisches Interesse beanspruchen zu können. Ich möchte in dieser Arbeit zeigen, daß dies zumindest für die neukantianische Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule (Cohen, Natorp, Cassirer) zu kurz greift. Die Marburger Schule vertrat einen wissenschaftsphilosophischen Ansatz, den ich kurz als "mathematische Wissenschaftsphilosophie" bezeichnen möchte. Diese Marburger mathematische Wissenschaftsphilosophie weist gegenüber der bekannteren und für die spätere Entwicklung der Wissenschaftsphilosophie weitaus einflußreicheren logisch-empiristischen Wissenschaftsphilosophie des Wiener Kreises einige interessante und originelle Züge auf, die es verbieten, den Marburger Ansatz umstandslos als obsolet zu betrachten.

Sowohl die Wiener wie auch die Marburger Wissenschaftsphilosophie können als

Nachfolger der kantischen Wissenschaftsphilosophie angesehen werden. Beide weichen von der Architektur des ursprünglichen kantischen Systems erheblich ab, indem sie einen seiner Grundpfeiler eliminieren, nämlich die These von der (reinen) Anschauung als einer wesentlichen Quelle der wissenschaftlichen Erkenntnis. Sie tun das jedoch in verschiedener Weise. Die logischen Empiristen behaupteten, die Eliminierung der Anschauung als einer Quelle der empirischen Erkenntnis führe zu einer vollständigen „Logisierung“ der wissenschaftlichen Erkenntnis. Die einzig legitime Aufgabe der Wissenschaftsphilosophie bestehe deshalb in der logischen Analyse der Wissenschaftssprache. Die Marburger Schule hingegen vertrat die These, das Kantische Tandem von „Begriff“ und „Anschauung“ sei durch das „reine Denken“, als einer in der Evolution der Wissenschaft sich entwickelnden „objektiven Logik des Gegenstandes“ zu ersetzen. Die Marburger Philosophen legten deshalb Wert auf die Feststellung, die relationale Logik von Frege, Russell und Whitehead sei zwar ein wichtiger Bestandteil dieser objektiven Logik des wissenschaftlichen Gegenstandes, dürfe aber nicht mit ihr gleichgesetzt werden.

Für die Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule war die Mathematik die konstituierende Methode der Naturwissenschaften überhaupt. Sie war Garant und Ausdruck für die Einheit und Wissenschaftlichkeit der Naturwissenschaften. Zugleich sei die Einsicht in diese Tatsache der Garant für die Wissenschaftlichkeit der (Wissenschafts-)Philosophie. Für diese These hat Hermann Cohen, das Haupt der Marburger Schule, von Beginn seiner philosophischen Laufbahn an unermüdlich argumentiert, zuletzt in seiner *Einleitung mit kritischem Nachtrag*¹ zur 9. Auflage von Friedrich Albert Langes *Geschichte des Materialismus*²:

[K]ritische Philosophie (d.h. wissenschaftliche Philosophie in der Nachfolge

¹ Cohen (1914).

² Lange (1914).

Kants, TM) ist diejenige, welche nicht nur schlechthin mit der Wissenschaft Zusammenhang hat, und auch nicht schlechthin mit der Naturwissenschaft, sondern in erster Linie mit der Mathematik, und erst durch sie, und an ihrer Hand mit der Naturwissenschaft.

Die Mathematik gilt demzufolge als ... [die] Methode der Naturwissenschaft, ... mit welcher die Naturwissenschaft in eigentlicher Bedeutung erst Wissenschaft wird.³

Dieses Verständnis des Zusammenhanges von Philosophie, Naturwissenschaft und Mathematik war die gemeinsame Grundüberzeugung aller Mitglieder der Marburger Schulgemeinschaft. Es scheint deshalb passend, die Marburger Wissenschaftsphilosophie als eine mathematische Wissenschaftsphilosophie zu charakterisieren. Im Gegensatz dazu werde die Wissenschaftsphilosophie des Wiener logischen Empirismus als logische Wissenschaftsphilosophie charakterisiert. Während es der letzteren um die logische Analyse der Struktur der Wissenschaftssprache ging, war es der mathematischen Wissenschaftsphilosophie in erster Linie um die Rolle der Mathematik in der wissenschaftlichen Begriffsbildung zu tun.

Diese gegensätzliche Orientierung von Marburger und Wiener Wissenschaftsphilosophie schließt natürlich nicht aus, daß beide nicht auch wesentliche Gemeinsamkeiten aufwiesen. Eine bestand wie gesagt darin, daß beide – gegen Kant – die Anschauung als Quelle wissenschaftlicher Erkenntnis ablehnten.

Aus der logischen Perspektive des Wiener Kreises war eine mathematische Wissenschaftsphilosophie im Marburger Sinne ein auf halber Strecke liegengebliebenes und inkonsequentes Projekt, da ja die Mathematik als auf die Logik reduzierbar galt, wodurch jede mathematische Wissenschaftsphilosophie auf eine logische Wissenschaftsphilosophie zurückgeführt werden konnte.

³ Cohen (1914, 59).

Ein zentrales Problem für beide Ansätze war genauer zu explizieren, was unter "Logik" zu verstehen sei. Der logische Empirismus verstand unter "Logik", grob gesagt, die relationale Logik von Frege, Russell, und Whitehead, während die Marburger Neukantianer behaupteten, diese relationale Logik sei zwar ein Teil der gesuchten transzendentalen Logik des Gegenstandes, aber eben nur ein Teil. Die entscheidende Frage für die Marburger mathematische Wissenschaftsphilosophie lautete also, in welcher Hinsicht die kritische Philosophie als Logik der Wissenschaft über die Logistik, d.h., die formale Logik von Frege, Russell und Whitehead, hinausging. Die Antworten, die die Mitglieder der Marburger Schule auf diese Frage geben, weisen zwar alle in dieselbe Richtung, weichen im Detail aber durchaus von einander ab. Das gilt insbesondere für Cohen und Cassirer, die im Marburger Spektrum vielleicht als entgegengesetzte Pole angesehen werden können.

Bevor darauf im Einzelnen eingegangen werden soll, seien, um eine deutliche Gegenüberüberstellung von Wiener und Marburger Wissenschaftsphilosophie zu ermöglichen, kurz die wesentlichen Programmpunkte der logisch-empiristischen Wissenschaftsphilosophie rekapituliert.

Laut *Manifest des Wiener Kreises*⁴ hatte die logizistische Wissenschaftsphilosophie die Aufgabe, alle Sätze, die als wissenschaftliche Sätze auftreten wollten, einer logischen Analyse zu unterziehen. Ein Satz erhielt den Status eines sinnvollen Satzes, wenn er sich im Rahmen der in Carnaps *Logischem Aufbau der Welt*⁵ skizzierten Konstitutionstheorie als logisch rekonstruierbar erwies. War das nicht der Fall, galt er als "Scheinsatz", der aus dem wissenschaftlichen Diskurs zu eliminieren war. So heißt es explizit im *Manifest*, der Programmschrift des Kreises:

Die auf das Ziel eines solchen Konstitutionssystems gerichteten Unter-

⁴ Neurath (1929).

⁵ Carnap (1928).

suchungen, die „*Konstitutionstheorie*“, bilden ... den Rahmen, in dem die logische Analyse von der wissenschaftlichen Weltauffassung angewendet wird. Mit dem Nachweis der Möglichkeit und der Aufweisung des Gesamtsystems der Begriffe wird zugleich der Bezug aller Aussagen auf das Gegebene und damit die Aufbauform der *Einheitswissenschaft* erkennbar.⁶

Dieses Projekt einer auf der Konstitutionstheorie von Carnaps *Aufbau* basierenden *Einheitswissenschaft* wurde wenig später geräuschlos aufgegeben, wohl auch deswegen, weil Carnap selbst die im *Aufbau* skizzierte Konstitutionstheorie bereits zu Beginn der 1930er Jahre als überholt ansah. In geschmeidiger Anpassung an diese neuen Umstände propagierte Neurath auf dem Pariser Kongress für Einheitswissenschaft 1935 anstelle der Konstitutionstheorie Carnaps „Wissenschaftslogik“ der *Logischen Syntax der Sprache*⁷ als Rahmentheorie für eine einheitswissenschaftliche (Re)formulierung der gesamten Wissenschaft. Auch dieses Projekt wurde höchstens in Ansätzen verwirklicht. In der *International Encyclopedia of Unified Science* sind, wenn man von Carnaps eigenen Beiträgen absieht, höchstens Spuren von „Wissenschaftslogik“ sichtbar.

Nun zur mathematischen Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule. Ihre Gründungsurkunde ist zweifellos Hermann Cohens *Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte*⁸. In auf den ersten Blick durchaus exzentrisch anmutender Weise beschreibt Cohen die zentrale Aufgabe der Marburger Wissenschaftsphilosophie so:

Die Begründung des Infinitesimalbegriffs ist in zwiefacher Hinsicht ein Anliegen der Philosophie. Erstlich ist das Gewissen der traditionellen Logik nicht beruhigt, bevor sie diesen Grundbegriff der mathematischen Naturwissenschaften, soweit ihre Mittel reichen, beschrieben und nach ihren

⁶ Neurath (1929, 91).

⁷ Carnap (1934).

⁸ Cohen (1883).

Normen erklärt hat. Ferner aber bleibt in dem Verzeichnis der Grundlagen und Grundsätze der Erkenntnis eine unersetzliche Lücke, solange dieses fundamentale Werkzeug als eine Voraussetzung des mathematischen und demzufolge des Natur-Erkennens nicht anerkannt und abgegrenzt ist.

...

Der Begriff der infinitesimalen Größe kann daher als ein eindringliches Beispiel gelten für die Notwendigkeit der Ergänzung der Logik durch ein anderes, verwandtes, aber zu unterscheidendes Untersuchungsgebiet.⁹

Dieses mit der Logik verwandte, aber gleichwohl von ihr "zu unterscheidende Untersuchungsgebiet" bezeichnet Cohen als "Erkenntniskritik"¹⁰. Aus einer kantianischen Perspektive, so führt er dann aus, sei "Erkenntniskritik"

gleichbedeutend mit der transzendentalen Logik; denn ihre Aufgabe ist die Entdeckung der synthetischen Grundsätze oder derjenigen Grundlagen des Erkennens, auf welchen die Wissenschaft sich aufbaut und von deren Geltung sie abhängt.¹¹

Diese zentrale Stellung des Infinitesimalbegriffs blieb eine Invariante von Cohens Wissenschaftsphilosophie, die sich in allen Stadien durchhielt, vom *Prinzip der Infinitesimalmethode* (1883), über *Die Logik der reinen Erkenntnis*¹² bis hin zur *Einleitung in Langes Geschichte des Materialismus*.¹³ Andere Autoren der Marburger Schule, insbesondere Natorp und Cassirer, sind Cohen in seiner Fixierung auf den Infinitesimalbegriff nur halbherzig gefolgt, gleichwohl haben alle Cohens

⁹ Ibid., §1.

¹⁰ Ibid., §8.

¹¹ Ibid., §9.

¹² Cohen (1902).

¹³ Cohen (1914).

infinitesimalzentrierten Ansatz als Ausgangspunkt ihrer eigenen Überlegungen genommen. Zugleich waren sie bemüht, diskret aber unmißverständlich deutlich zu machen, daß sie nicht bereit waren, allen von Cohens oft verwegenen metaphysischen Thesen bedingungslos zuzustimmen. Im Kontext der Marburger Schule fungierte Cohen als Visionär und Prophet einer wissenschaftsphilosophischen Botschaft, die von seinen Schülern und späteren Bundesgenossen wie Cassirer, Natorp in je verschiedener Weise auf das Vertretbare zurückgestutzt wurde.¹⁴

Mit Cohens These von der zentralen Stellung des Infinitesimalbegriffs für die Wissenschaftsphilosophie überhaupt waren die Weichen für eine direkte Konfrontation der Marburger mathematischen mit der Wiener logizistischen Wissenschaftsphilosophie gestellt: Der Begriff des Infinitesimals war für die Wiener Wissenschaftsphilosophie das Paradebeispiel eines "Scheinbegriffs", an dessen Entlarvung sich die Leistungsfähigkeit der logischen Analyse überzeugend hatte demonstrieren lassen:

Die Erfinder der Infinitesimalrechnung waren imstande, die Fragen nach der Ableitung (dem Differentialquotienten) zu beantworten, ... sie hatten aber keine scharfe Definition dieses Begriffes. Sie verstanden den Begriff der Ableitung nicht. Sie hatten nur ein intuitives Ahnen, keine begriffliche Definition... Erst mehr als ein Jahrhundert später gelang die einwandfreie Definition ... Und damit bekamen alle jene mathematischen Ergebnisse ... ihren eigentlichen Sinn.¹⁵

¹⁴ So charakterisiert Giovanelli, eine Formulierung von Habermas aufgreifend, die das Verhältnis von Gadamer und Heideggers Philosophieren beschreiben sollte, Cassirers Interpretation von Cohens *Das Prinzip der infinitesimalen Methode und seine Geschichte* (Cohen 1883) als „Urbanisierung von Cohens Provinz“ (cf. Giovanelli 2015, p.42). In einem Brief an Görland kritisierte Natorp Cohens Art des Philosophierens „als die eines Poeten“, der manchmal nur schwer zu folgen sei (cf. Natorp 1902, 302, Brief 62 von Natorp an Görland).

¹⁵ Carnap (1928, 5).

