ВАСИЛ ПЕНЧЕВ

НЕРАЗРЕШИМОСТ НА Т. НАР. ПЪРВА ТЕОРЕМА НА ГЬОДЕЛ ЗА НЕПЪЛНОТАТА. ГЬОДЕЛОВА И ХИЛБЕРТОВА МАТЕМАТИКА

Abstract

Can the so-called first incompleteness theorem refer to itself? Many or maybe even all the paradoxes in mathematics are connected with some kind of self-reference. Gödel built his proof on the ground of self-reference: a statement which claims its unprovability. So, he demonstrated that undecidable propositions exist in any enough rich axiomatics (i.e. such one which contains Peano arithmetic in some sense). What about the decidability of the very first incompleteness theorem? We can display that it fulfills its conditions. That's why it can be applied to itself, proving that it is an undecidable statement. It seems to be a too strange kind of proposition: its validity implies its undecidability. If the validity of a statement implies its untruth, then it is either untruth (reductio ad absurdum) or an antinomy (if also its negation implies its validity). A theory that contains a contradiction implies any statement. Appearing of a proposition, whose validity implies its undecidability, is due to the statement that claims its unprovability. Obviously, it is a proposition of self-referential type. By Gödel's words, it is correlative with Richard's or liar paradox, or even with any other semantic or mathematical one. What is the cost, if a proposition of that special kind is used in a proof? In our opinion, the price is analogous to «applying» of a contradictory in a theory: any statement turns out to be undecidable. If the first incompleteness theorem is an undecidable theorem, then it is impossible to prove that the very completeness of Peano arithmetic is also an undecidable statement (the second incompleteness theorem). Hilbert's program for an arithmetical self-foundation of mathematics is partly rehabilitated: only partly, because it is not decidable and true, but undecidable; that's why both it and its negation may be accepted as true, however not simultaneously true. The first incompleteness theorem gains the statute of axiom of a very special, semi-philosophical kind: it divides mathematics as whole into two parts: either Gödel mathematics or Hilbert mathematics. Hilbert's program of self-foundation of mathematic is valid only as to the latter.

Key words: Gödel, Hilbert, first incompleteness theorem, second incompleteness theorem, liar paradox, completeness theorem, compactness theorem, undecidability or contradiction, Peano arithmetic, self-foundation of mathematics, Gödel and non-Gödel (Hilbert) mathematics

Отправна точка в текста на Гьодел (1931) ще бъде скицата на доказателството, която той предлага в увода на своята работа (Gödel, 1931, S. 174–176; 1986, S. 146–151), отделни бележки относно конструктивността на доказателството на основните теореми (Gödel, 1931, S. 189–190; 1986, S. 176–178, 177–179; Gödel, 1931, S. 197; 1986, S. 194, 195), както и нейният контекст, зададен от предшестващата работа (Gödel, 1930; 1986, S. 102–142; 103–143) относно пълнотата на логически системи. Защо в системи, съдържащи аритметиката на Пеано, за разлика от логическите системи, пълнотата и непротиворечивостта се оказват допълнителни? Дали източникът на подобна непълнота, впрочем и за теоретико-множествените, семантични и пр. парадокси, не е необходимостта, за да е налице „пълнота", да се включат на метатвърдения по отношение на – в общия случай – безкрайни множества, и поради това неявно разглеждащи ги като актуални цялости? Можем ли да построим съдържателна интерпретация в термини от физиката на теоретико-множествени и особено на семантичните парадокси, които по мнението на различни автори, в т. ч. и на самия Гьодел, третирани подходящо, фундират доказателствата за непълнотата? Макар че няма да наречем тези и аналогични въпроси реторични, те все пак навеждат по посока на определен тип отговори, които в качеството на хипотези могат да залегнат в последващото изложение.

Самият Гьодел изтъква:

„Аналогията на този извод с антиномията на Ришар бие на очи; също и с „Лъжеца“[1] се намира в близко родство, тъй като неразрешимото твърдение [**R**(**q**); **q**] означава тъкмо че **q** принадлежи на **K**, т.е., според (1), че [**R**(**q**); **q**] не е доказуемо. Следователно пред нас имаме твърдение, което твърди своята собствена недоказуемост“[2] (Gödel, 1931, S. 175; 1986, S. 148, 149).

Редно е да се обърне специално внимание на първата бележка под линия в цитирания пасаж, твърдяща, че *всяка* (!) епистемологична антиномия може да се положи в основата на доказателството.

Във връзка с това би трябвало да се разгледат няколко тясно свързани въпроса:

1. Каква е цената, която следва да заплати едно доказателство, подобно на скицираното, в случай че включи в качеството на необходим – или в този смисъл се основава също и на – довод от такъв специален тип?

2. Валидно ли е самореференциално разсъждение, което би дало положителен отговор за приложимостта на теоремите на Гьодел по отношение на собственото им съдържание?

3. Какъв е Гьоделовият номер на неговите теореми: краен или безкраен?

4. Конструктивни ли са неговите доказателства, както той експлицитно твърди (Gödel, 1931, S. 189–190; 1986, S.176–178, 177–179; Gödel,1931, S. 197; 1986, S.194, 195)?

5. Действително ли т. нар. теореми на Гьодел за непълнотата са теореми, т.е. разрешими твърдения? Или поради самореференциалната приложимост на теоремите на Гьодел се оказва, че от тяхната валидност (разрешимост) следва собствената им неразрешимост (невалидност).

6. Очевидно обаче – и поради самото доказателство на Гьодел – обратното твърдение, т.е. за тяхната невалидност (неразрешимост), е невярно. Следва ли от това, че и самите теореми на Гьодел са неразрешими твърдения?

7. Ако на последния поставен въпрос се даде положителен отговор, то какъв е истинностният, или по-общо фомулирано, логическият и онтологическият статут на твърденията за непълнота на системи, съдържащи аритметиката на Пеано?

8. Може ли дуален подход да намери изход от ситуацията и дали такъв подход не може сам да се разглежда в този смисъл като следствие от неразрешимостта на проблема за пълнотата?

Добре известна е теоремата, че от формална система, която съдържа противоречие, следват както верни, така и неверни твърдения, т.е. грубо казано, „може да се изведе всичко“. Аналогично може да се постави въпросът, дали съществува общ закон, във философски план, или подобен извод, в логически, който да визира статута на формална система, съдържаща довод от такъв специален тип, а именно самореференциален и свързан с един или друг парадокс.

Нека като илюстрация си послужим с парадокса на Лъжеца, изключително прост и нагледен, а освен това изрично цитиран и перифразиран от самия Курт Гьодел по отношение на обосноваващия довод на неговото доказателство. Проблемът при Лъжеца е, че когато казва „Аз лъжа“, той казва истината, но ако казва

---

[1] Може да се използва изобщо всяка епистемологична антиномия за такъв вид доказателство за неразрешимост. [Всички бележки под линия от цитат са от автора на цитата, в случая – Курт Гьодел, освен ако изрично не е посочено друго.]

[2] Такова твърдение обратно на външния вид няма в себе си кръговост, понеже то твърди най-напред недоказуемостта на една съвсем определена формула (а именно на *q*-тата в лексикографския ред при определено вмъкване) и едва допълнително (до известна степен случайно) наистина се оказва, че тази формула е тъкмо онази, чрез която се изразява самото твърдение.

истината, значи не лъже и следователно не казва истината и т.н. Изглежда интуитивно вярно, че ако в дадена логическа верига от изводи се включи твърдение от този тип, то цялата фигура на доказателството ще придобие същия характер.

