**Science & Philosophy** **ISSN**: 2282-7757
Vol. 6(2), 2018, pp. 129--176 **eISSN**: 2282-7765

# Is the golden section a key for understanding beauty? Part II
# (La sezione aurea è una chiave per la comprensione del bello?) Parte II

Franco Eugeni* and Luca Nicotra°

**Received**: 01-12-2018. **Accepted**: 26-12-2018. **Published**: 31-12-2018

**doi**: 10.23756/sp.v6i2.421



**Abstract**

Our goal is to prove that the golden section, however important, is not the only key to understand a mathematical-formalizing approach to the idea of beauty. Having developed, from this point of view, reading keys linked to the post-modern, it is necessary to link together the multiple rivulets of knowledge that gather in this direction. Moreover the canons of the approaches presented up to now are very indicative for the understanding of many aspects of beauty,

* Teramo University. Full Professor of Logics and Science Philosophy, Teramo, Italy; eugenif3@gmail.com.

° Cultural Association "Arte e Scienza", President. Mechanical Engineer and Editor in charge of the *ArteScienza* magazine, Rome, Italy; luca.nicotra1949@gmail.com.

which however depends on the historical moment and the cultures created in the various civilizations. Therefore we can affirm that there is no effective definition of "beauty" that can be codified through fixed canons, but that the concept is expressed by a series of stratifications and interpretations that tend to link several major variations, expressing the various answers given by man to the question: what is the beauty?

**Keywords:** Golden section, golden number, beauty, golden rectangle, fractals

## Sunto

Nostro obiettivo è provare che la sezione aurea, per quanto di importanza notevole, non è l'unica chiave per comprendere un approccio matematico-formalizzante dell'idea di bellezza. Essendosi sviluppate, da questo punto di vista, chiavi di lettura legate al post-moderno, occorre legare tra loro i molteplici rivoli di saperi che si addensano in questa direzione. Inoltre i canoni degli approcci fino ad oggi presentati sono molto indicativi per la comprensione di numerosi aspetti della bellezza, che però dipende dal momento storico e dalle culture createsi nelle varie civiltà. Pertanto possiamo affermare che non esiste una effettiva definizione del "bello" che possa essere codificata attraverso canoni fissi, ma che il concetto si esprime con una serie di stratificazioni e interpretazioni che tendono a collegare fra loro numerose varianti principali, esprimenti a loro volta le varie risposte date dall'uomo alla domanda: cosa è il bello?

**Parole chiave:** Sezione aurea, numero aureo, bellezza, rettangolo aureo, frattali

## 6 Una disamina del numero aureo

Ciò che definisce la sezione aurea è la proporzione secondo la quale un segmento è diviso in due parti disuguali. Per numero aureo, dunque, si dovrebbe intendere un numero che caratterizza tale proporzione. L'assegnazione dell'aureola di "aureo" all'uno o all'altro dei due numeri $\Phi$ = 1,618 e $\varphi$ = 0,618 è quindi arbitraria, in quanto entrambi caratterizzano la sezione aurea di un segmento. Normalmente si chiama numero aureo $\Phi$ e numero aureo coniugato $\varphi$.

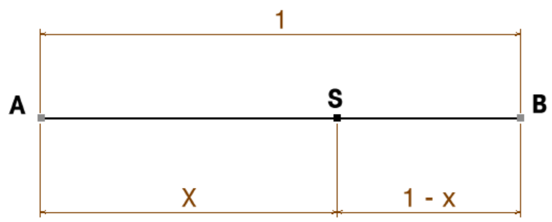
Anche il legame con la successione di Fibonacci è mantenuto sia da $\Phi$ sia da $\varphi$. Infatti $\Phi$ è il limite, al tendere all'infinito, dei rapporti fra un termine e il precedente della successione di Fibonacci, mentre φ è il limite, al tendere all'infinito, dei rapporti fra un termine e il successivo della stessa successione.

Tuttavia ci sono altri due numeri che caratterizzano la proporzione della sezione aurea, ma sono normalmente ignorati. I quattro numeri "aurei" che caratterizzano la sezione aurea emergono dai possibili modi in cui algebricamente si può impostare la relazione che intercorre fra i suoi tre elementi: l'intero segmento e le sue parti maggiore e minore.[46]

La soluzione algebrica della divisione di un segmento in media ed estrema ragione si trova facilmente assumendo come incognita $x$ la misura di uno dei tre segmenti coinvolti e scegliendo come unità di misura uno dei due rimanenti.[47] I casi possibili sono dunque le disposizioni di classe 2 (il primo elemento è uno dei tre segmenti della sezione aurea assunto come unità di misura e il secondo elemento è un altro dei rimanenti due segmenti assunto come incognita) di 3 oggetti (i tre segmenti della sezione aurea) e sono pertanto sei.[48]

<u>1° caso</u>

L'unità di misura è l'intero segmento e l'incognita il segmento di media ragione:




$1 : x = x : (1- x)$, da cui $x^2 = (1- x)$ e infine: $x^2 + x - 1 = 0$. Le due radici di questa equazione di 2° grado, sono: [49]

[46] Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*. "Convegno "Matematica, Natura, Architettura",17 novembre 2017, Mathesis- Dipartimento di Architettura, Napoli**.**

[47] Si potrebbe scegliere anche una unità di misura diversa dai tre segmenti della sezione aurea, ma sceglierla all'interno di tale terna permette di avere come radici dell'equazione algebrica direttamente i rapporti fra i tre segmenti stessi.

[48] Dato un insieme di $n$ oggetti distinti e $q < n$ le disposizioni semplici degli $n$ oggetti presi a gruppi di $q$ sono tutti i possibili raggruppamenti di $q$ oggetti scelti fra gli $n$ in modo tale che ciscun gruppo contenga $q$ degli $n$ oggetti e che due gruppi siano distinti per almeno un oggetto o per l'ordine degli oggetti contenuti. Il numero di disposizioni di classe $q$ di $n$ oggetti è $D_{n,q}$ = n! / (n – q)! = (n-1) x--- x (n-q+1), ovvero il prodotto di $q$ numeri naturali decrescenti a partire da $n$.

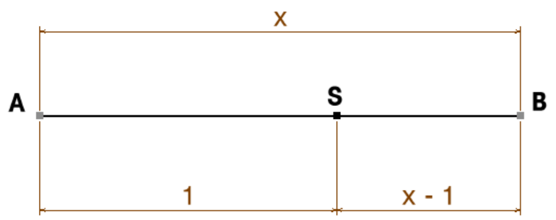
[49] $x_1$ e $x_2$ sono irrazionali e quindi risultano costituiti da un numero infinito di cifre decimali prive di periodicità. Normalmente si considerano tre cifre decimali.

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}618\ldots \quad ; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618\ldots$$

La radice negativa corrisponde a un punto esterno all'intero segmento che lo divide esternamente secondo la proporzione aurea. Essa per tale motivo non viene presa in considerazione. Dunque è $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618$.

2° caso

L'unità di misura è il segmento di media ragione e l'incognita è l'intero segmento:



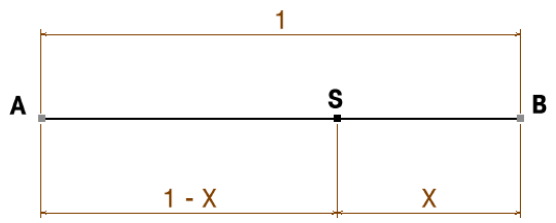

$x : 1 = 1 : (x - 1)$, da cui $x(x-1) = 1$ e infine: $x^2 - x - 1 = 0$. Le due radici di questa equazione di 2° grado, sono:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\,0{,}618\ldots \quad ; \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$$

La prima, come nel caso precedente, non ha significato geometrico e per tale motivo non viene presa in considerazione. Dunque è $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$.

3° caso

L'unità di misura è l'intero segmento e l'incognita il segmento di estrema ragione:



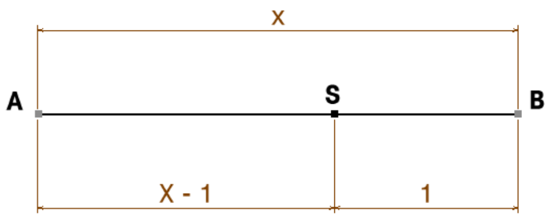

$1 : (1 - x) = (1 - x) : x$ da cui $(1 - x)^2 = x$ e infine: $x^2 - 3x + 1 = 0$. Le due radici di questa equazione di 2° grado, sono:

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0{,}382 \quad ; \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}618.$$

La seconda ovviamente non ha significato geometrico. Dunque è $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0{,}382$.

<u>4° caso</u>

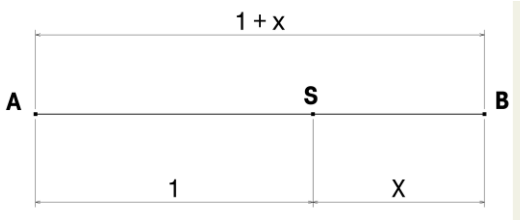
L'unità di misura è il segmento di estrema ragione e l'incognita l'intero segmento:




$x : (x - 1) = (x - 1) : 1$, da cui $(x - 1)^2 = x$ e infine: $x^2 - 3x + 1 = 0$, come nel 3° caso, ma ora delle due radici reali e distinte quella accettabile è $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}618$.

<u>5° caso</u>

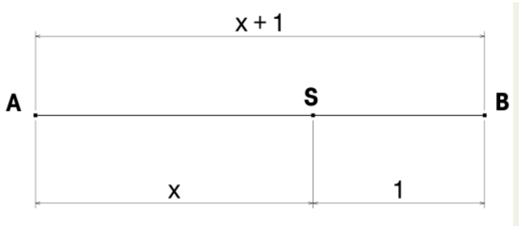
L'unità di misura è il segmento di media ragione e l'incognita il segmento di estrema ragione:




$(1 + x) : 1 = 1 : x$, da cui $x(1 + x) = 1$, e infine: $x^2 + x - 1 = 0$, come nel 1° caso. Delle due radici reali e distinte quella accettabile è $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618$.

<u>6° caso</u>

L'unità di misura è il segmento di estrema ragione e l'incognita il segmento di media ragione:



$(x + 1) : x = x : 1$, da cui $(x + 1) = x^2$, e infine: $x^2 - x - 1 = 0$, come nel 2° caso. Delle due radici reali e distinte quella accettabile è $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$.

In conclusione, tutte le possibili impostazioni algebriche della divisione di un segmento in media ed estrema ragione mostrano l'esistenza di quattro distinti rapporti che possono caratterizzarla:

- rapporto fra l'intero segmento e la parte maggiore $\Phi = \frac{AB}{AS} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$;
- l'inverso del precedente rapporto $\varphi = \frac{AS}{AB} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618$;
- rapporto fra l'intero segmento e la parte minore $\Phi_1 = \frac{AB}{SB} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}618$ ;
- l'inverso del precedente rapporto $\varphi_1 = \frac{SB}{AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0{,}382$.

Fra di essi intercorrono le seguenti relazioni:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2-1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$$

$$\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi = 2 + \varphi$$

$$\varphi_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi_1}$$

## 6.1 Proprietà del numero aureo Φ = 1,618

Il numero $\Phi = 1{,}618\ldots$, in quanto radice dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$ (vedi 2° e 6° caso del parag. 6), soddisfa la relazione: $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, da cui:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 = \Phi_1 \qquad (13)$$

dalla quale moltiplicando ripetutamente entrambi i membri per Φ si ottiene:

$$\begin{aligned} \Phi^3 &= \Phi^2 + \Phi \\ \Phi^4 &= \Phi^3 + \Phi^2 \\ \Phi^5 &= \Phi^4 + \Phi^3 \\ \Phi^6 &= \Phi^5 + \Phi^4 \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (13)'$$

$$\Phi^{n} = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}.$$

La (13) mostra che *il quadrato del numero aureo Φ contiene la stessa parte decimale di Φ stesso*: $\Phi^2 = 2{,}618\ldots$. Inoltre le (13), (13)' mostrano che *la potenza n_esima di Φ è uguale alla somma delle due potenze precedenti di Φ stesso.*

Dalla (13) dividendo entrambi i membri per Φ si ha: $\Phi = 1 + 1/\Phi = 1 + \varphi$. *I due numeri aurei Φ e φ differiscono per l'unità.*

Le (13) , (13)' si possono scrivere anche per sostituzioni successive:

$$\begin{aligned}
&\Phi^2 = \Phi + 1\\
&\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1\\
&\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = 2\Phi + 1 + \Phi + 1 = 3\Phi + 2\\
(13)'' \qquad &\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = 3\Phi + 2 + 2\Phi + 1 = 5\Phi + 3\\
&\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 = 5\Phi + 3 + 3\Phi + 2 = 8\Phi + 5\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Phi^{n} = f_n\Phi + f_{n-1}
\end{aligned}$$

essendo $f_n$ l'ennesimo numero della successione di Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,34, 55, 89, 144…

Le (13)'' forniscono un modo diretto per calcolare le successive potenze intere del numero aureo Φ tramite i numeri di Fibonacci: *la potenza n_esima di* Φ *si può ottenere moltiplicando* Φ *per l'ennesimo numero della successione di Fibonacci e addizionandovi il numero precedente.*[50]

## 6.2 Proprietà del numero aureo φ = 0,618

Il numero φ = 0,618…, in quanto radice dell'equazione $x^2 + x - 1 = 0$ (vedi 1° e 5° caso), soddisfa la relazione: $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$, da cui:

$$\varphi^2 = 1 - \varphi = \varphi_1 \qquad (14)$$

dalla quale moltiplicando ripetutamente entrambi i membri per φ si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\varphi^3 = \varphi - \varphi^2\\
&\varphi^4 = \varphi^2 - \varphi^3\\
(14)' \qquad &\varphi^5 = \varphi^3 - \varphi^4
\end{aligned}$$

[50] Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, Op. cit.

$$\varphi^6 = \varphi^4 - \varphi^5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^n = \varphi^{n-2} - \varphi^{n-1}.$$

Le (14), (14)’ mostrano che *la potenza n_esima di φ è uguale alla differenza fra le due potenze precedenti di φ stesso cambiata di segno.*

Le (14), (14)’ si possono scrivere anche per sostituzioni successive:

$$\begin{aligned}
&\varphi^2 = 1 - \varphi \\
&\varphi^3 = \varphi - \varphi^2 = \varphi - 1 + \varphi = 2\varphi - 1 \\
&\varphi^4 = \varphi^2 - \varphi^3 = 1 - \varphi - 2\varphi + 1 = -3\varphi + 2 \\
(14)'' \qquad &\varphi^5 = \varphi^3 - \varphi^4 = 2\varphi - 1 + 3\varphi - 2 = 5\varphi - 3 \\
&\varphi^6 = \varphi^4 - \varphi^5 = -3\varphi + 2 - 5\varphi + 3 = -8\varphi + 5 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\varphi^n = (-1)^{n-1} f_n \varphi + (-1)^n f_{n-1}.
\end{aligned}$$

*La potenza n_esima di φ si può ottenere moltiplicando φ per l’ennesimo numero della successione di Fibonacci preso col segno negativo se n è pari e col segno positivo se n è dispari e addizionandovi il numero precedente se n è pari, sottraendolo se n è dispari.*[51]

## 6.3 Proprietà dei numeri aurei $\Phi_1 = 2{,}618$ e $\varphi_1 = 0{,}382$

Poiché $\Phi_1 = 2{,}618$ e $\varphi_1 = 0{,}382$ sono radici della stessa equazione, per essi valgono le stesse proprietà da questa ricavabili. Infatti entrambi soddisfano l’equazione $x^2 - 3x + 1 = 0$ (vedi 3° e 4° caso del parag. 6) e quindi si può scrivere per $\Phi_1$ (lo stesso per $\varphi_1$):

$$(15) \qquad \Phi_1^2 = 3\Phi_1 - 1$$

dalla quale moltiplicando ripetutamente entrambi i membri per $\Phi_1$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1^3 = 3\Phi_1^2 - \Phi_1 \\
&\Phi_1^4 = 3\Phi_1^3 - \Phi_1^2 \\
&\Phi_1^5 = 3\Phi_1^4 - \Phi_1^3 \\
&\Phi_1^6 = 3\Phi_1^5 - \Phi_1^4 \\
(15)' \qquad &\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Phi_1^n = 3\Phi_1^{n-1} - \Phi_1^{n-2}.
\end{aligned}$$

[51] Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea,* Op. cit.

