Zeno of Elea' Paradoxes
(The Dialectic of Stability and Motion from a Contemporary Mathematical View)

Salah Osman

(Menoufia University, Egypt)
salah.mohamed@art.menofia.edu.eg

مفارقات زينون (جدل الثبات والحركة من منظور رياضي معاصر)

دكتور/ صلاح عثمان

مجلة بحوث كلية الآداب، جامعة المنوفية

العدد الثامن والخمسون، يوليو ٢٠٠٤، ص ص ٩٩ – ١٣٩

مقدمة:

١ – الفكر مبدأ الوجود، واللغة وعاء الوعي ومحتواه؛ فنحن نفكر بالكلمات، وبتركيباتها نبني معرفتنا عن العالم. وكل نقص أو قصور في اللغة يقتطع بالضرورة جزءًا من وضوح الوعي ودلالته، كما أن أي غموض يعتري الوعي هو بطبيعته غموضٌ في اللغة وباللغة. لكن ما دامت تصوراتنا عن العالم تُصاغ بالبداهة في لغة، وما دامت أية لغة إنسانية – طبيعية كانت أو اصطناعية – لم تبلغ بعد مرحلة الكمال المنطقي، بحيث تخلو من أية أوجه نقص أو قصور، فالنتيجة اللازمة عن ذلك هي غموض معرفتنا ذاتها، أو بالأحرى الطابع اللايقيني لها، وهو ما يمكن أن نسميه «وهم العالم الخارجي». لا أعني بالوهم أن معرفتنا بالعالم مجرد مجموعة من الأغاليط والأخطاء أو الأنماط الأسلوبية المجردة، وإلا ما أحرز الإنسان أي تقدم يُذكر في حواره الجدلي الدائم مع العالم، إنما أعني بالوهم أن كل معرفة يتم تحصيلها في أي فرع من فروع الفكر لا تخرج عن كونها ظنًا يحتمل الصواب ويحتمل الخطأ، وما كان منها صوابًا في أية لحظة تطورية هو بمنظور اللحظة التالية أقل صوابًا وأضيق نطاقًا في صدقه مما كنا نظن، أو فلنقل «وهمًا» نخلع عليه من اليقين المحتمل ما يُسوّغ لنا إصدار أحكامنا النسبية على حوادث العالم ووقائعه، بحيث تبدو معرفتنا في النهاية وكأنها بناية ضخمة من غُرف الانتظار اللغوية التي تقترب بنا من الحقيقة لحظة بعد أخرى. ومع ذلك، إذا كان فهم بنية اللغة يتبعه بالضرورة فهم تقريبي لبنية الواقع، بل وإذا كانت فكرة وجود العالم ذاته – مصدر مشكلاتنا الفلسفية – لا معنى لها إلا في إطار نسقٍ من التصورات التي تُصاغ بالضرورة في لغة، ومن ثم يُصبح العالم كيانًا كوّنته أساليبنا اللغوية في وصفه، فإن ما

يواجهنا دومًا هو السؤال الكانطي المُعضل: إذا كانت اللغة ليست مرآة عاكسة للواقع الفعلي – أو للشيء في ذاته – وإنما للواقع كما تدركه الذات وتؤسلبه، ألا يعني ذلك أن وجودنا ذاته ووجود العالم مجرد فكرة تقطع الصلة بين العوالم الممكنة والعالم الفعلي؟

إنه السؤال الذي شغل – وما زال يشغل – الفكر الفلسفي والعلمي عبر مراحل وأشكال تطوره المختلفة، وفي معيته التحم المنطق بالرياضيات ليشاركا بقوة في الحوار الجدلي الدائم بين العقل والواقع، لتتجلى مفاهيم كالمفارقة والمغالطة والوهم والحقيقة.

[١ – ١] الثبات المطلق .. السكون الدائم .. الملاء الكامل .. الواحد اللامنقسم .. الكل اللامتغير .. الموجود الحامل في طياته لآفاق الوجود .. العدم الممتنع خلف جنبات الفكر .. والصمت السرمدي لكونٍ توحي مظاهره زيفًا بالحركة والتغير، ... إلخ.

كلمات تردد صداها في أنحاء اليونان القديمة، فكانت إيذانًا بالبدء في حوار جدلي صاخب لم نسمع فيه كلمة أخيرة، ولا حجة فاصلة، حتى يومنا هذا. ولمن الكلمات؟ لفيلسوف إيليا الكبير «بارمنيدس» Parmenides (~ ٥٤٤ – ~ ٤٥٠ ق. م) الذي نظمها في قصيدة شعرية من أروع قصائد الفكر الفلسفي. ولِمَ الجدل؟ لأن من تغنى بها من بعده هو تلميذه المبدع «زينون الإيلي» Zeno of Elea (~ ٤٩٠ – ~ ٤٣٠ ق. م)، الذي انبرى لتأييدها والدفاع عنها بمفارقات Paradoxes حيّرت الفكر العلمي والفلسفي لقرون طويلة.

كان «بارمنيدس» يعلم تمامًا أن مقولاته تجافي مسلمات الحس المشترك، وأن الشقاق – أو التغير – هو الشرط النهائي لكل شيء وفقًا لأحكام الحواس، لكنه اهتم بالبحث في المنطق المستتر للوجود، فاتجه بفكره إلى الجوهر الواحد الكامن خلف مظاهر التعدد والحركة والخلاء والزمان؛ إن الوجود والواحد متكافئان، والواحد ثابت ... ساكن في حدوده ... مقيمٌ كله في ذاته؛ فما من جديد يرد إليه من الخارج، لأنه لا شيء يولد من عدم، وما من شيء يخرج منه، لأن الخروج يعني العدم، والعدم ممتنع منطقيًا لأنه يعني اللاوجود. وإذا كان الوجود ملاءً كاملاً ... كلاً واحدًا لا منقسمًا، فلا معنى إذن للقول بحركات الأشياء في المكان والزمان؛ أليست الحركة تفترض الفراغ، وهو لا شيء وغير موجود؟ بل ألا يستلزم الزمان أن يأتي إلى الوجود ما هو غير موجود، وقد علمنا أن ما لا يوجد لا يمكن التفكير فيه لأنه بلا معنى؟[١].

إن حياتنا المفعمة بالصيرورة لا تعدو إذن أن تكون مجرد وهم، مجرد مظاهر خادعة مبعثها الحس القاصر عن بلوغ الحقيقة[٢]. فلِمَ لا تتراجع محاولات الفيثاغوريين للبحث عن

---

(١) علي سامي النشار وآخرون: ***ديموقريطس، فيلسوف الذرة وأثره في الفكر الفلسفي حتى عصورنا الحديثة*** (الهيئة المصرية العامة للكتاب، منطقة الإسكندرية، ١٩٧٠) ص ١٤٧ & ص ٣١٤.

(2) Russell, B., *Our Knowledge of the External World*, Routledge Inc., London & N.Y., 1993, p. 170.

الكثرة في العدد؟ ولِمَ لا يُوقف أنصار «هيــراقليطس» Heraclitus (~ ٥٧٦ – ~ ٤٨٠ ق. م) ترديد مقولاته عن مياه النهر المتدفقة، والتحولات الدائمة لموضوعات العالم، والأشياء التي تجد راحتها في تغيرها؟

[١ – ٢] – تلك هي المهمة التي تصدى لها «زينون» عن قدرة وكفاءة، فقد شارك أستاذه في اعتقاده بالوجود الواحد، وانتفاء الكثرة، وامتناع الحركة ...، بل لقد كان – إن صحّ التعبيــر – بارمنيديًا أكثر من «بارمنيدس» ذاته؛ تمثَّل أفكاره بقدر ما آمن بها، وسخَّر عبقريته الرياضــية لدحض آراء الخصوم بأدلة وبراهين لازالت شاهدًا على قوة المنحى التجريدي لمفكري اليونان القدامى.

ومع أن «زينون» لم يُضف شيئًا يذكر إلى محتــوى المــذهب البارمنيــدي ذاتــه، إلا أن إسهامه البارز قد تجلى فــي تطويــع مــا نســميه الآن «قيــاس الخُلــف» *Reductio ad absurdum* لإثبات كذب ما قد يناقض هذا المحتوى، وبطلان أية مقولة يدعم صاحبها فكــرة الكثرة العددية للأشياء، ومن ثم حركتها. وكأني ببارمنيدس – بعد أن أعيته انتقادات الخصــوم – يجلس في حضرة التلميذ ملتمسًا لديه أسلحة الذود عن مذهبه، ولو بمفارقات يعمــد العقــل المبدع لها إلى نثر بذور الشك والتناقض فيما يُسلم به جملة الناس من مبادئ واعتقادات!

قدّم «زينون» مفارقاته فـــي مجموعتين؛ الأولى ضد الكثرة Plurality، والثانيــة ضــد الحركة Motion، وإن كانت الثانية – وهي الأكثر أهمية، على الأقل لأغراض بحثنا الحــالي – لازمة بالضرورة عن الأولى؛ فإذا كان «زينون» ينفي الحركة، فقد فعل ذلــك لأنــه ينفــي الكثرة؛ فالحركة تفترض المكان والزمان، وهما امتدادان عنده، ولما كــان الامتــدادان غيــر مركبين – أو على حد تعبيره غير متعددين – فإن الحركة فيهما غير ممكنة(٣).

ولا شك أن هذه المفارقات قد تم تناولها – تحليلاً ونقدًا – في كثيــرٍ مــن أدبيــات العلــم والفلسفة قديمًا وحديثًا، حتى لقد ساد الظن بأن ملف المفارقات قد أُغلق تمامًا، لاسيما بعــد أن نجح الحساب التحليلي في التعامل منطقيًا مع صعوبات الأعداد اللامتناهيــة، لكــن الفــرض الأساسي لهذا البحث يزعم عكس ذلك؛ أعني أن الملف مازال مفتوحًا وبقوة – خصوصًا على المستوى الرياضي الفيزيائي – وأن إغلاقه النهائي قد لا يتم في المستقبل القريــب! وقبــل أن نبدأ في التحقق من صدق هذا الفرض، ينبغي أولاً أن نوضح بإيجاز معنى كلمــة «مفارقــة»، سواء كحدٍ لغوي، أو كمفهوم منطقي مميز.

[١ – ٣] – المفارقة (وفقًا للمدلول اللفظي لها في اليونانيــة *Paradoxon*، وفــي اللاتينيــة *Paradoxum*) هي ما يخالف الظن الشائع أو الاعتقاد الراسخ، وهو معنى تكتسبه الكلمة من

(٣) علي سامي النشار وآخرون: المرجع السابق، ص ٣١٨.

مقطعيها اليونانيين المؤلفين لها: *Para* بمعنى «وراء» أو «أبعد من»، و *Doxa* بمعنى «ظن» أو «اعتقاد»(٤). أما من الجهة المنطقية، فالمفارقة هي حُجة يتم بها إثبات صدق الحكم الواحد وكذبه في آنٍ معًا؛ أو هي استدلال عقلي يبدأ بمقدمات صادقة ومقبولة، وينتهي بنتيجة مناقضة تمامًا لما كنا قد اتخذناه نقطة بدء. وعلى هذا ينبغي التمييز منطقيًا بين مفهومي «المفارقة» و«المغالطة» Fallacy؛ فهذه الأخيرة هي استدلال فاسد يقوم على الخداع ويهدف إلى إرباك الخصم والتمويه عليه وتقديم الكاذب على أنه صادق، أي أنها تنطوي على خطأ متعمد، ولذا تُسمى أيضًا «سفسطة» Sophism(٥).

أما المفارقة فهي برهان منطقي لا ينطوي على مثل هذا الخطأ المتعمد، لكنه يعكس – وفقًا للبعض – تناقضًا معيناً من جملة التناقضات التي يحفل بها عالمنا، والتي لا سبيل إلى تجاوزها أو التغلب عليها. وإن كان البعض الآخر ينظر إليها كمغالطة تنطلق من جهل الخصم بالبنية الصورية (لغوية كانت أو منطقية – رياضية) للواقع الفعلي، ومن صعوبة التوفيق بين تصورات العقل الخالص، ومعطيات الواقع العيني، وهو ما يعني إمكانية التغلب عليها رويدًا رويدًا باكتساب المزيد من أنماط المعرفة، وتطوير أجهزة البحث والقياس، وبناء أنساق منطقية – رياضية تستطيع اللغة احتوائها، وتكون أكثر قربًا وملائمة لما تكشف عنه الحقائق التجريبية، سواء بطريق مباشر أو غير مباشر.

[١ – ٣] – والحق أن النظرة الثانية لمغزى المفارقة هي الأكثر قبولاً وشيوعًا بين فلاسفة العلم – لاسيما فيما يتعلق بمفارقات «زينون» – بل هي النظرة التي أكدها التطوير المتلاحق لأنساقنا الرياضية والفيزيائية خلال القرنين المنصرمين. ولكن: هل أمكن حقًا حل مفارقات «زينون» في الحركة حلاً رياضيًا ومنطقيًا كاملاً ومشبعًا؟ وإذا لم تكن الإجابة بالنفي، فبأي معنى نفهم الحركة الفيزيائية؛ أبالمعنى القائل بأنها كلٌ واحد لا منقسم؟ أم بمعنى كونها مجموعة لامتناهية العدد من الحركات بالغة الصغر التي تشغل عددًا لامتناهيًا من الفواصل المكانية – الزمانية؟ أليس من المستحيل منطقيًا أن يقطع الجسم المتحرك ذلك العدد اللامتناهي من الفواصل الزمكانية خلال فاصل زمكاني متناه مهما بلغ مقداره؟ وهل نجحت الرياضيات الحديثة في تجاوز معضلة السرعة اللحظية والسكون اللحظي للجسم المتحرك؟ وأخيرًا، هل بإمكاننا وضع وصف قبلي لطبيعة المكان والزمان – كمؤلفين من وحدات ذرية منفصلة أو متصلة – دون أن تبرز أمامنا مفارقات منطقية كتلك التي واجهنا بها «زينون»؟

---

(4) Pickett, J.P. (ed.), *The American Heritage Dictionary of the English Language*, Fourth edition, Houghton Mifflin Co., Boston, 2003, item 'Paradox'.

(٥) ألكسندرا غيتمانوفا: ***علم المنطق*** (لم يرد اسم المترجم، دار التقدم، موسكو، ١٩٨٩) ص ٢٩٧. وأنظر أيضًا: مجمع اللغة العربية: ***المعجم الوجيز*** (تصدير إبراهيم بيومي مدكور، الهيئة العامة لشئون المطابع الأميرية، القاهرة، ١٩٨٣) مادة «**سفسطة**»، ص ٩٧.

هيا إذن نتابع الحوار الجدلي بين مقولتي الثبات والحركة، ولنبدأ عرضنا بالعودة إلى أثينا القديمة، حين وقف «زينون» – ربما عام ٤٦٤ ق. م – يجادل عن أستاذه بمفارقاته.

أولاً: مفارقات الحركة:

٢ – تُعد مؤلفات «أرسطو» Aristotle (~ ٣٨٤ – ~ ٣٢٢ ق.م) هي المصدر الوحيد لمعرفتنا بمفارقات الحركة، أما مخطوطات «زينون» الأصلية فقد فُقدت تمامًا. ومنذ زمن «أرسطو» وحتى يومنا الحالي نوقشت المفارقات – وما زالت تُناقش – من قبل العديد من الفلاسفة والعلماء، لكن الهدف الأساسي لمعظم هؤلاء – بما في ذلك «أرسطو» ذاته – لم يكن هو وضع المفارقات في إطارها الخاص وتبيان مغزاها الرياضي – المنطقي، بل كان بالأحرى هو محاولة نقضها بطريقة أو بأخرى. ولذا لن نلتزم في عرضنا للمفارقات بالنص الأرسطي، وإنما نركز على الجوهر الرياضي الذي من المحتمل أن يكون «زينون» قد أولاه عناية خاصة.

وعلى العموم لدينا أربع مفارقات لتفنيد القول بالحركة؛ الأولى والثانية منها تفترضان إمكانية الانقسام اللامتناهي لأي امتداد مكاني أو زماني، أما الثالثة والرابعة فتفترضان أن المكان والزمان – كامتدادين – مؤلفان من عناصر لامنقسمة، أي أن القسمة تنتهي بنقاط المكان وآنات (أو لحظات) الزمان. وعلى هذا تؤلف المفارقات مذهبًا متناسقًا يُغلق كافة المنافذ أمام أي افتراض آخر لطبيعة المكان والزمان، وهما الخلفية التي تجري عليها بالضرورة عملية الحركة(٦).

أ –أخيل والسلحفاة Achilles and the Tortoise:

٣ – تخيل أن «أخيل» – وهو أسرع عدائي اليونان القديمة – سوف يجري متسابقًا مع سلحفاة. ولكي ننصف السلحفاة نفترض أن نقطة البداية لانطلاقها تتقدم على نقطة البداية لأخيل بمسافة ما (كما في الشكل ١). كما نفترض أيضًا أنهما يبدآن السباق في اللحظة ذاتها، وأن الفواصل التي يعبرانها متطابقة، بمعنى أن الفاصل المكاني الذي تعبره السلحفاة هو ذاته الذي سيعبره «أخيل».

