Science & Philosophy **ISSN**: 2282-7757
Vol. 6(1), 2018, pp. 93--126 **eISSN**: 2282-7765

Is the golden section a key for understanding beauty? Part I (La sezione aurea è una chiave per la comprensione del bello?) Parte I

Franco Eugeni*, Luca Nicotra°

Received: 03-03-2018. **Accepted**: 01-05-2018. **Published**: 30-06-2018

doi: 10.23756/sp.v6i1.402

Abstract

Our goal is to prove that the golden section, however important, is not the only key to understand a mathematical-formalizing approach to the idea of beauty. Having developed, from this point of view, reading keys linked to the post-modern, it is necessary to link together the multiple rivulets of knowledge that gather in this direction. Moreover, the canons of the approaches presented up to now are very indicative for the understanding of many aspects of beauty, which however depends on the historical moment and the cultures created in

* Teramo University. Full Professor of Logics and Science Philosophy,Teramo, Italy; eugenif3@gmail.com.

° Cultural Association "Arte e Scienza", President. Mechanical Engineer and Editor in chief of *ArteScienza* magazine, Rome, Italy; luca.nicotra1949@gmail.com.

the various civilizations. Therefore, we can affirm that there is no effective definition of "beauty" that can be codified through fixed canons, but that the concept is expressed by a series of stratifications and interpretations that tend to link several major variations, expressing the various answers given by man to the question: what is the beauty?

Keywords: Golden Section, Golden Number, Beauty, Golden Rectangle, Fractals

Sunto

Nostro obiettivo è provare che la sezione aurea, per quanto di importanza notevole, non è l'unica chiave per comprendere un approccio matematico-formalizzante dell'idea di bellezza. Essendosi sviluppate, da questo punto di vista, chiavi di lettura legate al post-moderno, occorre legare tra loro i molteplici rivoli di saperi che si addensano in questa direzione. Inoltre, i canoni degli approcci fino ad oggi presentati sono molto indicativi per la comprensione di molti aspetti della bellezza, che però dipende dal momento storico e dalle culture createsi nelle varie civiltà. Pertanto possiamo affermare che non esiste una effettiva definizione del "bello" che possa essere codificata attraverso canoni fissi, ma che il concetto si esprime con una serie di stratificazioni e interpretazioni che tendono a collegare fra loro numerose varianti principali, esprimenti a loro volta le varie risposte date dall'uomo alla domanda: cosa è il bello?

Parole chiave: Sezione Aurea, Numero Aureo, Bellezza, Rettangolo Aureo, Frattali

1 Introduzione

La percezione del bello, da parte della sensibilità estetica soggettiva, è stata giustificata e analizzata con tre precisi approcci a confronto, che qui riassumiamo.[1]

L'approccio neuro-psicologico attribuisce il carattere del bello a particolari forme percepite, in quanto queste esprimono corrispondenza con

[1] Franco Eugeni, Ezio Sciarra, Raffaele Mascella, *Mathematical structures and sense of beauty*, in Capecchi, V.; Buscema, M.; Contucci, P.; D'Amore, B. (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts*, Springer Verlag, XV, 2010, pp. 519-536; Franco Eugeni, Ezio Sciarra, Raffaele Mascella, *Il senso del bello* in TABULARIA A.MMX (S.S.Quator Coronatorum),"academia" editrice d'Italia e San Marino, 2010.

funzioni gratificanti, soprattutto della riproduzione e della espansione selettiva, relative alla conservazione e perfezionamento della specie.

L'approccio socio-culturale attribuisce il carattere del bello a forme percepite come gratificanti in funzione delle convenzioni, delle mode, delle credenze connesse all'equilibrio dei modelli culturali della comunicazione sociale e relativi al tempo storico.

L'approccio matematico-formalizzante, che nasce dal centralizzare il concetto della sezione aurea nell'analisi del bello, ritiene che la sensibilità estetica umana e la percezione soggettiva del bello trovino fondamento in strutture di forme e di rapporti numerici oggettivi presenti in natura.

Nostro obiettivo è provare che la sezione aurea, per quanto di importanza notevole, non è l'unica chiave per comprendere quello che abbiamo chiamato "approccio matematico-formalizzante" e che, essendosi sviluppate da questo punto di vista chiavi di lettura legate al post-moderno, occorre legare tra loro i molteplici rivoli di saperi che si addensano in questa direzione.

Del resto giova osservare che, indipendentemente dalle tre classificazioni sopra richiamate, noi siamo indotti a pensare che, nei tentativi vaghi di definire il bello, sarebbe da fare nostra quell'idea interessante che il sommo filosofo Immanuel Kant (1724-1804) esprime nella sua *Critica del Giudizio*:

> Il gusto è la facoltà di giudizio su d'un oggetto o su d'una specie di rappresentazione, che solo il genio dell'artista ha la capacità di introdurre, produce una soddisfazione od insoddisfazione, che al di la di tutto, dev'essere scevra d'ogni interesse economico o di parte. L'oggetto d'una tale soddisfazione si dice bello! [2]

Sulla comprensione del bello, specie per l'approccio neuro-psicologico e biologico, sembra essere significativo, e da considerare in parallelo, quanto asserisce Herbert Spencer (1820-1903) a proposito dell'evoluzionismo, ponendosi in una posizione ampia che lo porta oltre la visione positivista[3] dei suoi predecessori: l'empirismo sia del francese August Comte[4] (1798-1857)

[2] Immanuel Kant, *Critica del Giudizio*, a cura di A. Bosi, Torino, UTET, 1993, pp. 180-87.

[3] Il positivismo nel nostro contesto va inteso in quella che fu la promozione della filosofia della rivoluzione industriale e della scienza. In particolare, nella Francia napoleonica era nata l'Ecole politechnique, caratterizzata da un orientamento spiccatamente tecnico-scientifico, in antitesi con la Sorbona, che aveva il suo asse portante nell'insegnamento della teologia e delle discipline umanistiche.

[4] August Comte è considerato il padre del positivismo e anche il fondatore della fisica sociale. Il suo positivismo rispecchia pienamente il mondo sociale francese del suo tempo. Enuncia la legge dei tre stadi, (teologico, metafisico, positivo), che a suo avviso è la legge evolutiva dell'umanità. Nel teologico prevale l'immaginazione e l'uomo aspira alla conoscenza assoluta e individua le cause dei fenomeni in entità soprannaturali antropomorficamente concepite; nel metafisico prevale l'atteggiamento critico-distruttivo, e le entità soprannaturali vengono sostituite da entità astratte (essenze, forze occulte o vitali, principi astratti); infine, nello

sia dell'inglese John Stuart Mill (1806-1873), differenziandoli tutti dallo stesso Charles Darwin (1809-1882).[5] Al contrario di loro Spencer amplia il modello di Darwin, parlando esplicitamente di «evoluzionismo cosmico», nella convinzione che le leggi che regolano la biologia e la natura siano pressoché le stesse della fisica, della politica, della cultura, della società, e perché no - aggiungiamo noi - dell'arte e quindi anche di aspetti matematico-formalizzanti che possano interagire nelle forme di comprensione del bello. Sicché basterebbe, in linea teorica, individuare le leggi dell'evoluzionismo per poter studiare l'intera realtà umana.[6] Appare chiaro che, seguendo Spencer, si potrebbe indagare sulla realtà e magari desumerne delle leggi di comportamento, ma a suo avviso mai in una forma completa ed esaustiva, in quanto l'essenza della realtà indagata sarebbe un *quid* che resta inconoscibile, nel senso che sfugge a ogni inquadramento conoscitivo. Ciò secondo Spencer[7] si verificherebbe anche per ogni possibile generalizzazione di una qualunque teoria, quindi anche per teorie riguardanti l'arte e il bello, per cui coloro che possiamo chiamare i "costruttori delle teorie" non potranno mai penetrare ciò che Spencer chiama l'Inconoscibile, che Kant chiamava la "cosa in sé", e che altri chiamano l'"incognito esoterico".[8] È interessante, in questa introduzione, citare anche Henri Bergson[9] (1859-1941), che a nostro avviso precorre il dibattito sull'idea del Disegno Intelligente[10] di Pierre Teilard de Chardin

---

scientifico l'uomo rinuncia al sapere assoluto – cioè alla ricerca delle essenze e delle cause ultime – e si limita a cercare, attraverso l'osservazione e il ragionamento, le leggi effettive dei fenomeni.

[5] Charles Darwin, come ben noto, concepisce l'evoluzionismo nell'ambito puramente biologico e organico.

[6] Ovviamente questa idea è ben lontana da quanto asseriva Comte.

[7] Secondo Herbert Spencer questa impotenza della scienza la rende compatibile con la religione e sulla sua indagine sull'Inconoscibile e le due discipline si supportano a vicenda, proiettando le loro indagini su questioni diverse ma ugualmente necessarie. Naturalmente, questo può avvenire solamente se la scienza e la religione non hanno la pretesa di sconfinare nel campo altrui: e a tal proposito la vicenda di Galileo simboleggia appunto lo sconfinare della religione nel campo scientifico.

[8] Franco Eugeni, *L'esoterismo nella cultura scientifica*, «ArteScienza», Anno III, N. 5, pp. 9-54. Tale concetto esprime ciò che la scienza e la filosofia non riusciranno mai a spiegare come il tempo che si misura ma non si sa cosa sia, lo spazio che si osserva ma non sappiamo come definire, il bello che si intuisce e si afferrà emotivamente ma che non si è capaci di definire.

[9] Bergson è qui citato per la sua opera: *L'Évolution créatrice* (1907), tr. Umberto Segre, Milano, Athena, 1925 e Corbaccio-Dall'Oglio, Milano 1965 (due delle tante edizioni).

[10] Ricordiamo che allo stato attuale due sono gli atti di fede possibili: credere al disegno intelligente oppure credere alla natura quale principio attivo. L'attuale visione si è sostituita all'antico dibattito tra i creazionisti, che sostenevano ingenuamente che l'uomo era stato creato così come è oggi, e gli evoluzionisti che dal loro canto pensavano all'ameba, come il comune antenato, dibattito che si è ampliato in una miriade di direzioni sostenute dai pitagorici, dai neoplatonici, dai positivisti e da tanti altri, ciascuno arbitro delle proprie convinzioni. Per questa via naturalmente si possono operare delle varianti della visione del mondo, siano esse darwiniane o spenseriane o altro.