Le (15), (15)’ si possono scrivere anche per sostituzioni successive:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1^2 = 3\Phi_1 - 1\\
&\Phi_1^3 = 3\,(3\Phi_1 - 1) - \Phi_1 = 8\,\Phi_1 - 3\\
(15)'' \qquad &\Phi_1^4 = 3\,(8\,\Phi_1 - 3) - (3\Phi_1 - 1) = 21\,\Phi_1 - 8\\
&\Phi_1^5 = 3\,(21\,\Phi_1 - 8) - (8\,\Phi_1 - 3) = 55\,\Phi_1 - 21\\
&\Phi_1^6 = 3\,(55\,\Phi_1 - 21) - (21\,\Phi_1 - 8) = 144\,\Phi_1 - 55
\end{aligned}
$$

Osservando la successione di Fibonacci, si conclude facilmente che nelle (15)’’ $\Phi_1$ *viene moltiplicato per il numero di Fibonacci che occupa il posto doppio del grado n della potenza di $\Phi_1$ considerata e gli viene sottratto il numero di Fibonacci che precede quel numero di due posti*:

n=2 n=3 n=4 n=5 n=6 grado

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,34, 55, 89, 144,……

4° 6° 8° 10° 12° posto

Pertanto possiamo scrivere così il termine generale delle (15)’’: [52]

$$\Phi_1^n = f_{2n}\,\Phi_1 - f_{2n-2}\,.$$

## 6.4 I numeri Φ e φ come radici e frazioni continue

La sezione aurea gode di interessanti espressioni numeriche infinite. Infatti Φ e φ si possono rappresentare come radice continua o come frazione continua in modo singolare: l’unica cifra presente è 1.

Consideriamo l’estrazione di radice continua:

$$R = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 +}} \ldots\ldots\ldots.}$$

Il suo quadrato è:

$$R^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 +}} \ldots\ldots\ldots} = 1 + R,$$

da cui si ottiene l’equazione:

[52] Luca Nicotra, *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*, Op. cit..

$$R^2 - R - 1 = 0$$

ovvero la stessa equazione del 1° caso del paragrafo 6, ove l'incognita è indicata con $R$ anziché con $x$ e la cui radice positiva sappiamo già essere il numero aureo Φ. Pertanto possiamo scrivere:

$$\Phi \;=\; R = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+}}\ldots}$$

Aggiungendo successivamente radici di 1, si ottengono valori sempre più approssimati del numero aureo Φ: 1, 1.41, 1.594, 1.612, 1.616, 1.617, 1.618, ….

Analogamente possiamo considerare la frazione continua:

$$F = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

che si può scrivere:

$$F = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}} = 1 + \frac{1}{F}$$

da cui si ottiene l'equazione:

$$F^2 - F - 1 = 0$$

ovvero ancora una volta la stessa equazione del 1° caso del paragrafo 6, ove l'incognita è ora indicata con $F$ anziché con $x$ e la cui radice positiva sappiamo già essere il numero aureo Φ. Pertanto possiamo scrivere:

$$\Phi = \; F = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

Cioè abbiamo ottenuto un'altra espressione che permette di calcolare i successivi valori approssimati di Φ.

Consideriamo ora la frazione continua:

$$F = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

che si può scrivere:

$$F = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}} = \frac{1}{1 + F}$$

da cui si ottiene l'equazione:

$$F^2 + F - 1 = 0$$

ovvero la stessa equazione del 2° caso del paragrafo 6, ove l'incognita è indicata ora con $F$ anziché con $x$ e la cui radice positiva sappiamo già essere il il numero aureo φ. Pertanto possiamo scrivere:

$$\varphi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

espressione che permette di calcolare i successivi valori approssimati di φ.

## 7 Costruzioni geometriche della sezione aurea

Le costruzioni geometriche della sezione aurea, dirette e inverse, possono essere realizzate con la geometria sintetica o con la geometria analitica.

Il problema diretto della costruzione della sezione aurea è quello in cui è dato un segmento e si vuole individuare il punto al suo interno che lo divide in media ed estrema ragione; il problema inverso del precedente consiste nel costruire il segmento che ammette come parte maggiore o come parte minore della sua sezione aurea un dato segmento.

Le costruzioni geometriche sintetiche della sezione aurea fanno ricorso unicamente a proprietà della geometria sintetica e sono piuttosto laboriose. Le costruzioni geometriche analitiche, invece, si basano su interpretazioni geometriche delle soluzioni delle equazioni algebriche che definiscono la sezione aurea nei vari casi indicati al. paragrafo 6; esse sono generalmente molto più agili e rapide di quelle sintetiche.

## 7.1 Costruzione geometrica sintetica della sezione aurea

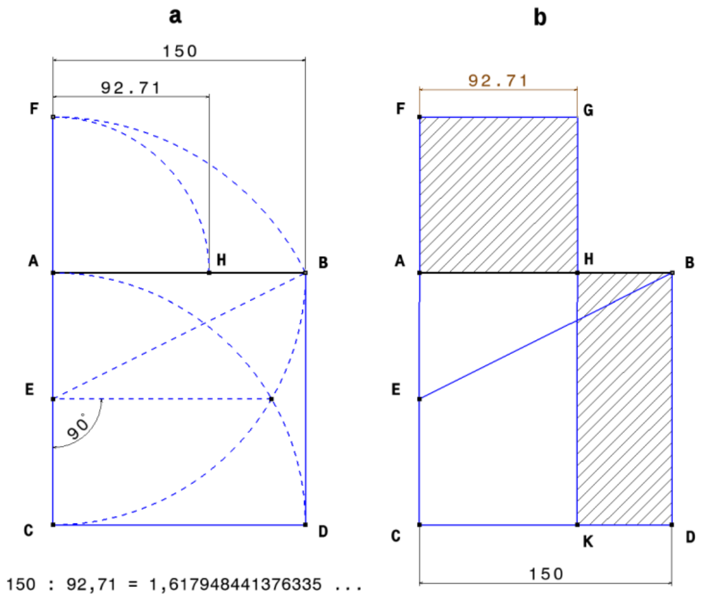



Figura 14 – Costruzione geometrica sintetica diretta della sezione aurea del segmento AB secondo Euclide (*Elementi*, Libro II, Prop. 11). Fig. 14a: la costruzione con riga e compasso in termini moderni. Fig. 14b: la costruzione originale di Euclide basata su proposizioni precedenti degli *Elementi*. La costruzione è avvalorata dall'equivalenza fra il quadrato AHGF e il rettangolo HBDK.

Nell'ambito della geometria sintetica, la prima costruzione diretta della sezione aurea di un segmento di cui si abbia notizia è quella proposta da Euclide nella Proposizione 11 del Libro II degli *Elementi*. Espressa in termini semplificati, la costruzione si svolge con riga e compasso secondo quanto da noi indicato in figura 14a. Nella figura 14b, invece, è riportata la costruzione originale di Euclide che non fa uso di riga e compasso, ricorrendo soltanto a proposizioni da lui precedentemente dimostrate (le denominazioni dei punti sono quelle originali di Euclide).

Sia *AB* il segmento sul quale costruire la sezione aurea. Costruito su *AB* il quadrato *ABCD*, facendo successivamente centro in *A* e in *C* si traccino due archi di circonferenza di raggio *AB* e dal loro punto di intersezione si tracci la perpendicolare a *CA* che interseca *CA* nel suo punto medio E. Quindi si congiunga questo con *B*. Facendo centro in *E* si tracci un arco di circonferenza di raggio *EB* e sia *F* il suo punto di intersezione con la retta *CA*. Ebbene, l'arco di circonferenza con centro in *A* e raggio *AF* interseca in *H* il segmento *AB* dividendolo in media ed estrema ragione, essendo:

$$AB : AH = AH : HB,$$

poiché il rettangolo che ha per lati *AB*, *HB* è equivalente al quadrato di lato *AH*:

$$AB \times HB = AH^2.$$

La dimostrazione fornita da Euclide (figura 14b) consiste proprio nel dimostrare l'equivalenza fra il quadrato *AHGF* costruito su *AH* e il rettangolo *HBDK* avente per lati *HB* e *BD* = *AB*; essa è piuttosto macchinosa e si basa soltanto su precedenti proposizioni degli *Elementi*.[53] La possiamo seguire nella traduzione moderna di Fabio Acerbi:[54]

> Sia data la retta *AB*: si deve pertanto secare *AB* cosicché il rettangolo compreso da quella totale e dall'uno o dall'altro dei segmenti ugule al quadrato sul restante segmento.
>
> Si descriva su AB il quadrato ABDC (Prop.1-46), e si sechi AC a metà nel punto E (Prop.1-10) e si congiunga B con E; e si prolunghi CA

[53] Nell'ordine richiamato sono le seguenti:

Libro I - Prop. 46: *Descrivere sulla retta data un quadrato*

Libro I - Prop. 10: *Secare a metà la retta limitata data*

Libro I - Prop. 3: *Di due rette disuguali date, sottrarre dalla maggiore una retta uguale alla minore.*

Libro II – Prop. 6: *Qualora una linea retta sia divisa a metà, e una certa retta sia sommata ad essa in linea retta, il rettangolo compreso da quella totale insieme con quella sommata e da quella sommata più il quadrato sulla metà è uguale al quadrato su quella composta sia dalla metà sia da quella sommata*).

Libro I - Prop. 47: *Nei triangoli rettangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo retto è uguale ai quadrati sui lati che comprendono l'angolo retto.*

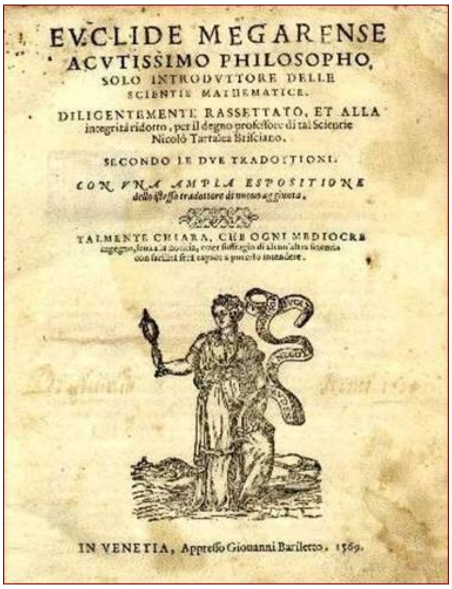
[54] http://www.scienzaatscuola.it/euclide/home/libro2/prop2-11.html.

fino a F (Prop.1-3), e si ponga BE uguale a EF; si descriva su AF il quadrato FH e si conduca GH fino a K (Prop.1-46): dico che AB risulta secata secondo H in modo da formare il rettangolo AB pr BH uguale al quadrato su AH.

Poiché infatti la retta AC risulta secata a metà in E, e ad essa risulta sommata FA, il rettangolo CF per FA più il quadrato su AE è uguale al quadrato su EF (Prop.2-6). Ma EF è uguale a EB, il rettangolo CF per FA insieme al quadrato su AE è uguale al quadrato su EB

Poiché infatti la retta AC risulta secata a metà in E, e ad essa risulta sommata FA, il rettangolo CF per FA più il quadrato su AE è uguale al quadrato su EF (Prop.2-6). Ma EF è uguale a EB, il rettangolo CF per FA insieme al quadrato su AE è uguale al quadrato su EB.

Ma la somma dei quadrati su BA e AE è uguale al quadrato su EB (Prop.1-47), l'angolo su A è infatti retto, il rettangolo CF per FA insieme al quadrato su AE è uguale è uguale alla somma dei quadrati su BA e AE. Si sottragga quello su AE comune; il rettangolo restante CF per FA



EVCLIDE MEGARENSE
ACVTISSIMO PHILOSOPHO,
SOLO INTRODVTTORE DELLE
SCIENTIE MATHEMATICE.
DILIGENTEMENTE RASSETTATO, ET ALLA
integrità ridotto, per il degno professore di tal Scientie
Nicolò Tartalea Brisciano.
SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE
TALMENTE CHIARA, CHE OGNI MEDIOCRE
IN VENETIA, Appresso Giouanni Bariletto. 1569.

Figura 15 - *Elementi* di Euclide,
tradotti in italiano da Niccolò
Tartaglia (1543). Edizione del 1569.

è uguale quindi al quadrato su AB.

Il rettangolo FA per FK è FK, AF è infatti uguale a FG, e il quadrato su AB è AD, FK è quindi uguale a AD. Si sottragga AK comune: FH restante è allora uguale a HD.

E HD è il rettangolo AB per BH, AB è infatti uguale a BD, e FH è il quadrato su AH; il rettangolo AB per BH è quindi uguale a quadrato su AH.

