Preprint. Appeared in the 2004 volume of the Mathesis Association in Turin.

Peano e la filosofia della matematica

Enrico Pasini
Dipartimento di Filosofia
Università di Torino

Sommario

Di Peano è noto l'atteggiamento reticente nei confronti della filosofia, anche di quella della matematica. È stata ipotizzata una filosofia 'implicita', senza però riuscire a delinearla. Si proverà a ricostruire, seguendo una linea d'indagine non troppo battuta, se non la sua filosofia matematica in generale, alcuni tratti della sua epistemologia della matematica e dei rapporti di questa con le posizioni di alcuni contemporanei.

...qu'on ne s'y trompe pas: dans les Sciences mathématiques,
une bonne notation a la même importance philosophique
qu'une bonne classification dans les Sciences naturelles.
H. Poincaré [1898, x]

SENZA PRETESE. È noto che Peano non amava si parlasse di lui. Quando nel 1928, settantenne, i suoi collaboratori interlinguisti vollero preparargli una *Festschrift*, scrisse loro: « Vos, o delecto amicos, nosce multo bene quanto me es alieno de qualcumque forma de publicitate; ergo, meo preferentia personale, es pro silentio circa me ».[1] Analogo atteggiamento schivo, quando non era reticenza, Peano manifestò, a quanto pare, riguardo ai suoi rapporti col nostro tema: non sappiamo pressoché nulla di preciso delle sue opinioni su quella che noi chiamiamo 'filosofia della matematica' e, in genere, chi ne ha scritto non sembra sapere nemmeno che cosa lui avrebbe inteso con tale espressione, posto che l'avesse usata.[2] L'usò, in effetti, almeno una volta: ma su questo torneremo più avanti.

Vi sono certo, in questo come in ogni altro ambito d'indagine, studi i quali fornirono orientamenti generali che sembrano imprescindibili: non si può fingere di non conoscere, in materia, i saggi dell'allievo Ludovico Geymonat, o del biografo di Peano, Hubert Kennedy. Ma, appunto, la nota che prevale in quest'ultimo è proprio l'incertezza riguardo all'oggetto stesso dell'indagine: « Did Peano have a philosophy of mathematics? This question is less easy to answer then one might think » [Kennedy 1963, 262].

[1]Poi, conciliante, aggiungeva: « Tamen, nam in isto modo vos habe facto et pote fac novo propaganda pro Interlingua, Vestro idea es digno de encomio. Et tunc, toto corde, me age gratias ad Vos et ad omne amico que collabora cum Vos » [Canesi et al. 1928, 6]. In parziale omaggio all'interlinguismo peaniano e per amore del colore locale che trasmettono, non si tradurranno le citazioni in latino sine flexione.

[2]E se lui non la considera, essa, certo non per rappresaglia ma per una di quelle ovvie simmetrie indotte dal destino, generalmente non lo annovera tra i 'suoi' autori. P. es. in un testo classico d'introduzione alla filosofia della matematica [Benacerraf e Putnam 1983], sulle cui pagine si sono accostate ad essa generazioni di studenti statunitensi, non si nomina Peano neppure di passaggio.

Almeno altrettanta perplessità pervade i famosi resoconti di Geymonat dei suoi colloqui sulla filosofia dell'aritmetica con l'anziano maestro:

> Nel 1931, mentre frequentavo il corso di Matematiche Complementari tenuto da Peano all'Università di Torino, ebbi varie occasioni di discorrere con lui, che mi sapeva già laureato in filosofia, su questi delicati argomenti. ... Non riuscii mai, tuttavia ... ad ottenere da Peano una risposta precisa in merito. Preferiva ricorrere a parole scherzose o evasive, dicendomi trattarsi di questioni filosofiche sulle quali egli era "assolutamente incompetente". [Geymonat 1955, 56]
>
> Se è doveroso riconoscere questa incertezza di Peano, sarebbe però superficiale attribuirla ad una sua incapacità di scorgere il problema filosofico sottostante a quello matematico. Mi sembra più esatto riconoscere, al contrario, la serietà critica del suo atteggiamento, ispirato a una cautela anche eccessiva. Il tono leggermente ma costantemente ironico con cui parlava delle discussioni filosofiche, non era forse la trincea dietro cui voleva difendersi dalla tentazione delle teorie affrettate dei "filosofi"? [Ivi, 62-63]

Si potrebbe fare qualche considerazione amena sulla diffidenza che dovevano ispirargli i colleghi filosofi dell'Università: non sul piano personale, ché i rapporti con Annibale Pastore erano ottimi, ma senza dubbio su quello dottrinale.[3]

La coltre nebbiosa che Geymonat, allora laureatosi da poco appunto con Pastore, percepiva avvolgere le conversazioni con Peano, oltre a spiegarsi, se si vuole, come indizio di senilità (volgeva ormai l'anno della morte di Peano), poteva essere dunque voluta:

> Senza dubbio Peano, con la sua *rare immunity from error*,[4] aveva perfettamente ragione di sostenere la natura più filosofica che scientifica della teoria russelliana dei numeri ... Meno facile è, invece, decidere se Peano avesse o no una propria filosofia dei numeri. Per molto tempo pensai di no, influenzato in questo dall'impostazione russelliana di tal genere di studi. Oggi al contrario[5] sono propenso a credere che la possedesse, e certo assai diversa dalla filosofia di Russell. Usava tuttavia trattare l'argomento con estrema riservatezza, date le enormi difficoltà che si celano in esso. [1955, 56-57]

Anche nutrendo, come nel nostro caso, ambizioni modeste, affrontare il rapporto di Peano con la 'filosofia della matematica' potrebbe risultare dunque abbastanza impegnativo. Del resto, se il primo termine della relazione è notoriamente una sfinge,[6] il secondo termine, in fondo, non sappiamo tanto bene che cosa sia.

SPECCHIETTI PER LE ALLODOLE. La cosa più semplice è, naturalmente, dare per scontato che la filosofia della matematica con cui mettere in relazione il nostro eroe coincida con il *mainstream*, ricostruito a posteriori, del dibattito fondazionale di fine Ottocento e primi Novecento. Da una parte, in questo modo si offre un solido terreno a un genere di studi assai utili: quelli sui 'contributi', che richiedono appunto una cornice disciplinare determinata.[7]

[3] Affascinato dalla logica simbolica, Pastore negava però valore ontologico all'identità logica e cercava perciò un'alternativa filosofica alla legge di semplificazione di Jevons $aa = a$. Rimasto colpito dall'osservazione nei *Principi di logica matematica* di Peano che tale identità « non ha l'analoga in algebra » [OS 2, 93], pensò che mentre nella logica degli enunciati 'piove' e 'piove' resta uguale a 'piove', per gli enti avverrà come in algebra l'elevazione a potenza $aa = a^2$, nella loro relazione si potenzieranno a vicenda e, di tale 'potenziamento', occorrerà una logica con proprie leggi e simboli. Di tutto ciò Peano non capiva molto, né probabilmente desiderava capirne.

[4] L'impegnativo complimento è, come si sa, dovuto a Russell: « In order to prove that ordinals are prior to cardinals, it would be necessary to show that the cardinals can only be defined in terms of the ordinals. But this is false, for the logical definition of the cardinals is wholly independent of the ordinals† ». In nota: « †Professor Peano, who has a rare immunity from error, has recognized this fact. See *Formulaire*, 1898, 210, note (p. 39) » [Russell 1903, § 230].

[5] Una volta svaporatosi il capo dal logicismo, come racconta a p. 59, grazie alla lettura dell'*Introduzione al pensiero matematico* di Waismann.

[6] « Oggi di Peano si parla senza riserve e pregiudizi; con questo non si può dire che sia stato chiarito il mistero di Peano » [Lolli 1982, 361].

[7] Abbiamo così analisi eccellenti dei contributi di Peano e dei suoi collaboratori allo sviluppo della logica formale o alla ricerca fondazionale [Quine 1987; Borga et al. 1985].

D'altra parte, questo approccio spinge a leggere ogni vicenda di sapore vagamente fondazionale, lungo alcuni decenni di storia della matematica, come se dovesse incastonarsi in un *Bildungsroman* più o meno storiograficamente fantasioso, un movimento progressivo che unisca Frege, Dedekind e Peano [Gillies 1982],[8] per culminare, in contrapposizione alla vecchia logica algebrica (Boole, De Morgan, Peirce, Schröder), nell'opera di Russell [Grattan Guinness 1988]; oppure che veda il nostro come un « antesignano del ... Bourbakismo » [Segre 1955, 32]. Indossato quel paraocchi dello sguardo storico che Corfield ha chiamato 'filtro fondazionale' (*foundationalist filter*),[9] al contenuto filosofico-matematico non occorre riconoscere specificità, ma, come nelle gare olimpiche, l'importante è la partecipazione. Oppure, in alternativa speculare, si finisce con l'identificare come prestazione di carattere filosofico ogni manifestazione di estraneità allo sforzo di fondazione logica della matematica.[10]

A quel punto, imboccati certi indirizzi interpretativi *prêt-à-porter*, resta spazio al più per dedicarsi a qualche ulteriore distrazione, come le questioni di priorità: forse che gli assiomi di Peano non erano già stati formulati da Dedekind?[11] E poi avremo lo sforzo giustificativo e difensivo, che associa emuli e allievi, e l'entusiasmo, che spesso prende gli studiosi, nei confronti dei protagonisti dei loro lavori.[12]

Rispetto a queste strade maestre, che però sollevano una serie di difficoltà metodologiche che non desideriamo affatto dover sormontare, sceglieremo invece un approccio il più semplice possibile. Inizieremo pertanto, secondo quanto già accennato, col domandarci che cosa potesse essere 'filosofia della matematica' per Peano.