(1881-1955), in quanto asserisce che l'universo tutto ha un preciso fine, sia che esso sia dettato da una volontà divina, sia che esso nasca dalla natura stessa, pensata come principio attivo. L'uomo deve trasformare se stesso, evolversi, per scorgere una vetta morale ed eventualmente religiosa. Senza una tale creazione individuale la vita e l'universo sarebbero già finiti o finirebbero in futuro. Lo slancio vitale (*élan vital*) sarebbe la forza che muove la vita, come adattamento dinamico all'ambiente, ne segue che l'evoluzione è creatrice, perché va oltre sia il meccanicismo sia un cattivo finalismo.

Si tratta di metodi paradigmatici di come si costruisce una intera visione del mondo, che non solo orienta i futuri sviluppi della scienza, della filosofia e dell'arte ma anche le conoscenze e le operazioni comuni, a livello sia di strati colti che di massa. Tale visione comporta un suo esoterismo, in quanto lascia aperte le condizioni di conoscibilità di aree incognite, che qualificano quelle che Spencer chiamava i «misteri della scienza e della filosofia» e - noi aggiungiamo - dell'arte.

Pertanto possiamo affermare che non esiste una effettiva definizione del "bello", che possa essere codificata attraverso canoni fissi. Riconosciamo che i canoni degli approcci presentati siano molto indicativi per la comprensione di molti aspetti del capire il bello, comprendiamo che viene evidenziato in modo molto corretto come il concetto di bello dipenda dal momento storico, dalle sociologie createsi nelle varie civiltà, ma si evince anche che il concetto si esprime con una serie di stratificazioni e interpretazioni che tendono a collegare fra loro numerose varianti principali, esprimenti a loro volta le varie risposte date dall'uomo.

Quindi tutti i canoni precedenti dovrebbero essere messi da parte, perché non ci sarebbe più un criterio condivisibile a cui appellarsi. Bisogna possedere quel senso speciale che taluno chiama "gusto" o "sensibilità artistica", in altre parole quello che dovrebbe essere un vero insondabile, non classificabile e quindi un indefinibile "senso del bello". Il possesso di questo senso speciale implicherebbe l'esistenza di un elemento soggettivo dominante e implicherebbe che, soprattutto, l'opera d'arte venga introiettata da chi giudica.

Quanto abbiamo asserito sembra essere condiviso da Kant:

> Per decidere se una cosa sia bella o no, noi non poniamo, mediante l'intelletto, la rappresentazione in rapporto con l'oggetto, in vista della conoscenza; la rapportiamo invece, tramite l'immaginazione (forse connessa con l'intelletto), al soggetto e al suo sentimento di piacere e di dispiacere. Il giudizio di gusto non è pertanto un giudizio di conoscenza; non è quindi un atto logico ma estetico, intendendo con questo termine ciò il cui principio di determinazione non può essere che soggettivo (e quindi atto extralogico).[11]

[11] Immanuel Kant, *Op.cit.* p. 179.

Tuttavia va aggiunto - ed è nostra convinzione - che tale extra logico "senso del bello" sarebbe solo parzialmente guidato da un ipotetico arbitrio individuale posseduto e immutabile, perché il gusto, il senso del bello, la comprensione dell'arte nelle sue varie forme possono essere educati, e anzi tutta l'arte moderna e l'estetica stessa, in quanto discipline, nascono proprio dalla necessità di educare il gusto.

Nel presente lavoro è nostro desiderio ripartire dallo studio della sezione aurea nella sua accezione originaria geometrica, antico e mai tramontato tentativo di formalizzazione matematica del bello, aggiungendo vari complementi, che vanno dall'enunciazione di una ipotetica legge universale della bellezza a varie osservazioni critiche sull'uso improprio del termine "sezione aurea", che purtroppo si è diffuso in epoca moderna, fino allo studio dei marchi nella pubblicità. Altro aspetto che ci interessa è sfatare la convinzione che l'approccio matematico-formalizzante per la comprensione del bello passi esclusivamente attraverso la sezione aurea. Oggi vi sono anche altri interessanti aspetti da esaminare. Per questo parleremo della bellezza delle formule nella matematica e nella fisica, della bellezza delle immagini derivanti da formule e da concetti matematici molto astratti o addirittura patologici, come quelle derivanti dai frattali, condurremo una analisi derivante da situazioni irreali legate a errori prospettici studiati ad arte o di composizioni matematiche usate negli spettacoli e nella pubblicità.

2 La divina proporzione: Euclide e la Grecia

La sezione aurea era nota fin dall'antichità. È noto che gli egiziani la usarono nel papiro di Rhind come rapporto sacro ed è pure riscontrabile nella piramide di Cheope, nella quale l'altezza, con una certa approssimazione, sta al lato della base nel rapporto definito dalla sezione aurea.

Si può dire che la sua storia inizia con quella della civiltà occidentale, ma si è sviluppata soprattutto nella Grecia antica.

È nel contesto della Scuola Pitagorica (VI-IV secolo a.C.) che l'idea di bellezza nasce dalla particolare proporzione definita dalla sezione aurea, concetto questo sul quale occorre approfondire i dati numerici, poiché per comprendere questi aspetti matematici occorre andare nei dettagli. Probabilmente era nota, anche se soltanto come fenomeno, allo stesso Platone (427-347 a.C.).[12]

[12] Platone, *Timaeus*, (Translated by Benjamin Jowett), The Internet Classics Archive. Retrieved 30 May 2006. Platone descrive i suoi cinque poliedri regolari (tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro) tutti legati alla sezione aurea.

Ciò che noi oggi chiamiamo “sezione aurea” è niente altro che la *divisione di un segmento di retta in due parti disuguali, tali che il rapporto fra l’intero segmento e la parte maggiore sia uguale a quello fra la parte maggiore e la minore*.[13] Come vedremo più avanti, tale rapporto comune è espresso dal numero irrazionale $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Essa doveva molto probabilmente essere già nota ai pitagorici attraverso lo studio del pentagono regolare e del pentagono stellato formato dalle diagonali del pentagono regolare (figura 1). Infatti, *le diagonali del pentagono regolare si intersecano fra loro in punti che dividono ciascuna diagonale secondo la sezione aurea e il lato del pentagono regolare risulta essere la parte maggiore della sezione aurea della diagonale.*

L’angolo al centro che insiste su ciascun lato del pentagono regolare, essendo la quinta parte di 360°, misura 72° (figura 1) e quindi tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su lati del pentagono misurano 36°. Consideriamo, per esempio, la diagonale *AC* divisa nei punti *D’, E’* dalle due

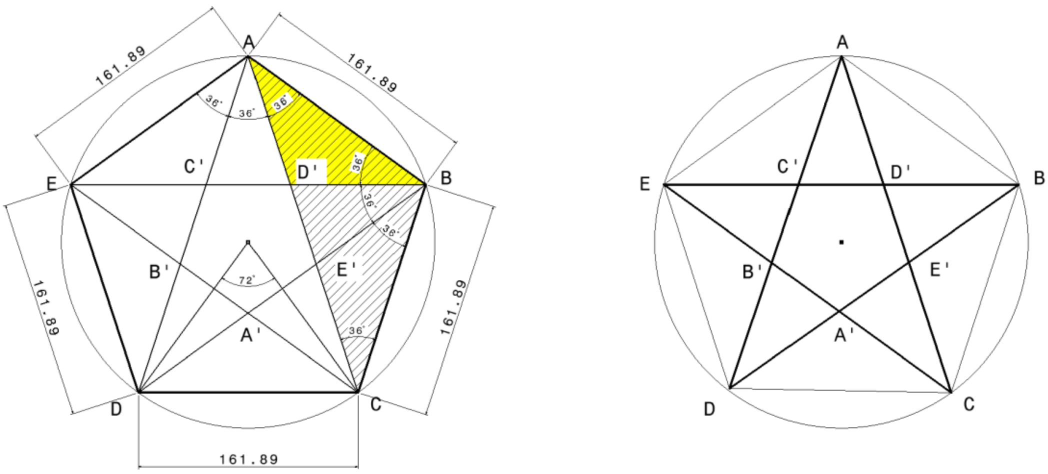


Figura 1 – Il pentagono regolare e il pentagono stellato da esso derivato.

diagonali uscenti da *B*. I triangoli *ABC* e *ABD’* sono simili, avendo in comune sia il lato AB sia l’angolo $C\hat{A}B$=36°, ed essendo $B\hat{C}A$ =$A\hat{B}D'$= 36° in quanto angoli alla circonferenza che insistono su un lato del pentagono. Allora possiamo scrivere:

(1) $$CA : AB = AB : D'A$$

[13]Nel seguito dell’articolo l’espressione “sezione aurea” avrà unicamente questo significato.

Inoltre, il triangolo BCD’ è isoscele sulla base BD’ poiché è $D'\hat{B}C$ = 72°, insistendo su due lati consecutivi del pentagono, e $C\hat{D}'B$ = 72° essendo $B\hat{C}A$ = 36°. Pertanto, essendo $BC = CD'$ e quindi $AB = BC = CD'$, possiamo così riscrivere la precedente proporzione:

(2) $$CA : CD' = CD' : D'A$$

Infine, i triangoli *ABD’* e *BCE’* sono isosceli, sulle basi *AB* e *BC*, e congruenti, poiché hanno congruenti le basi e gli angoli alla base, uguali a 36° in quanto angoli alla circonferenza che insistono su un lato del pentagono. Risulta allora $D'A = CE'$ e $CD' = E'A$ essendo *CD’* e *E’A* somme del segmento E’D’ con i segmenti uguali *D’A* , *CE*’. Per sostituzione dalla (2) si ottiene quindi:

(3) $$CA : E'A = E'A : CE'$$

Considerazioni analoghe alle precedenti possono essere ripetute per ciascuna delle altre diagonali del pentagono regolare. Pertanto possiamo concludere che la (1) dimostra essere il lato del pentagono regolare la parte maggiore della sezione aurea della diagonale, mentre le (2), (3) dimostrano che le diagonali di un pentagono regolare si tagliano reciprocamente secondo la sezione aurea. Le (2), (3) corrispondono alla proprietà 8 del Libro XIII degli *Elementi* di Euclide, come vedremo più avanti in queste stesse pagine:

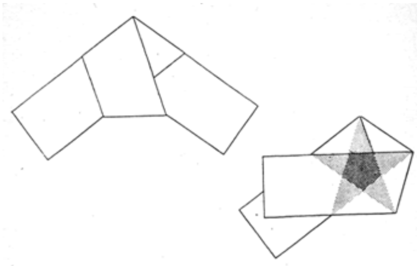
> ᾿Εὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.[14]
>
> (Se in un pentagono equilatero e equiangolo rette sottendono due angoli consecutivi, allora si secano tra loro nel rapporto estremo e medio, e i loro segmenti maggiori sono uguali al lato del pentagono).[15]

[14] Testo greco tratto da: *Euclid’s Elements of Geometry The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883–1885 edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick*.