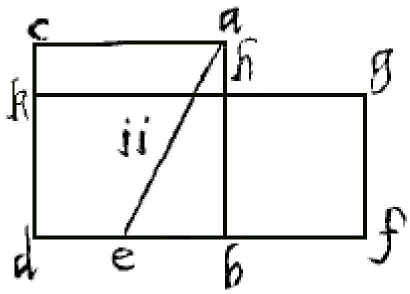
La retta data AB risulta quindi secata secondo H così da fare il rettangolo AB per BH uguale al quadrato su AH.

A titolo informativo riportiamo la versione della stessa costruzione tratta dagli *Elementi* di Euclide tradotti in italiano da Niccolò Tartaglia nel 1543:[55]

Problema .1. Propositione .11.

[11/11] Puotemo segare una data linea retta si conditionatamente che il rettangolo che è contenuto sotto di tutta la linea, & di una parte, sia equale al quadrato che uien fatto dell'altra parte. figura 47r.

Sia data la linea ,a,b, la qual uolemo diuidere cosi conditionatamente che quel che uien produtto da tutta la linea in la sua menor parte sia equale al quadrato dell'altra maggior parte, & per far tal cosa descriuerò il quadrato sopra la detta linea .a.b. (per la quadragesima sesta del primo) il qual, sia ,a,b,c,d, & diuido il lato ,b,d, in due parti equale in ponto ,e, et produco la ,a,e, & slongo etiam la ,e,b, fina in ponto ,f, talmente che la ,e,f, sia equale alla ,a,e, et sopra la parte istrinsica ,b,f, descriuo (per la quadragesima sesta del primo) il quadrato ,b,f,g,h, il quale sega dalla linea ,a,b, la parte ,b,h, equale alla parte ,b,f, hor dico che la linea ,a,b, è diuisa talmente in ponto ,h, che quello che è fatto da tutta la linea ,a,b, in la sua minor parte ,a,h, è equale al quadrato dalla parte ,b,h. Et per dimostrar questo slongo la ,g,h, per fin al k laqual serà equidistante al ,a,c. perche adonque la linea ,d,b, è diuisa in due parti equale in ponto ,e, & a quella gliè aggiunta la linea ,b,f. Il rettangolo compreso sotto a tutta la linea ,d,f, & alla linea ,b,f, col quadrato della e.b. per la sesta di questo, serà equale al quadrato della ,e,f, & perche .e.f. si è equale alla .e.a. il rettangolo adonque fatto della ,d,f, in la ,b,f, con lo quadrato della ,e,b, serà equale al quadrato della .e.a. & perche il quadrato della ,e.a. (per la penultima del primo) si è equale alli duoi quadrati delle due linee .e.b. & .a.b. seguita adunque che'l rettangolo della .d.f. in la .b.f. con lo quadrato della .e.b. sia equale al medesimo quadrato della .e.b. insieme con lo quadrato della ,a,b, leuando uia da l'una & l'altra summa il quadrato della ditta .e.b. li duoi rimanenti (per la tertia concettione) seranno fra loro equali, delli quali rimanenti l'uno serà il rettangolo fatto della d.f. nella .b.f. & l'altro è il quadrato della .a.b. & perche il




[55] È la prima versione degli *Elementi* di Euclide pubblicata in italiano e anche la prima edizione in una lingua europea moderna, basata sia sulla traduzione latina dall'arabo di Campano da Novara del 1482 (che è la prima edizione stampata degli *Elementi*), sia sulla traduzione latina dal greco di Bartolomeo Zamberti del 1505.

rettangolo fatto della d.f. nella .b.f. si è la superficie ,d,g, perche .f.g. è equale al .b.f. (per esser ciascun di loro lato del quadrato .b.f.g.h.) adonque la superficie .d.g. serà equale al quadrato della .a.b. cioè al quadrato .a.d. hor se communamente ne cauamo la superficie .d.h. li duoi rimanenti seranno anchora equali (per la detta tertia concettione) l'uno di quali rimanenti è la superficie .a.k. l'altro serà il quadrato .b.f.g.h. & perche la superficie .a.k. è contenuta sotto a tutta la linea .a.b. & alla sua minor parte .a.h. (per essere .a.c. equale à .a.b.) & lo quadrato .b.f.h.g. è il [pag. 47v] quadrato de ,b,h, cioe de l'altra sua maggior parte, adonque la linea ,a,b, serà diuisa secondo il proposito nel ponto ,h, perche la superficie, ouer rettangolo de tutta la linea ,a,b, in la sua minor parte .a.h. è equale al quadrato dell'altra sua maggior parte ,h,b, Et nota che non bisogna afaticarsi in uoler diuidere in questo modo un numero perche è impossibile, come in la uigesima nona del sesto si manifesterà.

## 7.2 Costruzione geometrica analitica della sezione aurea

### 7.2.1 Costruzioni dirette

Le interpretazioni geometriche delle soluzioni delle equazioni dei casi 1, 3 del paragrafo 6 permettono altrettante costruzioni analitiche dirette della sezione aurea, in quanto in quei casi è dato il segmento *AB* (assunto come unità di misura) e le soluzioni delle equazioni forniscono le misure rispetto ad esso o della parte maggiore (caso 1) o della parte minore (caso 3) della sezione aurea di *AB*, permettendo quindi di individuare al suo interno il punto *S* che lo divide in media ed estrema ragione.

*Costruzione geometrica diretta della sezione aurea: 1° caso parag. 6*

Riprendiamo l'equazione che definisce la sezione aurea di un segmento *AB* nel caso 1 in cui si sceglie come incognita $x$ la misura della parte maggiore e come unità di misura *AB* stesso: $x^2 + x - 1 = 0$.

Abbiamo già visto che delle due radici reali e distinte ha significato geometrico soltanto quella positiva:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618\ldots \tag{16}$$

Per ottenere una costruzione geometrica diretta della sezione aurea basterà trovare una interpretazione geometrica della (16). A tal fine possiamo scrivere

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 0{,}618. \tag{16'}$$

Orbene, l'interpretazione geometrica della (16)' è immediata: il radicale è la misura dell'ipotenusa *CA* di un triangolo rettangolo i cui cateti *AB* e *BC* misurano 1 e 1/2.[56] Sottraendo da tale ipotenusa un segmento di misura 1/2 (ovvero un segmento congruente con il cateto *BC*) otterremo il segmento *AS'* congruente con la parte maggiore della sezione aurea di *AB*, poiché la sua misura rispetto ad *AB* è data dalla (16)' ovvero è $x = 0{,}618...$

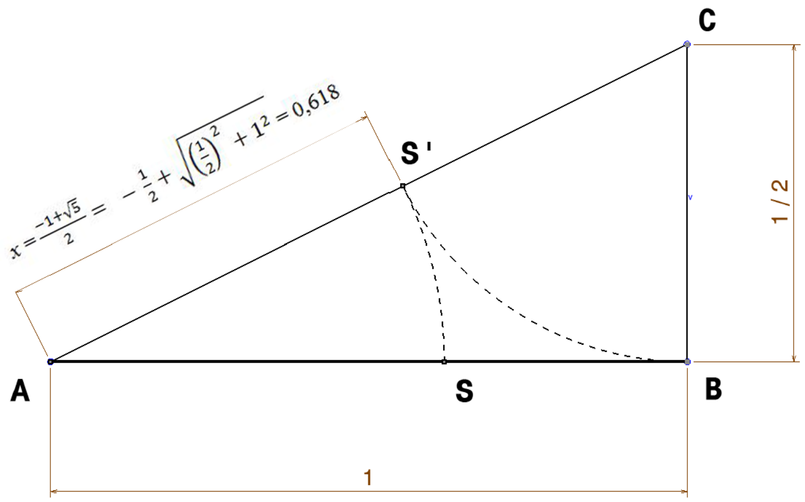



Figura 16 – Costruzione geometrica analitica diretta della sezione aurea: dato il segmento AB individuare il punto S al suo interno che lo divide in media ed estrema ragione.

La costruzione geometrica analitica diretta della sezione aurea del segmento *AB* è pertanto immediata (figura 16): costruito il triangolo rettangolo *ABC* tale che $AB = 1$ e $BC = \frac{1}{2}$, puntiamo il compasso in *C* e con raggio *CB* riportiamo il cateto *BC* su *CA* in *CS'*. Pertanto, puntando il compasso in *A* con apertura pari ad *AS'*, basta tracciare l'arco di circonferenza *S'S* per ottenere su *AB* il punto *S* che divide *AB* in media ed estrema ragione, ovvero secondo la sua sezione aurea.

### 7.2.2 Costruzioni inverse

Le interpretazioni geometriche delle soluzioni delle equazioni dei casi 2, 4 del paragrafo 6 permettono altrettante costruzioni analitiche inverse della

[56] Questo caso è trattato in Federigo Enriques e Ugo Amaldi, *Elementi di geometria, Parte Seconda*, Bologna, Zanichelli, 1963, p. 195.

sezione aurea, in quanto in quei casi sono date rispettivamente o la parte maggiore o quella minore della sezione aurea (assunte come unità di misura) e le soluzioni delle equazioni forniscono la misura dell'intero segmento (assunto come incognita).

Anche le interpretazioni geometriche delle soluzioni delle equazioni dei casi 5, 6 del paragrafo 6 permettono altrettante costruzioni analitiche inverse della sezione aurea, poiché anche in quei casi sono date rispettivamente o la parte maggiore o quella minore della sezione aurea (assunte come unità di misura), ma le soluzioni delle equazioni forniscono questa volta rispettivamente la misura della parte minore o di quella maggiore, cosicché dalla somma delle due parti si può ricostruire l'intero segmento.

*Costruzione geometrica inversa della sezione aurea: 2° caso parag. 6*

Riprendiamo l'equazione che definisce la sezione aurea di un segmento *AB* nel caso 2, in cui si sceglie come incognita $x$ il segmento *AB* stesso e come unità di misura la parte maggiore *AS* della sua sezione aurea: $x^2 - x - 1 = 0$. Delle due radici reali e distinte sappiamo già che ha significato geometrico soltanto quella positiva:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618... \tag{17}$$

Analogamente al caso precedente possiamo scrivere la (17) nella forma:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 1{,}618. \tag{17'}$$

L'interpretazione geometrica della (17)' è immediata: il radicale è la misura dell'ipotenusa *CA* di un triangolo rettangolo i cui cateti *AS* e *SC* misurano 1 e 1/2. Addizionando a tale ipotenusa un segmento di misura 1/2 (ovvero un segmento congruente con il cateto *SC*) otterremo il segmento *AD* congruente con l'intero segmento *AB* della sezione aurea, poiché la sua misura rispetto ad *AS* è data dalla (17)' ovvero è $x = 1{,}618...$

La costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea del segmento *AB* è pertanto immediata (figura 17): costruito il triangolo rettangolo *ASC* tale che *AS* = 1 e *SC* = 1/2 , puntando il compasso in *C* riportiamo *CS* sul prolungamento di *AC*. Infine, puntando il compasso in *A*, si tracci un arco di circonferenza di raggio *AD* fino a intersecare in *B* la retta *AS*: il segmento *AB* è il segmento cercato.

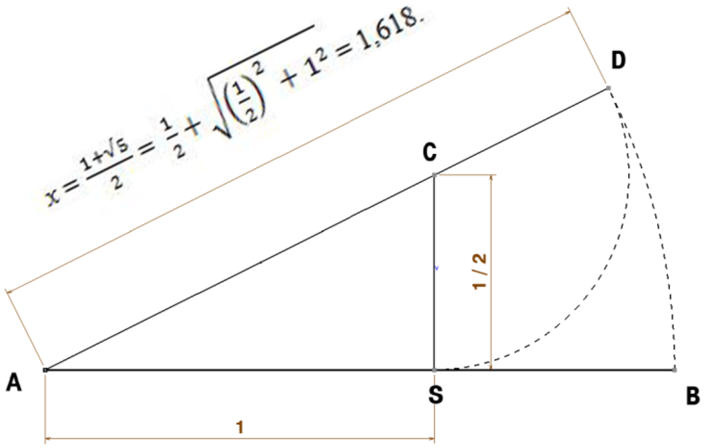



Figura 17 – Costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea: dato il segmento *AS* trovare il segmento *AB* che ammette *AS* come parte maggiore della sua sezione aurea.

*Costruzione geometrica inversa della sezione aurea: 4° caso parag. 6*

Riprendiamo l'equazione che definisce la sezione aurea di un segmento *AB* nel caso 4, in cui si sceglie come incognita x il segmento *AB* stesso e come unità di misura la parte minore SB della sua sezione aurea: $x^2 - 3x + 1 = 0$. Delle due radici reali e distinte sappiamo già che ha significato geometrico soltanto:

(18) $$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}618$$

che possiamo riscrivere così:

(18)' $$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 2{,}618$$

Il radicale della (18)' è la misura dell'ipotenusa *SC* di un triangolo rettangolo i cui cateti *SB* e *BC* misurano 1 e 1/2. Addizionando a tale ipotenusa un segmento di misura 1/2 (ovvero un segmento congruente con il cateto *BC*) otterremo il segmento *SD* = $\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$ che sommato al segmento *SB* = 1 dà come risultato il segmento cercato *AB* poiché la misura di questo è data proprio dalla (18)'.

La costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea del segmento *AB* è pertanto immediata (figura 18): costruito il triangolo rettangolo *SBC* tale che *SB* = 1 e *BC* = 1/2 , puntando il compasso in *C* riportiamo *CB* sul

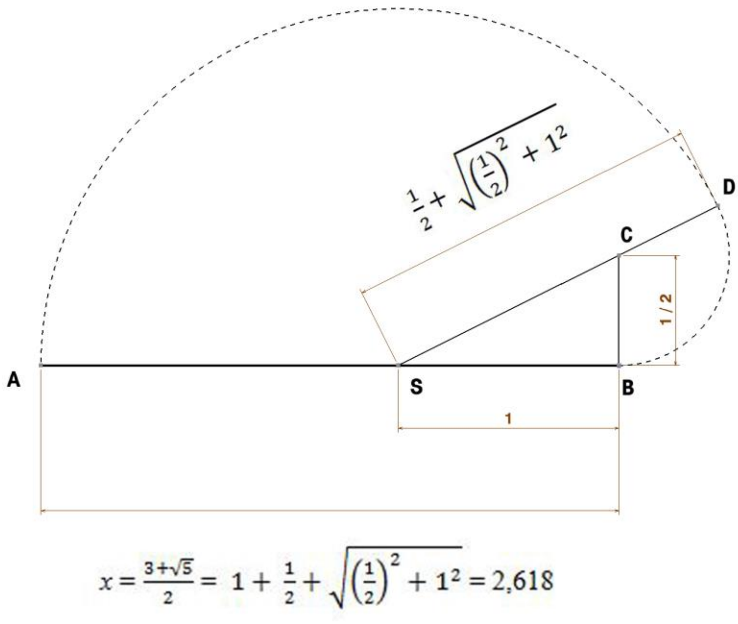



Figura 18 – Costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea: dato il segmento *SB* trovare il segmento *AB* che ammette *SB* come parte minore della sua sezione aurea.

prolungamento di *BC*. Infine, puntando il compasso in *S*, si tracci un arco di circonferenza di raggio *SD* fino a intersecare in *A* la retta *BS*: il segmento *AB* è il segmento cercato.

