ISSN 0861-7899

Философски алтернативи
Philosophical alternatives

2/2011

ГОДИНА XX
VOL. XX

СПИСАНИЕ НА ИНСТИТУТА
ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОБЩЕСТВАТА
И ЗНАНИЕТО ПРИ БАН

СЪДЪРЖАНИЕ

ДУХОВНИ ЦЕННОСТИ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Nathan Hauser – Peirce on the Growth of Values 5
Нонка Богомилова – Религиозните „нишки“ в капиталистическия дух и Западната цивилизация: Макс Вебер 14
Силвия Серафимова – Войната срещу тероризма – Bellum Intestinum, или поредната справедлива война 27

ДУХОВНИ ЦЕННОСТИ И ВРЕМЕ

За поети и мислители: разговор за философия, литература и за възстановяването на света (Костика Брадатан разговаря със Саймън Кричли, Джузепе Мацота и Александър Нехамас) 45
Вангел Куков – Философия и образование 60
Мая Ангелова – Въпросът за смисъла на живота на постмодерната сцена 72
Мина Стоева – Философско-феноменологически анализи и интерпретации относно възприемане и измерване на времето 85

ФИЛОСОФИЯ НА НАУКАТА

Франсоа Бийтс – От произволността на знака към изкуствените знаци: Кондияк, или лингвистичната вкорененост на науката 95
Антоанета Николова, Йордан Георгиев – Динамичният характер на реалността: поглед от съвременната наука и китайската натурфилософия 102
Александър Николов – За движещите сили в природата и обществото 118
Васил Пенчев – Парадоксът на Скулем и квантовата информация. Относителност на пълнота по Гьодел 131
Константин Янакиев – Как доказва експериментът? 147

IN MEMORIAM

Димитър Зашев – Разкъсано съцветие 160
Правда Спасова – За Стефчо Попски с обич и тъга 161

ВАСИЛ ПЕНЧЕВ

ПАРАДОКСЪТ НА СКУЛЕМ И КВАНТОВАТА ИНФОРМАЦИЯ. ОТНОСИТЕЛНОСТ НА ПЪЛНОТА ПО ГЬОДЕЛ

Abstract

In 1992, Thoralf Skolem introduced the term of «relativity» as to infinity or set theory. He demonstrated by Zermelo's axiomatics of set theory (incl. the axiom of choice) that there exist unintended interpretations of any infinite set. The very notion of set was also «relative». We can apply his argumentation to Gödel's incompleteness theorems as well as to his completeness theorem (1930). Then both the incompleteness of Peano arithmetic and the completeness of first-order logic turn out to be also «relative» in Skolem's sense. Skolem's «relativity» argumentation of that kind can be applied to a very wide range of problems and can be spoken of the relativity of discreteness and continuity, of finiteness and infinity, of Cantor's kinds of infinities, etc. The relativity of Skolemian type helps us for generalizing Einstein's principle of relativity from the invariance of the physical laws toward diffeomorphisms to their invariance toward any morphisms (including and especially the discrete ones). Such a kind of generalization from diffeomorphisms (when the notion of velocity always makes sense) to any kind of morphism (when 'velocity' may or may not make sense) is an extension of the general Skolemian type of relativity between discreteness and continuity or between finiteness and infinity. Particularly, Lorentz invariance gains constrained validity, because the very notion of velocity is limited to diffeomorphisms. In the case of entanglement, the physical interaction is discrete. 'Velocity' and consequently 'Lorentz invariance' do not make sense. That is the simplest explanation of the argument EPR, which turns into a paradox only if the universal validity of 'velocity' and 'Lorentz invariance' is implicitly accepted. Correspondingly, a more general class of topologies is to be considered, including discrete or inseparable kinds.

Key words: Skolem, Gödel, Einstein, Skolem's paradox, Skolem's relativity, Skolemian relativity of discreteness and continuity, Einstein's principle of relativity, generalizing Einstein's principle of relativity, quantum information, EPR

Като трета точка в своя доклад пред 5-ия конгрес на скандинавските математици през 1922 г. Скулем посочва: „относителност на понятието за множество, което е неизбежно при всяка последователна аксиоматика" (Skolem, 1970, S. 138). И по-нататък в изложението го разяснява по следния начин, включително и от философска гледна точка: „Тази трета точка е най-важната: *в случай, че аксиомите са непротиворечиви, то има област* ***B***, *за която аксиомите са валидни и заедно с това всички елементи на* ***B*** *могат да се номерират с помощта на крайните цели положителни числа*" (Skolem, 1970, p. 139).

Поради рефлексивността на разглежданите отношения вярно е и обратното: ако разглеждаме изброимо множество, например самите естествени числа, и при валидност на аксиомата за избора (т.е. „докъдето" е валидна), то на него може да се съпостави всяко множество, което е номерирано чрез него и да се разглежда като еквивалентно на изброимото. Ако използваме термина на норвежкия логик и математик „относителност", можем да обобщим, че относителни са не само висшите безкрайности, но също така и изброимата безкрайност: чрез аксиомата за избора винаги съществува разглеждане, чрез което всяко изброимо множество може да се представи като неизброимо.

По-специално оттук следва *относителност и между много важните понятия за непрекъснатост (континуум) и дискретност*. Дискретността на квантовата механика, неизбежна поради кванта на действие, е само втората (дуалната) страна във взаимната относителност с не просто непрекъснатостта, а гладкостта, изисквана от диференциалните уравнения на класическата физика[1]. Същото е валидно и по отношение на въздигнатия в ранг на първичен принцип на относителността на Айнщайн: инвариантност по отношение на дифеоморфизмите.

За съжаление можем само да намекнем интересните интерпретации, следващи от едно дискретно разглеждане на анализа изобщо, обичайно фундиран в неизброимо множество (континуум) – реалните или комплексните числа. Перспективата всеки негов резултат да се повтори за дискретни редици изглежда объркваща, но е логически непротиворечива.

Завръщаме се към дилемата – оказва се, наистина далновидно изоставена от основателите, Лайбниц и Нютон – „нули или не-нули" относно диференциалите от нова гледна точка: това не е противоречиво, а *неразрешимо* твърдение; или с други думи, те имат също така относителен характер, както и всичко свързано с безкрайността. „Да бъдат диференциали" не е свойство на някакъв клас обекти, а отношение (което впрочем е очевидно и от най-разпространените им, „школски" или „студентски" определения) и поради това следва да се отнесе и винаги се е отнасяло до функции, т.е. до изображения между множества, а не до (които и да било) множества. От друга страна обаче, чрез лемата за ултрафилтрите, която, знаем, е сред по-слабите варианти на аксиомата за (неограничения) избор, и в пряка връзка със сега обсъждания парадокс на Скулем, можем да построим нестандартно разширение на множеството на реалните числа и да обосновем анализа не върху изображения, а върху този специален тип множества от „актуално безкрайно малки", т.е. диференциали в собствен смисъл, а не като отношение и следователно не върху основата на изображение между множества.

[1] Бих искал да обърна внимание на интереса на Шрьодингер към въпросите на безкрайността тъкмо във връзка с квантовата механика. Той пише: „физикът е силно заинтересуван от вероятното значение на поразителните свойства на непрекъснатата безкрайност върху теориите за атома и енергийните кванти" (Schrödinger, 1984(IV), p. 611). Малко по-нататък говори за „желанието да се замени непрекъснатото с изброимата безкрайност, с която се борави по-лесно".