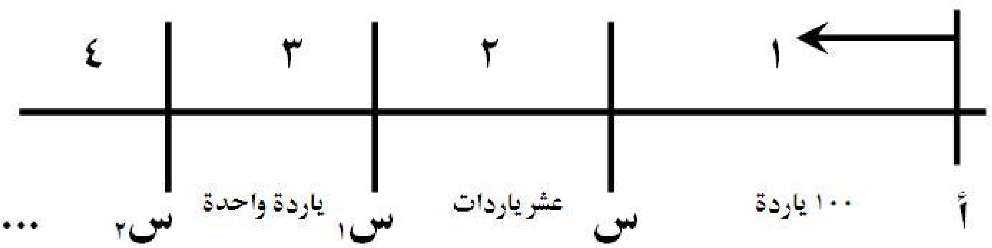
والآن تأمل المشهد: هل يستطيع «أخيل» أن يلحق بالسلحفاة ثم يتخطاها لفارق السرعة الكبير بينهما؟

---

(٦) اعتمدنا في صياغتنا للمفارقات وتوضيحها رياضيًا على المراجع التالية:

- Salmon, W.C. (ed.), *Zeno's Paradoxes*, Bobbs-Merrill, Indianpolis, 1970, pp. 8 – 12.
- Vlastos, G., 'Zeno of Elea', in *Encyclopedia of Philosophy*, Ed. By Paul Edwards, Macmillan publishing Co., Inc. the Free Press, N.Y., 1967, Reprinted 1972, Vol. 8, pp. 369 – 379 .
- Russell, B., *Our Knowledge of the External World*, Op. Cit, pp. 176 – 183.

لاشك أن الإجابة بسيطة من وجهة نظر الحس المشترك؛ فأخيل يبدو قــادرًا علــى ذلــك بالفعل، لأن من بديهيات الحركة – إن كان ثمة حركة – أن الأسرع يتجاوز الأبطأ مهما كــان الأخير متقدمًا عليه في الموضع المكاني – الزماني (لاحظ أن حلبة السباق مفتوحة دون هدفٍ محدد ينبغي الوصول إليها).



(الشكل١: حيث «أ» هي نقطة البداية لأخيل، «س» هي نقطة البداية للسلحفاة)

لكن حجة «زينون» تؤكد العكس حسابيًا؛ فلكي يلحق «أخيل» بالسلحفاة ، فإن عليــه أولاً أن يقطع المسافة من نقطة بدايته (أ) إلى نقطة البداية الأصلية للسلحفاة (**س**)، وبينما يفعل ذلك تكون السلحفاة قد تحركت قُدمًا إلى (**س١**). والآن يجب على «أخيل» أن يصل إلــى النقطــة (**س١**)، وبينما يقطع هذه المسافة الجديدة تكون السلحفاة قد تقدمت إلى نقطة أبعد (**س٢**). ومرة أخرى، يجب على «أخيل» أن يصل إلى الموضع الجديد للسلحفاة، وهكذا إلى مالا نهايــة؛ إن «أخيل» بإمكانه أن يُضيق الفجوة بينه وبين السلحفاة، لكنه لا يستطيع أبدًا أن يتجاوزها!.

بعبارة أخرى، لنفرض أن السلحفاة تتقدم على «أخيل» لحظة البدء بمسافة مقــدارها ١٠٠ ياردة، أي أن (**أ س** = ١٠٠ ياردة)، وأنه سوف ينطلق بسرعة عشر ياردات في الثانية، فــي حين تنطلق السلحفاة بسرعة ياردة واحدة في الثانية. وفقًا لهذه القيم، سوف يصل «أخيل» إلى نقطة البداية الأصلية للسلحفاة بعد عشر ثواني، وفي خلال تلك المدة تكون السلحفاة قد تحركت عشر ياردات إلى الأمام لتصل إلى النقطة (**س١**).

خذ إذن المقطع الثاني من الحلبة (**س س١**): إن السلحفاة تتقدم على «أخيل» بمقدار عشــر ياردات، وفي الوقت الذي يقطع فيه «أخيل» تلك المسافة ، تكون السلحفاة قد تحركــت يــاردة واحدة إلى النقطة (**س٢**).

دعنا نضع أرقامًا لمقاطع الحلبة، ولنرمز لتلك الأرقام بــالحرف «**ن**» (حيــث «**ن**» عــدد صحيح موجب أو سالب). حينئذ: (**ن** = ١) للمقطع الأول، (**ن** = ٢) للمقطع الثاني، وبــالطبع هناك المقطع الثالث، والمقطع الرابع، ... إلخ. وكما رأينا، فإن «أخيل» يجــري ١٠٠ يــاردة في المقطع الأول، وعشر ياردات في المقطع الثاني، وياردة واحدة في المقطع الثالث، وهكذا.

هذا التتابع يمكن التعبير عنه بشكل أس رياضي كما يلي:

$١٠^{٢}$، $١٠^{١}$، $١٠^{صفر}$، ...

والعلاقة بين المسافة ورقم المقطع تبدو أكثر وضوحًا إذا عبرنا عن المتتابعة على النحو التالي:

$١٠^{(٣-١)}$، $١٠^{(٣-٢)}$، $١٠^{(٣-٣)}$، ...

أي أن مسافة الجري التي يقطعها «أخيل» في كل مقطع تكون بصفة عامة مساوية للمقدار $١٠^{(٣-ن)}$.

من جهة أخرى، تنطلق السلحفاة بسرعة مقداره ١٠/١ من سرعة «أخيل»؛ ففي المقطع الأول لها (**س س$_{١}$**) تنجز عشر ياردات في عشر ثواني، وفي المقطع الثاني (**س$_{١}$ س$_{٢}$**) تنجز ياردة واحدة في ثانية واحدة، وفي المقطع الثالث (**س$_{٢}$ س$_{٣}$**) تنجز ٠,١ ياردة في ٠,١ ثانية، ... إلخ. ومن ثم يُصبح التتابع المناظر لها:

$١٠^{(٢-١)}$، $١٠^{(٢-٢)}$، $١٠^{(٢-٣)}$، ...

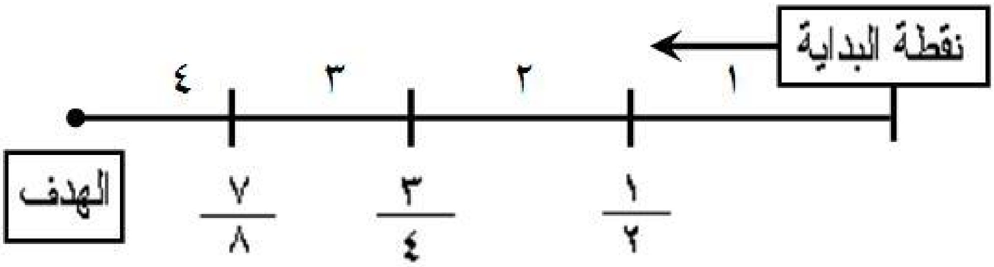
أي أن مسافة الجري التي تقطعها في كل مقطع تساوي المقدار $١٠^{(٢-ن)}$.

وعلى هذا النحو نستطيع تقدير قيمة المسافة بين «أخيل» والسلحفاة بعد كل مقطع؛ فبعد المقطع الأول تكون متقدمة بعشر ياردات، وبعد المقطع الثاني تكون متقدمة بياردة واحدة، وهلم جرا. وكل حدّ في التتابع $١٠^{١}$، $١٠^{صفر}$، $١٠^{-١}$، ... يمكن حسابه باستخدام التعبير الرياضي $١٠^{(٢-ن)}$.

إن السلحفاة إذن تتقدم على «أخيل» في كل مرة بعددٍ ما، ومن الواضح تمامًا أن هذا العدد هو عدد صحيح موجب أيًا كانت قيمة «**ن**»، ولأن متسلسلة الأعداد الصحيحة لا نهاية لها، فإن «أخيل» لن يلحق بالسلحفاة على الإطلاق، الأمر الذي ينفي الحركة لانتفاء أبرز بديهياتها.

ب -القسمة الثنائية The Dichotomy:

٤ – هذه المفارقة تأتي في شكلين؛ الأول تقدمي Progressive، والثاني تراجعي Regressive. ووفقًا للشكل الأول، فإن «أخيل» لا يمكنه الوصول إلى نهاية أية حلبة – مع السلحفاة أو غيرها – بل لا يستطيع أن يصل حتى إلى نقطة البداية الأصلية للسلحفاة في المفارقة السابقة؛ فقبل أن يقطع «أخيل» – أو عدّاء آخر – حلبة السباق ذات الهدف المحدد (الشكل ٢)، عليه أن يقطع النصف الأول منها، ومن ثم يجب أن يقطع النصف الأول من المسافة المتبقية، وهلم جرا.



(الشكل ٢)

بعبارة أخرى، يجب على العدّاء أن يجري أولاً نصف الواحد، ثم ثلاثة أرباع الواحد، ثم ٨/٧ من الواحد، ... ، وهكذا؛ الأمر الذي يعني أنه يظل دائمًا في موضع ما أدنى من هدفه، فلا يتمكن من بلوغه أبدًا!

وقد يتضح هذا الشكل من المفارقة رياضيًا بافتراض أن المسافة الكلية التي يجب أن يقطعها العدّاء هي وحدةٌ حسابية (ولتكن ميلاً واحدًا على سبيل المثال)؛ فعندما يصل العدّاء إلى نقطة المنتصف، يكون قد قطع نصف الميل، ويتبقى أمامه النصف الباقي. فإذا ما وصل إلى نصف النصف الباقي، تصبح مسافته المقطوعة هي ٢/١ + ٢/١ النصف الباقي، أو:٢/١+ (٢/١ × ٢/١) أما المسافة الباقية فتصبح ٢/١ النصف الباقي، أو:(٢/١ × ٢/١). والجدول التالي يوضح مدى تقدمه بعد كل مقطع في الحلبة.

المقطع	المسافة المقطوعة	المسافة الباقية
١	٢/١	٢/١
٢	٢/١ + (٢/١ × ٢/١)	٢/١ × ٢/١
٣	٢/١ + (٢/١ × ٢/١) + (٢/١ × ٢/١ × ٢/١)	٢/١ × ٢/١ × ٢/١
٤	٢/١ + (٢/١ ×٢/١) + (٢/١ ×٢/١× ٢/١) + (٢/١ × ٢/١ × ٢/١ × ٢/١)	٢/١ × ٢/١ × ٢/١ × ٢/١

(الشكل ٣)

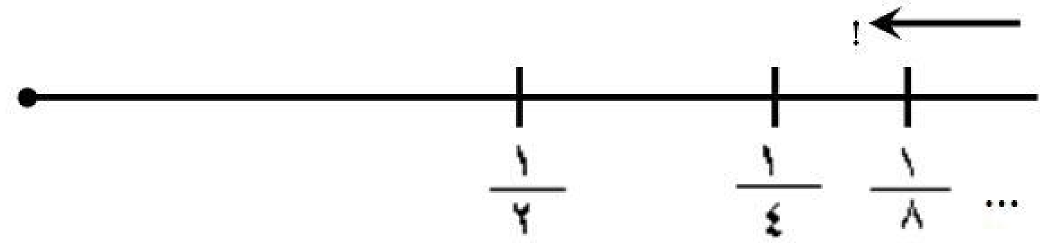
وهكذا، فالمسافة المقطوعة بكل مقطع بعد **(ن)** من مقاطع الحلبة هي:

$(٢/١)^{١}$، $(٢/١)^{٢}$، $(٢/١)^{٣}$، $(٢/١)^{٤}$، ... ، $(٢/١)^{ن}$

أما المسافة الباقية فهي $(1/2)^{ن}$. وحيث أن **(ن)** هو عدد صحيح، وليس هنـــاك نهايـــة لمتسلسلة الأعداد الصحيحة، فسوف يبقى العدّاء دائمًا متأخرًا عن هدفه بمسافة ما، مهما كانت متناهية في الصغر!.

هذا هو الشكل التقدمي للمفارقة، وهو لا يختلف كثيرًا عن الشكل الذي قُدمت بـــه مفارقـــة أخيل والسلحفاة، اللهم إلا في ثبات الهدف الذي ينبغي الوصول إليه.

أما الشكل التراجعي للقسمة الثنائية فمؤداه أن العدّاء لا يستطيـــع حتى أن ينطلق من نقطة البداية (كما في الشكل ٤).



(الشكل ٤)

فقبل أن يتمكن العدَّاء من قطع المسافة بأكملها، عليه أن يقطع نصفها أولاً، لكـــن قبـــل أن يتمكن من قطع النصف الأول عليه أن يقطع نصف هذا النصف، أي الربـــع الأول، وقبـــل أن يتمكن من قطع الربع الأول عليه أن يقطع الثمن الأول، وهلم جرا.

إن العدَّاء يجب أن يجري بالفعل عددًا لا متناهيًا من النقاط كي يقطع أيـــة مســـافة، مهمـــا كانت قصيرة، ولأن متتابعة النقاط التي يجب أن يقطعها لها الشكل التراجعي:

١/٢، ١/٤، ١/٨، ١/١٦، ...

ولأن هذه المتتابعة ليس بها عضو أول، فلن تكون إذن للعدَّاء نقطة بداية يمكنه الانطـــلاق منها!.

جـ – السهم The Arrow:

٥ – في هذه المفارقة يفترض «زينون» مقدمًا أن المكان والزمان غير منقســـمين إلـــى مـــالا نهاية، بمعنى أنهما يتألفان من نقاط وآنات. فلو تخيلنا مثلاً سهمًا منطلقًا خـــلال مســـافة مـــا، فسوف نجد أنه يشغل في كل «آنٍ» زماني موضعًا مكانيًا مساويًا لنفسه (أي أنه يمـــلأ «الآن» الزماني والموضع المكاني)، وبالتالي تمتنع حركة السهم، لأن ما هو في مكان مساوٍ لنفسه هو في سكون دائمًا.

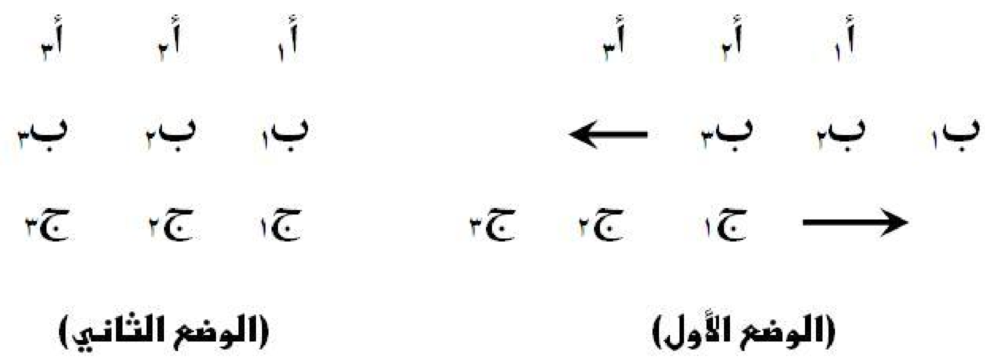
وتفصيل ذلك أن الحركة تستلزم أن تكون للمسافة أجزاء، كما تستلزم «آنًا» زمانيًا منقسمًا بالتعريف إلى وحدات أصغر فأصغر؛ فإذا تحرك السهم خلال «الآن»، فإنه يجب أن يكون في موضع معين خلال جزء معين من «الآن»، وفي موضع مختلف خلال جزء آخر من «الآن»، ... إلخ. ولما كان «الآن» الزماني – وفقًا لفرضيتنا الأولى – غير منقسم إلى أجزاء، فحركة السهم إذن ممتنعة، وإلا وقعنا في براثن المفارقتين الأولى والثانية.

وهكذا، فلو افترضنا – فيما يشير «رسل» B. Russell (١٨٧٢ – ١٩٧٠)– أن فترة انطلاق السهم تتألف من ألف «آن» زماني، فمن البديهي أنه في كل «آن» منها يوجد حيثما هو – أي في موضع زمكاني ممتلئ به – مع أنه في «الآن» التالي يشغل موضعًا آخر غيره. إنه لا يتحرك على الإطلاق، لكن موضعه يتغير بطريقة عجيبة بحيث يوجد بين «الآنات»، وهذا يعني أن حركته – إن كانت تتم بالفعل – لا تحدث في تلك «الآنات» المفترضة![٧].

د – الملعب The stadium:

٦ – تُعرف هذه المفارقة أيضًا بحجة القوالب المتحركة The moving blocks، وسبب التسمية هو المثال العام الذي يتم من خلاله شرح المفارقة، فليس شرطًا أن يكون الملعب ساحتها.

خذ ثلاثة صفوف متوازية من الموضوعات: **أ** & **ب** & **جـ**؛ بحيث يكون ترتيبها كما في الوضع الأول من الشكل ٥؛ والآن تخيل أن الصف الأول (**أ**) يبقى ساكنًا بلا حراك، في حين يتحرك الصفان الآخران في اتجاهين متضادين – وبسرعة واحدة – حتى تتراص الصفوف الثلاثة كما في الوضع الثاني من الشكل ٥.



(الشكل ٥)

---

(7) Russell, B., *Our Knowledge of the External World*, Op. Cit, p. 179.

هذا الانتقال الحركي من الوضع الأول إلى الوضع الثاني يمثل لُب المفارقة؛ فمما لا شك فيه أن (**ب$_{٣}$**) قد قطعت المسافة من (أ$_{٢}$) إلى (أ$_{٣}$) في زمن ما، لكنها في نفس هذا الزمن تكون قد قطعت المسافة المضاعفة من (ج$_{١}$) إلى (ج$_{٣}$)؛ وكذلك الحال بالنسبة لـ (ج$_{١}$)، حيث تقطع المسافة من (أ$_{٢}$) إلى (أ$_{١}$) في نفس الزمن الذي تقطع فيه ضعف تلك المسافة، أي من (**ب$_{٣}$**) إلى (**ب$_{١}$**). ولما كانت المسافة بين وحدات الصفوف الثلاثة متساوية، وحيث أن الصفين ب، ج يتحركان بسرعة واحدة، فإن ضعف الزمن يمكن أن يكون مساويًا لنصفه!.