По думите на Гьодел в случая, който той обсъжда, „имаме твърдение, което твърди своята собствена недоказуемост". В резултат на използването на този довод съвършено коректно следва изводът, че съществуват недоказуеми твърдения, при съблюдаване на определени условия, както най-общо може да се резюмира Гьоделовият аргумент за непълнотата.

Парадокс при „Лъжеца" се получава едва при самореферецииалното прилагане на неговия извод по отношение на самия него, тъй като изпълнява своите собствени предпоставки. Дали при Гьоделовия аргумент възможността за аналогично самореференциално прилагане, водеща до парадокс, е *наистина* отстранена? *Тоест дали самата теорема на Гьодел за неразрешимост не удовлетворява своите собствени условия, в резултат на което самата тя да се явява неразрешимо твърдение?*

Да приемем, че е така. Какво се получава? Тъй като съществуването на неразрешими твърдения само̀ е неразрешимо твърдение, то ние *бихме били свободни да приемем както теоремата на Гьодел, така и нейното отрицание в качеството на* ***аксиома***. Самото доказателство на Гьодел остава валидно, но в качеството на доказателство за непротиворечивост на – вече! – *аксиомата за непълнотата* със системата PM. Би трябвало обаче да съществува също така доказателство и за независимост, като с предходните разсъждения вече се набелязват неговите контури.

Да приемем, че е валидно отрицанието на аксиомата за непълнотата. Тогава попадаме в не-Гьоделова математика, която е справедливо да бъде наречена Хилбертова, в чест на предложената от последния програма за формално самообосноваване на математиката. В нея „няма да съществуват неразрешими твърдения". Но смисълът на това, че „няма да съществуват неразрешими твърдения", подлежи на уточнение.

Може да помогне аналогията с понятието „успоредни прави" при прехода от евклидова към неевклидова геометрия: и по-специално към хиперболичната геометрия на Лобачевски и сферичната или елиптичната – на Риман. Според прочутия пети постулат на Евклид (в кратка, съвременна формулровка) през точка извън дадена права минава точно една права успоредна на нея. В геометрията на Лобачевски през точка извън дадена права минават неопределено много прави, които не я пресичат, като понятието „успоредна" придобива нов смисъл, а именно на двете „най-близки" спрямо дадената прави, които не я пресичат. В геометрията на Риман всеки две прави (‘права' е всяка голяма окръжност) необходимо се пресичат и понятието „успоредни прави" остава безсъдържателно и не се използва.

Както в евклидовата геометрия понятието „успоредни прави" е изключително съдържателно и полезно, така и „неразрешими твърдения" – в Гьоделовата математика. Както в геометрията на Риман „няма успоредни прави", така и в предположената по-горе Хилбертова математика „няма неразрешими твърдения". Заедно с това има смисъл, както ще видим по-нататък, в Хилбертовата математиката трябва да се включи и една дуална област, аналогична на геометрията на Лобачевски, в която да е валидно: „всички или неопределено много твърдения са неразрешими". Така както понятието за „пресичане на прави" помага да се изясни какъв смисъл да се влага съответно в отсъствието и в наличието на успоредни прави, така в нашия случай ще използваме понятието следване от себе си на едно твърдение.

Това понятие е обсъждано в теоремата на Мартин Льоб (Löb, 1955). Така Хилбертовата математика, при която по постулат няма да има неразрешими твърдения, т.е. за всяко твърдение е изводимо, че или то, или неговото отрицание е изводимо, се разбира така: в нея за всяко твърдение, което следва от себе си, е валидно, че или то, или неговото отрицание е изводимо. Обратно, от това, че не е вярно, че дадено твърдение е изводимо, следва, че даденото твърдение не следва от себе си, т.е. то принадлежи на дуалната област, за която по-горе се каза, че е валидно: „всички твърдения са неразрешими".

Във връзка с това е уместно да се спомене семантичната концепция за истината на Тарски, според която „*понятието за истина никога не съвпада с това за доказуемост*, понеже всички доказуеми твърдения са истинни, но има истинни твърдения, които не са доказуеми" (Tarski, 1944, p. 354). Трябва да се има предвид, че тя представлява по-скоро металогическа и философска позиция, макар и съзвучна с т. нар първа теорема за непълнотата на Гьодел и чрез нея и по-опосредствано – с т. нар. втора теорема за непълнотата и теорема за пълнотата. От скицираното в настоящото изложение би трябвало да приемем, че това е неразрешимо, и то собствено философско твърдение, от което и произтича неговата неразрешимост (за разлика например от сродната т. нар. първа теорема за непълнотата, чиято неразрешимост има логически произход, бидейки и формализируема). Начинът на пренебрегване на въпроса за самореференцалността на т. нар. първа теорема от страна на Гьодел изглежда сходен със същността на концепцията на Тарски за истината, още повече, че последният я въвежда също и с оглед изолиране на антиномии от типа на Лъжеца (Tarski, 1944, pp. 347–348). Така или иначе остава проблемът, че Гьодел веднъж прилага формализиран довод, основан и по собствените му думи на антиномии от типа на Лъжеца, следователно в собствено логически контекст, но заедно с това пропуска аналогично прилагане на метаравнище, неявно споделяйки концепцията на Тарски за истината (тогава – 1931 г. – последната още не е съществувала или поне не е била експлицирана и публикувана). Обратно, ако приемем формализируемостта – сложен или неразрешим проблем – на концепцията на Тарски или на алтернативна на нея при условията на т. нар. първа теорема за непълнотата, би могло да се обсъжда в собствено логически план самореференциалността или несамореференциалността на последната.

Модел на „логиката на Хилбертовата математика" може да се построи в духа на квантовата логика от типа на фонНоймановата (Neumann, 1932, S. 130–135[3]), например с помощта на „взаимно неустановимите твърдения": когато твърденията от едната от двете дуални области имат определени истинностни стойности, тези от другата нямат такива. В първия случай казваме, че твърденията следват от себе си, а в другия, че не следват от себе си, или по друг начин казано, че не са тъждествени на себе си.

Ако сравним с Гьоделовата математика, то там всички твърдения имат определени истинностни стойности и съществуват неразрешими твърдения. В Хилбертовата математика някои твърдения нямат определени истинностни стойности, но неразрешими твърдения няма. В резултат на това подмножеството на всички разрешими твърдения би била пълно и непротиворечиво.

Едно прецизно и коректно поставяне може и трябва да се направи в контекста на т.нар. теорема на Кохен и Шпекер, и то по-точно във връзка с вложимостта на една парциална алгебра (Kochen, Specker, 1967, p. 64) на съизмеримите (или всички) наблюдаеми от една квантовомеханична система в булева – и поради това

[3] Ако се ползват руското, английското или друго преводно издание, това е параграф III.5 „Проекционните оператори като пропозиции".