Така (а и по много други начини) можем да се насочим също и към относителността на фундаменталните за работещите математици понятия за множество и изображение, която относителност може да се обсъжда и като креативния принцип на теория на категориите[2], подхождаща към обосноваването на математиката по начин, съществено различен от теоретико-множествения и логическия: последният е характерен по-скоро за първата половина на XX в. Ако се подходи към обосноваване на математиката и логиката чрез топосите, т.е. чрез аксиоматизирана категорията на множествата и следователно ограничаваща се не непременно до последната, то топологичният аспект на непрекъснатост и теоретико-множественият на дискретност се оказват преплетени в относителност, аналогична на визираната, от която по-специално следва относителност на свойство и отношение, но също така и на елемент и множество, т.е. в общия случай аналогът на аксиомата за фундирането е невалиден и ограничен до свойство на определен, и то много тесен клас математически обекти, за които се изпълнява.

След строгото доказателство, което Скулем привежда на цитираното твърдение, той предлага също и следния коментар: „Доколкото ми е известно, никой не е обърнал внимание на тази странна и очевидно парадоксална ситуация. По силата на аксиомите може да се покаже съществуването на по-висши мощности; може да се покаже съществуването на по-висши числови класове. Как може тогава цялата област $\boldsymbol{B}$[3] да се преброи с помощта на крайните цели положителни числа?" (Skolem, 1970, S. 143).

По-нататък Скулем предлага обяснение, поради което мнозина са се подвели да твърдят, че това не е „истински" парадокс. Може дори да се приеме, че такова е общото становище. Самият аз бих казал, че и това е поредното неразрешимо съждение.

Мотивите на самия Скулем да смекчава оценката са очевидни: за разлика от другите дотогава обсъждани парадокси, при които авторите им печелят признание „на чужд гръб" и са заинтересувани „да раздухат" значимостта на откритото и да го представят като противоречие и следователно опровержение, то той е съществено ангажиран и с теорията, от чиято основна теорема (на Льовенхайм – *Скулем*) следва твърдението.

По-нататък ще покажа, че парадоксът на Скулем допуска разглеждане, при което е пряко следствие от станалия нарицателно име за парадокс в основите на математиката парадокс на Ръсел и от транзитивността на релацията на еквивалентност по отношение на множества. С други думи, той е точно толкова парадокс, колкото и последният, но заедно с това лечението, предложено още от Цермело (1908), да се изключи от теорията на множествата рефлексивното разглеждане[4] и чрез това множеството от всички множества и от този тип, превръща и парадокса на Скулем в „безобидно заболяване". С други думи, норвежкият математик може да се ползва от натрупания опит в „борбата с парадоксите по теория на множествата".

---

[2] Ако съществува изоморфизъм на една категория върху себе си, различен от тривиалния, напр. между морфизмите и обектите на една категория, при което имаме два класа обекти, но не може да се посочи, кой е „субстратът", „първичният" и кой – „вторичният".

[3] „Цермело разглежда област от неща $\boldsymbol{B}$, в която множествата представляват част. Между тези неща съществува отношение от вида $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ е елемент на $\boldsymbol{b}$) и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. За областта трябва да са изпълнени 7 аксиоми, за чието съдържание се позовавам на статията на Цермело [Zermelo, 1908]" (Skolem, 1970, p. 137).

[4] Това се прави обаче чрез един изначален, по същество пак рефлексивен ход: всички множества са части от областта $\boldsymbol{B}$, самата тя аксиоматизирана като множество: вж. предходната бележка под линия.

Нов етап в ранната диагностика и профилактиката на антиномиите е т. нар. първа теорема за непълнотата (1931), случила се обаче вече след цитирания доклад (1922). От една страна, тя показва, че те са генетичен дефект на всяка математическа теория, обсъждаща изброима безкрайност, с други думи, включваща естествените числа. От друга страна обаче, всяко антиномично твърдение, както изрично посочва в бележка под линия самият Гьодел, може да се използва за изработване на „ваксина", ако чрез конструктивистко „третиране" се намали неговата „вирулентност": от пряко противоречие, унищожаващо теорията, се редуцира до неразрешимо в нейното рамки твърдение. След такова „повишаване на имунната ѝ защита" тя оцелява, но за сметка това се оказват заразени всички теории, от същия „генотип", правещ ги податливи към тази, макар и вече несмъртоносна, „патология".

Както видяхме по-горе обаче, случвалото се с великите откриватели на ваксини не отминава и т. нар. първа теорема за непълнота: тя също се оказва „болна" от вече по-скоро безобидната неразрешимост.

По този начин парадоксът на Скулем е наистина такъв: в смисъл, че е неразрешимо в известни рамки твърдение. Той, бидейки изглежда наясно с реалната ситуация, въвежда в обръщение и понятието „относителност" по отношение на теорията на множествата и както ще видим, всъщност то е по-широко, по-съдържателно и много по-релевантно на главния за нас физически контекст от това за „неразрешимост", но в редица съществени аспекти сродно или тъждествено с него.

Ето и346 станалия класически подход на Скулем към открития от него, но и в собствената теория парадокс: „Обяснението не е трудно да се намери. Едно „множество" според аксиоматиката не означава някаква дефинирана цялост [Zusammenfassung]; множествата са само неща, които се познават едно чрез друго и се свързват чрез аксиомите във фиксирани отношения. Затова не е налице никакво противоречие, ако едно множество $\boldsymbol{M}$ от областта $\boldsymbol{B}$ е неизброимо в смисъла на аксиоматиката; тъй като това само значи, че вътре в $\boldsymbol{B}$ няма едно-еднозначно съответствие – изображение $\boldsymbol{\Phi}$ от $\boldsymbol{M}$ върху $\boldsymbol{Z}_0$ (цермеловска редица от числа). Въпреки това съществува възможността всички неща в $\boldsymbol{B}$ и следователно и елементите на $\boldsymbol{M}$ да се номерират с целите положителни числа; едно такова номериране е естествено също така цялост на известни двойки; обаче тази цялост не е „множество", т.е. тя не е налична в областта $\boldsymbol{B}$. По-нататък е също така ясно, че множеството $\cup\boldsymbol{Z}_0$ не може да се съдържа като елементи на някаква определена част от множеството $\boldsymbol{Z}_0$. После, тъй като елементите на $\cup\boldsymbol{Z}_0$ са само някои от нещата на областта $\boldsymbol{B}$, то те биха могли да се номерират с целите положителни числа, също както елементите на цермеловската числова редица $\boldsymbol{Z}_0$ и по начин, който е известен, тогава може да се дефинира нова част от $\boldsymbol{Z}_0$; това не е множество, т.е. не принадлежи на $\boldsymbol{B}$" (Skolem, 1970, S. 143).

Същността на довода, който предлага Скулем, вече беше описана, а именно: *номерирането не е изображение, нито множество в* $\boldsymbol{B}$. Какво пречи обаче множеството на естествените числа да се добави в тази област, така както бива добавяно напр. в т. нар. първа теорема за непълнотата (Gödel, 1931)? Между цермеловската теория на множествата и пеановската аритметика няма противоречие, нито едната следва от другата. Всяка една от двете обаче може да се интерпретира в другата и тогава непротиворечивостта на втората чрез модела ѝ в първата ще следва от предположената непротиворечивост на първата.

