Васил Пенчев

ФИЛОСОФИЯ НА КВАНТОВАТА ИНФОРМАЦИЯ

Книга 1. Айнщайн и Гьодел

Институт за философски изследвания
Българска академия на науките

Васил Пенчев

ФИЛОСОФИЯ НА КВАНТОВАТА ИНФОРМАЦИЯ

1. Айнщайн и Гьодел

2. Неравенствата на Бел

3. Съвременното състояние

4. Интерпретации и понятия

5. Относителност и квантова информация

6. Онтология на квантовата информация

7. Най-новото в квантовата информация

Поредица от седем книги

Издание на Института за философски изследвания

Васил Пенчев

Философия на квантовата информация

АЙНЩАЙН И ГЬОДЕЛ

София 2009
Институт за философски изследвания
Българска академия на науките

Поредицата от 7 книги, посветени на философията на квантовата информация, започва с възникването на дисциплината в тясна близост с квантовата механика и дебата около нейните основи. Предпочита се нова мета-математическа интерпретация и се обсъждат взаимоотношенията със съществуващите. Философска и онтологическа проекция е предлаганото видоизменено, а именно „*дуалистично* питагорейство". Като символ е използван „Принстънският дух" и приятелството между Айнщайн и Гьодел. Набедената непълнота на квантовата механика и доказаната непълнота на аритметиката са преплетени и „сдвоени", така че взаимни отблясъци осветяват аритметиката и математиката с онтологичен пламък, но и квантовата механика и информация – с философска фундаменталност и способност да обосновава.

Неразрешими твърдения ли са самите т. нар. теореми на Гьодел за непълнотата, ако те се отнесат към самите себе си? Може ли парадоксът на Скулем да се използва за обобщаване на Айнщайновия „принцип на относителността" (1918) от дифеоморфизми и за дискретни морфизми? Как следва да се тълкуват явленията на сдвояване (*entanglement*), квантовият компютър и квантовата информация аритметически и логически?

Книгата е предназначена за научни работници в областта на физиката, математиката и философията, за докторанти и студенти, за всеки, който се интересува от този съвсем нов отрасъл на знанието.

Авторът, Васил Пенчев е старши научен сътрудник в Института за философски изследвания (http://www.philosophybulgaria.org) на Българската академия на науките (БАН) и доктор на философските науки, инженер по образование. Негови книги са: „Битие и наука" („Дамян Яков", 1996), „Коментар към Мамардашвили" (ЛИК, 1996), „Радичков другарува с думите" (Филвест, 2000), „Свирепа философия" (АИ „Проф. Марин Дринов", 2007), „Мислене и стихотворене" (Булгед, 2007), „Мъртвият Бог?" (Булгед, 2007), „Разумът в цивилизацията" (ИФИ-БАН, 2008), „Историята на СССР. Догонващо развитие и/или историческа приемственост" (ИФИ-БАН, 2008), „Историческата приемственост в глобализиращото догонване" (АИ „Проф. Марин Дринов", 2009).

Блогове, на които се публикуват негови научни текстове и презентации:
http://vasil7penchev.wordpress.com;
http://my.opera.com/vasil%20penchev;
http://www.esnips.com/web/vasilpenchevsnews;
http://www.philosophybulgaria.org/Publikacii/Dokladi/index.php.

ISBN 978-954-92145-9-8

На майка ми,
която и в терминалния стадий на болестта си
ме насърчаваше да продължавам изследванията ми,
които доведоха до написването на тази книга.

СЪДЪРЖАНИЕ

СЛЕДВАЩИТЕ КНИГИ

Книга 2. **Неравенствата на Бел**

Книга 3. Съвременното състояние

Книга 4. Интерпретации и понятия

Vasil Penchev

PHILOSOPHY OF QUANTUM INFORMATION

1. Einstein and Gödel

Forthcoming:

2. Bell's Inequalities

3. The Contemporary State

4. Interpretations and Concepts

5. Relativity and Quantum Information

6. The Ontology of Quantum Information

7. The Newest in Quantum Information

Table of Contents

The NEXT BOOKS:

Volume 2: **Bell's Inequalities**

III. *Bell*'s inequalities
  III.1. *Bell*'s article «On the Einstein – Podolsky – Rosen paradox» (1964)
  III.2. *Bell*'s article «On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics» (1966)
  III.3. *Kochen* and *Specker*'s article «The problem of hidden variables in quantum mechanics» (1967)
  III.4. The operationalizing of the inequalities: Clauser, Horne, Shimony, and Holt's article «Proposed experiment to test local hidden-variable theories» (1969)
IV. Experiments confirming the violation of Bell's inequalities
  IV.1. *Clauser and Horn's* (1974)
  IV.2. *Aspect, Grangier, and Roger's* (1981, 1982)
  IV.3. The experiments in the eighties
  IV.4. The experiments in the nineties

Volume 3: **The Contemporary State**

V. Quantum computer
  V.1. *Feynman's* idea
  V.2. *David Deutsch*'s approach
  V.3. Quantum computer as a mathematical model
  V.4. Experiments and troubles: contemporary state and perspectives

Volume 4: **Interpretations and Concepts**

Volume 5: **Relativity and Quantum Information**

Volume 6: **The Ontology of Quantum Information**

Volume 7: **The Newest in Quantum Information**

„Седя и пиша в затворена стая с врата без дръжки. Прозорецът също не се отваря и стъклото му е бронирано. Опитах да го счупя. Не от желание да избягам и не от яд, просто исках да се убедя. Масата ми е от орехово дърво. Хартия има в изобилие. Разрешават ми да пиша. Само че никой не чете написаното. Въпреки това пиша. Не искам да съм самотен, а не мога да чета. Каквото и да ми дадат за четене, е пълна лъжа, буквите започват да танцуват пред очите ми и губя търпение. Написаното в книгите изобщо не ме интересува от момента, в който разбрах как наистина стоят нещата.” („Истината”, Станислав Лем)

Въведение: ОБЩ ПОГЛЕД КЪМ КВАНТОВАТА ИНФОРМАЦИЯ

Подобласти и резултати – „Парадоксът" на Айнщайн, Подолски и Розен – „Живата-и-мъртва котка" на Шрьодингер – Локален реализъм и „скрити променливи" – Неравенствата на Бел – Квантови корелации – Неотделимост – Кохерентност и декохеренция – Квантови комуникации – Квантов компютър – Квантови алгоритми – Теорема за неклонирането – Етапи във възникването на новата физическа дисциплина „Квантова информация" – Съвременното състояние – Поднаправления и основни резултати – Сдвояването, основно явление изучавано от квантовата информация – Перспективи – Състоянието в България

В 90-те години на двадесети век се обособи област от физиката, тясно свързана с квантовата механика и същевременно преосмисляща я по нов начин – *квантова информация*. В нейния обхват влизат подобластите: квантов компютър (напр. Баргатин, Гришанин, Задков 2001; Валиев 2005; Килин 1999; Менский 2000; Пенчев 2005) квантова комуникация: криптография и телепортация (Баргатин, Гришанин, Задков 2001; Килин 1999; Менский 2000). Бяха получени фундаментални теоретични и експериментални резултати: неравенствата на Бел (Bell 1964; Белинский, Клышко 1993), еквивалентни и сродни на тях (Clauser, Horne, Shimony, Holt 1969: 880-884; Kochen, Specker 1967; Bennett, DiVincenzo, Fuchs, Mor, Rains, Shor, Smolin, Wooters 1999; Greenberger, Horne, Shimony, Zelinger 1990) експерименталното потвърждаване на тяхното нарушаване (Клоузър и Хорн през 1974 г. – Clauser, Horne 1974); Аспе, Роже и Гранжие през 1981 г. (Aspect, Grangier, Roger 1981) и 1982 г. (Aspect, Grangier, Roger 1982), обосноваването на квантовия компютър като нетюрингова машина (Фейнман 1986; Feynman 1982), теоремата за неклониране (Wooters, Zurek 1982) на квантови състояния, предвиждане (Bennett, Brassard, Crepéau, Jozsa, Peres, Wooters 1993) и експериментално потвърждаване на явлението на телепортация (Shih 2001). Обособиха се водещи понятия: сдвоеност, или вплитане (entanglement), нелокалност, декохеренция, сепарабелност и несепарабелност. Паралелно се работи за философско и математическо осмисляне на новата област (Менский 2000; Менский 2001; Менский 2005; Пенчев 2005; Пилан 2001; Adami, Cerf 1999; Bohm, Hiley 1993; Greenberg (ed.) 1999; Landauer 1996; Omnès, 1999; Post 1995).

Историческият поглед ни отвежда до „парадокса" на Айнщайн – Подолски – Розен (Einstein, Podolsky, Rosen 1935), до Шрьодингер (Schrödinger 1935 – т.нар. жива и мъртва котка на Шрьодингер) и до дискусията между Айнщайн и Бор по основите на квантовата механика. Неравенствата на Бел представляват експериментално проверим количествен израз на Айнщайновата хипотеза за локалния реализъм или за „скритите параметри", респ. тяхното нарушаване означава нейното отхвърляне и препотвърждаване на пълнота на квантовата механика. Действително основната идея на хипотезата за „скритите параметри" е да представи вероятностите на квантовите събития като *статистика* на засега неизвестни параметри, затова наричани скрити. Многократно експериментално потвърждаваното нарушаване на неравенствата на Бел, всички явления на „сдвояване" (entanglement)[1] и изучаващата ги дисциплина „квантова информация" опровергават статистическия характер на квантовите вероятности на следното основание: статистическите корелации имат горна граница, която при взаимодействието на квантови вероятности може и се надвишава (т. нар. нарушаване на неравенствата на Бел).

От съвременна гледна точка квантовомеханичните нелокални корелации (Cabello 1999), – които само привидно противоречат на постулата за ненадвишаване скоростта на светлината във вакуум – могат да се тълкуват като информационна връзка (Adami, Cerf 1999) и като топологични неотделимости. Така постулатът за ненадвишване скоростта на светлината се отнася само за всяка отделима топология. За неотделимите топологии, той не се нарушава, а е по принцип неприложим, тъй като не съществува метрика, или по друг начин казано, неотделимото топологично пространство се описва от безкрайно множество от метрики, валидни

---

[1] Използваният български превод „сдвояване" за английския термин „entanglement" не е буквален. Той е по-точен от възможните буквални преводи – „преплитане" или „сплитане" – спрямо същността на явлението, подчертавайки неговата неадитивност, нередуцируемостта на системата до съставните част. Същевременно е донякъде подвеждащ по отношение на броя на съставните части, който се подразбира като две: точен би бил преводът с неологизма „с-n-торяване", който има обаче очевидно насилствен характер по отношение на българския език и поради това не се използва. Заедно с това, „сдвояване" има допълнителна евристична конотация, доколкото насочва към „моста" между – и единството на – двете дуални същности в квантовата механика и нейната философия. Така квантовата информация веднага неявно бива осмисляна именно като науката за този „мост" или единство. С други думи, „сдвояване" пренасочва от разглеждане на системата като съставена от своите пространствено и времево обособени части, както е в оригиналния термин „entanglement" към обсъждане на нейното единство в термините на *винаги двата* нейни дуални или спрегнати ипостаса: например, съвкупността от положенията или съвкупността от импулсите на квантовите обекти, образуващи системата.

едновременно. Айнщайновото неприемане на квантовата механика се преинтерпретира в тези термини като неправомерно отъждествяване на физическото пространство с отделима топология.

Неотделимостта – за разлика от отделимостта – е несиметрична релация: ако точката $\boldsymbol{A}$ е неотделима от точката $\boldsymbol{B}$, то от това не следва, че точката $\boldsymbol{B}$ е неотделима от точката $\boldsymbol{A}$ (т.е. може и да е отделима, т.нар. полуотделимост или изпълнение на най-слабата, Колмогоровата аксиома за отделимост, означавана с $\boldsymbol{T_0}$). Тази аксиома заема особено положение, удвоявайки йерархията на все по-усъвършенстваната отделимост. Можем да мислим картината, предлагана от квантовата информация и от „класическата” квантова механика, като тези два огледални топологични образа. Тогава физическата величина в квантовата механика, стандартно представяна като ермитов (самоспрегнат) оператор (автоморфизъм) върху хилбертовото пространство (Neumann 1932), от новата гледна точка на *квантовата информация* ще се осмисля като несиметрия на полуотделимостите на едно неотделимо топологично пространство. Самото хилбертово пространство вече получава статут на инструмент за формализиране на топологическата структура на неотделимост.

Това незабавно рефлектира върху понятието за физическа реалност: мисли се не посредством метричен (в частност геометричен модел, какъвто е този на хилбертовото пространство), а чрез топологичен модел (следователно, в общия случай, неметризируем). Това, което съответства в качеството на „елемент на реалността” на измерваната физическа величина, е някаква метрично представима топологична несиметричност, а именно между полуотделимостите на неотделимите точки на някое изобщо неотделимо топологично пространство, евентуално съдържащо отделими подпространства.

Всяка величина се представя като деформации на неотделимостта. Множеството от разнообразни физически величини следва да се изобразят като измерения между прекъсвания (т.нар. прегради) на континуума (Александров, Пасынков 1973), т.е. като многоизмерност, съответстваща на качествената хетерогенност на физическата реалност. На многоизмерния модел на някакво множество от физически величини, характеризиращи обект или система, се поставя в съответствие хетерогенно топологично пространство, в което има както „прегради” (прекъсвания), така и неотделимости. Самите физически обекти следва да се преобразуват чрез някакви „накъсвания” и „слепвания” на общото топологично пространство, на което те се явяват подпространства. Според сегашните представи декохеренцията (напр. Omnès 1997) – едно своеобразно „напукване” на квантовата цялостност – настъпва както спонтанно, така и под въздействие на околната среда на физическия обект.

Ако разгледаме затворена физическа система, т.е. такава в която – според закона за запазване на енергията – последната остава постоянна, то всяко нейно изменение ще се представя чрез преобразование на хетерогенното топологично пространство, съответстващо на цялата система, върху себе си. Физическото понятие за информация в достатъчно общ вид може да се въведе като: 1) самото това преобразуване на някакво хетерогенно топологично пространство, представляващо затворена физическа система; 2) като число, стойност на своеобразен „функционал”, съпоставяно на всяко такова преобразование. От математическа гледна точка преобразованието ще представлява един вид „супероператор”, който преобразува един вектор с компоненти обичайни оператори в друг такъв, а числото, което ще се съпостави по правило, избрано по физически съображения, ще представлява мярката на количеството информация, съдържаща се в дадена физическа система.

Унитарната симетрия установява еквивалентност само между енергията на различните обекти, докато *една предполагаема* информационна симетрия ще установи по-обща връзка между вида и енергията на взаимодействащите обекти.

Осмислянето на постулата за ненадвишаване на скоростта на светлината от гледна точка на новия модел на топологичната неотделимост, може да се онагледи с експериментите за телепортация на квантови обекти. Телепортирането на обекта предполага предаване на две части информация: на квантова, при което предаването се осъществява по квантов канал „мигновено” за сметка на топологичната неотделимост (нелокалността, сдвояването) на две точки в пространството; и класическа, предавана по класически канал със скорост, ненадвишаваща скоростта на светлината във вакуум, по континуална траектория от топологично отделими точки между тези две точки в пространството.

Голям интерес – и от технологична, и от фундаментална гледна точка – представлява другото основно направление във физическата дисциплина „квантова информация”: *квантов компютър* (обзор напр. в: Валиев 2005, Пенчев 2005). Ако класическата машина на Тюринг, посредством какъвто модел могат да се представят всички днешни компютри, е представима като общорекурсивна функция и следователно като алгоритъм, чрез който цяло число се преобразува в друго цяло число чрез крайна последователност от фиксиран брой елементарни операции (напр. Коэн 1969), то квантовият алгоритъм трансформира общорекурсивна функция в друга. Грубо казано, квантовият алгоритъм преобразува класическа машина на Тюринг в друга такава (принцип на „квантовия паралелизъм”), при което каквото и число $\boldsymbol{c_{ii}}$ да е било подадено на входа на класическата тюрингова машина $\boldsymbol{T_1}$, преобразувана от квантовия алгоритъм $\boldsymbol{Q}$, то на изхода на вече преобразуваната класическа тюрингова машина $\boldsymbol{T_2 = Q(T_1)}$ ще се появи резултатът от изчислението на $\boldsymbol{T_2}$ върху $\boldsymbol{c_{ij}}$ (забележете, не върху $\boldsymbol{c_{ii}}$), а именно $\boldsymbol{c_{ij}}$ (напр. Williams, Clearwater 1998). И в теоретичен план засега не е известно как би могло изходът от $\boldsymbol{Q}$ в крайна сметка да представлява не едно конкретно число (в смисъл, $\boldsymbol{j}$ фиксирано), а цялото множество от числа преработвано от машината $\boldsymbol{T_2}$.

Технологична пречка за създаване на квантов компютър е времето на декохеренция на квантовите системи. Квантовият компютър може да се изчислява само в кохерентно състояние, чиято продължителност според днешните възможности непрекъснато се удължава, но върховите постижения все още са от порядъка на секунди и минути, може би и часове.

Вече са създадени конкретни квантови алгоритми, които решават за полиномиално време задачи с експоненциална сложност за класически тюрингови машини, а в други случаи за редуцирано полиномиално време (т.е. с понижена степен на полинома) – задачи с полиномиална сложност за класически тюрингови машини. Към първите спада квантовият алгоритъм на Шор (Williams, Clearwater 1998), който решава задачата за факторизиране на произволно цяло число, а към вторите – този на Гровър (Grover 1998).

Теоремата за неклонирането, според която всеки квантов обект е уникален в смисъл, че е невъзможно да му се създаде точно копие, „клонинг”, има важни фундаментални, така и приложни – в областта на квантовата криптография – импликации. Следствие от теоремата за неклониране или еквивалентна на нея е теоремата за неизчистване, т.е. квантовият обект не може да бъде унищожен, „изчистен", точно както не може да бъде и дублиран: при унищожаването му 'тук', той само се премества 'някъде другаде'.

Квантовата криптография също така е основана на теоремата за неклониране на квантов обект. Подслушването, за чието затрудняване или осуетяване, се въвежда криптографирането, т.е. зашифроването на едно съобщение, в крайна сметка се базира на факта, че класическата информация може да бъде дублирана: подслушаната информация е тъкмо такова точно копие на предаваната по тайни канали информация. Следователно, ако в качеството на такъв се използва квантов (т.е. основаващ се на явленията сдвояване, на топологичната неотделимост), то, поради теоремата за неклонирането, той не може да бъде подслушван, или по-точно, всяко подслушване има за следствие изкривяване на предаваното съобщение, поради което детектирането на такива изкривявания води до разкриване на подслушването. Квантова криптография е с най-напреднала степен на практическо приложение.

Самата дисциплина „квантова информация" същевременно обещава да революционизира компютърната и комуникационната техника (напр. Blatter 2000; Zurek 2000).

Новата физическа дисциплина „Квантова информация"

I. Предистория и възникване:

Основните етапи могат да се разграничат посредством изключително добре известни понастоящем публикации, позволили постепенно да се изясни проблемното поле и чрез това предметът на тази дисциплина.

1. Статията на Айнщайн, Подолски и Розен (1935) „Може ли квантовомеханичното описание на физическата реалност да се сметне за пълно?" (Эйнштейн, Подолски, Розен. 1966) предлага мислен експеримент, чиято цел е да покаже чрез метода на довеждане до абсурд, че приемането на пълнотата на квантовата механика води до поява на корелации между произволно отдалечени физически събития. Днес обаче е ясно, че по този своеобразен начин е открит принципно нов клас физически явления, разкриващи се посредством корелации (Schrödinger 1935) между настъпването на физически явления.

2. Теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри при формализма на квантовата механика (Neumann 1932: 167-173) помага да се насочи вниманието към факта, че все пак предпоставката в горния мислен експеримент,

предложен от Айнщайн, Подолски и Розен, е необходимо истинна и следователно привидно абсурдното заключение също така е истинно. Важен е нейният анализ от Бел (Bell 1966), който позволява да се разграничат, най-общо казано, локален и нелокален аспект на физическите явления и по този начин да предотврати отъждествяването на последните само и изчерпващо с техния локален аспект. Става възможно да се говори в един предстоящ да се прецизира по протежение на цялото изследване смисъл за нелокални причинност и скрити параметри, в качеството на които може да се разгледа ограничаването на степените на свобода при явленията на сдвояване.

3. Статията на Джон Бел (Bell 1964) „За парадокса на Айнщайн, Подолски, Розен", успява да покаже, че така нареченият парадокс може да се подложи на експериментална проверка за съблюдаването на изведените от него неравенства (понастоящем наричани неравенства на Бел)[2]. Ако хипотезата на Айнщайн, Подолски и Розен за непълнота на квантовата механика (в наше време по-известна като „локален реализъм") е истинна, то корелацията между отдалечени физически събития по принцип не може да надвиши определена числова стойност. Напротив, ако стандартната интерпретация на квантовата механика е валидна и пълна, то корелационните неравенства на Бел следва в някои случаи да се нарушават.

4. Статията на Кохен и Шпекер „Проблемът за скритите параметри в квантовата механика" (Kochen, Specker 1967) може да се разглежда като разширение и допълнение или като обобщение на неравенствата на Бел в собствено логически план, разкривайки неизбежната контекстуалност на измервания микрообект и уреда. Теоремата доказва, че има противоречие между две основни допускания на теориите със скрити променливи (т.е. придържащи се към хипотезата на локалния реализъм): че всички наблюдаеми имат определени стойности във всеки даден момент и че те са независими от измервателното устройство.

5. Статията на Клоузър, Хорн, Шимони и Холт „Предложен експеримент да се проверяват теории със скрити параметри" (Clauser, Horne, Shimony, Holt 1969) извежда от неравенствата на Бел неравенства, които лесно могат да бъдат подложени на реален експеримент, и така опитно да се установи дали е пълна или не стандартната интерпретация на квантовата механика.

---

[2] Вж. напр. Белинский, Клышко 1993.

6. Експериментът на Клоузър и Хорн „Експериментални следствия от обективните локални теории” (Clauser, Horne 1974) докладва осъществяването на експеримент според вече изведените от тях неравенства, както и за нарушаване на неравенствата на Бел, т.е. в полза на стандартната интерпретация на квантовата механика и срещу нейната непълнота, локалния реализъм и скритите променливи.

7. Експериментите на Аспе, Роже и Гранжие „Експериментални проверки на реалистичните локални теории чрез теоремата на Бел” (Aspect, Grangier, Roger. 1981) „Експериментално осъществен АПР Gedankenexperiment. Ново нарушаване на неравенствата на Бел” (Aspect, Grangier, Roger 1982) потвърждават по различен начин и по-прецизно нарушаването на неравенствата на Бел.