[15] Trad. it. di Fabio Acerbi.

Queste stesse proprietà possono essere riferite al pentagono stellato, derivato dal pentagono regolare intrecciando fra loro tutte le diagonali di questo: la stella a cinque punte così ottenuta (figura 1) è formata da segmenti che a coppie sono fra loro nel rapporto definito dalla sezione aurea, poiché sono gli stessi segmenti definiti dalle intersezioni delle diagonali del pentagono regolare di cui si è poc'anzi trattato.

Se si fa un nodo normale[16] in una striscia di carta e poi lo si spiana accuratamente, si vedrà apparire il pentagono regolare (figura 2) e se la carta usata è una carta velina, esaminandolo in controluce appare anche la stella fiammeggiante.[17]



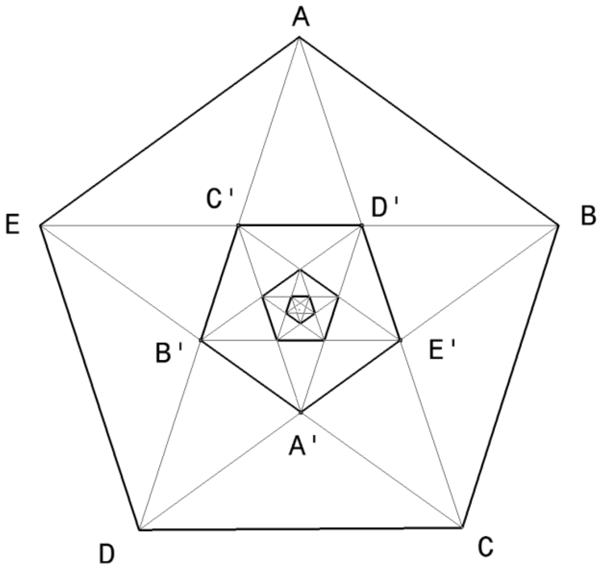


Figura 2 - Il nodo pitagorico e il pentagono stellato.

Tale idea del nodo è stata oggetto di interessanti interpretazioni esoteriche[18] da parte del matematico pisano Arturo Reghini.

Da notare che il pentagono stellato definisce il pentagono regolare più piccolo *A'B'C'D'E'* che è omotetico e simmetrico rispetto al pentagono *ABCDE*. Il pentagono stellato definito dal pentagono regolare *A'B'C'D'E'* definisce a sua volta un altro pentagono regolare più piccolo che è omotetico e simmetrico rispetto al pentagono *A'B'C'D'E'*. Questo processo può essere iterato all'infinito (figura 2) ed è strettamente collegato alla natura irrazionale del rapporto aureo.

---

[16] Luigia Berardi e Albrecht Beutelspacher, *Il pentagono regolare e la sezione aurea*, «Periodico di Matematiche». Serie VI, Vol. 66, N. 1 (1990), Roma.

[17] Franco Eugeni, *Da una semplice striscia di carta: il nodo pitagorico*, Roma, «Officinae» 2 (1992) 17-22. Edimai.

[18] Arturo Reghini, *La tradizione Pitagorica* (cfr. Parte II: *Per la restituzione della geometria pitagorica*), Fr. Melita editori, Genova, 1988.(Per il nodo pitagorico si veda p.78.)

Questo modo di dividere un segmento dovette diventare tanto comune presso i matematici greci, da essere chiamato “sezione” senza alcun altra specificazione.[19]

Ma è soltanto negli *Elementi* di Euclide che di esso si ha la prima testimonianza scritta.

Nel libro VI, infatti, è riportata la seguente definizione:[20]

> Ακρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττόν.[21]
>
> (Una retta [retta sta per segmento n.d.t.] è detta secata in rapporto estremo e medio quando la retta totale sta al segmento maggiore, come il maggiore al minore)**.**[22]

In realtà lo stesso contenuto di questa proposizione è espresso da Euclide già nella proposizione 11 del Libro II , anziché come uguaglianza fra rapporti di segmenti come uguaglianza fra aree**:**

> Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.[23]
>
> (Secare la retta data in modo che il rettangolo compreso da quella totale e da uno dei segmenti sia uguale al quadrato sul restante segmento). [24]

---

[19] Carl B. Boyer. *Storia della Matematica*, Milano, Mondadori, 1990, p. 60.

[20] Nell’edizione critica degli Elementi di Euclide di J. L. Heiberg: *Euclid’s Elements of Geometry The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) …* è la seconda definizione mentre è la terza nelle precedenti edizioni. Nell’edizione di Heiberg manca infatti quella che è la seconda nelle altre edizioni.

[21] Testo greco tratto da: *Euclid's Elements of Geometry The Greek text of J.L. Heiberg (1883-1885)....*

[22] Questa traduzione moderna è dovuta a Fabio Acerbi. Nella celebre traduzione in italiano di Niccolò Tartaglia degli Elementi (1565): «Esempli gratia, quando che la proportione di tutta le linea ,a,b, alla sua maggiore parte ,a,c, fusse si come della detta parte ,a,c, all'altra parte ,c,b, tal linea se diria esser diuisa secondo la proportione hauente il mezzo & duoi estremi in ponto .c.» In: *Euclide megarense acutissimo philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice. Diligentemente rassettato, et alla integrita ridotto, per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea brisciano. Secondo le due tradottioni. Con vna ampla espositione dello istesso tradottore di nuouo aggiunta*, Venezia, Curtio Troiano, 1565, Libro VI, Diffinitione 3.

[23] *Euclid’s Elements of Geometry The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885)*…op. cit.

[24] Trad. it. di Fabio Acerbi.

Si tratta in entrambi i casi di due modi diversi, ma equivalenti, di esprimere quel particolare modo di dividere un segmento di retta in due parti disuguali tali che "l'intero segmento sta alla parte maggiore come questa sta alla minore", ovvero secondo una proporzione continua nella quale la parte maggiore risulta media proporzionale fra l'intero segmento e la parte minore. Federico Commandino, nella sua celebre traduzione degli *Elementi* euclidei del 1575, nello *scholio* alla proposizione 11 del Libro II riconosce in questa proposizione la “divisione in media ed estrema ragione”[25] di un segmento, ma argutamente osserva che Euclide non la chiama così per il semplice motivo che a questo punto degli *Elementi* non ha ancora trattato la teoria delle proporzioni di Eudosso, che si trova nel Libro V (figura 3).

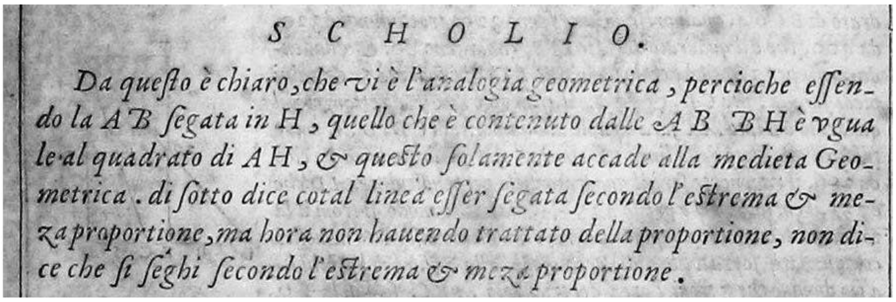

S C H O L I O.
Da questo è chiaro, che vi è l'analogia geometrica, percioche essen-
do la AB segata in H, quello che è contenuto dalle AB BH è vgua
le al quadrato di AH, & questo solamente accade alla medieta Geo-
metrica. di sotto dice cotal linea esser segata secondo l'estrema & me-
za proportione, ma hora non hauendo trattato della proportione, non di-
ce che si seghi secondo l'estrema & meza proportione.

Figura 3 – Federico Commandino, *Elementi* di Euclide (1575): *scholio* alla proposizione 11 del Libro II

Per questo motivo, infatti, Euclide stesso definirà soltanto nel VI libro questo modo di dividere un segmento «in rapporto estremo e medio».

È degno di nota il fatto che nello stesso Libro VI, dopo aver dato tale definizione, Euclide sente il bisogno di riprendere lo stesso concetto come uguaglianza di aree, fornendo nella proposizione 30 una costruzione geometrica del tutto simile a quella già data nel Libro II - Prop. 11.

Euclide ritorna a trattare della sezione aurea nel libro XIII, dedicato alle proprietà dei poliedri regolari, applicando più volte la divisione di un segmento in media ed estrema ragione, traendone alcune proprietà:

> Prop. 1: Se una retta è secata nel rapporto estremo e medio, allora il quadrato sul segmento maggiore aggiunto a metà del totale è cinque volte il quadrato sulla metà.
>
> Prop. 2: Se il quadrato su una retta è cinque volte il quadrato su un segmento su di essa, allora, quando il doppio del detto segmento è secato

---

[25] Nel testo del Commandino: «estrema e meza proportione»

nel rapporto estremo e medio, il segmento maggiore è la parte restante della retta in origine.