FILOSOFICAMENTE PARLANDO. C'è modo e modo di parlare della matematica, del suo carattere e del suo fondamento. Nell'*Introduzione* che Grassmann appose alla prima edizione dell'*Ausdehnungslehre* (1844), si legge:

> La matematica pura è dunque la scienza dell'essere *particolare* in quanto *divenuto* mediante il pensiero. L'essere particolare, preso in tal senso, lo chiamiamo una forma del pensiero o, semplicemente, una *forma*. Pertanto la matematica pura è *dottrina di forme*. ... Ogni divenuto mediante il pensiero ... può esser divenuto in due modi, o mediante un atto semplice del *produrre*, o mediante un duplice

[8] Magari nella variante propria degli studiosi più appassionati di Frege, ove, abbastanza comprensibilmente, il principale merito di Peano è di aver diffuso idee che, in quanto corrette, erano di Frege, e il demerito principale, seppur non esclusivamente suo, viene dal non aver condiviso l'impostazione freghiana [Gabriel 1998].

[9] « Our job is to dismantle it, in the process demonstrating that philosophers, historians and sociologists working on pre-1900 mathematics are contributing to our understanding of mathematical thought, rather than acting as chroniclers of proto-rigorous mathematics » [Corfield 2003, 8].

[10] « Despite Peano's denial of philosophical competence, we find a rejection of the logicist thesis of the reduction of mathematics to logic » [Kennedy 1963, 264]; la sua logica è soltanto uno strumento per offrire « clear and rigorous presentation of arithmetic, and in consequence, of mathematics in general », essendo la matematica perfetta in sé e necessitante solo della formulazione più precisa possibile, a partire da entità non definibili. Non si fa molta strada: « He was a foundationist inasmuch as he endeavored to establish the basis for the indubitability of mathematics »; ma dato che in fondo nessuno, colleghi studenti o filosofi, sopportava di studiare i suoi simboli, « even limited to the rigor of symbolic presentation, Peano's foundationism was a failure » [Segre 1994, 205].

[11] Le questioni di priorità, del resto, non hanno fine. Si può ricordare il saggio di Peirce del 1905, intitolato *Ordinals*: « Rendo pieno omaggio a Cantor. È indiscutibimente l'*Hauptförderer* dell'intera dottrina logica dei numeri. Quanto a Dedekind, il suo libriccino *Was sind und was sollen die Zahlen* è ingegnosissimo ed eccellente. Ma non dimostra nessun teorema che non avessi dimostrato o pubblicato io stesso anni prima, e il mio saggio gli era stato inviato », ecc. ecc. [CP 3.268].

[12] Hubert Kennedy, massimo biografo di Peano e in seguito storico di vaglia della cultura omosessuale, scrisse nel 1983 un breve articolo, rimasto inedito per ragioni contingenti ma comprensibili, intitolato *Peano–the Unique*: « It was written for a *Festschrift* in honor of Ludovico Geymonat ..., but was rejected by the editors, Corrado Mangione and Umberto Bottazzini, who spent a complete evening trying to pressure me into writing something else. The article reflects my recent enthusiasm for Max Stirner, which may be what they objected to » [Kennedy 1983/2002]. Non ho chiesto agli interessati, ma forse anche l'idea d'inviare un saggio in cui si sostenesse esser l'*unico* un altro dal dedicatario della raccolta poteva esser stata considerata un poco indelicata.

atto del *porre* e del *connettere*. Ciò che è divenuto nel primo modo è la *forma continua*, o la *grandezza* in senso stretto; ciò che è divenuto nel secondo modo è la *forma discreta*, o *forma di connessione*. [GW 1, 23-24]

Nella recensione al primo volume dei *Werke* di Grassman, apparso nel 1894, Peano avrebbe spiegato la scarsa diffusione dei metodi del « professore ginnasiale di Stettin » con « la tendenza all'astrazione, il suo modo filosofico di presentare le questioni » [OS 3, 341]; e nel *Saggio di calcolo geometrico* del 1895 parlava di forma « metafisica e nebulosa » [Ivi, 168]. Lo *specimen* citato poc'anzi rende certo tale atteggiamento abbastanza comprensibile.

Nella *Prefazione*, Grassmann osservava di aver dedicato l'*Introduzione* all'inquadramento filosofico del nuovo ramo delle scienze matematiche da lui presentato, anche « per non spaventare subito i matematici con la forma filosofica. Regna infatti tra i matematici una certa ritrosia, forse non ingiustificata, nei confronti dell'impostazione filosofica degli oggetti matematici e fisici » [GW 1, 15]. Questa contrapposizione grassmanniana di filosofi e matematici si ripresentava, rovesciata, nella recensione dedicata da Peano al primo volume delle *Vorlesungen über die Algebra der Logik* di Schröder, nel 1891:

Il libro dello Schröder contiene moltissime discussioni, spesso di pura filosofia, che può benissimo tralasciare chi intenda servirsi a solo scopo pratico di questo nuovo strumento. L'A. invero destina il suo libro a due specie di lettori oggidì troppo diversamente predisposti, ai matematici cioè e ai filosofi. [OS 2, 114-115]

L'evocazione della filosofia e delle sue discipline (la metafisica), insomma, non si accompagnava in Peano, alla metà degli anni '90, ad associazioni positive. Matematica e filosofia erano due campi d'indagine non solo diversi, ma contrapposti. E Peano aggiungeva: « Non seguirò l'A. nella parte filosofica, essendone io incompetente » [OS 2, 115]. 'Assolutamente incompetente', come avrebbe ripetuto più tardi a Geymonat; e come sottintendeva anche nel 1915: « La logica matematica, utile nei ragionamenti matematici (ed in questo solo senso io ne feci uso), interessa pure la filosofia » [OS 3, 396].

Qui, da una parte, vediamo ribadita l'usuale affermazione di estranea incompetenza in ambito extramatematico. Bisogna osservare che in verità, dal punto di vista di Peano, occuparsi di fondazione della matematica non comporta necessariamente scendere sul terreno della filosofia, né sviluppare riflessioni sulla matematica in generale. Innanzitutto i fondamenti, ossia i principi fondamentali, le rispettive formulazioni assiomatiche, sono nell'elaborazione di Peano diversi e specifici per l'aritmetica, per la geometria, per la meccanica: questo perché, come già suggeriva Freguglia [1985, 211], le branche stesse della matematica appaiono a Peano, come a molti altri matematici, *teorie* appartenenti a una stessa *scienza*, capaci di sviluppo indipendente.[13] E Peano, fin dai suoi primi scritti, era sicuramente interessato profondamente alla 'fondazione', ossia ai problemi relativi ai principi fondamentali, ma non come un problema filosofico, bensì come un problema schiettamente matematico.

Ma d'altro canto, la considerazione sull'interesse filosofico della logica matematica sembra molto più amichevole di quanto letto in precedenza. E, in effetti, quell'atteggiamento verbale così negativo muterà un poco, ma in modo importante, col volgere del secolo. Nel 1912 Peano inserisce nelle *Discussiones* dell'Academia pro Interlingua un gruppo di recensioni di testi matematici o logico-matematici. A proposito delle conferenze di Alessandro Padoa su *La logique deductive dans sa dernière phase de dèveloppement*, apparsi nella *Revue de Métaphysique et de Morale*, gli accade di osservare ironicamente: « Logica-mathematica, scientia commune ad logica et ad mathematica, es considerato ab professores de philosophia ut mathematica, et ab professores de mathematica ut philosophia, et ambo dice: "non leguntur" » [Peano 1912, 48].

[13]Esse stesse possono considerarsi scienze matematiche al cui interno si possono sviluppare diverse teorie.

Ormai, il tono si fa conciliante; matematico e filosofico diventano una coppia, invece che un'antitesi. Sempre nel 1912, nella *Prefazione* all'edizione in volumetto del lavoro di Padoa, scrive: « Enfin, bien qu'il soit assez mince, ce traité fait connaître tout ce qu'on sait sur cette science, qui interesse aussi bien les philosophes que les mathématiciens » [Peano 1912*d*, 4]. Tra i libri che Peano consigliava agli interlinguisti, sostenendone l'interesse in pari tempo matematico e filosofico, vi è la traduzione italiana di una serie di lezioni di I.W. Young sui *Concetti fondamentali dell'algebra e della geometria*: « Isto libro es de maximo interesse mathematico; es instrumento necessario ad professores et ad cultores de philosophia » [Peano 1923]. Ancora nel 1923, segnala il volume di Alpinolo Natucci, *Il concetto di numero e le sue estensioni*, « Libro de nostro consocio es de maximo interesse mathematico et philosophico » [Peano 1923*b*, 6].

Ha preso inoltre esistenza nel lessico di Peano, e questo è ancor più significativo, la 'filosofia matematica'. Scrive Peano a Russell nel 1903: « Grazie del suo libro *The Principles of Mathematics* ... Ho vivo desiderio di parlarle diffusamente di questo suo libro, che fa epoca nel campo della filosofia matematica » [Kennedy 1975]. L'espressione, analoga a quella di 'logica matematica', dovrebbe indicare — giusta la succitata definizione di quella — l'ambito comune alla filosofia e alla matematica; e se un tale ambito esiste, allora, volenti o nolenti, si potrà o dovrà farsene un'opinione.

Torniamo un momento a Geymonat. Tra i brani più citati per evidenziare l'anti-logicismo di Peano, vi è un passo del saggio del 1921 su *Le definizioni in matematica*: « La definizione di *classe* mediante *gruppo* o *insieme* o *proprietà* è un circolo vizioso, come quella di *funzione* mediante *relazione* o *corrispondenza* o *operazione*. Arrivati a queste idee elementari, non si può oltre procedere che coi simboli ». [OS 2, 427]. Su ciò torneremo; Geymonat, da parte sua, commenta: « Nella loro semplicità queste parole sembrano ignorare la pretesa "filosofica" di Russell...; in realtà costituiscono una risposta ad essa, riportandola al medesimo piano delle altre sistemazioni dell'aritmetica e della geometria. Esse contengono implicitamente, proprio perciò, una filosofia » [1955, 62]. Se non è vero, è ben trovato — come gli assiomi, secondo una dottrina metodologica diffusa all'epoca di Peano, definiscono implicitamente gli oggetti della teoria, pareri e giudizi definirebbero implicitamente la filosofia di chi li formula.