Чрез добавяне на естествените числа към областта $\boldsymbol{B}$ обаче бихме построили нейна несобствена (невъзнамерявана) интерпретация $\boldsymbol{B}'$ тъкмо в смисъла на парадокса на Скулем, чрез което и за него ще демонстрираме самореференциална приложимост, с други думи, ще сме показали нагледно неговата неразрешимост, ако преди това сме го разгледали в качеството на твърдение.

По-нататък норвежкият математик предлага една по-силна и твърде любопитна от философска гледна точка версия на парадокса:

„Даже понятията „крайно", „безкрайно", „проста безкрайна редица" и т.н. стават само относителни вътре в аксиоматичното учение за множествата. Едно множество ***M*** трябва – според дедекиндовското определение – да е крайно, ако никое негово истинско подмножество не е подобно на него самото. Валидността на аксиомите обаче не забранява, че първите части на ***M*** биха могли да са дефинируеми, без да са подмножества, както и вторите, че биха могли да се дефинират съответствия, които не са изображения, т.е. множества от двойки. Затова е дори напълно възможно вътре в една област ***B***, за която са валидни цермеловските аксиоми, да могат да съществуват такива „крайни" множества в дедекиндовски смисъл, че да притежават едно-еднозначно изображение върху своя истинска част; тези „изображения" обаче не са множества от областта" (Skolem, 1970, S. 143–144).

Въз основа на току-що цитираното може да се предложи следната хипотеза: понятията за „крайно" и „безкрайно" са точно толкова относителни, колкото и различните „видове безкрайности"; или, ако се върнем към логическите термини, от теоремите на Гьодел: непълнотата, респ. пълнотата дори и на *логически* системи, т.е. състоящи се от краен брой първични знаци и следователно неможещи да включат изброимото множество на естествените числа, е неразрешимо твърдение при *определени условия*. Кои или какви са тези условия? Според горното цитирано разсъждение трябва да вземем какъвто и да е „куп неща", които ***не принадлежат*** на областта ***B*** и следователно не са множества, и чрез преброяване да установим, че са краен брой; след това да вземем само истинска част от тях и с тяхна помощ, и със съответствие, което също няма да е множество в областта ***B***, да номерираме *всички*: очевидно поне два различни елемента ще получат еднакъв номер. Сега да си зададем въпроса: от какво освен от нашето голословно намерение и възможно безпочвено твърдение следва, че множеството, неговата част и изображението между тях не са множества от ***M***. Във всеки случай не от цермеловските аксиоми, най-малкото защото понятието за едно-еднозначно изображение изобщо не се споменава, нито неявно се съдържа в тях. Следователно изключително просто и с чудна лекота построихме невъзнамерявана (и честно казано, съвсем нежелана) интерпретация, в която *също така и крайността е относителна*.

Дотук добре: не откриваме грешка. Обаче и на приведеното разсъждение можем да дадем веднага една вероятно съвсем нежелана (поне за част от читателите) интерпретация, хвърляща ни в смут по отношение теоремите на Гьодел. За целта трябва само да си зададем въпроса: как, а и дали изобщо е изключена подобна нежелана интерпретация на т. нар. теорема за пълнотата на Гьодел?

За целта да приведем положената от него „система от аксиоми в основата:

Недефинирани първични понятия: $\vee$, $^{-}$ и **(x)**. (От тях могат да се дефинират &, $\rightarrow$ и **(Ex)** по известен начин.)

Формални аксиоми:

1. $\mathbf{X \vee X \rightarrow X}$	4. $\mathbf{(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)}$
2. $\mathbf{X \rightarrow X \vee Y}$	5. $\mathbf{(x)F(x) \rightarrow F(y)}$ **(61)**
3. $\mathbf{X \vee Y \rightarrow Y \vee X}$	6. $\mathbf{[X \vee F(x)] \rightarrow X \vee (x)F(x)}$

Правила за извод:

1. Схемата за извод: от **A** и **A → B**, може да се изведе **B**.

2. Правилото за заместване на пропозиционални и функционални променливи.

3. От **A(x)** може да се изведе **(x)A(x)**.

4. Индивидуалните променливи (свободни или свързани) могат да се заменят от кои да е други, доколкото чрез това не се извършва припокриване на областта на действие на променливите, означени с един и същ знак" (Gödel, 1930, S. 350; 1986, S. 102–104, 103–105).

Веднага се вижда например чрез прословутите диаграми на Вен, че модел на теория с посочените аксиоми се построява без затруднение в цермеловската теория на множествата. Нещо повече, диаграмите на Вен подсказват една по-дълбока връзка с топологични и векторни пространства, която всъщност и се експлоатира и от самия Гьодел в последната, десета теорема на току-що цитираната работа, т. нар. теорема за компактността. Добре известно е, че тя е следствие от теоремата на Тихонов за компактни пространства (произведението от компактни пространства е компактно пространство), приложена към пространствата на Стоун (компактните напълно несвързани хаусдорфови пространства). В случая обаче изоморфността (като пропускам твърде трудоемкото и неуместно за нашите цели прецизиране на тази изоморфност) на логика и теория на множествата ни навежда на мисълта, че разглеждаме само частния случай на „плоски" векторни или топологични пространства, при които „ковариантната" логика и „контравариантната" теория на множествата съвпадат.

Забелязваме също така, че за разлика от първоначалната, т. нар. наивна теория на множествата, в цермеловската е въведена областта ***B***, или с други думи, универсалното множество, чрез което, видяхме, фундаменталното за логиката понятие „отрицание" придобива еднозначния теоретико-множествен еквивалент на допълнението до универсалното множество. Това обаче се оказва, че има изключително далеч отиващи последствия: *появява се външната, втора, или* ***дуална****, област спрямо универсалното множество, област, която по-специално е област на несобствените интерпретации, но която дословно изпълнява цермеловските аксиоми*, от една страна, *и цитираните по-горе в Гьоделовия им вариант ръселово-уайтхедовски аксиоми на логиката, от друга*. Поради това приведеният по-горе пример, съответстващ на предложеното от самия Скулем усилване на парадокса за крайни множества, преминава безпрепятствено в логиката. В резултат на това, *дори и за крайни множества и логически системи пълнотата, но респ. и непълнотата е неразрешимо твърдение*.

Това обаче отдавна би трябвало да е спряло да ни учудва, тъй като и самата аксиоматика на Пеано за елементарната аритметика има несобствена интерпретация, върху множество с наистина безкраен брой елементи, но *краен брой* ***различни*** елементи. Напълно достатъчно е вместо обичайната, подразбираща се, „собствена" релация на еквивалентност, да вземем като такава равенството по остатък при деление на естествените числа с фиксирано за дадената интерпретация произволно естествено число $\boldsymbol{n \geq 2}$. От приведения пример веднага се вижда, че броят на такива интерпретации е безкраен (макар вече и само в относителен смисъл) – $\forall \boldsymbol{n}$. Именно чрез такъв тип интерпретация можем да приложим т. нар. първа теорема за непълнотата към условията на т. нар. теорема за пълнотата.

Косвено т. нар. (но не от Скулем) несобствени интерпретации се визират в следния пасаж: „От подходяща аксиоматична основа може следователно да се достигне до това, че теоретико-множествените твърдения са валидни според буквалния смисъл – естествено при условие, че аксиоматиката е непротиворечива, – това обаче се основава само на това, че употребата на думата множество е регулирана по подходящ начин. Винаги ще може да се дефинират цялости, които не означават множества; обаче стане ли дума за множества, трябва да са валидни твърденията на учението за множествата" (Skolem, 1970, S. 144–145).