Weder in *Scheinprobleme*¹⁶ noch in irgendeiner anderen Arbeit machte sich Carnap jemals die Mühe, die "Scheinhaftigkeit" des Begriffs "unendlich kleiner Größen" *in concreto* nachzuweisen. Das galt auch für die anderen logischen Empiristen. Tatsächlich wäre ihnen das auch äußerst schwer gefallen. Spätestens seit Ende des 19. Jahrhunderts war es mathematische Folklore, daß der Begriff unendlich kleiner Größen mathematisch keineswegs inkonsistent war, auch wenn es lange Zeit nicht gelang, eine Theorie infinitesimaler Größen zu formulieren, die es erlaubte, den klassischen Infinitesimalkalkül des 17. und 18. Jahrhunderts zu rekonstruieren. Infinitesimale Größen, im mathematischen Jargon auch als nichtarchimedische Größen bezeichnet, gehörten spätestens seit ihrem Auftreten in Hilberts *Grundlagen der Geometrie*¹⁷ zum kanonischen Repertoire der Mathematiker. Diese Tatsache ist von der logisch-empiristischen Wissenschaftsphilosophie niemals zur Kenntnis genommen worden. Die kompromißlose Ablehnung des Infinitesimalbegriffs als eines Scheinbegriffs beschränkte sich nicht auf die logisch-empiristische Wissenschaftsphilosophie des Wiener Kreises. Sie fand ihre Fortsetzung in der die philosophische Szene seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts dominierenden angelsächsischen analytischen Wissenschaftsphilosophie. Bis zum Ende seiner Tage galten Quine infinitesimale Größen als problematische, genauer gesagt, als "nützliche aber absurde Größen":

Der Gedanke der infinitesimalen Größen war zwar absurd, aber der Differentialkalkül, in dem die infinitesimalen Größen als Werte der Variablen galten, führte zu wahren und wertvollen Resultaten.

...

Gelöst wurde dieser Konflikt von Weierstraß, der mit seiner Theorie der Häufungspunkte zeigte, wie man die Sätze des Differentialkalküls systema-

¹⁶ Carnap (1928a).

¹⁷ Hilbert (1899).

tisch so rekonstruieren kann, daß man sich nur auf richtige Zahlen (meine Hervorhebung, TM)¹⁸ als Werte der Variablen bezieht, ohne dadurch die Nützlichkeit des Kalküls zu beeinträchtigen.¹⁹

Die Verdammung des Infinitesimalbegriffs als eines Unbegriffs durch die logischen Empiristen und später durch die analytischen Wissenschaftsphilosophen war keine originelle These. Sie war vielmehr auf dem Boden von Bertrand Russells Kritik an Cohens *Prinzip der Infinitesimalmethode* gewachsen, die Russell in *The Principles of Mathematics*²⁰ vorgebracht hatte. Dieser Kritik zufolge waren Infinitesimale für die Erklärung von "Stetigkeit" ²¹ "überflüssig", überdies "fehlerhaft und selbstwidersprüchlich". Insbesondere gäbe es nicht so etwas wie "infinitesimale, d.h., unendlich kleine Strecken". Russell wiederum berief sich für diese Behauptung auf die Mathematiker Weierstrass, Dedekind, und insbesondere auf Cantor.²²

Russells These hatte in der Philosophie und Historiographie der Mathematik einen immensen Einfluß, der bis heute fortwirkt. So akzeptieren die meisten zeitgenössischen Neu-Neukantianer bis hin zu zeitgenössischen Philosophiehistorikern klaglos Russells Verdikt und konzedieren, Cohens "Infinitesimalphilosophie" sei schon von Anbeginn mathematisch obsolet gewesen. Ein typisches Beispiel ist Edward Skidelsky, der in

¹⁸ Der Ausdruck "richtige Zahlen" zeigt Quine als Anhänger einer ehrwürdigen philosophischen Tradition. Ihr zufolge gibt es "richtige" Zahlen und andere, die eben "nicht richtig" sind. Im Lauf der Wissenschaftsgeschichte hat sich diese Theorie als sehr als wandlungsfähig erwiesen: Was "richtige" und was "nicht richtige" Zahlen waren, änderte sich im Laufe der Zeit: Mal waren schon "negative Zahlen" keine "richtigen" Zahlen, oder "irrationale Zahlen", später erhielten "imaginäre Zahlen" diesen Status, usw. Allen diesen einstmals "nicht richtigen Zahlen" ist gemein, daß sie heute, zumindest für Mathematiker, längst den Status "richtiger Zahlen" erlangt haben.

¹⁹ Quine (1976, § 51).

²⁰ Russell (1903).

²¹ Russell meinte hier offensichtlich nicht "Stetigkeit" im modernen Sinne, sondern "Differenzierbarkeit". Es ist nicht klar, ob Russell jemals zwischen diesen beiden Begriffen unterschieden hat. Cassirer hingegen war sich, zumindest in späteren Arbeiten, sehr wohl über den Unterschied im Klaren, siehe *Determinismus und Indeterminismus* (Cassirer 1937, 316).

²² In seinen polemischeren Momenten scheute Cantor sich nicht, Infinitesimale als "Cholerabazillen" der Mathematik zu bezeichnen, und sich entsprechend vehement für die Ausrottung dieser Krankheitserreger einzusetzen.

seinem Buch *Ernst Cassirer. The Last Philosopher of Culture*²³ die niemals vollständig und explizit ausgetragene Auseinandersetzung zwischen Cassirer und Cohen über die Rolle des Infinitesimalbegriffs so schildert, als ob Cohen schon deswegen der Verlierer gewesen wäre, weil “Cohen’s theory of infinitesimal is in fact mistaken even from a purely mathematical point of view, being based on an outmoded interpretation of calculus.”²⁴ Als Beleg für diese Behauptung erwähnt er ohne weitere Erläuterung in einer Fußnote, wie zu erwarten, Russells *Principles of Mathematics*²⁵ und die darin enthaltene “vernichtende” Kritik Russells an Cohen.²⁶

Wenn es sich so einfach verhielte, wäre es natürlich schwierig, heute noch ein über die bloße Philosophiegeschichte hinausgehendes Interesse an Cohens Wissenschaftsphilosophie geltend zu machen. Was soll man philosophisch anfangen mit einem Infinitesimalbegriff, dessen mathematische Basis sich grundsätzlich als nicht tragfähig erwiesen hätte?

Der interessante Punkt an Russells These, der Begriff des Infinitesimals habe sich durch die Arbeiten Cantors, Dedekinds und Weierstraß’ als unheilbar widersprüchlich und inkohärent erwiesen und sei deshalb endgültig und mit Recht aus der Mathematik verbannt worden, ist, daß sie falsch ist:

- (1) Russells These ist falsch in mathematischer Hinsicht: Infinitesimale sind keine widersprüchlichen Scheinbegriffe.
- (2) Russells These ist falsch in wissenschaftshistorischer Hinsicht: Infinitesimale wurden nicht aufgrund der Arbeiten von Cantor, Dedekind, und Weierstraß aus dem mathematischen Diskurs eliminiert. Richtig ist, daß Infinitesimale im Bereich

²³ Skidelsky (2008).

²⁴ Ibid., 65.

²⁵ Russell (1902).

²⁶ Skidelskys Bemerkungen über die Unterscheidung von Relation und Funktion bei Cassirer und Cohen sind einigermaßen abwegig. Cohen unterschied nicht zwischen stetigen und differenzierbaren Funktionen, und hält nur differenzierbare Funktionen für möglicherweise empirisch bedeutsam. Anachronistisch ausgedrückt, er legte für die angewandte Mathematik ein nichtarchimedisches Zahlensystemen mit Infinitesimalen zugrunde (siehe Skidelsky (2008, 65).

der Analysis von vielen Mathematikern, aber nicht von allen, mit einem gewissen Argwohn betrachtet wurden.

Carnaps und Quines vollmundige Thesen über die “Absurdität” von Infinitesimalen sind unhaltbar. Das vermeintliche Paradebeispiel eines logischen Scheinbegriffes erweist sich bei näherem Besehen keineswegs als solcher. Schlimmer noch für die Wiener logischen Empiristen als Wiener logische Empiristen - bei der Entwicklung einer umfassenden mathematischen Theorie infinitesimaler Größen spielte einer der Gründerväter des Wiener Kreises, nämlich der Mathematiker und logische Empirist Hans Hahn, eine führende Rolle. 1907, als der sogenannte “erste Wiener Kreis” um Otto Neurath, Philipp Frank und Hans Hahn in voller Blüte stand, veröffentlichte Hahn die umfangreiche Arbeit *Über die nichtarchimedischen Größensysteme*²⁷, die bis heute als eine der grundlegenden Arbeiten über diese Klasse von Größensystemen gilt. “Nichtarchimedische Größensysteme” aber sind, wie gleich genauer erklärt werden soll, Größensysteme, die infinitesimale, also unendlich kleine, gleichwohl von 0 verschiedene Größen enthalten, die miteinander verglichen werden können. Diese Tatsache hat außer Friedrich Waismann keiner von Hahns logisch-empiristischen Kollegen jemals zur Kenntnis genommen. Auch spätere, allgemein verständliche Arbeiten Hahns²⁸ zu diesem Thema wurden von seinen Wiener Kollegen ignoriert.²⁹

In moderner Redeweise läßt sich Cohens Wissenschaftsphilosophie, die dem Begriff des Infinitesimals eine zentrale Stellung einräumt, charakterisieren als ein nichtarchimedischer Ansatz. Aus der Tatsache, daß solche Größen mathematisch “vernünftige” Enti-

²⁷ Hahn (1907).

²⁸ Hahn (1934).

²⁹ Im Unterschied dazu war man sich in Marburg schon relativ früh über die philosophische Relevanz nichtarchimedischer Größensysteme im Klaren. Die wohl ausführlichste Diskussion solcher Systeme aus der Feder eines Wissenschaftsphilosophen findet sich in Natorps *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften* (Natorp 1910) (im Folgenden oft *Logische Grundlagen*), aber auch Cassirer, in seinem letzten, der Wissenschaftsphilosophie gewidmeten Werk *Determinismus und Indeterminismus in der modernen Physik* (Cassirer 1937) versäumt es nicht, zustimmend Hahns *Die Krise der Anschauung* (1934) zu erwähnen.

täten sind, läßt sich natürlich keineswegs ableiten, daß auch Cohens “nichtarchimedische” Wissenschaftsphilosophie dieses Prädikat verdient. Immerhin aber läßt sich behaupten, daß sein Ansatz nicht von vornherein eine Totgeburt war, wie dies die starken Thesen Russells, Carnaps, und Quines glauben machen wollten. Ich glaube sogar, man kann zeigen, daß eine mathematische Wissenschaftsphilosophie, die in gewisser Weise an den Marburger Ansatz anschließt, einen Beitrag auch zur aktuellen wissenschaftsphilosophischen Diskussion leisten kann.

Dafür möchte ich im Folgenden so argumentieren: Im nächsten Teil möchte ich zunächst den Begriff der nichtarchimedischen Größensysteme und seine Geschichte genauer betrachten. Das hat zum Ziel, den Begriff der “infinitesimalen” Größe vom Verdacht zu befreien, er wäre “absurd”, “inkonsistent” oder sonstwie defizient.

Die von Cohen inaugurierte “Infinitesimalmetaphysik” der Marburger Schule hat im Verlauf der Entwicklung dieser Schule bedeutsame Wandlungen durchgemacht. Das gilt schon für Cohens Version, aber natürlich erst recht, wenn man auch die Arbeiten der anderen Mitglieder betrachtet. Insbesondere geht die mathematische Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule keineswegs in Cohens infinitesimalzentriertem Ansatz auf. Natorp, in *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*³⁰, und Cassirer in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*³¹ haben Cohens Ansatz in verschiedene Richtungen fortgeschrieben, die in mancher Hinsicht nur schwer oder gar nicht mit Cohens ursprünglichen Intentionen vereinbar sind. Diese Diskrepanzen sind in den internen Diskussionen der Marburger nur implizit zur Sprache gekommen. Dieses Thema der inneren Entwicklung der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie soll in Grundzügen im dritten Teil dieser Arbeit behandelt werden. Daran anschließend möchte ich im vierten Teil auf Abraham Robinsons “Nicht-Standardanalyse” eingehen, die als endgültige Rehabilitation eines Leibnizianischen, auf

³⁰ Natorp (1910).

³¹ Cassirer (1910).

dem Infinitesimalbegriff aufbauenden Infinitesimalkalküls angesehen werden kann. Robinsons, auf dem System der hyperreellen Zahlen basierende, Nicht-Standardanalyse eröffnet darüber hinaus den Blick für eine bisher kaum bemerkte konzeptuelle Affinität zwischen Cohens und Cassirers Wissenschaftsphilosophie der Mathematik: Cohens, um den Infinitesimalbegriff kreisende Wissenschaftsphilosophie erscheint als ein Spezialfall von Cassirers funktionaler, den Begriff der idealisierenden Vervollständigung in den Mittelpunkt stellenden Konzeption. Im fünften Teil schließlich werden kurz einige Ansätze moderner mathematischer Wissenschaftsphilosophie und ihre Unterschiede und Ähnlichkeiten mit der Marburger Konzeption besprochen.

2. Archimedische und nichtarchimedische Größensysteme. In der Mathematik werden Größensysteme mit infinitesimalen, also unendlich kleinen Größen, als nichtarchimedische Größensysteme bezeichnet, Größensysteme mit ausschließlich endlichen Größen nennt man archimedische Größensysteme. Ein paradigmatisches Beispiel für ein archimedisches System ist das System der natürlichen Zahlen (\mathbf{N} , $<$), wobei die Relation $<$ definiert ist als $a < c := \exists b \in \mathbf{N} (a + b = c)$. Ein nichtarchimedisches System hingegen wäre ein solches, das

Größen [enthält], die unendlich nahe bei Null liegen und dennoch – absurderweise – von einander und von 0 verschieden sind.³²

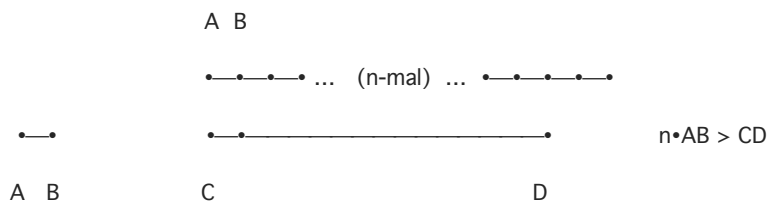
Die offizielle Charakterisierung archimedischer geometrischer Größen (“Strecken”) findet sich in David Hilberts *Grundlagen der Geometrie*³³:

(2.1) Archimedisches Axiom der Geometrie. Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so

³² Quine (1976, §51, 428).