Prop. 3: Se una retta è secata nel rapporto estremo e medio, allora il quadrato sulla somma del segmento minore e della meta del segmento maggiore è cinque volte il quadrato sulla metà del segmento maggiore

Prop. 4: Se un segmento è secato nel rapporto estremo e medio, allora la somma dei quadrati sul totale e sul segmento minore è tripla del quadrato sul segmento maggiore.

Prop. 5: Se una retta è secata nel rapporto estremo e medio, ed è sommata ad essa un retta uguale al segmento maggiore, allora la retta totale risulta secata nel rapporto estremo e medio, e la retta in origine è il segmento maggiore.

Prop. 6: Se una retta razionale è secata nel rapporto estremo e medio, allora ognuno dei segmenti è la retta irrazionale detta apotome.

Prop. 8: Se in un pentagono equilatero e equiangolo rette sottendono due angoli consecutivi, allora si secano tra loro nel rapporto estremo e medio, e i loro segmenti maggiori sono uguali al lato del pentagono

Prop. 9: Se il lato dell'esagono e quello del decagono inscritti nello stesso cerchio sono sommati, allora la retta totale risulta secata nel rapporto estremo e medio, e il suo segmento maggiore è il lato dell'esagono.[26]

Ancora nel Libro XIII, Euclide applica alla geometria la teoria delle proporzioni di Eudosso e rileva la presenza della sezione aurea («rapporto estremo e medio») nel pentagono regolare:

Prop. 11: Se un pentagono equilatero è inscritto in un cerchio che ha il diametro razionale, allora il lato del pentagono è la retta irrazionale chiamata minore.[27]

e nei due solidi platonici (figura 4) più complessi: il dodecaedro e l'icoesaedro. Nel dodecaedro, che ha 12 facce pentagonali:

Prop. 17: Costruire e circondare con una sfera un dodecaedro, come nelle predette figure e dimostrare che il quadrato sul lato del dodecaedro è la retta irrazionale chiamata apotome.

Corollario: Se il lato del cubo è secata nel rapporto estremo e medio, il segmento maggiore è il lato del dodecaedro.[28]

Nell'icosaedro, che ha 20 facce costituite da triangoli equilateri, che è il duale del dodecaedro:

---

[26] Trad. it. di Fabio Acerbi.
[27] Trad. it. di Fabio Acerbi.
[28] Trad. it. di Fabio Acerbi.

Prop. 16: Costruire e circondare con una sfera, come per le precedenti figure, e dimostrare che il quadrato sul lato dell'icosaedro è la retta irrazionale chiamata minore.

Corollario: Il quadrato sul diametro della sfera è cinque volte il quadrato sul raggio del cerchio su cui risulta descritto l'icosaedro, e il diametro della sfera è composto dal lato dell'esagono e da due dei lati del decagono inscritto nello stesso cerchio.[29]

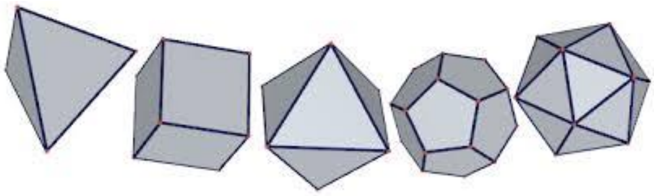


Figura 4 – I solidi platonici: tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

3 La sezione aurea attraverso la storia

È ben noto che la proporzione secondo cui un segmento è diviso in media ed estrema ragione è stata applicata in svariati casi nell'arte figurativa, sia nella pittura sia nell'architettura, e si riscontra anche in molti casi in natura stessa, nel mondo animale, vegetale e inorganico. Per questi riscontri della sezione aurea nell'arte e nella natura si rimanda all'ampia letteratura già esistente.[30] Essa è stata sempre associata a una sensazione di armonia e bellezza circondata da un alone di mistero, dovuto all'incommensurabilità dei segmenti interessati e quindi alla natura irrazionale dei loro rapporti.

Fu proprio questo aspetto esoterico, assieme alla bellezza della proporzione, che in pieno Rinascimento indusse il matematico italiano Luca Pacioli (1445-1514) a chiamarla "divina" nell'opera del 1509 dal titolo *De Divina Proportione*, in cui osservò che era stata utilizzata, ad esempio, anche

[29] Trad. it. di Fabio Acerbi.

[30] Un'approfondita e originale interpretazione della sezione aurea come formalizzazione matematica dell'idea di bello nelle arti, nella musica e nella natura si trova, assieme a una vasta rassegna di casi documentati da fotografie, in Carmelo Ottaviano, *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Pavia, Cedam, 1970. Cfr. anche Luca Nicotra, *L'ideale estetico nell'opera dello scienziato*, in *Nello specchio dell'altro. Riflessi della bellezza tra arte e scienza*, (a cura di L. Nicotra e R. Salina Borello), Roma, Universltalia, 2011, pp. 45-67; Luca Nicotra, *La legge della bellezza di Carmelo Ottaviano*, in «Notizie in...controluce», nn. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (2011); M. C. Ghyka, *Estéthique des proportions dans la nature et dans les arts*, Parigi, Gallimard, 1927; H. E. Huntley, *The divine proportion. A study in mathematical beauty*, New York, Doubleday & Co. Inc., 1974; Fernando Corbalan, *La sezione aurea*, RBA Italia S.r.l., 2011, capp. 4, 5.

nella costruzione del decagono regolare e che è presente nelle forme più armoniche della natura. La chiamò "divina" avendo osservato che il rapporto che la definisce è un numero irrazionale[31] e quindi inconoscibile (perché non esprimibile compiutamente con un numero razionale), così come inconoscibile è Dio con la ragione umana ed essendo tre i suoi elementi come nella santissima trinità:

> Commo Idio propriamente non se po diffinire ne per parolle a noi intendere, così questa nostra proportione non se po mai per numero intendibile asegnare, né per quantità alcuna rationale exprimere, ma sempre fia occulta e secreta e da li mathematici chiamata irrazionale.[32]

Secondo lo storico della matematica Carl B. Boyer,[33] fu nel secolo XVI, e non già nell'antichità, che comparve per essa, successivamente al "divina", l'appellativo di "sezione aurea". Luca Pacioli nel suo libro già citato illustrò i solidi platonici con disegni del suo amico Leonardo da Vinci, il quale fu probabilmente il primo a usare la denominazione *sectio aurea*, cioè "sezione aurea".

Pacioli presentò 13 delle interessanti proprietà di tale rapporto, concludendo che «per amor della salvezza, la lista deve terminare a questo punto», perché 13 era il numero dei presenti alla tavola dell'Ultima Cena. Inoltre egli ridusse le otto operazioni dell'aritmetica a sette, in segno di rispetto per i sette doni dello Spirito Santo.

Nel 1600 Johannes Kepler (1571-1630), che fondava la sua teoria dei cieli sui cinque solidi platonici, si entusiasmava per la proporzione divina,[34] come appare chiaramente nella sua famosa frase:

> La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro è la sezione aurea di un segmento. Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d'oro; il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello.

---

31 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

32 Luca Pacioli, *De divina proportione*, Venezia, Paganino Paganini, 1509.

33 Carl B. Boyer. *Op. cit*, p. 60.

34 Kepler inoltre provò che la sezione aurea è il limite a cui tende il rapporto di due successivi numeri di Fibonacci.

Questa sua espressione viene comunemente riportata per testimoniare il riferimento all'oro del rapporto che definisce la sezione aurea, ma l'"oro" in questa frase sembra riferito al teorema di Pitagora e non alla sezione aurea! L'unica cosa certa, invece, è che la prima testimonianza scritta della denominazione "sezione aurea", fino ad oggi disponibile, risale soltanto al 1835, nel libro *Die Reine Elementar-Mathematik* del matematico tedesco Martin Ohm, dove si trova scritto: «È chiamata sezione aurea», dando a intendere che l'espressione era già affermata a quel tempo e quindi precedente, senza però specificare di quanto.

Figura 5 – Il rettangolo aureo sul fronte del Partenone di Atene.

Non vi sono dubbi sul fatto che la sezione aurea fu consapevolmente utilizzata dagli artisti del Rinascimento, ai quali era nota come "proporzione divina". Gli artisti di questo periodo, infatti, la utilizzarono per dividere la superficie di un dipinto in parti ben proporzionate, così come gli architetti la usavano normalmente per stabilire le proporzioni di un edificio. Nella prima edizione italiana del *De architectura* di Vitruvio[35] viene utilizzata la sezione aurea per analizzare la facciata del Duomo di Milano.

Nello stabilire proporzioni ritenute armoniose, pittori e architetti hanno spesso utilizzato il "rettangolo aureo", ovvero un rettangolo nel quale il rapporto dei lati consecutivi è quello della sezione aurea. Tale rapporto risulta "incompiutamente" espresso da un particolare numero irrazionale[36] denominato "aureo", che è stato indicato, nel 1909, dal matematico, fisico e

[35] Marco Vitruvio Pollione, architetto e scrittore romano, vissuto nella seconda metà del I secolo a.C., considerato il più famoso teorico dell'architettura di tutti i tempi. Nel 1486 il suo trattato *De architectura* fu pubblicato a stampa per la prima volta da Sulpicio da Veroli e nel 1521 uscì la prima edizione tradotta in italiano dal pittore e architetto Cesare Cesariano.

[36] $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

ingegnere statunitense Mark Barr (1871-1950) con la lettera maiuscola Φ (Phi) dell'alfabeto greco, per ricordare, attraverso l'iniziale del suo nome, il geniale architetto Fidia (490-430 a.C.),[37] autore del Partenone ove si ritrova applicato in più parti della facciata il rettangolo aureo (figura 5). Essendo irrazionale, il "numero aureo" non esprime in maniera esatta il rapporto fra l'intero segmento e la parte maggiore della sezione aurea (uguale a quello fra il segmento maggiore e il minore), perché in forma decimale è costituito da infinite cifre decimali non periodiche, delle quali si può considerare soltanto una parte comunque estesa, ottenendo così una approssimazione che si può spingere quanto si vuole.