Следват огромен брой експерименти, които продължават и понастоящем и които постепенно затварят всички „вратички”, колко и невероятни да изглеждат на пръв поглед те, за да бъде доказано абсолютно необоримо нарушаването на неравенствата на Бел (напр. Greenberger, Horne, Shimony, Zelinger 1990) и съществуването на необозрима и неподозирана област от физическата реалност: нелокалните, квантово-информационни взаимодействия.

II. Съвременно състояние:

1. Наред с физиката на кондензатите, квантовата информация е бурно развиваща се нова физическа дисциплина от началото на 90-те. Може да се даде пример с едно от най-авторитетните физически списания в света „Physical Review”, издавано от Американското физическо общество. Във „Physical review A” е обособена рубрика „Квантова информация” непосредствено след водещата „Фундаментални теории” и съдържаща във всеки брой 50-100 статии. Основният термин „сдвояване” се среща в 3165 статии[3].

Квантовата информация играе роля на концептуален център за предния фронт на съвременните физически изследвания. Например, споменатият основен термин „сдвояване” се среща в част „B” – „Кондензирана материя” на същото списание в 470 статии, в част „D” „Частици, полета, гравитация и космология” в 94 статии, в част „E” „Статистика и нелинейна физика” в 160.

Терминът практически липсва (среща се в 3 статии) само в част „C”, „Ядрена физика”. Това в известен смисъл е предимство, тъй като причината за от-

---

[3] Данните, цитирани тук и по-долу, са взети от Physical Review Online Archive – PROLA (http://publish.aps.org/) към 15.11.09 г., когато е завършена последната коректура на книгата.

съствието е, че явлението засега не може да се наблюдава във физиката на високите енергии (свръхскъпо струващата физическа дисциплина), тъй като е нискоенергетичен феномен. Експериментите са сред най-евтините.

Дисциплината е водеща и в надпреварата на предния фронт на физиката. В най-авторитетното физическо списание за експресни съобщения „Physical Review Letters" ето броят статии, в които се срещат някои основни термини: „сдвояване" – в 1284 статии, „квантова информация" – в 4747, „кюбит" – в 709, „АПР" – в 142, „квантов компютър" – в 1589, „телепортация" – в 102, „квантова криптография" – в 83. Същите термини се срещат във всички списания, налични в архива на Американското физическо общество – PROLA, както следва: „сдвояване" – в 5189 статии, „квантова информация" – в 11 698, „кюбит" – в 3120, „АПР" – в 1232, „квантов компютър" – в 9889, „телепортация" – в 516, „квантова криптография" – в 265.

Някои водещи световни центрове са: няколко едноименни Центрове или Институти за квантови изчисления – в Кембридж, в Оксфорд, във Ватерло, Канада и др.; Съвместният проект по квантови изчисления на три университета и една корпорация: Станфорд, Бъркли, МТИ, IBM; Мрежата за квантова информация; Международни конференции по квантова информация (напр.: 13-16 юли 2008, Бостън, нейната тема е „Квантово сдвояване и декохеренция"; 21-25 септември 2009, Рим, по квантово-информационна обработка и връзки); и разбира се още множество други.

Някои интернет ресурси са: Енциклопедията по квантова информация (на свободен достъп): Quantiki.org; Виртуално списание по квантова информация: vjquantuminfo.org, в което, макар и на платен достъп, се съдържат практически всички що-годе значими статии в областта на квантовата информация. Тази бегла справка няма ни най-малко претенция за изчерпателност или представителност.

III. Поднаправления и основни резултати в основните направления

Поднаправленията са „Квантов компютър", „Квантова комуникация", „Квантова криптография". Те могат да се охарактеризира чрез основните си резултати по следния начин:

1. Квантовият компютър (Feynman 1982: Фейнман 1986: също напр. Williams, Clearwater 1998; Пенчев 2005) като математически модел не е машина на Тюринг. Съществуват алгоритми специално за квантов компютър, напр. на Шор

(Williams, Clearwater 1998), на Гровър (Grover 1998) и редица други. Създадени са работещи модели на квантов компютър, върху йони, атоми и др. микрообекти (Валиев 2005).

2. В областта на квантовата комуникация могат да се посочат: явленията на квантова телепортация (Bennett, Brassard, Crepéau, Jozsa, Peres, Wooters 1993: също напр. Shih 2001); методи за предаване на сигнал по квантов канал; методи за коригиране на грешки при предаване на сигнал по квантов канал.

3. Сред „Квантова криптографията” – с уговорката, че разделянето по направления, както и на резултатите между тях е до голяма степен условно – изпъкват: теорема за неклонирането (Wooters, Zurek 1982); методи за квантово шифриране на сигнал по квантов канал; методи за детектиране на подслушване по квантов канал.

4. Основно явление, изучавано от квантовата информация

4.1. Това е „сдвояването” (entanglement, verschränkten Zustände с термина на Шрьодингер). Неговото теоретично определение е: една система е сдвоена, когато нейното хилбертово пространство не може да се разложи, в това число и на хилбертовите пространства на нейните части. В практиката е подходящо следното опростено определение: матрицата на плътността на системата не е ермитова, т.е. не може да сведе до единствено не-нулев диагонал от реални числа.

4.2. Основен практически проблем пред квантовата информация е декохеренцията (напр. Omnès 1997) и съответно времето за декохеренция. Всички явления на квантовата информация протичат по време на т.н. колапс на вълновата функция, който всъщност се оказва, че не е собствено колапс, а процес във времето. Декохеренцията се дължи на неизбежното взаимодействие на квантовата система с околната среда, при което престава да бъде кохерентна суперпозиция. Измерването като реален физически процес също е явление на декохеренция.

Експериментите за създаване на специални условия за максимално бавна декохеренция на квантовата система вече са постигнали продължителност, достатъчна за практическо използване. Създадени са и **макрообекти**, намиращи се в кохерентно състояние (напр. Blatter; 25-26; Zurek 2000). Това означава че техника, основана на явленията на сдвояване или на изолирани квантови обекти в несдвоено състояние, предстои да се появи.

5. Перспективи и състоянието в България:

5.1. Понастоящем с увеличаване времето, през което една система е в кохерентно състояние, се създават най-малкото отделни компютърни елементи, основани на явлението сдвояване.

5.2. Твърде е вероятно да се създадат множество нови специфични алгоритми за квантов компютър, както и една обща теория за тях.

5.3. В областта на комуникациите в едно по-отдалечено бъдеще е възможно да се появят устройства, които да възпроизвеждат с известна неточност даден предмет на разстояние, да създават приблизително копие от него.

5.4. Създадени са шифриращи и дешифриращи устройства, основани на явленията на сдвояване; също така за детекция на подслушване.

5.5. По отношение на концептуалната основа на физиката в ход е „Нежна революция” (напр. Менский 2000; Менский 2005; Баргатин, Гришанин, Задков 2001; Килин 1999), осъществявана от квантовата информация, сравнима с онази, извършена от квантовата механика в началото на XX век.

5.6. Къде в България се работи в областта на квантовата информация?

– Групата по квантова оптика и квантова информация към катедра „Теоретична физика” на СУ „Св. Климент Охридски” с ръководител доц. Николай Витанов с множество публикации в цитираните водещи научни списания. Подготвят се докторанти, постдокторски специализанти, реализират се международни проекти.

– В Института за философски изследвания на Българската академия на науките.

Новата физическа дисциплина „Квантова информация” дава реален пример за процесите на диференциация и интеграция в съвременната наука. Същевременно показва появата на напълно нова и неподозирана предна линия и открито поле за експерименти и теории, нова област от реалността и човешкото знание, която също така обещава и поразителни технически приложения.

ПРЕДИСТОРИЯТА: ДЕБАТЪТ МЕЖДУ АЙНЩАЙН И БОР ОТНОСНО ОСНОВАТА НА КВАНТОВАТА МЕХАНИКА

Спорът е неразрешим – Писмата между Борн и Айнщайн – „Добрият старец" и „заровете" – Границата между „Добрия старец" и човека – Позициите на Айнщайн и Бор и тяхната размяна – Идея за „дуалистично питагорейство" – Явленията на сдвояване – Квантовата информация – По повод 70-та годишнина на Айнщайн – „Непълнотата" на квантовата механика

Спорът между Айнщайн и Бор относно квантовата механика е неразрешим.

От известна гледна точка може да се приеме, че изясняването на смисъла на горното изречение представлява предметът на настоящата работа. В началото би могло само да се очертаят измеренията на тази неразрешимост:

Вече изглежда добре потвърдено, че позицията на Айнщайн съдържа вътрешно противоречие, което по-нататък подробно ще се експлицира. Същият недостатък в подхода на Бор е останал някак в сянка. Ако най-грубо го окачествим като „допълнителност", то прилагайки я самореференциално към неговите собствени възгледи, тяхната „непълнота" следва от това, че трябва да има нещо допълнително на тях самите, всъщност това е и тъкмо „веруюто" на Айнщайн.

Ако си позволим една игрословица с името на Айнщайн, той е и ще остане „единият камък" („der ein Stein", но не „ein Stein des Anstoßes") за квантовата механика, ала само *единият*. Фигуративно казано, реалната философска основа на квантова механика вече съществува и това е самият спор, символизиран от двамата и от техния фактически дебат.

Читателят рано или късно ще направи своя избор, дори и само с безкритичното следване на духа на своята епоха, но би било добре, ако помни, че изборът – какъвто и да е – ще си остане в крайна сметка необоснован, просто израз на свободната му воля или на случайната му прищявка, най-малкото заради това, че постоянното пребиваване в състояние на неразрешеност е психологически непоносимо за човека, противоречи на природата, на битието, на ежедневното му житиебитие. Заедно с това дори самият избор ще остане неразрешим проблем: имало ли е избор, или неведомо е била следвана една неотвратима и предопределяща непрекъснатост, неизбежна участ, фатум.

Спорът е изчерпателно представен от единия от участниците (Bohr 1957), и то по повод честването на 70-годишня юбилей на другия, което позволява веднага да се премине към неговото тълкуване в настоящия контекст на един опит за осмисляне на квантовата информация от философска гледна точка.

Да започнем с прословутата сентенция, изразяваща – на шега казано – непоколебима увереност в моралните устои на „Добрия старец", вероятно за първи път експлицитно изразена в писмото на Айнщайн до Макс Борн от 4 декември 1926 г., което е приведено изцяло:

> *Драги Борн!*
>
> *Трябва да имате съвсем малко търпение. Моят зет непременно ще чете частта и ще Ви пише. Ала горкият трябва да пази силите си, понеже сърцето му не е в ред. Още веднъж съм му напомнил скоро да разгледа частта. На мен началото на частта ми хареса изключително и мисля, че нейното въздействие няма да се пропусне.*
>
> *Квантовата механика е твърде внушаваща уважение. Обаче един вътрешен глас ми казва, че това все пак още не е това, което трябва* [nicht der wahre Jakob ist]. *Теорията предлага много, обаче едва ли ни доближава до тайната на Стареца. Във всеки случай съм убеден, че той не играе на зарове* [der nicht würfelt]*. Вълни в 3n-измерното пространство, чиято скорост се регулира чрез потенциалната енергия (напр. гумени ленти)…*
>
> *Следователно се мъча около това да изведа уравненията на движение на материални точки, схванати като сингуларности от диференциалните уравнения на общата относителност.*
>
> *С най-добри поздрави Ваш: А. Айнщайн* (Einstein, Bohr 1969: 129-130).

А ето и коментарът на Бор, приведен непосредствено след писмото в същото издание:

> *Това писмо (№ 53) съдържа две неща: за пиесата на Хеди* [Хедвига, съпругата на Макс Борн] *и за квантовата механика. Зетят на Айнщайн, който беше женен за неговата най-голяма заварена дъщеря Илзе, беше твърде известният тогава и уважаван писател и критик Рудолф Кайзер.*
>
> *Присъдата на Айнщайн относно квантовата механика беше силен удар за мен: той я отхвърляше – наистина без собствено обосноваване, по-скоро по зова на »един вътрешен глас«. Това отхвърляне играе в по-късните писма голяма роля. То се покои на едно дълбоко философско различие в мненията, което разделяше Айнщайн от по-младата генерация, към която бих причислил и себе си, макар и само няколко години по-млад от Айнщайн. По това вече нещо казах в коментара по писмо № 48* (Einstein, Bohr 1969: 130).

В писмо № 48 от 29 април 1924 г., по повод на теория, предложена от Бор (в съавторство с Крамерс и Слатер), за радиацията, в която се издига прочутата хипотеза за нарушаване на закона за запазване на енергията при единични квантови явления и само статистическа валидност за макросвета[4], Айнщайн по същество използва същия образ:

> *Мисълта, че електрон, подложен на радиация, избира със* свободно решение *момента и посоката, в които желае да прескочи, ми е непоносима* [unerträglich]*. Ако вече* [се бях съгласил]*, бих бил любим обущар или дори служител в игрален дом, а не физик* (Einstein, Bohr 1969: 118).

В 1924 година, когато е написано това писмо, паметната 1925, през която на Хайзенберг и Шрьодингер почти едновременно ще хрумнат две различни блестящи идеи за формулиране на нова физическа теория, довели впоследствие до появата на квантовата механика, все още предстои. Ето защо образът „*той* не играе на зарове" тук не е отнесен към квантовата механика; впрочем формулирано е едно лично, емоционално обагрено несъгласие, все още липсва позоваването на „Стареца" и „вътрешния глас" – характерни по-скоро за една религиозна вяра,

---

[4] Съществената част от писмото на Айнщайн е цитирана в бележка под линия при подробното обсъждане по-долу на хипотезата на Бор и сътрудници в главата „Шрьодингеровите verschränkten Zustände".

макар и с известно иронично дистанциране, – вече налично в писмото от 4 декември 1926 г.

Ето и коментарът на Борн към предшестващото писмо № 48:

> *Наред с личното то съдържа едно физикалистко-философско верую, отхвърлянето на статистическите закони като последна основа на физиката. Тази тема ще се появява отново и отново до една по-рязка дискусия с мен. Точно тук ще кажа, каква е последната основа на този конфликт. Айнщайн беше твърдо убеден, че физиката ни доставя знание от обективно съществуващия външен свят. С много други физици бавно се обърнах, чрез опитите в областта на атомните квантови явления, към това, че не е така, че ние имаме във всеки момент на времето само едно сурово, приблизително знание за обективния свят и от това по определени правила, вероятностните закони на квантовата механика, можем да заключаваме за неизвестни (напр. бъдещи) състояния* (Einstein, Bohr 1969: 119).

Може би няма друга съвременна научна теория освен квантовата механика, в която „намеренията на бога" да се подлагат на обсъждане. В пряка връзка би бил следният цитат:

> *Науката е игра, но игра с действителността, игра с остри ножове… Ако някой разреже внимателно картина на хиляди парчета, можеш да подредиш отново пъзела, ако върнеш частите по местата им. В играта на науката твоят противник е Дядо Господ. Той е наложил не само играта, а и правилата, макар не всички те да са напълно ясни. Оставил е да откриеш и определиш половината от тях. Научният опит е закален меч, с който можеш да се биеш с призраците на мрака, но също така може да ти донесе позорен разгром. Неясността се корени в това колко правила е създал сам Господ за вечни времена и колко са породени от твоята умствена инерция. Решението става възможно само ако се преодолее това ограничение. Може би именно там е очарованието на играта. Защото в подобен случай се бориш срещу въображаемата граница между теб и Господ – граница, която може и да не съществува.*

Този цитат е поставен като мото на една художествена книга, от Хорхе Волпи, „В търсене на Клингсор” (ИК „Колибри”, 2007), в която герои са главните действащи лица от сагата на квантовата механика. Като негов автор е посочен Шрьодингер[5]. Но той би могъл да бъде поставен като мото и настоящата книга, доколкото водещото е обсъждането на границата между част и цяло, между крайно и безкрайно, или впрочем, нейното несъществуване. В контекста на това „дали Бог играе или не играе на зарове”, това вече е също толкова проблематичната граница и неразрешимост на случайно и необходимост, на свободен избор и предопределеност.

Прочута е и репликата на Бор „Айнщайн, спрете да говорите какво да прави Бог”. Тъй като не ми е известно, тя да е засвидетелствана или оспорена в текст от самите Бор и Айнщайн, в чийто диалог се е случила, няма да обсъждаме нейната автентичност. Така или иначе, наред с цитираната по-горе „фраза относно играта на зарове”, на нея изключително често се позовават и може да се приеме за културен факт. Тя изразява още един аспект на тук обсъжданата неразрешимост, обгръщаща дебата между двамата: може или не може да говори човек от името на бог; бог нещо различно ли е от човека или може да се отъждестви с него.

И тук, както в мотото на книгата на Хорхе Волпи, както и в концептуалните основи на квантовата механика, сме изправени пред странна дилема: имаме две или две групи неща, но границата между тях е недостижима, понеже никога не са едновременно дадени, или имаме цялост, единство, при което такава граница няма. Позицията на Айнщайн в спора е последователно монистичната, тази на Бор – дуалистичната.

Но самата тази дилема, освен че и самата тя е неразрешима, не може да бъде рязко очертана чрез позициите на Айнщайн и Бор, тъй като всъщност последният настоява за едно монистично единство на наблюдател (уред) и квантов обект, докато Айнщайн пледира за отделното им разглеждане, за да бъде получена обективна картина в научното познание:

---

[5] Сред достъпните ми текстове от Шрьодингер не успях да открия такъв пасаж или дори просто само сходен по смисъл.

> *После, от квантовия постулат следва, че всяко наблюдение на атомните явления ще включва взаимодействие със средството за наблюдение, което не може да се пренебрегне. Съответно, независима реалност в обичайния физически смисъл не може да се припише нито на явленията, нито на средството за наблюдение* (Bohr 1928: 54*)[6].

Тъкмо от тази неразделност и принципна неразделимост на наблюдател и обект в квантовата теория, следва че принципът на причинността (т.е. Айнщайновото отхвърляне на изначалната случайност) и времепространственото описание на един обект са допълнителни и взаимно изключващи се аспекти за описание на действителността:

> *Тази ситуация* – продължава Бор – *има далеч достигащи последствия. От една страна, определението на състояние на физическа система, както обикновено се разбира, изисква отстраняване на всички външни смущения. Но в този случай, според квантовия постулат, никакво наблюдение няма да бъде възможно и преди всичко понятията за пространство и време губят своя непосредствен смисъл. От друга страна, ако за да направим наблюдението възможно, позволим определени взаимодействия с подходящи средства за измерване, не принадлежащи на системата, то еднозначно определение на състоянието на системата естествено повече не е възможно и тогава не може да се постави въпросът за причинността в обичайния смисъл на думата. Самата природа на квантовата теория следователно ни принуждава да сметнем време-пространствената координация и твърдението за причинност, обединението на които характеризира класическите теории, като допълнителни, но взаимно изключващи се черти, символизиращи идеализацията съответно на наблюдение и определяне* (Bohr 1928, 54 -55*).

Тази допълнителност и взаимно изключване на пространствено-времево описание и причинно описание е просто друг израз на съотношението за неопределеност:

---

[6] Страниците отбелязани със звездичка – „*” – са по изданието на статията в N. Bohr. *Atomic Theory and the Description of Nature.* Cambridge: University Press, 1934, 52-9.

> *Според квантовата теория съществува общо реципрочно състояние между максималната точност на определяне на времепространствените и енергийно-импулсните вектори, асоциирани с отделните обекти. Това обстоятелство може да се приеме за прост символичен израз за допълнителната природа на времепространственото описание и изискванията за причинност* (Bohr 1928: 60*).

При прехода между теория и емпирия ролите между Айнщайн и Бор се разменят по отношение на защита на монистична или дуалистична позиция. Теоретичния монист Айнщайн настоява за емпиричен „дуализъм" между уред и наблюдател, докато авторът на концепцията за допълнителността, Бор застъпва единство на наблюдател (уред) и квантов обект. Когато говорим за неразрешимост на спора между двамата, имаме предвид и подобна „трансмутация".

Последната е в основата на предлаганото в настоящата работа „дуалистично питагорейство": физическите неща не само се описват чрез математически структури, *но **и** са* математически структури; преходът между физическо и математическо (и обратно също така) преобразува дуалистично в монистично, но и монистичното в дуалистично.

Явленията на сдвояване и днес вече фактическото съществуване на новата дисциплина „квантова информация" или поне същностното обогатяване на квантовата механика като „квантова механика и информация" в отказ от фиксиране на подобно изплъзваща се граница между тях може би налагат преосмисляне на дебата между двамата. От такава гледна точка квантовата механика наистина се оказва непълна, но в смисъл, противоположен на влагания от Айнщайн, Подолски и Розен: тя е непълна не в теоретичен, а – обратно – в емпиричен смисъл. Съществуват явления, а именно тези на сдвояване, които са останали извън полезрението в периода на възникване на квантовата механика, но които се описват чрез същия, разработен вече понятиен и формален математически апарат. От друга страна обаче, те подсказват и изискват плавен преход между двете полярни начала на вълново-корпускулярния дуализъм, тяхното отчасти едновременно, отчасти взаимноизключващо се битие, парциалното им препокриване, възможно само при известна „кривина" на съдържащото ги абстрактно математическо пространство.

По този начин дисциплината „квантова информация” води към примиряване на позициите на Айнщайн и Бор, поради наличието на плавен преход помежду им, от една страна, и до изясняване, че от собствено логически гледна точка предмет на спора е неразрешимо твърдение, от друга.

Няма съмнение, че спорът между Айнщайн и Бор по отношение на основите на квантовата механика има множество измерения и целта в скицата, която се предлага в настоящата глава, не е дори само да се изброят, а не повече от това да се открои онази тяхна философско-методологическа същност и проблемност, довела до възникването и утвърждаването на дисциплината „квантова информация”. От такава гледна точка и в заключение могат да се фиксират два особено важни момента:

1.1. Позицията на Бор: *или* причинно, *или* време-пространствено описание.

1.2. Позицията на Айнщайн: *и* причинно, *и* време-пространствено описание.

2.1. Бор: теоретичен дуализъм и емпиричен монизъм.

2.2. Айнщайн: теоретичен монизъм и емпиричен дуализъм (последният разбран в смисъла на разделяне на две независими и поне по принцип невзаимодействащи части – обект и уред).