³³ Hilbert (1899).

gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß das n -malige Hintereinander-Abtragen der Strecke AB auf dem durch CD gehenden Halbstrahl über den Punkt D hinausführt:



Dieses archimedische Axiom scheint uns, die wir in einer ziemlich euklidischen Welt leben, natürlich. Infinitesimale oder nichtarchimedische Größen sind “absurde” Größen, die dieses Axiom nicht erfüllen. Wäre AB eine Größe, die bezüglich CD das archimedische Axiom nicht erfüllte, wäre AB relativ CD unendlich klein, oder - aus der umgekehrten Perspektive - CD wäre unendlich groß relativ AB , da kein Vielfaches von AB jemals größer als CD sein könnte.

Die Nichterfüllung des archimedischen Axioms besagt gerade, daß es “unendlich kleine” und “unendlich große” Strecken gibt, also genau die Art von Größen, die Russell, Carnap, und Quine als “absurd” bezeichneten, wohl weil wir sie uns nicht “vorstellen” können und sie der gewöhnlichen Anschauung widersprechen. Seit den 80er Jahren des 19. Jahrhunderts war jedoch wohlbekannt, daß es solche nichtarchimedischen Systeme gab. In den *Grundlagen der Geometrie* § 12 zeigte Hilbert insbesondere, daß es Systeme gab, die alle anderen Axiome der euklidischen Geometrie erfüllten, aber nicht das archimedische Axiom.

Hilbert als Mathematiker stand nichtarchimedischen Systemen sehr aufgeschlossen gegenüber. Er wies explizit darauf hin, daß sie nicht nur mathematisch, sondern auch wissenschaftsphilosophisch interessant sein könnten. Die Unabhängigkeit des archimedischen von den anderen geometrischen Axiomen sei, so Hilbert, auch für die Physik von prinzipiellem Interesse:

... denn sie (i.e., die Unabhängigkeit, TM) führt zu folgendem Ergebnis: die Tatsache, daß wir durch Aneinanderfügen irdischer Entfernungen die Dimensionen und Entfernungen der Körper im Weltenraume erreichen, d.h. durch irdisches Maß die himmlischen Längen messen können, ebenso die Tatsache, daß sich die Distanzen im Atominnern durch das Metermaß ausdrücken lassen, sind keineswegs bloß eine logische Folge der Sätze über Dreieckskongruenzen und der geometrischen Konfiguration, sondern erst ein Forschungsergebnis der Empirie. Die Gültigkeit des Archimedischen Axioms in der Natur bedarf eben im bezeichneten Sinne gerade so der Bestätigung durch das Experiment wie etwa der Satz von der Winkelsumme im Dreieck im bekannten Sinne.³⁴

Auch Poincaré hat, mit etwas anderer Stoßrichtung, mehrmals auf die mögliche Relevanz nichtarchimedischer Systeme für die empirischen Wissenschaften hingewiesen³⁵. Schon in *Wissenschaft und Hypothese* wies er darauf hin, daß die durch Erfahrung und damit letztlich durch Empfindungsergebnisse bestimmte (psycho-)physikalische Kontinua von ganz anderer Art sind als das punktförmige mathematische Kontinuum³⁶. Der für die vorliegende Arbeit interessante Punkt von Poincarés Überlegungen ist die Tatsache, worauf auch Giovannelli³⁷ hinweist, daß Cohen selbst wesentliche Anregungen für seine nichtarchimedische „Infinitesimalmetaphysik“ von der Problematik psychophysischer Kontinua erhalten hat, wie sie etwa in Fechners Experimenten manifest wird, wonach zwar sehr kleine („infinitesimale“) Unterschiede nicht wahrnehmbar sind, Konkatenationen solcher nicht wahrnehmbarer Unterschiede sehr wohl beobachtbar sein können. Cohens infinitesimaler Ansatz ist also keineswegs nur aus mathematischen und philosophischen Spekulationen erwachsen, sondern im Gegenteil von Anfang an auch den empirischen Wissenschaften verpflichtet.

³⁴ Hilbert (1917, 408-409).

³⁵ cf. Poincaré (1906).

³⁶ Ibid., 22f.

³⁷ Siehe Giovannelli (2015).

Um die mathematische Sinnhaftigkeit nichtarchimedischer Strukturen nachzuweisen, genügt es, allgemeine "Größensysteme" zu betrachten, wie sie ausführlich schon Hahn untersucht hatte.³⁸ Hahn definierte "Größensysteme" als linear geordnete kommutative Gruppen $G = (G, +, \leq, 0)$, also als Strukturen, für die eine assoziative und kommutative Addition "+" und eine lineare Ordnung "<" definiert waren, die den üblichen Axiomen genügten, wie sie etwa für das System der ganzen Zahlen $(\mathbf{Z}, +, \leq, 0)$ gelten. Bezeichnet man das neutrale Element von G mit 0 , so heißen Elemente, für die gilt $0 < a$, positiv, und Elemente b , die $b < 0$ erfüllen, negativ. Ein Größensystem G erfüllt das archimedische Axiom genau dann, wenn gilt:

(2.2) Archimedisches Axiom für Algebraische Größensysteme. Seien a und b positive Größen eines Größensystems $(G, <)$ und $a < b$. Das System G ist ein archimedisches Größensystem genau dann, wenn es ein $n \in \mathbf{N}$ gibt mit $na > b$ ($na := (a + a + \dots + a)$ (n -mal)).♦

Offenbar ist das System der ganzen Zahlen $(\mathbf{Z}, +, <, 0)$ ein archimedisches System. Für die additive Gruppe der komplexen Zahlen $\mathbf{C} := \{a + ib; a, b \in \mathbf{R}\}$ hingegen lässt sich durch die folgende lineare Ordnung "<" ein nichtarchimedisches Größensystem definieren:

(2.3) Lemma. Sei $\mathbf{C} := \{a + ib; a, b \in \mathbf{R}\}$ die Menge der Punkte der euklidischen Ebene. Dann lässt sich auf \mathbf{C} die folgende nichtarchimedische Ordnung definieren:

$$(*) \quad a + ib < a' + ib' \quad := \quad a < a' \text{ oder } a = a' \text{ und } b < b'.$$

Beweis. Sei $a' > 0$. Dann erhält man für rein imaginäre Größen $ib := 0 + ib \in \mathbf{C}$:

$$n \cdot ib = n \cdot (0 + ib) < a' + nib' \text{ für alle } n \in \mathbf{N}.$$

³⁸ Siehe Hahn (1907).

Also sind alle rein imaginären Zahlen ib' infinitesimal, d.h. unendlich klein in Bezug auf alle komplexen Zahlen $a + ib'$ mit positivem Realteil $a > 0$. Das Größensystem $(\mathbf{C}, +, <, 0)$ ist also nichtarchimedisch.♦

Größensysteme wie $(\mathbf{C}, +, \leq, 0)$ mögen "künstlich" erscheinen und sicherlich leisten sie nichts für das Verständnis der im traditionellen Infinitesimalkalkül verwendeten unendlich kleinen Größen dx, dy, \dots , immerhin aber zeigen sie, daß der Begriff der unendlich kleiner Größen keineswegs, wie Quine noch Jahrzehnte später behauptete, grundsätzlich "absurd" wäre. Sie verdanken ihre "Absurdität" wohl eher einem unbewußten Festhalten an der Forderung der "Anschaulichkeit".

Hahn wies insbesondere darauf hin, daß nichtarchimedische Systeme als Verallgemeinerungen archimedischer Systeme interpretiert werden können. Von den anderen logischen Empiristen des Wiener Kreises ist Hahns Arbeit (mit der Ausnahme Waismanns) nie zur Kenntnis genommen worden. Das mag damit erklärt werden, daß Hahns Arbeit von 1907 rein mathematischer Natur war. Es steht jedoch außer Zweifel, daß sich Hahn selbst völlig im Klaren war über die philosophische Relevanz nichtarchimedischer Systeme. Im Rahmen einer in Wien stattfindenden Vortragsreihe *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften* hielt Hahn viele Jahre später den populärwissenschaftlichen Vortrag *Die Krise der Anschauung*³⁹, in dem es genau um dieses Thema ging. Er stellte explizit fest:

Es sind durchaus Räume möglich, in denen das archimedische Postulat durch das gegenteilige ersetzt ist, in denen es ... *unendlich große* und *unendlich kleine* Strecken gibt. ... Auch in einem solchen "nichtarchimedischen" Raum kann man ... messen und analytische Geometrie treiben, freilich nicht mit

³⁹ Hahn (1933).

Hilfe der reellen Zahlen der üblichen Arithmetik, sondern mithilfe
“nichtarchimedischer Zahlensysteme”.⁴⁰

Hahn wies jedoch auch darauf hin, daß es bisher keinen Anhaltspunkt dafür gebe, daß solche Systeme echte Anwendungen außerhalb der Mathematik haben könnten.⁴¹ Das erinnert an die Situation zu Anfang der vorigen Jahrhundertwende, in der die Anwendung nichteuklidischer, gleichwohl archimedischer Geometrien in der Physik zur Debatte stand. Ähnlich wie Hahn um 1930 keine Möglichkeit für eine wirkliche Anwendung nichtarchimedischer Größensysteme sah, hatte Poincaré zu Anfang des 20. Jahrhunderts keinen Anlaß für eine Verwendung nichteuklidischer Riemannscher Geometrien gesehen, schloß aber die Möglichkeit dafür keineswegs aus. Er spekulierte darüber, ob ein nichtarchimedisches Kontinuum nicht besser geeignete wäre, den approximativen Charakter jeder physikalischen Messung zu explizieren als das übliche Kontinuum reeller Zahlen⁴². Bekanntlich wurde wenige Jahre nach seinem Tod die Anwendung einer nichteuklidischen archimedischen Geometrie im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie Realität.

Bemerkenswerterweise war Poincaré in seiner Einschätzung der Erfolgsaussichten nichtarchimedischer Systeme optimistischer als im Falle nichteuklidischer Riemannscher (also archimedischer) Geometrien. Schon 1905 vertrat er die Auffassung, nichtarchimedische Systeme, d.h., Systeme mit Infinitesimalen, seien für die Modellierung empirischer Größen besser geeignet als archimedische, d.h. Systeme ohne solche.

Die Sinnhaftigkeit infinitesimaler Größen ließ sich also nach Hilberts *Grundlagen der*

⁴⁰ Hahn (1933, 112).

⁴¹ Hahn war nicht das einzige Mitglied des Wiener Kreises, das die Möglichkeit nichtarchimedischer Größen zumindest ins Auge faßte, auch sein ehemaliger Student Friedrich Waismann behandelte in seinem Buch *Einführung in das mathematische Denken* (Waismann 1936) dieses Thema im Rahmen eines kurzen Abrisses einer Theorie der “ultrareellen Zahlen”. Waismanns “ultrareelle Zahlen” sind nicht zu verwechseln mit den “hyperreellen Zahlen” von Robinsons Nicht-Standardanalyse (siehe Abschnitt 4).

⁴² Siehe Poincaré (1905).

Geometrie und Hahns *Nichtarchimedischen Größensystemen* eigentlich nicht mehr bestreiten. Dennoch gab es ein grundsätzliches Problem mit nichtarchimedischen Größensystemen. Dies hatte Felix Klein, der Inaugurator des *Erlanger Programms*, bereits 1908 so formuliert:

Es liegt nun natürlich die Frage nahe, *ob man auf solche Zahlensysteme gestützt der traditionellen Begründung der Infinitesimalrechnung mit unendlich kleinen Größen eine durchaus exakte, modernen Ansprüchen genügende Gestaltung geben*, d.h. gewissermaßen auch eine *nichtarchimedische Analysis* aufbauen könnte. Die erste und hauptsächlichste Aufgabe dieser Analysis wäre, den Mittelwertsatz:

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1)$$

aus den hier vorauszusetzenden Axiomen zu beweisen. Ich will einen Fortschritt in dieser Richtung nicht geradezu als unmöglich bezeichnen; bisher ist aber jedenfalls von keinem der vielen Forscher, die sich mit aktuell unendlich kleinen Größen beschäftigt haben, dazu etwas Positives geleistet worden.⁴³

Auch Hermann Weyl, zehn Jahre später in *Philosophie der Mathematik und der Naturwissenschaft*⁴⁴, kam zu der resignierten Feststellung, es sei zwar keineswegs unmöglich,

eine folgerichtige "nichtarchimedische" Größenlehre aufzubauen, in welcher das (meistens nach Archimedes benannte) Axiom des Eudoxos nicht gilt; aber man sieht sofort, daß sie für die Analysis gar nichts leistet.⁴⁵

⁴³ Klein (1908, 236).

⁴⁴ Weyl (1928).

⁴⁵ *Ibid.*, 37.