комутативна – алгебра (Kochen, Specker, 1967, pp. 66–70, 84–86[4]). Типът обсъждане (Пенчев, 2010, гл. III.2[5]) може най-грубо да се подскаже чрез това, че при една Хилбертова математика трябва да се постави обратният въпрос за вложимостта на булева алгебра в алгебра ***B*** на наблюдаемите ***A*** от една квантовомеханична система: ако такава вложимост е налице, за съжденията относно наблюдаемите от множеството на допълнението на вложената булева алгебра до тоталното множество на наблюдаемите се дефинира, че нямат определена истинностна стойност. Последното не е в противоречие със следствията от доказаната в § 5 теорема 2 от Кохен и Шпекер (Kochen, Specker, 1967, pp. 74–75), тъй като ***A*** очевидно не може да представлява парциална алгебра[6]. В това допълнение ***C*** също може да се вложи булевата алгебра ***B***, без обаче тоталното множество ***A*** да може да се вложи ***B***. Очертаващата се структура е изоморфна на цермеловския тип „лечение" от парадоксите по теория на множествата (Zermelo, 1908; Skolem, 1970, p. 137), на каквото се основава една от общоприетите днес аксиоматики на теорията на множествата (на Цермело и Френкел със или без аксиомата за избора). Заедно с това тази изоморфност перифразира и прехвърля парадокса на Скулем (Skolem, 1970, pp. 137–145) и произтичащата от него относителност на понятието за множество (Skolem, 1970, p. 138) и винаги наличие на несобствена интерпретация (Skolem, 1970, p.139), която може да се тълкува и като дуална. Явленията на сдвояване в квантовата механика могат да се обсъждат като възможното редуциране на отношението на класовете ***B*** и ***C*** към суспендиране на закона за непротиворечието *или* за изключеното трето помежду им и по отношение на тоталния клас от наблюдаеми на една квантовомеханична система.

Нека вече да преминем към въпроса, дали е валидно самореференциалното разсъждение, което дава положителен отговор за приложимостта на теоремите на Гьодел по отношение на собственото им съдържание? В термините на теорема VI (Gödel, 1931, S. 187; 1986, S. 172, 173) от изложението на Гьодел (обичайно наричана първа теорема на Гьодел за непълнотата), въпросът следва да се постави така:

Дали доказателството на Гьодел може да се формализира като „**ω**-консистентен клас от ФОРМУЛИ"? Или казано с малко повече свобода на езика, дали доказателството на Гьодел съдържа в себе си аритметиката на Пеано, което, за да бъде изпълнено, е достатъчно да съдържа нейните аксиоми.

Една теория е „**ω**-консистентен клас от ФОРМУЛИ", ако и само ако: 1) съществува взаимно еднозначно съответствие **ω** между част от тази теория и естествените числа и техните свойства; 2) по-точно това означава, че не съществ-

[4] Смисълът на цитираните страници в нашия контекст може да се концентрира в следните твърдения, които са строго извеждани от двамата автори: *„Необходимо условие за съществуването на скрити променливи в квантовата механика е съществуването на влагане на парциалната алгебра* ***Q*** *от квантовомеханични наблюдаеми в комутативна алгебра"* (Kochen, Specker, 1967, p. 66). „… не съществува дори един единствен хомоморфизъм на парциална булева алгебра на пропозиции на квантовата механика върху $\mathbf{Z}_2$" (пак там, с. 67). Тук с $\mathbf{Z}_2$ е означено полето от два елемента (пак там, с. 65). Също така: теорема 0 (с. 67); теорема 1 (с. 70); теорема 4 (с. 84) и изводът от нея: *„Има пропозиционална формула* **φ**, *която е класическа тавтология, но която е невярна при (смислено) заместване на квантовомеханични пропозиции за пропозиционалните променливи на* **φ**" (пак там, с. 86).

[5] Тъй като при депозиране на статията цитираната книга все още е под печат, читателят трябва да се ориентира за точните страници по нейното съдържание и по показалеца, след като тя излезе. Заглавието на глава III.2 е: „Кохен и Шпекер: „Проблемът за скритите променливи в квантовата механика" (1967)".

[6] Собствено не може да представлява никаква алгебрична структура, доколкото не може еднозначно да се определи коя да е бинарна и дори унарна операция за всички елементи на ***A***, тъй като част тях, а именно принадлежащите на ***C***, нямат определена стойност.

вува свойство $P(n)$, и то за нито естествено число n, такова че то да е валидно за естествените числа, но да не е валидно при интерпретацията му в термините на теорията посредством взаимно еднозначното съответствие ω. В скицата на доказател-ството Гьодел, която вече започнахме да обсъждаме, пише:

„За метаматематическите разглеждания е естествено безразлично какви обекти са взети като първични знаци и се решаваме на това да използваме естествените числа като такива[7]. Съответно на това, една формула тогава е крайна последователност от естествени числа[8] и фигурата на едно доказателство – крайна редица от крайни редици естествени числа. Метаматематическите понятия (твърдения) чрез това стават понятия (твърдения) относно естествени числа, респ. редици от такива[9] и оттук (поне отчасти) изразими в символите на самата система PM. В частност може да се покаже, че понятията „формула", „фигура на доказателство", „доказуема формула" са дефинируеми вътре в системата PM, т.е. можем например да посочим формула $F(v)$ от PM с една свободна променлива (от типа на числова последователност)[10], така че $F(v)$, интерпретирана съдържателно да означава: е доказуема формула" (Gödel, 1931, s. 174; 1986, S. 146, 147).

Какво следва от този подход относно ω-консистентността на самото доказателство на Гьодел в качеството му на „ω-консистентен клас от ФОРМУЛИ"? Ако изобщо съществува такъв клас от формули, то той ще превърне доказателството на Гьодел в ω-консистентно, тъй като ще се окаже част от него. Също така и изводът на самата теорема – по силата на нейната валидност – веднага се прилага и към самата нея. Тъй като от теоремата, разгледана в качеството на теория, формализирана като „ω-консистентен клас от ФОРМУЛИ" следва единствено нейното заключение, то в резултат на прилагането ѝ към самата себе си следва, че както самото заключение, така и неговото отрицание са недоказуеми. Тоест обобщено, от доказуемостта на самата теорема и валидността на нейната самоприложимост следва нейната недоказуемост. Обратно, да приемем, че е вярно отрицанието на теоремата: тогава следва, че теоремата е доказуема и поради това, в крайна сметка валидна. От приведеното разсъждение следва, че включването на парадоксален довод от типа на парадокса на Ришар или на Лъжеца в самото обосноваване на доказателството на теоремата за непълнотата не може да остане без последствия за самата теорема: тя придобива същия характер на недоказуемо твърдение.

За да проследим отчетливо философските следствия от това състояние на нещата, нека отново използваме илюстрацията с парадокса на Лъжеца, тъй като тя запазва всички същностни черти, необходими за разглеждането на въпроса. При обичайна употреба в езика твърдението „Аз лъжа" имплицира обект на лъжата, от който обаче, напълно естествено, т.е. по общоприето подразбиране, се изключва самореференциално използване по отношение на самото твърдение. В парадокса на Лъжеца отсъствието на нормално подразбирания от контекста *друг* обект на лъжата, изключен чрез изваждането от какъвто и да било контекст, принуждава в качеството на контекст да се разгледа самото твърдение, което чрез това се слива с огледалния си образ на метаравнище: единственият възмо-

---

[7] Тоест изобразяваме първичните знаци по едно-еднозначен начин върху естествени числа.

[8] Тоест разполагане на отрязък от числова редица с естествени числа. (Числата наистина не могат да се доведат до пространствено подреждане.)

[9] С други думи: гореописаната процедура поражда изоморфен образ на системата PM в областта на аритметиката и всички метаматематически разсъждения могат еднакво добре да се проведат в този изоморфен образ. Това става в следващата скица на доказателството, т.е. под „формула", „твърдение", „променлива" и т.н. *трябва винаги да разбираме съответните предмети от изоморфния образ.*

[10] Би било много лесно (само малко обременително) да се изпише тази формула фактически.