PAROLE FUGGITE. L'espressione 'filosofia della matematica', negli scritti di Peano, è rara: forse addirittura un *hapax*. Benché non sia un genere letterario troppo invitante, dobbiamo andare a scovarla in un necrologio:

> M. le commandant GASTON COMBEBIAC more in 12-VII-1912, in ætate de 50 anno. Mathematico valente, auctore de numeroso publicatione, in ultimo tempore dedica se ad philosophia de mathematica, ad analysi de principios. »[14]

Dunque la filosofia della matematica è l'analisi dei princìpi. Ora questa espressione, invece che agli anni matematicamente torpidi del Peano novecentesco, ci rimanda assai più addietro. 'Princìpi' è parola chiave per Peano già dal 1889, quando appare quel suo famosissimo opuscolo dal titolo enigmatico di *Arithmetices principia nova methodo exposita*. I principi, i *principia*, sono i fondamenti,[15] ovvero le proposizioni fondamentali (assiomi e primi teoremi) formula-

[14] « In plure articulo, in *L'Enseignement mathématique* stude 'Theoria de mensura', 'Postulatos de ordine lineare', ... ultimo suo scripto es *Sur l'axiome planaire de M. Peano* » [Peano 1912*c*]. Combebiac non era una celebrità (per dire, il Poggendorff [1925, s.v.] lo chiama Gustave). Aveva sostenuto una tesi sul *Calcul des triquaternions* a Parigi nel 1902, positivamente segnalata da P. Appell nella *Revue générale des sciences pures et appliquée*, e in argomento aveva scritto nel *Bull. de la Soc. math. de France*, 1899. Ivi apparirà, tra altre, una sua nota sui *Principes de l'analysis situs* nel 1906. Era socio altresì dell'Academia pro Interlingua.

[15] Come il *Was sind und was sollen die Zahlen* di Dedekind, in cui, scrive in un'aggiunta dell'ultimo momento, « quæstiones, quæ ad numerorum fundamenta pertinent, acute examinantur » [OS 2, 22].

ti simbolicamente. Cos'è qui la logica? Un nuovo metodo[16] per esporre la matematica: « Hic meus libellus ut novæ methodi specimen habendus est » [OS 2, 22]. Con le sue notazioni (*notationibus*, *logicæ signis*) si possono esprimere gli enunciati di ogni scienza, purché, si noti, « adiungantur signa quæ entia huius scientiæ repræsentant » [Ivi, 22-23].

Sovente accade, nello studio di un personaggio, di dividerne l'attività in 'fasi'. Ogni storico indulge a queste pratiche e al tempo stesso ne diffida. Nel caso di Peano si è usi riconoscere delle epoche in cui prevalgono determinati ambiti di ricerca: un periodo in cui primeggiano analisi, geometria ed aritmetica; centro dei suoi interessi saranno poi la logica matematica e l'attività di sistemazione rigorosa; infine lingua internazionale e didattica. Non sono ambiti di attività, o temi, esclusivi: prevalgono sia quantitativamente sia per centralità, ma preesistono o persistono anche nelle altre fasi. Si può vedere l'apparizione nel 1891 delle *Formole di logica matematica* come inizio della seconda fase e il 1903 può degnamente inaugurare la terza.[17] La massima concentrazione sulla questione dei fondamenti si ha forse nella prima fase, l'interesse didattico appare ovviamente già nella seconda (e l'elemento didattico è direttamente connesso con la questione dei fondamenti, ossia dei principi fondamentali);[18] l'ultima è anche il periodo in cui Peano si dedica maggiormente e con più lucidità a esplicitare, se ce n'è una, la sua filosofia implicita, o quantomeno, come vedremo, la sua epistemologia matematica.

Quel che è ovvio domandarsi è: quali sono, se ci sono, gli elementi di continuità? E pertanto si possono usare testi, p. es. degli anni '20, come rappresentativi? È logico, d'altronde, che elementi di continuità vi siano: saranno non tanto « motivi analoghi, ed elementari » di tutta la sua attività, come diceva Ascoli [1955, 23], quando piuttosto interessi, valori, atteggiamenti, concezioni generali più o meno dichiarate.

IL RIGORE È DI RIGORE. Gli scritti della prima fase dell'attività di Peano offrono notoriamente l'immagine di un matematico specialmente esigente e scrupoloso.[19] Già nelle note al Genocchi si apre, come sappiamo, la caccia alle « proposizioni male enunciate e male dimostrate in gran numero di trattati » [OS I, 70]. Per certo le proposizioni devono essere *esatte*, le dimostrazioni *rigorose*, le definizioni *precise*, espressioni che ritornano sovente nei suoi scritti e che fanno parte appunto del vocabolario, ma potremmo dire del sistema di valori dell'analista matematico di avanguardia di quegli anni, valori che Peano interpreta con particolare convinzione ed efficacia. Le stesse richieste saranno poi rivolte alla notazione analitica della logica; nella *Préface* al primo *Formulario* Peano prescrive: « La seule loi qui règle les notations du Formulaire, c'est qu'elles soient les plus simples et les plus précises, pour représenter les propositions dont il s'agit » [Peano 1895, iv].[20]

[16]Forse in quest'espressione *nova methodus* c'è un richiamo a Leibniz, che sarebbe però fuorviante, se non venisse precisato da 'exposita'. Il titolo è riproposto dallo scritto del 1889, successiva pietra miliare nello sviluppo delle dottrine logico-matematiche di Peano: *I principii di geometria logicamente esposti*; il metodo, ovviamente, non è più nuovo.

[17]« Post 1903, me scribe in "latino sine flexione", lingua sine grammatica, et sine vocabulario proprio, que non pote es objecto de speculatione aut de commercio. Tale lingua servi ad me, et suffice » [Peano 1925*b*, 19].

[18]Nel primo numero della « Rivista di matematica » (1891) si legge: « La Rivista di matematica ha scopo essenzialmente didattico, occupandosi specialmente di perfezionare i metodi di insegnamento. Essa conterrà pure articoli e discussioni riferentisi ai principii fondamentali della scienza, e alla storia delle matematiche; vi avrà parte importante la recensione dei trattati, e di tutte le pubblicazioni che riguardano l'insegnamento » [Peano 1891].

[19]« In questi lavori [i primi fino al 1887], come nelle "aggiunte" a Genocchi 1884, Peano rivelava uno degli elementi caratteristici della sua maniera d'intendere l'analisi, e cioè la costante ricerca di una sempre maggiore semplicità e chiarezza nelle definizioni, uno sforzo continuo verso l'indebolimento delle ipotesi nei teoremi e la conseguente maggiore generalità degli enunciati; un atteggiamento che era di Weierstrass in primo luogo e che Peano faceva proprio » [Bottazzini 1985, 34].

[20]La ricerca fondazionale è spinta anch'essa dall'impulso del rigore e la formalizzazione della matematica nasce nel Peano della prima fase come elemento e strumento di quello, secondo « quel senso di *mathesis universalis* che

Nella memoria *Sulla integrabilità delle funzioni* del 1883, lamenta che l'esistenza dell'integrale « non è argomentata sempre con rigore e semplicità desiderabili in tale questione » e si propone d'introdurre con ragionamento « analitico » una « semplicissima considerazione di integrabilità » [OS I, 25]. Associata al rigore è, infatti, la semplicità: dirà appunto in pregio della sua definizione d'integrale definito (quella già indicata da Peano nel 1883), rispetto a quella di Riemann, che « pare alquanto più semplice » [Ivi, 73]. Nella memoria *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine*, lamenta che « le dimostrazioni finora date dell'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali lasciano a desiderare sotto l'aspetto della semplicità » [Ivi, 74]. Ora la semplicità è strettamente collegata, come pur il rigore, all'eliminazione del superfluo: bisogna rifuggire dalle « condizioni restrittive sovrabbondanti », ché, sebbene ciascuno possa introdurre « condizioni superflue » a suo piacimento, « è chiaro che se esse si possono abolire senza rendere più complicata la dimostrazione, rendendo invece più semplice l'enunciato del teorema, convenga sopprimerle » [OS 3, 329-330]. Come scrive nel 1890 (*Sur l'interversion des dérivations partielles*), occorre ridurre *al minimo*, « réduire au minimum les conditions nécessaires à la démonstration du théorème » [OS I, 117].

Questi sono davvero i valori più durevoli della *Gesinnung* di Peano e se in testi successivi, avendo guadagnato un'autorità sufficiente, tralascerà di esibire analoghi proclami metodologici, i criteri epistemologici rimaranno, p. es. nelle recensioni, gli stessi. Sulle *Discussiones* della Academia pro Interlingua, come dicevamo, Peano inseriva di quando in quando segnalazioni di libri di matematica, magari con un accenno giustificativo del tipo: « es interessante ad omni cultore de geometria ».[21] Appunto questo scrive quando nel 1912 recensisce gli *Elementi di geometria* di Angelo Pensa, a proposito dei quali commenta:

> Nos nuntia isto libro de nostro consocio, per causa de rigore in tractatione de geometria, conjuncto cum mirabile simplicitate de methodo. Ideas fundamentale de geometria es definito in modo physico; non in modo logico; nam es noto que antiquo et moderno definitiones, putato logico, de puncto, recta, etc. es circulo vitioso. Complicatione de libros ordinario de geometria deriva ex multitudine de inexactitudines in illos. Suffice de supprime errores, et resulta libro rigoroso et simplice. [Peano 1912*b*]

Nella recensione dell'*Algebra elementare* di Sebastiano Catania (1924) troviamo analoghe formulazioni:

> Expositione es semper claro et rigoroso, cum utiles applicatione; contra opinione de plure auctore, que reduce mathematica ad expositione verbale de definitiones tautologico, et de demonstrationes illusorio. [Peano 1925]

OMNIS DEFINITIO PERICULOSA. Torna l'idea, che abbiamo or ora considerato, che le definizioni presunte logiche delle idee fondamentali si debbano basare su un circolo vizioso. « In primo luogo, non si può tutto definire » [OS 3, 275]. Peano argomenta, in *Sul concetto di numero* (1891), che per decidere la questione della definizione « occorre sia detto prima di quali idee ci possiamo servire. Qui si suppongono note le sole idee rappresentate dai segni $\cap$ (e), $\cup$ (o), $-$ (non), ϵ (è), ecc., ... E allora *il numero non si può definire*, poiché è evidente che comunque si combinino tra loro quelle parole non si potrà mai avere una espressione equivalente a *numero*. Però, se il numero non si può definire, si possono enunciare quelle proprietà da cui derivano come conseguenza tutte le innumerevoli e ben note proprietà dei numeri » [Ivi, 84]. Nelle *Formole*

ritroviamo [dopo Grassmann] in Peano: l'astrattezza matematica come base per la ricerca del rigore » [Freguglia 1985, 198].