Dieses Manko nichtarchimedischer Theorien wurde erst in den 1960er Jahren von Abraham Robinson überwunden. Ihm gelang es, nichtarchimedische Systeme zu konstruieren, die das Kleinsche Kriterium erfüllten, in denen also eine strenge Ableitung des Mittelwertsatzes und damit eine Infinitesimalrechnung im klassischen Sinne möglich war.⁴⁶ Damit waren die letzten Zweifel an der Vernünftigkeit und Leistungsfähigkeit nichtarchimedischer Systeme ausgeräumt. Von der "Absurdität" infinitesimaler Größen hätte danach eigentlich nicht mehr die Rede sein dürfen.⁴⁷

Die Ablehnung des Infinitesimalbegriffs durch die logischen Empiristen verdankt sich, so scheint es, eher einem unzureichenden mathematischen Wissen und einem unbewußten Festhalten am common-sense-Kriterium, auch wissenschaftliche Begriffe müßten "anschaulich" sein, als plausiblen logischen Argumenten. Mittlerweile sollten wir aber gelernt haben, daß "Anschaulichkeit" kein notwendiges Kriterium für die Akzeptanz eines wissenschaftlichen Begriffs ist.

3. Von Cohen zu Natorp und Cassirer. Ein charakteristisches Merkmal der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie war, daß sie dem Infinitesimalbegriff eine zentrale Stellung einräumte. Das heißt jedoch nicht, alle Mitglieder der Schule hätten diesen Begriff in der selben Weise verstanden und ihr Verständnis dieses Begriffs hätte im Lauf der Zeit keine Entwicklung durchlaufen. Man kann deshalb nicht davon ausgehen, Cohens Begriff des Infinitesimals, so wie er ihn im *Prinzip der Infinitesimalmethode und*

⁴⁶ Um der historischen Gerechtigkeit Genüge zu tun, sei erwähnt, daß Schmieden und Laugwitz bereits 1958 eine nichtarchimedische Erweiterung der reellen Zahlen konzipierten, die den meisten Ansprüchen, die an einen Infinitesimalkalkül zu stellen sind, durchaus genügte, siehe Schmieden und Laugwitz (1958).

⁴⁷ Tatsächlich aber hat die anglo-amerikanische Wissenschaftsphilosophie diese Entwicklung lange Zeit kaum zur Kenntnis genommen. Ein gutes Beispiel dafür ist, wie bereits erwähnt, Quine. Seine um die Mitte des vorigen Jahrhunderts in *Word and Object* (Quine 1960) 1969 formulierte These von der Absurdität infinitesimaler Größen ("Grenzwertmythen", *ibid.* §51) hat er, obwohl sie schon damals obsolet war, auch in den folgenden Jahrzehnten niemals zurückgenommen.

*seine Geschichte*⁴⁸ präsentiert, wäre schlicht derselbe, den er mehr als dreißig Jahre später in der *Einleitung zu Langes Geschichte des Materialismus*⁴⁹ formulierte. Erst recht ist die Annahme unbegründet, andere Mitglieder der Schule wie Natorp und Cassirer stimmten hinsichtlich der Interpretation des Infinitesimalbegriffs vollständig mit Cohen überein. Das gilt ungeachtet der Tatsache, daß sie, sogar noch über Cohens Tod hinaus, bemüht waren, Differenzen mit dem Gründer der Schule nicht in der philosophischen Öffentlichkeit zu verhandeln.

Diese Arbeit ist nicht der Ort, die Entwicklung des philosophischen Verständnisses des Infinitesimalbegriffs innerhalb der Marburger Schule in allen Einzelheiten darzustellen⁵⁰. Es sollen nur einige der wichtigsten Fakten rekapituliert werden, um der verbreiteten Tendenz eines zu simplen Verständnisses dieser Episode der Philosophiegeschichte entgegen zu wirken.

Cohens Verständnis des Infinitesimalbegriffs hat im Verlauf seiner philosophischen Karriere keineswegs unbedeutende Veränderungen durchlaufen, die als Ausdruck grundsätzlicher Veränderungen der philosophischen Landschaft vom 19. zum 20. Jahrhundert gelesen werden können, nämlich als Auswirkung dessen, was des Öfteren als "Krise der Anschauung" bezeichnet worden ist⁵¹.

In Cohens *Prinzip*⁵² spielte die Anschauung für das Verständnis der Rolle des Infinitesimalbegriffs durchaus eine Rolle – das hatte schon Frege in seiner Rezension dieses Buches kritisiert und, Frege folgend, später auch Russell in *The Principles of Mathematics*. Im *Prinzip* legte Cohen seiner infinitesimalen Wissenschaftsphilosophie noch die folgende "kantianisierende" Definition zugrunde:

... die Definition des Infinitesimalbegriff [ist] bedingt durch die ... Bestim-

⁴⁸ Cohen (1883).

⁴⁹ Cohen (1914).

⁵⁰ Siehe dazu etwa Giovannelli (2015).

⁵¹ Siehe Hahn (1934).

⁵² Cohen (1883).

mung der durch Anschauung und Denken *a fortiori* bezeichneten Methoden. Die Anschauung wie das Denken sind Abkürzungen für wissenschaftliche Methoden, und zwar für solche, welche von dem besonderen Inhalt der Forschung, auf die sie sich beziehen, unabhängig sind, daß sie vielmehr allgemeine Voraussetzungen aller wissenschaftlichen Forschung bilden.⁵³

Diese kantianisierende These der doppelten Bestimmung des Infinitesimalbegriffs durch Anschauung und Denken wird in *Die Logik der reinen Erkenntnis*⁵⁴ explizit und unmißverständlich aufgegeben. Der Infinitesimalbegriff wird jetzt dezidiert als Produkt des "reinen Denkens" deklariert:

[D]as Infinitesimale geht der Ausdehnung voraus, und liegt ihr zu Grunde: Imo extensione prius, so bezeichnet Leibniz das Unendlichkleine. Also im reinen Denken allein ist es gegründet, und kraft desselben vermag es den Grund des Endlichen zu bilden. Der Ursprung ist also der Grund [des Infinitesimalen, TM]; das [zum reinen Denken gehörende, TM] Urtheil, und keine Empfindung und keine Anschauung.⁵⁵ (Hervorhebung im Original)

Diese These Cohens über den "Ort des Infinitesimals im reinen Denken" übernehmen Natorp und Cassirer. In der allgemeineren Behauptung der Irrelevanz der Anschauung für die wissenschaftliche, insbesondere die mathematische Begriffsbildung stimmen die Marburger mathematische Wissenschaftsphilosophie und die Wiener logische Wissenschaftsphilosophie überein.⁵⁶ Es ist also keineswegs so, wie viele Gegner der Marburger Schule behaupteten, daß diese an einem obsoleten kantischen Begriff der

⁵³ Cohen (1883, §3).

⁵⁴ Cohen (1902).

⁵⁵ *Ibid.*, 106 – 107.

⁵⁶ Eine brillante, durch viele Beispiele belegte Darstellung der „Krise der Anschauung“ und ihrer sich dadurch erweisenden Irrelevanz für die wissenschaftliche Erkenntnis findet sich in Hahn (1933).

Anschauung festgehalten hätte.

Beide Strömungen unterscheiden sich darin, daß die logischen Empiristen (außer Hahn) den Abschied von der kantischen Anschauung immer nur an den Riemannschen nichteuklidischen, gleichwohl archimedischen Geometrien festmachten, die für die Relativitätstheorie von Belang waren, während die Marburger mathematische Wissenschaftsphilosophie mit der Anerkennung nichtarchimedischer Grössensysteme in der Befreiung von der euklidischen Anschauung sehr viel weiter ging: die Riemannschen Geometrien sind ja immerhin noch lokal euklidisch. Ob man sich nichtarchimedische Größen vorstellen konnte, spielte für die reife Marburger Wissenschaftsphilosophie nach Cohens *Logik der reinen Erkenntnis* in der Diskussion über die wissenschaftliche Dignität des Infinitesimalbegriffs keine Rolle mehr.

Zwar lehnte die Marburger Schule Anschauung als Quelle wissenschaftlicher Erkenntnis ab, das hieß für sie aber nicht, Wissenschaftsphilosophie ginge vollständig in der relationalen Logik von Frege, Russell und Whitehead auf. Sie betonte vielmehr die Eigenständigkeit des "reinen Denkens", das sich ihrer Überzeugung nach nicht in der relationalen Logik erschöpfte, sondern als wesentlichen Bestandteil noch eine Logik des Infinitesimalen umfaßte. Die Ablehnung der Anschauung als Erkenntnisquelle implizierte keineswegs eine logisch-empiristische Konzeption von Wissenschaft.

Zum letzten Mal ging Cohen ein auf das Problem des Infinitesimalen in seiner *Kritischen Einleitung* zu Friedrich Langes *Geschichte des Materialismus*⁵⁷. Er zeigte sich durchaus nicht beeindruckt von Russells Kritik, insbesondere wohl auch, weil diese sich nur mit *Das Prinzip der Infinitesimalmethode* befaßt hatte. Stattdessen war ihm wichtig, die Marburger Infinitesimaltheorie als wissenschaftlich fortschrittlich und mit der besten zeitgenössischen Forschung kompatibel zu präsentieren. Er versuchte deshalb, neuere Forschungen Einsteins und Plancks als Belege für die immer deutlicher sich zeigende

⁵⁷ Cohen (1914).

Bestätigung der idealistischen Metaphysik durch die Wissenschaften zu interpretieren. Tatsächlich sprach Planck an einer Stelle seines Buches *Das Prinzip der Erhaltung der Energie*⁵⁸ von seiner Theorie als einer "Infinitesimaltheorie". Gleichwohl ist keineswegs klar, ob Plancks Infinitesimale etwas mit denen von Cohens zu tun haben.⁵⁹ Auch Cohens Versuch, seine infinitesimale Konzeption in einen positiven Bezug zur Einsteinschen Theorie zu setzen, blieb oberflächlich⁶⁰. und hat in der philosophischen Öffentlichkeit keine Widerhall gefunden. Insbesondere Planck und Einstein sind meines Wissens nie auf Cohens "idealistische" Avancen eingegangen.

Das entscheidende Kriterium für eine Einschätzung von Cohens infinitesimalzentrierter Wissenschaftsphilosophie ist meiner Meinung deshalb nicht in den wenig erfolgreichen Versuchen zu finden, die Theorien von Planck und Einstein als direkte Bestätigungen seines infinitesimalen Ansatzes zu interpretieren, sondern vielmehr in der These, daß das Problem der Anwendung der Mathematik in den empirischen Wissenschaften für die Wissenschaftsphilosophie der Mathematik von zentraler Bedeutung sei. Jede Philosophie der Mathematik, die zum Anwendungsproblem der Mathematik nichts zu sagen hatte, war für Cohen, und für die Marburger Schule insgesamt, grundsätzlich unbefriedigend.

Cohens *Prinzip*⁶¹ war also der Ausgangspunkt der mathematischen Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule, es deckte keineswegs ihre ganze Spannweite ab. Die anderen Mitglieder der Schule betrachteten *Das Prinzip* zwar nicht als sakrosankten Text, kritisierten es jedoch kaum je offen oder gar öffentlich, sie betrachteten ihn als Grundlage und Ausgangspunkt ihrer eigener Überlegungen, deren Ergebnisse keineswegs immer mit Cohens Vorgaben kompatibel waren.⁶²

Das gilt selbst für Cohens treuesten Anhänger Natorp, dessen wissenschaftsphilosophische

⁵⁸ Planck (1887).

⁵⁹ Cohen (1914, 90).

⁶⁰ Ibid.

⁶¹ Cohen (1883).

⁶² Das gilt nicht nur für *Das Prinzip* selbst, sondern auch für *Die Logik der reinen Erkenntnis* (Cohen (1902)) und andere Schriften.

sophisches Hauptwerk *Logische Grundlagen*⁶³ als Versuch gelesen werden kann, Cohens ziemlich dunkle Ausführungen zur Mathematik und zu den mathematischen Naturwissenschaften in *Die Logik der reinen Erkenntnis*⁶⁴ verständlicher zu machen.⁶⁵ Das hinderte ihn aber keinesweg daran, in *Logische Grundlagen*⁶⁶ seine eigene Darstellung des Infinitesimalproblems zu präsentieren, ohne genauer zu explizieren, wo er von Cohens Thesen abwich und wo nicht.

Im Vergleich zu Cassirers im selben Jahr erschienenen *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*⁶⁷ sind Natorps *Logische Grundlagen*⁶⁸ in der Wissenschaftsphilosophie nur ungenügend zur Kenntnis genommen worden. Und das, obwohl sie in gewisser Hinsicht moderner und mathematisch detaillierter ist als *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*. Zum Beispiel geht Natorp im letzten Kapitel seines Buches auf die damals gerade entwickelte spezielle Relativitätstheorie Einsteins und Minkowkis ein, die er – nicht überraschend und auch nicht sehr überzeugend – als Beleg für die Richtigkeit und Fruchtbarkeit der idealistischen Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule gedeutet wissen will⁶⁹.

⁶³ Natorp (1910).

⁶⁴ Cohen (1910).

⁶⁵ Zuvor hatte Natorp eine größere, sehr wohlwollende Rezension von Cohens *Logik* für die *Kant-Studien* geschrieben, die jedoch nicht Cohens Billigung gefunden hatte, weshalb Natorp sie nicht veröffentlichte. Dieser Text ist im zweiten Band von Helmut Holzheys *Cohen und Natorp. Der Marburger Neukantianismus in Quellen* (Holzhey 1986) enthalten. In der dort ebenfalls veröffentlichten Korrespondenz der Mitglieder der Marburger Schule berichtet Natorp in einem längerem Brief an Görland über diese Auseinandersetzung. Resignierend resumiert er seine Auseinandersetzung mit Cohen so: “[Er (= Cohen, TM)] bequemt sich nun einmal [?] nicht zu einer schlichten *logischen* Darlegung, so sehr es sich um Logik handeln mag, sondern er *sieht* die Sachen gleichsam vor sich und beschreibt ... höchst anschaulich u. mit einem unerschöpflichen Reichtum an Verbildlichungen, was er sieht u., wie er meint, der andre auch sehen muß; sieht der es aber nicht, so – ist ihm nicht zu helfen. Er ist u. bleibt Poet in der *Art* seines Philosophierens, obwohl in sehr vielen Fällen die Ergebnisse sich nachher auch auf logischen Wegen darstellen lassen, in einigen aber vielleicht nicht, (Holzhey (1986, 302), Brief Nr. 72 von Natorp an Görland, 21. November 1902).