Usualmente si considera la sua approssimazione alla terza cifra decimale: 1,618... L'irrazionalità di Φ equivale a riconoscere che sono incommensurabili fra loro sia il segmento intero e la sua parte maggiore sia le due parti in cui il segmento è diviso. Accanto ad esso si considera pure il rapporto inverso che viene denotato con la lettera greca minuscola (phi) $\varphi = 1/\Phi = 0,618...$

L'architetto Le Corbusier in tempi recenti ha usato la sezione aurea nel progettare il suo *Modulor*,[38] (figura 6) con cui si può scomporre la figura umana in più sezioni auree, per risalire, da qui, all'abitazione ideale dell'uomo.

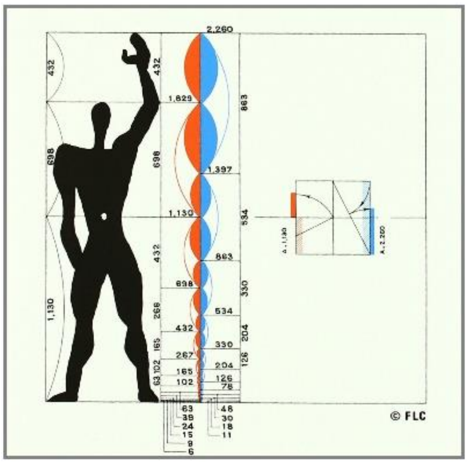


Figura 6 - Il *Modulor* di Le Corbusier.

[37] Fidia fu il sovrintendente ai lavori per il nuovo tempio, il *Partenone*, dedicato ad Atena. Collaborò con gli architetti incaricati e seguì i lavori per la decorazione scultorea del tempio fino al 438 a.C. circa, quando si data la sua partenza per Olimpia, e la consacrazione della colossale statua detta *Atena Parthenos*, realizzata da Fidia per la cella del tempio.

[38] Al secolo l'architetto franco-svizzero Charles Jenneret-Gris (1887-1965), detto Le Courbusier. Il *Modulor* è una scala di proporzioni basate sulle misure dell'uomo inventata da Le Corbusier come linea guida di un'architettura a misura d'uomo. Cfr. Le Corbusier, *The Modulor*, p. 25 (come appare in Richard Padovan, *Proportion: Science, Philosophy, Architecture*, ed. Taylor and Francis, 1999, p. 316.).

Figura 7 – Salvator Dalì, *Ultima cena* (1955) (tela 268 x 167 cm). National Gallery of Art, Washington.

Infine *Il Sacramento dell'Ultima Cena*, dipinto da Salvador Dalì nel 1955, ha dimensioni 268 x 167 cm (con ottima approssimazione quelle di un rettangolo aureo) ed è inserito entro un enorme dodecaedro che, avendo facce pentagonali, mostra un evidente richiamo alla sezione aurea (figura 7).Lo psicologo Gustav Fechner usò la sezione aurea per fondare l'estetica su basi sperimentali. Misurava incessantemente le dimensioni di quadri, cartoline, libri, tabaccherie, carta da lettere, finestre e mille altre cose nel tentativo di sviluppare un'estetica sperimentale "dal basso". La sua conclusione fu che il rettangolo preferito ha i lati proporzionati secondo la sezione aurea.

Il rettangolo aureo lo si ritrova anche in oggetti di uso quotidiano, come le tessere magnetiche (carta di credito, bancomat, ecc..) e gli schermi degli attuali televisori digitali, il cui formato 16:9 (= 1, 777…) è abbastanza prossimo al rettangolo aureo.

Una semplicissima costruzione geometrica di un rettangolo aureo è indicata in figura 8 a partire dal quadrato *ABCD*, il cui lato viene assunto come lato minore del rettangolo stesso. Con centro nel punto medio *M* di *AB* si traccia un arco di circonferenza di raggio pari a *MC* che interseca in *E* il prolungamento di *AB*: il segmento *AE* è il lato maggiore del rettangolo aureo. Infatti, assumendo come unità di misura il lato del quadrato *ABCD* e applicando il teorema di Pitagora al triangolo *MBC* si ha:

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

e quindi:

$$ME = MC = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad AE = AM + ME = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dunque il rettangolo *AEFD* è aureo, essendo il rapporto fra i suoi lati consecutivi:

$$\frac{AE}{EF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

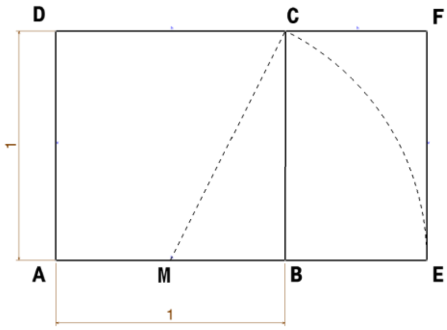


Figura 8 – Una costruzione geometrica del rettangolo aureo.

Il rettangolo aureo gode di varie proprietà, delle quali due sono notevoli.

1) Proprietà di autorigenerazione o autosomiglianza del rettangolo aureo: sommando (o sottraendo) a un rettangolo aureo il quadrato di lato congruente al suo lato maggiore (o minore) si ottiene un altro rettangolo aureo, quindi della stessa "forma". In altri termini il quadrato di lato congruente al lato maggiore (o minore) di un rettangolo aureo è lo gnomone[39] di questo.

Facendo riferimento alla figura 8, sommando al rettangolo aureo *BEFC* il quadrato *ABCD* di lato congruente al lato maggiore di *BEFC* si ottiene il rettangolo aureo *AEFD*; viceversa sottraendo dal rettangolo aureo *AEFD* il quadrato *ABCD* di lato congruente al lato minore di *AEFD* si ottiene il rettangolo aureo *BEFC*.

[39] Poiché, secondo una definizione nota fin dagli antichi greci, lo gnomone di una figura è un'altra figura che aggiunta alla prima ne riproduce una simile, possiamo dire, considerando la somma in senso algebrico, che sia il quadrato di lato pari alla dimensione maggiore sia quello di lato pari alla dimensione minore del rettangolo aureo è lo "gnomone" di questo.

Dimostriamo la proprietà nel caso della somma. Per ipotesi il rettangolo *BEFC* è aureo, dobbiamo dimostrare che è aureo anche il rettangolo *AEFD*.

Essendo aureo il rettangolo *BEFC,* è $EF/BE = \Phi$ e *EF, BE* si possono pensare come le parti maggiore e minore della sezione aurea, e quindi $EF + BE$ è l'intero segmento. Ma poiché $EF = AB$, l'intero segmento è $AB + BE = AE$. Per la definizione di sezione aurea si può scrivere allora:

$$AE : EF = EF : BE = \Phi$$

e concludere che il rettangolo *AEFD* è aureo.

Dimostriamo ora la proprietà nel caso della differenza. Per ipotesi, questa volta è aureo il rettangolo *AEFD* e dobbiamo dimostrare che è aureo anche il rettangolo *BEFC*.

Essendo il rettangolo *AEFD* aureo, è $AE/EF = \Phi$ e *AE, EF* si possono pensare come l'intero segmento e la parte maggiore della sua sezione aurea, e quindi $AE - EF$ è la parte minore. Ma poiché $EF = AB$, la parte minore è $AE - AB = BE$. Per la definizione di sezione aurea si può scrivere allora come nel caso precedente:

$$AE : EF = EF : BE = \Phi$$

e concludere che il rettangolo *BEFC* è aureo.

2) Verifica grafica di rettangoli aurei: si può verificare graficamente se un dato rettangolo è aureo disponendo come in figura 9 orizzontalmente il rettangolo dato *ABCD* e verticalmente una sua "replica" *A'B'C'D'* in modo che il lato maggiore del rettangolo dato sia adiacente al lato minore della sua replica. Condizione necessaria e sufficiente affinché il rettangolo dato sia aureo è che il prolungamento della sua diagonale AC passi per il vertice B' della sua copia posta in verticale.

Infatti, supponendo che il rettangolo dato sia aureo, anche la sua replica *A'B'C'D'* lo è e dobbiamo dimostrare che la diagonale AC si prolunga in B'. Per la proprietà precedente, anche il rettangolo *C'CEB'* è aureo, essendo la differenza fra il rettangolo aureo *A'B'C'D'* e il quadrato *CD'A'E* che ha per lato il lato minore di *A'B'C'D'*. Pertanto è $B'C' : C'C = AB : BC = \Phi$. I triangoli rettangoli *ABC, B'C'C* sono quindi simili e, in particolare, sono congruenti gli angoli $B\hat{C}A$ e $C'\hat{C}B'$, ma poiché i lati BC e CC' sono allineati, per costruzione, devono essere allineati anche i lati AC e CB'.

Viceversa, supponendo che la diagonale AC si prolunghi in B', dobbiamo dimostrare che il rettangolo dato è aureo (e quindi anche la sua copia). I triangoli *ABC*, *AA'B'* sono simili, avendo in comune l'angolo in A e proporzionali i lati uscenti da *A* per il teorema di Talete applicato alle parallele *D'C, A'B'* tagliate dalle trasversali *AA'*, *AB'*. Pertanto possiamo scrivere: *AA' : A'B' = AD' : D'C*. Poichè è *A'B' = AD'* e *D'C = D'A'* si può scrivere:

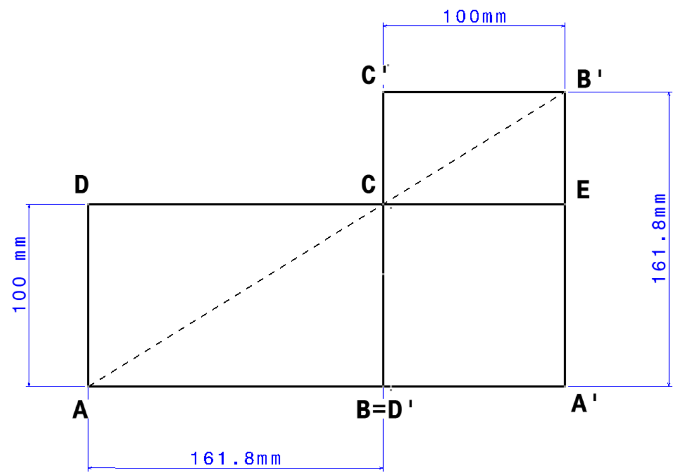


Figura 9 – Verifica grafica di rettangoli aurei.

$$(AD' + D'C) : AD' = AD' : D'C = \Phi$$

che è la proporzione che definisce la sezione aurea. Dunque il rettangolo ABCD è aureo.