*Costruzione geometrica inversa della sezione aurea: 5° caso parag. 6*

Riprendiamo l'equazione che definisce la sezione aurea di un segmento *AB* nel caso 5, in cui si sceglie come incognita *x* la parte minore *SB* e come unità di misura la parte maggiore *AS* della sezione aurea di *AB*: $x^2 + x - 1 = 0$. Delle due radici reali e distinte quella accettabile è:

(19) $$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618.$$

che possiamo riscrivere così:

(19)' $$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 0{,}618$$

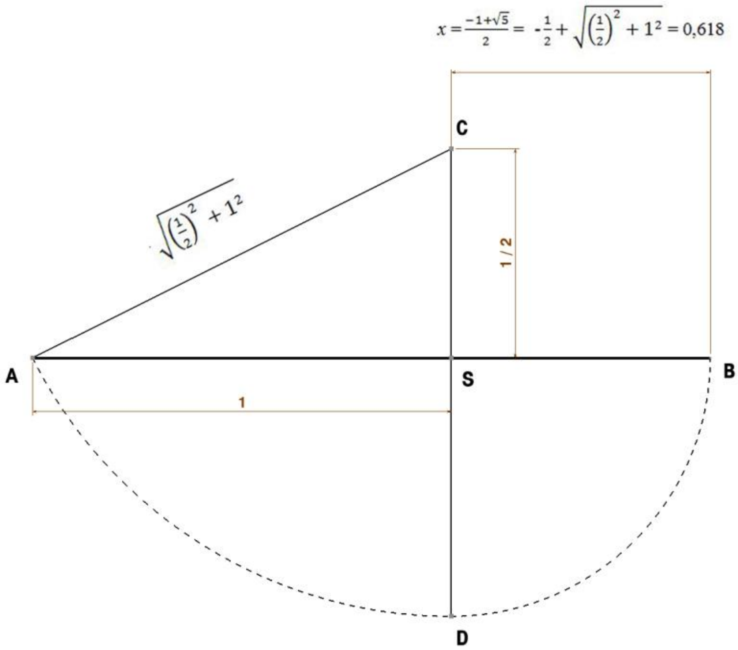



Figura 19 – Costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea: dato il segmento maggiore *AS* trovare il segmento minore *SB* che addizionato ad *AS* fornisce l'intero segmento *AB* della sezione aurea.

Il radicale della (19)' è la misura dell'ipotenusa *AC* di un triangolo rettangolo i cui cateti *AS* e *SC* misurano 1 e 1/2. Sottraendo da tale ipotenusa un segmento di misura 1/2 (ovvero un segmento congruente con il cateto *SC*) otterremo il segmento $SD = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$ congruente alla parte minore *SB* della sezione aurea essendo la sua misura dalla (19)'. Il segmento cercato è dunque *AB* =*AS*+*SB.*

La costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea del segmento *AB* è pertanto la seguente (figura 19): costruito il triangolo rettangolo *ABC* tale che *AB* = 1 e *BC* = 1/2 , puntando il compasso in *C* riportiamo il segmento *CA* in *CD* sulla retta *C.* Quindi con centro in S si tracci l'arco di circonferenza di raggio *SD* fino a intercettare in *B* il prolungamento di *AS* dalla parte di *S*. Il segmento *AB* è il segmento cercato che ha *AS* come parte maggiore della sua sezione aurea.

*Costruzione geometrica inversa della sezione aurea: 6° caso parag. 6*
Riprendiamo l'equazione che definisce la sezione aurea di un segmento *AB* nel caso 6, in cui si sceglie come incognita *x* la parte maggiore *AS* e come unità di misura la parte minore *SB* della sezione aurea di *AB*: $x^2 - x - 1 = 0$. Delle due radici reali e distinte quella accettabile è :

(20) $$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$$

che possiamo riscrivere così:

(20)' $$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = 1{,}618$$

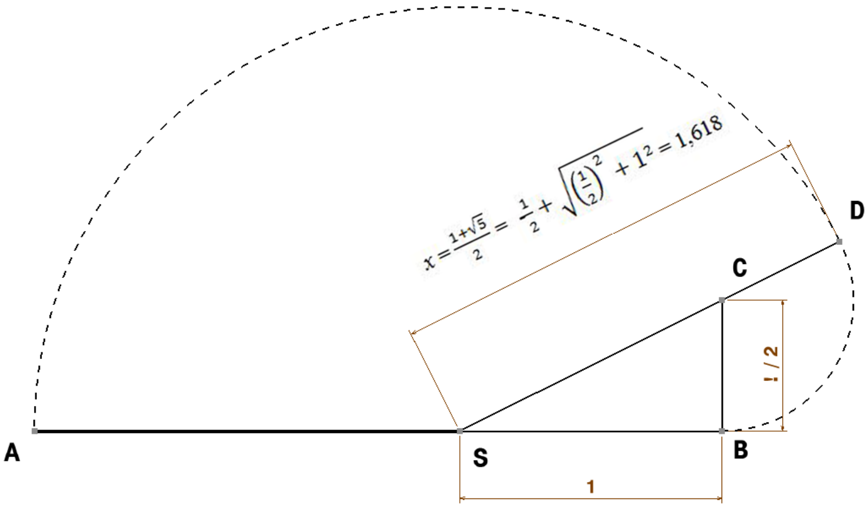



Figura 20 – Costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea: dato il segmento minore *SB* trovare il segmento maggiore *AS* che addizionato ad *SB* fornisce l'intero segmento *AB*  della sezione aurea.

Il radicale della (20)' è la misura dell'ipotenusa *AC* di un triangolo rettangolo i cui cateti *SB* e *BC* misurano 1 e 1/2. Addizionando a tale ipotenusa un segmento di misura 1/2 (ovvero un segmento congruente con il cateto *BC*) otterremo il segmento *SD* = $\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}$ congruente alla parte maggiore *AS* della sezione aurea, essendo la sua misura data dalla (20)'. Il segmento cercato è dunque *AB* =*AS*+*SB.*

La costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea del segmento *AB* è pertanto la seguente (figura 20): costruito il triangolo rettangolo *SBC* tale che *SB* = 1 e *BC* = 1/2 , puntando il compasso in *C* riportiamo il segmento *CB* in *CD* sul prolungamento di *SC*. Quindi con centro in S si tracci l'arco di circonferenza di raggio *SD* fino a intercettare in *A* il prolungamento di *SB* dalla parte di S. Il segmento *AB* è il segmento cercato che ha *SB* come parte minore della sua sezione aurea.

Un'altra costruzione geometrica analitica inversa della sezione aurea è quella stessa già indicata precedentemente nella parte I di questo articolo per la costruzione del rettangolo aureo. Con riferimento, quindi, alla stessa figura allora utilizzata, assunto il segmento *AB* = 1 e indicato con *M* il suo punto medio, risulta:

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}$$

e quindi:

$$ME = MC = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad AE = AM + ME = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}.$$

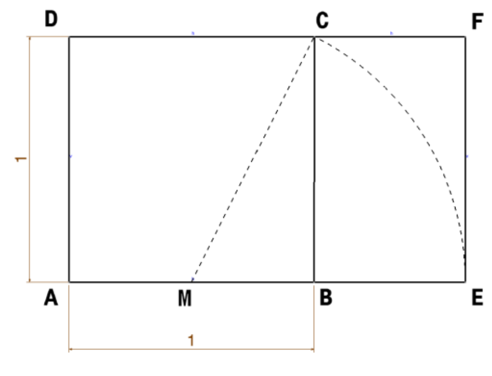



Figura 21 – La costruzione geometrica del rettangolo aureo interpretata come costruzione inversa della sezione aurea.

Dunque *AE* è il segmento cercato che ammette *AB* come parte maggiore della sua sezione aurea essendo il suo rapporto ad *AB* dato dalla (17)' ovvero *x* = 1,618. Di conseguenza *BE*è la parte minore della sezione aurea di *AE.*

### 7.3 Costruzioni tecnologiche della sezione aurea

La costruzione geometrica della sezione aurea di un segmento può essere realizzata molto rapidamente anche per mezzo di opportuni strumenti. Un esempio è fornito dal compasso di Goeringer.

Nel 1893 il pittore tedesco Adalbert Goeringer ideò un compasso a tre punte[57] con la proprietà che quando le due punte estreme sono agli estremi di un segmento, la terza punta individua la sezione aurea di questo (figura 22).

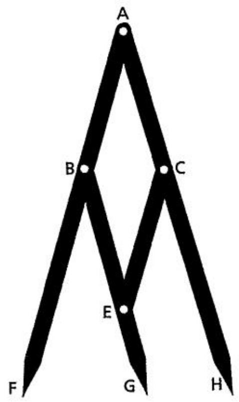



Figura 22 - Il compasso di Goeringer.

Il principio su cui si fonda il compasso di Goeringer è molto semplice: l'utilizzo di aste le cui lunghezze sono numeri di Fibonacci consecutivi e la similitudine dei triangoli da esse formate. In una possibile realizzazione si ha:

AF=AH=34 cm,   BF=BG=CH=21 cm,   AB=BE=EC=CA = 13 cm.

Dalla similitudine dei triangoli ABC, BFG si ha: BF : AB = FG : BC ovvero, essendo BC=GH, BF : AB = FG : GH. Poiché le misure di BF e AB sono due numeri consecutivi della successione di Fibonacci (21, 13) il rapporto BF : AB approssima il numero aureo $\Phi$ =1, 618… (cfr. parag. 10). Cosicché possiamo scrivere FG : GH = $\Phi$ qualunque sia l'apertura FH fra le aste estreme del compasso.

[57] Adalbert Goeringer, *Der Goldene Schnitt,* Paperback – 1911

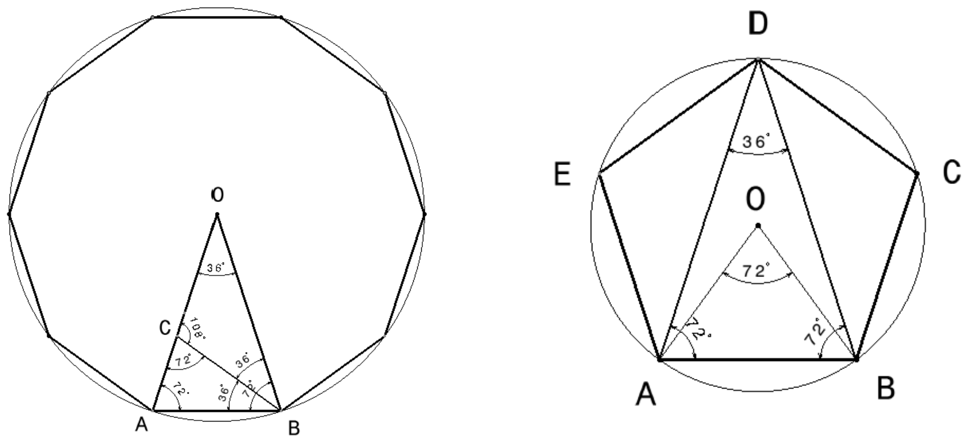
## 8 La sezione aurea nel pentagono e nel decagono regolare

Mostreremo ora in qual modo la sezione aurea sia presente nel pentagono e nel decagono regolare.

Iniziamo dal decagono regolare e supponiamo risolto il problema della sua costruzione con riga e compasso inscrivendolo nel cerchio di raggio $OA$ (figura 23a). L'angolo al centro $B\hat{O}A$ misura 36° in quanto insiste sull'arco $AB$ che è la decima parte dell'intera circonferenza.

Il triangolo $ABO$ è isoscele essendo $OA = OB$ in quanto raggi della stessa circonferenza. Pertanto è $O\hat{A}B = A\hat{B}O = 72°$. Tracciata la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}O$ sia $C$ il suo punto di intersezione con $OA$. Essendo $O\hat{A}B = 72°$ e $A\hat{B}C = 36°$ risulta $B\hat{C}A = 72°$. Dunque il triangolo $ABC$ è isoscele ed è $AB = BC$.

I triangoli $ABO$ e $ABC$ sono simili, avendo entrambi un angolo di 36° e due di 72°. Gli angoli corrispondenti sono: $A\hat{B}C = B\hat{O}A = 36°$, $O\hat{A}B = 72°$ (comune ai due triangoli), $A\hat{B}O = B\hat{C}A = 72°$.




**a** **b**

Figura 23 – Triangolo aureo: AOB nel decagono (a) e ADB nel pentagono (b) regolare.

Pertanto si ha: $OA : AB = AB : CA$ e anche $AB = BC = OC$ in quanto il triangolo $OCB$ è isoscele sulla base $BO$. Dunque possiamo scrivere infine: $OA : OC = OC : CA$ e concludere che *il lato del decagono regolare è la parte maggiore della sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto* essendo $OC$ congruente con il lato $AB$ del decagono.

Possiamo anche concludere che *un qualsiasi triangolo isoscele con angolo al vertice di 36° è aureo, in quanto la base è la parte maggiore della sezione* *aurea di ciascuno dei lati uguali*, ovvero il rapporto fra ciascuno dei lati uguali e la base è $\Phi = 1{,}618\ldots$

Il triangolo aureo si trova anche nel pentagono regolare: è ciascuno dei triangoli isosceli aventi per base un lato del pentagono e per lati uguali due diagonali (figura 23b). Infatti, considerato per esempio uno di tali triangoli, *ABD*, l'angolo alla circonferenza $B\hat{D}A$ è la metà dell'angolo al centro $B\hat{O}A$ che insiste sullo stesso arco AB, ma è $B\hat{O}A = 72°$ in quanto l'arco *AB* è la quinta parte dell'intera circonferenza e pertanto $B\hat{D}A = 36°$. Inoltre essendo *DA*= *BD* in quanto diagonali del pentagono, il triangolo *ABD* risulta isoscele sulla base *AB* e pertanto risulta $D\hat{A}B = A\hat{B}D = 72°$. Possiamo allora concludere che *il lato del pentagono regolare è la parte maggiore della sezione aurea della diagonale*.