⁶⁶ Ibid. (Cassirer (1907)).

⁶⁷ Cassirer (1910).

⁶⁸ Natorp (1910).

⁶⁹ Ibid., Kapitel 7, §§ 11, 12.

Darüber hinaus ist Natorp der einzige Wissenschaftsphilosoph, der jemals auf die Problematik nicht-archimedischer Geometrien und Größensysteme eingegangen ist⁷⁰. Er versuchte sogar eine Art Synthese aller zu seiner Zeit in der Mathematik existierenden Theorien des Unendlichen, insbesondere des Unendlichkleinen zu liefern. Bei diesem Unterfangen stützte er sich, und auch das unterschied ihn von allen anderen Wissenschaftsphilosophen seiner Zeit, auf das monumentale Werk des italienischen Mathematikers Guiseppe Veronese *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt*⁷¹. Natorp behauptete, Veroneses Infinitesimale könnten als Quotienten der Form $1/\omega$ von Cantors unendlich großen Ordinalzahlen aufgefaßt werden, was ihn zu der Behauptung inspirierte, Veronese wäre als Vollender der Cantorsche Revolution in der Mathematik anzusehen. Überdies könne Veroneses Theorie des Kontinuums als eine überzeugende Bestätigung des Marburger Ansatzes gelesen werden, insofern sie Cohens auf dem Begriff des reinen Denkens beruhende infinitesimale Wissenschaftsphilosophie glänzend bestätige:

Veronese hat die Mathematik des Unendlichen von jedem Zwang der Berufung auf Anschauung mit vollem Recht freigesprochen. Die unendlich großen und unendlich kleinen Segmente werden nicht mittels der Anschauung bestimmt, sondern durch einen möglichen geistigen (d.h. reinen Denk-)Akt; ...⁷²

...

⁷⁰ Ibid., Kapitel 4.

⁷¹ Veronese (1894).

⁷² Natorp (1910, 187).

Die einzige Erweiterung und damit zugleich Berichtigung, deren die Aufstellungen Cantors in prinzipieller Hinsicht noch bedurften, war die Ergänzung nach unten (d.h. durch Infinitesimale, TM).⁷³

Diese Behauptungen sind mathematisch unhaltbar: Cantors unendliche Zahlen, seien es nun Ordinalzahlen oder Kardinalzahlen, sind von Veroneses, Robinsons oder Skolems unendlichen Zahlen fundamental verschieden. Robinsons System der hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbf{R}$ ist von Cantors System der Ordinalzahlen ganz verschieden, insbesondere können Robinsons Infinitesimale durchaus nicht als "Quotienten" $1/\omega$ oder $1/\aleph$ von Cantors unendlichen Ordinal- oder Kardinalzahlen definiert werden.⁷⁴

Natorps *Logische Grundlagen* haben von seiten der Mathematik kaum Beachtung gefunden. Wenn doch, fiel das Urteil negativ aus. So schrieb der Mathematiker Abraham Fraenkel in seinen Lebenserinnerungen⁷⁵:

[Ich] war aufs tiefste betroffen durch die Behandlung des Unendlichkleinen in der Marburger Schule, angefangen mit Cohens "Prinzip der Infinitesimalmethode" (1883) bis hin zu Natorps *Logischen Grundlagen* (1910), in welchem Werk das Infinitesimale in direkte Korrespondenz zu Cantors transfiniten Zahlen gebracht wird. Eine ganz andere, legitime und überraschende Ehrenrettung des aktual Unendlichkleinen ist neuerdings – von 1960 an – meinem Schüler Abraham Robinson ... gelungen.⁷⁶

⁷³ Natorp (1910, 200).

⁷⁴ Das sieht man schon daran, daß Robinsons hyperreelle Zahlen ${}^*\mathbf{R}$ einen Zahlkörper bilden, während sowohl Cantors unendliche Ordinalzahlen wie auch die seine Kardinalzahlen ganz anderen Rechengesetzen folgen. Zum Beispiel ist die Addition unendlicher Ordinalzahlen nicht kommutativ ($\omega + 1 \neq 1 + \omega$) und die Addition der alephs is trivial, d.h. $\aleph(i) + \aleph(i) = \aleph(i)$ ($i \geq 0$), was den Regeln von ${}^*\mathbf{R}$ eklatant widerspricht.

⁷⁵ *Lebenskreise – Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers* (Fraenkel 1967).

⁷⁶ *Ibid.*, 107/108.

In seiner Kritik an der Marburger Infinitesimaltheorie geht Fraenkel auf Cassirer nicht näher ein. Robinson erwähnt als einziges Mitglieder der Marburger Schule nur Natorp, geht auf dessen *Logische Grundlagen* jedoch nicht näher ein.⁷⁷

Im Unterschied zu Cassirer versuchte Natorp in *Logische Grundlagen* sich so eng wie möglich an die Vorgaben von Cohens infinitesimaler Metaphysik zu halten. So findet man in *Logische Grundlagen* eine Rechtfertigung von Cohens ziemlich obskurem "Prinzip des Ursprungs", und den Versuch, seine Infinitesimalmetaphysik mit Entwicklungen in der zeitgenössischen Wissenschaft, insbesondere der Mathematik, in Einklang zu bringen. Russells Kritik an Cohen wird ohne Umschweife zurückgewiesen:

Die Kritik, welche B. Russell (*The Principles of Mathematics*, (1902 (ch. 41, §§ 315 - 324)) an Cohens *Prinzip der Infinitesimalmethode* übt, setzt durchweg Russells eigene Philosophie der Mathematik voraus (über welche Cassirer Bericht gibt (in *Kant und die moderne Mathematik*, TM). Nicht das ist ihr zum Vorwurf zu machen; eher, daß auf die bedeutende Weiterentwicklung, welche die Mathematik des Unendlichen seit Cantor (durch Veronese) erfahren hat, keine Rücksicht genommen wird. ... Zu bedauern ist auch, daß Russell sich ausschließlich an die Schrift d. J. 1883 (= *Das Prinzip der Infinitesimal-Methode*, TM); aus Cohens "Logik" würde er ersehen haben, daß der in der älteren Schrift noch nicht völlig aufgegebene Kantische Dualismus von reiner Anschauung und reinem Denken von keinem als eben Cohen überwunden ist.⁷⁸

Auch an Cohens auf den ersten Blick einigermaßen kryptischer These vom Infinitesimal als Grundlage der "Realität" und wesentlichem Ausdruck des "reinen Denkens" hält Natorp fest und behauptet, es durch seine Ausführungen in *Logische Grundlagen* klarer expliziert zu haben:

... Im Differential wie im Integral, drückt sich gleich sehr (sic) und in genauer genauer Korrespondenz das Unendliche als Ursprung und rechtfertigt

⁷⁷ Robinson (1961, 278).

⁷⁸ (Natorp (1910, Fußnote 1 auf Seite 221/222)

tigender Grund des Endlichen, und damit das Denken als Ursprung und rechtfertigender Grund des Seins aus. In dieser logischen Grundauffassung bleiben wir (Cohen und Natorp?, TM) einig, und sie festgestellt zu haben, bleibt das unschätzbare Verdienst der Cohenschen Untersuchungen über die Infinitesimalmethode. Das aber bedeutet zuletzt auch die tiefe Kantische Bestimmung der intensiven, dh.h. wesentlich: der infinitesimalen Größe als der realisierenden.⁷⁹

Zusammenfassend kann man sagen, Natorps Anliegen in *Logische Grundlagen* war es, eine tragfähige Verbindung herzustellen zwischen orthodox Cohenscher infinitesimaler Metaphysik und Natorps eigener Synthese von Cantors Theorie des Unendlichen und der nichtarchimedischer Mathematik à la Veronese. Dieses Projekt war zum Scheitern verurteilt, da die von Natorp skizzierte Synthese zwischen Cantors und Veroneses Theorien des Unendlichen auf der unhaltbaren These fußte, daß Infinitesimale schlicht als Kehrwerte $1/a$ von Cantors unendlich großen Zahlen aufgefaßt werden konnten. Das ist, wie schon Fraenkel hervorgehoben hat, mathematisch unhaltbar.

Das heißt nicht, daß es keine Möglichkeit gäbe, "Cohen", "Cantor" und "Veronese" in einen sinnvollen Zusammenhang zu bringen. Diese Möglichkeit aber lag ganz und gar außerhalb des mathematischen und philosophischen Vorstellungshorizontes von Natorp. Den wesentlichen Schritt zu ihrer Realisierung hat Abraham Robinson mit der Entwicklung der *Nicht-Standardanalyse*⁸⁰ getan, der Aufweis einer möglichen Verbindung der *Nicht-Standardanalyse* und der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie aber stammt von Cassirer, genauer gesagt, das kann als ein Ergebnis von *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*⁸¹ betrachtet werden.

Während Natorps *Logische Grundlagen* sich bewußt und sehr deutlich in die Tradition von Cohens infinitesimaler Erkenntnislogik stellte, ist Cassirers *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* nur noch locker mit Cohens Ansatz verbunden, auch wenn Cassirer

⁷⁹ Natorp (1910, 222).

⁸⁰ Robinson (1961).

⁸¹ Cassirer (1910).

bemüht war, den gegenteiligen Eindruck zu machen. Tatsächlich ging Cassirer nur an einer einzigen Stelle auf die für Cohens Wissenschaftsphilosophie charakteristische Infinitesimalproblematik ein⁸². Und auch an dieser Stelle wurde die Rolle des Infinitesimalbegriffs für die Mathematik und die mathematischen Naturwissenschaften von vornherein dadurch relativiert, daß der Infinitesimalkalkül nur als ein Kalkül unter anderen gesehen wurde. Die "Logik der Mathematik" sei, so Cassirer, im Sinne von Grassmanns *Ausdehnungslehre*⁸³ eine Logik der Kalküle, von denen der Infinitesimalkalkül eben nur einer sei. Andere derartige Kalküle seien etwa "Möbius' baryzentrischer Kalkül" oder der Kalkül der "Vektoranalysis". Das Verdienst, eine allgemeine Theorie oder "Logik" solcher "Kalküle" entworfen zu haben, schrieb Cassirer Hermann Graßmann zu. Ziemlich unvermittelt behauptete er darüber hinaus:

Die Logik der Mathematik, wie Graßmann sie versteht, ist in der Tat im strengen Sinne "Logik des Ursprungs". Cohens *Logik der reinen Erkenntnis* hat den Gedanken des Ursprungs, auf dem sie sich aufbaut, an den Prinzipien der Infinitesimalrechnung entwickelt. Hier ist in der Tat das erste und markanteste Beispiel der allgemeinen Betrachtungsweise gegeben, die vom Größenbegriff zum Funktionsbegriff ... als dem eigentlichen Fundament zurückleitet.⁸⁴

Die Einordnung der Infinitesimal-Analyse in den umfassenderen Kontext der "Relations-Analysis" könne überdies, so Cassirer, dazu beitragen, spezifische Probleme des Infinitesimalkalküls zu überwinden, etwa das hartnäckige Mißverständnis über seinen vermeintlich extensionalen Charakter, dem zufolge Infinitesimale als unendlich kleine Teile endlicher Größen aufgefaßt werden könnten. Diese Auffassung, so Cassirer, gehe völlig in die Irre. Der wissenschaftlichen Erkenntnis, sei sie nun Erkenntnis der Mathematik oder der empirischen Wissenschaften gehe es nicht um "Zerlegung in Teile", sondern um

⁸² Cassirer (1910, 130f).

⁸³ Grassmann (1844).

⁸⁴ Cassirer (1910, 131).

begriffliche Analyse und Synthese. Das gelte für die mathematische und die empirische Erkenntnis gleichermaßen. Diese Forderung des Zusammendenkens von empirischer Wissenschaft und Mathematik war für Cassirer ein unverzichtbares Erbe der Cohenschen idealistischen Wissenschaftsphilosophie.

Wie Cassirer nicht erst in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*⁸⁵ sondern schon in dem für seine mathematische Wissenschaftsphilosophie grundlegenden Text *Kant und die moderne Mathematik*⁸⁶ im Einzelnen ausführte, wird das grundlegende Problem der Erkenntniskritik, also der transzendentalen Logik, nämlich die a priori Bedingungen für die Möglichkeit empirischer Erkenntnis zu explizieren, von einem logizistischen Ansatz à la Russell noch nicht einmal in Ansätzen zur Kenntnis genommen, da Russell Logik und damit auch Mathematik auf der einen und empirische Erkenntnis auf der anderen Seite strikt trennte:

So beginnt an dem Punkte, an dem die Logistik endet, eine neue Aufgabe.

Was die kritische Philosophie sucht und was sie fordern muß, ist eine Logik der gegenständlichen Erkenntnis [alias transzendente Logik]

...

Erst wenn wir begriffen haben, daß dieselben Grundsynthesen, auf denen Logik und Mathematik beruhen, auch den wissenschaftlichen Aufbau der Erfahrungserkenntnis beherrschen, daß erst sie es uns ermöglichen, von einer festen gesetzlichen Ordnung unter Erscheinungen und somit von ihrer gegenständlichen Bedeutung zu sprechen: erst dann ist die wahre Rechtfertigung der Prinzipien erreicht (meine Hervorhebung, TM)

...

Der Blick der Philosophie darf – wenn man dieses Verhältnis einmal schroff

⁸⁵ Ibid.