жен обект на лъжата при тази насилствено и, разбира се, изкуствено, нарочно измислена употреба, остава самото твърдение, пораждайки необходимата за появата на парадокса самореференциалност.

Гьодел изрично пише:

„От забележката, че [**R**(**q**); **q**] твърди своята собствена недоказуемост, следва веднага, че [**R**(**q**); **q**] е истинно, понеже [**R**(**q**); **q**] е наистина недоказуемо (понеже е неразрешимо). Неразрешимото в системата PM[11] твърдение следователно все пак се разрешава чрез метаматематическо съображение. Точният анализ на това странно обстоятелство води до поразителни резултати по отношение на доказателството за непротиворечивост на формална система, които ще бъдат по-детайлно разработени в Раздел 4 (Твърдение XI)" (Gödel, 1931, S. 176; 1986, S. 150, 151).

Въпросното Твърдение, или Теорема XI, е всъщност т. нар. втора на Гьодел за непълнотата, която в най-едри щрихи твърди, че самата аритметика на Пеано (еквивалентна на нея или включваща я) съдържа доказателство за собствената непротиворечивост тогава и само тогава, когато е противоречива.

Да подчертаем следната връзка: Гьодел изрично поставя в началото на току-що приведения цитат от него основополагащото т.нар. първа теорема за непълнотата твърдение, твърдящо собствената си недоказуемост, в контекста на ***несаморефлексивна*** употреба, която съответства при обсъдената малко по-горе илюстрация чрез парадокса на Лъжеца на обичайната употреба на изречението „Аз лъжа" в някакъв имплицитен контекст. По такъв начин той напълно извежда от обсъждане самореференциалната употреба на т. нар. първа теорема на Гьодел за непълнотата.

По-горе обаче показахме, че това е възможно, оставяйки я сама за себе си извън всякакъв контекст, с който да се съотнесе. Това стана под лозунга тя да бъде разгледана не в качеството на теорема, по какъвто начин се имплицира контекст, а като завършена теория. С това повторихме по същество процедурата, чрез която обичайно употребяваното в контекст твърдение „Аз лъжа" се извежда от него, чрез което се принуждава да се отнесе към себе си, да стане самореференциално. Също така показахме, че т. нар. първа теорема за непълнотата не съдържа никакви необходими логически пречки за самореференциална употреба, както впрочем и самият парадокс на Лъжеца.

Ако и само ако самореференциалната употреба на т. нар. първа теорема за непълнотата бъде изключена чрез външни и следователно произволни съображения, наречени от Гьодел „метаматематически", съответстващи на интуитивната употреба на твърдението „Аз лъжа", но противоречащи на начина на самореференциална употреба на аналогично твърдение в хода на самото доказателство, ***тогава и само тогава*** е валидна т. нар. втора теорема за непълнотата.

Ако включим на обичайни основания за последователност, и толкова повече – за логическа прецизност и коректност също и самореференциалната употреба на т. нар. първа теорема за непълнотата, то тогава т. нар. втора теорема за непълнотата е недоказуема, което обаче следва тъкмо от недоказуемостта и на т. нар.

---

[11] Под „системата PM" се има предвид аксиоматиката, изложена във фундаменталния труд на Ръсел и Уайтхед „Принципи на математиката", главно в параграф 1 (Whitehead, Russell, 1927, pp. 91–97), но и по-нататък. Гьодел се позовава именно на второто издание, поради което то е цитираното тук . Той пише бележка под линия 2 „Към аксиомите на системата PM причисляваме включително аксиомата за безкрайността (във формата: има точно изброимо много индивиди), аксиомата за редуцируемостта и за избора (за всички типове)" (Gödel, 1931, S. 174; 1986, S. 144; 145). Освен това самият той прецизно и изрично посочва аксиомите, на които се позовава в своята работа (Gödel, 1931, S. 177–178; 1986, S. 154; 155).

първа теорема за непълнотата, тъй като нейната валидност след самореференциална употреба влече нейната собствена недоказуемост.

Самоприлагането на т. нар. първа теорема за непълнотата в контекста на самата работа на Гьодел би трябвало на пръв поглед да се изключва от изричното позоваване на „системата на Prinicipia Mathematica“ и по-конкретно на аксиомата за редуцируемостта, която специално е посочена като включена във вече цитираната бел. 2 под линия (Gödel, 1931, S. 174; 1986, S. 144; 145). Самата аксиома за редуцируемостта според използваното от него второ издание гласи:

„Аксиомата за редуцируемостта е допускането, че ако е дадена произволна функция $\phi\hat{x}$, има формално еквивалентна *предикативна* функция, т.е. има предикативна функция, която е истинна, когато ϕx е истинна, и неистинна, когато ϕx е неистинна“ (Whitehead, Russell, 1927, p. 56). Очевидно ключово – както личи от поставянето в курсив от Уайтхед и Ръсел – е понятието за предикативна функция. „Ще дефинираме функция на една променлива като предикативна, когато тя е от следващия ред над този на нейния аргумент, т.е. от най-ниския ред, съвместим с притежаването на този аргумент. Ако функция има няколко аргумента и най-високият ред на функция, случващ се сред аргументите, е ***n***-тият, ние ще наричаме функцията предикативна, ако тя е от $\boldsymbol{n+1}$-я ред, т.е. пак ако тя е от най-ниския ред, съвместим с притежаването на аргументите, които тя има. Функция на няколко аргумента е предикативна, ако има сред нейните аргументи такъв, че получаваме предикативна функция на единия неопределен аргумент, когато на другите аргументи са дадени стойности“ (Whitehead, Russell, 1927, p. 53).

От приведените цитати е ясно, че Ръсел и Уайтхед въвеждат тази аксиома, както и съответната концепция за типовете и тяхната йерархия, според тяхното убеждение – експлицитно и многократно изразявано особено от първия от двамата, – че откритите парадокси в теорията на множествата, в т.ч. и известният като парадокс на Ръсел, се дължат на неправомерността на пропозиции, които са самореференциални, или по използваната от тях терминология – непредикативни. Аксиомата за редуцируемостта ги изключва. Очевидно тя би трябвало да изключи и отнасяне на т.нар. първа теорема за непълнотата към себе си. Но ако това е така, би трябвало да не се употребява и непредикативен довод от типа на антиномията на Ришар или парадокса на Лъжеца относно твърдение, което твърди собствената си недоказуемост. Обратно, ако такова се използва, трябва да се разреши и прилагане на теоремата по отношение на самата себе си, чрез каквото – както показваме – от нейната валидност следва нейната неразрешимост в качеството ѝ на твърдение.

Все пак остава още една „вратичка“: дали при формулирането на такова твърдение чрез аритметично кодиране в аксиоматиката на Пеано, както прави Гьодел, не му се е удало някак да заобиколи забраната за непридикативност. Формално и на пръв поглед това е именно така, понеже нито аксиомата за редуцируемостта, нито неин аналог не е налице в аритметиката на Пеано.

Гьодел пише, че „твърдението [**R**(**q**); **q**] е неразрешимо в PM“ (Gödel, 1931, S. 174–175; 1986, S. 146–148; 147–149). „Твърдението [**R**(**q**); **q**] “ е тъкмо „твърдението, което твърди собствената си недоказуемост“, както го определя логикът и както експлицитно може да се проследи на същото място в текста по начина на неговото построяване. „То“ няма и защо да бъде разрешимо PM, както и неразрешимо в нея, тъй като според аксиомата за редуцируемостта не е твърдение в PM, тъй като е очевидно непредикативно. С други думи, това, което се оказва, че има намерение да покаже Гьодел, е: може да се построи изречение, което не е твърдение в PM и което е неразрешимо в PM: т. е. нещо тривиално.