[21] Nella recensione succitata di Padoa: « Es expositione claro, elegante et completo de theorias recente de Logica-mathematica, scientia de magno interesse pro mathematicos, logicos et interlinguistas, hodie que es semper plus patente quod logica es basi de interlingua » [Peano 1912, 47]. Ma nel caso di Alwin Korselt, *Über mathematische Erkenntnis*, 1911, ammetteva: « Nostro illustre consocio, in isto scripto, tracta de definitiones in mathematica. Subjecto es nimis speciale pro nostro periodico » [Ivi, 50].

di logica matematica (1891) si leggeva: « Le idee che compaiono in una scienza si distinguono in *primitive* e *derivate*, secondoché non si possono o si possono definire » [OS 2, 102]. Sono definizioni puramente *nominali*; le definizioni che si danno ordinariamente di *numero*, unità, punto, retta ecc. vanno considerati piuttosto « come schiarimenti » [Ivi, 103].[22]

Se non si definiscono, in qual modo entrano a far parte del sistema logico? Leggiamo già nei *I principii di geometria logicamente esposti* del 1889 questa distinzione, che per Peano risulta fondamentale: « Servendomi degli studii del Boole, e di altri, riuscii pel primo, ne[gli *Arithmetices principia*], ad esporre una teoria usando puramente segni aventi significato determinato, o mediante definizione, o mediante le loro proprietà » [Ivi, 57n]. Gli assiomi non definiscono, ma determinano; infatti vi sono due specie di determinare: mediante la definizione e mediante le proprietà enunciate da quelle che si chiameranno poi proposizioni primitive. La definizione implicita, insomma, fin dall'inizio dev'esser considerata spuria.[23] Lo troviamo espresso tal quale nelle *Formules de logique mathématique*, 1900, riprese nel *Formulaire* del 1901: « Les idées primitives sont expliquées par le langage ordinaire, et sont détérminées par des Pp (P primitives); celles-ci jouent le rôle de définitions par rapport aux idées primitives, mais n'[en] ont pas la forme[24] » [Ivi, 319]. E nelle *Notations*: « On détermine les idées primitives, qu'on ne définit pas, au moyen de leur propriétés fondamentales » [Peano 1894, 51].

Abbiamo letto poc'anzi: « Arrivati a queste idee elementari, non si può oltre procedere che coi simboli » [OS 2, 427] (*Le definizioni in matematica*, 1921). E Geymonat: « Che cosa intendeva asserire con queste ultime parole? Intendeva forse sostenere che è possibile con i simboli analizzare le idee primitive? Evidentemente no » [1955, 62]. Evidentemente no. Quel che voleva dire era che, una volta compiuta l'analisi, ossia svolta quell'operazione che conduce a prepararsi a scrivere le Pp, non c'è altro da fare appunto che scrivere le Pp, determinare le idee e derivarne il sistema, appunto con i simboli;[25] se qualcosa non funziona o se c'è difetto emendabile, lo si verrà a scoprire più facilmente grazie alla forma esatta, semplice e rigorosa data alle proposizioni matematiche dalla logica simbolica; si potrà eventualmente sviluppare un sistema migliore, o alternativo, per esporre la teoria, perché si sarà giunti a una diversa o migliore analisi delle idee primitive: « La distinction des idées en primitives et dérivées a un peu de l'arbitraire. Car, si au moyen de a, b, c on définit d, et au moyen de a, b, d on définit c, on peut prendre pour des idées primitives ou a, b, c, ou a, b, d ». Ancora una volta, « des raisons de simplicité décident sur le choix » [Peano 1894, 50-51].

Possono però venire « spiegati, in linguaggio comune, i segni degli enti non definiti » [OS 2, 57]. Nelle *Notazioni di logica e abbreviazioni* dei *Principii di geometria*, le due colonne sono intestate « *Il segno* » e « si legge » [Ivi, 59]. « Il segno **1** leggasi *punto* » [Ivi, 58]. Accettabili risultano inoltre, come abbiamo visto, ancorché Peano non si sarebbe proposto di svilupparle

[22]Recensendo Shearman, *The scope of formal logic*, nel '12 Peano riportava: « Ideas "indefinibiles" existe in omni theoria; sed classificatione de ideas de uno scientia in definibiles et indefinibiles es relativo ad theoria, non ad scientia. Resulta vario systema de indefinibiles in idem scientia (pag. 15); auctore expone theorias principale, et notationes » [Peano 1912, 46-47].

[23]E sarà forse spuria anche la filosofia 'implicita'.

[24]« On peut, si l'on veut, donner aux Pp la forme des définitions symboliques. P. es. au lieu de prendre comme idées primitives dans l'Arithmetique les idées représentées par les signes $0, N_0, +$, et de les déterminer par 5 Pp ..., on peut définir le système $(0, N_0, +)$ comme le système satisfaisant à ces 5 Pp » [Ivi, 319], o come uno degli infiniti sistemi che vi soddisfano (cfr. Ivi, 319n).

[25]« Si la science touche aux élémens mêmes, et s'il y a des idées qu'on ne peut pas définir, on trouvera aussi des propositions qu'on ne peut pas démontrer, et dont découlent par le raisonnement toutes les autres. Nous les appelleront propositions *primitives*, et par abréviation Pp; elles s'appellent aussi axiomes, *postulata*, et quelquefois, hypothèses, lois experimentales, etc. Ces propositions déterminent, ou, si l'on veut, définissent les idées primitives, dont on n'a pas donné de définition directe » [Peano 1894, 52].

neppure in funzione didattica, le definizioni *in modo physico*.[26] Insomma: le idee derivate si definiscono, con definizioni nominali. Alcune di queste definizioni hanno funzione puramente tachigrafica; altre istituiscono, mediante astrazione da una relazione opportunamente caratterizzata, nuovi enti matematici.[27] Le idee primitive non sono definite come idee, dunque non per via logica: gli assiomi le determinano soltanto (enunciandone le proprietà, in quanto enunciati validi e stipulati veri in cui appaiono i simboli di esse). Possiamo ancora escogitare una definizione su base fisica del loro contenuto, in modo tale da tenere forse insieme esperienze, intuizioni e teorie: qui appare una tenue ombra di semantica, rarissima davvero in Peano, che predilige la luce viva del simbolismo puro. E la semantica ci conduce a Frege.

TROPPO SEMPLICE. Permane dunque sempre la stretta connessione di rigore e semplicità. Contrario della semplicità è la complicatezza: questa è strettamente connessa alle inesattezze: se si sopprimono gli errori, si ottiene l'esattezza e ne risulta un lavoro, appunto, rigoroso e semplice. Una trasposizione della semplicità, in funzione rigorista, nei termini del numero minimo di nozioni presupposte si trova in *Sur la définition de la limite d'une fonction. Exercice de logique mathématique* (1894): le idee di limite superiore e inferiore di un insieme « sont plus simples que l'idée de la limite d'une fonction »; quelle si esprimono « au moyen de la seule idée logique de classe; la limite d'une fonction exige encor l'idée de fonction ou de correspondance » [OS I, 239]. Sappiamo che nel lessico di Peano, per un certo numero di anni, i simboli e le espressioni da essi formate son fatti corrispondere ora ad entità[28], ora ad idee. Qui la semplicità di un'idea non primitiva vien fatta dipendere dal numero di nozioni logiche primitive che la sua espressione richiede; è chiaro che è la logica simbolica a permettere « di far ... vedere come certe idee complesse si possano analizzare e decomporre in idee più semplici » [OS 3, 109]

Peano dedicò una nota (*Studii di logica matematica*, 1897) alla « riduzione delle idee di logica al minimo numero » [OS 2, 204] e affermava: « ritengo che in questo campo siavi ancora molto a fare. Si può cercare di ridurre ulteriormente il numero delle idee ritenute primitive, ovvero tentare altre vie, assumendo come idee primitive un altro gruppo di idee, in modo da ottenere una qualche semplicità » [Ivi, 217]. Nella nota del 1894 *Sui fondamenti della geometria*, in cui si prefigge « di trattare sommariamente quei punti in cui si può effettivamente raggiungere il doppio scopo del rigore e della semplicità »[29] [OS 3, 116], introduce l'esigenza di ridurre al minimo gli elementi indefinibili con queste parole:

> È chiaro che le idee primitive si debbano ridurre al minimo numero; e che per idee primitive si debbano assumere idee semplicissime, e comuni a tutti gli uomini; esse debbono avere il loro nome

[26]Ossia una definizione coordinata, come si sarebbe detto un po' più avanti nel tempo, delle entità primitive mediante nozioni empiriche: « The method by means of which a formal system is given empirical content is characterized by [Reichenbach, *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*] as "coordinating definition" of the primitives in the theory by means of specific empirical concepts. As is suggested by our discussion of reduction and the interpretation of theoretical constructs, however, the process in question may have to be construed as a partial interpretation of the non-logical terms of the system rather than as a complete definition of the latter in terms of the concepts of a thing-language » [Hempel 1950, 57 n. 19], che è grosso modo quel che avrebbe potuto pensare anche Peano. Per Hilbert gli assiomi, che definiscono dei concetti (p. es. il concetto di *zwischen*, 'tra' [Hilbert 1899, § 1 sgg.]), sono espressione delle nostre intuizioni spaziali, che possono manifestarsi in diversi modi, e ad essi rispondono i diversi gruppi di assiomi; la condizione di essere soddisfatti da diverse interpretazioni vale per ogni teoria impostata assiomaticamente, compreso l'elettromagnetismo. Gli assiomi *definiscono* i concetti mediante le proprietà, cioè determinando i modi di operare con i segni [Hilbert 1900, 2. Pr.]; abbiamo visto che invece Peano teneva a distinguere due specie diverse di determinazione, entrambe applicate agli enti o, da un certo punto in poi, alle idee.