Inoltre, tracciando la bisettrice di uno dei due angoli di 72° si ottiene un nuovo triangolo isoscele con angolo al vertice di 36° e angoli alla base di 72°, ovvero si ottiene un altro triangolo aureo dal quale si può ottenere ancora un altro triangolo aureo, e così via all'infinito. Si ritrova, dunque, nel triangolo aureo lo stesso meccanismo di autorigenerazione all'infinito che abbiamo già riscontrato nel rettangolo aureo, fenomeno evidentemente legato alla natura irrazionale del rapporto che definisce la sezione aurea.

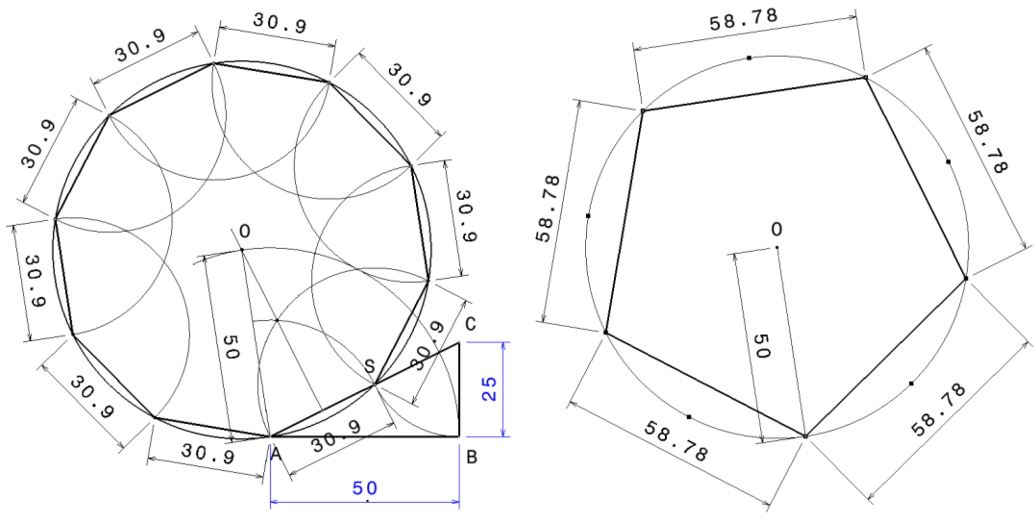



Figura 24 – Costruzione del decagono (a) e del pentagono (b) regolare inscritti in un cerchio.

Il risultato raggiunto ci permette di costruire il decagono regolare inscritto in un cerchio di dato raggio *AB*. Sul segmento *AB* ripetiamo la costruzione della parte maggiore della sezione aurea di *AB* vista precedentemente all'inizio del paragrafo 7: otteniamo il segmento *AS*, lato del decagono regolare (figura

24a). Quindi tracciata la mediana di *AS* facendo centro in *A* con apertura *AB* con il compasso possiamo individuare il centro *O* del cerchio circoscritto al decagono e disegnarlo. Successivamente facendo centro in *S* con apertura del compasso *SA* si traccia un arco di circonferenza che interseca il cerchio nel vertice del decagono successivo ad *S*. Ripetendo lo stesso procedimento si trovano tutti i successivi vertici del decagono. Per costruire il pentagono regolare inscritto nello stesso cerchio basta congiungere fra loro uno si e uno no i dieci vertici del decagono (figura 24b).

## 9 La sezione aurea e la spirale logaritmica

La sezione aurea risulta collegata alla spirale logaritmica proprio tramite il numero aureo ($\Phi$ o $\varphi$).

La spirale logaritmica, in coordinate polari ha equazione:[58]

$$\rho = a\, e^{b\theta},$$

che in forma logaritmica[59] si scrive:

$$\theta = (1/b)\ ln\ (\rho/a)$$

ed è detta anche "spirale proporzionale"[60] poiché la distanza radiale fra le successive spire aumenta proporzionalmente all'angolo di rotazione, a differenza della spirale di Archimede nella quale invece rimane costante.[61] Le

[58] La spirale logaritmica fu scoperta indipendentemente e quasi contemporaneamente da Evangelista Torricelli (1608-1647) e da René Descartes (1596-1650) nel 1638. Successivamente il grande matematico Jacob Bernoulli (1654-1705) rimase talmente affascinato dalle sue proprietà da chiamarla *spira mirabilis* e dedicarle anni di studio. Sarebbe più appropriato chiamarle spirali esponenziali.

[59] Da qui il nome di spirali logaritmiche.

[60] Le spirali logaritmiche godono di numerose proprietà, investigate dal grande matematico Jacob Bernoulli. Fra esse: 1) è una curva congruente a tutte le sue evolute successive; 2) è congruente alla sua antevoluta; 3) se si pone il lume nel suo polo, anche le caustiche di riflessione e di rifrazione sono curve ad essa congruenti. La prima proprietà (auto somiglianza), esprime la congruenza della curva a se stessa a meno di trasformazioni di similitudine ed è così evidenziata da Bernoulli: «Aut, si mavis, quia Curva nostra mirabilis in ipsa mutatione semper sibi constantissime manet similis et numero eadem, poterit esse vel fortitudinis et constantiae in adversitatibus; vel etiam Carnis nostrae post varias alterationes, et tandem ipsam quoque mortem, ejusdem numero resurrecturae symbolum; adeo quidem, ut si Archimedem imitandi hodienum consuetudo obtineret, libenter Spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum Epigraphe: *Eadem numero mutata resurgo*». (citazione tratta da Gino Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, vol. II, Milano, Hoepli, 1930, p. 67).

[61] Dal punto di vista meccanico, la spirale di Archimede può pensarsi generata da un punto che si muove a velocità costante lungo una semiretta che contemporaneamente ruota con velocità angolare costante attorno alla sua origine. Nella spirale logaritmica, invece, il punto si

costanti che figurano nell'equazione in forma polare hanno il seguente significato: *a* è il valore "iniziale" del raggio vettore $\rho$ in corrispondenza di $\theta = 0$; *b* è invece il fattore di accrescimento della spirale.[62]
Infatti si ha:

$$\rho(\theta+2\pi) = ae^{b(\theta+2\pi)} = a\, e^{b\theta}e^{2\pi b} = \rho(\theta)e^{2\pi b},$$

da cui si conclude che la distanza radiale fra le spire successive della spirale logaritmica, ad ogni giro, aumenta secondo una progressione geometrica di ragione $e^{2\pi b}$, cioè è costante e uguale a $e^{2\pi b}$ il rapporto fra le distanze dei punti della spirale situati in spire successive e di uguale anomalia (modulo $2\pi$).

La spirale aurea è un particolare tipo di spirale logaritmica, essendo per essa il fattore di accrescimento proprio il numero aureo: $b = \Phi = 1{,}618\ldots$. Molti oggetti naturali (galassie, disposizione delle foglie negli alberi,

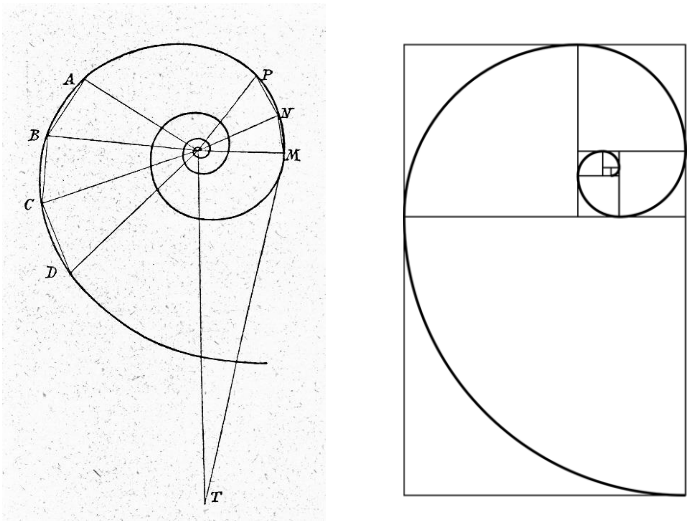



Fig. 25 – A sinistra la costruzione esatta della spirale logaritmica e a destra la costruzione della spirale aurea approssimata da archi di circonferenza.

muove di moto uniformemente accelerato lungo la semiretta. In particolare la velocità del punto lungo la semiretta aumenta proporzionalmente all'angolo di rotazione (quindi anche proporzionalmente al tempo essendo uniforme il moto circolare della semiretta attorno alla sua origine).

[62] Un'altra proprietà caratteristica delle spirali logaritmiche è l'inclinazione costante rispetto a qualunque retta uscente dal polo, per cui esse sono dette anche "spirali equiangole". In altri termini, la tangente alla spirale logaritmica, in ogni suo punto, mantiene la stessa inclinazione rispetto alla congiungente il punto con il polo. L'inclinazione della spirale logaritmica è regolata dal fattore di accrescimento "b"ed è: arctan (1/ln b). Nelle spirali auree tale inclinazione è arctan (1/ln 1,618) cioè è determinata dal numero aureo.

conchiglie, ecc..) hanno la forma di spirali auree.[63]

In figura 25 sono riportate a sinistra la costruzione esatta della spirale logaritmica e a destra la costruzione della spirale aurea approssimata con archi di circonferenza inscritti nei quadrati aventi per lato la dimensione minore di successivi rettangoli aurei.

## 10 La sezione aurea e la successione di Fibonacci

In stretta connessione con la sezione aurea è la cosiddetta successione di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Leonardo Pisano Bigollo, detto Fibonacci (1175?-1235?), si può ritenere il più grande matematico europeo del Medioevo e oggi è ricordato soprattutto perché, nel XIX secolo, Lucas chiamò con questo nome una successione che si presenta in un problema del suo *Liber Abbaci*.[64] La prima edizione di questa opera (1202) è andata perduta ma nel 1228 Fibonacci ne elaborò una seconda, di cui sono rimaste tre copie quasi complete, su richiesta del suo maestro, Scottas, astrologo di corte dell'Imperatore Federico II. A tal fine è interessante conoscere l'esistenza di un giornale trimestrale della Fibonacci Association, *The Fibonacci Quarterly*, che ancora oggi si occupa delle rappresentazioni dei numeri di Fibonacci, delle sue proprietà e altro.

Nel XIV capitolo del *Liber Abbaci* Leonardo Pisano (1170-?) propone al lettore un curioso problema la cui domanda finale è: «*Quot paria cuniculorum ex uno pario in uno anno germinentur?*».

Si tratta di risolvere il seguente quesito:

> Un allevatore ha una coppia di conigli adulti (maschio e femmina). Quante coppie di conigli troverà dopo un anno, supponendo che ogni mese una coppia generi una nuova coppia (maschio e femmina) che dal secondo mese di vita diventa produttiva, e che nessun coniglio muoia?

Si può costruire un successione numerica intrigante:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

---

[63] Per quanto detto, è più esatto specificare "spirali auree".

[64] La scrittura corretta è *Liber Abbaci* e non come spesso si legge *Liber Abaci*. La traduzione del titolo corretto è *Libro del calcolo* e non *Libro dell'abaco*, facendo riferimento al titolo errato *Liber abaci*. Infatti il libro fu scritto da Leonardo Pisano per far conoscere il nuovo modo di calcolare reso possibile dalla notazione posizionale decimale (indo-arabica) in contrapposizione al vecchio modo di calcolare con l'uso dell'abaco. L'errata traduzione nasce dalla confusione fra i termini *abacus* e *abbacus*: il primo indica l'abaco, mentre il secondo indica l'algoritmo ovvero (come veniva chiamata in quell'epoca) la tecnica di calcolo con le dieci cifre del sistema posizionale indo-arabico (cfr. Keith Devlin, *I numeri magici di Fibonacci*, Milano, BUR Rizzoli, 2013, pp. 21,22. Titolo originale: *The Man of Numbers*).

la cui regola di costruzione è esprimibile mediante il seguente sistema ricorrente:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = 1; F_1 = 1 \end{cases}$$

È noto come il termine generico $F_n$ può essere calcolato con l'uso di formule dirette. La prima di esse fu scoperta da Abraham de Moivre (1667 – 1754) ma prende il nome da Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) che la rese nota:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Formula binomiale:

$$F_n = \sum_{k\geq 0} F_{n-k,k} = \sum_{k\geq 0}\binom{n-k}{k}$$

Il profondo legame fra la sezione aurea e la successione numerica $F_n$ è espresso dal rapporto fra termini consecutivi. Infatti:

$$F_n / F_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803.....$$

$$F_{n-1} / F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803.....$$

e dunque:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n + (-1)^n \varphi^n\right)$$

Il numero aureo risulta, dunque, il limite all'infinito della successione numerica formata dai successivi rapporti fra due numeri consecutivi della serie di Fibonacci. Già dopo il 14° termine della serie di Fibonacci, tale rapporto si stabilizza su un valore molto prossimo al numero aureo. Per tale motivo la successione di Fibonacci può essere considerata (per termini sempre più grandi) anche una progressione geometrica avente per ragione il numero aureo.

Proponiamo ora una possibile generalizzazione della successione numerica di Fibonacci.