⁸⁶ Cassirer (1907), vgl. auch Heis (2010).

und paradox ausdrücken will – weder auf die Mathematik noch auf die Physik gerichtet sein; er richtet sich einzig auf den Zusammenhang beider Gebiete.⁸⁷

Die Explizierung dieser, der Mathematik und den mathematischen Naturwissenschaften gemeinsamen, konstituierenden Synthesen kann als Cassirers Fortsetzung und Erweiterung von Cohens Infinitesimalmetaphysik angesehen werden. Diese “gemeinsamen Synthesen” lassen sich allgemein beschreiben als die Einführung idealer Elemente, durch die eine idealisierende begriffliche Vervollständigung und Vereinheitlichung erreicht wird. Das paradigmatische Beispiel einer solchen Vervollständigung in der Mathematik war für Cassirer die Vervollständigung des Systems der rationalen Zahlen \mathbf{Q} zum System der reellen Zahlen \mathbf{R} . Damit schließt sich der Kreis: Der Übergang von den reellen Zahlen \mathbf{R} zu Robinsons nichtarchimedischem, infinitesimal vervollständigtem System \mathbf{R}^* kann ebenfalls als Vervollständigung beschrieben, analog zu der besser bekannten, “klassischen” Vervollständigung von \mathbf{Q} zu \mathbf{R} , wie sie Dedekind und Cantor konstruiert hatten. Man kann also Robinsons Nicht-Standardanalyse als eine Bestätigung von Cassirers allgemeinem Schema der mathematischen Begriffsentwicklung ansehen, eben der Vervollständigung.

Cassirer hat sich schon sehr früh von Cohens infinitesimalem Ansatz distanziert, nicht erst in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*⁸⁸, sondern bereits in *Leibniz' System* (Cassirer 1902). Offen kritisiert hat er ihn gleichwohl nie, stattdessen wurde er nicht müde, Cohens Infinitesimalmetaphysik als Ausgangspunkt seines eigenen Denkweges zu präsentieren, ohne allerdings hinzuzufügen, daß dieser Weg ihn von Beginn an von Cohen weg führte.⁸⁹ Er stellte seine an Cohens Werk anknüpfenden Überlegungen so dar, als bettete er dessen infinitesimal-zentrierten Ansatz lediglich in einen allgemeineren

⁸⁷ Cassirer (1907, 77, 78, 81).

⁸⁸ Cassirer (1910).

⁸⁹ Cf. Mormann und Katz (2013), und Skidelski (2008).

privat 15/2/16 20:02

Eliminado: -

Zusammenhang ein, wodurch das Wesen von Cohens Ansatz jedoch nicht tangiert werde.

Eine solche infinitesimale Vervollständigung *in extenso* konstruiert zu haben, ist das Verdienst Robinsons. Cassirer konnte sie nicht kennen. Gleichwohl paßt Robinsons Vervollständigung gut in den von Cassirer skizzierten Rahmen einer allgemeinen Mathematik und mathematische Naturwissenschaften umfassenden Wissenschaftsphilosophie. Dafür auch auf Robinsons Nicht-Standardanalyse einzugehen, empfiehlt sich, so möchte ich zeigen, gerade für ein besseres Verständnis der Marburger Wissenschaftsphilosophie, auch wenn dies zunächst anachronistisch anmuten mag.

4. Hyperreelle Zahlen und andere Vervollständigungen. Eine philosophische (und nicht rein philosophiehistorische) Einschätzung der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie kommt nicht darum, kurz auf die von Abraham Robinson⁹⁰ inaugurierte Nichtstandardanalyse einzugehen, auch wenn es keine direkten Beziehungen zwischen beiden gegeben hat: die Marburger Wissenschaftsphilosophie war längst vor Robinson von der historischen Bühne abgetreten, und Robinson ist auf die Marburger Schule, nur *en passant* eingegangen.⁹¹ Warum das mathematische Faktum der Nicht-Standardanalyse trotzdem für eine philosophische Einschätzung der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie relevant sein könnte, soll in diesem Teil begründet werden.

Aus einer mathematikhistorischen Perspektive betrachtet kann man die auf einem System hyperreeller Zahlen basierende Nichtstandardanalyse als Versuch charakterisieren, eine strenge Begründung im modernen Sinne für das Rechnen mit

⁹⁰ Robinson (1961).

⁹¹ Robinson erwähnt Natorps *Grundlagen* beiläufig in Robinson (1966, 278).

infinitesimalen, also unendlich kleinen Zahlen zu finden, wie sie der Leibnizsche Infinitesimalkalkül verwendete. In den Händen von Leibniz und anderen „genialen“ Mathematikern des 17. und 18. Jahrhunderts führte dieser Kalkül zwar oft zu richtigen und interessanten Ergebnissen, gleichwohl mußten seine Methoden Mathematikern späterer Generationen oft als logisch dubios erscheinen auch wenn manche Operationen wie Addition und Subtraktion von Infinitesimalen offenbar unproblematisch sind: Sind etwa dg und dh unendlich kleine Größen, ist klar, daß ihre Summe $dg + dh$ ebenfalls eine unendlich kleine Zahl ist, für die darüber hinaus gilt

$$(4.0) \quad dg + dh = dh + dg.$$

Problematischer wird es, wenn man sich an Operationen wie die Leibnizsche „Kettenregel“ erinnert, wonach sich die Ableitung einer Funktion $f(x) := g(h(x))$ der differenzierbaren Funktionen f und g berechnet als

$$(4.1) \quad f'(x) := df/dx = df/gx \cdot gx/dx$$

was durch eine vagen Analogie mit der Kürzungsregel von Brüchen endlicher Zahlen begründet wird, also $a/b \cdot b/c = a/c$. Das scheint vorauszusetzen, daß die Division von Infinitesimalen definiert ist und denselben „Regeln“ gehorcht wie die Division endlicher Zahlen. Diese Analogie wiederum ließe sich durch Leibniz' „Gesetz der Stetigkeit“ begründen, wonach im Endlichen und im unendlichen Kleinen „die selben Regeln“ gelten.

Leibniz' Intention könnte somit so beschreiben, das System der reellen Zahlen \mathbf{R} zu einem System $^*\mathbf{R}$ zu erweitern derart, daß das erweiterte System $^*\mathbf{R}$ neben den „gewöhnlichen“ reellen Zahlen auch infinitesimale Zahlen enthielt, die jedoch „dieselben“ Regeln wie die endlichen Zahlen erfüllten.⁹²

⁹² Die Gültigkeit „der selben Regeln“ impliziert, daß aus der Existenz unendlich kleiner Zahlen auch die Existenz unendlich großer Zahlen folgt. Robinsons unendlich große hyperreelle Zahlen sind jedoch ganz verschieden von Cantors unendlich großen Ordinalzahlen.

Während die Philosophen und Mathematiker des 17. Und 18. Jahrhunderts noch hoffen konnten, dieses Projekt sei realisierbar oder gar schon realisiert, war spätestens seit Ende des 19. Jahrhunderts klar, daß ein solches Projekt undurchführbar war: Das System der reellen Zahlen \mathbf{R} ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Das heißt, es gibt keine Erweiterung \mathbf{R}^* von \mathbf{R} , die Infinitesimale enthält und die alle „Regeln“ von \mathbf{R} erfüllt. Diese Tatsache lag zu Leibniz' Zeiten außerhalb des Horizontes auch der besten Mathematiker, da es ja noch nicht einmal eine exakte Definition der reellen Zahlen gab. Seit mehr als hundert Jahren ist die wesentliche Eindeutigkeit der reellen Zahlen \mathbf{R} „mathematische Folklore“. Damit scheint ein Leibnizsches Erweiterungsprogramm, das die reellen Zahlen \mathbf{R} zu einem System „hyperreeller“ Zahlen $^*\mathbf{R}$ mit Infinitesimalen vervollständigen will, endgültig gescheitert.⁹³

Bei genauerem Hinsehen erwies sich diese Verabschiedung von Leibniz' Programm jedoch als voreilig. Zwar kann es keine infinitesimale Erweiterung $^*\mathbf{R}$ von \mathbf{R} geben, die zu \mathbf{R} isomorph ist, für die also dieselben Theoreme wie für \mathbf{R} gelten, alle Sätze des Leibnizschen Infinitesimalkalküls sind aber – etwas vereinfacht gesagt – in einer Logik erster Stufe formulierbar, die als Übersetzungen von Sätzen über Sachverhalte in \mathbf{R} erscheinen. Man kann nun zeigen – und das tat Robinson – daß es infinitesimale Erweiterungen $^*\mathbf{R}$ von \mathbf{R} gibt derart, daß die strukturellen Beziehungen zwischen \mathbf{R} und $^*\mathbf{R}$ so sind, daß diese Sätze genau dann wahr sind, wenn ihre Übersetzungen in Sätze über \mathbf{R} wahr sind. Im Jargon der modernen Modelltheorie wird das so ausgedrückt, daß ein „Transfer-Theorem“ zwischen \mathbf{R} und $^*\mathbf{R}$ gilt, klassisch könnte man sagen, Leibniz' „Gesetz der Stetigkeit“ gilt für \mathbf{R} und $^*\mathbf{R}$.⁹⁴ Insgesamt gelang es so, eine dem

⁹³ Darüber hinaus läßt sich zeigen, daß Leibniz' ziemlich vages „Gesetz der Stetigkeit“, wonach im Endlichen dieselben Gesetze gelten wie im Unendlichen im Allgemeinen falsch ist. Es ist leicht zu sehen, daß etwa Cantors System der unendlichen Ordinalzahlen keineswegs die selben Gesetze erfüllt wie das System der endlichen Ordinalzahlen \mathbf{N} .

⁹⁴ Für eine dem neuesten Forschungsstand entsprechende Darstellung dieser Problematik konsultiere der interessierte Leser die Arbeiten Katz und Sherry (2013), sowie Sherry und Katz

Leibnizschen Infinitesimalkalkül sehr ähnliche „Nichtstandardanalyse“ zu formulieren, die den Exaktheitsansprüchen der modernen Mathematik genügt und es damit erlaubt, die eleganten Regeln des Leibnizschen Kalküls „ohne schlechtes Gewissen“ zu verwenden.

Betrachten wir nun etwas genauer die Konstruktion des Systems der hyperreellen Zahlen ${}^*\mathbf{R}$, die sich nicht nur aus mathematischen, sondern auch aus philosophischen Gründen für ein Verständnis der Marburger mathematischen Wissenschaftsphilosophie als interessant erweisen. Zunächst sei vorausgeschickt, daß dies in verschiedener Weise möglich ist. Es gibt also mittlerweile zahlreiche verschiedene infinitesimale Vervollständigungen ${}^*\mathbf{R}$ von \mathbf{R} mit je spezifischen Vor- und Nachteilen. Ihre Konstruktionsmethode ist mittlerweile weitgehend standardisiert, so daß die „Nicht-Standardanalysis“ allmählich die Aura des Exotischen und ihren „Nicht-Standardcharakter“ zu verlieren beginnt.

Die erste zentrale Beobachtung ist, daß die Konstruktion von ${}^*\mathbf{R}$ viele Merkmale gemein hat mit der besser bekannten Dedekind- oder Cantor-Vervollständigung der rationalen Zahlen \mathbf{Q} zu den reellen Zahlen \mathbf{R} . Das heißt, der Schritt von \mathbf{R} zu ${}^*\mathbf{R}$ ähnelt in vielem dem Schritt von \mathbf{Q} zu \mathbf{R} . Beide sind Vervollständigungen algebraischer Systeme, die nach sehr ähnlichen Mustern konstruiert werden. Der philosophiehistorisch interessante Punkt ist, daß die Vervollständigungen von Dedekind und Cantor und ihre philosophische Bedeutung von Natorp und Cassirer ausführlich in *Logische Grundlagen*⁹⁵ bzw. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*⁹⁶ diskutiert werden. Insbesondere für Cassirer war der Begriff der Vervollständigung ein Schlüsselbegriff für das philosophische Verständnis der wissenschaftlichen Begriffsbildung überhaupt, wie im zweiten Teil dieses Abschnitts expliziert werden soll.

Um diesen, in der Philosophie bisher wenig beachteten Zusammenhang zwischen

(2014).

⁹⁵ Natorp (1910).

⁹⁶ Cassirer (1910).

Standard- und Nichtstandardbegriffen verstehen zu können, ist es zweckmäßig, kurz die klassische Vervollständigung des Systems der rationalen Zahlen \mathbf{Q} zum System der reellen Zahlen \mathbf{R} mithilfe Cantorscher Fundamentalfolgen zu rekapitulieren.

Ausgangspunkt ist der Körper der rationalen Zahlen \mathbf{Q} . Nun betrachte man die Menge aller Cauchy-konvergenten Folgen (a_n) über \mathbf{Q} . Eine Folge rationaler Zahlen $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ ist per definitionem eine Cauchyfolge genau dann, wenn für wachsende Indizes n die Beträge der Differenzen zwischen den Gliedern der Folge beliebig klein werden. Zwei Folgen (a_n) und (b_n) werden als äquivalent definiert genau dann, wenn die Folge ihrer Differenzen $|a_n - b_n|$ eine Cauchyfolge ist, die gegen 0 konvergiert. Dann kann man zeigen, daß die Menge der Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen rationaler Zahlen mit den reellen Zahlen identifiziert werden kann. Identifiziert man die rationalen Zahlen $q \in \mathbf{Q}$ in kanonischer Weise mit den konstanten Cauchy-Folgen (q_n) mit $q_n = q$ erhält man eine kanonische strukturerhaltende Einbettung $\mathbf{Q} \xrightarrow{e} \mathbf{R}$. Das heißt, die Abbildung e ist so beschaffen, daß die Ordnungs- und die algebraischen Struktur von \mathbf{Q} auf \mathbf{R} , fortgesetzt werden können, oder besser gesagt, die "Regeln für \mathbf{Q} " lassen sich zu "Regeln für \mathbf{R} " erweitern. Mit anderen Worten: Das System der rationalen Zahlen \mathbf{Q} läßt sich vervollständigen zu einem System der reellen Zahlen \mathbf{R} . Die reellen Zahlen \mathbf{R} bilden eine Vervollständigung der rationalen Zahlen \mathbf{Q} . Für Cassirers Philosophie der Mathematik (und damit auch für seine Wissenschaftsphilosophie insgesamt) ist es von entscheidender Bedeutung, diesen Prozeß der Vervollständigung, wie er sich in je verschiedener Weise im Übergang von \mathbf{Q} zu \mathbf{R} , von \mathbf{R} zu den komplexen Zahlen \mathbf{C} , und vielen anderen Beispielen manifestiert, in seinem Wesen zu begreifen. Wie er schon in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*⁹⁷ und noch ausführlicher im dritten Band der *Philosophie der symbolischen Formen*⁹⁸ ausführt, ist eine solche Vervollständigung nicht

⁹⁷ Ibid.