Гьоделовата стратегия за заобикаляне на непредикативността на изречението [**R**(**q**); **q**] е следната: (1) твърденията на PM се кодират в аритметиката на Пеано; (2) в последната се построява аритметичният израз [**R**(**q**); **q**]; (3) тъй като всеки аритметичен израз в аритметиката на Пеано еднозначно посочва твърдение в PM, то изречението [**R**(**q**); **q**] е твърдение в PM и поради това може да се обсъжда неговата разрешимост и да се доказва неразрешимостта му. Въвеждането на понятието за „ω-консистентност" не добавя нищо принципно ново към такъв подход, а само напълно го прецизира.

Проблемът обаче идва от това, че – поради построяването на [**R**(**q**); **q**] чрез самоотнасяне в рамката на аритметиката на Пеано – не можем да сме сигурни, че неговата стойност след изчисление е крайна. Стойността на всеки израз с краен брой операнди, *построен без самоотнасяне*, т.е. самият израз да участва като операнд, е крайна. Не такъв е случаят при самоотнасяне, както се създава [**R**(**q**); **q**][12]. Не е изключено това да е неразрешимо твърдение, или респ. допълнителна аксиома в рамките на аксиоматиката на Пеано[13]. Как следва, по-нататък, да се декодира в PM израз с безкрайна стойност, е повече от неясно. Изводът е, че стратегията за заобикаляне на непредикативността чрез кодиране във – и после, декодиране от – аритметиката на Пеано за твърденията от PM е проблематична, дискусионна и всъщност неуспешна.

От приведените аргументи и експлицитните цитати би трябвало вече да е ясно, че логик от ранга на Гьодел не може да не си е давал сметка за особения статут на т. нар. първа теорема за непълнотата, поради това, че самореференциалната ѝ употреба, от която следва нейната недоказуемост, е изключена по метаматематически съображения. С други думи, изглежда твърде невероятно да не е разбирал, че тя е аксиома и едва след приемането ѝ (заедно с отхвърляне на нейното отрицание по външни спрямо математиката съображения) следва непълнотата на Пеановата аритметика, визирана в т. нар. втора теорема за непълнотата, и оттук зачеркването като невъзможна на програмата за самообосноваване на математиката на Хилберт.

Какво е тогава истинското положение на нещата? От валидността на т. нар. първа теорема за непълнотата следва неосъществимостта на Хилбертовата програма, но заедно с това е необходимо да се въведе външно съображение, което да забрани самореференциалната ѝ употреба. Следователно то има характер на аксиома, и при това последната е необходимо в тясна връзка с т. нар. първа теорема за непълнотата, възможно дори при определени подходи логически еквивалентно с нея.

Ако тази аксиома не бъде добавена (което е различно от това да се приеме нейното отрицание в качеството на аксиома), тогава поради самореференциалната употреба на теоремата, от нейната валидност следва нейната недоказуемост. Тогава т. нар. втора теорема за непълнота не може да се изведе, най-малкото по пътя, следван от Гьодел.

---

[12] Като илюстрация читателят може да си послужи с Гьоделовото кодиране за получаване на Гьоделовия номер на твърдението, което съответства на [**R**(**q**); **q**].

[13] Стойността на аритметичен израз в аритметиката на Пеано, който участва в самия себе си като операнд, наред с ненулеви други операнди, изглежда интуитивно убедително да се приеме за безкрайна. Такова определение би било същностно подобно на определението за *актуално* безкрайно множество като равномощно на свое същинско подмножество. Понятие, самото то или родствено, за *актуално* безкраен аритметичен израз обаче не фигурира сред аксиоматиката на Пеано, а само като *конструктивен* процес. Съществуват различни становища относно това, дали аксиомата за пълната индукция не въвежда имплицитно 'актуална безкрайност'. Поради дискусионността на въпроса тук се предпочита той да остане отворен – а именно, от аксиоматиката на Пеано не следва, че стойността на израз, построен със самоотнасяне, е крайна – което е достатъчно за настоящето разглеждане.

Тогава проличава изключително деликатното и интересно съотношение на т. нар. първа и втора теорема за непълнотата. Неговите последствия вече бяха обрисувани по-горе. Може да говорим за два алтернативни типа математики: Гьоделова математика и Хилбертова математика според това, дали математиката не може (Гьоделовата) или може (Хилбертовата) да се самообоснове. Според досега общоприетото разбиране на резултата на Гьодел математиката не може да се самообоснове, но това се доказва с *вътрешно*-математически средства.

Един по-прецизен анализ, чиято скица се опитахме да започнем по-горе, обаче показва, че с изцяло вътрешно-математически средства не може да се докаже нито че математиката може да се самообоснове, *нито че математиката не може да се самообоснове*. С други думи, това е едно неразрешимо твърдение, чиято неразрешимост непосредствено следва от неразрешимостта на т. нар. първа теорема за непълнотата. Неразрешимостта на последната следва от валидността на последната след самореференциално прилагане.

Тогава в рамките на собствено математическо разглеждане ние сме свободни да положим в качеството на аксиома самообосноваването на математиката, и то – тъкмо според програмата на Хилберт – върху основата на аритметиката. В този случай е валидно отрицанието на т. нар. втора теорема за непълнотата: аритметиката на Пеано може да е пълна в смисъл, че може да съдържа доказателство за собствената непротиворечивост и заедно с това е непротиворечива. Оттук веднага следва, че е валидно и отрицанието на първата теорема за непълнота, т.е. от теория, съдържаща аритметиката, не може да се изведе неразрешимо твърдение. Нещо повече, в този случай формулировката на т. нар. първа теорема за непълнотата придобива изглед, аналогичен на т. нар. втора теорема: твърдение, визирано в нея, е разрешимо тогава и само тогава, когато е неразрешимо, поради което трябва да се приеме, че не съществува.

Що се отнася до това валидно ли е прилагането на т. нар. първа теорема за непълнотата към самата нея, може да се добави още: самият Гьодел изтъква, че неговият „метод на доказателство очевидно може да се приложи към всяка формална система, която, първо, съдържателно тълкувана, има на свое разположение достатъчно средства за изразяване, за да дефинира понятията, появяващи се в горното разсъждение (по-специално понятието „доказуема формула“) и в която, второ, всяка доказуема формула е истинна също и съдържателно“ (Gödel, 1931, S. 175–176 1986, S. 150, 151). В последващото изложение замества „втората от току-що приведените предпоставки с чисто формална и далеч по-слаба“ (пак там), а по същество именно – че всяка доказуема формула се интерпретира в истинно съждение относно целите числа (т. нар. ω-непротиворечивост). В самата т. нар. първа теорема за непълнотата тези условия са изпълнени, доколкото са кодируеми чрез езика на аритметиката на Пеано, който тя включва.

Въпросът за самореференциалното приложение на т. нар. първа теорема за непълнотата ни отвежда и към третия поставен въпрос: какъв е нейният Гьоделов номер? Основните проблеми тук са два. Първо, съществува ли явна забрана да се присъедини Гьоделов номер на т. нар. първа теорема за непълнотата? Второ, кои символи участват в записа на формулата ѝ: символ за множеството от всички естествени числа или самите символи на естествените числа?