Generalizziamo il sistema alle ricorrenze che definisce la successione numerica di Fibonacci nel seguente sistema, sempre omogeneo a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} H_n = aH_{n-1} + bH_{n-2} \\ H_0 = p, H_1 = q \end{cases}$$

che consente di ottenere una nuova successione i cui termini sono:

$$(H_n) = \left(p, q, bp + aq, abp + (a^2 + b)q, (a^2 b + b^2)p + (a^3 + 2ab)q, \ldots\right)$$

e che oltre al caso particolare di Fibonacci (per $a$=1, $b$=1, $p$=0, $q$=1) presenta altri casi notevoli:

| | |
|---|---|
| $a$=1, $b$=1, $p$=2, $q$=1 | Numeri di Lucas; |
| $a$=2, $b$=1, $p$=1, $q$=1 | Numeri di Pell; |
| $a$=2, $b$=1, $p$=2, $q$=1 | Numeri di Pell-Lucas; |
| $a$=m, $b$=1, $p$=0, $q$=1 | Numeri di Fibonacci Generalizzati; |
| $a$=$m$, $b$=1, $p$=2, $q$=$m$ | Numeri di Lucas Generalizzati. |

L'analogo della formula di Binet, dopo opportuni calcoli, è però naturalmente dipendente dai valori particolari che assumono le costanti $a$, $b$, $p$, $q$. Anzi nella ricerca delle soluzioni - tra le progressioni geometriche - si possono distinguere tre casi a seconda che le radici della equazione polinomiale associata ( $h^2 = ah + b$ ) siano reali e distinte, reali e coincidenti, complesse e coniugate. A noi interessa soltanto il primo caso, che si verifica quando $a^2 + 4b > 0$ . In tale situazione la soluzione può essere così espressa:

$$H_n = \left(\frac{p}{2} + \frac{2q - ap}{2\sqrt{a^2 + 4b}}\right)\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\right)^n + \left(\frac{p}{2} - \frac{2q - ap}{2\sqrt{a^2 + 4b}}\right)\left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\right)^n$$

Si evince allora come i rapporti fra termini consecutivi della nuova successione siano ancora una volta convergenti verso valori abbastanza singolari:

$$\frac{H_{n-1}}{H_n} \to \varphi_{a,b} = \frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2b} \qquad \frac{H_n}{H_{n-1}} \to \Phi_{a,b} = \frac{\sqrt{a^2 + 4b} + a}{2}$$

per i quali valgono le identità seguenti:

$$a + b\varphi_{a,b} = 1/\varphi_{a,b} \qquad a + \frac{b}{\Phi_{a,b}} = \Phi_{a,b}$$

e inoltre:

$$\Phi_{a,b} \cdot \varphi_{a,b} = 1 \qquad\qquad \Phi_{a,b} - b\varphi_{a,b} = a$$

la cui verifica è una semplice conseguenza della natura dei due numeri:

$$\Phi_{a,b}\ ,\ \varphi_{a,b}$$

Ovviamente si può riscrivere la stessa soluzione per Hn in termini di tali rapporti, cioè:

$$H_n = \left( \frac{p}{2} + \frac{2q - ap}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \right) \left( \Phi_{a,b} \right)^n + \left( \frac{p}{2} - \frac{2q - ap}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \right) \left( -b\varphi_{a,b} \right)^n$$

Procedendo in modo analogo al caso particolare (cfr. parte prima del presente lavoro) si possono scrivere interessanti formulazioni alternative utilizzando frazioni continue:

$$\varphi_{a,b} = \cfrac{1}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ldots}}}}$$

$$\Phi_{a,b} = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ldots}}}}$$

e radici continue:

$$\varphi_{a,b} = \sqrt{\frac{1}{b} - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{b} - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{b} - \frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{b} - \ldots}}}}$$

valida se $a > -\sqrt{b}$

$$\Phi_{a,b} = \sqrt{b + a\sqrt{b + a\sqrt{b + a\sqrt{b + \ldots}}}}$$

valida se $a < \sqrt{b}$.

Così si possono considerare i nuovi oggetti, proprio per la strettissima somiglianza delle loro proprietà a quelle della sezione aurea, come una naturale generalizzazione della stessa.

## 11 Dalla sezione aurea nella musica alla legge universale della bellezza: eco sentimentale della Logica

Il ripetersi in natura di elementi estetici con una certa regolarità ha indotto molti studiosi a credere che essa, nelle sue multiformi espressioni, segua una "legge della bellezza", la quale, in quanto legge naturale, deve possedere tre attributi: universalità, immutabilità e necessità.

Si è quindi più volte tentato di ottenere per la legge della bellezza una formalizzazione matematica, la quale soltanto può possedere queste tre caratteristiche.

Uno dei primi tentativi – in verità più filosofico che matematico – fu fatto dal filosofo olandese Frans Hemsterhuis (1721-1790) nel secolo XVIII, il quale più che formulare una legge della bellezza ne diede la seguente definizione: «Il bello presenta il massimo numero di idee nel minimo tempo».[65]

Lo svizzero Andreas Speiser (1885-1970) si spinse oltre, associando ai motivi ornamentali dell'architettura classica il concetto matematico di gruppo finito.

Più dettagliato e analitico è stato, invece, il tentativo del matematico statunitense George David Birkhoff (1884 – 1944),[66] il quale escogitò una formula matematica per misurare la bellezza dei vasi rotondi, giungendo a risultati in accordo con il senso di bellezza che comunemente ispira la vista di questo tipo di vasi. Secondo la sua formula, la bellezza di un vaso rotondo può essere "misurata" con il rapporto tra il suo "ordine" e la sua "complessità": maggiore è tale rapporto, più il vaso è bello. Birkhoff considera le curve meridiane di un vaso rotondo e, di esse, i punti notevoli che l'occhio umano facilmente rileva: i punti terminali, i punti di flesso, i punti a distanza minima e massima dall'asse di rotazione del vaso, i punti angolosi, i punti in cui la tangente è perpendicolare all'asse: il numero complessivo di tali punti costituisce la "complessità" del vaso. Per "ordine" del vaso, invece, assume il numero di relazioni che intercedono fra le distanze dei punti notevoli misurate nella direzione dell'asse o in quella perpendicolare a questo.[67]

---

[65] Enrico Bompiani, Matematica e arte. *Periodico di matematiche, n. 4-5, ottobre 1974,* pp. 53-54.

[66] Noto soprattutto per quello che oggi viene chiamato "teorema ergodico". Birkhoff fu uno dei matematici statunitensi più influenti della sua generazione.

[67] Enrico Bompiani, *Op cit.*

Un'analisi del bello è riscontrabile anche nella musica fin dall'antichità ed è connessa alla presenza in essa della matematica,[68] come affermava già Pitagora (580/570-495 a. C.). La parola chiave con la quale riassumere la grande intuizione dei pitagorici è "armonia". Essa va filosoficamente intesa in senso etico, matematico e musicale. I pitagorici insegnavano la musica e compresero il nesso tra musica, matematica e geometria. L'armonia è il fulcro del loro pensiero filosofico e si estende perfino ai gesti, alla politica del corpo, all'economia della vita, al modo in cui ci si comporta nei rapporti sociali. Scrive Jean-Philippe Rameau (1683-1764):[69]

> La musica è una scienza che deve avere regole certe: queste devono essere estratte da un principio evidente, che non può essere conosciuto senza l'aiuto della matematica. Devo ammettere che, nonostante tutta l'esperienza che ho potuto acquisire con una lunga pratica musicale, è solo con l'aiuto della matematica che le mie idee si sono sistemate, e che la luce ne ha dissipato le oscurità.

Lo stretto rapporto che intercorre tra musica e matematica secondo la Scuola Pitagorica risiede, come è ben noto, nella scoperta delle relazioni fra i differenti toni delle note musicali e le lunghezze della corda vibrante:

> Mentre sono risultati esatti i rapporti numerici di Pitagora fra le lunghezze delle corde corrispondenti alle diverse note, non altrettanto esatti sono i rapporti fra i pesi ovvero fra le tensioni applicate ad esse. Per Pitagora, infatti, le frequenze dei suoni sarebbero proporzionali ai pesi, mentre in realtà sono proporzionali alle radici quadrate dei pesi. A noi basta la notizia che già nel VI sec. a. C., da parte di Pitagora o qualcun altro per lui, c'è stato un primo tentativo, in parte riuscito, di comprendere l'esistenza di rapporti numerici fra certe grandezze geometriche e fisiche che caratterizzano le diverse note musicali. È inutile dilungarsi sui particolari di questo errore, che fu posto in evidenza nel 1589 da Vincenzo Galilei, padre di Galileo, nella sua opera *Discorso intorno alle opere di Messer Zarlino da Chioggia*, dove però giunse a una errata relazione fra la frequenza del suono e l'area della sezione della corda. Tale errore, dovuto a un falso ragionamento e alla noncuranza di "interpellare" la Natura, non poteva essere riparato che dal padre del metodo sperimentale, il figlio Galileo, che finalmente nel 1638, nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, enunciò la relazione corretta che lega la frequenza fondamentale del

[68] Per più dettagliati collegamenti della musica con la matematica e la scienza in generale cfr. Luca Nicotra, Musica: ragione e sentimento. *ArteScienza, Anno III, N. 5,* 2016, pp. 91-138.

[69] Jean-Philippe Rameau è stato un compositore, clavicembalista, organista e teorico della musica francese. Ricordiamo il suo: *Trattato dell'armonia ridotto ai suoi principi fondamentali* del 1722.

suono emesso da una corda alle caratteristiche fisico-geometriche della corda, che noi oggi esprimiamo sinteticamente con la formula:[70]

La storia narrata da Giamblico a proposito del modo in cui Pitagora, sentendo i suoni emessi dall'incudine di un fabbro, arrivò a stabilire il legame fra i diversi toni delle note emesse da una corda vibrante e la sua lunghezza ha più l'aria di una leggenda che di verità storica. Sembra più verosimile, invece, che Pitagora abbia compiuto degli esperimenti sul monocordo, uno strumento costituito da una sola corda, di cui poteva essere variata la lunghezza della parte vibrante. Tali esperimenti gli fecero concludere, utilizzando termini moderni, che detta "fondamentale" la frequenza della corda intera liberamente vibrante, e considerato il suono da essa emesso (in termini moderni la nota musicale "$Do_1$"), la stessa corda dimezzata emette un suono di frequenza doppia (in termini moderni la nota "$Do_2$" della seconda ottava) giudicato da Pitagora consonante con il primo. Inoltre, risultavano a lui "gradevoli" i suoni emessi dalla stessa corda ridotta ai suoi 3/4 e ai suoi 2/3, che sono rispettivamente un "*Fa*" (quarta nota dell'ottava) e un "*Sol*" (quinta nota dell'ottava). È rimarchevole il fatto che con queste quattro note ($Do_1$, *Fa*, *Sol*, $Do_2$),[71] scoperte da Pitagora, si è potuto realizzare lo strumento a corda più diffuso e rappresentativo dell'antichità: la lira. Inoltre i numeri 1, 2, 3, 4, che figurano nei rapporti delle lunghezze delle corde che emettono tali note, avevano per i pitagorici un significato particolare: la loro somma, 10, era il loro numero magico!

Ma le questioni dei rapporti tra matematica e musica sono legati anche e misteriosamente alla sezione aurea e ai numeri di Fibonacci. Il musicista ungherese Ernő Lendvai (1925-1993) ha analizzato le opere del famoso compositore ungherese Béla Janos Bartók (1881-1945) basandosi su due sistemi opposti: la sezione aurea e la scala acustica,[72] mentre altri studiosi di musica rifiutano questa analisi.[73]

Il compositore e pianista francese Erik Satiè (1866-1925)[74] ha utilizzato il rapporto aureo in molti dei suoi pezzi, tra cui *Sonneries de la Rose + Croix*.

---

[70] Luca Nicotra, Musica: ragione e sentimento, Op. cit., p. 110.

[71] Che costituiscono la scala diatonica pitagorica.

[72] Ernő Lendvai, Béla Bartók, *An Analysis of His Music*. London, Ed. Kahn and Averill , 1971.

[73] Piotr Sadowski, *The Knight on his quest: symbolic patterns of transition in Sir Gawain and the Green Knight*, University of Delaware Press., 1996, p. 124.

[74] Satiè viene iniziato nell' Ordine Cbalistico dei Rosa+Croce, fondato da Joséphin Péladan e Stanislas de Guaita. In qualità di tesoriere prima e gran sacerdote e quindi di influente membro della confraternita, compone la *Sonneries de la Rose-Croix, les fils des étoiles*. Nel suo slancio mistico, che in quel periodo aveva, Satie crea la sua chiesa, la *Église métropolitaine d'art de Jésus-Conducteur* e lancia anatemi contro i «malfattori che speculano

Tuttavia tutti questi tentativi, pur apprezzabili, erano limitati a formalizzare la bellezza in casi particolari e non avevano quindi la caratteristica della universalità.

Invece, una ricerca sistematica, e a trecentosessanta gradi, di una vera e propria legge della bellezza con i caratteri della universalità, permanenza e necessità è stata compiuta negli anni ’70 del secolo scorso dal filosofo siciliano Carmelo Ottaviano (1906-1980),[75] attraverso un originale approccio filosofico-scientifico, partendo dalla applicazione della sezione aurea alla musica. I risultati dei suoi lunghi anni di studio sull’argomento sono stati raccolti ed esposti, con grandi dettagli di prove fotografiche, in un grosso volume dal titolo *La legge della bellezza come legge universale della natura*.[76]

Ottaviano comincia la sua indagine sul “bello” proprio dalla musica, ritenendola l’arte che «racchiude in sé il segreto della bellezza nella sua espressione più completa e piena»,[77] essendo più evidente in tale disciplina ciò che può darci una sensazione di godimento estetico e per converso ciò che può darci una sensazione opposta. Per tale motivo analizza in dettaglio l’accordo perfetto maggiore (accordo di terza-quinta-ottava), detto anche “perfettamente consonante” per la sua capacità di produrre una sensazione armoniosa.

Considerando le frequenze delle note di tale accordo riferite a quella del $do_1$:

| $do_1$ | mi | sol | $do_2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1+ 1/4 | 1 + 1/2 | 2 |

Ottaviano nota che gli intervalli formano una progressione addizionale:

| intervallo $do_1$-mi | intervallo mi-sol | intervallo sol-$do_2$ |
|---|---|---|
| 1/4 | 1/4 | 1/2 |

sulla corruzione umana». Incredibile che Satiè, da student, non fu molto apprezzato dai professori, dai quali ebbe numerose critiche.

75 Considerato uno dei pensatori più originali del Novecento. Docente universitario già a 33 anni, dal 1942 fu ordinario di storia della filosofia a Catania, Napoli e Cagliari. Fu anche docente di paleografia. Nel 1933 a Roma fondò l’importante rivista internazionale «Sophia, rassegna critica di filosofia e storia della filosofia». È autore di numerosi studî sul pensiero medievale, di scritti pedagogici e di notevoli lavori teoretici, molti dei quali di critica all’idealismo, che spiegano la sua posizione defilata rispetto alla filosofia dominante in quell’epoca e ne rilanciano l’importanza nel dibattito culturale attuale.

76 Carmelo Ottaviano, *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Padova, Cedam, 1970.

77 La seguente parte relativa agli studi di Carmelo Ottaviano sulla sezione aurea e sulla legge universale della natura cui pervenne è ripresa, con qualche leggera modifica, da Luca Nicotra, La legge della bellezza di Carmelo Ottaviano. *Notizie in.. controluce», nn. 6,7, 8, 9, 10,11, 12 anno 2011*.