4 La geometria della sezione aurea

Secondo l'uso corrente viene definita la sezione aurea di un segmento *AB* quella parte *AX* che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante *XB*.[40] Noi riteniamo errata sotto diversi punti di vista questa definizione, che non trova riscontro in nessuna parte degli *Elementi* di Euclide.

La differenza è sostanziale: nella già ricordata definizione di Euclide (*Elementi*, Libro VI – def. 3) la sezione aurea è la "divisione di un segmento in media ed estrema ragione", che si distingue da tutte le infinite possibili divisioni di un segmento in parti disuguali.

Nella definizione oggi comunemente condivisa, invece, la sezione aurea di un segmento viene intesa come "la parte maggiore della sua divisione in

[40] H. E.Huntley, *The Divine Proportion*, New York, Dober Pubblications, 1970.

estrema e media ragione”, cioè è una particolare parte della divisione di un segmento in parti disuguali. Spiegheremo più avanti le ragioni per cui riteniamo errata tre volte tale definizione: dal punto di vista storico, dal punto di vista del significato del termine “sezione”, dal punto di vista del significato estetico che si attribuisce alla sezione aurea.

Qui mostreremo come sia possibile ricavare immediatamente molte delle proprietà della sezione aurea applicando semplicemente le ben note proprietà delle proporzioni, essendo la sezione aurea stessa definita da una particolare proporzione continua.[41]

In base alla definizione di Euclide, se indichiamo con S il punto che divide il segmento AB in "media ed estrema ragione”, la “divina proporzione” o “sezione aurea” è espressa dalla seguente proporzione:

(4) $$AB : AS = AS : SB = \Phi$$

ovvero, in termini di aree:

(4)’ $$AS^2 = AB \text{ x } SB$$

La sezione aurea può essere espressa con altre tre proporzioni equivalenti, ottenute dalla (4):

Invertendo nella (4) antecedente con conseguente:

(5) $$AS : AB = SB : AS$$

Permutando in quest’ultima i medi:

(6) $$AS : SB = AB : AS$$

(che si ottiene anche dalla 4) applicando la proprietà simmetrica dell’uguaglianza)

Permutando nella (4) gli estremi:

[41] Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, Convegno “Matematica, Natura, Architettura”,17 novembre 2017, Mathesis- Dipartimento di Architettura, Napoli.

.

(7) $$SB : AS = AS : AB$$

(che si ottiene anche dalla 5) applicando la proprietà simmetrica dell'uguaglianza)

Dunque, la sezione aurea di un segmento può essere espressa da quattro proporzioni fra i tre segmenti che la caratterizzano, che sono equivalenti perché in esse risulta sempre valida la (4)', così come dalla proposizione 2.11 di Euclide:

> … il rettangolo compreso da quella totale [AB] e da uno dei segmenti [SB] sia uguale al quadrato sul restante segmento [AS].

Le (6) e (7) sono definite dagli stessi rapporti (l'uno inverso dell'altro) rispettivamente delle (4) e (5). La sezione aurea pertanto può pensarsi definita indifferentemente dalle proporzioni (4) e (6), (5) e (7) secondo rapporti l'uno inverso dell'altro.

In realtà, dunque, la definizione di sezione aurea più esaustiva è quella che Euclide pone (correttamente) per prima nel Libro II in termini geometrici di equivalenza fra aree, ma non come definizione bensì come proposizione 11. Infatti da essa possono dedursi le quattro possibili ed equivalenti definizioni di sezione aurea come proporzioni continue, formate con un segmento e due sue parti disuguali.

Applicando successivamente il componendo e lo scomponendo alla (4) si ottengono inoltre altre proporzioni che corrispondono ad altre proprietà della sezione aurea.

1a proprietà

Componendo, si ha dalla (4):

$$(AB + AS) : AS = (AS + SB) : SB$$

e quindi:

$$(AB + AS) : AS = AB : SB$$

da cui essendo $SB = AB - AS$:

(8) $$(AB + AS) : AS = AB : (AB - AS)$$

In una sezione aurea, la somma dell'intero segmento con la sua parte maggiore sta alla parte maggiore come l'intero segmento sta alla differenza fra l'intero segmento e la parte maggiore.

Oppure, essendo $AS = AB - SB$:

(9) $$(AB + AS) : (AB - SB) = AB : SB$$

In una sezione aurea, la somma dell'intero segmento con la sua parte maggiore sta alla differenza fra l'intero segmento e la parte minore come *l'intero segmento alla parte minore.*

Della (8) è immediato dedurre una formulazione geometrica in termini di aree. Da essa infatti si ha:

(8)' $$AB^2 - AS^2 = AB \text{ x } AS$$

In una sezione aurea, la differenza fra i quadrati costruiti sull'intero segmento e la sua parte maggiore è equivalente al rettangolo costruito sull'intero segmento e sulla sua parte maggiore, (rettangolo aureo).

Analogamente dalla (9) si ottiene:

(9)' $$(AB + AS) \text{ x } SB = AB \text{ x } (AB - AS)$$

In una sezione aurea, il rettangolo costruito sulla somma dell'intero segmento con la parte maggiore e la parte minore è equivalente al rettangolo costruito sull'intero segmento e la differenza fra l'intero segmento e la sua parte maggiore.

2a proprietà

Componendo in altro modo, si ha dalla (4):

$$(AB + AS) : AB = (AS + SB) : AS$$

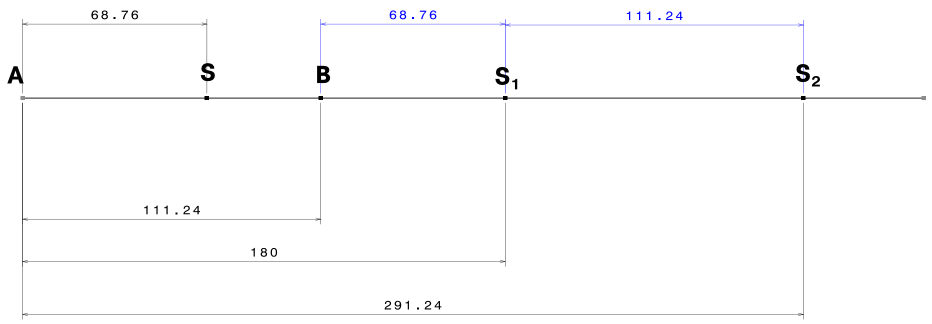
(10) $$(AB + AS) : AB = AB : AS.$$

La (10) è di immediata interpretazione: *il rapporto aureo Φ sussiste anche fra la somma di un segmento con la parte maggiore della sua sezione aurea e il segmento stesso*. Si tratta cioè della già citata quinta proprietà del Libro XIII degli *Elementi* di Euclide: *Se una retta è secata nel rapporto estremo e medio, ed è sommata ad essa un retta uguale al segmento maggiore, allora la retta* *totale risulta secata nel rapporto estremo e medio, e la retta in origine è il segmento maggiore.*

Cioè la somma di un segmento con la parte maggiore della sua sezione aurea dà luogo a una nuova sezione aurea che ha come parte maggiore il segmento stesso.

La (10) esprime dunque l'importante proprietà di auto-riproduzione della sezione aurea in accrescimento.

Infatti è possibile individuare sul prolungamento di AB il punto S_1 tale che sia $B\,S_1 = AS$. e quindi $AS_1 = AB + B\,S_1$.



Allora la (10) si può riscrivere nel seguente modo:

$$(AB + BS_1) : AB = AB : BS_1$$

(10)' $$AS_1 : AB = AB : BS_1.$$

permettendoci di concludere che il punto B divide AS_1 in media ed estrema ragione.

Alla (10)' si può applicare di nuovo la proprietà espressa dalla (10) ottenendo:

(10)'' $$(AS_1 + A\,B) : AS_1 = AS_1 : AB$$

Si può ripetere lo stesso ragionamento di prima: è possibile individuare sul prolungamento di AS_1 il punto S_2 tale che sia $S_1\,S_2 = AB$ e quindi $AS_2 = AS_1 + S_1S_2$ e riscrivere così la (10)'':

$$AS_2 : AS_1 = AS_1 : S_1S_2$$

permettendoci di concludere che il punto S_1 divide in media ed estrema ragione AS_2 .

Questo procedimento può ripetersi all'infinito.

3a proprietà
Scomponendo, si ha dalla (4):

$$(AB - AS) : AS = (AS - SB) : SB$$

$$SB : AS = (AS - SB) : SB$$

Da cui invertendo*:*

(11) $$AS : SB = SB : (AS - SB)$$

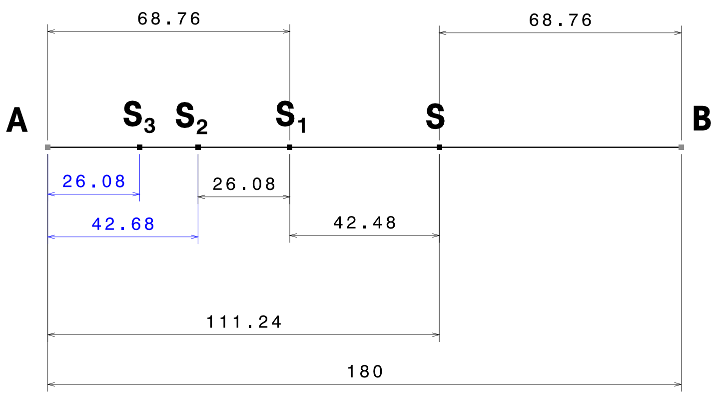
Il rapporto aureo Φ sussiste anche fra la parte minore e la differenza fra le due parti della sezione aurea di un segmento.

Cioè la differenza fra le due parti di una sezione aurea dà luogo alla sezione aurea della parte maggiore.

In termini più precisi: *è possibile riprodurre la sezione aurea sulla parte maggiore della sezione aurea di un segmento, assumendo come parte maggiore della nuova sezione aurea la parte minore della prima sezione aurea.*

La (11) esprime dunque l'importante proprietà di auto-riproduzione della sezione aurea in decremento.