ومن الواضح أن «زينون» يُغالط هنا بأن المتحرك على متحرك كالمتحرك على ساكن، ربما لأنه لم يكن لديه تقديرٌ للسرعة النسبية Relative speed للأشياء، مفترضًا أن سرعة (**ب**) بالنسبة إلى (**أ**) هي ذاتها كسرعتها بالنسبة إلى (**ج**). فإذا كان ذلك هو الأساس الوحيد للمفارقة، فلن يكون لدينا سبب للاهتمام بها، اللهم إلا كواقعة تاريخية.

لكن هناك تفسيرًا آخر للمفارقة يمنحها وزنًا كبيرًا:

لنفرض أن المكان والزمان مؤلفان من ذرات مكانية وأخرى زمانية ذات حجم غير صفري Non - zero size، بدلاً من كونهما مؤلفين من نقاط وآنات ذات حجم صفري. حينئذ لا بد وأن يشغل الجسم المتحرك مواضع منفصلة ومختلفة في آنات منفصلة ومختلفة.

والآن، خذ الوضع الثاني من الشكل **٥**، ولنعتبر أنه الوضع الأول، وأن حركة الصفين (**ب**) و(**ج**) سوف تجري في اتجاه عكسي، بحيث يتحرك (**ب**) جهة اليمين، و(**ج**) جهة اليسار بمعدل موضع مكاني واحد لكل «آن» (الشكل ٦).

(الشكل ٦)

لقد كانت (ج$_{١}$) قبل انطلاق الحركة على يمين (**ب$_{٢}$**)، لكنها الآن على يسارها، فمتى مرّ الاثنان ببعضهما البعض؟ الحق أننا إذا دققنا النظر فلن نجد «آنا» زمانيًا يصطفان فيه فوق بعضهما البعض، وإلا كانت هناك «آنات» أخرى جزئية بين كل «آنين» منفصلين، وطالما لم

نفترض ذلك، فليس هناك إذن «آنٌ» كي يمران فيه ببعضهما البعض، وهو ما لا يمكن أن يحدث أبدًا![٨].

ثانيًا: بعض ردود الأفعال الفلسفية (إطلالة تاريخية):

٧ – أثارت مفارقات الحركة ردود أفعال واسعة ومتباينة من قِبل العديد من الفلاسفة قديمًا وحديثًا، أولئك الذين لم يستطيعوا مقاومة الرغبة في تأملها ومحاولة نقضها انطلاقًا من توجهاتهم المذهبية المختلفة. وعلى الرغم من أن ردود الأفعال الفلسفية – رغم وجاهتها – لم تسهم في وضع حل رياضي مقبول يخرج بنا من متاهة المفارقات، وأن قرونًا طويلة قد مرّت قبل أن تلوح في الأفق بوادر هذا الحل، إلا أننا يجب ألا ننسى أن هذه المفارقات كانت في الأصل فلسفية المنشأ والهدف، وإن ارتدت ثوبًا رياضيًا يعلوه وشاحٌ فيزيائي قشيب، وعلى هذا فلن تكتمل عناصر المشهد الجدلي بين الثبات والحركة إلا بالتطرق إلى أبرز الاستجابات الفلسفية التي سبقت إيقاظ الرياضيات من غفوتها العميقة .

أ – ديوجينس:

٨ – عبّر الفيلسوف اليوناني «ديوجينس الكلبي*» Diogenes the Cynic (~ ٤١٢ – ~ ٣٢٣ ق. م) برد فعله عن وجهة نظر الإنسان العادي أو رجل الشارع تجاه المفارقات؛ فما أن استمع إليها حتى هبَّ واقفًا دون أن ينبس ببنت شفة، وراح يمشي جيئة وذهابًا في أرض الغرفة يريد هدم الحجج بالحركة المحسوسة[٩]. لكن هذه الاستجابة لم تكن لتؤثر على

---

(8) Salmon, W., 'A Contemporary Look at Zeno's Paradoxes', in Peter Van Inwagen & Deam W. Zimmerman (eds.), *Metaphysics: The Big Questions*, Blackwell publishers Inc., Malden, Massachusetts, 1998, p. 132.

* فيلسوف يوناني عاصر «أرسطو»، سُمَّي «الكلبي» لأنه كان أشهر الفلاسفة الكلبيين وشيخهم، وقيل – بخلاف ذلك – لأنه كان كثير اللجوء إلى ضرب الأمثلة بالحيوانات وأخصّهم الكلب، كنموذج للتحرر من الترف والعبودية للعرف وللعيش وفق الطبيعة. أما المدرسة الكلبية Cynism فقد سُميت بهذا الاسم نسبة إلى المكان الذي كانت تمارس فيه نشاطها التعليمي: «كلب» *Kúωv*. وتقوم تعاليمها على احتقار المواضعات الاجتماعية والزهد في اللذات، وعلى التزام قانون الطبيعة، والقول بأن الفضيلة هي الخير الوحيد. وقد يُطلق «الكلبي» على كل مُنكر للمبادئ المقررة. أنظر:

– مجمع اللغة العربية: ***المعجم الفلسفي***، مادة «كلبية»، ص ص ١٥٣ – ١٥٤.

– عبد المنعم الحفني: ***الموسوعة الفلسفية*** (دار بن زيدون & مكتبة مدبولي، بيروت، القاهرة، بدون تاريخ) مادة «ديوجينس الكلبي»، ص ١٩٧.

(9) Hegel, G. W. F., *Lectures on the History of Philosophy*, Trans. by E. S. Haldane & F. H.Simson, Routledge & Kegan Paul, LTD., second Impression, London, 1955, Vol. 1, p. 268. =

«زينون» أو تُحرك له ساكنًا، فلقد صادر منذ البداية على أن مظاهر الأشياء لا تعدو أن تكون مجرد وهم، وإذا كانت أعيننا توحي لنا بأن «ديوجينس» – أو أي شيء آخر – يمشي أو يتحرك، فأعيننا إذن تخدعنا.

بعبارة أخرى، لقد قدم «زينون» برهانًا عقليًا منطقيًا على امتناع الحركة، فإذا ما رفض أحدنا ذلك البرهان، واعتقد بقيام الحركة في الواقع الفعلي، فعليه أن يقارع الحجة بحجة من طبيعتها؛ أعني أن يقدم برهانًا منطقيًا مضادًا يؤكد الحركة والكثرة ، ويُنفي الثبات والوحدة، وهو ما لم يفعله «ديوجينس» أو حتى يتنبه إليه!.

ب – أرسطو:

٩ – وما بين الفعل وردّ الفعل تصطدم عبقرية «أرسطو» بعبقرية «زينون» في ساحة الحوار الجدلي اليوناني، ليتردد صدى التصادم وصولاً إلى المناقشات ذات الطابع الرياضي – الفيزيائي في عالمنا المعاصر؛ ففي رد فعله حيال المفارقات نجد «أرسطو» وقد لجأ إلى نظريته التمييزية المعروفة بين ما هو بالقوة Potentially وما هو بالفعل، مشيرًا إلى أن أي متصل Continuum– سواء أكان مكانًا أو زمانًا أو حركة – إنما يقبل الانقسام اللامتناهي بالقوة لا بالفعل، أي أن حركة المتحرك تتم حقًا، لأن التقسيم اللامتناهي لا يتم إلا في عقل المتخيل فحسب[١٠].

الحركة إذن واحدة ومتصلة[١١]، شأنها في ذلك شأن المسافة المكانية التي تقطعها، والفترة الزمنية التي تستغرقها، وما دام المتصل الواحد متجانسًا في ذاته، فمن الممكن قسمته بالقوة – أي رياضيًا أو عقليًا – إلى مالا نهاية، تمامًا كما افترض «زينون»، لكن هناك حدًا فاصلاً بين الإمكان الرياضي والواقع الفعلي، وتلك هي المشكلة التي أرّقت ولازالت تؤرق كافة منظري العلوم الطبيعية حتى يومنا الحالي؛ أعني مدى تطابق المتصلين الرياضي والفيزيائي. حقًا أن «أرسطو» لم يضع حلاً لمتاهات الأعداد اللامتناهية، لكنه لمس بإصبعه الجرح الذي تسعى الرياضيات التطبيقية إلى تضميده وتسكينه من حين إلى آخر.

جـ – إيمانويل كانط:

١٠ – ولم يكن فلاسفة العصر الحديث أقل حماسة من سابقيهم في البحث عن مخرج نوعي من مفارقات الحركة؛ فمن جانبه ذهب «كانط» E. Kant (١٧٢٤ – ١٨٠٤) إلى أن هذه

= نقلاً عن إمام عبد الفتاح إمام: ***المنهج الجدلي عند هيجل*** (طـ٢، دار المعارف، القاهرة، ١٩٨٥) ف ٣٤، ص ٥٦.

(١٠) أرسطو: ***الطبيعة*** (ترجمة إسحق بن حنين، تحقيق عبد الرحمن بدوي، طـ١، الدار القومية للطباعة والنشر، القاهرة، ١٩٦٥) جـ١، م٣، ٢٠٦ ب، ١٣، ص ٢٥٣.

(١١) المرجع ذاته، ٢٢٨ أ ٢٦ & ٢٢٨ ب، ص ص ٥٦٣ – ٥٦٤.

التناقضات التي استثمرها «زينون» في إنكاره للحركة إنما تنبع أصلاً من تصورنا المغلوط للمكان والزمان ككيانين واقعيين موضوعيين، في حين أنهما صورتان قبليتان مجردتان تنتظم عليهما شتى المعطيات الحسية التي ترد إلينا من الخارج؛ فليس لهما ذلك الوجود الواقعي الذي ننسبه إلى الأشياء، كما أنهما لا ينتميان إلى الأشياء في ذاتها، وإنما بالأحرى إلى طريقتنا في التفكير في الأشياء، أو فلنقل أن عقولنا هي التي تفرض المكان والزمان على الموضوعات المحسوسة، وليست الموضوعات هي التي تفرض المكان والزمان على عقولنا، وأي تفكير في اللاتناهي المكاني أو الزماني لابد وأن يوقعنا في التناقض، لأن تمثلاتنا التجريبية لا تقدم لنا سوى مقادير متناهية تتفق وقدرتنا على الإدراك الحسي![١٢].

د – ديفيد هيوم:

١١ – أما «ديفيد هيوم» D. Hume (١٧١١ – ١٧٧٦) فقد رفض – انطلاقًا من نزعته الحسية التجريبية – إمكانية التقسيم اللامتناهي للمكان والزمان، وأعلن أنهما مؤلفان من وحدات غير قابلة للانقسام Indivisible ذات مقدار؛ ففي معرض تحليله للعلاقة السببية Causality، يُنكر «هيوم» خاصية الاتصال Continuity بين الأسباب ونتائجها؛ فكل الحوادث – تبعًا لخبرتنا – تبدو مفكوكة ومنفصلة Separate، وإذا كان ثمة تتابع بين حادثتين، فليس معنى ذلك أن هناك صلة بينهما يمكن إدراكها بالحواس[١٣]. وكي لا يقع في فخ القول اللاعقلاني بالتأثير عن بُعد، يلجأ «هيوم» إلى مقولة «التجاور» Contiguity المكاني – الزماني بوصفها العلاقة الأساسية لانتقال التأثيرات السببية بين الأشياء[١٤].

على أن هذا التحليل في الحقيقة مردودٌ عليه من جهتين؛ فمن الجهة الأولى، من الصعب على العقل – إن لم يكن من المستحيل – تصور وحدات ذات مقدار دون أن تكون قابلة للانقسام، وهو ما لم يُقدم له «هيوم» تفسيرًا مشبعًا؛ ومن الجهة الثانية، إذا كان «هيوم» قد لجأ إلى مقولة «التجاور» تجنبًا للقول بالتأثير عن بُعد، فما من تفسير للتجاور في هذه الحالة سوى انتقال التأثيرات السببية بالملامسة، وهذه الأخيرة لا تعني في النهاية سوى القول بالاتصال، وهو ما يتناقض وقوله بعدم إمكانية الانقسام اللامتناهي للمكان والزمان.

هـ – هيجل:

١٢ – ووفقًا لمنهجه الجدلي، القائم على استنباط المعاني الأولية بالإثبات والنفي والجمع بينهما، ذهب «هيجل» G. W. F. Hegel (١٧٧٠ – ١٨٣١) إلى أن أي حل مشبع

---

(١٢) إمانويل كانط: ***مقدمة لكل ميتافيزيقا مقبلة يمكن أن تصير علمًا*** (ترجمة نازلي إسماعيل حسين، مراجعة عبد الرحمن بدوي، دار الكاتب العربي للطباعة والنشر، القاهرة، ١٩٦٨) ص ص ٧٨ – ٨٢.

(13) Carr, Brian, *Metaphysics: An Introduction*, Macmillan education Ltd., London, 1987, p. 79.

(14) Lucas, J. R., *A Treatise on Time and Space*, Methuen & Co., Ltd., London, 1973, pp. 193 – 194.

للمفارقات لابد وأن يشمل جانبي التناقض: الوحدة والكثرة؛ وما مفارقات «زينون» سوى أمثلة لخاصية التناقض الجوهري للعقل، بمعنى أن كل الأفكار، وكل العقول، تحوي تناقضات داخلية لا تلبث أن تتلاشى في وحدة أعلى، وهذا التناقض الجزئي لإمكانية انقسام الواحد إلى كثرة لا متناهية العدد، إنما يتلاشى في وحدة أعلى تمثلها مقولة «الكمّ» Quantity.

إن مفهوم الكمّ يحوي جانبين متضادين: الواحد والكثير، والكمّ يعني بدقة الكثير في واحد، أو الواحد في كثير: هو مركب يُثبت الوحدة وينفيها في آن واحد؛ ويبدو هذا المركب بنوع خاص في الكمّ المتصل الذي هو واحد بالفعل كثير بالقوة لقبوله القسمة باستمرار(١٥). وهكذا فالخط المستقيم مثلاً – منظورًا إليه ككمّ – هو في المحل الأول «واحد»: وحدة متصلة قابلة للانقسام؛ وهو في مقابل ذلك «كثير»: أجزاء ناجمة عن القسمة، وكل جزء من هذه الأجزاء يمكن النظر إليه مرة أخرى كواحد من جهة، وككثير من جهة أخرى، وهذه العملية التناوبية قد تمضي إلى الأبد. فإذا ما نظرنا إلى مفارقات «زينون» لوجدنا أنها نابعة من تأمل جانب واحد من جانبي التناقض، أعني ذلك التجريد الكاذب القائل بأن الواحد هو شيء ما له واقعه الخاص بمعزل عن الكثير، أو أن الكثير هو شيء ما له واقعه الخاص بمعزل عن الواحد، متناسين في النهاية أنهما «كلٌ» يمثل ماهية الموجود المفعم بصيرورة الحركة الجدلية بين التناهي واللاتناهي(١٦).

و – برجسون:

١٣ – في الفكر المعاصر، وفي الوقت الذي أمسكت فيه الرياضيات بالخيوط المبدئية لحل المفارقات، ظلت الفلسفة على عهدنا بها؛ وفية لطريقتها الخاصة في التفكير، باحثة في الأبعاد الأعمق للوجود والمعرفة. ومثالنا البارز على ذلك هو الفيلسوف الفرنسي «هنري برجسون» H. Bergson (١٨٥٩ – ١٩٤١)، الذي تبنى نزعة تطورية ميتافيزيقية ترفض الانتزاع اللحظي لمشاهد الحركة من صيرورتها المتدفقة؛ أعني تلك المناظر الفورية التي يلتقطها العقل العلمي للكل الحركي اللامنقسم، ثم يُعيد تركيبه زيفًا من نقاط توقف قد تكون لا متناهية العدد. إنه المنهج السينماتوغرافي في التفكير الذي اتبعه «زينون» ليخدعنا باستحالة الحركة، وهو أيضًا المنهج الذي يتبعه العلم بهدف دراسة الحركة وفهمها، ليجد نفسه في النهاية أمام سلسلة من السكونات المتتالية، فإذا ما سعى إلى تركيب الحركة بين كل سكونين وجد نفسه أمام

---

(١٥) يوسف كرم: ***تاريخ الفلسفة الحديثة*** (طـ٦، دار المعارف، القاهرة، ١٩٧٩) ص ٢٧٦.

(١٦) هربرت ماركيوز: ***نظرية الوجود عند هيجل*** (ترجمة وتقديم وتعليق إبراهيم فتحي، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، طـ٢، ١٩٩٠) ص ص ١١٧ وما بعدها.

سكون ثالث، وهكذا إلى مالا نهاية. حينئذ يشعر المرء أمام الحركة المتوسطة بخيبة رجاء الطفل الذي يرغب في سحق الدخان عندما يُقرّب إحدى يديه المفتوحتين من الأخرى![١٧].