Infatti, gli intervalli fra le prime tre note sono uguali (1/4 e 1/4), mentre quello relativo alle ultime due risulta essere la somma dei precedenti: 1/2 = 1/4 + 1/4: quindi costituiscono l'inizio di una progressione addizionale, nella quale, come è noto, ciascun termine è dato dalla somma dei due precedenti, come nella progressione di Fibonacci costruita a partire dalla coppia 1,1: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233…

Ottaviano applica la stessa analisi ai colori, ricordando l'analogia fra i colori e i suoni già posta in evidenza da Isaac Newton: «…i colori dello spettro visibile si susseguono con gli stessi intervalli o rapporti, con cui si susseguono le note musicali». Espresse in trilioni di vibrazioni al minuto, le frequenze dei colori fondamentali dello spettro luminoso risultano essere:

| Porpora | Rosso | Arancio | Giallo | Verde | Azzurro | Violetto | Viola scuro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 396 | 446 | 495 | 528 | 594 | 660 | 743 | 792 |

che rapportate alla prima danno luogo alla stessa successione di frazioni delle frequenze delle note musicali:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9/8 | 5/4 | 4/3 | 3/2 | 5/3 | 15/8 | 2 |

Preso atto delle numerose analogie fra le note musicali e i colori fondamentali, già rilevate da altri studiosi,[78] Ottaviano applica ai colori fondamentali la stessa legge di armonia costituita dalla progressione addizionale dell'accordo perfetto maggiore:

> Quattro colori sono intonati tra loro quando il quarto di essi differisce dal terzo per il doppio della differenza in frequenza esistente tra il primo e il secondo e tra il secondo e il terzo, uguale essendo la differenza in frequenza tra il primo e il secondo, e tra il secondo e il terzo.[79]

Considera diversi esempi, fra cui la combinazione di colori porpora-arancio-verde-viola scuro la quale corrisponde all'accordo perfetto maggiore *do*$_1$*-mi-sol-do*$_2$. Infatti le frequenze di quei colori (in trilioni di vibrazioni al minuto) sono:

396 , 495, 594, 792

e, quindi, riferite alla prima:

[78] Ottaviano cita in particolare G. Russo, La musica nei colori, in *Bollettino dell'Associazione Ottica Italiana, n.3, maggio 1932*.

[79] Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p.34.

1, 1+ 1/4, 1+1/2, 2

ovvero gli intervalli seguono la stessa disposizione degli intervalli dell'accordo perfetto maggiore:

1/4, 1/4, 1/2

Il quartetto di colori porpora-arancio-verde-viola scuro è proprio quello che, con accenti molto poetici, Ottaviano rileva «in uno dei più belli tra i fenomeni della natura, il sorgere dell'aurora, quando il viola scuro o nero del cielo e del mare si tinge tremolando in arancio e si smorza in verde al tocco del raggio purpureo del Sole che sorge, e a mano a mano trionfa delle tenebre».[80] Proseguendo sulla stessa via, estende la sua ricerca al campo della metrica in poesia, analizzando gli intervalli sillabici dell'«endecasillabo consonante», che comporta l'accento sulla seconda, quarta e decima sillaba, giungendo a risultati analoghi a quelli ottenuti per le note musicali e per i colori. A questo punto Ottaviano si chiede: «Il rapporto armonico è rappresentato da una relazione necessaria parzialmente costante o uniforme tra valori numerici diversi?» Trova una risposta nella sua originalissima analisi filosofica del problema, che lo porta a individuare, in aggiunta ai giudizi analitici e sintetici, un terzo tipo di giudizi che battezza con il termine «sineterico», composto dal greco *sin (sýn)* = con ed *eteros* (*šteroj*) = diverso. Mentre nel giudizio analitico il predicato è identico al soggetto («il circolo è rotondo»), nel giudizio sintetico il predicato è diverso dal soggetto («Giovanni è balbuziente»). Il giudizio analitico è necessario e universale, ma è una pura tautologia in quanto afferma l'identità fra soggetto e predicato (A = A) ed è quindi infecondo poiché, di conseguenza, il predicato non aggiunge null'altro che non sia già nel soggetto. Il giudizio sintetico, invece, è un giudizio fecondo, perché fornisce «intorno al soggetto una connotazione che non è implicita in esso, e quindi accresce il nostro sapere». Il rapporto fra predicato e soggetto, in esso, non è però necessario e universale. Il fatto di essere Giovanni non implica necessariamente l'essere balbuziente e non tutti i Giovanni sono balbuzienti. Il giudizio sintetico, dunque, è accidentale e contingente. I due tipi di giudizi hanno, pertanto, qualità complementari ma – osserva Ottaviano – «se la scienza umana non disponesse che di questi due tipi di giudizi, sarebbe senz'altro impossibile». Il geniale filosofo siciliano indica proprio nel giudizio sineterico l'unico tipo «con cui la mente umana ragiona, cioè da un lato *pensa concetti e non parole*, e dall'altro *inventa e scopre*

[80]Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p.34.

*relazioni* o *leggi nuove*». Il giudizio sineterico, infatti, esprime la «connessione necessaria *(sýn)* nella diversità logica (*šteroj*) tra soggetto e predicato». Oltre ai giudizi sineterici Ottaviano individua anche dei «nessi sineterici». Mentre i primi constano di due membri (soggetto e predicato), i secondi constano di tre o quattro membri fra i quali quindi intercedono due o tre relazioni. I nessi sineterici sono per Ottaviano veri e propri tipi di ragionamento, poiché collegano tra loro giudizi sineterici. Giunge così a una prima conclusione:

> Orbene - e questo è il punto che merita particolare attenzione - *la legge che regola i fenomeni del bello*, sia naturale che artistico, è *proprio una legge di tipo sineterico*, e precisamente della struttura a duplice o a triplice rapporto, e a tre o quattro membri o facce, come abbiamo visto.
>
> L'accordo perfetto maggiore ci rivela infatti un legame necessario tra le quattro note $do_1$, mi, sol, $do_2$, evidentemente diverse tra loro, legame dal quale nasce un rapporto triplice formalmente, duplice contenutisticamente, negli intervalli 1/4, 1/4, 1/2, e triplice sia formalmente che contenutisticamente nei valori 16, 17, 31 delle frequenze delle vibrazioni secondo il corista normale, tutti e tre diversi tra loro.[81]

E trae la seguente conclusione filosofica:

> Tutte le espressioni del bello in tutte le arti sono rappresentate da nessi sineterici, quegli stessi nessi cioè con cui la mente umana ragiona e inventa o scopre nell'intero ambito del sapere scientifico.
>
> Il che significa: la bellezza non è che l'espressione della Razionalità o Logicità dal punto di vista del sentimento: per così dire, l'eco sentimentale della Razionalità o Logica.[82]

L'analisi logico-filosofica-scientifica delle espressioni di bellezza conduce Ottaviano a individuare una legge comune a tutte le arti (scultura, architettura, poesia, pittura) e quindi a connetterla tramite la logica a tutte le discipline dello scibile umano. Infine, dimostra l'universalità della legge trovata mostrandone l'applicabilità, oltre che al mondo delle arti, anche al mondo organico e inorganico, trovando ivi la sua espressione geometrica nella spirale logaritmica aurea, già da tempo, tuttavia, presa come modello matematico della bellezza.

Della spirale aurea Ottaviano considera la costruzione approssimata tramite il rettangolo aureo, già presente in alcuni lavori di Jay Hambidge e di

---

[81] Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, pp. 43-44. I corsivi sono nel testo originale.

[82] Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 44.

John Crawford Pierce,[83] e fa rilevare esplicitamente che essa è costituita di quarti di circonferenza raccordati tangenzialmente e aventi raggi che si incrementano secondo la successione di Fibonacci.

La curva così costituita è da lui assunta come *curva della bellezza*. I successivi rettangoli aurei utilizzati per la sua costruzione sono stati ottenuti ciascuno sommando al precedente rettangolo aureo un quadrato di lato pari al lato maggiore di questo.

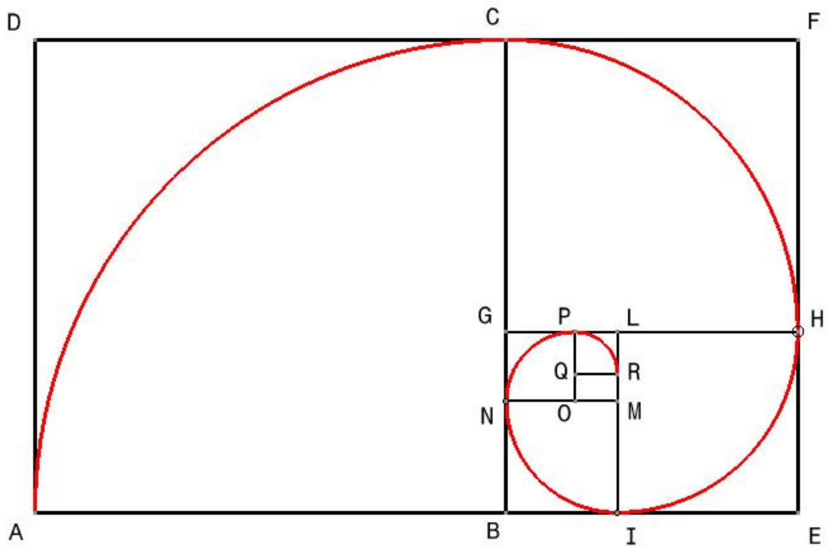



Figura  26 - Costruzione approssimata della spirale aurea con rettangoli aurei.

Per esempio, il rettangolo aureo *AEFD* (figura 26) è ottenuto sommando al rettangolo aureo *BEFC* il quadrato *ABCD* di lato uguale al lato maggiore *BC* del rettangolo *BEFC*. È facile verificare che ogni arco circolare che compone la spirale ha raggio uguale alla somma dei raggi dei due archi precedenti. Per esempio, l'arco *AC* ha raggio $BC = BG + GC = LI + GC$ (essendo $BG = LI$) e così via. Inoltre, i raggi degli archi circolari componenti costituiscono una progressione geometrica avente come ragione il numero aureo: infatti il rapporto fra due raggi consecutivi è il rapporto fra i lati consecutivi di un rettangolo aureo. Per esempio, $BC/GH = \Phi$, essendo *BC* e $BE = GH$ i lati maggiore e minore del rettangolo aureo *BEFC*.

[83] Jay Hambidge, *The Elements of Dynamic Symmetry*, New Haven, Yale University Press, 1926. Agli studi dell'Hambidge (oltre che al numero aureo) si riferisce ampiamente Ugo Maraldi in un suo articolo intitolato Il numero della bellezza. *L'Illustrazione del Medico, gennaio 1954,* pp. 22-24; cfr. anche John Crawford Pierce, The Fibonacci Series. *Scientific Montly*, *October 1951*, pp. 224-228.

Ottaviano, in quanto filosofo, non si accontenta di trovare i nessi causali tra i fenomeni e s'interroga sul perché ultimo di tali nessi: se tutto il mondo organico e inorganico segue una legge della bellezza, perché ciò deve accadere necessariamente?

La progressione addizionale – ovvero la generica successione numerica generata dalla formula di ricorrenza $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ – è per Ottaviano, in ultima analisi, la vera legge matematica della bellezza, nella sua forma aritmetica. Infatti, in tutte le progressioni addizionali – ed è questa una sua scoperta originale[84] – il rapporto fra un termine e il successivo tende indefinitamente al numero aureo $\varphi = 0{,}618\ldots$ Ottaviano considera, in aggiunta a quella di Fibonacci, altre sei diverse progressioni addizionali: quella di Hambidge costruita a partire da 1 e 5, e cinque costruite da lui stesso a partire da 1 e 3, 1 e 4, 1 e 6, 1 e 7, 1 e 20. Ottaviano prima costruisce le due progressioni addizionali intermedie fra quella di Fibonacci e quella di Hambidge, poi va oltre quest'ultima costruendo le progressioni a partire da 1 e 6, 1 e 7, quindi intuendo la loro proprietà comune ne sceglie a caso un'altra: quella costruita da 1 e 20. Per tutte verifica che il rapporto fra un termine e il successivo tende al numero aureo 0,618. Quindi generalizza affermando:

> La progressione di Fibonacci e la progressione di Schimper-Braun, o della fillotassi, rientrano dal punto di vista algebrico come casi particolari nella "teoria dei limiti": per qualunque successione, ottenuta partendo da due numeri qualsiasi e sommando successivamente i due elementi precedenti, il limite di un elemento diviso per il successivo coincide con la parte aurea di 1.[85]

E conclude da filosofo:

> Ciò non può significare se non questo: tutte le progressioni addizionali sono da considerare come *espressioni successivamente approssimate della relazione designata con il termine di "sezione aurea di un segmento"*.[86]

È questo particolare modo di divisione dell'unità in parti disuguali che costituisce l'essenza della legge della bellezza nella sua espressione aritmetica.

Ma perché la natura, e inconsapevolmente l'uomo nell'uniformarsi a questa legge naturale e quindi universale, fra gli infiniti modi di dividere

---

[84] Tuttavia soltanto intuita e verificata per alcuni casi particolari. La dimostrazione matematica rigorosa generale è dovuta invece a Franco Eugeni e Raffaele Mascella, pubblicata per la prima volta nell'articolo A Note in Generalize Fibonacci Numbers, *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography v.4, n. 1, 2001*, pp. 33-45

[85] Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 123. Per «parte aurea di 1» Ottaviano intende il numero aureo $\varphi = 0.618\ldots$

[86] Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 45. Il corsivo è nel testo originale.

l'intero in parti disuguali sceglie proprio il dividere secondo la "media ed estrema ragione", propria della sezione aurea? Ottaviano trova la ragione di ciò nella conservazione di una simmetria (dinamica) pur nella diversità delle parti, cioè nel ripetersi sempre identico a se stesso del procedimento di divisione:

> Questo è l'unico modo razionale secondo cui si possa dividere un segmento in due parti disuguali, essendo un procedimento simmetrico, cioè che si ripete identico a intervalli regolari, pur variando la grandezza degli elementi tra cui esso si pone. Dividendo invece il segmento secondo qualsiasi altro procedimento, si ottiene una varietà di risultati non retti da alcuna simmetria, cioè si ottiene una molteplicità disordinata, caotica.[87]

La sezione aurea appare a Ottaviano il «procedimento obbligato» di divisione dell'unità in parti disuguali, per una duplice «interiore giustificazione logica». In primo luogo per il principio di ragion sufficiente: non esiste un motivo valido per cambiare procedimento e non mantenerlo uniforme nelle successive divisioni delle parti. Inoltre, per il principio economico del massimo rendimento: con esso si «ottiene il massimo risultato, la molteplicità simmetrica invece di quella asimmetrica, con il minimo mezzo».[88]

Ma se la regolarità spaziale della divisione dinamica in parti disuguali della sezione aurea (il rapporto fra le parti rimane infatti lo stesso pur variando le dimensioni delle parti) rende conto della bellezza nelle opere dell'uomo e, in natura, nel mondo inorganico, v'è un'altra ragione ancora che ne giustifica l'«obbligato» uso da parte della natura negli esseri viventi. È la dinamica stessa dell'accrescimento – caratteristico dello sviluppo di un essere vivente – che «richiede una legge della crescita o sviluppo del vivente stesso (il vivente è tale in quanto cresce), e se la crescita suppone un rapporto di parti disuguali, cioè un procedimento per divisione in parti disuguali, quale divisione in parti disuguali la natura potrebbe scegliere, se non quella che si impone per una ragione logica o necessaria, cioè la divisione in media ed estrema ragione, ossia il rapporto che nasce dal procedimento addizionale?» [89]

Dunque la sezione aurea e le progressioni addizionali, che ad essa conducono come limite dei rapporti fra termini successivi, sono certamente la base dell'armonia, ma in ultima analisi sono soprattutto finalizzate a permettere la vita. E così come per il fisico teorico Paul Dirac la bellezza porta alla verità, per Ottaviano la bellezza porta alla vita:

[87] Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 44.
[88] Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 46.
[89] Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 147.