Бих искал да подчертая известно разминаване между точния смисъл на приведения цитат и реторичната му интенция: Скулем *не твърди*, че за „цялости, които не означават множества" в общия случай, никога няма „да са валидни твърденията на учението за множествата". Той само казва, че последното е в сила „стане ли дума за множества". С други думи, трябва да се ограничим в изискванията по отношение на аксиоматиката на теорията на множествата до валидност по отношение на собствената интерпретация, което „обаче се основава само на това, че употребата на думата множество е регулирана по подходящ начин". Що се отнася до несобствените интерпретации, Скулем не твърди нищо друго освен това, че „винаги ще може да се дефинират".

С пеановска аритметика с краен брой различни, но безкрайно много елементи да се върнем към Скулемовото разсъждение, цитирано преди това погоре, чрез което обосновава относителността на „крайно" и „безкрайно". Нека сега обърнем внимание, че прави това не само чрез извеждане извън областта ***B*** на „собствените" интерпретации, но и чрез *използване на изображение*, макар и извън тази област.

Всъщност „безкрайност" в рамките на пеановската аритметика може да се дефинира по два различни начина: като свойство на функцията „наследник" или чрез релацията на еквивалентност. В „собствената" интерпретация на пеановската аксиоматика двата подхода са в унисон. Нищо обаче не забранява предложената, а и аналогични интерпретации: крайни според релацията за еквивалентност, но безкрайни според функцията „наследник". Дори и *ad hoc* да се добави подходяща аксиома, която да изключи такава „неканена" интерпретация, не може да се докаже, че новополучената аксиоматика е вече пълната, тъкмо според т. нар. втора теорема за непълнотата на Гьодел.

Това, на което специално и особено подчертано бихме искали да обърнем внимание, е, че и в двата случая „безкрайност" се дефинира чрез изображение и следователно изобщо относително, доколкото понятието изображение ангажира, и второ, в общия случай различно, множество, при което „безкрайност" се дефинира чрез тяхното отношение, т.е. именно относително.

Но между двете възможни изображения за дефиниране на безкрайност има съществена разлика: докато функцията наследник е изображение на множеството на естествените числа върху себе си и по принцип не може да изведе извън естествените числа, то релацията на еквивалентност не е непременно изображение върху себе си и може да изведе извън тяхната област, пример за което е всяко номериране, или с други думи, „добрата наредба" на едно множество, чиято възможност във всеки един случай съответства на аксиомата за избора[5].

Оттук може да се насочим към уточнения в аксиомата за избора, засягащи *отношението на два безкрайни избора*: 1) чрез два безкрайни избора

[5] Чрез това обаче можем да предефинираме „несобствено" и самата функция „наследник", напр. като +2 в множеството само от четните или само на нечетните числа, или в крайна сметка като произволна рекурсивна функция, т.е. да е описано как можем да получим следващата от всяка стойност.

върху множества винаги можем да построим едно-еднозначно изображение помежду им; 2) един безкраен избор в дадено множество може да се повтори, т.е. дефинираното в (1) едно-еднозначно изображение може да бъде идентитет.

Скулемовата относителност на „крайно" и „безкрайно", приложена по отношение на аксиомата за избора, ни насочва към хипотезата, че ако не можем да наредим добре произволно множество, то не можем да наредим добре никое множество. И тъй като очевидно следствието е погрешно, то значи и предпоставката е невярна. С други думи, изглежда тази относителност на крайно и безкрайно е най-малкото тясно свързана, ако не и еквивалентна в рамките на съществени и общоприети аксиоматики, с аксиомата за избора.

В качеството на довод, съществено различен от приведения от Скулем и досега обсъждания, в подкрепа на относителността на крайно и безкрайно, може да се добави, че безкрайната аксиоматична схема ZFC (Цермело – Френкел – аксиома за избора), представляваща по-скоро усъвършенстване само по отношение на трансфинитните числа на идеите, залегнали в тук разглежданата собствено цермеловска аксиоматика на теория на множествата, допуска краен еквивалент по отношение на доказуемостта на твърденията: аксиоматика на фон Нойман – Бернайс – Гьодел (NBG). В крайна сметка Скулемовата относителност на крайно и безкрайно, от една страна, и еквивалентността в посочения смисъл на ZFC и NBG са тясно свързани. Мостът между тях може да се намекне така:

Ако разгледаме и сравним варианта на NBG, в който безкрайната аксиоматична схема от ZFC, обикновено означавана като аксиома или аксиоматична схема на заместването (и която е добавената от Френкел), и този, в който тя е заменена с краен брой аксиоми, можем да забележим следното: вместо да се строи итеративно (рекурсивно) теорията на множества за следващия кардинал (ординал) върху основата на настоящия (схемата на заместването в ZFC), поради „ортогоналността" и оттук изоморфността на логика и теория на множествата можем да построим в теория на множествата модел на логиката: добавяйки за целта, както знаем, само краен брой аксиоми. Оказва се, че тази теория на множествата, в която, фигуративно казано, безкрайността е описана „логически", т.е. чрез модела на логиката, който може да се построи в теория на множествата, е с краен брой аксиоми (NBG). В случая схемата на заместването е не само безкрайна, но съдържа и безкраен брой символи, а именно за всяко ординално (кардинално) число. Еквивалентността по отношение на доказуемостта на ZFC (безкраен брой символи) и NBG (краен брой символи) изисква пълнота и за ZFC. С други думи, достигнахме до неразрешимостта на въпроса за пълнотата на ZFC, до която бяхме достигнали и върху основата на Скулемовата относителност на крайно и безкрайно и на видовете безкрайности. Оттук вече имаме цялостен мост, по който можем да се движим между еквивалентността спрямо доказуемост на NBG и ZFC, от едната страна, и Скулемовата относителност на крайно и безкрайно, от другата, като при това изяснената амбивалентност на т. нар. теорема за пълнотата по отношение на краен или безкраен брой символи („първични знаци") е свързващото звено.

Едно друго следствие е относителността между кохерентно и некохеретно състояние в квантовата механика, което впрочем е отдавна известно под формата на еквивалентност на матричната механика на Хайзенберг и вълновата механика на Шрьодингер, или като въведеното вероятно още от Картан квантово обсъждане на мегаобектите във вселената.

„Също така понятието „проста безкрайна редица“, или това за дедекиндовска „последователност“ [Kette][6], има само относително значение. Ако е множество, за което аксиома VII[7] е изисквано свойство, то цермеловската числова редица $\boldsymbol{Z}_0$[8] е определена като свойство (на последователността) на сечението на всички подмножества на $\boldsymbol{Z}$. Подмножествата на $\boldsymbol{Z}$ обаче не са изобщо дефинируеми и не може а priori да се попречи да могат да съществуват две различни цермеловски области $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}'$, за които $\boldsymbol{Z}_0$ да се оказва различна“ (Skolem, 1970, S. 144).

Същността на последния цитат се състои в това, че за двете различни цермеловски области $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}'$, от аксиомите не следва, че празното множество от едната област съвпада с празното множество от другата област. Разбира се, за философ това е прелюбопитна възможност: да се обсъждат различни типове „нищо“.

Поради всичко изложено, изводът, който предлага Скулем, едва ли може да се сметне за необоснован:

„Следователно: *аксиоматичното обосноваване на учението за множествата води до относителност на понятието за множество и това е неотстранимо свързано с всяка последователна аксиоматика*“ (Skolem, 1970, S. 144).