⁹⁸ Cassirer (1929).

einfach als eine bloß extensionale Erweiterung eines mathematischen Gegenstandsbereichs zu verstehen. Eine Vervollständigung im eigentlichen Sinne liege nur dann vor,

... wenn sich zeigt, daß die neuen Elemente nicht einfach ... den alten “adjungiert” werden, sondern daß sie eine systematisch-notwendige Entfaltung der letzteren sind. Und der Beweis dieses Zusammenhangs läßt sich wiederum nicht anders führen als durch den Nachweis, daß zwischen den neuen und den alten Elementen gewissermaßen eine logische Urverwandtschaft besteht: in der Art, daß die neuen Elemente zu den früheren nichts hinzubringen als das, was schon in deren ursprünglichen Sinn enthalten ist und in diesem implizit beschlossen liegt.⁹⁹

...

In der Tat wird man den Schlüssel für das eigentliche Verständnis der sog. “idealen” Gebilde eben darin zu suchen haben, daß die Idealität keineswegs erst bei ihnen beginnt, sondern daß sie in ihnen nur in prägnanter Schärfe und mit besonderem Nachdruck hervortritt.¹⁰⁰

Bemerkenswert ist nun, daß der Übergang vom archimedischen System \mathbf{R} zu Robinsons nichtarchimedischem \mathbf{R}^* strukturell ganz ähnlich beschrieben werden kann. Der Übergang von \mathbf{R} zu \mathbf{R}^* ist eine idealisierende Vervollständigung im Sinne Cassirers, durch die das System der reellen Zahlen \mathbf{R} durch “Adjunktion” idealer Elemente zum System \mathbf{R}^* erweitert wird. Diese Erweiterung ist nicht nur eine Erweiterung im extensionalen Sinne, sondern läuft auf eine echte “Tieferlegung der Fundamente” (Hilbert) hinaus.¹⁰¹

In strikter Analogie zur Konstruktion der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen rationaler Zahlen beginnt man mit der Menge $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} := \{(a_n)_{n \in \mathbf{N}}; a_n \in \mathbf{R}\}$ aller Folgen reeller Zahlen. Die reellen Zahlen $a \in \mathbf{R}$ werden als konstante Folgen $(a)_{n \in \mathbf{N}}$ in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ eingebettet. Addition, Subtraktion und Multiplikation sind auf $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ in kanonischer Weise

⁹⁹ Ibid., 458.

¹⁰⁰ Ibid., 461.

¹⁰¹ Hilbert (1918, 407).

komponentenweise definiert:

$$(4.2) \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \pm (b_n)_{n \in \mathbb{N}} := (a_n \pm b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad , \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n \in \mathbb{N}} := (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Auch die auf \mathbf{R} definierte lineare Ordnung \leq lässt sich, etwas “großzügiger“ konzipiert, komponentenweise auf $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ fortsetzen:

$$(4.3) \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} < (b_n)_{n \in \mathbb{N}} := a_n < b_n \text{ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen } n \in \mathbb{N}.$$

Die so auf $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ definierte Relation $<$ ist zwar keine lineare Ordnung mehr, da zum Beispiel zwischen den Folgen $(-1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(-1^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ keine Ordnungsbeziehung mehr besteht, immerhin aber ist die Relation $<$ auf $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ noch transitiv, d.h., aus $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} < (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} < (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} < (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bezüglich der Ordnungsrelation $<$ enthält $\mathbf{R}^{\mathbb{N}}$ “unendlich kleine” Elemente, die kleiner sind als alle endlichen, durch konstante positive Folgen $(r)_{n \in \mathbb{N}}$ repräsentierten positiven reellen Zahlen $r > 0$. Man betrachte etwa die Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$. Offenbar gilt für alle konstanten positiven Folgen $(r)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $0 < r$:

$$(4.4) \quad 0 < (1/n)_{n \in \mathbb{N}} < (r)_{n \in \mathbb{N}}$$

weil für jede positive reelle Zahl $r > 0$ ja $1/n < r$ für fast alle n gilt. Also ist die Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Vergleich zu den konstanten positiven Größen $(r)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unendlich kleine Größe. Das System $(\mathbf{R}^{\mathbb{N}}, <, +, \cdot)$ enthält jedoch nicht nur unendlich kleine “infinitesimale” Größen, komplementär dazu enthält es aber auch Größen, die “unendlich groß” im Vergleich zu den endlichen Größen $(r)_{n \in \mathbb{N}}$ sind, zum Beispiel divergierende Folgen wie $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ die bezüglich der oben definierten Ordnung $<$ unendlich größer sind als alle endlichen Größen $(r)_{n \in \mathbb{N}}$ weil für jedes positive r gilt $r < n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Gleichwohl weist das System $(\mathbf{R}^{\mathbb{N}}, <, +, \cdot)$ noch einige schwerwiegende technische Defizite auf, die es als Basis für einen nichtarchimedischen Infinitesimalrechnung ungeeignet erscheinen lassen. Zum Beispiel hat $(\mathbf{R}^{\mathbb{N}}, <, +, \cdot)$ zahlreiche Nullteiler, d.h., Elemente

$(r)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(s)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $(r)_{n \in \mathbb{N}}, (s)_{n \in \mathbb{N}} \neq 0$, aber $(r)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (s)_{n \in \mathbb{N}} = 0$. Darüber hinaus unterscheidet $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, <, +, \cdot)$ zwischen zu vielen Elementen, die zu unterscheiden für einen Infinitesimalrechnung nicht sinnvoll ist.

Dieses Manko läßt sich beseitigen, indem man eine geeignete Äquivalenzrelation \sim auf $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, <, +, \cdot)$ definiert derart, daß die Menge $\mathbf{R}^* := (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, <, +, \cdot) / \sim$ der Äquivalenzklassen schließlich eine geeignete infinitesimale und deshalb nichtarchimedische Vervollständigung von \mathbf{R} darstellt. Die Definition dieser Äquivalenzrelation \sim und damit die Definition von \mathbf{R}^* ist komplizierter als im Fall der Vervollständigung von \mathbf{Q} zu \mathbf{R} mithilfe von Cauchyfolgen, sie setzt insbesondere das Auswahlaxiom voraus, um die Existenz geeigneter Ultrafilter zu gewährleisten. Diese Begriffe wurden erst in den dreißiger Jahren von Mathematikern und Logikern wie Tarski eingeführt und waren Mathematikern wie Hahn und Klein, die sich schon früher mit nichtarchimedischen Systemen beschäftigt hatten, unbekannt.

Der für eine neue Einschätzung der Marburger Wissenschaftsphilosophie zentrale Punkt ist nun, daß für Cassirer Vervollständigungen im eben erörterten Sinne, also insbesondere die Vervollständigung des Systems rationalen Zahlen \mathbf{Q} zum System der reellen Zahlen \mathbf{R} , die fundamentale Methode der mathematischen und empirischen Begriffsbildung überhaupt darstellten. Da nun die Einführung von Infinitesimalen (und anderen hyperreellen Zahlen), also der Übergang von \mathbf{R} von nach \mathbf{R}^* , als Vervollständigung beschrieben werden kann, ergibt sich, daß Robinsons Nichtstandard-Analyse sehr gut in den allgemeinen Rahmen der Cassirerschen Wissenschaftsphilosophie paßt – auch wenn Cassirer Robinsons Vervollständigung natürlich nicht gekannt hat. Überdies zeigt sich, daß Cohens, auf den Infinitesimalbegriff fixierte Wissenschaftsphilosophie als ein Spezialfall des Cassirerschen Ansatzes verstanden werden kann: Cohen sah sozusagen nur eine Möglichkeit, die für die Verwissenschaftlichung des Gegenstandes notwendige Idealisierung zu erreichen, eben

seine Einbettung in eine infinitesimale Vervollständigung der empirischen Wirklichkeit zu einer wissenschaftlichen Realität. Cassirers Ansatz war wesentlich flexibler: er erkannte die allgemeine Bedeutung von Vervollständigungen für die mathematische und die wissenschaftliche Begriffsbildung überhaupt.

Im Nachhinein, aus einer Perspektive, in der Robinsons infinitesimale Vervollständigung $*\mathbf{R}$ von \mathbf{R} bereits bekannt ist, erscheint damit Cassirers auf einem allgemeinen Vervollständigungskonzept beruhende Konzeption als eine weitreichende Verallgemeinerung von Cohens "provinziell", auf den Begriff des Infinitesimals fixierten Ansatz. Diese Beschreibung der Beziehung zwischen Robinson, Cohen, und Cassirer ist in hohem Maße idealisierend, sie entspricht nicht den tatsächlichen Beziehungen zwischen den Protagonisten: Robinson hatte für Cohens Infinitesimalphilosophie nichts übrig, sein Lehrer Abraham Fraenkel hatte ihm eine tiefgehende Abneigung gegen den Marburger Neukantianismus vererbt; Cohens mathematische Kenntnisse reichten nicht aus, Cassirers um den Vervollständigungsbegriff kreisende Philosophie der Mathematik zu verstehen; schließlich, und das ist der entscheidende Umstand, der eine wechselseitige philosophisch-mathematische Befruchtung der Gedanken von Cohen, Cassirer, und Robinson ins Reich der Fiktion verweist, zu Lebzeiten Cohens und Cassirers war Robinsons infinitesimale Vervollständigung $\mathbf{R} \longrightarrow * \mathbf{R}$ noch jenseits des Vorstellungshorizontes von Mathematikern und Philosophen gleichermaßen.

Akzeptiert man Cassirers prophetische These, die fundamentalen Begriffsbildungen in der Mathematik und den mathematischen Naturwissenschaften seien als idealisierende Vervollständigungen zu charakterisieren, wird aus dieser Perspektive eine bemerkenswerte begriffliche Kontinuität zwischen archimedischen und nichtarchimedischen Größensystemen sichtbar. Insgesamt erscheint damit Cohens "provinzielle"¹⁰²

¹⁰² vgl. Giovannelli (2015, 23).

auf den Infinitesimalbegriff fokussierte Transzendentalphilosophie keineswegs mehr so obsolet wie ihre logisch-empiristischen Verächter glauben machen wollten.

5. Mathematische Wissenschaftsphilosophie nach Marburg. Spätestens Ende der 1920er Jahre verschwand der Marburger Neukantianismus in Europa von der philosophischen Bühne, und seit den 1940er Jahren dominierte die analytische Wissenschaftsphilosophie als Nachfolgerin des Wiener logischen Empirismus die angelsächsische Szene und damit die Philosophie insgesamt. Was man einmal mathematische Wissenschaftsphilosophie hatte nennen können, hatte damit als aktuelle philosophische Option aufgehört zu existieren.

Im Laufe der Zeit wurde jedoch immer deutlicher, daß auch die logisch-empiristische Wissenschaftsphilosophie Wiener Provenienz ihre Schwächen hatte - vor ihnen hatte schon Neurath schon in den 1930er Jahren hellsichtig gewarnt, nämlich die Tendenz, ihren eigentlichen Gegenstand, die empirischen Wissenschaften, zugunsten wissenschaftsphilosophisch irrelevanter logischer Subtilitäten aus den Augen zu verlieren. Als Reaktion auf diese Entwicklung mag man die wachsende Bedeutung von Wissenschaftssoziologie und Wissenschaftsgeschichte um die Mitte des 20. Jahrhunderts werten, deren Vertreter nicht selten einer völligen Abkehr von jeder Art logischer oder formaler Betrachtung des Phänomens Wissenschaft das Wort redeten.

Einer der bekanntesten zeitgenössischen amerikanischen Wissenschaftsphilosophen, Bas van Fraassen, ging soweit, den "Welterfolg" der logischen Wissenschaftsphilosophie als nichts weniger als "Tragödie" zu bezeichnen, da sie zur Lösung der eigentlich interessanten philosophischen Probleme, die die Wissenschaften aufwerfen, nichts beigetragen habe:

In any tragedy, we suspect that some crucial mistake was made at the very

beginning. The mistake, I think, was to confuse a theory with the formulation of a theory in a particular language. The first to turn the tide was Patrick Suppes with his well-known slogan: the correct tool for philosophy of science is mathematics, not metamathematics. This happened in the 1950s and few wanted to listen. ...¹⁰³

Die Marburger mathematische Wissenschaftsphilosophie weist zwar keine direkte Verwandtschaft mit der von Suppes, van Fraassen und anderen propagierten "mathematical philosophy of science" auf, immerhin aber belegt der Marburger Ansatz, daß Suppes' These, das Organon der Wissenschaftsphilosophie sei die Mathematik, nicht gar so originell war, wie van Fraassen glaubte, und daß umgekehrt eine mathematische Wissenschaftsphilosophie nicht ganz so abwegig war, wie die logischen Empiristen und ihre Nachfolger glauben machen wollten.