> Infine, in quanto legge dello sviluppo della natura vivente, il rapporto della serie addizionale mostra di essere un rapporto finalizzato, ossia ordinato a sviluppare la vita, in altri termini a diffondere la vita. Ciò significa che lo sviluppo della vita nasce dalla ragione stessa, in quanto lo stesso ritmo di questa (il giudizio sineterico) comanda il ritmo di quella (il procedimento addizionale).
>
> Non è quindi dubbio che la Bellezza rappresenti la condizione ideale della Vita, il maggiore possibile trionfo della Vita sulla Morte. [90]

Ottaviano, tramite diverse centinaia di fotografie di soggetti vari,[91] fornisce la dimostrazione dell'applicabilità della *curva della bellezza* a tutti gli enti naturali, viventi e non-viventi: piante, fiori, pesci, insetti, uccelli, rettili, mammiferi, lo scheletro, gli organi del corpo umano e animale, onde, cascate, correnti marine, coste, scogli, banchi coralliferi, nubi, eruzioni della corona solare, macchie solari, testa delle comete, aurore boreali, l'occhio dei cicloni e degli uragani, microrganismi e galassie. Sovrapponendo la spirale aurea con le immagini di numerosi esempi di tali categorie di enti ritenuti belli, Ottaviano avvalora il suo asserto secondo il quale le loro forme sono delineate da tratti di quella spirale e mostra come, al contrario, le forme di oggetti o esseri viventi giudicati brutti o malati devino da essa (figure 27-37).

Risulta difficilmente spiegabile come pura coincidenza questo ampio e multiforme richiamo alla sezione aurea, alla progressione di Fibonacci e alla spirale aurea, non tanto nell'opera dell'uomo quanto piuttosto in natura.

Insomma, si ripresenta, anche in questo caso, l'insoluta questione di quanto della verità matematica è in noi e quanta è fuori di noi. Dilemma che riguarda il fisico più che il matematico – che a differenza del primo può ritenersi soddisfatto della sua costruzione, anche se non corrispondente alla realtà fisica, purché logicamente corretta – e tanta meraviglia suscitava in Albert Einstein: «La matematica non smetterà mai di stupirmi: un prodotto della libera immaginazione umana che corrisponde esattamente alla realtà».

Il sommo Galilei, invece, nella sua opera *Il saggiatore* non mostra a tal riguardo alcun dubbio: la matematica è nella natura:

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo)» che «è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.[92]

---

[90] Carmelo Ottaviano, *Op. cit.*, p. 148.
[91] Carmelo Ottaviano, *Op. cit.* "Appendice figure".
[92] Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, VI, 232 .

Concetto ripetuto in tempi più recenti dal grande fisico-matematico Richard Feynman (1918-1988):

> A quelli che non conoscono la matematica è difficile percepire come una sensazione reale la bellezza, la profonda bellezza della natura ... Se volete conoscere la natura, apprezzarla, è necessario comprendere il linguaggio che essa parla.[93]

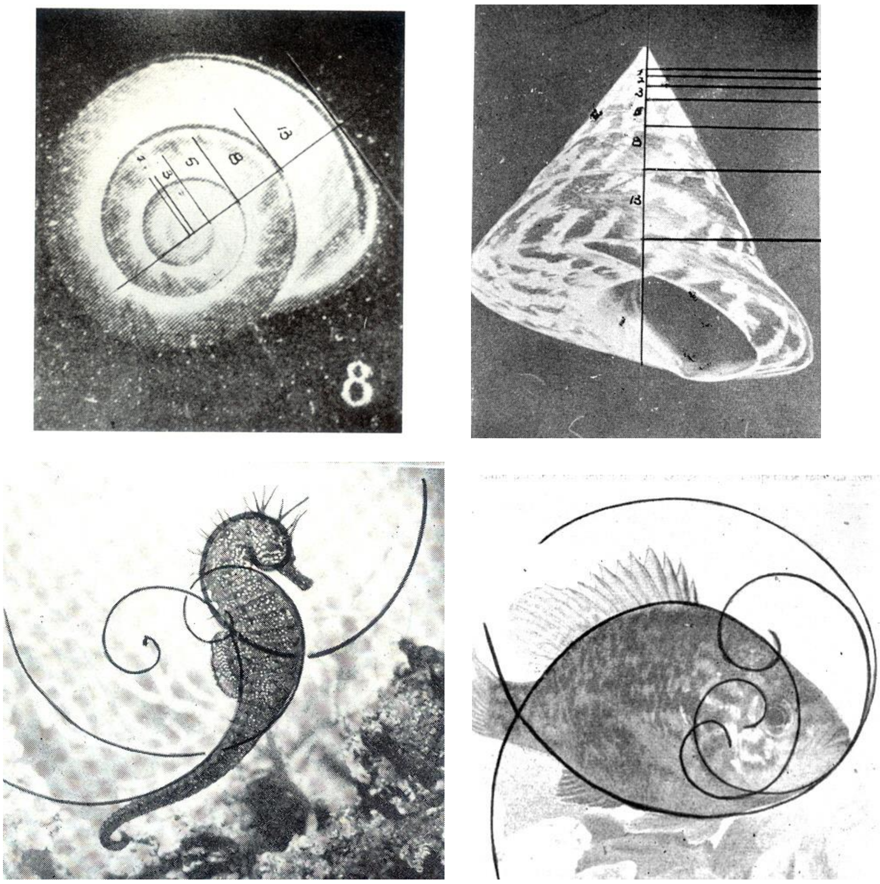
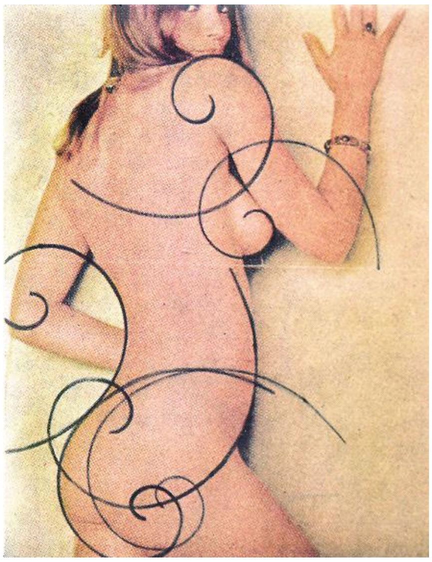
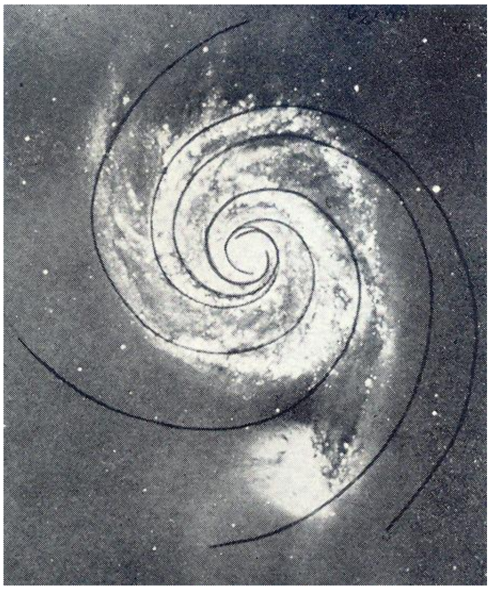
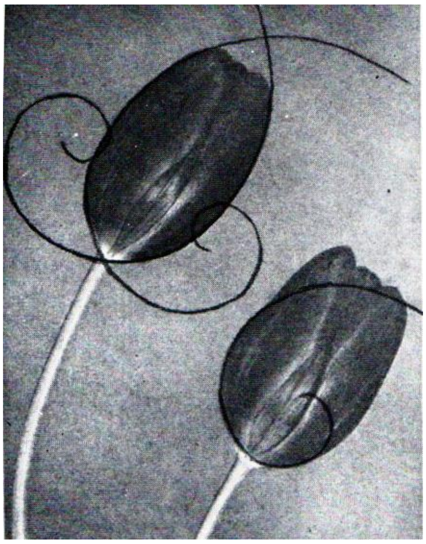



Figure  27, 28, 29, 30 – Da Carmelo Ottaviano, *La legge della bellezza come legge universale della natura,* Padova, Cedam, 1960 fig. 21, fig. 34, fig. 225, fig. 215.

[93] Richard Feynman, *The Character of Physical Law*.







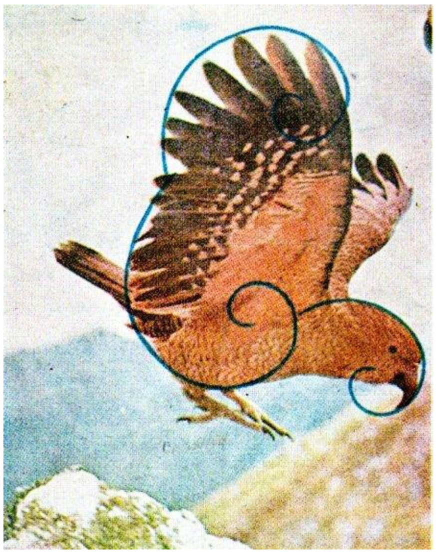
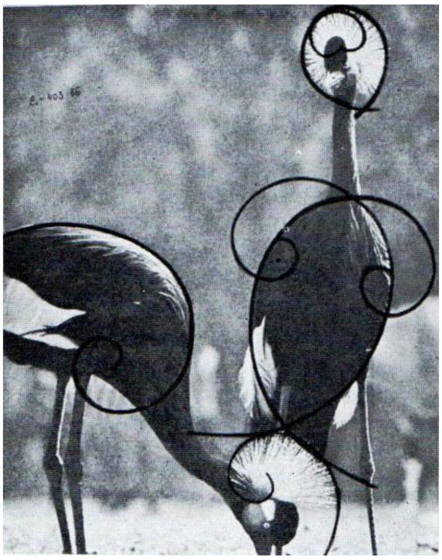
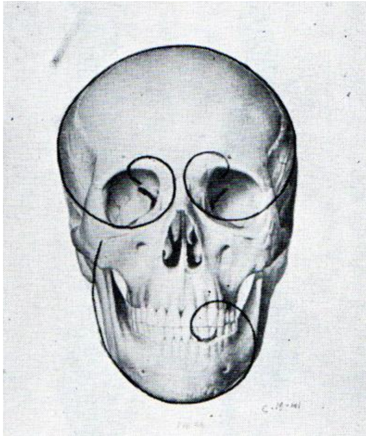


Figure 31, 32, 33, 34 – Da Carmelo Ottaviano, *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Padova, Cedam, 1960, fig. 588, fig 439, fig. 178, fig. 250.





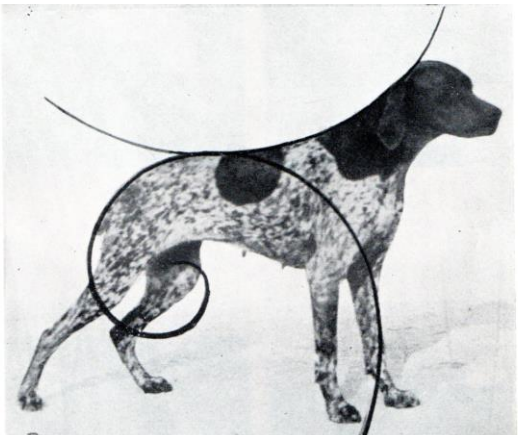


Figure  35, 36, 37 – Da Carmelo Ottaviano, *La legge della bellezza come legge universale della natura*, Padova, Cedam, 1960, fig. 255, fig 314, fig. 293.

**Bibliografia**

Berardi L., Beutelspacher A. (1990). Il pentagono regolare e la sezione aurea. *Periodico di Matematiche*. *Serie VI, Vol. 66, N. 1*, Roma.

Bompiani E. (1974). Matematica e arte. *Periodico di matematiche, n. 4-5, ottobre 1974*, pp. 53-54.

Crawford Pierce J. C. (1951). The Fibonacci Series. *Scientific Montly*, *October 1951*, pp. 224-228.

Devlin K. (2013). *I numeri magici di Fibonacci*, Milano, BUR Rizzoli, 2013, pp. 21, 22. Titolo originale: *The Man of Numbers.*

Enriques F., Amaldi U. (1963). *Elementi di geometria*, *Parte Seconda*. Bologna, Zanichelli, p. 195.

Eugeni F., Mascella R. ( 2001). A Note in Generalize Fibonacci Numbers. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography v.4, n.1*, pp. 33-45.

Feynman R. P. (1965). *The Character of Physical Law*. Modern Library.

Galilei G. (1623). *Il Saggiatore*, VI, 232 .

Goeringer A. (1911). *Der Goldene Schnitt*, Paperback .

Hambidge J. (1926). *The Elements of Dynamic Symmetry*, New Haven, Yale University Press.

Lendvai E., Bartók B. (1971). *An Analysis of His Music*. London, Ed. Kahn and Averill.

Loria G. (1930). *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, vol. II, Milano, Hoepli.

Maraldi U. (1954). Il numero della bellezza. *L'Illustrazione del Medico, gennaio 1954*, pp. 22-24.

Nicotra L. (2011). La legge della bellezza di Carmelo Ottaviano. *Notizie in...controluce, nn. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12*.

Nicotra L. (2016). Musica: ragione e sentimento. *ArteScienza, Anno III, N. 5*, pp. 91-138.

Nicotra L. (2017). *Osservazioni critiche sulla sezione aurea*. Convegno "Matematica, Natura, Architettura", 17 novembre 2017, Mathesis-Dipartimento di Architettura, Napoli.

Ottaviano C. (1970). *La legge della bellezza come legge universale della natura*. Pavia, Cedam.

Russo G. (1932). La musica nei colori. *Bollettino dell'Associazione Ottica Italiana, n.3, maggio 1932*.

Sadowski P. (1996). *The Knight on his quest: symbolic patterns of transition in Sir Gawain and the Green Knight*, University of Delaware Press., p. 124.