За да си изясним напълно значението на тази *относителност*[9] в нашия контекст, трябва да си припомним, че докладът на Скулем е изнесен през 1922 г. – тъкмо времето на триумфа на теорията на относителността, когато понятието за относителност става модно, използва се много широко и нерядко в неуместен

[6] $\boldsymbol{K}$ се нарича последователност [Kette], когато $\boldsymbol{K}'\subseteq\boldsymbol{K}$ (Dedekind, 1918, S. 11). Вместо знака за подмножество „ζ“ Дедекинд използва знак „⊆“ като означение за релацията „част“ в съвременния смисъл на подмножество. С „$\boldsymbol{K}'$“ е означен образът на $\boldsymbol{K}$ чрез изображение. С други думи, „последователност“ е някакъв клас $\boldsymbol{K}$ заедно с изображението върху себе си. Дедекинд започва с неща [Dinge], за които може да се мисли. Съвкупностите от неща нарича системи и те също са неща. Той приема като абсолютно фундаментално за човешкото мислене поня-тието „изображение“. И по-нататък извежда пълната индукция за последователности. На § 4 (Dedekind, 1918, S. 11–16) от „Какво са и какво трябва да бъдат числата“ Цермело полага своето твърдение за еквивалентност: „Ако подмножествата на две множества $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ са еквивалентни, то и самите множества са еквивалентни“ (Zermelo, 1908, S. 272).

[7] Обсъжданата вече по-горе аксиома за безкрайността: „В областта съществува поне едно множество $\boldsymbol{Z}$, което съдържа празното множество и се образува така, че всеки от неговите елементи съответства на следващ елемент от вида $\{a\}$, или което с всеки свой елемент $\boldsymbol{a}$, съдържа и множеството $\{a\}$ като елемент“ (Zermelo, 1908, S. 266–267).

[8] „Ако $\boldsymbol{Z}$ е едно произволно множество със свойството, изисквано в VII, то всяко негово подмножество $\boldsymbol{Z}_1$ се дефинира дали притежава свойството. Нека $\boldsymbol{a}$ е кой да е елемент на $\boldsymbol{Z}_1$, тогава е дефинирано дали също и $\{a\}\in \boldsymbol{Z}_1$ и всички така създадени елементи на $\boldsymbol{Z}_1$ образуват елементите на едно подмножество $\boldsymbol{Z}'_1$, за което е дефинирано, дали е или не е $\boldsymbol{Z}'_1 = \boldsymbol{Z}_1$. Следователно построяваме всички подмножества $\boldsymbol{Z}_1$ с разглежданото свойство, които са елементи на едно подмножество $\boldsymbol{T} \subseteq 2^{\boldsymbol{Z}}$ и съответното им сечение $\boldsymbol{Z}_0 = \bigcap \boldsymbol{T}$ е множество със същото свойство. … Множеството $\boldsymbol{Z}_0$ съдържа елементите $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$ и т.н. и може да се означи като *„числова редица“* могат да заменят позициите на числовите знаци (Zermelo, 1908, S. 267 – при превода използваните от Цермело символи са заменени със съвременните им еквиваленти).

[9] С оглед интенцията на текста аспектът на относителност се подчертава. В достатъчно широк план обаче не по-маловажна е „неотносителността“, „абсолютността“, и то в един не само или не толкова онтологичен, колкото във физичен и методологичен смисъл: напр., ако вземем превърналия се в труизъм случай на два влака в относително движение един спрямо друг, все пак аз в качеството на наблюдател се намирам в точно единия от двата влака, и то напълно, „абсолютно“ определено в кой от тях. Във всички тук и по-нататък обсъждани примери на относителност, при това все по-далеч отиващи в степента на обобщение, дей-ствителността в качеството на философска категория – и то за разлика от възможността – се свързва тъкмо с „неотносителността“, „абсолютността“ на битие, което е тъкмо тук – Dasein, с термина на Хайдегер – и сега, за чието подчертаване може да се използва неологизмът „Dazeit“, от една страна, или целостта, тоталността, в т.ч. и от възможностите, от друга. Нещо повече, тези две страни в известен, и то онтологичен смисъл са еквивалентни.

контекст, превръща се в съществена част от културния фон на епохата, т.е. в своеобразна културогема в тогавашния стил на мислене.

Ако си позволим да възвърнем Айнщайновия принцип на относителността – за инвариантност на законите спрямо дифеоморфизмите[10] (Einstein, 1918) между отправни системи – към неформализираната му основа, то неговият смисъл е, че *всяко* движение, т.е. и покоят като негова форма, и равномерното, и ускореното произволно променливото движение са (1) винаги непрекъснати, и (2) винаги отношение между две отправни системи.

Нещо повече, (3) *неразрешимостта* в Гьоделов смисъл, която може да се онагледи чрез парадокса за Лъжеца, посредством притежаващия не по-малко почетна древност парадокс на Стрелата *може да се пренесе към движението*. Този ход на мисълта всъщност е отдавна известен в рамките т. нар. диалектическа логика и философия, представян обикновено чрез понятието за диалектическо „противоречие" и формализиран в параконсистентните и сродни на тях логики.

И двата току-що споменати парадокса могат да бъдат разгледани като различни интерпретации на една и съща структура, която – за разлика от подхода на диалектиката – няма да мислим като противоречива, още по-малко да противопоставяме формалната на диалектическата логика, а като неразрешима:

Противоречието предполага A и не-A едновременно истинни. *Неразрешимостта* не решава кое от A и не-A е истинно. *Дуалността*, прехвърлена в логически план, например чрез фон Неймановото тълкуване на съжденията за квантовомеханични величини посредством проекционни оператори (Neumann, 1932, S. 130–134[11]), забранява разглеждането на някои противоречия, а именно между съждения, чиято истинност не може да се твърди едновременно, каквито са съжденията за величини, чиито оператори не комутират. *Законът за непротиворечието* изисква A и не-A да не могат да бъдат едновременно истинни. *Законът за изключеното трето* (не непременно еквивалентен на предходния) постулира, че трета възможност освен A и не-A не съществува. Видно е, че става дума за пет *различни* твърдения, относно (логическо) отношение между A и не-A.

Общата структура на парадокса на Лъжеца и на Стрелата може да се опише в термините на неразрешимост по следния твърде прост начин: не може да се реши между две контрадикторни възможности A и не-A, съответно „Аз лъжа" и „Аз не лъжа", от една страна, и, от друга, „Стрелата е тук" и „Стрелата не е тук".

Сега ще се опитаме да покажем по прост начин, че към структурата на двата парадокса може да се причисли и парадоксът на Скулем. В парадокса на Стрелата можем да разграничим две различни отношения, *или изображения*: по отношение на себе си в минал момент – съответстващо на функцията наследник или Дедекиндовите „последователности" (вериги) – „Стрелата не е тук"; по отношение на самотъждествеността на стрелата (своеобразна парафраза на закона за запазване на енергията) – т.е. по отношение на релацията на еквивалентност (дефинирана било то „собствено" или „несобствено") – „Стрелата е тук". При нашия подход от тяхната еквивалентност следва неразрешимостта на парадокса. Подчертахме в предишна публикация, че и Гьодел ясно разграничава двете страни в своето самореференциално неразрешимо твърдение от т. нар. първа теорема за непълнотата, самият той тълкувайки я посредством парадокса на

[10] Грубо казано, „гладките", или „плавните", преобразования, при които понятието скорост винаги има смисъл.

[11] Това е параграф III.4, в случай че се използва английското, руското или друго издание.