Infatti è possibile individuare su AS il punto S_1 tale che sia $AS_1 = SB$ e quindi $AS – SB = AS - AS_1 = S_1S$.



Allora la (11) si può riscrivere nel seguente modo:

$$AS : A\,S_1 = A\,S_1 : S_1S$$

permettendoci di concludere che il punto S_1 divide in media ed estrema ragione la parte maggiore AS della sezione aurea del segmento AB.

Lo stesso ragionamento si può ripetere per la parte maggiore AS_1 della seconda sezione aurea, giungendo a individuare su AS_1 il punto S_2 che divide AS_1 in media ed estrema ragione creando una terza sezione aurea, sulla cui parte maggiore AS_2 si può ripetere lo stesso ragionamento individuando su AS_2 il punto S_3 che divide AS_2 in media ed estrema ragione creando una quarta sezione aurea, e così via.

Questo procedimento può ripetersi all'infinito: sarà sempre possibile dividere la parte maggiore di una sezione aurea secondo una nuova sezione aurea tramite la parte minore.

Anche nel caso della (11) è immediato dedurre una formulazione geometrica in termini di aree. Da essa infatti si ha:

(11)' $$SB^2 = AS \text{ x } (AS - SB)$$

Ovvero: *in una sezione aurea, il quadrato costruito sulla parte minore è equivalente al rettangolo costruito sulla parte maggiore e sulla differenza fra le due parti*.

4a proprietà

Scomponendo in altro modo, si ha dalla (4):

$$(AB - AS) : AB = (AS - SB) : AS$$

$$SB : AB = (AS - SB) : AS$$

da cui, permutando gli estremi:

$$AS : AB = (AS - SB) : SB$$

e quindi invertendo:

(12) $$AB: AS = SB : (AS - SB)$$

Essendo $AB = AS + SB$, si ha:

$$(AS + SB) : AS = SB : (AS - SB)$$

da cui:

$$AS^2 - SB^2 = AS \ x \ SB$$

In una sezione aurea, la differenza fra i quadrati costruiti sulle sue due parti è equivalente al rettangolo costruito su di esse (rettangolo aureo).

5 Uso improprio del termine "sezione"

Abbiamo già posto in evidenza quanto l'abitudine di chiamare "sezione aurea di un segmento" la parte maggiore della sua divisione in media ed estrema ragione non corrisponda alla definizione data da Euclide negli *Elementi*. Anche nel vocabolario *Treccani on-line* si legge:

> …la sezione aurea di un segmento è la parte del segmento, detta anche media ragione, che è media proporzionale fra l'intero segmento e la parte rimanente.

Tale denominazione, oltre a non corrispondere all'idea di sezione aurea espressa da Euclide è impropria sia rispetto al significato di sezione sia rispetto all'attribuzione dell'aggettivo "aurea", utilizzato per porre in evidenza il senso di bellezza che ne scaturisce.[42]

È anzitutto errata rispetto allo stesso concetto di sezione, salvo completarla con una giusta specificazione di cui si dirà.

Sezione deriva dal latino *sectio, -onis* (taglio), a sua volta derivato da *sectus*, participio passato di *secare* (tagliare). La parola "sezione", dunque, ha in sé un duplice significato: sia quello dell'operazione del "dividere" qualcosa in più parti (*secare*) sia quello del risultato dell'operazione stessa (*sectus*).

Il caso più semplice è quello in cui il "taglio" genera due parti. In tal caso si può articolare il concetto diversamente a seconda dell'attenzione che si presta agli elementi dell'operazione di "sezione" o meglio di "sezionamento" (volendo con tale termine sciogliere l'ambiguità fra operazione e risultato insita nel termine "sezione"). Si possono distinguere tre casi:

(1) Si prende in considerazione il risultato "globale" dell'operazione: l'oggetto, inizialmente intero, e i due oggetti in cui risulta ora scomposto, la cui unione è l'oggetto intero e la cui intersezione è l'insieme vuoto (insiemi complementari).

(2) Si prende in considerazione l'elemento comune all'oggetto sezionato e all'oggetto sezionante. È il caso della sezione di una figura piana o solida, considerata dalla Geometria Descrittiva come risultato dell'intersezione fra

[42] Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, op. cit.

una linea (retta o curva) e una figura piana, o fra una superficie (in particolare un piano) e una figura solida.

(3) Si prende in considerazione alternativamente l'una o l'altra delle due parti dell'oggetto sezionato. È il caso della sezione tecnica del Disegno Meccanico, definita come la vista perpendicolare al piano di sezione che risulta dalla eliminazione di una delle due parti in cui l'oggetto è diviso da quest'ultimo. Per ciò stesso un medesimo piano di sezione, a seconda che si tolga l'una o l'altra parte, dà luogo a due sezioni tecniche distinte, costituite ciascuna dalla figura intersezione fra il piano di sezione e l'oggetto (sezione della Geometria Descrittiva) completata dalla rimanente parte in vista, che in generale è diversa per le due sezioni.

In figura 10 è rappresentata una staffa con il piano di sezione. In figura 11

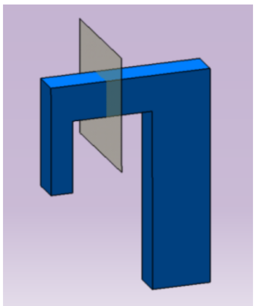


Fig. 10– Staffa e piano sezionante.

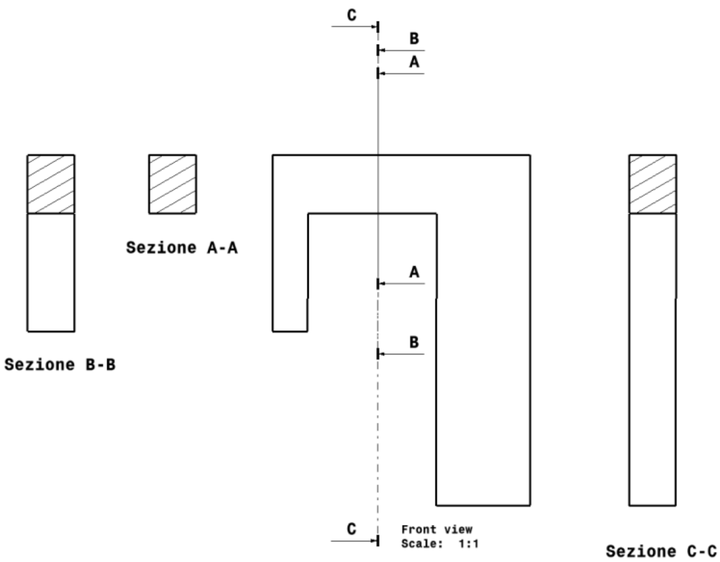


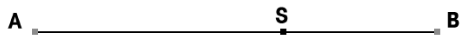
Fig. 11– Sezioni della staffa considerate dalla Geometria Descrittiva (Sezione A-A) e dal Disegno Meccanico (Sezioni tecniche B-B e C-C).

sono riportate la sezione *A-A* della staffa dal punto di vista della Geometria Descrittiva e le due sezioni tecniche *B-B* e *C-C* ottenute rimuovendo l'una o l'altra delle due parti in cui il piano taglia la staffa e invertendo il senso di proiezione.

In entrambe, secondo le regole del Disegno Meccanico, risulta tratteggiata la sezione della Geometria Descrittiva.

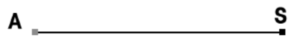
Applichiamo ora gli stessi concetti di sezione (espressi ai numeri 1, 2, 3) al segmento *AB* sezionato in media ed estrema ragione.

Nel caso 1 otterremo il segmento *AB* con la sua divisione nei segmenti *AS*, *SB* come già indicato sopra:

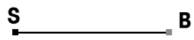


Nel caso 2 otterremo invece soltanto il punto *S* comune ai due segmenti *AS*, *SB*:

Nel caso 3 otterremo invece il segmento *AS* di media ragione (sezione tecnica vista da destra):



oppure il segmento *SB* di estrema ragione (sezione tecnica vista da sinistra):



È evidente che l'applicazione del concetto di sezione come al punto 2 non avrebbe alcun significato nel caso della "sezione aurea". Invece l'applicazione del concetto di sezione come al punto 3 può avere senso ma con le dovute precisazioni. Infatti è inesatto dire *tout court* (come è invece uso diffuso) che il segmento *AS* è la sezione aurea di *AB*. Le denominazioni corrette (volendo applicare l'accezione 3 del termine sezione) sono invece: "sezione aurea maggiore di *AB"* per il segmento *AS* e "sezione aurea minore di *AB"* per il segmento *SB*. D'altra parte queste denominazioni (purtroppo oggi dimenticate se non ignorate) si trovano già nella citata traduzione degli *Elementi* di Euclide fatta da Niccolò Tartaglia nel 1565, a proposito della definizione di sezione aurea (Libro VI, terza definizione):

> Una linea se dice esser diuisa seconda la proportione hauente il mezzo, & duoi estremi quando che egliè quella medesima proportione di tutta la linea alla sua maggiore sectione che è della <u>maggior sectione alla minore</u>.[43]

[43] Dalla celebre traduzione di Niccolò Tartaglia degli Elementi di Euclide: *Euclide megarense acutissimo philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice. Diligentemente rassettato, et alla integrita ridotto, per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea brisciano. Secondo le due tradottioni. Con vna ampla espositione dello istesso tradottore di nuouo aggiunta*, Venezia, Curtio Troiano, 1565, Libro VI, Diffinitione 3.

Dal punto di vista del solo significato del termine sezione, sembrerebbero quindi plausibili entrambi i significati specificati ai punti 1 e 3, con le precisazioni terminologiche dette.