[27]La questione delle definizioni per astrazione, come pure quella del 'principio di permanenza', andrebbero a questo punto almeno accennate: ma i lettori mi saranno probabilmente grati di soprassedere.

[28]Che a un certo punto, indice di una certa maturità epistemologica, scompaiono.

[29]Lamentava proprio, nei *Principii di geometria*, che se « la soluzione delle questioni proposte ha [qui] raggiunto l'assoluto rigore, non può dirsi che essa abbia pure raggiunto la semplicità » [Ivi, 58].

> in tutte le lingue. Chi incomincia lo studio della Geometria deve già possedere queste idee primitive; non è punto necessario che conosca le idee derivate, che saranno definite man mano si progredirà nello studio. [*ib.*]

La semplicità rigorosa, che obbedisce al precetto di minimizzazione delle condizioni, qui si confonde con un naturalismo conoscitivo di matrice didattica. Ma che il rigore comportasse di minimizzare il numero delle proposizioni indimostrabili trovava d'accordo anche Frege, p. es. nella *Prefazione* al primo volume dei *Principi dell'aritmetica*:

> « L'ideale di un metodo rigorosamente scientifico[30] per la matematica potrebbe venire, secondo me, così delineato. Che tutto sia dimostrato non si può certo pretendere, perché impossibile. Si può esigere però che tutte le proposizioni che si usano senza dimostrazione vengano espressamente enunciate come tali ... Bisogna quindi cercare di restringere il loro numero al minimo possibile, dimostrando tutto ciò che risulta dimostrabile. [Frege 1965, 480]

Peano, quasi prendendolo in parola, avrebbe confezionato nella sua recensione del primo volume dei *Grundgesetze*, paragonando la *Begriffschrift* di Frege con la notazione del suo *Formulario*, un rilievo famoso, che è in genere considerato molto male dagli studiosi di Frege, ma desta motivate perplessità non solo in loro:

> I due sistemi di notazioni si possono confrontare sotto l'aspetto scientifico e sotto quello pratico. Sotto l'aspetto scientifico, il sistema del Frege è basato sui cinque segni fondamentali $|$, $-$, $\top$, $\vDash$, $\neg\!\smile\!-$ mentre il nostro sui tre segni $-$, $\cap$, $\supset$. Quindi il sistema del Formulario corrisponde ad un'analisi più profonda. [OS 2, 192]

Della profondità, Hardy diceva essere « concetto ... elusivo anche per un matematico capace di riconoscerlo » [1940, tr. 83].[31] La risposta di Frege tradiva un misto di fastidio e sconcerto: « Questo non posso concederlo », *Das Letze möchte ich nicht zugeben* [1976, 181]. Sembrava in effetti una critica strampalata. Ma l'idea era sempre stata cara a Peano: i suoi segni, annotava al margine del *Calcolo geometrico*, sono « in numero di 9. Invece lo Schröder ne ha 13 » (nota ms. in Peano 1985, 46). E dato che citiamo queste note marginali, possiamo ricordare che Peano conosceva, avendolo annotato ivi,[32] questo passo di Peirce:

> There is a difference of opinion among logicians as to whether $-\!\!<$ or $=$ is the simpler relation. But in my paper on the 'Logic of relatives', I have strictly demonstrated that the preference must be given to $-\!\!<$ in this respect. The term *simpler* has an exact meaning in logic; it means that whose logical depth is smaller; that is, if one conception implies another, but not the reverse, then the latter is said to be simpler. Now to say that $A = B$ implies that $A -\!\!< B$, but not conversely. *Ergo*, etc. [CP 3.111] In logic, our great object is to analyze all the operations of reason and reduce them to their ultimate elements; and to make a calculus of reasoning is a subsidiary object.[33] Accordingly, it is more philosophical to use the copula $-\!\!<$; apart from all considerations of convenience. [Ivi, 3.112]

Anche per Peano lo scopo era analizzare: « la Logica Matematica non consta di proposizioni arbitrarie, e variabili a capriccio dell'autore; bensì nell'analisi delle idee e delle proposizioni in primitive e derivate », si leggeva nella recensione. E questa analisi, diceva, « è unica » [OS

[30] Questo uso di 'scientifico' in senso genericamente positivo è prettamente tedesco: possiamo ritenere che Peano avrebbe preferito dire: 'scientificamente rigoroso'.

[31] « Più lo strato è basso, più l'idea è profonda (e in generale più difficile). L'idea di numero irrazionale è perciò più profonda di quella di numero intero », Ivi, tr. 82.

[32] « § 3 dice che è più semplice il segno $\supset$ che questo $=$. » [Ivi, 45].

[33] Peirce riteneva che la teoria logica non venisse applicata nelle deduzioni matematiche: un sistema di simboli logici ha come scopo unico l'indagine della teoria logica, ossia l'indagine semiotica delle operazioni che si compiono con certi prodotti della mente (cioè lo svolgersi del pensiero mediante i segni), non un calcolo delle inferenze: produce le regole del ragionamento deduttivo necessario. « The system devised for the investigation of logic should be as analytical as possible, breaking up inferences into the greatest possible number of steps, and exhibiting them under the most general categories possible, while a calculus would aim, on the contrary, to reduce the number of processes as much as possible, and to specialize the symbols so as to adapt them to special kinds of inference » [Ivi, 4.373] (cfr. Zeman 1986).

2, 191]. E certo, se riduceva al minimo il numero di condizioni necessarie (simboli introdotti a rappresentare, come si esprimeva nel 1893, « idee irriduttibili »[34]) si era raggiunta, dal punto di vista puramente analitico, una maggiore profondità. Ma l'analisi non era filosofica: benché la risoluzione delle idee complesse in idee più semplici rientri nella tradizione dell'analisi concettuale,[35] l'indagine si svolgeva comunque analizzando relazioni di tipo generale da trattare con un calcolo simbolico.[36] Era formale e pragmatica al tempo stesso: aveva il suo test di buona riuscita nel poter scrivere le formule.

Il criterio di minimo per la semplicità e la profondità, in ultimo, giungeva ad avere quasi una giustificazione filosofica. Consultiamo l'*Aritmetica generale* del 1902 e vi troviamo:

> « l'ufficio dei simboli non è essenzialmente quello di abbreviare, bensì quello di contraddistinguere con un segno una idea, qualunque si sia il modo con cui la si esprima in linguaggio ordinario. ... I simboli matematici apportano non solo brevità, ma specialmente precisione e chiarezza. Essi soddisfano alla legge generale dell'economia di lavoro; rendono più facile lo studio ai principianti e sono pressoché indispensabili al progresso della scienza ». [Peano 1902, iii]

La legge dell'economia di lavoro è qui un chiaro riferimento ad Ernst Mach, di cui Peano richiamerà anche in seguito, a questo proposito, le *Populärwissenschaftliche Vorlesungen*, nell'edizione del 1903.[37] Ne conobbe le idee epistemologiche, probabilmente, per il tramite di Vailati, divenuto assistente di Peano nel 1892 e che potrebbe aver avuto parte nella progressiva disinibizione di Peano verso alcuni discorsi filosofici.

ON N'A JAMAIS FINI DE DÉFINIR DES ÉGALITÉS. « Io non ammetto che vi siano molteplici definizioni per lo stesso segno », diceva Frege [1965, 445]: si viola quel precetto della deontologia della definizione che egli chiamava *principio di completezza*; un'espressione definita, contrapponeva a Peano, deve « avere di per sé un significato, indipendentemente dalle altre parti della proposizione. Quando facciamo uso di parole, dirette a esprimere un concetto, che risultino definite in modo incompleto, l'indipendenza testé accennata non sussiste ... Non è quindi possibile, in generale, riconoscere ad una tale parola un proprio significato » [Ivi, 447].

Per Peano dunque le definizioni logiche del numero sono viziate. In compenso, per Frege, son viziate gran parte delle definizioni di Peano. La risposta di Peano giunse in una lettera a Frege del 14-X-1896: che si legga diversamente uno stesso segno (a seconda, p. es., che rappresenti l'implicazione tra enunciati o l'inclusione tra classi) non implica che possegga diversi significati, ma che un solo significato è rappresentato con parole diverse, « selon les circonstances » [Frege 1976, 189].[38] Ma il problema vero sollevato da Frege era quello del segno d'identità, adoperato per le definizioni e nei membri delle definizioni (speciamente nelle definizioni per astrazione), senza essere definito preliminarmente e comparendo in definizioni diverse. Rispon-

[34] « Le signe $\supset$ signifie 'on déduit'. Le signe $\cap$, tousjours sousentendu, signifie 'et'. Ces signes ne sont pas définis; ils représentent des idées irréductibles. Par eux on défini le signe $=$ (§ 3 P3) » [Ivi, 185]. Ove il modello teorico dell'irriducibilità è ancora una volta quello analitico: cfr. p. es. *Formazioni invariantive delle corrispondenze...*, 1881, [OS 3, 30 sgg.].

[35] La progressiva tendenza a identificarla con l'analisi del linguaggio e il privilegio metodologico di questo tipo di procedimento, a scapito di ogni forma alternativa, caratterizzano la corrente della filosofia del Novecento detta comunemente 'filosofia analitica', che si tende a far risalire a Frege e che, di questo suo atteggiamento, impronta sovente l'indagine storiografica.

[36] « Car les notations de logique ne sont pas seulement une tachigraphie, pour représenter sous une forme abrégée les propositions des mathématiques; elles sont un instrument puissant pour analyser les propositions et les théorie » [Peano 1895, vi]. « Les deux objets de la logique mathématique, la formation d'une écriture symbolique, et l'étude des formes de transformations ou de raisonnement, sont étroitement liés [OS 1, 257] ».