إن حيلة «زينون» – وفقًا لبرجسون – إنما تنحصر في إمكان تطبيق الحركة على طول الخط الذي يقطعه الشيء المتحرك، ولما كان الخط منقسمًا، فالحركة أيضًا منقسمة، لكن هذا الإمكان سرعان ما يختفي حين يُسلم المرء – عن طريق الحدس – باتصال الحركة الواقعية، تلك الحركة التي يشعر بها كل فرد منا حين يرفع ذراعه أو يتقدم خطوة؛ ففي هذه الحالة يشعر جيدًا أن الخط الذي نقطعه بين توقفين يُرسم بجرة قلم واحدة غير قابلة للانقسام. وهكذا، فعندما يتبع «أخيل» السلحفاة، فمن الواجب أن تعالج كل خطوة من خطواته على أنها شيء غير قابل للانقسام، وكذلك الأمر بالنسبة لكل خطوة من خطوات السلحفاة، وبعد عدد من الخطوات سيخطو «أخيل» فوق السلحفاة، وليس هناك ما هو أكثر يسرًا من ذلك [١٨]. وبالمثل حين ينطلق السهم من النقطة **(أ)** ليسقط في النقطة **(ب)**، فإن حركته **(أ ب)** تشبه توتر القوس الذي يرميه في أنها حركة بسيطة وغير منقسمة؛ إن السهم ينشر حركته دفعة واحدة، تمامًا كالقنبلة التي تنفجر قبل أن تلمس الأرض فتحيط منطقة الانفجار بخطر شامل، فهي إذن وثبة واحدة ووحيدة لا تقبل تلك التقسيمات الفرعية التي نفرضها عليها بطريقة تعسفية[١٩].

ولو اتبعنا «زينون» – فيما يشير «برجسون» – فلن يكون هناك ما هو أكثر يُسرًا من مدّ مفارقات الحركة إلى الصيرورة التطورية الحيوية للإنسان؛ فالطفولة والمراهقة والنضج والشيخوخة ما هي إلا مجرد مناظر يلتقطها العقل من ضروب التوقف الممكنة التي نتخيلها من الخارج على طول تقدم متصل. وما لم نتوقف عن عاداتنا السينماتوغرافية في التفكير، فسوف تفر من بين أصابعنا حقيقة الانتقال الحركي غير المنظور من أية مرحلة منها إلى الأخرى[٢٠].

يُلقي «برجسون» إذن بتبعة المفارقات على المنهج العلمي المفتقر لحدس الديمومة الحقيقية التي تتبطن العالم، لكنه يعترف في الوقت ذاته بأن هذا المنهج هو المنهج العلمي الوحيد الذي جُبل عليه العقل العلمي[٢١]، ولذا ينتقده «رسل» مشيرًا إلى أن فكرته العامة عن كلمة «الاتصال»، والتي تحمل معنى «التدفق» أو «الفيضان»، هي فكرة مختلفة تمامًا عما يعرفه

---

(١٧) هنري برجسون: ***التطور الخالق*** (ترجمة محمد محمود قاسم ، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، ١٩٨٤) ص ٢٧٣.

(١٨) المرجع ذاته، ص ٢٧٥.

(١٩) المرجع ذاته، ص ٢٧٣.

(٢٠) المرجع ذاته، ص ٢٧٦ .

(٢١) المرجع ذاته، ص ٢٧١ & ص ٢٩٠ .

الرياضيون من أفكاره؛ فلو نظرنا مثلاً إلى متسلسلة الأعداد الحقيقة – كنموذج دقيق للاتصال الرياضي – لوجدنا أنها لا تسير من درجة لا نشعر بها إلى أخرى، فكل عدد فيها هو وحدة صلدة منفصلة، والمسافة بين أية وحدة والأخرى هي مسافة متناهية، مهما كانت تلك المسافة بالغة الصغر!. وعلى العكس من التصور الميتافيزيقي الذي اقترحه «برجسون»، يذهب «رسل» إلى أن بإمكان التصور الرياضي أن يقدم التخطيط المنطقي المجرد لما نتمكن به من إخضاع مادة الخبرة بإجراء مناسب(٢٢).

فلننظر إذن فيما أمكن للرياضيات تقديمه في هذا الصدد ، ولنستقرئ بتأنٍ خطوات ذلك التخطيط المنطقي الذي حدثنا عنه «رسل»، ومدى كفايته كحل لمفارقات الحركة.

ثالثًا: الرؤية الرياضية الحديثة والمعاصرة: حلول ومشكلات:

١٤ – بنظرة أفقية لمجرى التطور الرياضي منذ الفكر اليوناني وحتى أواخر العصر الحديث، يتضح لنا بجلاء أن مفارقات «زينون» كانت بمثابة الأزمة الباعثة لإعادة النظر في كثير من التصورات الرياضية المجردة التي استثمرها «زينون» ببراعة في بناء مفارقاته، والتي كانت تفتقر إلى الأساس المنطقي الواضح، لاسيما في مجال الحساب التحليلي للانهائي الصغر Infinitesimal calculus؛ كتصورات الدوال الرياضية Mathematical functions، والنهايات Limits، والتقارب Convergency، والمتتابعات Sequences، والمتسلسلات Series، والمشتقات Derivatives، والتكاملات Integrals، ... إلخ. وعلى الرغم مما شهده الحساب التحليلي من تطورات خلال القرن السابع عشر على أيدي كل من «نيوتن» Newton (١٦٤٢ – ١٧٢٧) و«ليبنتز» Liebniz (١٦٤٦ – ١٧١٦)(٢٣)، إلا أن أسسه ظلت محاصرة بصعوبات منطقية كبيرة حتى النصف الأول من القرن التاسع عشر، حين تمكن الرياضي الفرنسي «أوغسطين كوشي» A. Cauchy (١٧٨٩ – ١٨٥٧) من وضع التخطيط المنطقي الملائم والمشبع لهذه التصورات وغيرها، وبعد أن قدّم خلفاؤه «ديدكند» J. W. R. Dedekind (١٨٣١ – ١٩١٦) و«فايرشتراس» K. Weierstrass (١٨١٥– ١٨٩٧) تحليلاً مشبعًا لنسق العدد الحقيقي Real number وارتباطاته بالحساب التحليلي(٢٤).

---

(٢٢) برتراند رسل: ***مقدمة للفلسفة الرياضية*** (ترجمة محمد مرسي أحمد، مراجعة أحمد فؤاد الأهواني، مؤسسة سجل العرب، القاهرة، ١٩٨٠) ص ص ١١٦ – ١١٧.

(٢٣) أنظر كتابنا: ***الاتصال واللاتناهي بين العلم والفلسفة*** (منشأة المعارف، الإسكندرية، ١٩٩٨) ص ص ٥٦–٦٧.

(٢٤) لمزيد من التفاصيل حول هذه التطورات الرياضية وغيرها، أنظر:

Boyer, C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, N.Y., 1959.

لقد أتاحت هذه التطورات لكثير من الرياضيين أن يقفوا أمام «زينون» وجهًا لوجه في ساحة الحوار الجدلي، لكنها في الوقت ذاته خلّفت مشكلات لا تقل أهمية عن حل مفارقات الحركة، وهو ما نعرض له بالتفصيل في الصفحات التالية.

أ – تقارب المتسلسلات اللامتناهية:

١٥ – اعتمد «زينون» في بنائه للمفارقتين الأولى والثانية على حقيقة أن العدَّاء – أي عدَّاء – لا يستطيع أن يقطع عددًا لا متناهيًا من الفواصل المكانية ذات القيم غير الصفرية، والتي تستلزم بالمثل عددًا لا متناهيًا من الفواصل الزمانية غير الصفرية. وتكمن الصعوبة المنطقية هنا في عدم وجود «نهاية» لمتسلسلة الفواصل الكسرية الناجمة عن القسمة المستمرة للامتداد الزمكاني بين الصفر والواحد؛ حقًا أن قيم هذه الفواصل تقترب – بدرجات عددية لا متناهية في الصغر – إما من الواحد الصحيح {كما في مفارقة «أخيل» (ف ٣)، وفي الشكل التقدمي لمفارقة القسمة الثنائية (ف ٤)}، أو من الصفر {كما في الشكل التراجعي لمفارقة القسمة الثنائية (ف ٤)}، إلا أنها لا تبلغ أبدًا تلك القيمة الحدية التي تتوقف عندها عملية القسمة.

[١٥ – ١] – وانطلاقًا من هذه الحقيقة، كان التصور الأول الذي واجهه «كوشي» – ونجح في علاجه تجريديًا – هو تصور «النهاية» لأي تتابع لا متناه Infinite sequence؛ وهذا الأخير يمكن تعريفه ببساطة بأنه مجموعة مُرتبة من الحدود Ordered set of terms

| من | تتناظر بعلاقة واحد بواحد مع مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة؛ بمعنى أن كل حد في التتابع يُناظر عددًا صحيحًا موجبًا (نرمز له بالحرف «**ن**») بحيث نقول أنهما من رُتبة واحدة[٢٥].

والتتابع نقول أنه «متقارب» Convergent إذا كانت له نهاية. وحين نصف تتابعًا ما بأن له نهاية فإنما نعني أن هناك عددًا ما، وليكن **ع** (النهاية) بحيث أن حدود التتابع تقترب أكثر فأكثر من ذلك العدد حين نمضي عبر الحدود المتتابعة .

وعلى نحوٍ أكثر دقة، بالنسبة لأي عدد ε أكبر من الصفر، هناك عدد صحيح موجب **ص**، بحيث أنه بالنسبة لكل حدّ من، به **ن** > **ص**، يكون الفرق بين من، **ع** أقل من ε، ففي التتابع:

١/٢، ١/٤، ١/٨، ....، ١/٢ن

نجد أن النهاية هي صفر، لأن الفرق بين حدود التتابع والصفر يقل تدريجيًا كلما ازدادت قيمة **ن**.

---

(25) Salmon, W., ‘A Contemporary Look at Zeno’s Paradoxes’, Op. Cit, p. 133.

لنفرض مثلاً أن ε = ١٠/١، ففي الزمن الذي نصل فيه إلى الحدّ الرابع $م_ن$ = ١٦/١، نجد أن الفرق بين ذلك الحدّ والعدد **ع** (= صفر) أقل من ١٠/١، وهذا الفرق يظل أقل من ١٠/١ لكل عضو تال في التتابع؛ فإذا لجأنا إلى خيار آخر، فقلنا مثلاً أن ε = ١٠٠/١، فإن قيمة المجموعة |$م_ن$ – **صفر**| تكون أقل من ε إذا كانت **ن** = ٧، وهذا الفرق يظل أقل من ١٠٠/١ لكل حدّ تال. إن قيمة ε تخضع لاختيارنا العشوائي، كأن تكون مثلاً ١,٠٠٠,٠٠٠/١ أو ١,٠٠٠,٠٠٠,٠٠٠/١، بشرط أن تكون أكبر من الصفر، وفي كل مرة سنجد أن هناك نقطة ما في التتابع، بحيث أن كل الحدود الباقية بعدها تختلف عن ع بأقل من ε.

ومن السهل أن نوضح – باستدلال مماثل – أن التتابع:

٢/١، ٣/٤، ٧/٨، ...، ١ – ١/٢ن ، ...

يتقارب إلى قيمة النهاية، وهي العدد **١** .

[١٥ – ٢] – وباستخدام تعريف «النهاية» لتتابع ما، نستطيع تعريف حاصل الجمع Sum لأية متسلسلة لا متناهية تواجهنا؛ فهذه الأخيرة ما هي إلا تتابع لا متناه من الحدود المرتبطة بتتابع آخر عن طريق الإضافة (أي الجمع Addition). خذ مثلاً المتسلسلة التالية:

٢/١ + ٤/١ + ٨/١ + ... + ١/٢ن + ...

إن حاصل الجمع لحدود هذه المتسلسلة لا يتم تعريفه باستخدام الحساب الابتدائي، لأن إجراء الجمع العادي مقيد في العادة بحواصل جمع الأعداد المتناهية للحدود، ومع ذلك فإن هذا الإجراء يمكن الامتداد به – على نحوٍ طبيعي – بحيث يُطبق على أية متسلسلة لا متناهية؛ فلكي نُعرّف مثلاً حاصل الجمع للمتسلسلة اللامتناهية:

هـ ١ + هـ ٢ + هـ ٣ + ...

نبدأ أولاً بتشكيل تتابع من حواصل الجمع الجزئية على النحو التالي:

$م_١$ = هـ ١

$م_٢$ = هـ ١ + هـ ٢

$م_٣$ = هـ ١ + هـ ٢ + هـ ٣

إلخ

وكما نلاحظ، فإن كل حاصل جمع من هذه الحواصل به عدد متناه من الحدود، وهو يتضمن فقط إجراء الجمع المألوف في الحساب الابتدائي. ووفقاً لتعريف النهاية الذي أسلفناه لتتابع لا متناه من الحدود، نستطيع القول أنه إذا كان التتابع التالي من حواصل الجمع الجزئية:

$$م_١ ، م_٢ ، م_٣ ، ...$$

له نهاية، فإن المتسلسلة اللامتناهية:

$$\text{ﻫ}١ + \text{ﻫ}٢ + \text{ﻫ}٣ + ...$$

تصبح متقاربة، وحاصل جمعها هو النهاية لتتابع من حواصل الجمع الجزئية، ومن ثم يصح القول أن الحدود لا متناهية العدد التي تحتويها أية متسلسلة لا متناهية لها حاصل جمع متناه[٢٦].

[١٥ – ٣] – وبالعودة إلى مفارقة «أخيل والسلحفاة»، وكذلك مفارقة القسمة الثنائية في شكلها التقدمي، نجد أن كلاً منهما – وفقًا لمفهومي التقارب والنهاية – تنطوي على متسلسلة لا متناهية لها حاصل جمع متناه؛ ففي القسمة الثنائية مثلاً، من الواضح أن العدّاء، لكي يقطع حلبة سباق مداها ميلاً واحدًا، يجب أن يقطع المتسلسلة التالية من المسافات غير الملتحمة:

$$١/٢ + ١/٤ + ١/٨ + ...$$

وحيث أن كل حدّ في هذه المتسلسلة أكبر من الصفر، يمكن إذن أن نشكل التتابع التالي من حواصل الجمع الجزئية:

$$م_١ = ١/٢$$

$$م_٢ = ١/٢ + ١/٤ = ٣/٤$$

$$م_٣ = ١/٢ + ١/٤ + ١/٨ = ٧/٨$$

إلخ

وكما أشرنا (ف ١٥ – ١)، فإن هذا التتابع يقترب من الواحد الصحيح، والذي هو حاصل الجمع لتلك المتسلسلة اللامتناهية المتقاربة. وبالطريقة ذاتها يمكن أن نعالج مفارقة «أخيل والسلحفاة»؛ فإذا كان «أخيل» يستطيع أن يجري مرتين أسرع من السلحفاة، ونقطة بداية السلحفاة تقع في منتصف الحلبة، فإن المتسلسلة اللامتناهية التي يواجهها «أخيل» بجريه إلى كل نقطة بداية تالية للسلحفاة، هي بدقة تلك المتسلسلة التي جمعناها توًا[٢٧].

(26) Ibid, p. 134.
(27) Ibid, pp. 134 – 135.

ب – السرعة اللحظية:

١٦ – كان ردّ الفعل الرياضي المبدئي على مفارقة السهم (ف ٥) هو الشك في أنها تستثمر الخلط بين تصوريّ الحركة اللحظية Instantaneous motion والسكون اللحظي Instantaneous rest؛ فلربما شعر «زينون» بأن الحالة الوحيدة التي يمكن بها للسهم أن يكون في مكان جزئي هي أن يكون ساكنًا، وذلك لانتفاء الشرعية عن مفهوم السرعة اللحظية غير الصفرية Instantaneous non-zero velocity، فإذا كان «زينون» قد جادل بأن السهم في كل لحظة من لحظات طيرانه يشغل بالضرورة موضعًا جزئيًا معينًا من مساره، ومن ثم تكون قيمة سرعته هي الصفر في كل لحظة، فإنه بذلك يكون محقًا في استنتاجه بأن سرعة السهم خلال مجرى طيرانه بأكمله لا تزيد عن الصفر، معتبرًا أن السهم بلا حركة Motionless.

على أن الرياضيين خلال القرن التاسع عشر قد أثبتوا خطأ هذه الرؤية، فمن المعقول تمامًا أن ننسب سرعات لحظية غير صفرية للموضوعات المتحركة عندما نفهم السرعة كمشتقة Derivative، أعني بوصفها معدل التغير لموضع الجسم المتحرك بالنسبة إلى الزمن. ولتوضيح ذلك، دعنا ننظر في المفهوم الرياضي – الفيزيائي لسرعة الحركة على نحو أكثر تفصيلاً.

[١٦ – ١] – السرعة هي الوصف الفيزيائي لحركة جسم ما بالنظر إلى المسافة المكانية والمدة الزمنية التي يستغرقها في حركته؛ فإذا كانت حركة الجسم منتظمة Uniform (أي يقطع مسافات متساوية في فترات زمنية متساوية)، فإن سرعته ببساطة هي معدل المسافة التي يقطعها بالنسبة إلى الزمن الذي يستغرقه في قطع هذه المسافة، وبصيغة رمزية:

$$\text{س} = \text{ف}_{٢} - \text{ف}_{١} \,/\, \text{ز}_{٢} - \text{ز}_{١}$$

(حيث **س** = السرعة & **ف** = المسافة & **ز** = الزمن)

ولا توصف حركة الجسم عبر مسار معين بسرعته فقط، ولكن أيضًا باتجاهه، ومن ثم فالصيغة السابقة تعطي قيمًا مختلفة للسرعة اعتمادًا على اتجاه الحركة؛ فإذا نظرنا إلى ناتج الطرح الزمني ($\text{ز}_{٢} - \text{ز}_{١}$) لوجدنا أنه دائمًا عددٌ موجب، لأن قيمة $\text{ز}_{٢}$ (اللحظة الأخيرة) أكبر دائمًا من قيمة $\text{ز}_{١}$ (اللحظة الأولى)؛ أما ناتج الطرح لقيمتيّ المسافة ($\text{ف}_{٢} - \text{ف}_{١}$) فهو عددٌ

موجب إذا كان الجسم يتحرك في اتجاه موجب (أي أن المسافة تزداد)، وعددٌ سالب في الحالة المقابلة[٢٨].