Ma alla sezione aurea di un segmento si attribuisce un significato estetico che travalica quello puramente tecnico di sezione, che è evidenziato proprio dall'aggettivo "aurea". Risulta ben evidente che dal punto di vista della qualifica "aurea", per indicare il senso di bellezza, non ha alcun significato considerare isolatamente l'uno o l'altro dei possibili "risultati" dell'operazione di sezione, perché né il segmento *AS* né il segmento *SB* può "da solo" suscitare alcuna sensazione di bellezza, così come una singola nota di un qualsiasi accordo musicale non può produrre nessuna particolare sensazione gradevole. L'attribuzione dell'aggettivo "aurea" ha senso soltanto se riferita all'insieme delle due parti (maggiore e minore) in cui il segmento è diviso secondo la "divina proporzione". Questo concetto, da tutti condivisibile, è stato chiaramente espresso dal grande pittore e incisore Albrecht Dürer, il quale fu anche un illustre geometra. Sull'esempio di Leon Battista Alberti e Leonardo da Vinci, cercò di fissare in pubblicazioni le sue conoscenze teoriche acquisite sulle proporzioni del corpo umano investigate nella sua intensa attività artistica.[44] In particolare nel 1525 pubblicò il primo libro di matematica scritto in tedesco, *Underweysung der Messung, mit den Zirckel vn[d] Richtscheyt, in Linien ebnen vnnd gantzen Corporen* (noto in Italia con il titolo semplificato di *Trattato sulla misurazione*), nel quale scrive che la bellezza consiste:

> …nell'armonia delle parti fra loro e con il tutto […] allo stesso modo in cui ogni parte in se stessa deve essere convenientemente tracciata, così la loro unione deve creare un'armonia di insieme […[poiché gli elementi armoniosi vengono tenuti per belli.

Vediamo ora come la definizione, oggi utilizzata, di sezione aurea come parte maggiore della divisione in media ed estrema ragione, applicata all'arte, dia risultati palesemente inaccettabili.[45]

Consideriamo, per esempio, il caso del celebre quadro di Sandro Botticelli *Nascita di Venere*, una delle opere d'arte più famose e amate del mondo, dipinta tra il 1482 e il 1485, diventata un simbolo della pittura del Rinascimento italiano.

Con il programma CATIA abbiamo importato in un modello CAD una fotografia del quadro scalandola in grandezza 1:1 (1,72 x 2,78 m) , in modo da

---

[44] Albrecht Dürer, *Underweysung der messung, mit den zirckel un richtscheyt, in Linien ebnen unnd gantzen corporen*, 1525; *Unterricht zu Befestigung der Stett (in latino)*, 1535; *Vier Bücher von menschlicher Proportion* (in latino), 1557; *Della simmetria dei corpi humani*, edizione italiana, Venezia, 1594.

[45] Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, op. cit.

avere una riproduzione virtuale del quadro a grandezza naturale, per poter prendere su di essa misure reali delle sue parti (figura 12).

La distanza verticale fra la sommità della testa e l'estremità dei piedi è risultata 1365,59 mm, mentre la distanza fra l'ombelico e la stessa estremità dei piedi è risultata 844 mm. Il loro rapporto è 1,61799, coincidente, a meno degli errori di misura, con il rapporto aureo 1,618. Dunque l'ombelico divide quella distanza in media ed estrema ragione, ovvero secondo la sezione aurea.

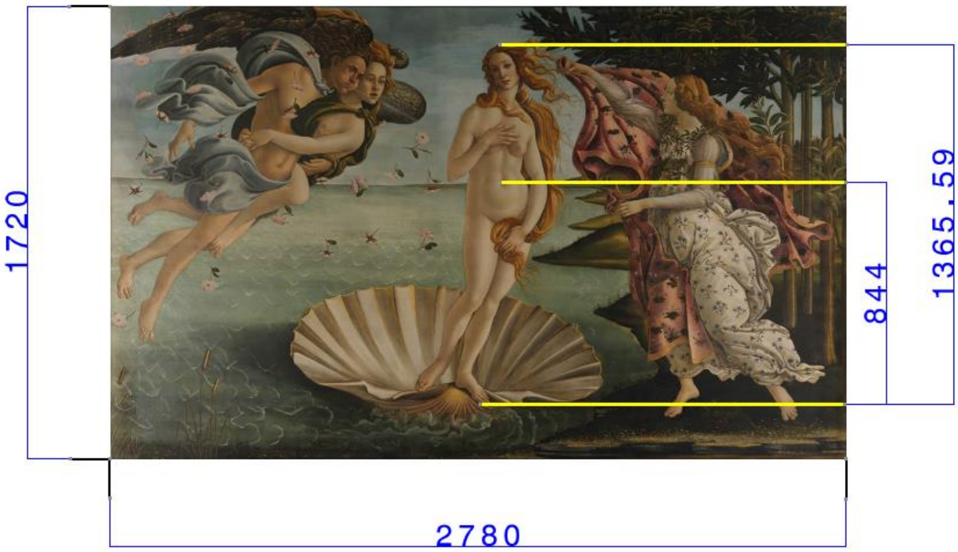


Fig. 12 – Sandro Botticelli, *Nascita di Venere* (1482-1485), Galleria degli Uffizi, Firenze.

Volendo applicare alla *Nascita di Venere* il significato tradizionale di sezione aurea si otterrebbe invece il risultato evidentemente inaccettabile mostrato in figura 13, essendo la distanza "ombelico-estremità dei piedi" la parte maggiore della divisione in media ed estrema ragione della distanza totale "sommità testa-punta dei piedi".

Fig.13 – La sezione aurea nella *Nascita di Venere* secondo la definizione corrente.

Dunque, è l'operazione di sezionamento in media ed estrema ragione "considerata nella totalità dei suoi elementi" che può generare quel senso del bello che dall'antichità si attribuisce a tutto ciò che viene diviso secondo la "divina proporzione", per dirla con Luca Pacioli. Infatti in tutti i casi, nella pittura e nell'architettura, in cui si trova applicata la sezione aurea, il senso del bello deriva dalla percezione della proporzione che la definisce, che implica la presenza dei suoi tre elementi: l'intero segmento, la parte maggiore e la parte minore. La loro visione contemporanea dà l'idea di bello, così come il suono contemporaneo di due o più note, in un accordo musicale, può produrre una sensazione di bellezza.

In conclusione l'unico modo corretto di usare l'espressione "sezione aurea" di un segmento è quello indicato al punto 1, che considera l'operazione di sezione del segmento in media ed estrema ragione nella sua totalità: la "sezione aurea" di un segmento è semplicemente la sua divisione in media ed estrema ragione e non la sua parte maggiore (media ragione).

Bibliografia

Berardi L., Beutelspacher A., (1990), *Il pentagono regolare e la sezione aurea*, «Periodico di Matematiche». Serie VI, Vol. 66, N. 1, Roma.

Bergson H., (1925), *L'Évolution créatrice*, tr. Umberto Segre, Milano, Athena.

Boyer C. B. (1990), *Storia della Matematica*, Milano, Mondadori.

Commandino F. (1575) **,** *De gli Elementi d'Euclide libri quindici con gli Scholii antichi. Tradotti prima in lingua latina da m. Federico Commandino da Urbino & con Commentarij illustrati, et hora d'ordine dell'istesso trasportati nella nostra vulgare, & da lui riveduti. Con privilegio. In Urbino, appresso Domenico Frisolino MDLXXV. Con licentia de' Superiori.*

Corbalan F., (2011), *La sezione aurea*, RBA Italia S.r.l.

Dürer A., (1525), *Underweysung der messung, mit den zirckel un richtscheyt, in Linien ebnen unnd gantzen corporen*.

Dürer A., (1535), *Unterricht zu Befestigung der Stett (in latino)*, 1535.

Dürer A., (1557), *Vier Bücher von menschlicher Proportion* (in latino).

Dürer A., (1594), *Della simmetria dei corpi humani*, edizione italiana, Venezia.

Eugeni F. (1992), *Da una semplice striscia di carta: il nodo pitagorico*, Roma, «Officinae» 2, 17-22. Edim*ai.*

Eugeni F, Sciarra E., Mascella R., (2010[1]), *Mathematical structures and sense of beauty*, in Capecchi, V.; Buscema, M.; Contucci, P.; D'Amore, B. (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts*, Springer Verlag, XV, 2010, pp. 519-536.

Eugeni F, Sciarra E., Mascella R., (2010[2]), *Il senso del bello* in TABULARIA A.MMX (S.S.Quator Coronatorum),"academia" editrice d'Italia e San Marino.

Eugeni F. (2016), *L'esoterismo nella cultura scientifica*, «ArteScienza», Anno III, N. 5, pp. 9-54

Ghyka M. C., (1927), *Estéthique des proportions dans la nature et dans les arts*, Parigi, Gallimard.

Heiberg J.L. (1885), *Euclid's Elements of Geometry The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883–1885 edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick*.

Huntley H. E., (1970), *The Divine Proportion*, New York, Dober Pubblications.

Huntley H. E., (1974), *The divine proportion. A study in mathematical beauty*, New York, Doubleday & Co. Inc.

Kant I., (1993), *Critica del Giudizio*, a cura di A. Bosi, Torino, UTET.

Nicotra L., (2011), *L'ideale estetico nell'opera dello scienziato*, in Nicotra L., Salina Borello R. (a cura di), *Nello specchio dell'altro. Riflessi della bellezza tra arte e scienza*, Roma, Universltalia,

Nicotra L., (2011), *La legge della bellezza di Carmelo Ottaviano*, in «Notizie in...controluce», nn. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Nicotra L., (2017), *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, Convegno "Matematica, Natura, Architettura",17 novembre 2017, Mathesis-Dipartimento di Architettura, Napoli.

Ottaviano C., (1970), *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Pavia, Cedam.

Pacioli L., (1509), *De divina proportione*, Venezia, Paganino Paganini.

Padovan R., (1999), *Proportion: Science, Philosophy, Architecture*, ed. Taylor and Francis.

Platone, (1970), Platone, *Dialoghi* (trad. Francesco Acri), Torino, Einaudi.

Reghini A., (1988), *La tradizione Pitagorica* (cfr. Parte II: *Per la restituzione della geometria pitagorica*), Fr. Melita editori, Genova.

Tartaglia N., (1565), *Euclide megarense acutissimo philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice. Diligentemente rassettato, et alla integrita ridotto, per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea brisciano. Secondo le due tradottioni. Con vna ampla espositione dello istesso tradottore di nuouo aggiunta*, Venezia, Curtio Troiano.