[37] In particolare, in merito al principio di permanenza, che, correttamente inteso come « un principio non di logica, ma di pratica », è « caso particolare di quello che il Mach chiamò principio dell'economia del pensiero » [OS 3, 280 e 376]. Mach è uno dei due 'filosofi' che Peano cita ripetutamente, l'altro essendo Aristotele.

[38] Il significato del segno, a quel punto, è molto vicino a identificarsi con il suo ruolo operazionale, ciò che esso fa nelle formule e le regole per operare sulle formule che lo contengono.

deva Peano, innanzitutto, che se a fianco della formula sta scritto 'Def.' allora il segno $=$ va considerato come uno speciale segno primitivo $=_{Def}$ (in tal modo, ammetteva l'esistenza di un segno metalinguistico e al tempo stesso gli negava tale carattere). O, per continuare a restare in bilico tra Frege e Peirce: « *Equality* is a relation of which identity is a species » [CP 3.24]. Quanto al resto: « Via via si attribuiscono sempre nuovi significati al segno =; si definisce l'eguaglianza tra due numeri razionali, tra due irrazionali, tra due numeri complessi, tra due vettori, tra due quaternioni ecc. Tutte queste definizioni contengono un'ipotesi, che esprime il significato delle lettere variabili;[39] perché non si finisce mai di definire delle eguaglianze » [Frege 1976, 191-192]

Il senso della posizione di Peano fu espresso con grande precisione da Vailati, che pure non favoriva unilateralmente Peano contro Frege, del quale preferiva p. es. la teoria non puramente estensionale delle funzioni.

> La differenza più importante tra le definizioni condizionali, di qualunque tipo siano, e le definizioni considerate dalla logica tradizionale consiste in ciò: mentre queste ultime si presentano come spiegazioni del senso di *un termine*, ossia di un segno isolato, le definizioni condizionali, al contrario, si occupan solo del senso delle diverse *frasi*, o formule nelle quali il termine o segno in questione figura combinato con altri, il cui senso è già stato determinato.
> In altre parole, le definizioni condizionali non rispondono come le definizioni comuni a domande del tipo: 'Cos'è la tale o tal altra *cosa*?', oppure 'Cosa significa questo o quel *termine*?', ma domande del tipo: 'Cosa si vuol dire quando si enuncia la tale o tal altra *proposizione*?' [Vailati 1907, 283].[40]

Frege ritiene che l'uguaglianza si definisca come identità (« la coincidenza completa » [Frege 1965, 599]), come si esprime in un abbozzo di lettera a Peano in cui scrive anche: « Se si riflette sul fatto che moltissime proposizioni matematiche si presentano sotto forma di uguaglianze, mentre altre perlomeno ne contengono, e se a questo si aggiunge la sua osservazione [che i vari autori sono di opinioni diverse circa il significato del segno d'uguaglianza] se ne ricava che i matematici concordano sì fra loro per quanto riguarda la forma esteriore delle loro proposizioni, ma non sui pensieri che a esse collegano; purtuttavia proprio questi ultimi sono l'essenziale » [*ib.*]. È possibile che Peano ritenesse che la forma simbolica garantisse l'essenziale, a dispetto perfino dei pensieri dei matematici, e che proprio questo vi fosse in essa di buono.

Così Peano è interessato alla minimizzazione dei simboli e delle formule introdotte come proposizioni primitive e alla loro indipendenza, meno alla funzione che esse svolgono rispetto al rapporto tra la matematica in generale e il nostro pensiero, il mondo o le sue leggi;[41] non ha probabilmente nessun interesse particolare per la semantica freghiana.[42] Per Peano, potremmo dire, non è importante definire cosa è il numero, ma è importante escogitare la dimostrazione dell'indipendenza degli assiomi. Per Frege vale il contrario.

OGNUNO LEGGA A SUO MODO Per Peano, infine, era importante come si scrivevano le formule; ma non era importante che avessero un 'significato' univoco: bastava, come già abbiamo visto, poterle leggere. Nelle *Notations de logique mathématique* il processo di ridurre in simboli una teoria era descritto così:

[39] D'altro canto la molteplicità delle definizioni in funzione dell'ipotesi, essendo l'ipotesi una dichiarazione quale $a, b \in Cls$, rappresenta un embrione di tipizzazione formalizzata, a differenza della tipizzazione implicita allora corrente e da cui lui stesso non si era scostato negli *Arithmetices principia* (cfr. Kamareddine et al. 2002).

[40] Anche le definizioni tradizionali si possono considerare condizionali: equivalgono a chiedere che senso avrebbe la frase: 'Questo o quell'oggetto è un A?'. Vi sono dunque comprese come "casi particolari" [*ib.*]; rispetto ad esse il tipo generale si distingue per "la sua maggiore generalità e per la maggiore libertà che concede nella costruzione delle frasi da definire" [Ivi, 284].

[41] La questione che interessa Russell sin dagli anni 1890, cioè il rapporto tra le forme logiche e i fatti e i loro costituenti; il bisogno di Frege di giungere ad assicurare filosoficamente l'applicabilità delle matematiche, ecc.

[42] La questione è analizzata in modo equilibrato in Picardi 1998.

> § 34. On peut réduire toute théorie en symboles, car tout langage parlé, et toute écriture, est un symbolisme, ou une suite de signes qui représentent des idées ... on analyse les idées ... on décompose dans les parties simples les idées composées, et seulement, après une longue suite de réductions et de transformations, on obtient un petit groupe de mots, qu'on peut considérer comme minimum, par lesquels, combinés avec les signes de logique, on peut exprimer toutes les idées et les propositions de la science qu'on étudie.
>
> Réciproquement, pour transformer les formules en langage ordinaire, c'est-à-dire pour *lire* les formules, il est bien de ne pas lire chaque signe séparément; mais de lire tout un groupe de signes avec le mot qui représente dans notre langage l'idée composée avec ces signes. [Peano 1894, 41-42]

Leggere un gruppo di simboli come un sola idea — ricordiamo — è appunto il modo in cui Peano raccomandava a Frege d'interpretare il segno di 'eguaglianza per definizione', con scarso successo.

In una lettera del 25-VII-1900 di argomento interlinguistico, in cui esprimeva al collega matematico Méray, acceso esperantista, le sue riserve sulla lingua universale da quegli prediletta, Peano aggiungeva in conclusione un sommario della storia della logica[43]:

> ... D'autre côté une langue scientifique internationale nous l'avons dans les formules algébriques. Voici des propositions qui sont entendues identiquement, (bien que lues différemment) par les européens, américains et japonais: $2 + 3 = 5$, $3 + 1/7 < \pi < 3 + 10/71$.
>
> On remarque dans ces propositions qu'il n'y a pas de signes pour indiquer le pluriel, les adjectives; toute la grammaire fait défaut. On peut réprocher que cette langue écrite ne permet que d'exprimer quelques propositions d'algèbre. Mais le calcul barycentrique de Möbius, les vecteurs de Grassmann et Hamilton l'ont étendue à la Géométrie. Enfin, par les travaux de Leibniz d'abord et dans notre siècle par Boole, Schröder,... on a appliqué l'algèbre à la Logique, et l'on est arrivé à exprimer des veritables propositions complètes, sur différentes branches des sciences mathématiques.
>
> ... Chacun lira ces formules à sa façon. Ce langage écrit n'est pas parlé identiquement; mais cela n'empêche pas de reconnaître l'importance qu'il a. [Fondo Peano – Cuneo]

Padoa, ne *La logique déductive dans sa dernière phase de développement*, interpretava la logica simbolica come una pasigrafia, una scrittura universale, sebbene convenzionale, « dans laquelle a chaque symbole on fait correspondre une idée, par une coordination immédiate de l'esprit ». Padoa, che ove possibile era più netto ancora di Peano, sosteneva, quanto ai simboli, che non c'è nemmeno bisogno di leggerli:

> Les symboles, précisement parce qu'ils sont étrangers à tout langage naturel, sont universels et ne demandent aucune traduction; ils n'exigent pas même de lecture. Cependant, chacun peut les lire par les locutions les plus appropriées qu'il trouve dans sa langue; mais, au lieu d'inférer la signification d'un signe de sa lecture, c'est celle-ci qui doit être adaptée, le mieux possible, à la signification du symbole; et cette signification doit resulter seulement de l'emploi qu'on peut faire de ce signe. [Padoa 1912, 10]

SENZA META Il primo vantaggio che si vede nei simboli di logica, sostiene Peano, è la brevità che essi permettono: « Ma l'utilità principale ... si è che essi facilitano il ragionamento. Tutti coloro che usarono il simbolismo logico attestarono la sua utilità » [OS 3, 394]. In effetti esiste anche per la matematica un problema di esattezza dei ragionamenti, riassumibile nell'insoddisfazione per la prescrizione cartesiana dell'evidenza, in quanto criterio che avrebbe a sua volta bisogno di regolamenti applicativi. Tale questione ormai, annuncia Peano al lettore dei *Principii di geometria* del 1889, « è suscettibile di soluzione del tutto soddisfacente. Invero, ridotte, come qui si è fatto, le proposizioni in formule analoghe alle equazioni algebriche, allora, esaminando le comuni dimostrazioni, si scorge che esse consistono in trasformazioni di proposizioni e gruppi di proposizioni, aventi massima analogia colle trasformazioni delle equazioni algebriche

[43] « Relatione inter logica formale et interlingua es evidente », scrive Peano [1912, 46] nella già citata recensione di Shearman, *The scope of formal logic*.

simultanee » [OS 2, 81].[44] Si tratta di un procedere sicuro, chiaro, rigoroso, in cui l'utilità delle notazioni di logica risulta evidente:

> « Con esse si può scrivere in due righe l'enunciato di un teorema che nell'originale occupa una pagina. Ora la forma dei teoremi è di rimarchevole precisione; si vedono chiaramente tutte le condizioni restrittive che si devono supporre; ed è poco probabile, nello sviluppo, di dimenticarne qualcuna rimasta più o meno nascosta in un enunciato ordinario. Si trasformano i teoremi come si trasformano le formule algebriche, e con una facilità e una sicurezza che non si potrebbero ottenere col linguaggio comune. [OS 1, 141]

Nell'ultimo lavoro sistematico di logica matematica dovuto a Peano (*Formules de logique mathématique*, 1900, ripreso nel *Formulaire* del 1901), il procedimento è così esposto: « Les lois de logique, contenues dans la suite, ont été en général trouvées en énonçant, sous forme de règles, les déductions qu'on rencontre dans les démonstrations mathématiques » [Ivi, 320]. Prima viene l'intuizione: « C'est l'intuition qui nous dit que le propositions (α) et (β) sont équivalentes; mais on peut ériger en règle générale cette transformation de la (α) dans la (β) » [OS 1, 240].[45]

Però anche su questo punto vi era un attrito con Frege (e, per dire il vero, con gran parte della logica posteriore e con l'intera teoria della dimostrazione). Per Frege era scientificamente indispensabile: « che vengano espressamente elencati, prima di costruire l'edificio matematico, i metodi di deduzione e di dimostrazione che si applicheranno in esso » [Frege 1965, 480]; e in effetti Peano usava, oltre il segno d'identità, anche il segno d'implicazione in duplice funzione: sia per enunciare regole d'inferenza sia come semplice connettivo.