Както ще видим по-нататък (към края на настоящата част), при обсъждането на установената от Шрьодингер еквивалентност на матричната и вълновата механика, двете позиции могат да се разглеждат в качеството на еквивалентни, като тази на Айнщайн се оказва въплътена в квантовото описание, осъществено чрез вълновата $\boldsymbol{\Psi}$-функция. Условието за това обаче е тъкмо отсъствието на теоретично предложените от Айнщайн, Подолски и Розен взаимодействия (макар и те да се предлагат като конструкция от типа *reduction ad absurdum*, чрез която да покажат непълнотата на квантовата механика).

Почти тридесет години по-късно Джон Бел успява да представи по начин, който е експериментално проверим, тази нееквивалентност между двата подхода. Уви, осъществените експерименти свидетелстват еднозначно, че в случаите на нееквивалентност валидната позиция е тази на Бор.

Но $\boldsymbol{\Psi}$-функцията всъщност не удовлетворява изискванията на Айнщайн, защото макар тя да се изменя причинно във време-пространството, то нейният смисъл – поне в съответствие с тълкуванието на физическия ѝ смисъл, дадено от Макс Борн – е този на изначална случайност, нещо дори „по-лошо”: прехвърлена от описанието на света в самата негова субстанция.

Няма никакво съмнение, че нашият свят и епоха – в които е възникнала дисциплината „квантова информация” – присъждат категорична победа за Бор в диспута му с Айнщайн. Категорична – да, но може би не окончателна …

Същността на тази неокончателност е в това, че спорът между двамата е неразрешим. Логически необходимо трябва да съществува и несобствена интерпретация на квантовата механика чрез време-пространствено локализирано съществуващи обекти, които могат да се опишат и във време-пространството причинно, т.е. чрез такъв модел на квантовата механика би се сбъднала мечтата и претенцията на Айнщайн към квантовата механика като теория.

Но … има две големи „но”: (1) това е чисто твърдение за съществуване, т.е. конструктивно (засега поне) не може да се посочи удовлетворително този еквивалент; и (2): той не би бил повече от еквивалент, т.е. не би бил жадуваният от привържениците на теориите със скрити параметри реванш, а едно половинчатото „реми”, равенство…

Една от големите задачи на настоящата работа е философски и методологично да анализира предпоставките, щото нашият свят на макрообекти, в който живее и действа човекът и каквото той самият представлява физически, по определен начин, а именно спрямо мегаобекти, да бъде представян ***и чрез*** квантово-механично описание и така да се премахне първото „но”; второто обаче, поне засега, изглежда принципно.

По-нататък, в контекста на предстоящата глава, в която ще се обсъди „парадоксът” или може би по-скоро аргументът Айнщайн – Подолски – Розен, нека разгледаме най-общите епистемологични и методологични позиции на двамата, както са засвидетелствани от самите тях в сборника „Алберт Айнщайн: Философ – учен”, събрал елита, създал физиката на ХХ в. по повод на 70-годишния юбилей на патриарха.

> *За по-нататъшната дискусия* – пише Айнщайн – *ще мисля двама физика, А и В, които застъпват различно схващане по отношение на реалното състояние, описвано от ψ-функцията.*

> *А. Индивидуалната система има (преди измерването) определена стойност на q (съотв. p) за всички променливи на системата, и то стойността, която се установява при измерване на тези променливи. Изхождайки от това схващане, той ще заяви: ψ-функцията не е изчерпателно представяне на реалното състояние на системата, а непълно представяне; тя изразява само онова, което знаем на основата на предишни измервания върху системата* (Einstein 1957: 82).

Не е трудно да се забележи, че позицията на физика А съвпада с тази на Айнщайн. Всъщност дори и от съвременната гледна точка на квантовата информация тя може да се приеме за точна и адекватна, но със следната уговорка: „онова, което знаем на основата на предишни измервания върху системата", синтезирано като нейната ψ-функция се оказва, че по принцип не може да е „изчерпателно представяне на реалното състояние на системата", а необходимо е „непълно представяне". В класическата физика винаги една изследвана система може категорично да се обособи от контекста на измерването и наблюдението ѝ и тази предпоставка преминава негласно в разсъжденията на Айнщайн.

Обратно в позицията на Бор, която лесно се разпознава в тази на „физика В", реалното състояние на системата ще бъде съществено доуточнено едва в момента на измерването, тъй като част от състоянието на системата, не ѝ принадлежи изцяло в следния смисъл: тази част представлява корелацията на системата с нейния контекст, а при измерване и наблюдение, той е тъкмо този на измерването и наблюдението:

> *В. Отделната система няма (преди измерването) определена стойност за q (съотв. p). Измерената стойност възниква под въздействие на вероятността, присъща за нея по силата на ψ-функцията, едва чрез акта на измерване. Изхождайки от това схващане той ще (или поне трябва да) заяви: ψ-функцията е изчерпателно представяне на реалното състояние на системата* (Einstein 1957: 82, 84).

Тук отново трябва да се подчертае, че „ψ-функцията е изчерпателно представяне на реалното състояние на системата" само в следния смисъл: тя е всичко онова, което може да се знае единствено въз основа на самата нея, т.е. на нейното поведение в миналото. То обаче не е достатъчно, за да се определи изчерпателно (в смисъла на еднозначно) – а само вероятностно – поведението ѝ в настоящето, тъй като то зависи също така и от корелацията с нейното обкръжение в настоящето, която се до-определя, фигуративно казано, в последния момент, т.е. със самото настъпване на настоящето. Не уредът, а още по-малко физикът-експериментатор или наблюдател доопределят състоянието на квантовия обект, а съвкупното настояще в своята цялост представляват своеобразна, „външна", също така детерминираща поведението ѝ „част" от системата. Все пак тъкмо именно уредът съсредоточава основното, да го наречем контекстуално, влияние на настоящето.

> *Сега представяме на тези двама физика* – продължава Айнщайн – *следния случай. Налице е система, която в момента t на нашето наблюдение се състои от две частични системи S_1 и S_2, които в този момент са пространствено отделени и (в смисъла на класическата физика) без значимо взаимодействие. Нека общата система да бъде напълно описана чрез известна ψ-функцията ψ_{12} в смисъла на квантовата механика. Всички квантови теоретици сега са единодушни в следното. Когато направя пълно измерване на S_1, то аз ще получа от резултатите на измерването и от ψ_{12} напълно определена ψ-функцията ψ_2 на системата S_2. Характерът на ψ_2 зависи тогава от това що за вид измерване на S_1 съм предприел* (Einstein 1957: 84).

Такова описание, при това направено от самия Айнщайн, може да се приеме за есенцията на аргумента Айнщайн – Подолски – Розен. Той всъщност сблъсква два аспекта на един квантов обект – същите те винаги в хармония при описание на системи в класическата физика, – а именно сам за себе си и в качеството му на част от средата, в която се намира друг. Този конфликт обаче може да проличи едва и ако вторият обект се приеме, че може първо да се разгледа сам за себе си. Тогава се оказва, че той притежава множество ψ-функции – $\left(\psi_2, \psi_2^1 \ldots\right)$:

> *После ми се струва, че може да се говори за реалното положение на нещата на S_2. За това реално положение на нещата знаем от самото начало, преди измерването на S_1 още по-малко отколкото при система, описана чрез ψ-функцията. Обаче по мое мнение би трябвало безусловно да държим на едно допускане: реалното положение на нещата (състояние) на системата S_2 е независимо от това, което се извършва с пространствено отделената от нея система S_1. Винаги според вида на измерването, който предприемам на S_1, получавам обаче ψ_2 от друг вид за втората частична система* $(\psi_2, \psi_2^1 \dots)$ (Einstein 1957: 84).

С други думи, чрез мисления експеримент, предложен от Айнщайн се оказва, че ако веднъж се приеме квантовият обект да се доопределя от своята среда или от системата (системите), чийто участник е, то ние не бихме могли изобщо да кажем каква и дори най-вече коя част от това безкрайно множество $(\psi_2, \psi_2^1 \dots)$ собствено му принадлежи и може да бъде не- или мета-контекстуално отъждествена с него. Размие ли се чрез вероятностно разглеждане границата между квантов обект и среда, то изобщо става трудно или навярно невъзможно неговото идентифициране и дефиниране *като същия* в произволен друг контекст. Оспорено се оказва дори самото съществуване на негово реално състояние:

> *После обаче трябва реалното състояние на S_2 да бъде независимо от това, което става на S_1. За същото реално състояние на S_2 следователно може (винаги според избора на измерване в S_1) да се намери различен вид ψ-функция. (Това заключение може да се избегне само чрез това, че или се приема, че измерването на S_1 (телепатично) променя реалното състояние на S_2, или обаче се отричат изобщо независими реални състояния на неща, които са пространствено отделени едно от друго. И двете ми изглеждат напълно неприемливи.)* (Einstein 1957: 84).

И така, ако използваме шеговита метафора, вероятно разбираема за по-възрастното поколение български философи или поклонниците на „некласическата рационалност" и на Мамардашвили, то квантовият обект се оказва „ensemble от обществени отношения". Айнщайн е „есенциалистът", който настоява за негова неизменна същност независимо и преди всяко измерване. Тъй като от това, че „ψ-функцията е пълно описание на реалното положение на нещата" следва отсъствие на такава същност на квантовия обект и това според Айнщайн е очевидно е погрешно, то следва невярност на предпоставката и този довод трябва да принуди физика $\boldsymbol{B}$ да се откаже от своята позиция:

> *Ако сега физиците $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ приемат това разглеждане като валидно, то $\boldsymbol{B}$ ще трябва да предаде своето становище, че $\boldsymbol{\psi}$-функцията е пълно описание на реалното положение на нещата. Тъй като в този случай би било невъзможно на едно и също положение на нещата (на $\boldsymbol{S_2}$) да могат да се съпоставят две различни $\boldsymbol{\psi}$-функции* (Einstein 1957: 84, 86).

Както знаем, физикът $\boldsymbol{B}$, ако това е Бор, не предава своето становище, тъй като представя множество и на различни равнища контрааргументи. Много от тях ще бъдат обсъдени в следващата глава, посветена тъкмо и изцяло на довода на Айнщайн – Подолски – Розен. Тук обаче би могло се да подчертае единствено следното в позицията на датския физик. „Що се отнася до специалния проблем разгледан от Айнщайн, Подолски и Розен", се показва, че „макар всяка двойка $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ на спрегнати пространствени и импулсни променливи да се подчинява на правилото за не-комутативно умножение" – „и може следователно да бъде фиксирано единствено с реципрочна дължина [на интервала]", –

> *то разликата $\boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{q_2}$ между двете пространствени координати, отнасящи се до образуващите на системата, ще комутират със сумата $\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2}$ на съответстващите импулсни компоненти, както следва пряко от комутативността на $\boldsymbol{q_1}$ с $\boldsymbol{p_2}$ и $\boldsymbol{q_2}$ с $\boldsymbol{p_1}$. И двете, $\boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{q_2}$ и $\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2}$ могат следователно да бъдат точно фиксирани в едно състояние на съставената система и следователно можем да предскажем стойностите или на $\boldsymbol{q_1}$, или на $\boldsymbol{p_2}$, ако или $\boldsymbol{q_2}$, или $\boldsymbol{p_1}$, съответно са определени чрез преки измервания* (Bohr 1957: 233).

Сега обаче ще се опитам да покажа, че както позицията на Айнщайн съдържаше скрити и възможно неверни предпоставки, то така също това се отнася и до Бор и чрез това да дам илюстрация за принципната неразрешимост на техния спор. С други думи, става дума не за някакви предполагаеми техни логически грешки, каквито няма или които с по-голяма прецизност на израза биха могли да се избегнат, а за наличието на винаги неизразим остатък, който най-много може да се изведе от обхвата на разглеждане, но и наново да се върне:

Нека в горния пример оставим $\boldsymbol{q_2}$ да клони към $\boldsymbol{q_1}$ и следователно $\boldsymbol{\Delta q} = \|\boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{q_2}\| \rightarrow \boldsymbol{0}$. Тогава според съотношението за неопределеност трябва $\boldsymbol{\Delta p} = \|\boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_2}\| \rightarrow \boldsymbol{\infty}$. Ако това е така, то не е възможно „сумата $\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2}$” да има крайна стойност и следователно да бъде измерена заедно с $\boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{q_2}$, както допуска комутируемостта, посочена от Бор.

Основата на горното противоречие е че отъждествихме две измервания на два обекта, предварително приети като различни (примерът на Бор), с пак две измервания, но на един и същ обект (което позволи да се използва съотношението за неопределеност). При това, забележете, единият случай премина в другия чрез непрекъснато преобразование, каквото представлява операторът „→”, т.е. нещо да клони към своята граница. Незаконно ли е такова отъждествяване? Всъщност то е не повече от обръщане посоката на времето на аргумента на Айнщайн – Подолски – Розен, при което отзад напред вече отдалечените квантови обекти започват да се сближават, разделят се и накрая съвпадат. Ако се изкаже твърдението, че това е само довод от противното в полза на стрелата на времето, то схемата лесно се перифразира по „правилната” посока на времето:

Два отдалечени квантови обекта летят един срещу друг, например в адронния суперколайдер на ЦЕРН, и се сблъскват. В време-пространствената точка на събитието на сблъсъка неопределеността между импулсите (а всъщност и между енергиите) на двата трябва да е безкрайна, доколкото те не биха могли да се сблъскат, или поне не би могло да се говори за сблъскване, ако не се приеме, че $\boldsymbol{\Delta q} = \|\boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{q_2}\| \rightarrow \boldsymbol{0}$. Но законът за запазване на импулса изисква крайна стойност, и то точно равна на сумата на тези на двата поотделно. От полученото противоречие, можем да заключим – както в парадокса за Ахил и костенурката или в този за

Стрелата, – че предпоставката за сблъсъка е невярна и може би дори, че те никога няма да се срещнат.

Да се върнем контекста на самата дискусия между Айнщайн и Бор, и то по-специално – към Айнщайновото осмисляне на позицията на опонента му по отношение на неговия аргумент, публикуван заедно с Подолски и Розен:

> *И сега само една бележка, засягаща дискусията относно парадокса Айнщайн – Подолски – Розен. … От „ортодоксалните" квантови теоретици, чиято позиция зная, тази на Нилс Бор ми се струва, че най-много се доближава до това да отдаде дължимото на проблема. Преведено на моя начин да го поставя, той аргументира следното:*
>
> *Ако частичните системи* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *образуват пълна система, която е описана от своята* $\boldsymbol{\psi}$*-функция* $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{AB})$*, няма основание за това да трябва да се припише каквото и да било взаимно независимо съществуване (състояние на реалност) на частичните системи, видени отделно,* не даже ако частичните системи са пространствено отделени една от друга в даден момент на разглеждане*. Твърдението, че, в този случай, реалната ситуация на* $\boldsymbol{B}$ *би могла да бъде (пряко) повлияна от някакво измерване, предприето на* $\boldsymbol{A}$ *е следователно вътре в рамките на квантовата теория необосновано и (както показва парадоксът) неприемливо* (Einstein 1957: 681-682).

Това, което по-нататък подчертава Айнщайн, е, че позициите на двамата са алтернативни: *или – или*. Както ще видим обаче, философията на квантовата информация настоява за синтез между тях, *и – и* :

> *Чрез този начин да се погледне на въпроса става очевидно, че парадоксът ни принуждава да се откажем от едно от двете твърдения:*
>
> *(1) описанието чрез* $\boldsymbol{\psi}$*-функцията е* пълно*;*
>
> *(2) реалните състояния на пространствено отделени обекти са независими помежду си.*
>
> *От друга страна, възможно е да се придържаме към (2), ако се приеме* $\boldsymbol{\psi}$*-функцията като описание на статистическа съвкупност на системата*

> *(и следователно да се откажем от (1)). Обаче този възглед взривява рамката на ортодоксалната квантова теория* (Einstein 1957: 682).

От гледна точка обаче на твърдението, че спорът между Айнщайн и Бор е неразрешим изобщо и в частност, по отношение на т. нар. парадокс на Айнщайн – Подолски – Розен, би могло да е *едновременно* валидно, че:

(1') описанието чрез ψ-функцията ***не е*** *пълно*;

(2') реалните състояния на пространствено отделени обекти не са независими помежду си.

С други думи: да се твърди, че и двамата са прави в критиката на своя опонент, но въпреки това не следва безусловната правота на собствената позиция на който и да е от тях.

Описанието чрез ψ-функцията ***не би било*** *пълно* (1') в следния смисъл: като елементи на системата, а техните състояния като скрити параметри трябва да се разглеждат също така и всички други системи нелокално съ-съществуващи в даден момент във вселената. Разбира се придаването на физически и експериментално установим смисъл на подобно твърдение е в разрез с постулата за ненадвишаване скоростта на светлината във вакуум и оттук на теорията на относителността. То възстановява нютоновското време, наред с айнщайновското, като равноправен аспект на света. Влиянието на „външните елементи" на системата, т.е. на съ-съществуващите други системи във вселената, в качеството на скрити параметри, доопределящи нейното състояние до класически детерминирано, не е еднакво. По този начин се оказва, че (2') реалните състояния на пространствено отделени обекти не са независими помежду си.

Разглежданата система може да се опише по два допълнителни в смисъла на Бор начина: веднъж само спрямо своето минало състояние, втори път само спрямо всичко съ-съществуващо. В случая, разглеждан от класическата физика, всички вътрешни елементи изчерпват миналото ѝ състояние, а външните елементи – съ-съществуващото. Те биват едновременно дадени, доколкото никога не могат да се препокрият: няма вътрешен елемент, който да е външен, нито обратното; няма позиция (на вътрешен елемент), която да може да се разглежда като импулс (на външен елемент), нито обратното.

В случая на квантовата механика, която Айнщайн нарича „ортодоксална”, случаят е полярно противоположен: двете описания изцяло се препокриват и поради това са „допълнителни”: както спрямо съ-съществуващото, така и спрямо миналото състояние, могат изцяло да се разгледат както вътрешните, така и външните елементи на система, т.е. да се даде изчерпателно, *пълно* описание само с половината (спрямо класическия случай) координати в конфигурационното пространство.

Тъкмо полярната противоположност на двата случая прави възможен спорът между Айнщайн и Бор, както и дилемата: или (1), или (2). Не без изясняването на ситуацията, осъществено от тях, става постепенно явно – особено след работите на Бел, – че между двете полярни позиции съществува изключително обширна област, и то при това досега напълно неизвестна, на физическа реалност: квантовите корелации.

В смисъла на хегелианската философия дисциплината „квантова информация” възниква от дебата между двамата по основните на квантовата механика чрез „диалектическо снемане и синтез” на техните полярни позиции, ако бъдат разгледани в качеството им съответно на „теза” и „антитеза”.

В резултат самото философско понятие за „действителност” или в Айнщайновите термини за „елемент на реалността” претърпява радикална промяна. Не само за класическата физика, но и за съответната ѝ философия е много дълбока скрита предпоставка, че действителността на всяко нещо е изцяло съсредоточена в него; неговото описание може да бъде пълно, опирайки се на самото него и напълно пренебрегвайки различните контексти, в които то, но именно като то същото, може да се появява.

Философията на квантовата информация недвусмислено ни принуждава да разберем, че подобен случай не само не изчерпва богатството на света, но и е рядък частен случай, макар и най-прост и – както се оказва – най-лесен за изучаване.

НАЧАЛО : "ПАРАДОКСЪТ" АЙНЩАЙН – ПОДОЛСКИ – РОЗЕН

Непарадоксалният парадокс – Аргументът АПР – „Елементът на реалността” – Нов тип физическо взаимодействие? – Набедената непълнота на квантовата механика – Проблемът около едновременността на реалността – „Критерият за физическа реалност” – Отговорът на Бор (1935) – Фундаменталност на избора и на вероятността – Време и енергия – Теорията на Бор, Крамерс и Слатер (1924) – Допълнителност и дуален характер на реалността – Аналогии с теорията на относителността

Въпреки че е разпространено и дори общоприето да се нарича парадокс, мисленият експеримент, предложен от Айнщайн, Подолски [7]и Розен[8], не заслужава подобна квалификация. Той не е нито неразрешимо противоречие[9], нито е „доказателство от противното” (reductio ad absurdum) за непълнотата на квантовата механика, в качеството на каквото е замислен от своите автори: всъщност е „най-сполучливата невярна хипотеза” може би в цялата история на физиката. До противоречие в действителност не се достига: открита е нова, смайваща област на физическата реалност – нелокалните корелации, противно на намеренията на своите откриватели, които разчитат да докажат чрез нейната абсурдност възможността и

---

[7] Борис Я. Подольский (англ. Boris Podolsky; 29 юни 1896, Таганрог, Русия – 28 ноември 1966, САЩ) е американски физик – теоретик. Заминава от Русия за Щатите през 1913 година, 1918 – завършва Калифорнийския университет. Работил е в Лайпциг (1929 – 1930), Харков (Украинският физико-технически университет, 1934), от 1935 г. е професор в Университета на Цинцинати. През 30-те години сътрудничи с Лев Ландау за написване на учебник по електромагнетизъм, започващ със специалната теория на относителността и подчертаващ теоретичните постулати, а не експерименталните закони: завършването на проекта е осуетено от емигрирането в САЩ. Заедно с Фок и Дирак през 1932 г. развива „многовремеви формализъм” на квантовата механика и построява релативистки инвариантна форма на квантовата електродинамика. Изследва ролята на константата на фината структура.

[8] Проф. Натан Розен (евр: נתן רוזן; 22 март 1909, Бруклин – 18 декември 1995, Ню Йорк) е израелски физик, завършил Масачузетския технологичен институт. През 1935 г. Става асистент на Айнщайн в Института за перспективни изследвания в Принстън, какъвто остава до 1945 г. Съоткривател е на „моста на Айнщайн-Розен” в общата теория на относителността, чрез който е обоснована възможността за „тунели” във време-пространството, създавайки преки пътища между отдалечени точки (http://www.krioma.net/articles/Bridge%20Theory/Einstein%20Rosen%20Bridge.htm). Розен е основател на Института по физика към Израелския институт по технология и е президент от 1970 година на Университета Бен Гурион в пустинния район Негев.

[9] От парадоксалното твърдение следва неговото отрицание, а от отрицанието на парадоксалното твърдение следва самото парадоксално твърдение.

необходимостта от статистическа интерпретация на феноменологичните и фундаментални квантово-механични вероятности. Така Христофор Колумб, потеглил по обратен път за Индия, всъщност открива Америка.

В целия досегашен опит на човечеството корелациите винаги са били корелации на нещо, точно както вероятностите са вероятности на нещо, а информацията се предава чрез носител, притежаващ енергия, който за краткост нататък ще наричаме материален носител, или просто носител, под което ще се подразбира, че неговата енергия е ненулева[10]. Корелации, вероятности, информация „сами по себе си” – няма! Тъкмо този неформулиран принцип на досегашното познание се оказва торпилиран от вече експериментално доказаната непарадоксалност на „парадокса” Айнщайн – Подолски – Розен.