Лъжеца. Всъщност *на* разграничаването на двата аспекта, видяхме, почиваше валидността на теоремата. Обратно показвайки, че те могат и да не се разделят, приложихме самореференциално теоремата и оттук следваше, че нейната валидност влече нейната неразрешимост (Пенчев, 2010). Най-грубо казано, по много начини говорим за едно и също: набелязват се контурите на фундаментална философска структура, на която още не сме дали име.

Да си припомним същността на логически прецизното решение на Гьодел: аспектът на самотъждественост се разглеждаше като външен, метаматематически и така се заключаваше, че „Аз лъжа" е вярно твърдение, но в *друго* отношение. Перифразирано по отношение на Стрелата, то би гласяло: „Стрелата е в движение" (и самото това твърдение, фигуративно казано, е в покой, т.е. е истинно), но в *друго* отношение, по отношение на ***друга** отправна система*.

Оттук вече е очевидна – в рамките на неназованата фундаментална философска структура – общността на подходите на Гьодел и на Айнщайн, но и на Скулем. Айнщайновата относителност, също както Скулемовата или както Гьоделовата пък неразрешимост е логически необходима, за да се преобразува фаталната противоречивост в допустимата „неразрешимост" или относителност. И по този начин – с уважение към Сава Петров – да се изгради „непротиворечива теория за противоречив обект".

Все пак обаче Гьоделовата неразрешимост и Айнщайновата относителност, от една страна, и Скулемовата относителност или квантовомеханичната допълнителност са различни и може би дори антагонистични в един съществен, и то решаващ аспект: отхвърляне / приемане на относителност между крайно и безкрайно, между Канторовите видове безкрайности, между дискретно и непрекъснато. Основата за второто е постулирането на аксиомата за избора.

Айнщайн и Гьодел решават същия проблем – представил им се съответно като относителност на относителността и като неразрешимост на неразрешимостта – по друг начин: категорично и логически пределно ясно разграничават аспектите на абсолютност и относителност на относителността (първият) и разрешимост и неразрешимост на неразрешимостта в различни теории. За Айнщайн това са специалната (1905) и общата теория на относителността (1915–1916), за Гьодел – т. нар. теореми за непълнотата (1931) и т. нар. теореми за пълнотата и компактността (1930).

Показахме, че положението на нещата – върху основата на примера на квантовата механика и информация и аксиомата за избора – може да се атакува и по друг начин, при който пълнотата / непълнотата се оказват относителни.

Един подход, насочен към това, е да се потърси обобщение на принципа на относителността (напр. с помощта на Скулемовата относителност), да речем, между произволни отправни системи в обичайния смисъл и новодефинирани: такива, които са свързани със светлината, или с други думи, спрямо клас морфизми, много по-широк от този на дифеоморфизмите.

Да разгледаме изображение, което е прекъснато в дадена „точка": това означава, че за $x = x_0$, y:=$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. В този случай може да приемем, че $\forall y \exists \underline{y} : \forall \overline{y} : \overline{y} := \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, и по силата на аксиомата за избора да приемем изображението F: $\overline{y} \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, за което да е изпълнено условието: $\int_{\overline{y}} \overline{y}\, d\overline{y} = \mathbf{1}$ (респ. $\sum_{\overline{y}} \overline{y}_i = \mathbf{1}$). Смисълът на това формално полагане е, че за всяка точка на прекъсване на едно изображение приемаме, че то се „осъществява" във всяка точка на множеството от стойностите му с различна вероятност. Тогава всяко прекъснато изображение (т.е. такова, което има поне една точка на прекъсване) може да се разглежда като непрекъснато в съответно функционално пространство, напр. в хилбертовото. Посредством добра наредба чрез аксиомата за избора и Скулемова относителност на континуално и дискретно можем да изоставим изобщо представите за прекъсната и непрекъсната функция и вместо това да приемем всяко изображение за непрекъснато, но заедно с това – като прекъснато да е необходимо представено *дуално, т.е. втори път в съответно функционално пространство.* Като физическа величина ще приемем – според определението на квантовата механика – *изображението* (т.е. функционала) *между изображения,* всяко от които е едно от двете дуални представяния.

Нека в такъв контекст споменем и въпроса за идентичността на частица и вълна при квантов скок въз основа на разглеждането на Шрьодингер (Schrödinger, 1967, S. 115–120). Понятието за идентичност е тясно свързано с това за непрекъснатост. Тъкмо затова е необходимо изясняване при квантови скокове. Основа за определяне на тъждествеността, т.е. че нещо е същото, е законът за запазване на енергията, оставащ еднакво валиден както при непрекъсната траектория (частица), така и при прекъсване, квантов скок (вълна), но и при едновременното им разглеждане (вълново-корпускулярен дуализъм), обусловено от една скулемовска относителност на дискретно и непрекъснато и в крайна сметка – на крайно и безкрайно.

При валидност *на закона за запазване на енергията* теорията на относителността е само макротеория, но не може по принцип да бъде формулирана за квантови обекти, точно както квантовата механика и информация не може да се отнесе към макрообекти, или казано афористично, „квантовата гравитация“ и „котката на Шрьодингер“ са невъзможни като две дуални страни на една и съща забрана.

При отказ *от закона за запазване на енергията* обаче, което е равносилно при нашето разглеждане на всеобща (т.е. за какъвто и да е кардинал или ординал) валидност на аксиомата за избора, можем да обсъждаме „обичайната“ обща теория на относителността също така и в качеството на квантова гравитация, чийто прекъснат аспект са явленията на сдвояване (entanglement), изучавани от квантовата информация. Цената, която ще се наложи да заплатим, е, че ще възникнат проблеми с тъждествеността; казано по-точно, необходимо съществуват обекти, чиято тъждественост е неразрешим проблем, т.е. от това, че такова „нещо“ е тъждествено, следва, че не е, както и обратното. Тази нова относителност, сега пък на тъждествеността, трябва да бъде прибавена към вече добре и отдавна известните на науката: „релативистката“ относителност на движението, теоретико-множествената относителност на крайно и безкрайно, на видове безкрайности, квантовата имплицитна относителност на съществуването, експлицирана чрез първичните (т.е. статистически, без „скрит параметър“), „феноменологични“ вероятности, логическата относителност на пълнота и непълнота на една аксиоматика (респ. на разрешимост и неразрешимост на едно твърдение).

Примерите навеждат на мисълта, че нашето познание по принцип съдържа неизбежна или дори необходима относителност; но тя може да бъде „премествана“ от теория в теория, както и за да „не пречи“ на едно „абсолютно“ изучаване на явленията, така и заради това – самата тя да бъде изучена в термините на разглежданата теория.

С поглед към подобна перспектива имаме възможност по-ясно да вникнем в следните думи на Скулем: „Относителността достига дотам, че нещата в ***B*** имат едно друго и далеч по-ограничено значение от изобщо определимото. Че тази относителност трябва да бъде неотделимо свързана с всяка последователна аксиоматика, е ясно; тъй като тя се основава на споменатите по-горе всеобщи твърдения на математическата логика. За да стане нещо абсолютно неизброимо би трябвало или самите аксиоми да са налице като абсолютно неизброимо безкрайно множество, или да има една аксиома, която да може да посочи едно абсолютно неизброимо множество от числови твърдения; обаче всичко това би било във всички случаи кръгово извеждане на висшите безкрайности, т.е. *върху аксиоматична основа висшите безкрайности са налице само в относителен смисъл*" (Skolem, 1970, S. 144).