من جهة أخرى، إذا كان مسار الحركة لجسم ما معروفًا، وكانت حركة الجسم منتظمة، فإن العلاقة بين المسافة المقطوعة **(ف)**، والزمن المنقضي **(ز)**، تعطي وصفًا مثاليًا لهذه الحركة، وذلك وفقًا للصيغة الرمزية:

(ف = س ز)

أي أن قيمة المسافة تساوي حاصل ضرب قيمة السرعة في قيمة الزمن. ويمكن أن نضع العلاقة بين **(ف)** & **(ز)** – عبر لحظات زمنية منفصلة – في شكل قائمة تحوي القيم المتناظرة لكل من الفواصل الزمنية والفواصل المكانية المقطوعة؛ فإذا افترضنا مثلاً أن الجسم يتحرك بسرعة منتظمة مقدارها **٢ متر** في الثانية، فإن الصيغة **(ف = س ز)** سوف تأخذ الشكل **(ف = ٢ ز)**، ومن ثم تصبح لدينا القائمة التالية:

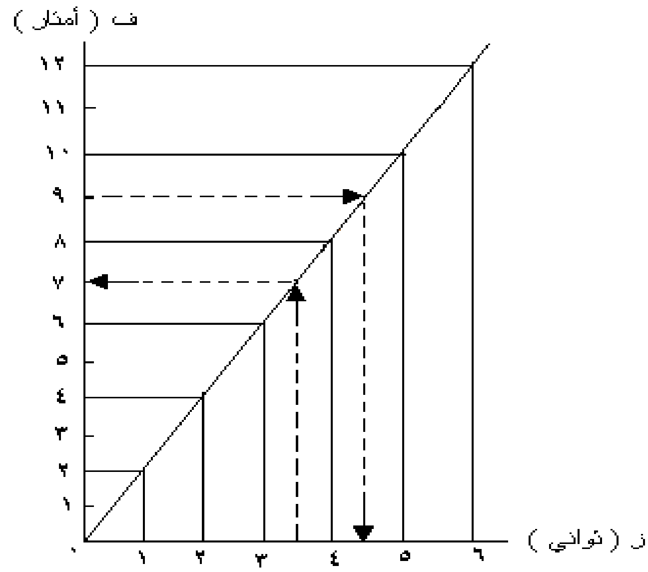
ز (ثواني)	١	٢	٣	٤	٥	٦	...
ف (أمتار)	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	...

(الشكل ٧: قيمة المسافة في مقابل قيمة الزمن للجسم المتحرك)

ومن المتواضع عليه فيزيائيًا توضيح العلاقة بين كميتين، لا عن طريق الصيغ الرمزية أو القوائم فقط، ولكن أيضًا عن طريق الرسم البياني الذي يعطي وصفًا أفضل لمجرى التغير في الكميات المختلفة، ويجعل الحسابات أكثر دقة وسهولة، وهو ما يوضحه الرسم البياني التالي لعلاقة المسافة بالزمن في حالة الحركة المنتظمة[٢٩]:

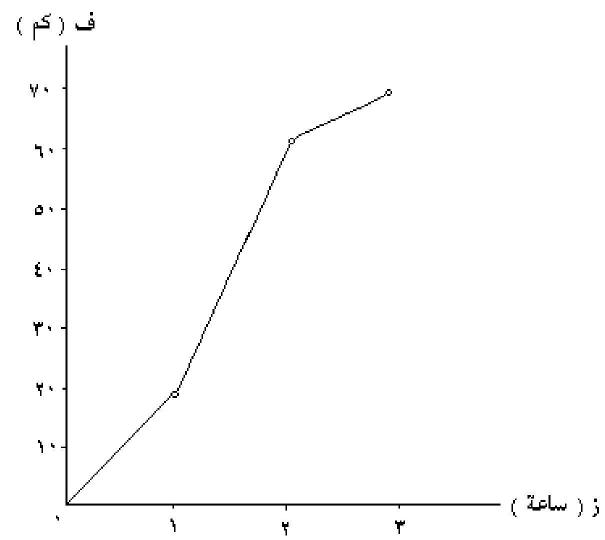
(28) Academician G. S. Landsberg (ed.), *Textbook of Elementary Physics*, Trans. from Russian by A. Troitsky, Mirr Publishers, Moscow, 1972, Vol. 1, pp. 34–35.

(29) Ibid, pp. 38 – 39.



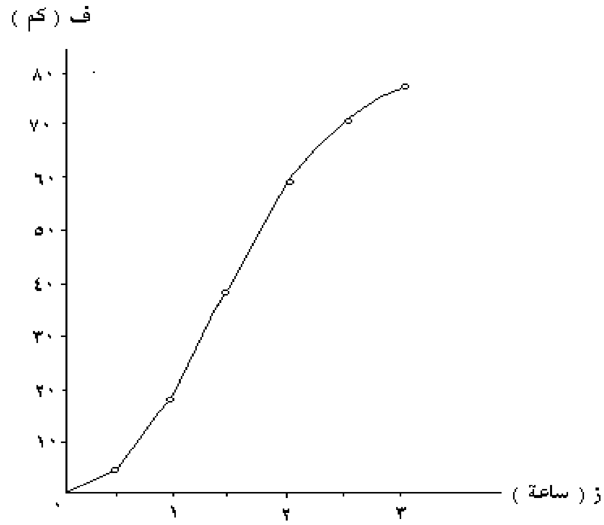
(الشكل ٨: تخطيط لعلاقة المسافة بالزمن في حالة الحركة المنتظمة)

[١٦ – ٢] – أما في حالة الحركة غير المنتظمة، فسوف تتغير قيمة السرعة من فاصل زمني إلى آخر، ومن ثم تتغير أيضًا قيم الفواصل المكانية التي يقطعها الجسم، لتبدو السرعة في حالة الفواصل الكبيرة نسبيًا وكأنها تقفز من قيمة إلى أخرى، كما في الشكل (٩) الذي يُوضح حركة سيارة تجري بسرعة **(٢٠ كم/ ساعة)** خلال الساعة الأولى، و**(٤٠ كم/ ساعة)** خلال الساعة الثانية، و**(١٥ كم/ ساعة)** خلال الساعة الثالثة.

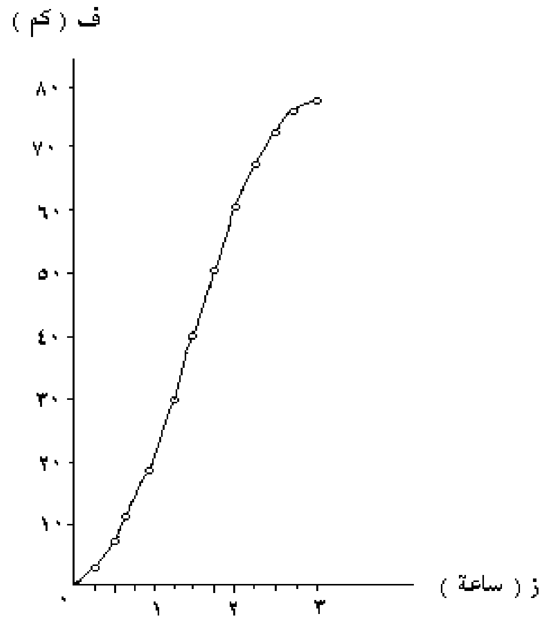


(الشكل ٩: تخطيط لعلاقة المسافة بالزمن في حالة الحركة غير المنتظمة)

ولكي نصف الحركة غير المنتظمة على نحوٍ أكثر دقة، يجب أن نقيس السرعة خلال فواصل زمنية أصغر، وكلما صغرت الفواصل الزمنية أكثر فأكثر، اتخذت قيمة السرعة شكل خط متعرج تزداد فيه قفزاتها الكمية أكثر فأكثر (كما في الشكلين ١٠ ، ١١) حتى إذا ما أصبحت الفواصل الزمنية على أصغر ما يكون، بدا خط السرعة كمنحنى أملس متصل لا قفزات فيه (الشكل ١٢)[٣٠].

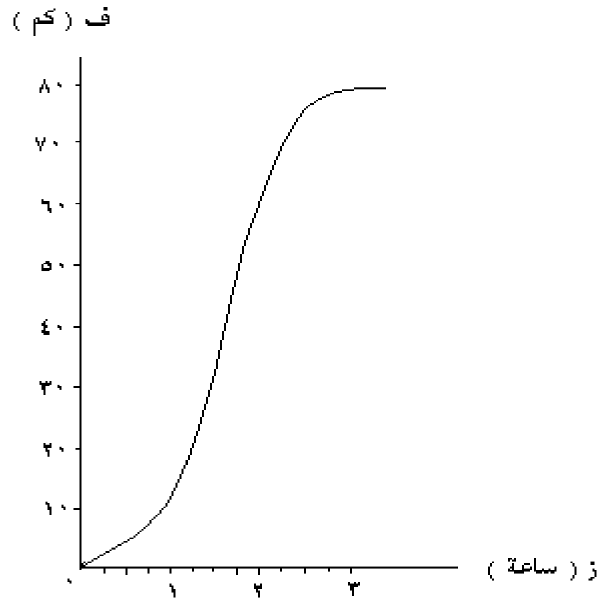


(الشكل ١٠)



(الشكل ١١)

(30) Ibid, pp. 44 – 45.



(الشكل ١٣)

حينئذ توصف السرعة اللحظية رياضيًا بأنها «متجه» Vector يساوي حاصل قسمة الإزاحة المتناهية في الصغر للجسم المتحرك على الفترة الزمنية المتناهية في الصغر المناظرة لهذه الإزاحة، أي أن السرعة اللحظية هي مشتقة متجه موضع الجسم المتحرك بالنسبة إلى الزمن(٣١).

[١٦ – ٣] – هذه المشتقة – بدورها – تخضع للتعريف الرياضي بوصفها «النهاية» لمعدل السرعة خلال فواصل زمنية غير صفرية متناقصة؛ فلو افترضنا – لدواعي البساطة الحسابية – أن السهم قد انطلق بسرعة منتظمة، فسوف نجد مثلاً أنه يقطع عشرة أقدام في الثانية الواحدة، وقدمًا واحدة في عُشر الثانية، وعُشر قدم في ١٠٠/١ من الثانية، إلخ. وعندما نأخذ معدل هذه السرعات على فواصل زمنية متناهية ومتناقصة تقترب من لحظة ما (**ت١**)، فإن معدل السرعات يقترب من نهاية ما بمقدار عشرة أقدام لكل ثانية، وهو ما يعني – بالتعريف – السرعة اللحظية للسهم في (**ت١**). وبهذا المعنى ذاته يمكن أن نقدر سرعة السهم خلال كل حركة ينجزها في طيرانه؛ فهو يقطع مجراه بأكمله بمقدار عشرة أقدام لكل ثانية، وسرعته في كل لحظة هي عشرة أقدام لكل ثانية. وهكذا، فإذا كان «زينون» قد شعر بأن السرعة اللحظية المقبولة لابد وأن تكون فقط صفرية، فقد أثبتت الرياضيات خلال القرن التاسع عشر خطأ هذا الشعور(٣٢).

---

(٣١) لاندو وآخرون: ***الفيزياء العامة الميكانيكا والفيزياء الجزيئية*** (ترجمة أحمد صادق القرماني، دار مير للطباعة والنشر، موسكو، ١٩٧٥، ص ص ٨ – ٩.

(32) Salmon, Op. Cit, p. 135.

[١٦ – ٤] – وقد أشرنا من قبل (ف ١٤) إلى إسهامات كل من «نيوتن» و«ليبنتز» في تطوير الحساب التحليلي للانهائي الصغر خلال القرن السابع عشر، لكن السرعات اللحظية – لسوء الحظ – لم تكن مفهومة وقتئذ سوى كمسافات لا متناهية في الصغر يقطعها الجسم المتحرك خلال فترات زمنية لا متناهية في الصغر، وهو ما عارضه بشدة الفيلسوف الإنجليزي «جورج باركلي» G. Berkeley (١٦٨٥ – ١٧٥٣) في الجزء الأكبر من كتابه «*التحليلي*» *The Analyst* (أي الرياضي)، واصفًا اللامتناهيات في الصغر Infinitesimals بأنها مجرد «أشباح لكميات مُرتحلة حديثًا»[٣٣]. إن معنييّ العدد والمقدار – وفقًا لـ «باركلي» – إذا أخذا بغض النظر عن المحسوسات، كانا معنيين مجردين، ومن ثم كاذبين. ومعنى اللامتناهي باطل؛ فمن المحال أن يوجد معنى مكان لا متناه من حيث أن كل معنى متناه، ومن المحال أن يوجد خط لا متناهي الصغر من حيث أن كل خط قابل للقسمة، ومن المُحال قسمة المقدار إلى مالا نهاية من حيث أن المكان المدرك بالحس متناه دائمًا، وأن هناك حدًا أدنى ملموسًا أو مُبصرًا لا يُدرَك وراءه شيء، ومن ثم لا يوجد دونه شيء. وما معنى الزمان إلا معنى تعاقب المعاني في الذهن![٣٤].

وربما كانت مفارقة السهم موجهة إلى تصور مثل هذا؛ ذلك أننا لو حاولنا تصور الحركة المتناهية – على مسافة متناهية خلال فترة زمنية متناهية – بوصفها مؤلفة من عدد كبير من الحركات على فواصل مكانية لا متناهية في الصغر خلال أزمنة لا متناهية في الصغر، فلن نجد مخرجًا من التناقض الهائل الذي يواجهنا؛ وإلا ما هو مقدار المكان الذي يشغله السهم خلال زمن لا متناه في الصغر؟ هل هو كبير نسبيًا كالسهم تمامًا؟ أم أنه بالغ الصغر؟ وإذا كان كبيرًا، فكيف يتقدم السهم من جزء من ذلك المكان إلى آخر؟ وإذا لم يكن كذلك، فكيف يكون إذن متحركًا ككل؟ وما طول الفترة الزمنية اللامتناهية في الصغر التي يقطعها؟ هل لها أجزاء أم لا؟ وإذا كانت لها أجزاء، فكيف نستطيع وصف الحركة خلالها؟ وإذا لم تكن لها أجزاء، فكيف يمكن أن تحدث الحركة خلال هذه الفترة اللامتناهية في الصغر؟

تلك هي التساؤلات التي لم يستطع «زينون» ومن جاءوا بعده أن يجيبوا عنها، والتي لم يكن لدى الحساب التحليلي الحديث قبل «كوشي» إجابات مشبعة عنها تتجاوز بنا نطاق التناقض المنطقي[٣٥].

(33) Quoted by Salmon, Ibid, p. 135.

(٣٤) يوسف كرم: ***تاريخ الفلسفة الحديثة***، سبق ذكره، ص ١٦٦.

(35) Ibid, pp. 135 – 136.

جـ – الدوال الرياضية:

١٧ – لا تزال أمامنا مشكلة أخرى فيما يتعلق بمفهوم السرعة اللحظية؛ فهذه الأخيرة قد تم تعريفها كنهاية لتتابع من معدل السرعات على فواصل زمنية متناهية، ولكن إذا لم يكن لدينا بعض المعلومات عما يحدث في تلك الفواصل، فلن نستطيع أن نقول شيئاً عن السرعة اللحظية؛ فعلى سبيل المثال، إذا كنا نعرف ببساطة أن مركز السهم كان في النقطة (ط١) في الزمن (ز١)، فلن تكون هذه المعرفة كافية لتزويدنا باستنتاج – كيفما كان – عن سرعته في تلك اللحظة؛ وما لم نعرف ما كان يفعله السهم في أزمنة أخرى قريبة من (ز١)، فلن نستطيع أن نضع تمييزًا بين الحركة اللحظية والسكون اللحظي!. ولعل هذا القصور الرياضي هو الذي أدى بـ «برجسون» إلى الزعم بأن مفارقة السهم تتأدى بنا إلى قضية غير معقولة، مؤداها أن الحركة لا تعدو أن تكون سلسلة من السكونات (ف ١٣)، ومن ثم كان استنتاجه القائل بأن مفارقة السهم تؤكد أن الوصف الرياضي القائم للحركة هو وصف خاطئ!، ولذا ننظر الآن في هذه الحجة على نحوٍ أكثر قربًا.

[١٧ – ١] – لو اتجهنا بأبصارنا إلى الفيزياء الحديثة، لوجدنا أن الحركة تُعالج كعلاقة دالية Functional relationship بين نقاط المكان وآنات أو لحظات الزمن؛ فالصيغة الرمزية لحركة السقوط الحر لجسم ما – على سبيل المثال – هي:

$$\text{و} = \text{د (ز)} = ٢/١ \text{ ج ز}^{٢}$$

هذه الصيغة تتيح لنا – عن طريق توظيف الدالة (د) – تحديد قيمة الموضع المكاني (و) بإعطاء قيمة للزمن (ز). أما (ج) فتشير إلى عجلة السقوط الحر للجسم في مجال الجاذبية الأرضية*.