Отговорът на първия въпрос е отрицателен. Не съществува забрана да се присъедини Гьоделов номер на т. нар. първа теорема за непълнотата. Това следва от факта, че такъв се приписва на всяко твърдение от „формалната система ***P***, за която искаме да докажем съществуването на неразрешими твърдения“ (Gödel, 1931, S. 176; 1986, S. 150, 151) и от дефинитивното описание на такава формална система ***P*** (Gödel, 1931, S. 176–177; 1986, 150–152, 151–153), според което т. нар. първа теорема за пълнотата, разгледана в качеството на формална система в съответствие със съображенията, изложени по-горе, изпълнява изискванията за такава формална система.

Отговорът на втория въпрос е, че се изброяват в качеството на символи всички естествени числа и това следва от описания (Gödel, 1931, S. 178–179; 1986, S. 156, 157) начин, по който се построява взаимно еднозначно съответствие между първичните знаци на формалната система ***P***.

От тези две съображения следва, че Гьоделовият номер Θ, който би трябвало да се присъедини на самата т. нар. първа теорема за непълнотата, е $\Theta = \Pi_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i^{\boldsymbol{ni}}$, където $\boldsymbol{p}_i$ са простите числа, подредени по нарастваща големина, а $\boldsymbol{n}_i$ са естествените числа, които кодират чрез едно-еднозначното съответствие първичните знаци от формалната система ***P***. Очевидно този номер ще бъде безкраен и няма да е уникален, тъй като и на отрицанието на т. нар. първа теорема за непълнотата ще бъде приписан същият (!?) безкраен номер. За всеки краен Гьоделов номер можем да възстановим еднозначно оригиналната формула, обаче за самата Гьоделова теорема, поради това че номерът ѝ е безкраен, се присъединяват поне две формули: самата тя и нейното отрицание, и по него е невъзможно да бъде възстановена еднозначно. Поради това доказателството му не може да се приеме за конструктивно, тъй като съществува поне едно твърдение, а именно самата т. нар. първа теорема за непълнотата, по чийто номер Θ не може да се възстанови еднозначно самото твърдение. Що се отнася до т. нар. втора теорема за непълнотата, то тя не е конструктивна по силата на това, че е недоказуема.

Тъй като вече скицирахме отговорите на въпроси 5, 6 и 7, да преминем към отговора на въпрос 8. Може ли дуален подход да намери изход от ситуацията и дали такъв подход не може сам да се разглежда в този смисъл като следствие от неразрешимостта на проблема за пълнотата? Очевидно тук по-скоро трябва да се премине към философски тип отговор. Оформя се дуализмът: или Хилбертова самообосноваваща се математика, или Гьоделовата математика на непълнотата. Двата подхода са еднакво валидни, но несъвместими. Както вътре в Хилбертовата, така и вътре в Гьоделовата математика имаме съответно или две дуални области, в която или всички твърдения са разрешими, или нито едно твърдение не е разрешимо, от една страна, или, от друга, съществуват както разрешими, така и неразрешими твърдения, при което принадлежността към единия или другия клас трябва да се решава конкретно за всяко отделно твърдение. Очевидно е също така, че едно неразрешимо твърдение може да се разглежда като две дуални, еднакво валидни, но несъвместими твърдения, с други думи, като кохерентната суперпозиция „да-и-не твърдение“, както и че една кохерентна суперпозиция, да речем, прословутият и вече разгледан пример с Шрьодингеровата „жива-и-мъртва котка“, може да се тълкува като неразрешимо твърдение, чието разрешаване се извършва чрез необходимо външната процедура на измерването (наблюдението).

Квантовата механика и информация ни предлага интерпретативния ключ, чрез който можем да осмислим и да си изясним от философска гледна точка съотношението между Хилбертовата и Гьоделовата математика. Последната съответства по-точно на онтологично-епистемологичния изход, намерен от квантовата механика и информация, за специфични, но аналогични напрежения и това ни позволява да говорим за особен стил на мислене, който можем да наречем „Принстънски дух“, характерен за епохата, но непроизтичащ необходимо от самото състояние на нещата, чието дуално осмисляне е и тъкмо Хилбертовата самообосноваваща се математика.

Затова обаче има и по-дълбоки *историко*-философски и може би дори историко-*онтологични* основания. В еднаква степен можем да говорим за две взаимно трансцендентни, но свързани и поне отчасти огледални, „рефлексивни" области (които и да са те, например крайно и безкрайно, субект и обект и пр.) или за една единствена интегрална област, в която двете начала се проникват взаимно, в общия случай във всеки обект, без това да изключва самостоятелното съществуване на двете начала, обаче само в качеството на гранични частни случаи, крайните точки на един всеобхватен континуум между тях.

В историята на духа по-скоро първоначалният, „класическият" вариант, който се реализира, е първият, докато т. нар. Принстънски *дух* характеризира развитието на специфичните конфликти в него и прехода към втория подход, всъщност еднакво възможен според състоянието на нещата.

За да си изясним съотношението между контекста на откритието, зададен чрез т. нар. теорема за пълнотата на Гьодел, и неговото съдържание, съответстващ на т. нар. първа и втора теорема за непълнотата, нека сега отново се насочим към общия план и замисъла на доказателството, така както са изложени от Гьодел:

„Ще скицираме, преди да навлезем в детайли, първо главната идея на доказателството, естествено, без да предявяваме претенция за точност. Формулите на една формална система (тук се ограничаваме до системата PM[14]) са, отвън разгледани, крайни последователности от основни знаци (променливи, логически константи и скоби или, съответно, точки за разделяте) и лесно може точно да се прецизира, кои редици от основни знаци са смислени формули и кои не са[15]. Аналогично доказателствата, от формална гледна точка, не са нищо друго освен крайни последователности от формули (с определени свойства, които могат да се посочат)" (Gödel, 1931, S. 174; 1986, S. 146, 147).

Тук бихме искали да подчертаем два момента относно формулите, които са разглеждани, а именно: че са множества с краен брой елементи и че са последователности, т.е. елементите им са *номерирани еднозначно* и тук – както и в доказателството на Генцен (Gentzen, 1969, pp. 132–213; 252–286) – на всяка формула съответства ординал. Както вече видяхме, с това възниква проблем със самата т. нар. първа теорема за непълнота, разгледана в качеството на формула: тя трябва да съдържа безкраен брой елементи, тъй като необходимо включва подмножество с безкраен брой елементи, а именно естествените числа. След като тя не е формула (можем да приемем ограничението до системата PM), единствената възможност, която остава, е да я тълкуваме като теория и с това да продължим по пътя към самореференциалното ѝ приложение.

Може да се издигне хипотезата, че макар т. нар. първа теорема за непълнотата – след обосноваването на нейното самореференциално прилагане – се оказва недоказуема като следствие от собствената ѝ валидност, тя все пак е доказуема посредством трансфинитна индукция, т.е. в системата, използвана в качеството на метатеория в доказателството на Генцен.

Едно друго съображение е тясно свързано с контекста на обсъжданото доказателство както в творчеството на Гьодел, така и при стандартното ѝ изложение, а именно във връзката с т. нар. теоремата на Гьодел за пълнотата, представляваща основен резултат в неговата дисертация. Нейното доказателство е публикувано в 1930 г. – годината, предшестваща публикацията „За формално неразре-

[14] Системата на „Принципи на математиката" от Ръсел и Уайтхед. – Бел. моя: В. П.

[15] Разбираме тук и в следващото под „формула от PM" винаги формула, написана без съкращения (т.е. без използване на дефиниции). Дефинициите служат винаги само за по-кратък начин за запис и следователно по принцип са ненужни.