Може да се построи аритметична версия на т. нар. парадокс на Скулем. На всяко разделяне от посочения тип може еднозначно да се съпостави реално число, при това така, че когато едното от множествата е крайно, числото да е рационално, а когато и двете са безкрайни – то да е ирационално. По нататък може да се покаже, че съществува такова едно-еднозначно съответствие[12] между реалните числа и всички разделяния от този тип, които ще обозначим като множеството $\boldsymbol{A}$. Най-сетне очевидно е, че може да се построи друго едно-еднозначно съответствие между естествените числа и множеството $\boldsymbol{A}$. Тъй като композицията на две едно-еднозначни съответствия е също така едно-еднозначно съответствие, следователно с помощта на „междинната станция" на множеството $\boldsymbol{A}$ построихме едно-еднозначно съответствие между множеството на естествените числа и това на реалните числа и следователно те са равномощни.

Забележителното е, че беше използвана актуалистка версия на диагонализацията, която в своя първоначален „конструктивен" вариант е приложена от Кантор, за да покаже, че мощността на множеството на реалните числа е различна от тази на естествените и рационалните, и тъй като се предполага, че мощността на изброимото множество е най-малката мощност на безкрайно множество, то следва, че тази на реалните числа е по-голяма, макар и не непременно *непосредствено* по-голям*ата* (че наистина е непосредствено по-голямата, представлява съдържанието на т. нар. хипотеза за континуума, предложена още от Кантор).

Често се твърди, че парадоксът на Скулем или понякога, на Льовенхайм – Скулем, тъй като е пряко следствие от фундаменталната теорема, носеща името и на двамата, не бил истински парадокс, тъй като поне между две от обсъжданите безкрайни множества не може да се установи никакво съответствие[13] (т.е. множеството на последното се оказва празно). Това обаче е въртене в кръг: тъй като, за да не може да съществува никакво съответствие на две безкрайни множества, то не бива да съществува (т.е. да е празно множество) и тяхното декартово произведение, подмножество на което е и всяко изображение, предположено като несъществуващо. Съществуването обаче на декартово произведение е еквивалентно (например в „класическите" аксиоматики –Whitehead, Russell, 1910, pp. 561–562[14]) на аксиомата за избора, която е тъкмо съществена предпоставка на теоремата на Льовенхайм – Скулем, чието пряко следствие е обсъжданият парадокс.

---

[12] Напр. чрез кое да е едно-еднозначно кодиране, използвано при доказателството за непълнотата, вкл. дори самото това, което е използвано от Гьодел.

[13] Напр. Пол Коен: „Този парадокс, състоящ се в това, че изброим модел може да съдържа неизброимо множество, се разяснява със забележката, че твърдението за неизброимостта на някакво множество означава само несъществуване на взаимно еднозначно изображение на това множество върху множеството на всички цели числа. Неизброимото множество в $\boldsymbol{M}$ съдържа в действителност само изброимо количество елементи от $\boldsymbol{M}$, но в $\boldsymbol{M}$ не съществува никакво взаимно еднозначно изображение на това множество върху множеството на всички цели числа" (Коэн, 1969, с. 39).

[14] Тук се цитира първото издание, тъй като по време на съобщението за парадокса (1922) второто издание (1925) още не е излязло.

За нашите нужди в момента е достатъчно да се покаже, че съществува непосредствена връзка между два факта: първо, валидността на аксиомата за избора; действителната неразрешимост на парадокса на Скулем.

В приведената по-горе проста аритметична, но актуалистка версия, обаче в пълно съзвучие с Гьоделовото доказателство на т. нар. първа теорема за непълнотата, оригинално предложено в своя конструктивистки вариант като разрешимо твърдение за неразрешимост, от парадокса на Скулем следва неразрешимост на проблема: изброима ли е мощността на континуума? Конструктивисткият и интуиционисткият подход към континуума всъщност следват от втората страна на тази неразрешимост, докато първата е преексплоатирана в Канторовия подход към него. Лесно се вижда, че веднъж подложили на съмнения разрешимостта на проблема за изброимостта на континуума, аналогично възниква неразрешим проблем за изброимостта на кое да кардинално число, както и един последващ: съществува ли кардинално число, за което да е разрешимо и валидно, че не е изброимо?

И в по-горе предшествалото изложение вече беше намекната идеята, че конструктивизмът и интуиционизмът, от една страна, и Канторовият „актуализъм" и Хилбертовият „формализъм", от друга, са фундаментално различни и логически несъвместими. Всъщност тази разлика е едновременно експлицирана и прикрита в аксиомата за избора. Основата всъщност е по-дълбока: съществуването на актуална безкрайност е самостоятелна аксиома и по никакъв начин не следва от т. нар. аксиома за безкрайността (т.е. възможността за безкрайно, но забележете – конструктивно продължаване на редицата: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\{\{\varnothing\}\}\}$, ...). От такава една аксиома за съществуването на актуална безкрайност в частност би следвал Канторовият „парад на безкрайностите". Ако обаче заедно с това приемем „конструктивисткото броене", не само трансфинитното, но и в рамките на аксиомата за пълната индукция, следва съществуването на неразрешими твърдения, както показва Гьодел, но такова, както пък ние видяхме (Пенчев, 2010), се оказва и самото то, твърдящото, че съществуват неразрешими твърдения.

Това ни позволява да предположим, че несъвместимостта между конструктивизма и „актуализма" (формализма) е по-мека от пряко контрадикторно противоречие. Едновременното им използване води не до доказуемост на произволно твърдение, а до неразрешимост на клас от твърдения, като въпросът, дали този клас е множество, изглежда отново е неразрешимо твърдение, т.е. съществуват неразрешими твърдения, каквото е т. нар. първа теорема за непълнотата на Гьодел, чиято неразрешимост следва от собствената им валидност (т.е. разрешимост).

Бихме искали тъкмо в този контекст накратко да обсъдим и онтологичната перспектива към парадокса на Скулем в смисъла на съответствие на език и интерпретация, която задава Хилари Пътнам в статията си „Модели и реалност" (Putnam, 1980). Неговата изходна точка е следната:

„До един момент всички коментатори са съгласни относно значимостта на съществуването на „невъзнамерявани" интерпретации, напр. модели, в които това, което се „предполага да са" неизброими множества, са „в действителност" изброими. Всички коментатори са съгласни, че съществуването на такива модели показва, че „възнамеряваната интерпретация", или, както някои предпочитат да казват, „интуитивното понятие за множество" не се „хваща" от формалната система. Но ако аксиомите не могат да хванат „интуитивното понятие за множество", би ли могло да се допусне?" (Putnam, 1980, p. 465).