على أن فهم هذا العلاج الفيزيائي للحركة يستلزم أولاً أن يكون لدينا تصور واضح للدوال الرياضية؛ فقبل القرن التاسع عشر لم يكن هناك علاج مشبع للدوال، حيث اعتبرت الدوال

* قيمة هذه العجلة ليست في الواقع واحدة في النقاط المختلفة على سطح الأرض، ذلك لأن الأرض ليست كروية تمامًا. وبالإضافة إلى ذلك يجب أن نأخذ في الاعتبار أنه نتيجة لدوران الأرض حول محورها تنشأ قوة طاردة مركزية تؤثر في اتجاه مضاد لاتجاه تأثير قوة الجاذبية، ولذا يجب إدراج عجلة فعالة لقوة الجاذبية أقل من عجلة قوة الجاذبية على الكرة الأرضية الساكنة فرضيًا (أي بافتراض سكونها). وهذه العجلة تساوي عند القطبين الأرضيين **٩٨٣,٢ سم/ ث^{٢}**، وعلى خط الاستواء **٩٧٨,٠ سم/ ث^{٢}**. وأحيانًا توجد **(ج)** في تعريف وحدات قياس المقادير الفيزيائية (القوة والشغل على سبيل المثال)، ولهذا الغرض اصطلح على استخدام قيمة قياسية هي **٩٨٠,٦٦٥ سم/ ث^{٢}** تكون قريبة جدًا من عجلة الجاذبية الأرضية على خط عرض **٤٥°**. أنظر: لانداو وآخرون: المرجع السابق، ص ٧٥.

عمومًا كأشياء متحركة أو متدفقة Flowed، وهو ما لم يساعد في حل مفارقــات «زينــون». وللخروج من هذا المأزق قدّم «كوشي» تعريفه البسيط للدالة بوصفها تزويجًــا لأعــداد مــن مجموعة ما بأعداد من مجموعة أخرى؛ بحيث تُعرف أعــداد المجموعــة الأولــى بــالمتغير المستقل Independent variable، أما أعداد المجموعة الثانية – والتي هــي قــيم للدالــة – فتعرف بالمتغير المعتمد Dependent variable. خذ مثلاً الدالة:

د (و) = ى = و٢

هذه الدالة لا تخرج عن كونها تزويجًا لأعداد حقيقية بأعداد حقيقية غير سالبة؛ فالعــدد **٢** مثلاً يقترن بالعدد **٤**، والعدد **–١** يقترن بالعدد **١**، والعــدد **٢/١** يقتــرن بالعــدد **١ /٤**، ... وهكذا، ومن ثم يمكن تعريف هذه الدالة ببساطة بأنها مجموعــة كـــل تلك الأزواج مـــن الأعـــداد (كما في الشكل ١٢)[٣٦].

وعلى نحوٍ مماثل، نستطيع القول أن الدالة الفيزيائية المستخدمة لوصف حركــة الســقوط الحر لجسم ما ليست شيئًا أكثر أو أقل من تزويج لقيم متغير الموضع **(و)** بقيم متغيــر الــزمن **(ز)**؛ ففي **(ز = صفر)**، فإن **(و = صفر)**، وفـــي **(ز = ١)**، فــإن **(و = ١٦)**، وفــي **(ز = ٢)**، فإن **(و = ٦٤)**؛ وهذا هو ما نعنيه بقولنا – رياضيًا – بأن جسمًا يبدأ من الســكون ويســقط بحرية نحو سطح الأرض، يقطع **١٦ قدمًا** في الثانية الأولى، و **٤٨ قدمًا** في الثانيــة التاليــة، وهلم جرا*.

و	د (و) = و٢
١	١
٢	٤
٣	٩
٢/١	٤/١
٣/١	٩/١
٢–	٤
١–	١
إلخ	**إلخ**

(الشكل ١٣)

(36) Op. Cit, pp. 136 – 137.

* لاحظ أن الوحدة المستخدمة للمسافة هنا هي القدم وليست السنتيمتر، مع ثبات الوحدة الزمنية (أي الثانية).

[١٧ – ٢] – دعنا نطبق إذن هذا التصور الرياضي للدالة على حركة السهم، ولكـــي نحـــتفظ بالبساطة الحسابية نفترض أنه ينطلق بسرعة منتظمة مقدارها عشرة أقدام لكل ثانية في خـــط مستقيم، بداية من (**و = صفر**)، في الزمن (**ز = صفر**).

حينئذ نجد أنه في أي زمن تال (**ز**)، فإن موضعه (**و = ١٠ ز**)، وبالتالي فإن جزءً مما نعنيه بقولنا أن السهم قد تحـــــرك مـــن النقطة {**أ (و = ١٠)**} إلى النقطـــة {**ب (و = ٣٠)**}، هـــو أنه ببساطة كان في النقطة (**أ**) عندمـــا كانت (**ز = ١**)، وكان فـــي النقطة (**ب**) عندمـــا كانـــت (**ز = ٣**). وحين نتساءل كيف تقدم السهم من (**أ**) إلى (**ب**)، فإن الإجابة ببساطة أيضًا هـــــي أنه شغل كـــــل نقطـــة مـــن النقاط المتوسطة: {**و(١٠ < و < ٣٠)**} فـــي أزمنـــة منـــاظرة: {**ز(١ < ز < ٣)**}، وهو ما يعني إشباع المعادلة: (**و = ١٠ ت**).

وحين توصف الحركة بدالة رياضية تربط المواضع المكانية بالأزمنة، فمـــن الممكـــن أن نفاضل الدالة ونوجد مشتقاتها (ف ١٦ – ٣)، وهذه الأخيرة بدورها تُعبر عن السرعة اللحظية للسهم في كل لحظة من لحظات انطلاقه، لكن الحركة ذاتها توصف بتزويج المواضع المتتالية بالأزمنة المتتالية؛ فلا معنى للحديث عن حركة السهم في موضع فردي أو في لحظة جزئيـــة. أو بعبارة أخرى نستطيع القول أن التمييز بين السكون والحركة يتجلى فقط حين نأخذ مواضع السهم في عدد من اللحظات المختلفة، وإلا وجدنا أنفسنا أمام سلسلة من السكونات كما اســـتنتج «برجسون»[٣٧].

[١٧ – ٣] – وعلى الرغم من أن هذه النظرة الرياضية للحركة لا تنطوي على خطأ منطقـــي، إلا أنه قد يكون من الصعب قبولها سيكولوجيًا، ولتوضيح ذلك نعود مرة أخرى إلـــى الشـــكل التراجعي لمفارقة القسمة الثنائية (ف ٤)؛ هنا نجد العدّاء يقف أولاً في نقطة البداية في اللحظة التي يبدأ فيها السباق، وحين نسأل: ما الذي يجب أن يفعله أولاً، فقد يُجيب أحدنا بأنـــه يجـــب أولاً أن يجري إلى نقطة منتصف المسافة الكلية للحلبة، لكن هذه الإجابة لا يمكـــن أن تكـــون صحيحة، لأنه قبل أن يتمكن من إنجاز هذا الفعل، عليه أن يجري إلى نقطة ما فـــي منتصـــف النصف الأول للمسافة الكلية (أي رُبع المسافة)، وقبل أن يتمكن من ذلك، عليه أن يصل إلـــى نقطة منتصف الربُع الأول (أي ثُمن المسافة)، ... وهكذا، فمهما افترضنا ماهية العمـــل الأول له، فسنجد أن هناك عملاً آخر يسبقه!. ولا شك أن هذا الاستنتاج صحيح تمامًا، لكنه لا يعنـــي أن العدّاء لن يتمكن من بدء السباق.

(37) Ibid, p. 137.

خذ السهم مرة أخرى، ولنفرض أنه في النقطة (أ) في منتصف مجرى طيرانه. حينئذ لـو سألنا عن كيفية تقدمه إلى النقطة التالية، فسوف تصيبنا الدهشة – عن وعي أو عن غير وعي – إزاء ماهية تلك النقطة، لأن هناك نقاطًا أخرى تسبقها بالضرورة (طالما كان المكان الزمان متصلين)، لكن هذا السؤال يفتقد إلى الشرعية من المنظور الرياضي، لأننا نفكر فـي مجـرى السهم كممر متصل، ووفقًا لتعريف الاتصال الرياضي، لا توجد نقطة تالية لأية نقطة مميـزة، فبين أي نقطتين هناك دائمًا نقطة ثالثة (إلى مالا نهاية)[٣٨]. وعلى هذا فإن تساؤلنا عن النقطـة التالية للسهم، وعن الفعل الأول للعدّاء في مفارقة القسـمة الثنائيـة، ينبعـان مـن مصـدر سيكولوجي واحد، ألا وهو المطالبة بنقطة تالية أو لحظة تالية لا توجد بالتعريف، ولعل السبب الأول لهذه المطالبة السيكولوجية هو عدم خبرتنا بالزمان كمتصل مـن اللحظـات غيـر ذات الدوام، وإنما كمتسلسلة من الآنات المنفصلة، ربما يدوم الآن الواحد منها لجزء مـن الثانيـة، وبغض النظر عن تلك العملية الإسقاطية التي اعتاد عليها الإنسان، ليس هناك سـبب يـدفعنا لمحاولة فرض البنية المنفصلة للزمان السيكولوجي على مفهوم الزمان الرياضي كمتصل، فلقد أثبت هذا الأخير أنه أداة مثمرة للغاية في وصف الحركة الفيزيائية[٣٩].

د – هل ثمة نهايات لجميع الدوال ؟:

١٨ – بقى أن نشير إلى معضلة رياضية أخرى يثيرها التأمل الرياضي لمفارقات «زينـون»، وإن كانت تتجاوز نطاق المفارقات – في حد ذاتها – لتؤكد أن الوصف الرياضي للحركة لـم يصل بعد إلى درجة الإشباع المنطقي التام. ففي الوقت الذي نجح فيه الحساب التحليلي فـي استيعاب الحدوس الفلسفية الغامضة للمكان والزمان، وأثبت الرياضيون أن حسـاب التفاضـل والتكامل يمكن ألا ينطـوي علـى كميـات لا نهائيـة الصـغر[٤٠] (ف ١٧)، وُوجهـت بسؤال أبعد حول قدرة الدوال المستخدمة على الوصول إلى نهاياتها المفترضة؛ فبعض الدوال تبدو بلا شك قادرة على ذلك، لكن هناك دوالاً أخرى تعجز عن امـتلاك تلـك القـدرة!. إن «أخيل» – كما يؤكد التحليل الرياضي للمفارقة الأولى (ف ٣) – يبدو قـادرًا بالفعـل علـى مطاردة السلحفاة وصولاً إلى نقطة إدراكها، ولكن هل يمكنه الوصول إلى نقطة انتهاء محـددة

---

(٣٨) أنظر كتابنا: ***الاتصال واللاتناهي بين العلم والفلسفة*** (منشأة المعارف، الإسـكندرية، ١٩٩٨) ص ص ٢١ – ٢٣.

(٣٩) لمزيد من التفاصيل حول علاقة الزمان الفيزيائي بالزمان السيكولوجي، أنظر:

- Grünbaum, Adolf, ‘Relativity and Atomicity of Becoming', *Review of Metaphysics*, IV (1950 – 1), pp. 143 – 186.

(٤٠) برتراند رسل: ***مقدمة للفلسفة الرياضية***، ص ١١٨ .

يتوقف فيها عن الحركة؟. وبالمثل، يبدو العدّاء – في الشكل التقدمي لمفارقة القسمة الثنائية – قادرًا على قطع أجزاء كسرية متنوعة تقترب من نقطة النهاية، لكن هل يمكنه حقًا إدراك تلك النهاية؟. لقد أجاب رياضيو القرن التاسع عشر عن هذه التساؤلات وفقًا لتعريفي «كوشي» لكل من «النهاية» و«الدالة»؛ فالأولى ببساطة هي عدد، أما الثانية فتزويج لمجموعتين من الأعداد؛ فإذا كانت النهاية إحدى أعداد مجموعة قيم المتغير المعتمد، فإن الدالة تفترض قيمة نهاية في مجموعة قيم المتغير المستقل، وإذا لم تكن النهاية كذلك، فإن الدالة لا تفترض وجود تلك القيمة الحدية. على أنه منذ منتصف القرن العشرين تقريبًا ، شعر عدد من الرياضيين ذوي النزعات التأملية بأن مشكلة هامة لا زالت دون حل، وأحد هؤلاء – بل لعله أشهرهم – هو الرياضي والفيلسوف الأنجلو– أمريكي «ماكس بلاك» Max Black (١٩٠٩ – ١٩٨٨)، الذي أثبت أن تحليل محاولة «أخيل» للحاق بالسلحفاة في تتابع لا متناه من المسافات المتناقصة يضعنا أمام صعوبة منطقية صارمة، ذلك أن الإجراء الرياضي المستخدم للحصول على حاصل جمع متناه لمتسلسلة لا متناهية من الفواصل الكسرية سوف يخبرنا «أين» و«متى» سوف يلحق أخيل بالسلحفاة، **إذا** كان يستطيع اللحاق بها أصلاً، لكن علينا أن نضع عدة خطوط تحت أداة الشرط «**إذا**»؛ لأن عبارة «متسلسلة لا متناهية من الأفعال» هي عبارة متناقضة ذاتيًا، إذ كيف يمكن لأي إنسان – كائنًا من كان – أن يتم متسلسلة لا متناهية من المسافات والأزمنة؟، ألا يستلزم ذلك تمتعه بقدرات خارقة؟. الحق أننا حتى لو افترضنا وجود هذه القدرات فلن يكف التناقض عن ملاحقتنا!.

[١٨ – ١] – ولكي يبرهن «بلاك» على ذلك يعمد إلى افتراض وجود عدد من الماكينات الخيالية Imaginary machines، المزودة بأطباق أمامية تنتقل الكرات فيما بينها عبر فواصل زمنية متناقصة إلى مالا نهاية، داخل فاصل زمني متناه، وليكن دقيقتين مثلاً*.

والآن هب أن لدينا ماكينتين من هذه الماكينات: (**أ**) و(**ب**)؛ فعندما توضع الكرة في طبق «**أ**» تحركها الماكينة سريعًا إلى طبق «**ب**»، وكذلك بالنسبة لهذه الأخيرة؛ إن لديهما نوعًا من المنافسة التي نألفها في لعبة تنس الطاولة حول التخلص الفوري من الكرة؛ ولنفرض فوق ذلك أن الماكينتين قد بُرمجتا بطريقة ما بحيث أن كل انتقال للكرة يستغرق زمنًا أقصر من سابقه، كأن نقول مثلاً أن أول انتقال للكرة – سواء من طبق «**أ**» وإلى طبق «**ب**» أو العكس –

---

* كان الرياضي الألماني «هيرمان فيل» Hermann weyl (١٨٨٥ – ١٩٧٣) هو أول من اقترح فكرة «ماكينات اللاتناهي» عام ١٩٤٩ في كتاب له بعنوان «***فلسفة الرياضيات والعلم الطبيعي***» ، ثم استثمرها «بلاك» في مناقشته لمفارقة «أخيل» عام ١٩٥٠.

See Black, M. , 'Achilles and the Tortoise', *Analysis*, XI (1950 – 1), pp. 91 – 101, Reprinted in Salmon , W. C. (ed.), *Zeno's Paradoxes*, Op. Cit, pp. 71 – 81.

يستغرق نصف دقيقة، وثاني انتقال يستغرق ربع دقيقة، وثالث انتقال يستغرق ثمن دقيقة، ... إلخ.

نبدأ إذن بوضع الكرة في طبق «**أ**»: حينئذ تستغرق الكرة نصف دقيقة في رحلتها إلى طبق «**ب**»، وكذلك نصف دقيقة في رحلة عودتها، وهو فاصل زمني يكون فيه طبق «**أ**» ساكنًا.

الخطوة التالية هي أن نعيد الكرة من «**أ**» إلى «**ب**» خلال ربع دقيقة، في الوقت الذي يكون فيه طبق «**ب**» ساكنًا. وفي ربع الدقيقة التالية ترتد الكرة من «**ب**» إلى «**أ**»، حيث يكون طبق «**أ**» ساكنًا. ومع استمرار العملية تزداد السرعة حتى نرى فقط مجرد غمامة. وبعد دقيقتين بالضبط تتوقف الماكينتان عن الحركة تمامًا، فما الذي حدث خلال فاصل الدقيقتين؟. لا شك أن الكرة قد انتقلت بين الطبقين عددًا لا متناهيًا من المرات، كما أن كل ماكينة قد أنجزت عددًا لا متناهيًا من الأفعال، واستمتعت كذلك بفترات سكون لا متناهية العدد خلال هاتين الدقيقتين. ولكن، أين تكون الكرة لحظة توقف الماكينتين عن الحركة؟. هل هي في طبق «**أ**»؟. لا، لأنها في كل مرة كانت تصل فيها إلى طبق «**أ**»، كانت الماكينة تحركها سريعًا إلى طبق «**ب**». فلتكن إذن في هذا الأخير، لكن الإجابة أيضًا بالنفي، لأن الماكينة «**ب**» كانت تحركها سريعًا إلى طبق «**أ**» كلما وصلت إليها. إن الكرة إذن ليست في طبق «**أ**» ولا في طبق «**ب**»، أو هي فيهما معًا، ومن ثم يستنتج «بلاك» أن أي تتابع لا متناه من الأفعال لابد وأن يؤدي إلى تناقض، ذلك أنه ليست له نهاية محددة إذا ما حُصر في فاصل زمني متناه![٤١].

[١٨ – ٢] – خذ ماكينة لاتناهي افتراضية أخرى، هي تلك التي اقترحها الرياضي الإنجليزي «جيمس طومسون» James Thomson (١٨٩١–١٩٧٣)، وعُرفت باسم «مصباح طومسون» Thomson's lamp. هذا المصباح من صنف نألفه تمامًا، ذلك أن له زرًا على قاعدته، فإذا ضُغط الزر إلى أسفل أضاء المصباح، وإذا ضُغط مرة أخرى ليرتد إلى أعلى انطفأ المصباح. والآن، هب أن شخصًا يتمتع بقدرات خارقة قد بدأ الضغط على الزر بداية من هذه اللحظة، ولمدة دقيقة واحدة، وأنه سوف ينجز خلال تلك الدقيقة عددًا لا متناهيًا من الضغطات؛ بمعنى أنه سوف يُتم الضغطة الأولى في نصف دقيقة، والثانية في ربع دقيقة، والثالثة في ثمن دقيقة، ... إلخ. تمامًا كما افترضنا أن العدّاء في مفارقة القسمة الثنائية يقطع تتابعًا لا متناهيًا من المسافات في أزمنة متناقصة.