Квантовите корелации, вероятности, информация със сигурност не могат да се сведат до обичайни физически взаимодействия на физическите обекти, които корелират, така че тяхното поведение да може да се характеризира чрез някакво статистическо осредняване или да обменят информация посредством носител. Една от съществените причини е, че се подчиняват сякаш на един Нютонов принцип на далекодействието, низвергнат от постулата за ненадвишаване на скоростта на светлината във вакуум, валиден за всички физически обекти, притежаващи енергия, и залегнал в основите и на двете Айнщайнови теории на относителността.

Много са малко дори и фундаменталните физически открития, които притежават също така и философска значимост. Сред това нищожно малцинство е и парадоксалното само по намеренията на авторите си откритие на квантовите корелации. Към областта на физическата реалност е прибавен нов, огромен клас от обекти, каквито при това се оказват почти всички физически обекти или с други думи, досега известните и причисляваните могат да се окачествят като нищожно изключение. Наред с веществото и енергията е открита нова форма на физическа реалност, най-всеобхватна и която вероятно може да претендира – според предния фронт на съвременните ни познания – да е единствената първооснова, фундаменталната субстанция, от която е изградена вселената. Най-сетне тя обещава да прехвърли мост над завещаната от Декарт дихотомия между мислене и протяжност.

---

[10] По-точно, неговата енергия „на покой” е ненулева в смисъл, обяснен по-нататък.

Почти всички публикации, които обсъждат историята на квантовата информация, посочват че нейните идеи се зараждат със статията на Айнщайн, Подолски и Розен "Може ли да се смята квантовомеханичното описание на физическата реалност за пълно?" (Einstein, Podolsky, Rosen 1935).

Добре известно е, че статията е предвидена като доказателство на факта, че квантовата механика не е пълна. В резюмето на статията замисълът е обрисуван така:

В квантовата механика, при две физически величини, описвани с некомутиращи оператори, знанието на едната от тези величини прави невъзможно знанието за другата. И понеже според авторите са в сила предпоставките, че в пълната физическа теория съществува определен елемент, съответстващ на всеки елемент на реалността, и че достатъчно условие за реалността на една или друга физическа величина е възможността за предсказването ѝ с достоверност, без да се нарушава системата, то следва или (1) описанието на реалността в квантовата механика с помощта на вълнова функция е непълно; или (2) тези две физически величини не могат да притежават едновременно реалност. По-нататък, логическата схема е да се покаже, че ако 1) е невярно, то и 2) е невярно. Но понеже не е вярно, че 2) е невярно, то следва, че не е вярно, че и 1) е невярно, т.е. вярно е, че „описанието на реалността в квантовата механика с помощта на вълновата функция е непълно”.

И вече схемата, при която може да се последва този логически извод, е при разглеждане на проблема за предсказване на поведението на някаква система на основата на измервания, изпълнени върху друга система, която предварително е взаимодействала с разглежданата.

Статията е едно от важните „сражения” във „войната” между Айнщайн и Бор за отхвърляне, респ. обосноваване на пълнотата и изобщо принципите на квантовата механика и на квантовомеханичното знание. Контрааргументите на Бор приблизително са главно в това, че мисленият експеримент на Айнщайн е оправдан, но от него не следва непълнота на квантовата механика, понеже в крайна сметка нещата опират до ненарушаването на съотношението за неопределеност на Хайзенберг, което е природен закон и не може да се изисква някаква по-дълбока или по пълна причина, за да действа един природен закон.

По ирония на историята и Бор се оказва правият, и мисленият експеримент на Айнщайн-Подолски-Розен е не само релевантен, но и е едно от най-великите постижения на мисълта в квантовата механика.

Така е била зачената дисциплината „квантова информация”.

Схемата, предложена от тримата автори и по-късно придобила гражданственост като „парадокс на Айнщайн-Подолски-Розен”, а днес вече като „канали АПР”, „състояния АПР” и пр. е следната (Einstein, Podolsky, Rosen 1935: 779):

Има две системи $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{II}$, които взаимодействат от момента $\boldsymbol{t = 0}$ до момента $\boldsymbol{t = T}$, след което между двете части не се осъществява вече никакво взаимодействие. Освен това предполагаме, че състоянията на двете системи до момента $\boldsymbol{t = 0}$ са били известни. Тогава можем да изчислим с помощта на уравненията на Шрьодингер състоянието на обединената система във всеки следващ момент, в частност за всяко $\boldsymbol{t}$ по-голямо от $\boldsymbol{T}$. Да означим съответната вълнова функция с $\boldsymbol{\Psi}$. Обаче не можем да изчислим това състояние, в която всяка от двете системи ще остане след взаимодействието. Според квантовата механика то може да се получи само с помощта на последващи измервания, чрез процес, известен като "редукция на вълновия пакет".

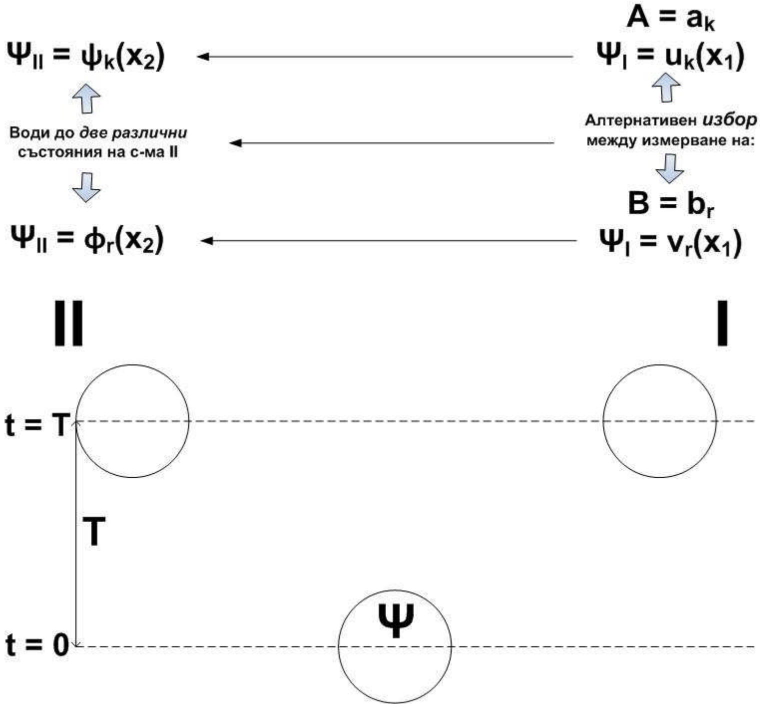
А каква е същността на този процес?

Да предположим, че в система $\boldsymbol{I}$ е измерена величината $\boldsymbol{A}$, при което е установено, че тя има стойност $\boldsymbol{a_k}$. От това се извежда заключението, че след измерването първата система остава в състояние, описвано от вълновата функция $\boldsymbol{u_k(x_1)}$, а пък втората система – в състояние с вълнова функция $\boldsymbol{\psi_k(x_2)}$. Това и е процесът на редукция на вълновия пакет: вълновият пакет на функцията $\boldsymbol{\Psi(x_1, x_2)}$, разложен като безкрайна сума по ортогоналните функции $\boldsymbol{u_n(x_1)}$ с коефициенти на разложението $\boldsymbol{\psi_n(x_2)}$, се свежда до един единствен член $\boldsymbol{\psi_k(x_2). u_k(x_1)}$.

Разбира се, в система $\boldsymbol{I}$ може да се измери вместо $\boldsymbol{A}$ величината $\boldsymbol{B}$ и да се установи, че тя има стойност $\boldsymbol{b_r}$, при което напълно аналогично вълновият пакет ще се редуцира, обаче ще се редуцира до други функции (не просто до друг член в разлагането по $\boldsymbol{A}$), които нека означим с $\boldsymbol{v_r(x_1)}$ и с $\boldsymbol{\varphi_r(x_2)}$.

Ето защо според авторите се вижда, че в резултата на две различни измервания, осъществени над първата система, втората система може да се окаже в две различни състояния, описвани от различни вълнови функции. От друга страна, понеже по време на измерването тези две системи вече не взаимодействат, то не могат да се получат реални изменения във втората система като резултат на каквито и да било операции върху първата система: според тях, това е само друга формулировка на положението за липса на взаимодействие между две системи:

> *„Следователно е* възможно да се припишат две различни вълнови функции *(в нашия пример ψ_k и φ_r)* на една и съща реалност *(втората система след взаимодействието с първата)"* (Einstein, Podolsky, Rosen 1935: 779).



Фиг. 1. Схема на мисления опит, предложен от Айнщайн, Подолски и Розен

По същество решението, което подробно ще се обсъди, за снемане на формално-логическото противоречие е въвеждане на една двойна реалност вместо „една и съща реалност”, така че двете вълнови функции съответстват на двата дуални аспекта на такава двойна реалност.

Съвременният коментар е, че Айнщайн, Подолски и Розен са открили **нов тип физическо взаимодействие, което принципно не е свързано с обмен на енергия или вещество. И тъкмо изучаването на този тип физически взаимодействия формира възникналата през 90-те години на XX век физическа дисциплина "квантова информация".**

Ходът на мислите в статията обаче е друг, а именно: понеже такова взаимодействие няма, то трябва да се приеме, че на една и съща реалност (втората система след взаимодействие с първата) могат да се съпоставят две различни функции, в примера – $\boldsymbol{\Psi_k}$ и $\boldsymbol{\varphi_r}$. Но $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ могат да се изберат така, че $\boldsymbol{\Psi_k}$ и $\boldsymbol{\varphi_r}$ да са собствени функции на два некомутиращи оператора, на които в система $\boldsymbol{II}$ съответстват някаква физически величини $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. Айнщайн и съавторите показват, че това е напълно възможно. Тоест, предполагаме, че $\boldsymbol{\Psi_k}$ и $\boldsymbol{\varphi_r}$ действително са собствени функции на някакви некомутиращи оператори $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, при което на $\boldsymbol{\Psi_k}$, съответства собствена стойност $\boldsymbol{p_k}$, а $\boldsymbol{\varphi_r}$ съответства на собствена стойност $\boldsymbol{q_r}$. В такъв случай, измервайки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, можем да предскажем с достоверност и без каквито и да е смущения или стойността на величина $\boldsymbol{P}$ (т.е. $\boldsymbol{p_k}$), или стойността на величината $\boldsymbol{Q}$ (т.е. $\boldsymbol{q_r}$).

Според критерия за реалност, цитиран в началото, в първия случай можем да смятаме за елемент на реалността величината $\boldsymbol{P}$, а във втория случай като елемент на реалността ще бъде величината $\boldsymbol{Q}$. Но двете вълнови функции $\boldsymbol{\Psi_k}$ и $\boldsymbol{\varphi_r}$ се отнасят към една и съща реалност.

> *По-горе показахме, че или 1) квантовомеханичното описание на реалността посредством вълновата функция не е пълно, или 2) ако операторите, съответни на двете физически величини, не комутират, то тези две величини не*

> *могат да имат едновременна реалност. Тръгвайки после от допускането, че вълновата функция наистина дава пълно описание на физическата реалност, достигаме до заключението, че две физически величини с некомутиращи оператори могат да имат едновременна реалност. По такъв начин, отрицанието на 1) води до отрицанието на единствената друга алтернатива 2). Оттук сме принудени да заключим, че квантовомеханичното описание на физическата реалност посредством вълнови функции не е пълно* (Einstein, Podolsky, Rosen 1935: 780)

Философското решение, предложено от Нилс Бор и известно под названието „квантово-механичен дуализъм" или „вълново-корпускулярен дуализъм", въвежда две дуални реалности. Така формално-логическото противоречие, фиксирано от тримата автори в пасажа по-горе се премахва, доколкото в първото и второто изречение „едновременна реалност" се употребява в различен смисъл:

В първото изречение заключението му трябва да се чете: „то тези две величини не могат да имат едновременна [недуална] реалност"; т.е. те „могат да имат едновременна [дуална] реалност". И тъкмо в този последен смисъл следва да се разбира заключението на второто изречение. С въведеното разграничение на реалност в две различни отношения формално-логическото противоречие изчезва, оттук и довеждането до абсурд на предпоставката „квантовомеханичното описание на реалността посредством вълновата функция не е пълно", така че по този начин доказване истинността на нейното отрицание не може да се състои.

По-близко до разбирането на авторите обаче е да се покаже, че 'едновременността' в „едновременна реалност" всъщност следва да се употреби и неявно е употребена в различен смисъл. В първото изречение става дума за релативистка едновременност, която поне по принцип може да се установи експериментално чрез обмен на светлинни сигнали. Във второто 'едновременността' се разбира неявно (според предпоставките на мисления експеримент, от който е изведена) като абсолютна, нютонианска едновременност по принципа на далекодействието.

Така се насочваме към двусмислеността на употребата на „едновременна реалност". От една страна, изглежда, че реалността трябва да се предпостави като абсолютна, като нелокална сцена, на която да може да се разиграе всеки опит за установяване на експериментална, релативистка едновременност. От друга обаче, тя ще се установи/ няма да се установи именно в резултат на този опит. Можем да повторим и тук типа изход, предложен от Бор чрез ‘дуализъм’: налице са две ‘дуални’ едновременности – релативистка и абсолютна.

Разбира се Айнщайн, бидейки инициаторът на релативистката революция, а също така клонейки по философски предпочитания към *монистичен* рационализъм, настоява неявно, но непоколебимо за монистична, а именно релативистка едновременност. Да видим доколко обаче подобен подход съответства на предпоставките на квантовата механика, в която наличието на макроуред, подчиняващ се на законите на нютоновата механика, е постулиран в нейните основи. Той може да се приеме за неподвижен, докато изследваният микрообект се движи с произволна скорост и често релативистките поправки са съществени. Така уредът въвежда абсолютна, а микрообектът – релативистка едновременност, или е налице своеобразна ‘дуална едновременност’ в самите основи на квантовата механика.

Сходен тип дуализъм е въведен и в *СТО*, и в *КвМ* с използването на комплексни числа в математическите им формализми. Например в *СТО* времето $\boldsymbol{t}$ и енергията $\boldsymbol{E}$ присъстват умножени по имагинерната единица $\boldsymbol{i}$, за разлика от координатите и импулсите, които са „реални”. Първите се отнасят по-скоро към системата като цяло, която е „неподвижна” и следователно легитимира нерелативистко описание, а вторите – до движещите се с произволна скорост една спрямо друга части, изисквайки в общия случай тъкмо релативистко описание. Изобщо подходът *цяло – части* позволява синкретично разглеждане на *КвМ* и *СТО*, въвеждайки такъв холистичен дуализъм и във втората, а заедно с това и на термодинамиката (която занапред ще се обозначава и чрез съкращението *ТД*).

От 1927 до 1935, скоро след създаването на основния формализъм на квантовата механика, се появяват няколко забележителни мислени експерименти (Yu Shi 2000), които кулминират в този на Айнщайн-Подолски-Розен. Сред тях трябва да се причислят мисленият експеримент с "фотонната кутия", обсъждан в дебата между Бор и Айнщайн, мисленият експеримент на Хайзенберг с микроскопа с гама-лъчи, Айнщайновата дифракция на единична частица и двупроцеповия опит и Файнмановата електронно-светлинна схема за двупроцепов опит.

Трябва да се изтъкне, че замислен като доказателство за непълнотата на квантовата механика, мисленият експеримент на Айнщайн, Подолски и Розен се оказва решаващ стимул за нейното развитие. Новото понякога е така зашеметяващо, че често е по-лесно да го приемем за опровержение на собствените му кълнове и предпоставки.

За нас също така представлява интерес възражението на Бор (Bohr 1935) срещу обсъждания в тази глава мислен експеримент. Според него, направеният извод за „непълнотата на квантовата механика" е некоректен, тъй като в използвания от авторите „критерий за физическа реалност" „съдържа двусмисленост що се отнася до значението на израза „без каквото и да е смущение на една система" (Bohr 1935: 700). Въпросният критерий, цитиран и от Бор, е: „те предлагат „критерий за реалност", формулиран както следва:@

> *Ако, без каквото и да е смущение на една система, можем да предскажем със сигурност стойността на една физическа величина, то съществува елемент на физическата реалност, съответстващ на тази физическа величина* (Bohr 1935: 696).

Двусмислеността на израза „без каквото и да е смущение на една система" произтича от съотношенията за неопределеност и невъзможността взаимодействието между обект и уред да бъде сведено под големината на константата на Планк, което съществено смущава изследвания микрообект. С други думи, в квантовата механика предпоставката на предложения критерий, въпросният „двусмислен израз", никога не се реализира дефинитивно, поради което понятието „елемент на физическата реалност", съответстващ на тази физическа величина" е изпразнено от съдържание.

> *Наистина* крайното взаимодействие между обект и измервателни средства, *обусловено от самото съществуване на кванта на действие – поради невъзможността за контролиране на реакцията на обекта върху измервателните инструменти, ако те следва да служат на своята цел – води до необходимостта от окончателно отказване от класическия идеал за причинност и радикална ревизия на отношението ни към проблема за физическа реалност* (Bohr 1935: 697).

Разбира се, в този случай

> *не става въпрос за механично смущение на разглежданата система в течение на последния критичен етап на измервателната процедура. Но даже на този етап е съществен въпросът* за влияние върху самите условия, които определят възможните типове предсказание по отношение на бъдещето поведение на системата (Bohr 1935: 700).

Би било добре да се обърне специално внимание на думите, подчертани от Бор и които изясняват особения тип смущение, представляващо неконтролируемото и несводимо под константата на Планк взаимодействие на уред и микрообект. Осъществява се избор, който се отнася до бъдещите предсказания. Но същевременно този избор представлява неконтролируемо смущение на измерването в съответствие със съотношението за неопределеност. И всичко това налага „окончателно отказване от класическия идеал за причинност”. Както се вижда и от други места в текста на Бор, той е привърженик и на „четвъртото” съотношение за неопределеност – между измерванията на величините време и енергия. Наистина, интервалът на неопределеност на времето – $\boldsymbol{\Delta t}$ – предполага възможност за взаимодействие на минали и бъдещи моменти в обратно пропорционална зависимост с интервала на неопределеност в баланса на енергията. Оттук, макар и да отсъства причинно смущение по отношение на отдалечен обект, е налице друг тип смущение. Тъй като изборът като условие за бъдещите предсказания представлява

> *присъщ елемент на описанието на всяко явление, към което терминът „физическа реалност” може да бъде собствено присъединен, виждаме, че аргументацията на споменатите автори не оправдава тяхното заключение, че квантовомеханичното описание е съществено непълно. Обратно, това описание, както се вижда от предшестващото изложение, може да се характеризира като рационално използване на всички възможности за еднозначно тълкуване на измервания, съвместими с крайното и неконтролируемо взаимодействие между обекта и измервателните инструменти в полето на квантовата теория. Действително, единствено взаимното изключване на които и да е експериментални процедури, позволяващи еднозначно определяне на допълнителни физически величини, което*

> *осигурява място за нови физически закони, съ-съществуването на които би могло да изглежда на пръв поглед непримиримо с основните принципи на науката. Тъкмо това е напълно новата ситуация по отношение на описанието на физически явления, която понятието за допълнителност цели да характеризира* (Bohr 1935: 700).

Следва да се обърне внимание на два момента в аргументацията на Бор: 1) той подчертава не вероятностния характер на квантовомеханичното предсказание, а стоящия в неговата основа *избор* ; 2) доколкото е привърженик на „четвъртото" съотношение за неопределеност (време и енергия), той дори не споменава явления на сдвояване (entanglement), предполагащи абсолютна едновременност.

Първо, както

> *в случая на избор между експерименталните процедури, подходящи за предсказване на позицията или на импулса на единична частица, която преминава през процеп в преграда, на нас ни се предлага от последния експеримент „свобода на избора", разглеждана с взаимно изключване между различни експериментални процедури, които позволяват еднозначна употреба на допълнителни класически понятия* (Bohr 1935: 699).

Необходимостта от дискриминативен избор е в основата на вероятностния характер на квантовомеханичните предсказания, доколкото ситуацията на избор е във фундамента на феноменологичното определение за вероятност като отношение между изборите на един тип алтернатива или алтернативи към всички възможни избори.

Още тук следва да се подчертае огромното значение на аксиомата за избора в концептуалните основи на квантовата механика, доколкото тя гарантира възможността за избор и при безкрайни съвкупности; както и една неопределеност в нейното формулиране: възможността/ невъзможността да се *повтори* безкраен избор. Фундаменталността на избора[11], а не на вероятността, която произтича от него

---

[11] За формулиране и изследване на фундаменталността на избора в интересуващия ни математико-философски аспект класически (разбира се, класически и в много други отношения)

при определени условия, десетки години по-късно ще намери израз в намирането на множество еквиваленти на неравенствата на Бел за единични експерименти, при каквито е налице избор, но не и статистическо осредняване за оценка на математическото очакване, съдържащо се в оригиналните неравенства.

Бор обосновава самия избор и по-точно неговата неизбежност *чрез принципа на допълнителността, чрез дуалния характер на реалността*, имплицитно монистична за авторите на „парадокса”.

> *В действителност, отказването във всяка експериментална установка от единия или от другия аспект за описание на физически явления – комбинирането, на които характеризира метода на класическата физика и които, следователно, в този смисъл могат да се разгледат като* допълнителни *една спрямо друга, – същностно зависи от невъзможността, в полето на квантовата теория, за точно контролиране реакцията на обекта върху измервателните инструменти, т.е. пренасянето на импулс в случай на измерване на позицията и изместването в случая на измерване на импулса. Тъкмо в това последно отношение каквото и да било сравнение между квантовата механика – обаче то може да е полезно за формалното представяне на теорията – е съществено ирелевантно. Наистина, във всяка експериментална установка, подходяща за изучаването на квантови явления, трябва да боравим не просто с невежество за стойността на определени физически величини, а с невъзможността за определяне на тези величини по недвусмислен начин* (Bohr 1935: 699).

Нека обърнем внимание върху втората част на изречението, имплицитно предлагаща определена концепция за свързване на субективната вероятност (мярка за нашето „невежество”) и обективната вероятност (отношение на благоприятните действително реализирани алтернативи към общия брой изобщо възможни): „боравим не просто с невежество за стойността на определени физически величини, а с невъзможността за определяне на тези величини по недвусмислен начин”. Става дума не „просто” за субективна вероятност, а за „невъзможност” за обективна вероятност.

е трудът на Уайтхед и Ръсел „Principia Mathematica”, по-специално главата „Избори” („Selections” – Whitehead, Russell 1910: 500-568).