Той предлага по-нататък свое тълкуване на това общоприето описание на състоянието на нещата. Неговата същност е в съпоставяне на невъзнамеряваната интерпретация и неизброимите множества, от една страна, и възнамеряваната и изброимите множества, от друга, респ. с реалността и моделите в езика, след което оценява вече така изтълкувания от него парадокс на Скулем като твърде тежък и дори може би решаващ довод срещу философската концепция на реализма, предполагаща повече или по-малко строго съответствие между модели и реалност. Пътнам изяснява съотношението на възможните отговори в рамките по-скоро на философия на математиката като довод в полза на крайните макар и противоположни варианти на платонизма и верификационизма, при което – поради атаката срещу съответствието – или математическата реалност, или моделите се еманципират: респ. или семантиката, или синтаксиса. За да изясни проблема, той се позовава на аксиомата за построимостта [constructability], известна в литературата на кирилица и като „аксиома за конструктивността", предложена от Гьодел през 1938 г. Ето я в контекста на Пътнам: „аксиомата „**V** = **L**". Тук **L** – продължава той – е класът от всички построими множества, т.е., класът от всички множества, които могат да бъдат дефинирани от определена конструктивна процедура, ако претендираме да разполагаме с имена за всички ординали, колкото и да са големи. (Разбира се, този смисъл на „построимост" би бил анатема за математиците конструктивисти.) **V** е вселената от всички множества. Така „**V** = **L**" тъкмо казва: *всички множества* са *построими*. Чрез разглеждане на вътрешен модел за теорията на множествата, в който „**V** = **L**" е истинно, Гьодел е в състояние да докаже относителната непротиворечивост на ZF и ZF плюс аксиомата за избора и обобщената континуум-хипотеза" (Putnam, 1980, p. 467).

Бих възразил единствено на вметната бележка, че предлаганият смисъл на построимост е „анатема" за конструктивистите. Всъщност принципът на неограничената трансфинитна индукция приема аксиомата „$V = L$" за предпоставка и отива по-нататък: валидното за V е валидно за L, чрез което заобикаля прякото разглеждане на опасното „множество от всички множества". Наистина финитизмът се ограничава до ординали строго по-малки от ε_0 и съответно само до аксиома за изброимия избор. В неговите рамки може да се предложи аналогична аксиома за изброимостта: *всички множества са изброими*, „$A = L$". Ако си позволим да преминем през L (т.е. да използваме транзитивност на „=" през L), „класа от всички множества", ще можем да твърдим: „$V = A = L$", всички (построими) множества са изброими. Чрез това се оголва както дълбоката основа на парадокса на Скулем, така и фактът, че става дума за истински парадокс в степента, в която това се отнася до превърналото се в нарицателно за антиномичност „множество от всички множества". А именно парадоксът на Скулем следва непосредствено от транзитивност през последното, и то не само по отношение на Гьоделовата „построимост": нещо повече, какъвто и да е предикат за множеството (или класа) от всички множества L след прилагане на транзитивност през L се отнася и до изброимите множества.

Чрез горното се оказва „проблемът решен" (Putnam, 1980, pp. 481–482), преведено на по-строг, теоретико-множествен език от собствено философската аргументация на Пътнам, според която това, което се пропуска, е, че по определение езикът винаги има интерпретация:

„Това е фаталната стъпка. Да се приеме теория на значението, според която език, чиято пълна употреба е определена, без да има нещо [за което да се отнася] – напр. неговата „интерпретация" – е да се приеме проблем, който *може* да има само налудничави решения. Да се говори сякаш *това* ми е проблемът: „Зная как да използвам езика, ама сега как ще посоча интерпретация?" е да се каже безсмислица. Или употребата *вече* фиксира „интерпретацията", или не може *нищо*" (Putnam, 1980, pp. 481–482).

Очевидно, за да се гарантира априорната валидност на последното твърдение във *всеки* един случай, т.е. за да постулираме „Всеки език има известна интерпретация", трябва да приемем прехода през ***L*** (на философски език: през света като цяло от своите части), с други думи, да приемем съществуването на света едва след което употребата на всеки един език престава да бъде „безсмислица" и проблем, за който „*може* да има само налудничави отговори". Ясно е, че декларираното от Пътнам поражение на реализма чрез парадокса на Скулем и преминаването му поради това под знамето на верификационизма е само реторичен, тактически ход в дискусията, едно своеобразно ораторско доказателство от противното в полза на реализма.

От нашия контекст обаче се вижда, че реалисткото приемане на света (както впрочем и нереалисткото му отхвърляне) е неразрешим проблем (без да е противоречие) и приемането на което и да е решение води до каскада от неразрешими проблеми, които, честно казано, заедно с опитите за привидното им решение (един от които е и т. нар. първа теорема за непълнотата) представляват предметът и историята на философията.

Участта на тази неизбежна философска едностранчивост – да се предлагат решения за неразрешимото – няма да отмине и защитаваната в настоящата статия концепция. Наистина може да се построи собствено (вътрешно) математическа теория на измерването, чрез която в експерименти да се решава за реалната математика и метафизика на нашия свят. Заедно с това обаче цената, която ще платим, е, че самият свят ще загуби стопроцентовата си реалност; отчасти, и то в неопределима степен, ще се виртуализира: явление, сред което вече всъщност живеем.

ЛИТЕРАТУРА

Dedekind, R. (1918). Was sind und was sollen die Zahlen? (Vierte unveränderte Auflage) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn (English translation: R. Dedekind. Essays on the theory of numbers. Chicago: the open court publishing company, 1901, 14–58.)

Einstein, A. (1918). Prinziplelles zur allgemeinen Relativitätstheorie. – Annnalen der Physik. Bd. 55, № 4, 241–244. – http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1918_55_241-244.pdf.

Gödel, K. (1930). Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. – Monatshefte der Mathematik und Physik. Bd. 37, No 1 (December, 1930), 349–360 (Bilingual German – English edition: K. Gödel. The completeness of the axioms of the functional calculus of logic. – In: K. Gödel. Collected Works. Vol. I. Publications 1929–1936. Oxford: University Press, New York: Clarendon Press – Oxford, 1986, 103–123).

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. – Monatshefte der Mathematik und Physik. Bd. 38, No 1 (December, 1931), 173-198. (Bilingual German – English edition: K. Gödel. The formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems I. – In: K. Gödel. Collected Works. Vol. I. Publications 1929–1936. Oxford: University Press, New York: Clarendon Press – Oxford, 1986, 144–195).

v. Neumann, J. (1932). Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Verlag von Julius Springer. (J. von Neumann. 1955. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton: University Press; Й. фон Нейман. 1964. Математические основы квантовой механики. М., Наука).

Putnam, H. (1980). Models and Reality. – The Journal of Symbolic Logic, Vol. 45, No 3, 464–482.

Schrödinger, E. (1967). Der Grundgedanke der Wellenmechanik (Nobel-Vortrag, gehalten zu Stockholm am 12 December 1933). – E. Schrödinger. Was ist ein Naturgesetz? Beitrage zur naturwissenschaftlichen Weltbild. München/ Wien: R. Oldenbourg, 86–101.

Schrödinger, E. (1984). A Discourse on Transfinite Numbers. – In: Gesammelte Abhandlungn. B. 4. Allgemeinen wissenschaftlichen und populäre Aufsätze. Wien: Verlag der Österreichischen Akademie des Wissenschaften, Friedr. Vieweg&Sohn Brunschweig/ Wiesbaden, 609–611.
Skolem, T. (1970). Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. – In: T. Skolem. Selected works in logic (ed. E. Fenstad), Oslo etc: Univforlaget.
Whitehead, A., B. Russell. (1910). Principia Mathematica. Vol. I. Cambridge: University Press.
Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. – Mathematische Annalen, Vol. 65, No 2: 261–281; English translation („Investigations in the foundations of set theory") in: J. van Heijenoort, J. 1967. From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. (Source Books in the History of the Sciences). Harvard: Univ. Press, 199–215.
Коэн, П. (1969). Теория множеств и континуум-гипотеза. М., Наука.
Пенчев, В. (2010). Неразрешимост на т. нар. първа теорема на Гьодел за непълнотата. Гьоделова и Хилбертова математика. – Философски алтернативи, 2010, кн. 4.