(41) See Allis, V. & Koetsier, T., 'On Some Paradoxes of the Infinite', *British Journal for the Philosophy of Science*, = = 42 (1991), pp. 187 – 194, also Davies, E.B., 'Building Infinite Machines', *British Journal for the Philosophy of Science*, 52 (2001), pp. 671 – 682.

خذ إذن حالة المصباح الأخيرة بعد ذلك التتابع اللامتناهي من الضغطات على زره: هـل هو مضيء أم لا؟. الحق أنه لا يمكن أن يكون مضيئًا، لأنه في كل مرة كان فيها كـذلك تـم الضغط على الزر لينطفئ، وهو أيضًا لا يمكن أن يكون منطفئًا، لأنه في كل مرة كـان فيهـا كذلك تم الضغط على الزر ليضيء![٤٢].

بعبارة أخرى، لو اتفقنا على تعيين القيمة «**صفر**» للمصباح في لحظة البداية (أي حين كان منطفئًا)، وكذلك في كل لحظة ينطفئ فيها، والقيمة «**١**» في كل لحظة يضيء فيها، فإن إضاءة المصباح تعني إذن إضافة وحدة واحدة (من **صفر** إلى **١**)، في حين تعني الحالة العكسية طرح هذه الوحدة (من **١** إلى **صفر**)، وعلى هذا توصف الحالة النهائية للمصباح – بعد هـذا التتـابع اللامتناهي من عمليات الإضافة والطرح – وفقًا للمتسلسلة اللامتناهية التالية:

(١ – ١) + (١ – ١ + ١) + (١ – ١ + ١ – ١) ....

ولو قبلنا التعريف الرياضي لحاصل جمـع متسلسلة لامتناهية (ف ١٥ – ٢)، فـإن هـذه المتسلسلة لن يكون لها حاصل جمع، لأن حواصل الجمـع الجزئيـة: (١)، (١ – ١)، (١ – ١ + ١)، (١ – ١ + ١ – ١)، **... إلخ**، تنتج القيمتين (١)، (**صفر**) على التعاقـب دون أن تصـل إلـى نهاية محددة[٤٣].

[١٨ – ٣] – ولا شك أن السرعة اللازمة للضغط على زر المصباح تتجاوز نطاق القـدرات الإنسانية، ولكننا هنا نركز فقط على الإمكانات المنطقية، وليس علـى التحديـدات الطبيـة أو الشروط الفسيولوجية، وبالتالي يجب أن نستبعد أيضًا أية صعوبات ميكانيكية تعـوق السـرعة المطلوبة لماكينات «بلاك»، ونستبعد كذلك أي افتراض مؤداه أن فتيـل المصـباح الخيـالي سيحترق، أو أن زره سيبلى؛ وبهذه الاستبعادات نجد أنفسنا في النهاية أمام قضية مناقضة لمـا هو مفترض أن تكون عليه حالة المصباح في اللحظة الأخيرة؛ أعني أن المصـباح يجـب أن يكون مضيئًا ومنطفئًا، وكذلك لا هو مضيء ولا منطفئ!.

ولا يهدف «بلاك» أو «طومسون» بمثاليهما الخياليين إلى إثبات أن «أخيل» لا يستطيع أن يلحق بالسلحفاة، ومن ثم يُنهي السباق، فنحن جميعًا نعرف أنه يستطيع ذلك بالفعـل؛ لكنهمـا يجادلان بأنه من غير الصحيح «وصف» أي من العمليتين كتتابع لا متناه مـن الأفعـال فـي

(42) Mclaughlin, W. L., 'Thomson's Lamp is Dysfunctional', *Synthese*, 116 (1998), pp. 281 FF.

(43) See for more detail: Berresford, G. C., 'A Note on Thomson's Lamp Paradox', *Analysis*, 41 (1981), pp. 1 – 7 & also Laraudogoitia, Pérez, J., 'A Beautiful Super-task', *Mind*, 105 (1996), pp. 81 – 83.

فاصل زمني متناه، وبالتالي، فالسبب الأول والأساسي لظهور المفارقات هو الوصف الرياضي الخاطئ للحركة الفيزيائية كما تجري في الواقع![٤٤].

١٩ – وبنظرة أكثر دقة، نجد أن كلاً من «بلاك» و «طومسون» قد ركزا على قضية تكابد منها كافة أنساقنا العلمية، لكن لا مناص من العمل وفقًا لها، ألا وهي تلك القائلة بأنه لا تعريف – في حد ذاته – يمكن أن يكون حلاً مشبعًا لمشكلة فيزيائية. ولعل أبسط مثال لذلك هو التعريف المألوف للجمع الحسابي، والذي يصلح للتطبيق في حالات دون أخرى؛ فإذا كان لدينا مثلاً **(م)** من حبات التفاح في سلة، و**(ن)** من حبات البرتقال في سلة أخرى، فسوف نحصل على **(م + ن)** من حبات الفاكهة حين نضع المجموعتين في سلة واحدة؛ ولكن إذا كان لدينا **(م)** مكيال من الكحول في إناء، و**(ن)** مكيال من الماء في إناء آخر، فلن نحصل على **(م + ن)** مكيال من محلول الكحول حين نمزج السائلين في إناء واحد!. إنها الفجوة التي تؤرقنا جميعًا بين الرياضيات البحتة والرياضيات التطبيقية، فكم من تعريف رياضي يجافي الواقع الفعلي حين يخضع للتطبيق، وهي فجوة تتجلى بوضوح في حالة الحركة؛ فما يقوم به «أخيل» – أو أي عدّاء آخر حين يجري – لا يمكن أن يناظر التعريف الرياضي لحاصل جمع متسلسلة لا متناهية، لأن استكمال تتابع لا متناه من الأفعال هو أمرٌ مستحيل منطقيًا كما رأينا، وتخيله لا يتأدى بنا إلا إلى عبث أو تناقض.

هذا الاستنتاج له بالضرورة نتائج بعيدة المدى على العلم الحديث؛ ذلك أنه إذا كان صحيحًا، فإن الوصف العلمي القائم لحلبة السباق – بوصفها متصلاً رياضيًا قابلاً للانقسام إلى مالا نهاية – يغدو في الواقع وصفًا خاطئًا، ربما كان هذا الوصف تمثيلاً نافعًا لبعض الأغراض العلمية، لكن مفارقات «زينون» تؤكد أنه لا يمكن أن يكون صحيحًا على نحوٍ حرفي. والنتيجة اللازمة عن ذلك: أن الفيزياء الرياضية في حاجة إلى أساس جديد مختلف جذريًا إذا أرادت أن تتعامل مع الواقع الفيزيائي بشكل ملائم مُشبع منطقيًا[٤٥].

[١٩ – ١] – وقبل أن نصادر على هذه النتيجة كليًة، علينا أن نعيد النظر إلى ماكينات اللاتناهي ومدى علاقتها بمفارقات «زينون»، لا لشيء إلا لكونها تتجاوز كما ذكرنا (ف ١٨) نطاق المفارقات في حد ذاتها، وإن كانت المفارقات هي الباعث الأول لها. خذ مرة أخرى مصباح «طومسون» (والاعتبارات ذاتها سوف تنطبق على ماكينات «بلاك» أو أية ماكينة لا تناهي أخرى)؛ لقد وصف «طومسون» عملية الضغط الفيزيائية على زر المصباح واقترح لها فاصلاً زمنيًا مقداره دقيقة واحدة. لنفرض إذن أن الضغط على الزر قد بدأ في ($ز_{صفر}$) حيث

(44) Salmon, ‘A Contemporary Look at Zeno’s Paradoxes’, Op. Cit, p. 140.
(45) Ibid, p. 141.

كان المصباح منطفئًا، ولنفرض أن سلسلة من الضغطات على الزر قد تمت في (**ز١ = ٢/١**)، (**ز٢ = ٤/٣**)، **... إلخ**. هنا نجد أن لدينا وصفًا يخبرنا بما إذا كان المصباح مضيئًا أو منطفئًا في أية لحظة سابقة على (**ز = ١**) (أي في أية لحظة سابقة على لحظة نهاية الدقيقة). أما بالنسبة للحظة (**ز = ١**)، واللحظات التالية، فإنه لا يخبرنا بشيء عن حالة المصباح؛ ووفقًا لتعريف الاتصال الرياضي، فمن الطبيعي أنه في أي زمن سابق على (**ز = ١**) يكون فيه المصباح مضيئًا، هناك زمن يتلوه {**سابق على (ز = ١)**} يكون فيه منطفئًا، والعكس صحيح. لكن ذلك لا يعني في الحقيقة أن المصباح مضيء ومنطفئ في (**ز = ١**)؛ فمن الممكن أن نلجأ إلى أي خيار نرغبه دون أن نقع في التناقض، لأن كل ما لدينا هو دالة معرّفة على منتصف الفاصل المفتوح (**صفر ≤ ز < ١**) ، فكيف نُطالب بالاستدلال على قيمتها في (**ز = ١**)؟. إن السؤال عن قيمتها ليس له إجابة محددة في ضوء معطياتنا؛ فإذا كانت الدالة تقترب من نهاية ما في (**ز = ١**)، فمن الطبيعي أن يساعدنا تعريف الدالة على معرفة تلك النهاية، لكن دالة الضغط على زر المصباح تفتقر إلى مثل هذه النهاية، ولذا فأي خيار نلجأ إليه سيبدو خيارًا عشوائيًا.

أما بالنسبة لحركة «أخيل»، وكذلك حركة العدّاء في مفارقة القسمة الثنائية، فإن الدالة – على العكس – تقترب من نهاية، وهذه النهاية تتيح لنا تقديم إجابة محددة للسؤال عن موضع العدّاء في ختام التتابع اللامتناهي من أفعال الجري(٤٦).

[١٩ – ٢] – من جهة أخرى، لا يستطيع المرء مقاومة الشعور بأن هناك اختلافات هامة بين التتابع اللامتناهي من أفعال الجري في حالة «أخيل»، والتتابع اللامتناهي من انتقالات الكرة في حالة ماكينات «بلاك» (أو التتابع اللامتناهي من الضغطات على الزر في حالة مصباح «طومسون»)، ولعل أبرز هذه الاختلافات وأحدّها هو طبيعة المشكلة الرياضية التي تواجهنا في النهاية؛ خذ مثلاً حركة الكرة المتتالية ذهابًا وإيابًا بين طبقي (**أ**) و(**ب**)، ولنفرض أن الطبقين يبعدان عن بعضهما البعض بمسافة ثابتة مقدارها ثلاث بوصات. إن الكرة سوف تقطع إذن هذه المسافة الموجبة الثابتة عددًا لا متناهيًا من المرات، ولكي تفعل ذلك يجب أن تقطع مسافة لا متناهية في فاصل زمني متناه، وتلك هي المشكلة. أما في حالة «أخيل» فالمشكلة مختلفة؛ فليس الهدف هو تبيان أن «أخيل» يمكن أن يجري مسافة لا متناهية في فاصل زمني متناه – إنه سريع ، لكن ليس بهذه السرعة – بل على العكس من ذلك: تبيان

(46) Ibid, pp. 141 – 142.

كيف يمكن أن يجري مسافة متناهية يمكن أن تنقسم وتنقسم إلى عدد لا متناه من الفواصل الفرعية!.

ليس ذلك فحسب، بل إن «أخيل» يستطيع أن يقطع الحلبة بسرعة منتظمة ثابتة، وحتى لو ازدادت سرعته فإن لها حدًا بالضرورة، أما الكرة التي تنتقل ذهابًا وإيابًا على مسافة ثابتة بين طبقي (أ) و(**ب**)، فيجب – كي تستقيم المفارقة – أن تنجز حركتها بسرعات متزايدة إلى ما لا نهاية!. ومن الممكن بالطبع تلاشي هذا الاختلاف بأن نشترط في البداية أن المسافات التي يجب أن تقطعها الكرة – كتلك التي يجب أن يقطعها «أخيل» – سوف تتناقص مع الحركة، كما أن الزمن المتاح لكل اجتياز لمسافة فرعية سوف يتناقص بالمثل، وهو ما يمكن أن يحدث إذا جعلنا الطبقين (أ) و(**ب**) يتحركان باستمرار تجاه بعضهما البعض خلال فاصل الدقيقتين. في هذه الحالة ترشدنا الدالة الرياضية إلى أن الطبقين سوف يتطابقان في النهاية، ومن ثم فلن تكون لدينا مشكلة حول موضع الكرة لحظة توقف الماكينتين؛ فسوف تكون بالضرورة في مركز كل طبق منهما(٤٧).

[١٩ – ٣] – على أنه إذا كان الحل الرياضي لمفارقات «زينون» قد أفلت من التناقض الذي تظهرنا عليه ماكينات اللاتناهي، فإن كثرة من التصورات – أو الدوال الرياضية – الأخرى لا تجد مفرًا منه؛ ذلك أن الدالة الطيعة إلى درجة استثنائية هي وحدها التي يمكن أن تكون لها نهاية معينة كلما اقترب المتغير من نقطة معلومة، أما القاعدة فهي أن الدالة تتذبذب(٤٨).

والحق أن المشكلة هنا ليست في تصور الاتصال الرياضي ذاته، وإنما في التسليم بأن هذا التصور هو وصف صادق لما يجري في الطبيعة من حركات على خلفية المكان والزمان المتصلين؛ وكأننا بذلك نقتحم بمفارقات «زينون» ساحة أخرى من ساحات الجدل العلمي، ألا وهي ساحة الجدل (المفتوحة حتى يومنا هذا) بين النزعتين: «الواقعية» Realism، و«الأداتية» Instrumentalism؛ وكأننا أيضًا نسجل هدفًا قويًا لصالح هذه الأخيرة، تلك التي تستلهم – في صورتها المعاصرة – رؤية «كانط» القائلة بأن العقل الإنساني إنما يعمل كمشرّع للطبيعة، لا كواصفٍ لها!. وتأكيدًا لذلك، نخصص خاتمة هذا البحث لبعض محاور الجدل حول مدى استجابة الواقع لتصوراتنا المجردة، تلك الحائرة في معية مفارقات «زينون».

(47) Ibid, p. 142.

(٤٨) رسل: ***مقدمة للفلسفة الرياضية***، ص ١٢١.

خاتمة : الرياضيات بين رحى مقولتي الاتصال والانفصال:

٢٠ – كان الحساب التحليلي للانهائي الصغر – ولا زال – بمثابة الأداة الرياضية الأساسية لوصف الواقع الفيزيائي. وكما رأينا، فإن هذا الحساب يُوظف متغيرات يُغطي مداها مجموعة متصلة من القيم، والدوال التي يتعامل بها هي دوال متصلة. وعلى الرغم من نجاح الرياضيين في «تحسيب» Arithmetization هذا الفرع الرياضي الهام – بحيث أن تطوره الصوري لم يعد – منذ منتصف القرن التاسع عشر – يستلزم أية تصورات هندسية[٤٩]، إلا أنه لا زال مُطبقًا على الظواهر التي تحدث في المكان الفيزيائي، وهو التطبيق الذي يستمد شرعيته المنطقية من مبادئ الهندسة التحليلية Analytic geometry. إن هذه الأخيرة تبدأ بمناظرة النقاط على الخط الهندسي بمجموعة الأعداد الحقيقة وفقًا لعلاقة واحد بواحد؛ وحيث أن مجموعة الأعداد الحقيقة تؤلف متصلاً بالمعنى الرياضي الدقيق، فإن علاقة التناظر – ذات السمة الترتيبية – بين الأعداد الحقيقية ونقاط الخط تجعل الخط متصلاً بالمثل .

وفضلاً عن ذلك، إذا كان الخط الهندسي تمثيلاً صحيحًا لكافة الخطوط في المكان الفيزيائي، فمن الطبيعي إذن أن نصف المكان الفيزيائي بأنه متصل، ومن ثم نعالج الحركة كدالة لمتغير زمني متصل، والدالة ذاتها تصبح متصلة.

إن اتصال دالة الحركة ضروري وجوهري إذن وفقًا للمنظور الرياضي، لأننا نأخذ السرعة كمشتقة أولى لهذه الدالة، والعجلة كمشتقة ثانية، أما الدوال غير المتصلة فليست قابلة للتفاضل، وبالتالي ليست لها مشتقات، الأمر الذي يُفسر تمسك الفيزياء الرياضية بمبدأ الاتصال في كافة معالجاتها للحركة الواقعية. بل إن ثمة تطبيقات للمبدأ ذاته على الظواهر التي نعرف تمامًا أنها منفصلة؛ مثلما هو الحال بالنسبة لظاهرة الانحلال الإشعاعي Radioactive decay، حيث تُوظِف الفيزياء دالة متصلة لوصفها، مع أن البينة التجريبية تعكس انحلالات منفصلة للذرات المفردة!. كذلك الحال بالنسبة للنظرية الكهرمغنطيسية Electromagnetic theory، حيث نجد استخدامًا واسعًا لحساب اللانهائي الصغر في التعامل مع الشحنات Charges، حتى ولو كانت كل بينة تجريبية تشير إلى تكميم Quantization الشحنات (أي انتشارها بكميات منفصلة)[٥٠].