Аналогично ‛субективното’ и ‛обективното’ са преплетени, или „сдвоени” и в самия избор – видяхме го вече като предпоставен.

Склонни сме да мислим избора, осъществяван от ‛субект’; обратно, природата пък е детерминирана, тя не избира, няма подобно свойство или способност, човекът е който я притежава. Тези предпоставени начини на възприемане, предразсъдъци намират израз и в множеството парадокси, по-скоро привидни, с които е обрасла квантовата механика, напр. – в Шрьодингеровата „жива и мъртва котка”: ще се обсъжда в следващата глава.

Така, досега изборът, разглеждан от Нилс Бор, имплицитно биваше възприеман като ‛субективен’: т.е. избор, извършван от изследователя, разбира се, човешко същество, чрез подготовката на един или друг тип експериментална установка с взаимно изключващ се избор между опити с дуални величини в квантовата механика. Самото постулиране обаче, на принципа на допълнителността, т.е. замяната на монистичната субстанция, каквато и да е тя, с дуалистична, при това взаимно изключваща се, предполага изборът между тези вече две първооснови също така като фундаментален. Негова мярка е информационната единица ‛бит’, която се дефинира тъкмо като осъществен избор между две равновъзможни алтернативи. Следва да се предположи, че и всеки микробект, или по-точно обект, изучаван от квантовата механика, се намира в подобно изначално „колебание”, ще рече колебателен процес, значи вълнови процес. Има множество опити и тълкувания на ‛вълново-корпускулярния дуализъм’. От гледната точка, защитавана в настоящата работа, асоциираната с квантовия обект дьобройловска вълна е брой избори за единица време. Оттук чрез добре известната формула, $\boldsymbol{E} = \hbar.\boldsymbol{\nu}$, на всеки информационен процес, следователно представляващ изменение на количество битове за даден период от време, би трябвало да се припише енергия, чийто произход не е ‛материален’ в смисъл, принадлежащ на обект, притежаващ ненулева маса на покой *или ненулева енергия на покой*. Засега само ще се отбележи, като коментарът ще остави за по-нататък, въпросът: на какво собствено трябва да се припише енергия на битове или на ‛кюбитове’[12] за единица време.

Второ, за разлика от Шрьодингер (както ще видим в следващата глава), Бор не само не обсъжда, но дори и не споменава някакъв аналог на

---

[12] За определението на „кюбит” вж. следващата бележка под линия.

verschränkten Zustände, тъкмо защото тяхното обсъждане предполага класическа, „макро” – интерпретация на времето и енергията.

> *Решаващата точка по отношение на измерванията на време в квантовата теория е напълно аналогична на аргумента, разглеждащ измервания на положения, разгледани по-горе. Точно както пренасянето на импулс към отделните части на апарата – знанието за относителните положения на които се изисква за описанието на явлението – се видя като напълно неконтролируемо, така обменът на енергия между обекта и различните тела, чието относително движение трябва да е известно за предвидената употреба на уреда, предизвиква някакъв анализ по-отблизо. Наистина,* изключено е по принцип да се контролира енергията, която отива в часовниците, без съществено да се смути използването им като времеви индикатори*. Тази употреба фактически напълно се основава на приетата възможност, предвид функционирането на всеки часовник, също и евентуалното му сравняване с друг часовник, на основата на методите на класическата физика. При това разглеждане, следователно, трябва да позволим една свобода в енергийния баланс, съответстваща на съотношението за квантово-механична неопределеност за спрегнатите променливи време и енергия. Тъкмо както във въпроса, обсъждан по-горе, за взаимно изключващия се характер на всяка еднозначна употреба на понятията за положение и импулс, в последния случай именно това обстоятелство влече отношението на допълнителност между всяко прецизно определяне на времето при атомни явления, от една страна, и некласическите черти на вътрешна стабилност на атома, разкривани чрез изучаване на преноса на енергия при атомните реакции, от друга* (Bohr 1935: 700-701).

В заключение бих искал да обърна внимание както на (2) експлицитния, така особено на (1) имплицитния паралел в обсъждането на Бор между мисления експеримент на тримата автори и някои основни положения в общата теория на относителността.

Първо, в своето кратко резюме на мисления експеримент (бележката под линия на страница 696, продължаваща и на следващата страница), той го резюмира като „завъртане” на някакъв ъгъл $\boldsymbol{\theta}$ между хилбертовите пространства на двата отдалечени микрообекта. Алюзията към общата теория на относителността, обсъждаща гравитацията като „изкривяване” на времепространството, т.е. като относително завъртане на две „плоски” пространства на Минковски, навежда на мисълта за описание на сдвояването като „изкривяване” на хилбертово пространство; както и в идеята му за виртуални осцилатори[13] (напр. в прочутата съвместна статия с Крамерс и Слатер – *Bohr, Kramers, Slater 1924*, – в която между другото се предлага и хипотезата за само статистическа валидност на закона за запазване на енергията на макроравнище чрез осредняване на множество отклонения от него на микроравнище). Това ни позволява да причислим Бор и неговите съавтори към предшествениците на идеята за физическо тълкуване на „осите” на хилбертовото пространство като „виртуални осцилатори”[14] и за взаимно еднозначно съответствие на елементите на хилбертовото пространство (квантовата механика) и

---

[13] Същата идея се използва при представянето на един „кюбит” (в дисциплината „квантова информация”) като сфера. „Кюбит” е съвкупността на всички възможни „нормирани” суперпозиции (т.е. с комплексни коефициенти $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ такива, че сумата от квадратите на модулите им е равна на единица: $|\boldsymbol{\alpha}|^{2}+|\boldsymbol{\beta}|^{2}=\mathbf{1}$) на две ортогонални състояния $|\mathbf{0}\rangle$ и $|\mathbf{1}\rangle$: $\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{0}\rangle+\boldsymbol{\beta}|\mathbf{1}\rangle$. Наистина всяка „ос” на хилбертовото пространство представлява един кюбит и е изоморфна на сфера в обичайното тримерно евклидово пространство. Линейно нарастващата честота на осите в хилбертовото пространство – $\boldsymbol{e^{in\omega}}$ ($\boldsymbol{n}$ – естествено число) – съответства на намаляваща дължина на вълната. Така хилбертовото пространство може да се онагледи като разпространение на сферична вълна в обратна посока на времето, докато пространството на Минковски – в обичайната права.

[14] Например бих посочил следния (без да е единствен) пасаж от статията: „Ще предполагаме, че даден атом в определено стационарно състояние ще комуникира непрекъснато с други атоми чрез пространствено-времеви механизъм, който е виртуално еквивалентен с поле на радиация, което, по класическата теория, би произхождало от виртуални хармонични осцилатори, съответстващи на различни възможни преходи към други стационарни състояния. Освен това ще предполагаме, че случването на процеси на преход за самия даден атом, както и за другите атоми, с които той е във взаимна комуникация, е свързано с този механизъм чрез вероятностни закони, които са аналогични на онези, които в теорията на Айнщайн са в сила за индивидуалните преходи между стационарни състояния, когато са осветени от излъчване. От една страна, преходите, които в тази теория са означени като спонтанни, се разглеждат от нашата гледна точка като индуцирани от виртуалното поле на радиация, което е свързано с виртуалните хармонични осцилатори, спрегнати с движението на самия атом. От друга страна, индуцираните преходи от Айнщайновата теория, се случват вследствие виртуалното излъчване в околното пространство, дължащо се другите атоми. ... тези предположения ... водят до картина що се отнася до пространствено-времевото случване на различните процеси на преход, от която наблюдаването на оптични явления в крайна сметка зависи, която е в съществено отношение различна от обичайните понятия. Наистина, случването на определен преход в даден атом ще зависи от първоначалното стационарно състояние на самия този атом и от състоянията на атомите, с които е в комуникация посредством виртуално поле на излъчване, но не и от случването процеси на преход в тези атоми” (Bohr, Kramers, Slater 1924: 790-791)

пространството на Минковски (специална теория на относителността), както и за съответен аналог на псевдоримановото пространство (общата теория на относителността) – „изкривено” хилбертово пространство. Такава връзка следва да се обоснове чрез допълнителността, чрез дуалния характер на реалността.

Второ:

> *Преди заключението все пак бих искал да подчертая връзката на великия урок, произлязъл от общата теория на относителността, с въпроса за физическата реалност в полето на квантовата теория. Действително, независимо от всички характерни разлики, ситуациите, разгледани в тези обобщения на класическата теория предлагат поразителни аналогии, които често са били отбелязвани. Особено, специалното положение на измервателните инструменти по отношение на квантовите явления, току-що обсъждано, изглежда близко аналогично с добре известната необходимост в теорията на относителността за поддържане на обичайно описание на всички измервателни процеси, включително рязко разграничение между пространствени и времеви координати, макар че самата същност на тази теория е в установяването на нови физически закони, при разбирането на които трябва да се откажем от обичайното отделяне на идеите за пространство и време* (Bohr 1935: 702).

Наистина аналогията е пълна, стига да поставим на мястото на двете „класически” несвързани понятия „време” и „пространство” – „прибор и микрообект”.

„Специалното положение на измервателните инструменти” и в двете визирани теории допуска още една интересна и изключително важна за последващото изложение аналогия. В тази връзка ще цитирам едно по-нова скица на общата теория на относителността (Рашевский 1967: 615), според която като „първа хипотеза, поставена в основата на общата теория на относителността” се посочва допускането, че макар и да не съществуват галилееви координати, в които метричната квадратична форма да придобива „плосък вид”:

$$\boldsymbol{ds^2 = - c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,} \qquad (1)$$

т.е. псевдоримановото пространство да се оказва псевдоевклидово, с нулева кривина, то все пак „съществуват координати, близки по своите свойства до галилееви”.

> *По такъв начин в безкрайно малка околност на точка в известен смисъл получаваме възможност да се върнем към галилееви координати. При това ще си позволим да разглеждаме локално галилееви координати не само в безкрайно малка, но и в крайна околност на точката* $\boldsymbol{M}$. *Необходимо е само да се вземе тази околност достатъчно малка, щото практически – от гледна точка на физическите приложения – нашите локално галилееви координати да остават неотличими от галилеевите … По такъв начин, макар построяването на инерциална отправна система (т.е. в галилееви координати) и да е невъзможно за пълното пространство на събитията като цяло, но практически е възможно за всяка отделна негова част, не твърде голяма по размери* (Рашевский 1967: 619).

> *Тогава от гледна точка на тази система,* ако тя е достатъчно малка по размери*, гравитационното поле изчезва. Чрез това обстоятелство и се характеризират локално инерциалните системи* (пак там: 620).

Ситуацията е обратна и симетрична на тази в квантовата механика. И двете теории се нуждаят от област, в която да се помести уред и в която да са валидни законите на нютоновата физика. Но ако макроуредът може да се приеме за безкрайно голям по отношение на микрообектите, изучавани от квантовата механика, същият той се разглежда като безкрайно малък по отношение на мегаобектите, в чиито размери ефектите на общата теория на относителността стават експериментално проверими. Добре известният български изследовател на философията и методологията на квантовата механика Сава Петров обръщаше съществено внимание на връзката между „принципа на Бор” в квантовата механика и проблема на Картан в космологията (Петров 1980: 159; Роженко 1973).

Възпитани от теорията на Коши за безкрайно малките като редици, *потенциално* клонящи към граници, интуитивно ги възприемаме като качествено еднородни с крайните величини. Ако обаче се отнесем към тях като *актуално* безкрайно малки в духа на прозренията на Лайбниц и строгото им обосноваване през 60-те години на XX век от Ейбрахъм Робинсън, те по-скоро ще се окажат *допълнителни*, *дуални* в смисъла на Бор спрямо крайните величини. Въпросът за границите на тъждественост на така дефинираните, изобщо по различен начин „безкрайно малки” е повече от интересен и с непосредствено отношение към осмислянето на явленията на квантова информация. Дълбоки и твърде интересни са разработките на Ален Кон за обосноваване на актуално безкрайно малките чрез компактни[15] оператори в хилбертовото пространство (Connes 1995: 6207-6218) и по този начин прехвърляне на мост между нестандартния анализ и квантовата механика. Можем да разглеждаме квантовите величини като актуално безкрайно малки, дуални на крайните величини във физическата физика. Първите обаче неизбежно трябва да се представят чрез вторите в процеса на измерване, използващ *макроскопичен* уред. В математическия формализъм, на този процес съответства замяната на функция с функционал (с аргумент не числова стойност, а стойност, която е функция, респ. оператор при даден базис). От философска гледна точка, измерването в квантовата механика осъществява един сякаш трансцедентен преход между актуално безкрайно малкото (квантовата величина: представена във формализма като оператор, респ. точка при зададен друг базис, в хилбертовото пространство) и крайното (нейната измерена стойност: представена чрез числовата стойност на функционала при стойност на аргумента операторът, респ. функцията, съответстващ(а) на квантовата величина).

Дали отношението на крайна величина към актуално безкрайно малка съвпада с отношението на актуално безкрайно голяма към крайна? Такова съвпадение би обосновало в качеството на математически формализъм една „относителна” формулировка на квантовата механика, при каквато тя ще може да се прилага и за макрообекти, много по-малки от космологичните ...

За съжаление обаче, поводът, взет от алюзията, предложена от Бор, между квантовата механика и общата теория на относителността, не е достатъчен за подробно вникване в проблема и то следва да се отложи за по-нататък.

---

[15] Компактните оператори са непосредственото обобщение на матриците. Те са затворената обвивка в нормална (униформна) операторна топология на редица крайномерни оператори (матрици). Всички резултати от теорията на крайните матрици лесно се прехвърлят към компактните оператори. Ален Кон „пише началото на дълъг речник, показващ как класическите понятия се появяват на „квантово-механична” или спектрална сцена” (Connes 1995: 6208): комплексната променлива – като оператор в хилбертовото пространство; реалната променлива – като самоспрегнат оператор в хилбертово пространство; безкрайно малката – като компактен оператор в ХП и т. н.

ШРЬОДИНГЕРОВИТЕ „VERSCHRÄNKTEN ZUSTÄNDE”

Съвременен поглед към статията – Горката „котка” – Отново за аргумента АПР – „И точки, и крайни интервали” – Удвоена класическата механика – Обективност поради обективността на уреда – Целостта – „Теоремата за свободната воля” – Подробно за „котката” – Самите „verschränkten Zustände” – Сдвояване на знанието за тях – $\boldsymbol{\Psi}$*-функцията: „описание на състояния” и „каталог на очакванията” – Математическото очакване – Границите* ignorabimus *– Знанието за система и за нейните части – Набеденото влияние на субекта – От „котката” към един „непокътнат-и-смачкан стол” – Декохеренция и кохерентност – Коментарът на Шрьодингер за аргумента АПР – „Възражение срещу особеното положение на времето” – Паули срещу Бор, Крамерс и Слатер – „Времето е „само число” и законът за запазване на енергията – „Принципът на Мах”, или защо Айнщайн въвежда „космологичната константа” – Почти незабележимото „почти” – Светлина за „тъмните” маса и енергия – Енергията* "$\boldsymbol{E} = \hbar\boldsymbol{\nu}$" *– Енергията* "$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{mc^2}$" *– „Да приравним или не тези две енергии? – това е въпросът” – Вълната на дьо Бройл и нейната честота – Идеята за физическа величина на информацията и „*релативитска *енергия” – Нарушава ли се принципът на Мах? – За взаимното познание на части в система – Познание „само по себе си” е елемент на света*

В работата си "Съвременното състояние на квантовата механика" (Schrödinger 1935) Ервин Шрьодингер анализира "подводните камъни" при описанието на квантовомеханичните процеси на измерване и формулира четири основни положения, които се свеждат до това, че състоянията на обектите на квантовия свят притежават следните свойства:

1. Суперпозиция: състоянията се описват чрез линейна суперпозиция на основните състояния.

2. Интерференция: резултатите от измерването зависят от относителните фази на амплитудите в тази суперпозиция.

3. Сдвояване (entanglement): пълното знание за състоянието на цялата система не съответства на такова пълно знание за състоянието на нейните части.

4. Неклонируемост и неопределеност: неизвестното квантово състояние е невъзможно да се клонира, а също да се наблюдава без да се внесе смущение.

Третото и четвъртото положение доскоро не бяха широко обсъждани (Килин 1999).

Квантовият обект за разлика от класическия е изначално вероятностен. Обаче вероятностният характер на квантовия обект не се свежда до обичайно възприемана неопределеност, свързана, например, с непълнота на знанието за обекта. За описанието на квантовия обект се използва понятието "състояние". Казвайки, че обектът се намира в определено състояние, се подразбира, че може да се разгледа каталог (според термина на Шрьодингер), или което е същото, вълнова функция, вектор на състоянието, или матрица на плътността, които съдържат информация за възможните резултати от измерванията върху този обект. Доколкото резултатите от измерванията върху обект, чиято подготовка е едно и съща, в общия случай ще се изменят при различните опити, то векторът на състоянието трябва да дава и дава статистическа информация (функция на разпределението) за резултатите от съвкупност едни или други измервания. При измерването кохерентната суперпозиция се разрушава и се редуцира до ново състояние, което се определя чрез типа измерване. Суперпозиционните състояния следва да се различават от сместа от състояния, която се описва чрез матрицата на плътността и която по същество се явява класическо състояние, тъй като в собствено смесено състояние система може да се намира алтернативно или в едно, или в друго състояние, докато в суперпозиционното състояние системата се намира едновременно в няколко състояния, макар това кохерентно състояние да не е пряко наблюдаемо, понеже всеки процес на измерване води до неговото редуциране в едно конкретно състояние. Тази принципна разлика на суперпозиционното състояние се проявява в допълнителни интерференчни (недиагонални) членове в матрицата на плътността. В частност, от това следва, че получаването на ненулев резултат при измерването на физическа величина, операторът на който има ненулеви само недиагоналните матрични елементи (например диполният елемент на атома) е възможно само в този случай, когато системата се намира едновременно в няколко състояния.

За да обърне внимание върху необикновения характер на суперпозиционните състояния, Шрьодингер привежда пример, който обърква обичайното ни възприемане на света. Това е прочутата му алегория за живата-и-мъртва котка. Да предположим, че в стоманен сандък се намира флакон с отрова, който може да се счупи посредством механизъм, който се пуска при разпадането на един радиоактивен атом. Намиращата се в сандъка първоначално жива котка в резултат на разпадането на един атом може да се окаже мъртва. Обаче щом състоянието на радиоактивния атом е квантова суперпозиция на състояние "разпаднал се" и състоянието "неразпаднал се", то и състоянието на котката е суперпозиция на състоянието "живо" и състоянието "мъртво". Доколкото в микроскопичните системи, такива като атоми и молекули, суперпозицията на състоянията е обикновено явление, а в макросистемите не се наблюдава, то трябва да има причина за разрушаването на тези състояния.

Нека оставим за няколко пасажа времето и енергията настрана. Доколко обаче всеобщо признатите първи три, т.е. „канонизираните" съотношения за неопределеност се съотнасят със закона за запазване на импулса, чието съвместно използване се изисква от „мисления експеримент" на Айнщайн – Подолски – Розен, схематично представен от Шрьодингер? В класическата работа на Еми Ньотер (Noether 1918) законът за запазване на импулса се извежда от групата на транслациите съответно по трите пространствени оси. Но не съм срещал такова доказателство, което да е негов „квантово-механичен вариант", при който „точките" по пространствените оси произволно да флуктуират по големината на своята дължина, както изискват съотношенията за неопределеност.

Така, в обсъждания мислен експеримент се оказват съчетани две противоречиви изисквания за „точките" от пространствените оси: те са точки (за да е изводим прилаганият закон за запазване на импулса) и заедно с това са произволни крайни интервали, за да е приложимо съотношението за неопределеност. Това – „и точки, и крайни интервали" – е по-силно от станалото нарицателно противоречие в инфинитезималното смятане за безкрайно малките, или диференциалите като „нули и не-нули", намерило непротиворечиво решение и като „потенциално" безкрайно малки (Коши) и като „актуално" безкрайно малки (Робинсън). Не може да се твърди, че подобно, „хитро" и прецизиращо, непротиворечиво развитие на съвременният формализъм на квантовата механика и информация не съществува (а може дори да е вече реализиран, но все още да не е широко известен, поне в това му качество), а че последният оставя тази врата, възможно все още незабелязана.

Нека сега опитаме една още по-силна хипотеза, а именно, че търсеният обобщаващ формализъм не е изключено да съвпада с наличния добре известен, но при друго негово тълкуване. Към тази теза ще се връщаме и впоследствие, по протежение на цялата работа.

Както многократно се е изтъквало и вече се е превърнало в добре известно общо положение, труизъм, квантовата механика за разлика от всички други физически теории изисква и предварително предпоставя класическата механика, която описва измервателния уред, най-грубо казано, чрез идеализацията за абсолютно твърдо тяло. Следва ли тогава да се учудваме, че ще възникват проблеми с теориите на относителността, които като механизъм за изчисление наистина обобщават класическата механика, но в концептуално отношение я отхвърлят (например ключовите 'далекодействие', 'едновременност', 'независимост на време и пространство') ?

Квантовата механика е „два пъти приложена" класическа механика. Първият път това е механика на микрообекта по отношение на измервателния уред, който встъпва в качеството на абсолютна отправна система и по отношение на която микрообектът е 'материална точка'. Вторият път това е механика на микрообекта „сам по себе си", в която той участва като материално тяло с крайни размери, крайно изменение на импулса и енергията, за краен интервал от време.

Кое принуждава към обединяването на явно противоречащото си „и точка, и краен интервал" в рамките на една и съща теория? Две фундаментални изисквания за всяка научна теория, а именно за емпиричност, опитна или експериментална проверяемост, и за обективност. Доколкото всички наши уреди, както и самите ни сетива, са макро-предмети, се въвежда „класическа механика 1", а доколкото микрообектите са материални тела – „класическа механика 2". Този сякаш неестествен брак, обаче е узаконен и възвестен от фундаментална физическа константа – константата на Планк, която изключва двете, ако са проведени докрай, взаимно изключващи се описания в *КлМ1* и в *КлМ2*, да бъдат сблъскани в реално противоречие.

Впоследствие така скицираната позиция ще бъде предмет на многократно и по-обстойно обсъждане. Тук ще анализираме само някои аспекти, имащи пряко отношение към обсъждането на Шрьодингер:

1. Валидността на закона за запазване на енергията едновременно по отношение на описанията в *КлМ1* и в *КлМ2* позволява „да се прехвърлят" обекти между тях, запазвайки идентичността[16].

---

[16] Споменатото тук положение не бива да се смесва или обърква с т. нар. неразличимост на квантово-механичните обекти.