шими пропозиции на Principia mathematica и родствени системи I“ (1931). За нас в тази връзка са особено съществени два въпроса:

1. По какво в основата си се различават условията, описващи една математическа система, в т. нар. теорема за пълнотата и в първата теорема за непълнотата, така че на такава разлика да може да се вмени ролята на „причина“, т.е. на достатъчно и може би необходимо условие за появата на „непълнота“?

2. На коя аксиома в теория на множествата съответства тази съществена разлика?

За изясняване смисъла на първия въпрос много помага т. нар теорема за компактността:

„За да бъде изброимо безкрайна система от формули изпълнима [erfüllbar], необходимо и достатъчно е всяка нейна крайна система да е изпълнима“ (твърдение 10: Gödel, 1931, S. 358; Gödel, 1986, S. 118, 119).

Един възможен, често срещан, но *неверен* отговор на първия поставен въпрос е следният: докато в т. нар. теорема за пълнотата става дума за краен брой „първични знаци“, съставящи евентуално безкраен брой формули, то т. нар. първа теорема за непълнотата се отнася до формули, съставяни с помощта на безкраен брой теорема първични знаци, сред които със сигурност, твърди тя, може да се открие такава, която се явява неразрешимо твърдение.

Необходимо условие за дадения отговор и други аналогични или дори еквивалентни твърдения от същия тип е абсолютната разлика между първичен знак и формула, на което в теорията на множествата съответства такава между елемент и множество, а в елементарната аритметика, аксиоматизирана по Пеано – аналогична между число и неговия наследник, респ. между число и неговия предходник. За никое $\boldsymbol{n}$ не е вярно, че $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n} + 1$ съвпадат. При крайни както кардинални, така и ординални числа това е безусловно вярно. Но всъщност това е фундаменталната и основополагаща разлика между безкрайните ординали и безкрайните кардинали: докато първите запазват това свойство, като се оказва в основата на изискването за ‘конструктивност’ и дори за ‘финитност’, то не е вече валидно за безкрайните кардинали.

Що се отнася до теорията на множествата, изначално важна е аксиомата за фундирането: ако допуснем, че не е валидна, то съществува множество, за което разликата между елемент и множество, остава винаги относителна; обратно, ако бъде приета, наличието на „дъно“ предполага, че винаги съществуват елементи, които по принцип не могат да бъдат множества.

По един парадоксален начин обаче ролята на такова „дъно“ изпълнява празното множество, Ø, т.е. множеството, което няма елементи. В елементарната аритметика такъв елемент е първото естествено число, за каквото в повечето съвременни трактовки – поради съображението да бъде включен и неутралният елемент на събирането – се приема нулата, т.е. онзи брой, когато няма какво да се брои. Обсъждането на необходимостта от тази парадоксалност на празното множество или на началното число ще оставим засега настрана.

Както вече видяхме, че е възможно, ако се приеме за пълна такава система, която съдържа безкраен брой „първични знаци“ (т.е. такава, която може да се кодира чрез естествените числа), то това веднага изисква суспендиране на аксиомата за фундирането, съответно и най-нагледно – въвеждането на отрицателните числа в качеството на естествени; или с други думи: заличаване на каквато и да е разлика между символ и формула, между елемент и множество; фигуративно казано, една „всеобща ковариантност“, „пълна относителност“ в първичната логика, теорията на множествата и аритметиката.

За да си изясним защо даденият и характеризиран като често срещан отговор на първия въпрос е неверен, следва да навлезем в подробности в доста необикновената логическа връзка между т. нар. теорема за пълнотата и двете теореми за непълнотата в светлината на вече направените по-горе разсъждения относно самореференциалната приложимост и оттук неразрешимост на т. нар. първа теорема за непълнота.

Поразителното е, че всъщност и Гьодел винаги го е твърдял, но по един доста необичаен, логически прецизен, но твърде софистициран начин, който е на самата граница на това да се предположи съзнателно въвеждане в заблуждение.

В доказателството на т. нар. теорема за пълнотата никъде не се твърди, че то е конструктивно, за разлика от цитираните места в публикацията (1931) относно т. нар. теореми за непълнотата. В наше време не се оспорва, че то не е конструктивно в точно определена степен, а именно в степента, в която не е конструктивна „лемата за ултрафилтрите"[16], по-слаба форма на аксиомата за избора. Освен това никъде не се твърди и следователно никъде не се използва, че броят на „първичните знаци" – вкл. и според цитираното описание, дадено им в публикацията относно т. нар. теореми за непълнотата – е краен. При безкраен брой „първични знаци" могат да бъдат изпълнени едновременно и теоремата за пълнота, и т. нар. първа теорема за непълнотата (след самореференциалното ѝ прилагане, което я превръща в неразрешимо твърдение), но не може да бъде изпълнена т. нар. втора теорема за непълнотата. Обратно, ако са изпълнени т. нар. първа и втора теорема за непълнотата, не може да е изпълнена т. нар. теорема за пълнотата.

Обсъжданото наведено за „въвеждане в заблуждение" има чисто психологически характер: докато връзката между т. нар. първа и втора теорема за непълнотата се преекспонира, поради очевидно натрапващото се тяхно единство в рамките на една публикация, то еквивалентната по логическа значимост връзка между т. нар. теорема за пълнотата и т. нар. първа теорема за непълнотата се скрива в сянката на пролома между двете публикации, в сякаш изкуствено предизвикана „кокоша слепота" чрез светкавицата между т. нар. първа и втора теорема за непълнота и оттук и чрез оглушаването от грохота от предизвиканото от нея предполагаемо срутване на Хилбертовата програма за самообосноваване на математиката.

Бихме обърнали вместо това внимание на една неспоменатa досега възможност за съотношение между Хилбертовата и Гьоделовата математика, а именно, че тяхното сечение не е непременно празно, при което биха били валидни както т. нар. теорема за пълнота, така и *двете* т. нар. теореми за непълнота. С други думи, не може да се изключи съществуването на аксиоматики, необходимо съдържащи брой първични знаци, който не е краен, които заедно с това удовлетворяват едновременно т. нар. теорема за пълнотата и първа теорема за непълнотата. Най-прост наглед за такава ситуация може да се даде посредством интуиционисткото суспендиране на правилото за изключеното трето при безкрайни множества. За целта просто трябва да изключим аксиомата за фундирането, т.е. не да я заместим с нейното отрицание, а да я премахнем: с това „по интуиционистки" оставяме висящ въпроса съществува ли множество, което няма „дъно" (= няма крайно „дъно"). С други думи, трябва да оставим без какъвто и да било отговор въпроса съществуват ли първични знаци[17], които заедно с това са фор-

[16] Според нея не съществува филтър в множество, който да не се съдържа в някой ултрафилтър в това множество.

[17] За съжаление много интересната връзка с философското направление на феноменологията, разглеждаща феномените като знаци на самите себе си, или по определението на Хайдегер „показващи сами себе си в себе си", няма да има възможност да се проследи в настоящото изследване, но може би в някое следващо.

мули; елементи, които не могат да бъдат множества; или ординали, които съвпадат със своя наследник. Този отказ от отговор изглежда свързан и с отказ от алтернативата: или потенциална, или актуална безкрайност, както и с приемане на хипотезата, че валидността на самореференциално прилагане на едно твърдение трябва да се решава винаги конкретно и често необходимо по съображения, външни за формализма, в който се съдържа.