[٢٠ – ١] – على أن السؤال الذي يؤرق الفيزيائيين دومًا إزاء هذه التطبيقات، والذي تثيره مفارقات «زينون» من حين إلى آخر، هو ما إذا كان المتصل الرياضي يصلح كتمثيل دقيق

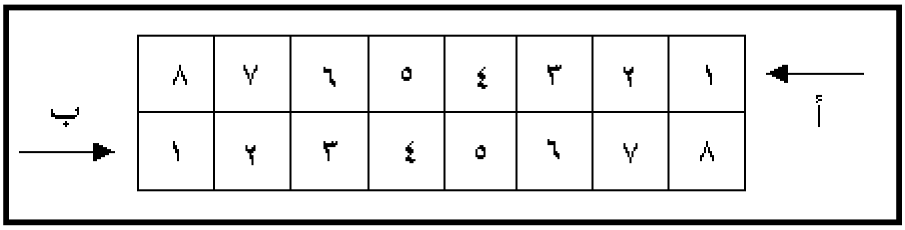
---

(٤٩) أنظر كتابنا: ***الاتصال واللاتناهي بين العلم والفلسفة***، سبق ذكره، ص ص ٩٨ وما بعدها.
(50) Salmon, Op. Cit, p. 144.

وحرفي للواقع الفيزيائي؛ حقًا أن القول بالاتصال يخدم أغراضًا علمية معينة، ويُقدم تقريبات جيدة للواقع، لكن لم لا نكتفي بالقول أنه مجرد أداة ؟. ولم نُصر – كعلماء أو كفلاسفة – على الزعم بأنه الوصف الدقيق والكامل للمكان والزمان والحركة؟. إن مفارقات «زينون» الثلاث الأولى – بغض النظر عن الهدف الأساسي لها، وهو البرهنة على انتفاء الحركة – تُثبت قبليًا أنه إذا كانت ثمة حركة، فإنها يجب أن تكون منفصلة، وباستثناء بعض الرؤى الميتافيزيقية – كتلك التي تبناها الفيلسوف الإنجليزي «فرانسيس برادلي» F. H. Bradley (١٨٤٦ – ١٩٢٤) – يُسلّم معظم الفلاسفة بأن الإجابة عن السؤال الخاص بواقعية الحركة يجب أن تستند إلى أساس تجريبي، فإذا كانت البينة التجريبية تؤكد أن الحركة بُعدٌ حقيقي من أبعاد العالم الفيزيائي، فإن السؤال التجريبي الأبعد الذي يواجهنا هو ما إذا كانت الحركة متصلة أم منفصلة، ورغم كونه سؤالاً صعبًا ونظريًا إلى حدٍ بعيد، إلا أن الإجابة عنه قبليًا تبدو أيضًا مستحيلة، ومع ذلك، فإن معظم إجابات الفلاسفة والعلماء – إن لم تكن جميعها – تحمل رائحة المصادرات القبلية على ما لا ندركه في الواقع، سواء أكانت تؤيد القول بالاتصال أو بالانفصال.

[٢٠ –٢] – لقد أدت محاولاتنا لحل مفارقات «زينون» وفقًا لمبدأ الاتصال إلى تناقضات تتجاوز نطاق المفارقات ذاتها. وقد أدرك «زينون» بعبقريته أن البعض منا قد يلجأ إلى الخيار المقابل، أعني إلى تبني مبدأ الانفصال، لكنه لم يعدم الوسيلة لقطع الطريق عليهم وهو ما تجلى في مفارقتي السهم والملعب؛ فعلى سبيل المثال، إذا كان السهم ينطلق من الموضع **(أ)** إلى الموضع **(ب)** بسرعة ثابتة، وكان المكان والزمان ذريين – أي مؤلفين من ذرات مكانية وزمانية منفصلة – فإنه يجب أن يشغل ذرات مكانية متجاورة خلال ذرات زمنية متلاحقة؛ فإذا انطلق بسرعة أقل، فإنه يجب أن يشغل على الأقل بعض الذرات المكانية خلال ذرة زمنية واحدة، أما إذا انطلق بسرعة أكبر، فمن الضروري أن يقفز بعض الذرات المكانية دون أن يشغلها أبدًا في مجرى رحلته!. وفضلاً عن ذلك، تضعنا مفارقة الملعب (ف ٦) أمام تناقض أشد وطأة؛ ذلك أنه من الممكن – إذا سلمنا بالنية الذرية للمكان والزمان – أن ينطلق سهمان باتجاه بعضهما البعض دون أن يلتقيا متوازيين، أعني دون أن يمرا ببعضهما البعض في نقطة محددة:

تخيل ممرين متوازيين متقاربين فوق بعضهما البعض، وتخيل أيضًا أنهما مؤلفان من ذرات مكانية منفصلة (كما في الشكل ١٤).

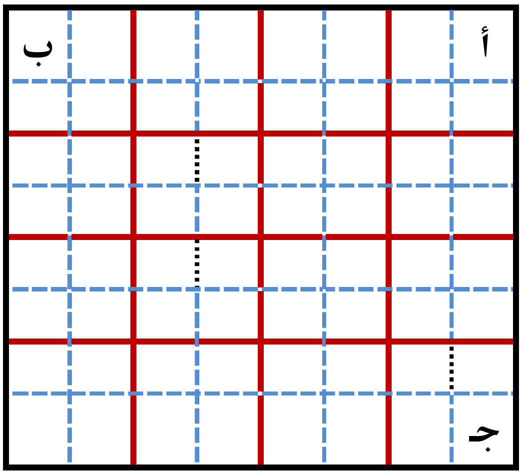


(الشكل ١٤)

والآن دع سهمًا ينطلق في أحد هذين الممرين في الاتجاه من **(أ)** إلـــى **(ب)**، فـــي حـــين ينطلق سهمًا آخر في الممر الثاني في الاتجاه من **(ب)** إلى **(أ)**. لا شك أن كـــل ســـهم منهمـــا سوف يتحرك – وفقًا لمبدأ الانفصال – بمعدل مربع واحد لكـــل ذرة زمنيـــة، وفـــي اللحظـــة الرابعة سنجد أن السهم المنطلق في الممر الأعلى هو على اليمين تمامًا من السهم المنطلق في الممر الأدنى. لكننا نفاجأ في اللحظة التالية بأن الوضع أصبح معكوسًـــا، فقـــد بـــات الســـهم المنطلق في الممر الأعلى على يسار السهم المنطلق أسفله؛ ففي أية لحظة إذن مرا ببعضـــهما البعض؟. الحق أننا إذا دققنا النظر فلن نعثر على تلك اللحظة، ولن نجـــد حـــدثًا – بـــالمنظور الرياضي – الفيزيائي يؤهلهما للتلاقي متوازيين خلال رحلة الانطلاق!(٥١).

[٢٠ – ٣] – وكمثال معاصر لاستحالة تكميم المكان رياضـــيًا (أو بـــالأحرى قبليًـــا)، يشـــير الرياضي الألماني «هيرمان فيل» إلى أننا إذا نظرنا إلى مكانٍ ذي بعدين بوصفه مؤلفًـــا مـــن عدد كبير من التربيعات (كما في الشكل السابق)، فسوف نواجه التناقض إزاء علاقات هندسية معينة نسلّم بالصحة التقريبية لها: خذ – على سبيل المثال – مثلثًا قائم الزاوية في مكـــان ذري (كما في الشكل ١٥)، وأنظر أولاً إلى التربيعات المرسومة بخطوط مُصمتة؛ حينئـــذ تجـــد أن طول كل ضلع من ضلعيه **(أ ب)** و**(أ جـ)** هو أربع وحدات، وكذلك أيضًا طـــول الـــوتر **(ب جـ)**. لكن مبرهنة فيثاغورث Pythagorean theorem تخبرنا بأن مساحة المربع المقام على الوتر في مثلث قائم الزاوية تساوي مجموع مساحتي المـــربعين المقـــامين علـــى الضـــلعين الآخرين، وهذا يعني أن المثلث قائم الزاوية، والذي يتألف كل ضلع من ضلعيه المتعامدين من أربع وحدات طول، يجب أن يكون له وتر طوله $\frac{٢}{٣}$ ٥ من هذه الوحدات.

(51) Ibid, pp. 145 – 146.



(الشكل ١٥)

هذا المثال يوضح شيئاً هامًا فيما يتعلق بمسألة التقريبات Approximation الرياضية؛ فمن السهل أن نقرر صعوبة التمييز بين الحركة غير المتصلة في المكان والزمان الذريين عن الحركة المتصلة إذا كانت ذراتنا المكانية والزمانية صغيرة بما فيه الكفاية. وقد نفترض كذلك أن علاقاتنا الهندسية سوف تقترب من قيمها الفعلية إذا جعلنا التربيعات صغيرة على نحوٍ كاف. لكن هذا الافتراض في الحقيقة هو افتراض خاطئ، وهو ما تؤكده نظرة سريعة إلى الشبكة الأدق (في الشكل ١٥) (أعني تلك المرسومة بالخطوط المصمتة والمتقطعة معًا)؛ فبدلاً من ١٦ **تربيعة**، لدينا الآن ٦٤ **تربيعة** تغطي مساحة المكان ذاته. وبالنظر مرة أخرى إلى مثلثنا، نجد أن طول كل ضلع من الأضلاع الثلاثة هو ثماني وحدات، ومهما جعلنا التربيعات أصغر فسوف يظل طول الوتر مساويًا لطول أي ضلع من الضلعين الآخرين!.

ومن المهم هنا أن نقاوم أية رغبة في تفسير الصعوبة – أو استبعادها – بالقول أن المسافة القطرية عبر أية تربيعة أطول من عرض أو ارتفاع التربيعة، وأننا يجب أن نضع ذلك في الاعتبار حين نقدر طول وتر المثلث؛ فمثل هذه الاعتبارات تكون شرعية بالتأكيد إذا كنا ننظر إلى التربيعات كانقسامات فرعية على خلفية مكانية متصلة، لها السمات الإقليدية المألوفة، لكن الفكرة الأساسية للتربيعات تمضي بنا بعيدًا عن تصور المكان المتصل، وتحل محله مكانًا ذريًا منفصلاً، وفي هذا الأخير تعتبر الذرة المكانية بمثابة وحدة واحدة، أي ليست لها أجزاء، وهذا كل ما هنالك![٥٢].

ولسنا نزعم بذلك أنه لا توجد وسيلة رياضية مناسبة لوصف بنية ذرية للمكان أو الزمان، إنما نزعم بالأحرى أنه من غير الشرعي أن نحاول البرهنة قبليًا على اتصال المكان و الزمان

(52) Ibid, pp. 146 – 147.

أو انفصالهما، ومن ثم نسعى إلى فرض تصوراتنا المجردة على العالم الفيزيائي قسرًا ونـــزعم أنها مرآته الصادقة؛ فإما أن تكون لدينا تصورات تتفق وتمثلاتنا التجريبية، وإمـــا أن نواجـــه التناقض؛ وإما أن يتراجع الواقعيون عن تبني النظرة الوصفية للطبيعـــة – بوصـــفها التبريـــر الوحيد لأنساقنا العلمية – وإما أن يعيدوا النظر في أسس الرياضيات وتجلياتها فـــي الفيزيـــاء المعاصرة.

هكذا ينتهي بنا جدل الثبات والحركة إلى مفترق طرق، شأننا في ذلك شأن التائه في البرية ، فهل نشهد قريبًا ثورة رياضية كتلك التي حمل لواءها رياضيو القرن التاسع عشـــر؟. وهـــل تنجح الفيزياء النظرية في الإفلات من شبكة التناقض العنكبوتية التي نسجها «زينـــون» بدقـــة منذ قرون طويلة؟. في الوقت الراهن، تبدو الرياضيات وكأنما لديها قناعة بتصوراتها، وتبـــدو الفيزياء وكأنما هي في انتظار الحل الرياضي، وما علينا بدورنا سوى أن ننتظر، ولن ننتظـــر طويلاً ما دام شبح «زينون» يطاردنا.

وعلى الله قصد السبيل والله أعلم

المراجع:

أولاً: المراجع باللغة العربية (مؤلفة ومترجمة):

١. أرسطو: ***الطبيعة***، ترجمة اسحق بن حنين، تحقيق عبد الرحمن بدوي، طـ ١، الدار القومية للطباعة والنشر، القاهرة، ١٩٦٥.

٢. ألكسندرا غيتمانوفا: ***علم المنطق***، دار التقدم، موسكو، ١٩٨٩ (لم يرد اسم المترجم).

٣. إمام عبد الفتاح إمام: ***المنهج الجدلي عند هيجل***، طـ٢، دار المعارف، القاهرة، ١٩٨٥.

٤. إمانويل كانط: ***مقدمة لكل ميتافيزيقا مقبلة يمكن أن تصير علمًا***، ترجمة نازلي إسماعيل حسين، مراجعة عبد الرحمن بدوي، دار الكتاب العربي للطباعة والنشر، القاهرة، ١٩٦٨.

٥. برتراند رسل: ***مقدمة للفلسفة الرياضية***، ترجمة محمد مرسي أحمد، مراجعة أحمد فؤاد الأهواني، مؤسسة سجل العرب، القاهرة، ١٩٨٠.

٦. صلاح عثمان: ***الاتصال واللاتناهي بين العلم والفلسفة***، منشأة المعارف، الإسكندرية، ١٩٩٨.

٧. علي سامي النشار وآخرون: ***ديموقريطس (فيلسوف الذرة وأثره في الفكر الفلسفي حتى عصورنا الحديثة)***، الهيئة المصرية العامة للكتاب، منطقة الإسكندرية، ١٩٧٠.

٨. لانداو وآخرون: ***الفيزياء العامة (الميكانيكا والفيزياء الجزيئية)***، ترجمة أحمد صادق القرماني، دار مير للطباعة والنشر، موسكو، ١٩٧٥.

٩. يوسف كرم: ***تاريخ الفلسفة الحديثة***، طـ٦، دار المعارف، القاهرة، ١٩٧٩.

١٠. هربرت ماركيوز: ***نظرية الوجود عند هيجل***، ترجمة وتقديم وتعليق إبراهيم فتحي، طـ٢، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، ١٩٩٠.

١١. هنري برجسون: ***التطور الخالق***، ترجمة محمود قاسم، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، ١٩٨٤.

ثانياً: المعاجم العربية:

١. عبد المنعم الحفني: ***الموسوعة الفلسفية***، دار ابن خلدون & مكتبة مدبولي، القاهرة، طـ١، بدون تاريخ .

٢. مجمع اللغة العربية: ***المعجم الفلسفي***، تصدير إبراهيم بيومي مدكور، الهيئة العامة لشئون المطابع الأميرية، القاهرة، ١٩٨٣.

٣. مجمع اللغة العربية: ***المعجم الوجيز***، تصدير إبراهيم بيومي مدكور، طبعة خاصة بوزارة التربية والتعليم المصرية، القاهرة، ١٩٩٠.

ثالثاً: المراجع باللغة الإنجليزية:

1. Allis, V. & Koetsier, T., 'On Some Paradoxes of the Infinite', *British journal for the Philosophy of Science*, 42 (1991), pp. 187 – 194.
2. Berresford, G. C., 'A Note on Thomson's Lamp Paradox', *Analysis*, 41 (1981), pp. 1 – 7.
3. Black, M., 'Achills and Tortoise', *Analysis*, XI, 1 (1950), pp. 91 – 101; Reprinted in Salmon, W. (ed.), *Zeno's Paradoxes*, PP. 71 – 81.
4. Boyer, C.B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, N.Y., 1959.
5. Carr, Brian, *Metaphysics: An Introduction*, Macmillan education LTD, London, 1987.
6. Davies, E. B., 'Building Infinite Machines', *British Journal for the Philosophy of Science*, 52 (2001), pp. 671 – 682.
7. Grünbaum, Adolf, 'Relativity and Atomicity of Becoming', *Review of Metaphysics*, IV, 1 (1950), pp. 143 – 186.
8. Hegel, G.W.F., *Lectures on the History of Philosophy*, Trans. By E.S. Haldane & F.H.Simson, Routledge & Kegan Paul, Ltd., Second Impression, London, 1955.
9. Laraudogoitia, Pẻrez, J., 'A Beautiful Super-task', *Mind*, 105 (1996), pp. 81 – 83.
10. Lucas, J. R., *A Treatise on Time and Space*, Methuen & Co., Ltd., London, 1973.
11. Mclaughlin, W. L., 'Thomson's Lamp is Dysfunctional', *Syntheses*, 116 (1998), PP. 281 – 301.
12. Russell, B., *Our Knowledge of the External World*, Routledge Inc., London & N.Y., 1993.
13. Salmon, W.C. (ed.), *Zeno's Paradoxes*, Bobbs – Merrill, Indianpolis, 1970.
14. Salmon, W., 'A Contemporary Look at Zeno's Paradoxes', in Peter Van Inwagen & Deam W. Zimmerman (eds.), *Metaphysics: The Big Questions*, Blackwell Publishers Inc., Malden, Massachusetts, 1998, pp. 129 – 149.
15. Vlastos, G., 'Zeno of Elea', in *Encyclopedia of Philosophy*, Ed. By Paul Edwards, N.Y., 1967, Reprinted 1972, Vol. 8, PP. 369 – 379.

رابعًا: المعاجم الإنجليزية:

1. Academician G. S. Landsberg (ed.), *Textbook of Elementary Physics*, Trans. from Russian by A. Troitsky, Mirr publishers, Moscow, 1972.
2. Edwards, P. (editor – in – Chief), *The Encyclopedia of Philosophy*, Macmillan publishing Co. , Inc. & The Free Press , N.Y., 1967 ; Reprinted 1972.
3. Pickett, J.P. (ed.), *The American Heritage Dictionary of the English Language*, Fourth edition, Houghton Mifflin co., Boston, 2003.