2. Във връзка с това се постулира като „истинско време" – „времето на макроуреда", запазващо по отношение на макрообекта всички съществени характеристика на Нютоновото абсолютно време. С това постулиране каквото и да било „време на микрообекта" престава да се разглежда: предпоставя му се имплицитно като собствено време винаги само-тъждественото квази-абсолютно време на уреда.

3. С узаконяването на такова обаче нерелативистично време на макроуреда, в теорията неминуемо навлиза „сдвояването", съответните му състояния и квантовите корелации, философски оказващи се с необичайната характеристика „да бъдат обективни поради обективността на уреда". Последният, да припомним, в квантовата механика е неотстраним и участва в нейните предпоставки, постулати, „условия за възможност". Изпреварвайки изложението, може да отбележим, че поразяващата въображението свръхкорелираност на квантовите корелации при нарушаване на неравенствата на Бел се дължи тъкмо на добавъчна, равносилна и собствено казано, неразличима обусловеност на квантово-механичния опит „и от уреда" – не само „от обекта". Уредът не е „скрит", а добре известен и всъщност предпоставен параметър, освен това той е нелокален по отношение на микрообекта.

4. Объркването на уреда с експериментатора и дори с неговото съзнание или воля, характерно по-скоро за философските разсъждения на някои от великите физици, произтичат от дълбоко вкорененото и мъчително трудно рефлектиране на фундаменталната предпоставка на класическата физика и познание за прозрачност на измерването, респ. на уреда. В квантовата механика, тя не е валидна, но оставайки валидна като нерефлектируем предразсъдък в умовете на изследователите, ги принуждава – впрочем напълно в духа на картезианската традиция – да прехвърлят неотстранимото влияние на уреда върху „аподиктично съществуващия аз" на субекта на познание.

5. Не можем обаче да гледаме на квантовите корелации като на някакви епифеномени, макар и неотстраними, но произтичащи от „несъвършената" структура на теорията, изкушила се или принудена да въвлече самия уред и чрез него самото изследване в самото себе си, създавайки прецедент за смесване на метаравнището с обектното равнище. По-скоро това е общият случай, който легитимира обективното съществуване на квантови корелации, вероятност, информация „сами по себе си" и от който нашата привична гледна точка към тях, а именно като корелации, вероятност, информация ***на нещо*** или в нещо, е граничен частен слу-

чай, в известен смисъл пренебрежим. Гарантът и възвестителят на тази донякъде смущаваща, объркваща и плашеща нова обективност или „некласическа рационалност” е несъмненото обективно съществуване на фундаментална природна константа – константата на Планк, – чрез което е постигната и обусловена непротиворечивостта на двойната позиция на квантовата механика.

6. Но заедно с това границата между познание и съществуване, в известен смисъл между ‵обект′ и ‵субект′ се размива по един неочакван начин, съществено различен от този на редица тълкувания на квантовата механика от миналия век, изразявайки се твърде старомодно и неточно, в „идеалистическа насока”. Необходимо е в общия случай разглеждането на две равнища за всеки обект: неговото собствено и на целостта, към която принадлежи. Второто, чието наличие експериментално се верифицира при достатъчно голяма количествена разлика между обекта и целостта, поражда обективни информационни отражения между частите, корелации сами по себе си, на които тъкмо целостта е субстратът, но които на равнището на изучаваните микрочасти, микрообекти се представя като безсубстратно.

Целостта е физическо явление, с физически измерими експериментални ефекти. В този смисъл можем да говорим за „обективно знание”, изразяващо се във взаимно ограничаване на степените на свобода между частите, при което те се отнасят към една обща цялост.

По-нататък ще обсъдим необходимостта от две равнища на цялост за квантовите корелации: едното е макроравнището на самия уред, второто е цялост на микроравнище, към която са принадлежали във фиксиран момент от миналото понастоящем пространствено разделените и корелиращи микрообекти.

Имайки предвид квантовите корелации, можем да говорим за „обективно отражение” между частите на една цялост по отношение на общата цялост, а ако се изразим фигуративно: микрообектите „знаят” за поведението на другите микрообекти в целостта. Това, разбира се, е метафора: нейното основание е, че всяко познание на човека изгражда модел на обекта, при което идеалът – „точното отражение” – се стреми към максимално ограничаване на степените на свобода на системата „обект – модел”. По аналогия, за всяко подобно взаимно ограничаване на степените на свобода, подобно в смисъл, че сякаш липсва материален носител на това ограничаване, може да се използва метафората за обективното знание: чрез нея корелиращите микрообекти се оприличават на знаниева система от типа „обект – модел”.

Уместно е в тази връзка да се обърне внимание на „теоремата за свободната воля” (Conway, Kochen 2006; 2008), според която – в една по-философска интерпретация, предложена обаче от самите автори, –

> *ако ние хората имаме свободна воля, то и елементарните частици вече имат свой собствен дял от тази ценна стока* [commodity]. *По-точно, ако експериментаторът свободно избере посоките, в които да ориентира своя уред при определено измерване, тогава отговорът на частицата (за да бъдем педантични – отговорът на вселената близо до частицата) не е определен от цялата предишна история на вселената* (Conway, Kochen 2008: 1)[17].

По същество аргументът е видоизменение на „парадокса” АПР, при което се приемат три аксиоми[18], фактически съответно сродни със: първата – с теоремата Кохен – Шпекер (Kochen, Specker 1967); втората – с *постулиране* на квантови корелации; третата – с лоренцова инвариантност (или както е в първоначалния вариант – 2006 – с крайна скорост на предаване на информацията). Строго се извежда при тези условия факт, който може да се нарече „квантова корелация на свободния избор”. Ако експериментаторът при микрообекта ***B*** свободно избира експеримента, то неговата свободна воля неминуемо корелира и се отразява в

---

[17] Би могло да се приведе следният цитат от статията на Шрьодингер „Равенство и относителност на свободата”: „Защо е почти невъзможно да се даде точно определение на понятието за свобода? Ами понеже свободата на индивидите намира своето естествено и единствено оправдано ограничаване в равната свобода на другите индивиди” (Schrödinger 1984(IV): 356). Всъщност в приведения цитат, макар под „индивид” да се разбира човек, това не е явно посочено, позволявайки чрез обратен отблясък да се ограничава „свободата на електрона” чрез равната свобода на другите квантови обекти. В друга своя статия пише: „Много изтъкнати научни работници, особено физици, са се опитвали да играят с идеята, че *явната недетерминираност* на одушевената природа, тоест на живата материя, би могла да се свърже с теоретичната недетерминираност в модерната физика. Това, което прави тази игра толкова очарователна и вълнуваща е очевидно надеждата (или откровена, или тайна) да се извлече от *новата* физическа догма *модел на свободна воля*, която старата би отрекла да се получава. Смятам тази надежда за илюзия, поради следните общи причини” (Schrödinger 1984(IV): 364). Тези „общи причини” са доста интересни, но биха изисквали самостоятелен обстоен анализ, поради което ще се ограничим само до цитираното становище.

[18] Тяхното пълно осмисляне от философска гледна точка изисква контекста, който ще се въведе едва в първа глава на втора книга, посветена на неравенствата на Бел и по-точно там, където става дума за „другия им край”.

аналогично качество на микрообекта $\boldsymbol{A}$, който е отдалечен на произволно разстояние. Ако знанието е оприличимо на ограничаване на степените на свобода на модела по отношение на обекта, то „теоремата за свободната воля” огледално надарява модела с толкова степени на свобода, колкото притежава обектът. И ако в качеството на обект се разгледа самият експериментатор, то поведението на микрообекта $\boldsymbol{B}$ също – поради двойното постулиране и на квантови корелации, и на лоренцова инвариантност – също се оказва свободно.

От друга страна обаче, можем да говорим за квантовите корелации като „всеобщо свойство на материята” или дори като за „всеобща субстанция” (може би не единствената), като за всеобща основа на познанието. За да дадем пример с рязка смяна на мащаба, можем да погледнем на вселената като на такава цялост, по отношение на която обективно са измерими аналогични корелации между частите на някоя от заобикалящите ни макро-системи, да речем, човешкото тяло.

7. Сливане на обективната и субективната вероятност по строго определен математичен закон, при което, ако развием, спомената малко по-горе метафора, вероятността на едно събитие да се случи при дадена част нараства (респ. намалява) от „очакването” на останалите части в рамките на определена система за случването (респ. неслучването) на това събитие. Нещо повече, двете компоненти на вероятността са огледално заменими, при което като обективна вероятност може да се разглежда „очакването на системата”, т.е. очакването на частите на системата, а като субективна – пак с метафора – един все едно конформистки „стремеж на дадена част да оправдае очакванията на системата”.

Между другото, може да се отбележи, че разграничението между субективно и обективно, като всяко познавателно човешко разграничение е относително и има своя ограничена сфера на приложение. В областта на квантовата механика и информация в някакъв смисъл и трудно определима и контролируема степен се оказваме отвъд подобна дистинкция.

Двете описания, а именно *КлМ1* и *КлМ2* се оказват примирени, но и взаимно изолирани, в реалната и имагинерната част на всяка стойност в самата $\boldsymbol{\Psi}$-функция, при което е налице само некомутативност, но не и непременна свързаност на реалната, респективно на имагинерната, част с *КлМ1* или *КлМ2*. Едната представя едната, втората – другата, но коя – коя е точно – е без значение и не следва от други съображения. Добре известно е, че квадратът на модула на всяка нейна стойност, според тълкувание, приписвано на Макс Борн (Born 1927D; 1927P; 1926ZQ; 1926ZW; Born, Fock 1928; Born 1954), се приема като мярка за вероятността за случването на събитието, представляващо измерването на съответната стойност на физическата величина, явяваща се оператор върху тази ***Ψ***-функция. Към него само добавяме собствена съдържателна интерпретация също така на реалната и на имагинерната част на комплексното число, представляващо стойността на ***Ψ***-функцията по начина, описан по-горе.

Квантовите корелации обаче могат да са налице и при отсъствие на вероятности, при което те могат да се наблюдават в единичен експеримент, а не както е в по-традиционния вариант – статистически: в достатъчно голямо множество от експерименти, основавайки се на вероятностни неравенства между математически очаквания (така е в оригиналните неравенства на Бел). Същата схема – без вероятности – е използвана в „теоремата за свободната воля”[19].

Това, което обаче е феноменологичен фундамент на понятието за вероятност и което остава и при експерименти за „квантови корелации без неравенства” (а също така е налице в аксиомите, от които е изведена „теоремата за свободната воля”), е ***изборът***. Ако се опитаме да въведем подобна по-първична основа и за тук споменаваната концепция „и точка, и интервал”, то ударението следва да падне върху това, че в интервала ***се избира*** една точка. Изборът свързва множество възможни алтернативи (преди избора) с една действителна – след избора. Така изразът „и точка, и интервал” се перифразира „и след, и преди” избора.

Сега ще си позволя да приведа пълния точен цитат на параграфа, в който се въвежда превърналата се едва ли не в „култово ян-и-ин дао” на квантова механика „жива-и-мъртва котка” на Шрьодингер:

> *Могат да се конструират и съвсем гротескни случаи. Котка се затваря в стоманена камера заедно със следната адска машина (която се подсигурява срещу пряка намеса от котката): в гайгеров брояч се намира мъничко*

---

[19] „Забележете, че нашето доказателство не засяга „вероятности” или „състояния”, които да ги определят, което се дължи на факта, че тези теоретични понятия са водили до много объркване. Например, често се казва, че вероятностите на събития на едно място, могат мигновено да се променят от събития в друго, пространствено-подобно отделено местоположение, но дали това е вярно или даже безсмислено не е от значение за нашето доказателство, тъй като никога не се отнасяме до понятието за вероятност” (Conway, Kochen 2008: 1).

> *количество радиоактивна субстанция, толкова малко, че в течение на един час* би могло *да се разпадне един от атомите, също толкова вероятно обаче и нито един; случи ли се, то се включва броячът и задейства чрез релето чукче, което ще разбие колбичка с циановодородна киселина. Ако се остави цялата тази система сама на себе си в течение на час, то ще се казва, че котката е още жива,* ако *междувременно нито един атом не се е разпаднал. Първият разпад на атом щеше да е отровил котката.* $\boldsymbol{\Psi}$*-функцията на цялата система би довела до израза (с извинение за него), че живата и мъртва котка са смесени или размазани в еднакви пропорции* (Schrödinger 1935: 812):

Фиг. 2. Илюстрация на гротескния мислен експеримент с „живата и мъртва” котка

Коментарът на този и на предхождащия го пример (който може да се разглежда като „негротесков” вариант на „живата-и-мъртва котка”) е следният:

> *Типичното в тези примери е, че неопределеността, ограничена първоначално до атомни размери, се превръща в макроскопична неопределеност, която може да се* разреши *чрез пряко наблюдение. Това ни пречи да оставим валиден по толкова наивен начин „размития модел” като образ на действителността. Сам по себе си той не съдържа нищо неясно или противоречиво. Това е разлика между размазалата се или нерязко фокусирана фотография и снимка на облаци и валма мъгла* (Schrödinger 1935: 812).

Особената ценност на този мислен експеримент е, че свързва в едно цяло – и може би чрез това довежда до противоречие – микросистема (разпадащият се атом), описван термините на *КвМ*, и макросистема, описвана и в ежедневния ни опит чрез причинна връзка, която би трябвало да „прехвърля" квантово-механичното описание на макроравнище. За котката се казва, че е в състояние „жива-и-мъртва", *ако не можем* да погледнем пряко и да се уверим, в кое от двете взаимно изключващи се състояния се намира котката. За разпадащия се атом обаче е безусловно ясно, че *не можем* да погледнем пряко, без участието на макроприбор, в случая – гайгеров брояч. Гайгеровият брояч в очакване може да се оприличи на камък на ръба на скала, при което съвсем леко побутване ще претъркoли камъка през ръба и ще предизвика каменна или снежна лавина. При това побутването е несъизмеримо по-слабо от предизвикания наблюдаван ефект.

Примерът оголва по един наистина гротесков начин двойствената – и единствена сред научните теории – структура на квантовата механика да е теория за системата „изучаван обект – измерителен прибор". Въвеждането на суперпозиционно състояние, което нерядко бива мислено като състояние „само по себе си" на микрообекта, произтича от постулирането на времето на макросистемата (прибора) като абсолютно и следователно, и в качеството на време и за микрообекта. Собственото време на микрообекта „сам по себе си" – например определено като обратно пропорционално на масата от формулите $\boldsymbol{E} = \hbar\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{mc^2}$ (където $\boldsymbol{\nu}$ е честотата на дьобройловската вълна, асоциирана с частицата, $\boldsymbol{E}$ – енергията, $\boldsymbol{m}$ – релативистката маса на микрообекта, $\hbar, \boldsymbol{c}$ – съответно константата на Планк и на скоростта на светлината във вакуум) – е много „по-бавно", „дължината на неговото настояще" е много по-голяма. Получава се ефект както при дълга експонация на бързо движещ се обект, той „се размазва", „размива се", но той не е такъв „сам по себе си", няма облика на „облаци и валма мъгла". Чрез гротескния пример Шрьодингер по-скоро ни насочва към философски размисъл, метафизичен по отношение на принципните емпирични граници на квантовата механика, за битието на микрообекта „сам по себе си", чрез скрита отразена парабола *неявно иронизирайки* и една представа за микрообекта обратно по подобие на нашия макроопит – атомът е или �'читав', или 'разпаднал се', така както котката е или 'жива', или 'мъртва'.

Заедно със суперпозиционните състояния, Шрьодингер разглежда и т. нар. сдвоени състояния, които са необходими за описанието на състоянията на съвкупната система, образувана от няколко части и при това възможно е да са пространствено разделени. Като пример за такива състояния може да послужи състоянието на полето и излъчилият го атом. Сдвоените състояния се представят с примера на атом с две равнища и поле. Нека предположим, че атомът прелита през област на взаимодействие с полето. След кратко време на взаимодействие атомът и полето се оказват пространствено разделени. Обаче състоянието на общата система се оказва взаимно зависимо, сдвоено, понеже състоянието, в което се намира полето, силно зависи от състоянието на атома. При това времето на живот на такова сдвоено състояние може да бъде много повече от времето на взаимодействие (Килин 1999). Също така могат да се представят сдвоените състояния и посредством фотонни снопове с противоположна поляризация. В общия случай всеки фотон от единия сноп е свързан с фотон от другия, доколкото общото състояние не се изразява чрез произведение на вълновите функции на двата фотона. При това връзката е много по-силна отколкото е възможно при класическа корелация.

По-нататък този пример се обсъжда подробно в главата "Неравенствата на Бел" и във връзка с експериментите, потвърждаващи нарушаването им. При поляризационни състояния на Бел за фотони (сдвоени състояния) има четири основни състояния. Всяко от тези сдвоени състояния притежава забележително свойство: веднага щом чрез някакво измерване на един от фотоните се проецира негова определена поляризация, поляризацията на фотона от другия сноп се оказва също определена. Как измерването, осъществявано върху една частица, може мигновено да влияе на състоянието на друга, която може да е отдалечена на произволно състояние?

Освен това сдвоените състояния демонстрират още едно парадоксално, на пръв поглед, свойство, отбелязано от Шрьодингер. Пълното знание за системата не предполага също такова пълно знание за състоянието на нейните части. Фактът на разрушаването на квантово състояние в резултат на въздействията, осъществявани от измерващата апаратура, позволява да се говори за квантовото състояние като за твърде деликатно, изплъзващо се от опитите да се получи информация за обекта. Известното съотношение за неопределеност е една от проявите на такава лабилност. Друга ярка проява е теоремата за невъзможността да се клонира отделен квантов обект. Под клониране се разбира създаване на точно копие на изходния микрообект при запазването му в същото състояние, в което той е бил преди операцията на клониране и което състояние е неизвестно.

Следва да се отбележи – както прави впрочем и сам Шрьодингер, – че в качеството на „причина” на сдвоените състояния встъпва физическо взаимодействие в минал или настоящ момент. Квантовите корелации се явяват все едно негово последействие и след като бъде прекратено:

> *Ако съществува „сдвояване на предсказанията”, то очевидно може да бъде отнесено обратно само към това, че някога по-рано двете тела са образували в собствен смисъл една система, т.е. взаимодействали са и са оставили едно на друго* следи (Schrödinger 1935: 827).

Заедно с това обаче, освен целостта на микросистемата, се изисква и цялост на уреда, за да може първата да бъде регистрирана в качеството на физическо явление с наблюдаеми ефекти. Изобщо, в изглежда онтологичната структура на измерването е включена, още поради това, че резултат от него е *число*, *без дименсия*, то да представлява отношение между еталон, задаващ *качествената природа* на измерваното и самата измервана величина[20]. Така в качеството на еталон за целостта на микросистемата встъпва „абсолютната цялост” на уреда като макрообект. В общоприетия математически модел на квантовата механика чрез хилбертово пространство еталон за целостта е неговият базис. Промяната, фигуративно казано „движението на целостта”, би се изразила в промяна на неговия базис, нещо, което е по принцип изключено в *КвМ*, където дори се приема, че хилбертовото пространство е едно, с други думи, *целостта е една*. Още по-малко може да се обсъжда преобразуването на цялост, на квантови корелации – в някоя от обичайните физически величини на микрообекта, т.е. на качество – в количество.

Шрьодингер обаче говори не за сдвояване на самите микрообекти, а на нашето знание за тях:

---

[20] Например спрямо една от нас въведена отправна система, свързана със светлината, измереното число би представлявало отношение на скоростите на разпространение на обекта и на светлина, обичайно означавано като $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$

> *Когато две отделни тела, които са известни максимално поотделно, идват в ситуация, че взаимно си действат и отново се разделят, то закономерно се появява състоянието, което нарекох* сдвояване *на нашите знания за двете тела. Общият каталог на очакванията се състои отначало от логическа сума на отделните каталози; в течение на процеса той се развива неизбежно по известен закон (за измерване изобщо не става дума). Знанието остава максимално, обаче в края, когато телата отново са се разделили, знанието не се разпада на логическа сума на знанието за отделните тела. Онова, което* от това *още се запазва, може евентуално да е станало много по-малко от максималното знание. Забелязва се голямата разлика с класическата теория на модела, където наистина при известни начални условия и известно развитие крайните състояния поотделно са известни точно* (Schrödinger 1935: 827).

При това обаче, той не прави разлика между самите микрообекти и нашето знание за тях, тъй като те представляват именно „нашето знание за тях”:

> Недостатъчността на **Ψ**-функцията в качеството на замяна на модела се обуславя изключително от това, че не винаги я има (Schrödinger 1935: 826).

Това, както видяхме, произтича от особената епистемологична позиция, която е принудена да заеме квантовата механика, след като знанието в нейните рамки по принцип не може да е за обекта „сам по себе си”, а за системата „уред – микрообект”. С философски термини, знанието е част от битието, част от самото съществуване.

И съвременното общоприето определение за сдвояване, по същество съвпада с даденото от Шрьодингер в неговата пионерска работа. Два обекта са сдвоени, когато ***Ψ***-функцията на системата не може да се представи като произведение от ***Ψ***-функциите на съставящите я части[21].

---

[21] Всъщност тя не може да се представи като произведение на каквито и да било ***Ψ***-функции, на които да може да се придаде физически смисъл.

> *Когато две системи влизат във взаимодействие, то, както видяхме – не и техните* ***Ψ****-функции – а* [те] *веднага престават да съществуват, и на тяхно място встъпва една единствена за общата система. Тя се състои, да го припомним накратко, най-напред просто от* произведението *на двете отделни функции; която функция на общата система – понеже всяка от двете отделни функции зависи от напълно различни променливи в сравнение с другата – зависи от всички тези променливи и е функция в „пространство с много по-голям брой измерения" в сравнение с отделните функции. Веднага щом системите започнат да си взаимодействат, общата функция престава да бъде произведение, и след като системите отново се отделят, не се разпада отново на множители, които да позволят да се припишат на системите поотделно. Така разполагаме временно (докато се освободи сдвояването чрез действително наблюдение) само с едно* общо *описание на двете системи в това пространство с голям брой измерения. Това е причината знанието за отделните системи да се сведе до най-необходимото и даже до нула, докато това на общата система, продължавайки – да остава максимално. От най-доброто знание на цялото* не *следва най-доброто знание за неговите части – върху това се основава все пак цялото объркване* (Schrödinger 1935: 847-848).

Нека обърнем внимание на своеобразна аналогия между определението на отсъствие на сдвояване в квантовата механика и отсъствието на материя (енергия) в общата теория на относителността. В първия случай факторизирането на ***Ψ***-функцията на системата е свидетелство за отсъствието на квантови корелации, във втория – отсъствието на „кривина на времепространството" е белег за отсъствието на материя (енергия). И в двата случай наличието се изразява в неопределено нарушаване на симетриите.