Да проследим от набелязаната философска гледна точка как в скицата на доказателство, предложена от Гьодел, се построява неразрешимото твърдение:

Сега създаваме неразрешимо твърдение за системата РМ, т.е. е твърдение **A**, за което нито **A**, нито не-**A** е доказуемо, по следния начин:

„Формула от РМ с точно една свободна променлива, и то от типа на естествените числа (клас от класове), наричаме знак на класове[18]. Знака на класове си [го] мислим някак подреден в последователност[19], означаваме **n**-тия с $\mathbf{R(n)}$ и забелязваме, че понятието „знаци на класове", както и подреждащото отношение **R** може да се дефинира в системата РМ. Нека $\boldsymbol{\alpha}$ е кой да е знак на класове; със $[\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}]$ да означим онази формула, която съответства на знака на класове $\boldsymbol{\alpha}$ чрез това, че свободната променлива е заместена със знака за естественото число **n**. И тройното отношение $\mathbf{x} = [\mathbf{y}; \mathbf{z}]$ се доказва като дефинируемо в РМ. Сега ще дефинираме клас **K** от естествени числа по следния начин:

(1) $$\mathbf{n} \in \mathbf{K} \equiv \overline{\mathbf{Bew}}\, [\mathbf{R(n)}; \mathbf{n}]$$

(където **Bew x** означава: **x** е доказуема формула)[20]. Тъй като понятията, които се срещат в определящия израз, заедно с това са дефинируеми в РМ, така и понятието **K**, съставено от тях, т.е. има знак на класове **S**, така че формулата $[\mathbf{S}; \mathbf{n}]$, съдържателно тълкувана, означава, че естественото число **n** принадлежи на **K**[21]. **S** е като знак на класове идентичен с едно определено $\mathbf{R(q)}$, т.е. е в сила

$$\mathbf{S} = \mathbf{R(q)}$$

за определено естествено число **q**. Сега показваме, че твърдението $[\mathbf{R(n)}; \mathbf{n}]$ е неразрешимо в РМ[22]. Тъй като предположеното твърдение би било доказуемо, то би било също и истинно, т.е. обаче според горното щеше да принадлежи на **K**, т.е. според (1), $\overline{\mathbf{Bew}}\, [\mathbf{R(n)}; \mathbf{n}]$ би било в сила, в противоречие с допускането. Ако, обратно, отрицанието на $[\mathbf{R(n)}; \mathbf{n}]$ беше доказуемо, то щеше $\overline{\mathbf{q} \in \mathbf{K}}$, т. е. $\mathbf{Bew}\, [\mathbf{R(n)}; \mathbf{n}]$ би било в сила. $[\mathbf{R(q)}; \mathbf{q}]$ би било доказуемо едновременно със своето отрицание, което отново е невъзможно" (Gödel, 1931, S. 174–175; 1986, S. 146–148; 147–149).

С други думи, неразрешимото твърдение, което построява Гьодел, е, че за всяко едно число може да се реши проблемът, *дали то принадлежи на множеството от всички числа, за които това* (а именно поставеното в курсив в същото това изречение) *твърдение не е вярно*. Това ни позволява да оценим постигнатото от Гьодел – имайки предвид и цитираната вече негова бележка под линия 14 (Gödel, 1931, S. 175; 1986, S. 148, 149):

---

[18] Klassenzeichen, в английския превод „class sign": срещащият се понякога на български превод „клас знаци" е неправилен и изопачава смисъла.

[19] Например по нарастваща сума на членовете и при еднаква сума лексикографски.

[20] С чертата отгоре е означено отрицание.

[21] Не представлява отново никаква трудност да се запише формулата **S** фактически.

[22] Забележете, че „$[R(q); q]$" (или, което значи същото, „$[S; q]$") е просто *математическо описание* на неразрешимото твърдение. Но веднага щом формулата S е получена, можем естествено да определим и числото q и чрез това реално да запишем самото неразрешимо твърдение.

Може да се използва изобщо всяка епистемологична антиномия за едно доказателство за неразрешимост от такъв вид – по следния начин: построен е обобщаващ модел в аритметиката на Пеано вероятно[23] на всички самореференциални семантични и теоретико-множествени твърдения, водещи до парадокс. Както вече изказахме хипотезата, включването на твърдение от такъв тип в доказателство има твърде висока цена, аналогична, макар и не чак толкова висока, на включването на противоречиво твърдение в едно доказателство. Тази цена е, че *доказаното по такъв начин твърдение придобива самото то неразрешим характер*, при това напълно достатъчно е, щото последното твърдение (а именно поставеното в курсив) да не е опровержимо, т.е. може да бъде както доказуемо, така и неразрешимо.

Вече видяхме, че Гьодел не напуска така очертаната прецизна логическа схема, но същевременно тя се оказва съзнателно или несъзнателно реторично оформена. В резултат на това мнозина нейни тълкуватели са се оказвали подведени по интенциите на нейната реторика, оставайки в „кокоша слепота" за логическата ѝ цялост.

ЛИТЕРАТУРА

Gentzen, G. (1969). The Collected Papers of Gerhard Gentzen (ed. M. Szabo). Amsterdam-London: North Holland Publishing Company.

Gödel, K. (1930). Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. – Monatshefte der Mathematik und Physik. Bd. 37, No 1 (December, 1930), 349-360 (Bilingual German – English edition: K. Gödel. The completeness of the axioms of the functional calculus of logic. – In: K. Gödel. Collected Works. Vol. I. Publications 1929–1936. Oxford: University Press, New York: Clarendon Press – Oxford, 1986, 103–123.)

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. – Monatshefte der Mathematik und Physik. Bd. 38, No 1 (December, 1931), 173–198. (Bilingual German – English edition: K. Gödel. The formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems I. – In: K. Gödel. Collected Works. Vol. I. Publications 1929–1936. Oxford: University Press, New York: Clarendon Press – Oxford, 1986, 144–195.)

Kochen, S., E. Specker. (1967). The problem of hidden variables in quantum mechanics. – Physical Review A. Vol. 17, № 1, 59–87.

Löb, M. (1955). Solution of a problem of Leon Henkin. – The Journal of Symbolic Logic. Vol. 20, No 2, 115–118.

v. Neumann, J. (1932). Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Verlag von Julius Springer. (J. von Neumann. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton: University Press, 1955; Й. фон Нейман. Математические основы квантовой механики. М., 1964, Наука).

Skolem, T. (1970). Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. – In: T. Skolem. Selected works in logic (ed. E. Fenstad), Oslo etc: Univforlaget.

Tarski, A. (1944). The Semantical Concept of Truth and the Foundations of Semantics. – Philosophy and Phenomenological Research. Vol. 4, No 3, 341–375 – http://www.ditext.com/tarski/tarski.html (http://www.crumpled.com/cp/classics/tarski.html).

Whitehead, A., B. Russell. (1927). Principia Mathematica (second edition). Vol. I. Cambridge: University Press.

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. – Mathematische Annalen, Vol. 65, No 2: 261–281; English translation („Investigations in the foundations of set theory") in: J. van Heijenoort, J. 1967. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. (Source Books in the History of the Sciences). Harvard: Univ. Press, 199–215.

Пенчев, В. (2010). Философия на квантовата механика. II. Неравенствата на Бел. С., ИФИ-БАН (под печат).

[23] Тук „вероятно" е добавено, за да не обсъждаме възможността настоящето твърдение също така да се окаже или от него непосредствено следва неразрешимо твърдение.