C'era anche qui una ragione di ordine epistemologico generale, fosse o no giustificabile, che troviamo esplicitata nella recensione ai *Grundgesetze*: le dimostrazioni delle regole di ragionamento « sono illusorie »: per dimostrarle o si dovranno applicare le regole stesse, o altre più complicate. « In ogni caso si fa un giro vizioso » [OS 2, 194]. Sarà più semplice e rigoroso, allora, decomporre i ragionamenti in formule di massima semplicità e provata indipendenza, e limitarsi a inserire opportunamente tali formule nel sistema; avranno il loro posto nelle catene deduttive, o come primitive da trasformare nelle dimostrazioni, o come regole di trasformazione, esplicitate quali formule della logica: ed ecco la logica matematica come disciplina indipendente, ma non separata, neanche operativamente, rispetto alle formule del ragionamento matematico.[46] Sotto il titolo 'Démonstrations', nelle *Notations de logique mathématique*, si legge la versione più dettagliata di quest'indagine:

> Le regole della logica per trasformare un insieme di ipotesi nella tesi da provare sono analoghe alle leggi d'algebra per trasformare un insieme di equazioni in una forma in cui siano risolte rispetto alle incognite. Queste leggi non sono state create da qualcuno. Si ottengono esaminando i ragionamenti ben fatti; si analizzano i diversi passaggi e si stabiliscono come regole i casi particolari. Le regole del ragionamento sono le formule stesse della logica. ... Si prendono le ipotesi, si moltiplicano tra di loro, si trasportano, esportano, importano proposizioni, si muta l'ordine dei fattori logici, si sviluppano prodotti, si sostituisce agli oggetti definiti il loro valore, si semplificano prodotti, somme, deduzioni per mezzo delle regole già note ecc. e si ottiene la tesi. [Peano 1894, 51]

Da un certo punto di vista, è un altro tratto di quell'economo rigore, d'impostazione prima istintivamente e poi consapevolmente machiana, che caratterizza il nostro eroe e che ritroviamo

[44] Secondo Edward Stamm, con entusiasmo forse prematuro, si ottenevano così dimostrazioni verificabili quasi meccanicamente: "Logica de Peano fac possibile *verifica demonstrationes in modo prope mechanico*, que es necessario in propositiones fundamentale et evidente." [Stamm 1928, 35]

[45] A proposito di formule in cui corrispondono (α) $a, m\epsilon q, m\epsilon q : a\epsilon q$ e $\sim=_{a,m} \Lambda, \sim=_a \Lambda :\sim=_m \Lambda$.

[46] Lo scarso apprezzamento di Peano per la distinzione tra regole d'inferenza (metateoriche) e teoremi (o formule) denota un atteggiamento, per qualche aspetto, non troppo dissimile da quello che ispirava la preferenza di Hilbert per considerare la sua metamatematica non come logica, ma come matematica in forma puramente simbolica.

indefettibile (sia poi cagione di apprezzamento o d'imbarazzo) sino alla lucida e pratica semplicità con cui Peano sbozzerà in poche righe una teoria delle relazioni come classi di n-uple nella recensione ai *Principia Mathematica*. Indica in effetti il privilegiare la scelta dei *mezzi*, degli *strumenti*, rispetto a quella delle opzioni prematematiche, in funzione del rigore analitico: la questione filosofica ha un duplice terreno, e solo su uno di questi — come abbiamo ripetuto *ad abundantiam*: quello epistemologico — cammina Peano, accomunato più a Peirce che a Frege da quello che possiamo chiamare, senza troppo impegno, 'pragmatismo formale'.

ARBITRARIO E VERO INSIEME Rispetto all'idea, espressa anche p. es. da Cantor nelle *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, che la solidità delle sue dimostrazioni consistesse nello svolgersi mediante « sillogismi » muovendo da « definizioni né arbitrarie, né artificiose, bensì sorte da un'astrazione conforme a natura » [Cantor 1932, 418], Dedekind afferma, in *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888), che « i numeri sono libere creazioni dello spirito umano, ci servono come mezzo per meglio e più precisamente afferrare la varietà delle cose » [Dedekind 1930, 3, 335]. E in *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), il § 4 s'intitola appunto « Creazione dei numeri irrazionali » [Ivi, 3, 323]. Per Peano, questa 'creazione' è, come sempre, qualcosa da analizzare e tradurre « in simboli di logica » [OS 3, 106].

Peraltro, non era incline a nessuna forma di relativismo matematico. Quando Poincaré scrisse: « Ainsi M. Russell espère encore qu'on pourra démontrer *déductivement*, en partant des autres postulats, que l'axiome de Zermelo est faux, ou bien qu'il est vrai. Inutile de dire combien cet espoir me paraît illusoire. . . . Les axiomes en question ne seront jamais que des propositions que les uns admettront comme 'self-evident' et dont les autres douteront ». [Poincaré 1906, 313], Peano commentò in una lettera a Russell del 24-VII-1906: « L'affirmation de M. Poincaré p. 313 ne me semble pas satisfaisante. Il ne s'agit pas d'une question d'évidence, mais bien de vérités absolues » [Kennedy 1975]. Nel 1926, Peano segnalava nelle « Discussiones » due opuscoli sulla teoria della probabilità di C.E. Bonferroni:

> Russell, mathematico et philosopho anglo, dice "mathematica es scientia, in que nos non sci de que re nos loque, et si quod nos dice es vero aut falso".[47] Isto propositione, que appare absurdo, exprime profundo veritate. Mathematica affirma deductiones de forma "ab propositione A seque B", et non affirma veritate de propositiones A et B.[48] Auctore [*scil*. Bonferroni] illustra isto propositione per numeroso exemplo [Peano 1926, 123]

Secondo la formula coniata dal padre di Peirce (Benjamin), « Mathematics is the science that draws necessary conclusions » [Peirce 1870, 1]. Secondo Peirce (Charles S.), idem: « The science which draws necessary conclusions » [CP 4.229]. La matematica, oltre che apodittica, è però ipotetica: « Mathematics is the study of what is true of hypothetical states of things. That is its essence and definition » [Ivi, 4.228][49]. La necessità matematica non deriva da una necessità che si trovi nelle cose, ma solamente dal nesso di conseguenza logica tra premesse e conclusioni [Ivi, 4.232]. La matematica studia conclusioni necessarie considerando ipotesi fisiche, o logiche, rispetto alle deduzioni teorematiche che se ne traggono: « the study of pure hypothesis regardless of any analogies they may have in our universe » [Ivi, 3.560].

[47] « Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor wether what we are saying is true. People who have been puzzled by the beginnings of mathematics will, I hope, find comfort in this definition, and will probably agree that it is accurate » [Russell 1901, 84].

[48] Si possono notare convergenze e divergenze rispetto a un classico saggio del relativismo matematico: « There is some plausibility in saying that the truth of '$2 + 2 = 4$' consists in its derivability from the Peano axioms (plus definitions). But what of the truth of those axioms? It may be objected that the relativist has only the very unsatisfactory answer that the truth of, e.g., '$(x)(x + 0 = x)$' consists in its derivability from itself. . . . Now, the relativist can give an account of why Peano arithmetic has no *competitors*, and of why the Peano axioms *are accepted* » [Hugly e Sayward 1989, 64].

[49] La logica è categorica: studia ciò che esiste, i processi del pensiero; in quanto si basa su inferenze necessarie, è logica formale, ossia un'applicazione della matematica alla logica

Nella *Préface* al primo Formulario: « Le notazioni sono un po' arbitrarie, ma le proposizioni sono verità assolute, indipendenti dalle notazioni adottate » [Peano 1895, iv]. Infatti « la logica matematica … ha per oggetto le proprietà delle operazioni e delle relazioni di logica. Il suo oggetto è dunque un insieme di verità, non di convenzioni » [OS 2, 197]: anche « supposte le definizioni arbitrarie, risulta solo arbitraria la forma della matematica, non il contenuto dei teoremi » [Ivi, 435].[50]

DOVE SIAMO Non siamo dunque approdati alla *mathematics without foundation* del Putnam degli anni Settanta, perché nell'opera di Peano la fondazione, o i principi fondamentali, non mancano: sono anzi, in fondo, al centro di ogni attività. Ma non è un'attività extra- o meta-matematica: è piuttosto intra- e infra-. Con l'analisi dei principi, in cui consisteva secondo Peano la filosofia della matematica, ci troviamo pienamente in un'indagine sulla fondazione delle teorie matematiche, una fondazione, come abbiamo visto, internalista: siamo, indubbiamente, ancora dentro la matematica; con le proposizioni primitive, la determinazione degli elementi, lo sviluppo di definizioni e teoremi, siamo nella terra di mezzo, che Peano correva volentieri; con gli enti e le idee (rappresentazioni, cose, classi, numeri) siamo fuori della matematica; e questa è senz'altro filosofia, di quella da cui Peano sembrava proprio cercare di tenersi alla larga.