Suppes' Ansatz einer mathematischen Wissenschaftsphilosophie unterscheidet sich wesentlich vom Marburger Ansatz, insofern für ihn die Mathematik einfach ein Instrument für die Untersuchung eines gegebenen Gegenstandes war, eben der empirischen Wissenschaften, und nicht die grundlegende wissenschaftliche Methode überhaupt. Für Suppes war die Struktur einer empirischen Wissenschaft mathematisch nur in dem Sinne, daß die Begriffssysteme, mit deren Hilfe "Natur" konzipiert wurde, mathematischer Art waren, d.h. diese Begriffssysteme konnten durch mathematische, genauer gesagt mengentheoretische Strukturen dargestellt werden. Die Mathematik selbst aber war für Suppes kein genuines Objekt wissenschaftsphilosophischen Überlegungen. Suppes' mathematische Wissenschaftsphilosophie verfügt über keine Philosophie der Mathematik.

Die Marburger mathematische Wissenschaftsphilosophie hingegen ging davon aus, die Begriffsbildung in der Mathematik und den empirischen Wissenschaften sei von

¹⁰³ Van Fraassen (1989, 221 – 222).

derselben Art. Das findet sich bei Cohen extrem formuliert in der These, das Wesen der gesamten Wissenschaft manifestiere sich im Begriff des Infinitesimalen, oder in Cassirers These, der Kernbegriff der mathematischen Naturwissenschaft und vielleicht sogar der Wissenschaft überhaupt sei der Funktionsbegriff.

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, läßt sich behaupten, daß die neue mathematische Wissenschaftsphilosophie zum wissenschaftsphilosophischen Fortschritt nicht unerheblich beigetragen hat.¹⁰⁴ Mit pauschalen Verdikten über Erfolg oder Mißerfolg wird man jedoch, wie mir scheint, weder der logischen, noch der mathematischen Wissenschaftsphilosophie gerecht, man würde vielmehr zu einer traditionellen Auffassung des Verhältnisses von Wissenschaftsphilosophie und Wissenschaft zurückkehren, die dieses Verhältnis nur unzureichend wiedergibt. Ihr zufolge sind die Wissenschaften einfach der passive Gegenstand der philosophischen Reflexion, die ihre eigenen Methoden hat und ihren eigenen Regeln folgt. Eine solche Perspektive würde nahelegen, die Wissenschaftsphilosophie als Teil einer *philosophia perennis* aufzufassen, die im wesentlichen mit immer denselben überkommenen Problemen befaßt ist, die ihr durch die „ewige“ Problematik des menschlichen Wissens gestellt werden.

Die mathematischen und logischen Wissenschaftsphilosophien des 20. Jahrhunderts haben jedoch gezeigt, daß es philosophische Ansätze gibt, die die Wissenschaften, insbesondere die Physik und die Mathematik, nicht nur schlicht als Gegenstände philosophischer Untersuchungen betrachten, sondern sie auch als Arsenal neuer begrifflicher Ressourcen der Philosophie begreifen. Zu den philosophischen Strömungen, die solch ein modernes Verhältnis von Philosophie und Wissenschaft nicht nur

¹⁰⁴ Gleichwohl lieferte auch sie natürlich keine narrensicheren Rezepte für die Erzeugung interessanter wissenschaftsphilosophischer Erkenntnisse. Das haben in den vergangenen Jahrzehnten manche enthusiastischen Adepten von Suppes' „mathematischer“ Wissenschaftsphilosophie zur Genüge gezeigt. Zu denken wäre etwa an die sogenannte „strukturalistische Wissenschaftsphilosophie“, als deren Protagonisten Sneed, Stegmüller, Balzer, und Moulines gelten können. Orientiert man sich an van Fraassens Redeweise von der „Tragödie“ der logi(zisti)schen Wissenschaftsphilosophie“ des logischen Empirismus, könnte man, auf das bekannte Diktum von Marx anspielend, sagen, diese Tragödie habe sich als Farce in Gestalt der „strukturalistischen Wissenschaftsphilosophie“ wiederholt.

propagierten, sondern auch praktizierten, gehörten eben - unter anderen - der Marburger Neukantianismus und der logische Empirismus des Wiener Kreises.

Noch in seiner letzten (unvollendeten) Arbeit *Reflections on the Concept of Group and the Theory of Perception*¹⁰⁵ plädierte Cassirer für eine solche „wissenschaftliche“ Wissenschaftsphilosophie. In diesem Manuskript kritisierte er als Vertreter der gerade eben erwähnten traditionellen Konzeption von Philosophie Hermann Lotze und dessen grundsätzlich ablehnende Haltung gegenüber nichteuklidischen Geometrien, die dieser als philosophisch schlichtweg irrelevant und „absurd“ ablehnte. Im Gegensatz zu Lotze waren für Cassirer die nichteuklidischen Geometrien und das daraus resultierende „Erlanger Programm“ Felix Kleins zeitlebens eine Quelle der philosophischen Inspiration. Mit der Entdeckung der verschiedenen Formen der nichteuklidischen Geometrie stellte sich für ihn

... nicht nur ein einzelnes mathematisches Problem [...]; es war vielmehr die Frage nach der „Wahrheit“ der Mathematik, ja die Frage nach der Bedeutung der Wahrheit *überhaupt* in einem neuen Sinne gestellt. Nicht nur das Schicksal der Mathematik, sondern selbst das der Logik schien jetzt davon abzuhängen, in welcher Richtung die Lösung gesucht und gefunden wurde.¹⁰⁶ (Cassirer (1957, S. 30).

Die fundamentale Bedeutung der nichteuklidischen Geometrien ist mittlerweile Gemeingut der Wissenschaftsphilosophie. Tatsächlich aber hat die mainstream Wissenschaftsphilosophie nur eine sehr begrenzte Auswahl von nichteuklidischen Geometrien in ihre Betrachtungen einbezogen, nämlich die Riemannschen, die für die relativistischen Raumzeittheorien eine fundamentale Rolle spielen. Nichtarchimedische Geometrien werden hingegen fast völlig ignoriert, genauer gesagt, nichtarchimedische

¹⁰⁵ Cassirer (1945).

¹⁰⁶ Cassirer (1957, 30).

Strukturen werden als ein abseitiges, höchstens mathematisch interessantes Problemfeld betrachtet.

Es ist ein Verdienst der mathematischen Wissenschaftsphilosophie der Marburger Schule, diese Beschränkung auf archimedische Systeme nicht mit gemacht zu haben. Beginnend mit Cohens *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte* (Cohen 1883) haben die Marburger Philosophen zahlreiche Versuche unternommen, auf die durch die nichtarchimedischen Systeme gestellten neuen philosophischen Herausforderungen zu antworten. Aus heutiger Perspektive mögen ihre Antworten in mancher Hinsicht unbefriedigend sein. Diese Tatsache aber sollte man nicht zum Vorwand nehmen, den Marburger Ansatz schlicht zu vergessen.

Bibliographie:

Carnap, R., 2004, *Scheinprobleme in der Philosophie und andere metaphysikkritische Schriften*, herausgegeben, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Thomas Mormann, Hamburg, Meiner Verlag.

Cassirer, E., 1902, *Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen*, Hamburg, Meiner.

Cassirer, E., 1907, Kant und die moderne Mathematik, *Kant-Studien* 12, 1 – 44.

Cassirer, E., 1912, Hermann Cohen und die Erneuerung der kantischen Philosophie, *Kant-Studien* 17, 252 – 273.

Cassirer, E., 1979 (1945), *Reflections on the Concept of Group and the Theory of Perception*, in E. Cassirer, *Symbol, Myth, and Culture*, edited by D.P. Verene, New Haven and London, Yale University Press, 271 – 291.

Cassirer, E., 2009, *Briefe, Ausgewählter wissenschaftlicher Briefwechsel*. Unter Mitarbeit von Marion Lauschke, Claus Rosenkranz und Marcel Simon-Gadof herausgegeben von John M. Krois, *Nachgelassene Manuskripte und Texte*. Band 18,

XLVIII, 380 Seiten sowie 1 DVD-ROM mit sämtlichen etwa 1400 bislang aufgefundenen Briefen von und an Ernst Cassirer, Hamburg, Meiner.

Cohen, H., 1883, Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: Ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntniskritik, Berlin, Dümmler.

Cohen, H., 1914/1984, Einleitung mit kritischem Nachtrag zur „Geschichte des Materialismus“ von F.A. Lange, edited by H. Holzhey, Hildesheim, Olms.

Edel, G., 1988, Von der Vernunftkritik zur Erkenntnislogik. Die Entwicklung der theoretischen Philosophie Hermann Cohens, Freiburg/München, Verlag Karl Alber.

Edgar, S., 2014, Hermann Cohen's *Principle of the Infinitesimal Method*: A Rationalist Interpretation, HOPOS, to appear.

Ehrlich, P., 2006, The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes, *Archive of the History of Exact Sciences* 60, 1 – 121.

Fechner, G.T., 1860, *Elemente der Psychophysik*, Leipzig, Breitkopf und Härtel.

Fraenkel, A.A., 1967, *Lebenskreise*. Aus den Erinnerungen eines jüdischen Mathematikers, Stuttgart, Deutsche Verlagsanstalt.

Giovanelli, M., 2011, Reality and Negation – Kant's Principle of Anticipations of Perception. An Investigation of its Impact on the Post-Kantian Debate, *Studies in German Idealism* volume 11, Berlin, Springer.

Giovanelli, M., 2015, Hermann Cohen's *Das Princip der Infinitesimal-Methode*: The History of an Unsuccessful Book, Preprint June 2015, Elsevier 08/06/2015.

Grassmann, H., 1844, **A1**: 1844, Die lineale Ausdehnungslehre, Wiegand. Leipzig.

Hahn, H., 1933(1988), Die Krise der Anschauung, in Hahn 1988, 86 – 114.

Hahn, H. 1934 (1988), Gibt es Unendliches?, in Hahn 1988, 115 – 140.

Hahn, H., 1988, *Empirismus, Logik, Mathematik*, Frankfurt/Main, Suhrkamp Verlag.

- Heis, J., 2010, 'Critical philosophy begins at the very point Where logistic leaves off': Cassirer's response to Frege and Russell, *Perspectives on Science* 18, 383 – 408.
- Hilbert, D., 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner.
- Hilbert, D., 1917, *Axiomatisches Denken*, *Mathematische Annalen* 78, 405 – 415.
- Holzhey, H., 1986, *Cohen und Natorp. Der Marburger Neukantianismus in Quellen*. Band 2, Basel, Schwabe.
- Katz, M., Sherry, D. 2013, Leibniz' Infinitesimals: Their Fictionality, their Modern Implementations, and their Foes from Berkeley to Russell and Beyond, *Erkenntnis* 78(3), 571 – 625.
- Klein, F., 1924, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Band 1 (Arithmetik, Algebra, Analysis), Berlin, Springer.
- Laugwitz, D., 1973, Ein Weg zur Nonstandard-Analyse, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 75, 66 – 93.
- Mormann, T., 2008, Idealization in Cassirer's Philosophy of Mathematics, *Philosophia Mathematica* 16(2), 151- 181.
- Mormann, T., Katz, M., 2013, Infinitesimals as an Issue of Neo-Kantian Philosophy of Science, *HOPOS* 3(2), 236 – 280.
- Moynahan, G.B., 2003, Hermann Cohen's „Das Prinzip der Infinitesimalmethode“, Ernst Cassirer, and the Politics of Science in Wilhelmine Germany, *Perspectives on Science* 11, 35 – 75.
- Natorp, P., 1910, *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, Leipzig, Teubner.
- Natorp, P., 1902 (1986), *Zur Logik Hermann Cohens*, Manuskript, in H. Holzhey, 1986, XXX.
- Natorp, P., 1902, Brief an Albert Görland, ... 21. November 1902, in H. Holzhey, ...

Neurath, O., 1936(1981), Die Entwicklung des Wiener Kreises und die Zukunft des Logischen Empirismus, in Otto Neurath, Gesammelte philosophische und methodologische Schriften, Band 2, herausgegeben von R. Haller und H. Rutte, Wien, Hölder-Pichler-Tempsky, 673 – 702.

Patton, L., 2004, Hermann Cohen's History and Philosophy of Science, PhD Thesis McGill University, Montreal.

Poincaré, H., 1906, Wissenschaft und Hypothese, 2. Auflage, Leipzig, Berlin, Teubner.

Poincaré, H., 1906, Der Wert der Wissenschaft, Leipzig, Berlin, Teubner.

Prestel, A., 1983, Non-Standard Analysis, in H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, R. Remmert (Hrg.) Zahlen, Berlin usw., Springer, 213 – 234.

Quine, W.V.O., 1980(1976), Wort und Gegenstand (Word and Object), Stuttgart, Reclam.

Robinson, A., 1966, Non-Standard Analysis, Amsterdam, London, North-Holland.

Russell, B., 1903, The Principles of Mathematics, London, Routledge and Kegan Paul.

Schmieden, C., Laugwitz, D., 1958, Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung, Mathematische Zeitschrift 69, 1 – 39.

Sherry, D., Katz, M., 2014, Infinitesimals, Imaginaries, Ideals, and Fictions, *Studia Leibnitiana* 44(2012), no. 2, 166 – 192.

Skidelsky, E., 2008, Ernst Cassirer: The Last Philosopher of Culture, Princeton/New Jersey, Princeton University Press.

van Fraassen, B., 1989, Laws and Symmetry, Oxford, Oxford University Press.

Veronese, G., 1894, Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarerer Form entwickelt, aus dem Italienischen übersetzt von Adolf Schepp, Leipzig, Teubner.

Waismann, F., 1936 (2012), Einführung in das mathematische Denken. Die Begriffsbildung der modernen Mathematik, herausgegeben von J. Klaus, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft. Kapitel 14 *Ultrareelle Zahlen*, 151 – 155.

Weyl, H., 1928, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München, Oldenbourg.