Въпреки това обаче фундаменталните принципи на теорията на относителността (особено специалната) и на квантовата механика се намират в колизия, една от най-дълбоките предпоставки за никога незавършилата дискусия между Айнщайн и Бор по основите на квантовата механика. Това пределно ясно се проявява в мислени експерименти за сдвояване, може би не първият, но несъмнено най-известният от които е и всъщност „парадоксът" Айнщайн – Подолски – Розен:

> *Мисленото свеждане на две или повече системи към* една *се натъква на големи трудности, веднага щом се опита да се въведе в* КвМ *специалният принцип на относителността* (Schrödinger 1935: 848).

Причината е заложена в самия фундамент на квантовата механика с въвеждането на „уреда”, а чрез него и на „далекодействие”, „абсолютно време”, а по същество и на „абсолютна отправна система”, „абсолютна цялост”. Например светлинният конус присъства в двете теории по напълно различен начин. В *СТО* той „се изгражда” като разпространение във време-пространството на сферична вълна. В *КвМ* присъства като отнапред даден базис от сферични цялости, в които микрообектът е вложен и които играят ролята на ортогонален базис, на независима система от измервателни уреди. Например ако вземем произволна мирова линия и я проектираме като „размазан” обект върху една, произволно избрана сфера от светлинния конус, то неговата $\boldsymbol{\Psi}$-функция лесно може да се представи чрез разлагане върху базис от последователни сфери от светлинния конус. При това на сферите от светлинния конус в редицата $\mathbf{1}\boldsymbol{t}, \mathbf{2}\boldsymbol{t}, \mathbf{3}\boldsymbol{t}, \dots, \boldsymbol{nt}, \dots.$ ще съответства редицата от честоти (в обратен ред, поради обратнопропорционалната зависимост между време и честота) $\dots, \boldsymbol{n\omega}, \dots, \mathbf{3}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{2}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{1}\boldsymbol{\omega}.$[22] В първия случай светлинният конус се „изгражда” от микрообекта към уреда (към безкрайността), във втория е „предварително даден” от уреда (от безкрайността) към микрообекта.

Две еднакво неудовлетворителни – и според самия него – алтернативи обсъжда Шрьодингер съответно в § 4 „Може ли теорията да се основава на идеални съвкупности?” и в § 5 „Действително ли променливите са размити?”. Могат да се измерят едни или други, или най-много половината от елементите, но какво можем да кажем за останалите?

> *Лишени ли са те от реалност или може би притежават така да се каже размита реалност? Или те през цялото време имат реалност … , но е невъзможно да се знаят всички едновременно?* (Schrödinger 1935: 810).

---

[22] Мимоходом да отбележим, че тук се проявява един принципен математически въпрос: една и съща или две различни са редиците $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \dots, \boldsymbol{n}, \dots$ и: $\dots\ \boldsymbol{n}, \dots, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1}$ – тоест, естествената редица *към* и *от* безкрайността. Решението опира в *прецизиране* на аксиомата за избора: може ли ***направен*** *безкраен избор* да се ***повтори***?

Изход от ситуацията е „Съзнателното изменение на теоретично-познавателната гледна точка” (§ 6):

> *Господстващото течение търси изход от тази твърде трудна дилема в теорията на познанието. Посочват ми да не правя разлика между действителното състояние на физическия обект и това, което зная за него, или може би по-добре, което мога да науча за него, ако съм си дал труда.* Действително *е – така се казва – собствено само възприятието, наблюдението, измерването. Ако чрез тях съм овладял в дадения момент най-доброто възможно знание, допускано от законите на природата, за състоянието на физическия обект, то трябва всеки, излизащ от техните предели въпрос за „реалното състояние” да се отхвърли като* безпредметен, *доколкото съм убеден, че никакво понататъшно наблюдение не може да разшири моето знание за него – най-малкото не, без да го намали толкова в друго отношение (а именно, чрез изменението на състоянието)* (Schrödinger 1935: 823).

Дори и по отношение на гореизложената позиция, вероятно най-близко до неговата собствена, Шрьодингер запазва дистанция: наистина целта му е една колкото може по-обективна картина на „съвременното положение в квантовата механика” (1935), както е озаглавена статията:

> *Нямаме нищо освен нашия изчислителен метод, за да определим къде природата е поставила границите* ignorabimus, *т.е. кое е най-доброто възможно знание за обекта* (Schrödinger 1935: 823).

При това $\boldsymbol{\Psi}$-функцията може да се тълкува по два начина (1) ”като каталог от очаквания” (§ 7) и (2) „като описание на състояния” (§9). Това, което свързва тези две тълкувания е представено в свързващия ги и в текста § 8 „Теория на измерването. 1-а част”. („Теорията на измерването. 2-а част” е параграф 10.):

(1) $\boldsymbol{\Psi}$-функцията е

> *инструмент за предсказване на вероятността на стойностите на измерванията. В нея е въплътена достигната в даден момент сума от теоретично обосновани*

> *очаквания за бъдещето, както в един каталог, лежащ пред нас. Тя е мост от отношения и обусловености между измервания и измервания, както модел и неговото съответно състояние в класическата теория. С тях $\boldsymbol{\Psi}$-функцията има и много друго общо. По принцип тя еднозначно се определя от краен брой подходящо избрани измервания над обекта, наполовина от необходимите в класическата теория* (Schrödinger 1935: 823).

В качеството на каталог от очаквания $\boldsymbol{\Psi}$-функцията, разбира се, е насочена към бъдещето. Както в никоя друга теория, математически точно формулирано понятие за очакване (както се използва в теорията на вероятностите) участва в самия ѝ фундамент, също така и в явленията, изучавани от квантовата информация. Математическото очакване $\boldsymbol{M}$ на една величина $\boldsymbol{A}$ е сума от произведенията на $\boldsymbol{n}$ стойности на дадена величина $\boldsymbol{A_i}$ по вероятността $\boldsymbol{P_i}$ да приеме съответната:

$$\boldsymbol{M = \sum_{i=1}^{n} A_i P_i} . \qquad (2)$$

Или ако величината $\boldsymbol{A}$ е непрекъсната и се изменя в интервала $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$:

$$\boldsymbol{M = \int_a^b AP(A)dA} . \qquad (3)$$

В понятието за математическо очакване се оказват преплетени насочената към бъдещето предсказваща сила на теорията и фундаментално вероятностният характер на квантовата механика. Естествено е бъдещето да изглежда размито, да има вероятностен характер, точно наподобявайки „размиването” на микрообекта, представяно чрез $\boldsymbol{\Psi}$-функцията.

От една страна, това „размиване”, и по-точно казано, изначалната вероятностност, различна от вторичната – на статистически ансамбли, в случая на квантовата механика, произтича от противоречивото изискване за обединяване на две механики, спрямо които всяка физична величина на обекта е: и точка, и интервал. Единствената, или поне единствената досега известна възможност за подобно обединяване е чрез въвеждане на функция на плътността на вероятността (именно и която „размива” физическата величина на микрообекта), описваща вероятността да бъде измерена тази величина спрямо нея като аргумент:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\,. \tag{4}$$

Сумата или интегралът на такава функция е и математическото очакване на физическата величина $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{Erw}(\boldsymbol{A}) = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{1}}^{\infty} \boldsymbol{P_k A_k} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{Erw}(\boldsymbol{A}) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{A}P(\boldsymbol{A})d\boldsymbol{A}\,. \tag{6}$$

Същият модел „и точка, и интервал” изисква описанието на бъдещите стойности на една физическа величина. Във всеки бъдещ момент тя ще приеме строго определена стойност, ще бъде „точка”. Заедно с това бъдещето представлява интервал, в който величината ще се изменя, ще приема различни стойности, някои може би по-често отколкото други, и така ще се оформя проекцията ѝ върху „точковото” настояще като профил на плътността на вероятността да приеме всяка една от бъдещите стойности (което ще става в различни моменти от бъдещето).

И така разполагаме с един и същ епистемологичен модел, който накратко обозначих „и точка, и интервал,”, който обаче може да се прилага в две наглѐд несвързани интерпретации: за бъдещите стойности на една изменяща се физическа величина, проектирани в настоящето, като нейно „вероятностно размазване” и за стойностите на една квантовомеханична величина, измервани от (или проектирани върху) макроприбор и виждащи се „от него”, поради извънредно големите му сравнителни размери, като точка. Чрез понятието за $\boldsymbol{\Psi}$-функцията като „каталог за очакванията” (1) и като описание на състоянията (2) Шрьодингер хвърля мост между двете досега изглеждащи несвързани интерпретации. Както вече се отбеляза, такъв мост лесно се построява и чрез съпоставяне „дължините на настоящето” (според периода на аташираната дьобройловска вълна) на уреда и микрообекта.

Как обаче да обясним, че след всяко измерване се оказваме изправени пред „ново” бъдеще? „Старото бъдеще” скокообразно е преминало в „ново бъдеще”, или с други думи, „старото” бъдеще е „изчезнало”, за да „възкръсне” като „ново” бъдеще:

> *При всяко ново измерване се налага да приписваме на* ***Ψ****-функцията (= каталога от очаквания) своеобразно, донякъде внезапно изменение, което зависи* от измерената стойност, *и поради това* не може да се предвиди; *от това само че вече е ясно, че този втори вид изменения на* ***Ψ****-функцията нямат нищо общо с нейното закономерно развитие* между *две измервания. … Това е тъкмо точката, която изисква скъсване с наивния реализъм. По* тази *причина* не *може* ***Ψ****-функцията пряко да се постави на мястото на модела или реалния предмет* (Schrödinger 1935: 824).

Като една „машина на времето” актът на измерване ни пренася случайно в друг момент (с дължината на настоящето на макроуреда) сред много по-дългото настояще на уреда. Можем ли по отчетената стойност да фиксираме точния момент от бъдещето или от миналото, в който ни е отнесла тази „машина на времето” – измервателният прибор? За съжаление – не, на всяка отчетена стойност отговаря не просто неизброимо множество, а интервал с ненулева дължина – в противен случай щеше да е невероятно (вероятност = 0) да отчетем тази стойност. Новополучената теоретично ***Ψ***-функция е суперпозиция от всички възможни „бъдещета”, като оставим настрана засега, но за по-сетнешно проучване алтернативата всички те да са идентични или поне идентични в някакво отношение. Въпреки това реалният процес на декохеренция е осъществил безкраен избор (който, за да бъде разрешен, изисква аксиомата за избора) измежду ненулевия интервал от възможни настоящи моменти (и техни съответни бъдеща) до един единствен случайно избран и поради това принципно неизвестен за макроизследователя, използвал макроприбора. И така, познанието чрез ***Ψ***-функция – а с *друго* за микросвета не разполагаме – носи първородния си грях да е принципно случайно, с точност до: „и точка, и интервал” – принципно случайно избрана точка сред интервал. То не може да бъде наречено нито модел, нито е действителност „сама по себе си” според представите на класическата физика. То представлява изначално случаен избор, свързал „модела” с действителността „сама по себе си”. Можем вместо като „изначално случаен” да го мислим и като детерминиран, но принципно неизвестен, непознаваем. И това е пунктът – както отбелязва по-горе Шрьодингер – да се сбогуваме с наивния реализъм:

> (2) *Каталогът с предсказанията (= **Ψ**-функцията) се изменя следователно чрез измерването по отношение на онази променлива, която измерваме. Ако от по-рано методът на измерване е известен като* надежден, *то първото измерване непосредствено редуцира теоретичното очакване до самата намерена стойност, в границата на грешката, при каквото и да е било първоначално очакване. Това е онова типично внезапно изменение на **Ψ**-функцията вследствие измерването, за което ставаше дума по-горе. Обаче не само за самата измерената променлива каталогът с очакванията се изменя по непредвиден начин, а и въобще за другите, в частност за „канонично спрегнатата” с нея* (Schrödinger 1935: 824).

При това положение на нас ни се налага да осмислим по нов начин следното: (3) Съществува взаимно еднозначно съответствие между **Ψ**-функцията и състоянието на изследвания микрообект (Schrödinger 1935: 825). Каталогът от очакванията е същевременно състоянието на изследвания микрообект. Под обект „сам по себе си” най-вероятното, което бихме могли да имаме предвид, е суперпозицията от всички възможни състояния, „интервалът” от стойности, който естествено се оказва каталогът от очаквания; под „обект за нас” – само конкретното измерената и затова принципно случайно избраната стойност сред каталога от очаквания. Следва да заключим, че в теоретико-познавателния образец, наложен от квантовата механика, актът на познание, доколкото се определя като свързващото или превръщащото „обекта сам по себе си” в „обект за нас”, е принципно случаен – също обратно на класическия случай. Напротив: ако представим класическия образец на познание, при който то е по един или друг начин рационално детерминирано, квантовомеханичният обект се оказва принципно непознаваем.

> *Как да се съчетае това? Нещата не са съвсем прости. Това е най-трудният и най-интересният пункт в теорията. Очевидно, трябва да се опитаме*

обективно да разберем взаимодействието на измервания обект с измерителния прибор (Schrödinger 1935: 826):

> (4) *Ще опитам още веднъж да заостря с думи противоречието за контраст. 1. Скокът на каталога с очакванията при измерването е* неизбежен, *тъй като, ако измерването трябва да запази какъвто и да би смисъл, то след едно добро измерване* измерената стойност трябва *да е валидна. 2. Скокообразното изменение със сигурност* не *се подчинява на иначе принудително валидните закони, тъй като то зависи от измерената стойност, която е непредвидена. 3. От изменението следва (поради „максималността") определено* загуба *на знанието, знанието не може да се губи, следователно,* трябва *да се е изменил* предметът – също *при скокообразните изменения и при тях* също *по непредвиден начин*, иначе *от обикновено* (Schrödinger 1935: 826).

И така, в резултат на измерването една измерена стойност замества суперпозицията от всички стойности, които могат да бъдат измерени с различна вероятност и са включени в каталога на очакванията. Ако Ψ-функцията е представлявала знанието за обекта и заедно с това и състоянието за обекта, то сега е заменена с конкретна стойност, съдържаща много по-малко информация. Ако знанието за обекта му съответства, то друго знание би следвало да означава друг обект. Какво се е случило?

Тук са необходими поне две предварителни забележки, насочващи към открития, направени много след времето, по което е писана статията. Първата се отнася до това, че постулираната едва ли не като вълшебна „редукция на вълновия пакет" до една конкретна стойност в „класическата" теория на квантовото измерване (строго формулирана от фон Нойман и тук използвана от Шрьодингер) понастоящем се разглежда като процес във времето, протичащ дисипативно поради процесите на декохеренция или с други думи, поради влиянието (включително и посредством квантови корелации) на околната среда върху микрообекта. Втората е, че дори и да се използва идеализиращият модел на внезапния случаен избор сред интервала от възможни стойности, то е налице определен тип количествено съответствие между информационните характеристики на осъществения избор и на редукцията до измерената стойност. Грубо казано, „изчезналата" след избора информация е била изразходвана, за да се направи изборът. Ето защо, както обект в квантовата механика е не просто микрооообектът, а системата микрообект и макроуред, то аналогично резултат от измерването не е само измерената стойност на микрообекта, но и осъщественият избор, който има нелокален характер.

Последното се проявява особено отчетливо в явленията на сдвояване (entanglement), които в работата на Шрьодингер са също така основен предмет на обсъждане (като се използва терминът „verschränkten Zustände”). Наистина след като осъщественият избор, наред с измерената стойност на един от два или повече обекта, е също така резултат от измерването и след като има нелокален характер, то той ще се отнася и до другата или до всички части на системата, предопределяйки една стойност като избрана без върху нея да е осъществено реално измерване.

Нека онагледим ситуацията чрез следния пример. В две урни топките са линейно напълно подредени и подчинени на правилото, ако се вземе съответната топка от едната урна, същият номер топка се взема и от другата урна. Така вземайки да речем, третата топка във втората урна, която се оказва 49, предопределяме третата топка в първата урна, която пък, да речем, е 16. Законите за запазване във физиката, които, както видяхме, са тясно свързани с *нелокална* едновременност осигуряват аналогично прехвърляне на избора.

> *Работата е в това* – продължава Шрьодингер, – *че ако се притежава за две напълно отделни тела, или по-добре да се каже, за всяко от тях отделно, пълен каталог от очаквания – максимална сума знания, Ψ-функцията, – то се притежава разбираемо и за двете тела заедно, т.е. ако се мисли, че не всяко от тях поотделно, а двете заедно образуват предмета на нашия интерес, на нашите въпроси за бъдещето* (Schrödinger 1935: 826).

Лесно можем да видим, че това е валидно и в нашия пример със „сдвоените” урни. Част от нашите знания обаче са излишни, редундантни, тъй като се повтарят.

> *Обаче обратното не е вярно.* От максималното знание за една обща система не следва необходимо максимално знание за всяка нейна част, също не и тогава, когато са напълно отделени

> една от друга и изобщо не взаимодействат една с друга в дадения момент (Schrödinger 1935: 826).

Бихме могли да представим ситуацията чрез два интервала от стойности, между части от които има взаимно еднозначно съответствие, което и осъществява „нелокалното прехвърляне на избора", споменато по-горе, измежду стойности от единия интервал върху другия. Разбира се, максималното знание за системата включва и ограничаването на степените на свобода на нейните части, представено чрез изображението. Всъщност, ако е дадена такава една сдвоена система, не можем еднозначно да определим нейните части, оставайки независими една от друга. В този смисъл знанието за системата не е знание за нейните части. От това обаче в частност следва проблемът как и доколко можем да отделим изследвания микрообект от системата микрообект – макроприбор, единствено за която е налице максимално знание. И така, за да се разедини системата от два или повече сдвоени микрообекта, единият от тях трябва да се включи в система с уреда, т.е. да бъде измерен:

> Първо, *поглед във взаимно изключващо се разпадане на каталога на очакванията, което следва винаги и става възможно чрез включване на прибора и обекта в съвместен каталог. От тази амалгама обектът може да бъде отново освободен само чрез това, че живият субект приема действително знание от резултатите на измерването*[23]*. Все някога това трябва да стане, ако това, което се е разиграло, действително трябва да се нарече измерване – колкото и да ни е по сърце процесът да се отпрепарира колкото е възможно по-обективно. И това е* вторият *поглед, който получаваме*: едва при тази проверка, *която решава* [между] *взаимно изключващото се, става нещо прекъснато, скокообразно. Приемливо е да се нарече* мисловен *акт, тъй като обектът вече е откъснат, физически вече не се обхваща, онова, което е изпитал, е вече назад. Обаче би било не съвсем правилно да се каже, че* Ψ*-функцията на обекта, която*

---

[23] Тъй като изречението допуска повече от един превод със съществено различен философски смисъл, го привеждам и според немския оригинал: „Aus dieser Verquickung kann das Object nur dadurch wieder herausgelöst werden, daβ das lebende Subject vom Resultat der Messung wirklich Kenntnis nimmt."

> иначе *се изменя според частно диференциалното уравнение, независимо от наблюдателя*, сега *се изменя скокообразно по силата на мисловен акт: тъй като тя се е загубила, няма я вече. Това, което не е, не може и да се изменя. Тя се възражда, възстановява от объркваното знание, което се притежава, освобождава се чрез акта на възприятие, който фактически не определя вече едно физическо въздействие върху измервания обект. От формата, в която* **Ψ***-функцията е известна най-напред, към новата, в която отново се появява, не води непрекъснат път – той е довел тъкмо чрез унищожаване. Поставени в контраст двете форми, нещата изглеждат като скок. Наистина помежду им лежи важно събитие, а именно взаимодействието на двете тела помежду им, в течение на което измерваният обект не е имал собствен каталог на очакванията, но и не е имал претенции за това, понеже не е бил самостоятелен* (Schrödinger 1935: 828).

Причините за разпространеното заблуждение за сякаш мистичното влияние на живия субект чрез запознаването му с резултатите от измерването вече бяха обсъждани. А те са:

1. Тъй като в класическата философия измерването е прозрачно, а съществуването на познаващия субект е аподиктично очевидно, то свойствата на измерване с макроприбор на микрообект, което не е „прозрачно”, се приписват на познаващия субект.

2. В епистемологичния модел „и интервал, и точка”, наложен на квантовата механика, неотстранимо присъства случаен избор, който също така е прието – според гносеологическите предразсъдъци – да се приписва на свободната воля на субекта.

За да онагледим смисъла, можем да направим мисления експеримент с живата-и-мъртва котка още по-гротесков, поставяйки на нейно място, в качеството на „субект” един стол и заменяйки ампулата с циановодород с хидравлична преса, чието привеждане в действие в резултат на разпадането на радиоактивния атом ще разруши стола. Ясно е, че столът също ще се „запознае” с резултатите от измерването над радиоактивния атом посредством гайгеровия брояч и че след един час от началото на експеримента, ако ни е забранено пряко наблюдение, той подобно на живата и мъртва котка ще се „намира” в суперпозиционното състояние „здрав-и-смачкан стол”.

Както показва цитираната вече „теорема за свободната воля” (Conway, Kochen 2006; 2008) квантовата механика позволява буквално, а не само метафорично пренасяне на свойства както от микро- към макро-равнище (напр. от квантовата суперпозиция към „живата-и-мъртва котка), така и от макро- към микро-равнище (от свободната воля на експериментатора към „тази” на микробоекта). Причината се корени в уникалната и изглежда, неизбежна епистемологична структура на квантовата механика, която е теория *за системата* макроуред – микрообект: тъкмо целостта на системата се оказва субстратът на този учудващ, а понякога и забавен пренос.

Обаче много по-интересен е въпросът, поставен от Шрьодингер, за възраждането на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията след нейното изчезване в резултат на измерването, видимо изглеждащо като скокообразното ѝ изменение. Какво всъщност става? Въпросът опира до един твърде деликатен логически проблем, свързан със замяната на обект с клас на еквивалентност, чийто представител е той; например на конкретен червен предмет, например, този червен куб ето тук, с червените предмети изобщо или с кой да е червен предмет. Ситуацията в квантовата механика се усложнява от принципната липса на каквито и да е, пък било то и акцидентални, индивидуализиращи признаци за даден представител от клас на еквивалентност. Той е принципно неотличим от всеки друг и заменим с него във *всяко* отношение. Така *всяка пермутация* на ансамбъл от тъждествени квантови обекти е напълно неотличима от *всяка друга*. (Промяната на знака на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията при пермутация на два фермиона може да се сведе до общия случай.) И така, ако при измерването се извършва случаен избор в резултат на декохеренцията, предизвиквана от околната среда, то обектът „отново възниква”, възкръсва след него в кохерентно състояние, като $\boldsymbol{\Psi}$-функцията скокообразно се е изменила. Кое е взаимодействието, коя е силата предизвикала такава кохерентна поява, или „гротескните примери”, която би „възкресила” отровената котка до жива или смачкания стол до здрав? Дали има такава сила или взаимодействие? Или самата природа на микрообекта, оказала се и точка и интервал, е такава? *Но ако декохеренцията е взаимодействието, осъществяващо случайния избор, не би ли трябвало да съществува не по-малко реално взаимодействие, да го наречем условно „кохеренция”, което – след случаен избор в квантов клас на еквивалентност – да възстановява класа по наличния негов един единствен представител*?