Abbiamo incontrato relazioni, simboli, idee, enti; scienze, teorie; determinazione, definizione, proprietà; economia, rigore, semplicità e così via: categorie che richiederebbero un'ulteriore indagine che meglio le collocasse criticamente e storiograficamente, ma che già delineano un campo concettuale omogeneo e strutturato. Ben allineato alla sua epoca, Peano non ha forse una filosofia della matematica in senso generale, o nel particolare senso fondazionale di alcuni suoi contemporanei, ma piuttosto un'articolata epistemologia della matematica.

Torino, 1-IV-2004

Testi citati

Ascoli, Guido 1955. *I motivi fondamentali dell'opera di Giuseppe Peano*. In: Terracini 1955, pp. 23–30.

Benacerraf, Paul – Putnam, Hilary (a c. di) 1983. *Philosophy of Mathematics*, Cambridge UP. 2 ediz.

Borga, Marco – Freguglia, Paolo – Palladino, Dario 1985. *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano, F. Angeli, 257 pp.

Bottazzini, Umberto 1985. *Dall'analisi matematica al calcolo geometrico: origini delle prime ricerche di logica di Peano*. « History and Philosophy of Logic », 6:25–52.

Canesi, Gaetano – Cassina, Ugo – Mastropaolo, Nicola (a c. di) 1928. *Giuseppe Peano. Collectione de scripto in honore de prof. G. Peano in occasione de suo 70º anno, edito per cura de interlinguistas, collegas, discipulos, amicos*, Milano. Suppl. a *Schola et vita*, 3, 27-VIII-1928.

Cantor, Georg 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, a c. di E. Zermelo, Springer.

Corfield, David 2003. *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge, Cambridge UP.

[50]Nel testo di John Wesley Young sui *Concetti fondamentali dell'algebra e della geometria* che Peano raccomandava ai suoi soci interlinguisti, si riscontra un ampio accordo su queste posizioni: « A *mathematical science*, as we shall use the term, is any body of propositions arranged according to a sequence of logical deductions; … whenever a body of propositions is arranged or can be arranged in a strictly logical sequence; then by virtue of that fact we may call it mathematical. … This definition is closely related to the definition given by Benjamin Peirce, when he said that "mathematics is the science which draws necessary conclusions". … *the starting point of any mathematica1 science must be a set af one or more propositions which remain entirely unproved* … Are [axioms and postulates] to be regarded as self-evident truths? Are they imposed on our minds *a priori*, and is it impossible to think logically without granting them? Or are they of experimental origin? Are the undefined terms primitive notions, the meaning of which is perfectly clear without definition? … we may cite a definition of mathematics recently given by Bertrand Russell, one of the most eminent mathematical logicians of the present time. 'Mathematics,' he said, 'is the science in which we never know …' there is a sense in which this … dictum of Russell is correct » [Young 1911, 1-4].

Dedekind, Richard 1930. *Gesammelte mathematische Werke*, a c. di R. Fricke, E. Noether e O. Øystein, Braunschweig, Vieweg.

Frege, Gottlob 1965. *Logica e aritmetica*, a c. di C. Mangione, Torino, Boringhieri, 608 pp.

— 1976. *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, a c. di G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel e A. Veraart, « Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel », vol. 2, Hamburg, Meiner.

Freguglia, Paolo 1985. *Il calcolo geometrico e i fondamenti della geometria*, pp. 174–236. In: Borga et al. 1985.

Gabriel, Gottfried 1998. *Die Geburt der modernen Logik aus dem Geiste der Mathematik? Frege und Peano im Vergleich*. In: McGuinness 1998.

Geymonat, Ludovico 1955. *I fondamenti dell'aritmetica secondo Peano e le obiezioni "filosofiche" di B. Russell*. In: Terracini 1955, pp. 51–63.

Gillies, Donald A. 1982. *Frege, Dedekind, and Peano on the Foundations of Arithmetic*, Assen, Van Gorcum.

Grassmann, Hermann GW. *Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke*, 3 voll., Leipzig, Teubner, 1894-1911.

Grattan Guinness, Ivor 1988. *Living Together and Living Apart: On the Interactions between Mathematics and Logics from the French Revolution to the First World-War*. « South African Journal of Philosophy », 7.

Hardy, Godfrey H. 1940. *A Mathematician's Apology*, Cambridge, Cambridge UP. Tr. it. in Hardy 1989.

— 1989. *Apologia di un matematico*, Milano, Garzanti.

Hempel, Carl 1950. *Problems and Changes in an Empiricist Criterion of Meaning*. « Revue Internationale de Philosophie », 41:41–63.

Hilbert, David 1899. *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner, 92 pp.

— 1900. *Mathematische Probleme*. « Nachrichten v. der Kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Math.-Phys. Klasse », pp. 253–297.

Hugly, Philip – Sayward, Charles 1989. *Mathematical Relativism*. « History and Philosophy of Logic », 10:53–65.

Kamareddine, Fairouz – Laan, Twan – Nederpelt, Rob 2002. *Types in Logic and Mathematics before 1940*. « The Bulletin of Symbolic Logic », 8(2):185–245.

Kennedy, Hubert 1963. *The Mathematical Philosophy of Giuseppe Peano*. « Philosophy of Science », 30:262–266.

— 1975. *Nine Letters from G. Peano to Bertrand Russell*. « Journal of the History of Philosophy », 13:205–220.

— 1983/2002. *Peano the Unique*, pp. 102–107. In: Kennedy 2002.

— 2002. *Twelve Articles on Giuseppe Peano*, e-book, Peremptory Publications, 107 pp.

Lolli, Gabriele 1982. *Nel cinquantenario di Peano*. « Scientia », 117:361–367.

McGuinness, Brian (a c. di) 1998. *Language, Logic and Formalization of Knowledge*, Gaeta, Bibliotheca.

Padoa, Alessandro 1912. *La logique déductive dans sa dernière phase de développement*, Paris, Gauthier-Villars, 106 pp. Avec une préface de G. Peano.

Peano, Giuseppe 1891. *[Avvertenza]*. « Rivista di matematica », 1(1):II cop.

— 1894. *Notations de logique mathématique par G. Peano Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin. Introduction au Formulaire de mathématique publié par la "Rivista di matematica"*, Turin.

— 1895. *Formulaire de mathématiques publié par la "Rivista di matematica"*, Torino, Bocca–Clausen, viii-144 pp.

— 1902. *Aritmetica generale e algebra elementare*, Torino, Paravia, viii-144 pp.

— 1912. *Bibliographia*. « A.p.I. Discussiones », 3(1):44–52.

— 1912*b*. *Bibliographia*. « A.p.I. Discussiones », 3:130–138. Rec. di A. Pensa, *Elementi di geometria*, alle pp. 132-133.

— 1912*c*. *Necrologio*. « A.p.I. Discussiones », 3:169.

— 1912*d*. *Préface*, pp. 3–4. In: Padoa 1912. Avec une préface de G. Peano.
— 1923. *Bibliographia*. « A.p.I. Discussiones », (3):3–8.
— 1923*b*. *Bibliographia*. « A.p.I. Discussiones », (2):2–7. Rec. di A. Natucci, *Il concetto di numero e le sue estensioni*, a p. 6.
— 1925. *Bibliographia*. « A.p.I. Discussiones », pp. 2–5. Recensione di: S. Catania, Algebra elementare, Catania, Gianotta, 1924, p. 2.
— 1925*b*. *Regulas pro Interlingua*. « A.p.I. Discussiones », (2):17–25.
— 1926. *Bibliographia*. « A.p.I. Discussiones », (5):122–126.
— 1985. *[Note mss. al Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre]*. In Bottazzini 1985.
— OS. *Opere scelte*, a c. di U. Cassina, 3 voll., Roma, Cremonese, 1957-59.
Peirce, Benjamin 1870. *Linear associative algebra*, Washington. Edizione litografica.
Peirce, Charles S. CP. *Collected Papers*, a c. di C. Hartshorne, P. Weiss e A. Burks, Cambridge, Mass., The Belknap Press of the Harvard University Press, 1931-1958.
Picardi, Eva 1998. *Frege e Peano sul segno d'asserzione*. In: McGuinness 1998, pp. 199–222.
Poggendorff, J.C. 1925. *J. C. Poggendorffs biografisch-literarisches Handwörterbuch f. Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie u. verwandte Wissenschaftsgebiete. Redigiert von Prof. Dr. P. Weinmeister. Band V: 1904 bis 1922*, Leipzig-Berlin, Verlag Chemie GmbH.
Poincaré, Henri 1898. *Préface*. In: *OEuvres de Laguerre, publiées sous les auspices de l'Académie des sciences. Par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché*, vol. I, pp. v–xv. Gauthier-Villars & fils, Paris.
— 1906. *Les mathématiques et la logique*. « Revue de Métaphysique et de Morale », pp. 294–317.
Quine, W.v.O. 1987. *Peano as Logician*. « History and Philosophy of Logic », 8:15–24.
Russell, Bertrand 1901. *Recent Work on the Principles of Mathematics*. « International Monthly », (4):83–101. Ora in: CPBR, 3, pp. 366–379.
— 1903. *The Principles of Mathematics*, Cambridge, Cambridge UP, xxix+534 pp.
Segre, Beniamino 1955. *Peano ed il bourbakismo*. In: Terracini 1955, pp. 31–39.
Segre, Michael 1994. *Peano's Axioms in their Historical Context*. « Archive for History of Exact Sciences », 48:201–342.
Stamm, Edward 1928. *Logica mathematico de G. Peano*. In: Canesi et al. 1928, pp. 33–35. Suppl. a *Schola et vita*, 3, 27-VIII-1928.
Terracini, Alessandro (a c. di) 1955. *In memoria di Giuseppe Peano*, Cuneo, Presso il Liceo Scientifico Statale, 116 pp.
Vailati, Giovanni 1907. *La grammatica dell'algebra*. In: Lanaro, Giorgio (a c. di), *Scritti filosofici*, pp. 274–291. La nuova Italia, Firenze. 1980.
Young, John W. 1911. *Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry*, New York, Macmillan, vii+247 pp.
Zeman, J. J. 1986. *Peirce's Philosophy of Logic*. « Transactions of the Charles S. Peirce Society », 22:1–22.