За съжаление, не само отговор на този въпрос, но дори и неговото поставяне сред наистина невероятната по обем литература, не ми е известно. Възможно той да е свързан с квантовите корелации, които възстановяват кохерентността на обекта чрез друга негова $\boldsymbol{\Psi}$-функция. Но за да възникне сдвояване, първо, трябва да е налице обичайно физическо взаимодействие с обмен на енергия. Дали би могло да възниква и без такова? Нека с тези мисли и в следния пункт се върнем към работата на Шрьодингер:

> *Каталозите на очакването на две тела $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ трябва да са се сдвоили, чрез предхождащо взаимодействие. Сега телата трябва отново да са разединени. Тогава мога да взема едно от тях, да речем $\boldsymbol{B}$, и моите станали подмаксимални знания за него постепенно да допълвам чрез измервания до едни максимални. Твърдя: веднага и тъкмо щом достигна до това и не по-рано, първо, ще е пряко освободено сдвояването, и второ, чрез измерванията над $\boldsymbol{B}$ при използване на условните изречения, които са налични, съм придобил максимално знание също и за $\boldsymbol{A}$* (Schrödinger 1935: 844).

Същността на максималното знание за всеки от обектите $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ се състои в това да се увеличат неговите степени на свобода до максимално възможния брой, при което каквото и да било сдвояване ще изчезне, а системата ще е еквивалентна на декартовото произведение $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$.

> *Да допуснем сега, че по такъв начин бих получил A-каталог в определен случай. Тогава мога да се замисля и преценя, не бих ли получил друг каталог, ако бях поставил в работата друг план за измерване за измерване на B. Понеже обаче не съм пипал системата A нито действително, нито в другия, мислен случай, то би трябвало твърденията от другия каталог, каквито и биха могли да бъдат, също всички да са правилни. Те би трябвало изцяло да се съдържат в първия каталог, тъй като първият е максимален. Същото би се отнасяло и за втория. Следователно той трябва да е тъждествен с първия. Странно, математическият апарат на теорията не изпълнява това изискване автоматично. Дори нещо повече, позволява да се построят примери, където изискването необходимо се нарушава. Наистина във всеки опит може да се проведе действително*

> *само* един *ред измервания (винаги на $\boldsymbol{B}$!), понеже веднага щом това е станало, сдвояването е освободено, и чрез по-нататъшни измервания на $\boldsymbol{B}$ нищо повече не се научава за $\boldsymbol{A}$. Обаче има случаи на сдвояване, в които могат да се зададат* две определени програми *за измерване на $\boldsymbol{B}$, от които всяка: 1. трябва да доведе до снемане на сдвояване, и 2. трябва да доведе към каталог за $\boldsymbol{A}$, до който* другата *програма въобще* не *може да доведе – каквито и да се окажат измерените стойности, които биха могли да се появят в единия или в другия случай* (Schrödinger 1935: 844).

И в качеството на такъв заострен вариант в § 12 предлага схематичен опит, почерпен от статията на тримата автори – „парадоксът” на Айнщайн – Подолски – Розен.

Нещо повече:

1. Както – без да се нарушава общността – беше избрано върху $\boldsymbol{B}$ да се провеждат измерванията, върху $\boldsymbol{B}$ може да се осъществи измерване за установяване стойността на произволен израз, съдържащ двете спрегнати величини, напр. $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$. На него ще съответства точно определена стойност, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$ за $\boldsymbol{A}$ (Schrödinger 1935: 846).

2. Но изрази от вида $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{Q})$, респ. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{q})$, нямат смисъл нито за $\boldsymbol{A}$, нито за $\boldsymbol{B}$, където $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{F}$ да са реално измерими стойности на физически величини в единичен опит (Schrödinger 1935: 846).

Тук трябва да направим важно уточнение, че самата $\boldsymbol{\Psi}$-функция, чиито стойности са комплексни числа и поради това не е реално измерима, може да бъде тълкувана чрез изрази – според горните означения – от типа $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{iQ}$ или $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{iq}$, но нейна стойност, бидейки именно комплексно число и потвърждавайки 2. непосредствено по-горе, не може да бъде измерена непосредствено нито за $\boldsymbol{A}$, нито за $\boldsymbol{B}$ в единичен опит.

Освен това ще отбележим, че предпоставката да се припише косвено стойност на $\boldsymbol{A}$ чрез измерване на $\boldsymbol{B}$, е закон за запазване. Бихме могли да се измъкнем от странното положение също така, ако го изтълкуваме като „доказателство от противното” за невалидността на такъв род предпоставки, т.е. на законите за запазване на квантово-механично равнище, а да обясним тяхното присъствие на макрониво, чрез статистическо осредняване, т.е. в крайна сметка чрез „принципа за съответствие". Всъщност тази хипотетична алтернатива реално присъства през втората половина на 20-те години, предложена и известно време поддържана от Бор и сподвижници (Bohr, Kramers, Slater 1924: 791–793):

> *Чрез взаимодействие* – пишат те – *между атоми на по-големи разстояния един от друг, когато, според класическата теория на излъчването, не би ставало въпрос за едновременно взаимодействие, ще предполагаме независимост на отделните процеси на преход, което се намира в поразителен контраст с класическото изискване за запазване на енергията и импулса* (Bohr, Kramers, Slater 1924: 792)[24].

В резюмето на друга статия на Бор от същото време, озаглавена „Относно закона за запазване на енергията" (N. Bohr. 1925. On the law of conservation of energy. – Nature, Vol. 116, 262) се казва:

> *Опитите да се развие атомистична интерпретация на непосредствено наблюдаваните явления ни накараха да признаем необходимостта от ревизия на идеите, лежали досега в основата на описанието на естествените явления. Настоящите ни концепции не изглежда да позволяват детайлно описание на атомните процеси, което да приема за даден закона за запазване на енергията, който заема централно положение в класическото описание на Природата* (Bohr 1984: 174).

---

[24] По повод на тази работа Айнщайн в писмо до сем. Борн от 29 април 1924 г. пише: „Становището на Бор относно радиацията ме интересува много. Но не бих искал да позволя да ме накарат да се откажа от строгата каузалност, преди да съм се защитил съвсем иначе от досега. Мисълта, че електрон, подложен на радиация, избира *със свободно решение* [aus freiem Entschluß] момента и посоката, в които желае да прескочи, ми е непоносима [unerträglich]. Ако вече [го бях приел], то бих бил любим обущар [lieber Schuster] или даже служител в игрален дом, а не физик. Моите опити да дам явна форма на квантите, са, разбира се, отново и отново проваляни, обаче още дълго няма да изоставя надеждата. И макар съвсем да не ще да върви, то все пак остава утешението, че неуспехът се дължи само на мен." (Einstein, Born 1969: 118). Следва да се спомене и статията на Шрьодингер „Новата радиационна хипотеза на Бор и законът за запазване на енергията", в чийто край пише: „определена стабилност на световите събития *sub specie aeternitatis* може единствено да съществува чрез *връзката* на всяка отделна система с целия останал свят. От гледна точка на единството, отделната единична система би трябвало да е хаос. Тя изисква тази връзка като непрекъснат *регулатор*, без която би била, що се отнася до своята енергия, случайно блуждаеща" (Schrödinger 1924: 724).

В тази връзка, според така нареченото четвърто съотношение за неопределеност, а именно между минималната неопределеност при измерване на енергия $\Delta\boldsymbol{E}$ и минималната неопределеност при измерване на време $\Delta\boldsymbol{t}$, се оказваме отново в странната ситуация или да го пренебрегнем повече или по-малко елегантно, повече или по-малко експлицитно, или да приемем валидност на закона за запазване на импулса и фиксирайки абсолютната едновременност $\Delta\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$ на събития в $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, да предположим произволна квантово-механична флуктуация на съвкупната енергия на системата – $\boldsymbol{E}$, каквато фактически суспендира закона за запазване на енергията.

Реализира се обаче по-скоро първата алтернатива. Както заявява Паули, времето в квантовата механика е „само число” (Pauli 1980: 63), и за разлика от всички други измерими величини, на него не му съответства оператор в хилбертовото пространство. Това произтича от особеното положение на спрегнатата му величина – енергията, чийто оператор комутира и следователно е едновременно измерим с всяка друга (в общия случай – некомутиращи помежду си и значи, непосредствено съвместно неизмерими).

В предпоследния, 14-и параграф на своята работа, озаглавен красноречиво „Изменения на сдвояването с времето. Възражение срещу особеното положение на времето”, Шрьодингер е склонен да защити втората алтернатива, маргинализирана след Паули от господстващото течение:

> *В нашето обсъждане се натъкнахме обаче на една възможност. Ако може да се обоснове схващането, че квантово-механичните предсказания не се отнасят или не винаги с отнасят към строго определен, точен момент във времето, то би могло това да не се изисква и от числените стойности на променливите. Понеже сдвоените променливи се изменят във времето, би било извънредно затруднено установяване на антиномични твърдения. Че времево точни предсказания са грешка, е вероятно също и по други причини. Измерената стойност на времето, както и всяка друга, е резултатът от едно наблюдение. Трябва ли тъкмо за измерването с часовник да се допуска изключение? Не трябва ли то като всяко друго да се отнесе към променлива, която въобще няма точна стойност, и във всеки случай не едновременно с* всяка *друга от променливите? Ако се предсказва стойността на някоя* друга *за определен* времеви момент,

> *не трябва ли да се страхуваме, че двете изобщо не могат да бъдат едновременно точно известни? В рамките на днешната КвМ едва ли е правилно да се следва опасението. Тъй като времето се разглежда* a priori *като точно известно, макар че би следвало да се каже, че всяко поглеждане-на-часовника, смущава неговия ход по неконтролируем начин. Бих искал да повторя, че* не *притежаваме КвМ, чиито изказвания не трябва да са валидни за точно определен момент от времето. Струва ми се, че този недостатък тъкмо и се проявява в изброените по-горе антиномии* (Schrödinger 1935: 848).

Това особено – независимо дали ще се тълкува като привилегировано, или като принизено – положение на времето в квантовата механика е останало незасегнато и до наши дни, тъй като произтича от фундаменталната ѝ структура. Времето е време само на макрообекта, на уреда и това решава въпроса за самотъждествеността на обектите при преход между спрегнати величини или между микро- и макро-описание просто, а именно чрез закона за запазване на енергията.

Какво би се променило в концептуалните основи на квантовата механика ако времето, подобно на всички останали величини, се сдобие с оператор? Операторът на енергията в общия случай ще престане да комутира с пространствено подобните величини, в т.ч. и с този на времето. Биха се появили ситуации още по-странни и от обсъжданите в „традиционната" квантова механика: напр. позитронът за един наблюдател (уред), може да се окаже електрон за друг наблюдател (уред), докато „сам по себе си" (т.е. при валидност на запазването на енергията) той „да е" фотон. Файнмановите диаграми, описващи превръщанията на „частиците", ще загубят всякакъв смисъл. И множество други.

Въпреки това вероятно е възможно да се въведе запазване, обобщаващо запазването на енергията, а именно запазване на време-енергията, на което съответства физическата величина „действие". Чрез него ще се описва не само преходът от един към друг микрообект, но и по-общият случай – една към друга система „уред – микрообект". В частност процесите на декохеренция и на сдвояване ще намерят адекватно описание. Чрез сдвояването всеки микрообект може да се разглежда в качеството на „уред".

Такъв случай е реализиран в мисления експеримент, който представлява „теоремата за свободната воля" още с приетите предпоставки за валидност и на квантовите корелации, и на лоренцовата инвариантност. Последната е несъвместима с принципа на далекодействието, с приемането на едно единствено, абсолютно време на уреда, с това, че времето е „само число" и с това, че за разлика от всички други величини в квантовата механика не притежава оператор. Ограничавайки се с най-общо философско разглеждане, може да отбележим, че такъв подход жертва запазването, основаващо се на корелиращата с времето енергия. „Свободната воля" на микрообекта е несъвместима с негова монотонна самотъждественост, изисквана от класическата представа за обективност.

Едно изключително важно следствие от подобна промяна в концептуалните основи на квантовата механика е възможността за нейна „относителна формулировка". Въз основа на „първите" три съотношения за неопределеност и при фиксирано време (т.е. при неопределеност между импулс и координата, но при отсъствие на неопределеност между енергия и време, поради неговата фиксираност) квантовата механика е формулирана по начин, по който се отнася до обекти с абсолютни размери, съответстващи на константата на Планк.

Въз основа на „четвъртото" съотношение, т.е. въз основа на неопределеността между енергия и време, обаче тя може се формулира спрямо обекти с относителна дименсия към пълната система, съответстваща на константата на Планк. Например, ако „четвъртото" съотношение за неопределеност се формулира така $\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{\nu}} \geq \hbar$**,** където $\boldsymbol{E}$ е пълната енергия на системата, а $\boldsymbol{\nu}$ е честотата на дьобройловската вълна на обекта. Чрез такава формулировка квантовата механика може да се използва за описание на макрообекти, каквито сме ние, по отношение на достатъчно големи астрономични обекти или по отношение към вселената като цяло. Между макрообекти биха били налице квантови корелации.

В тази връзка за втори път ще се спомене една тема, към която многократно ще се връщаме по-нататък, въведеният от Айнщайн „принцип на Мах"[25]

---

[25] Изброен от Айнщайн като трети: „c) *Маховски принцип* [1] $\boldsymbol{G}$-полето [гравитационното поле] *изцяло* се определя от масите на телата. Тъй като масата и енергията – според резултатите на специалната теория на относителността са равни и се описват чрез симетричен тензор на енергията ($\boldsymbol{T}_{\mu\nu}$), то това значи, че $\boldsymbol{G}$-полето се обуславя и определя от енергийният тензор на материята" (Einstein 1918: 241-242). В бележка под линия [1] той пише: „Досега не съм отделял принципите a) и c), което обаче действаше объркващо. Името „Маховски принцип" съм избрал затова, понеже този принцип означава всеобщност на Маховското изискване, че инерцията се свежда до взаимодействие на тялото" (Einstein 1918: 241-242). С тази последната – за разлика от първата – формулировка можем да се съгласим. Проблемът е

като един от трите фундаментални положения[26], на които почива общата теория на относителността (Einstein 1918: 241-242) и чрез което в частност (в същата работа) се обоснова необходимостта от поправка на основното уравнение: въвежда се допълнителен член, така наречената космологична константа. Първоначалният вариант е:

$$\boldsymbol{G_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}T\right)} \qquad \text{(Einstein 1918: 243).} \qquad (7)$$

Поправеният вариант с добавъчен член е:

$$\boldsymbol{G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}T\right)} \qquad \text{(Einstein 1918: 243).} \qquad (8)$$

Въведеният допълнителен член $\boldsymbol{\lambda g_{\mu\nu}}$ съдържа коефициента $\boldsymbol{\lambda}$ – константа, т. нар. космологична константа. Ако нейната стойност е нула, уравнението се свежда до първоначалния вариант. Смисълът ѝ е да определя характера на *глобалната* геометрия при статична вселена, респ. във фиксиран момент от *глобалното*, т.е. абсолютното (!) време:

в това, че очевидно Айнщайн отъждествява всяко взаимодействие с такова, при което има пренос на енергия. Ако обаче обобщим енергията и нейният тензор, така че да включим не само „енергията на покой”, с други думи да включим и енергията от информационни процеси бихме могли да приемем и първата. Тогава трябва също да се откажем от – или да обобщим – принципа, означен от Айнщайн като „a)”.

[26] Първите два принципа Айнщайн формулира както следва: „a) *Принцип на относителността*: законите на природата са само твърдения за време-пространствени съвпадения; затова намират своят единствен естествен израз във всеобщи ковариантни уравнения. b) *Принцип на еквивалентността*: инерцията и тежестта са еднакви по същност [wesensgleich]. Оттук и от резултатите на специалната теория на относителността необходимо следва, че симетричният „фундаментален тензор” ($\boldsymbol{g_{\mu\nu}}$) определя метричните свойства на пространството, инерционността на телата в него, както и гравитационното взаимодействие. Състоянието на пространството, описано чрез фундаменталния тензор, искаме да означим като „$\boldsymbol{G}$-поле” (Einstein 1918: 241). Разбира се, явленията на сдвояване не изпълняват така формулирания принцип на относителността: те се отнасят до време-пространствени *несъвпадения* и следователно нарушават всеобщата ковариантност, с други думи инвариантността при плавни преобразувания, тъй като са необходимо дискретни. Ако обобщим инерцията по начина, подсказан в предната бележка, би могло да се приеме „принципът на еквивалентността” и да се използва като евристичен, фигуративно казано, в обратна посока: тежестта и „инерцията” са еднакви по същност; тоест, да разгледаме съпротивата на изменение на дискретното „движение” в квантовата механика като „тежест”.

λ	Геометрия на вселената
$= 0$	„Плоска” (псевдоевклидова)
> 0	„Сферична”
< 0	„Хиперболична”

Фиг. 3. Статичната геометрия на вселената в зависимост от характера на космологичната константа

Навярно мнозина имаме спомени от младежките години за тази схема, както и странните обяснения за безкрайната, но ограничена вселена при „$\boldsymbol{\lambda} > 0$” (вариантът, предложен от Айнщайн в цитираната работа).

Проблемът за Айнщайн в първоначалния вариант на уравнението е, че то допуска решение за наличие на гравитационно поле и при нулев тензор на енергията на материята ($\boldsymbol{T_{\mu\nu}} = \mathbf{0}$) и константна „кривина” (константен метричен тензор ($\boldsymbol{g_{\mu\nu}} = \boldsymbol{const}$): грубо казано, „нещо”, което няма енергия, може да изкривява времепространството, и чрез това да предизвиква гравитационно поле. Тъкмо за да отхвърли подобна възможност и се въвежда „принципът на Мах”, според който гравитационно поле изцяло се определя от масите на телата. Масата и енергията – продължава Айнщайн, – според следствията от специалната теория на относителността, представляват едно и също; формално енергията се описва от симетричния тензор на енергията; това означава, че гравитационното поле се обуславя и определя от тензора на енергията на материята. Наистина според вероятно една от найпрочутите формули на всички времена материята е енергия и енергията е материя:

$$\boldsymbol{E = mc^2}\ , \tag{9}$$

тъй като $\boldsymbol{c}$ е константата на скоростта на светлината във вакуум[27]. Наистина, „принципът на Мах” (Einstein 1918: 241) *сякаш* е напълно естествен и необходим: гравита-

---

[27] Айнщайн формулира за първи път това прочуто съотношение между масата и енергията на едно тяло в работата си „Зависи ли инерцията на едно тяло от неговото енергийно съдържа-

цията произхожда от материята (енергията) *и от нищо друго*. А *от какво друго* все пак би могла да произлиза гравитацията? Може да ни помогне една друга, може би не по-малко прочута формула на Айнщайн, свързваща, от една страна, енергията…

$$\boldsymbol{E} = \hbar\boldsymbol{\nu}, \tag{10}$$

за обяснение на фотоефекта (Einstein 1905I), работа, за която – а не за общата или специалната теория на относителността – му е присъдена Нобелова награда[28]. Еквивалентът на тази формула, която тук е приведена според съвременните означения, се въвежда в глава 6, „Интерпретация според принципа на Болцман на израза за зависимостта на ентропията на монохроматично излъчване от обема”. В завършека на тази глава от статията Айнщайн пише:

> *Ако монохроматично излъчване (с достатъчно малка плътност) се държи – по отношение на зависимостта на ентропията от обема – като непрекъсната среда, която се състои от енергийни кванти с големина* $\boldsymbol{R\beta\nu/N}$*, то навежда да се изследва дали законите на произвеждане и преобразуване на светлина са с такива свойства, както ако светлината се състоеше от енергийни кванти от такъв вид* (Einstein 1905Ü: 143-144).

Тук или $\boldsymbol{R\beta/N}$, или $\boldsymbol{\beta}$ може да се разглежда като еквивалент на константата на Планк, която по времето на написване на статията все още не е влязла в обръщение, където „$\boldsymbol{R}$ означава абсолютната газова константа, $\boldsymbol{N}$ – броя на „дей-

---

ние”: „Ако тяло излъчва енергията $\boldsymbol{L}$ под формата на радиация, неговата маса намалява с $\boldsymbol{L/V^2}$. При това очевидно е несъществено, че енергията, отнета от тялото, се превръща тъкмо в енергия на излъчването, така че сме доведени до по-общото заключение: масата на едно тяло е мярка за неговото енергийно съдържание; ако енергията се промени с $\boldsymbol{L}$, масата се променя в същия смисъл със $\boldsymbol{L/9.10^{20}}$, ако енергията е измерена в ергове и масата в грамове” (Einstein 1905I: 641). Тук с $\boldsymbol{V = 3.10^{10}}\ [\frac{cm}{s}]$ е означена константа на скоростта на светлината във вакуум при посочените мерни единици за енергия и маса.

[28] Точната формулировка е: „за неговите приноси към теоретичната физика и особено за неговото откритие на закона за фотоелектричния ефект” – http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1921/index.html .

ствителните молекули” в грам еквивалент” (Einstein 1905Ü: 134), а „$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{4.866} \times \mathbf{10^{-11}}$”[29] (Einstein 1905Ü: 136).

Приведеният цитат е твърде поучителен. Това е може би една от първите формулировки на вълново-корпускулярния дуализъм. Съчетават се чрез разделяне в различни отношения на противоречивите аспекти на континуалност (излъчването е непрекъсната среда) и дискретност (светлината се състои от енергийни кванти). Можем да продължим според общата насока на статията на Айнщайн по следния начин: светлината е дискретна (корпускулярна) при взаимодействието си с веществото, но е непрекъсната (вълнова) като среда „сама по себе си”, която се разпространява в пространството, респ. времепространство. Квантовата механика първоначално пренася това свойство, формулирано за електромагнитното излъчване, до всички квантови – по същество: до всички физически – обекти. Впоследствие изоставя разделянето в различни отношения, като го заменя с описанието посредством $\boldsymbol{\Psi}$-функцията, на равнище математически формализъм, моделиращ физическата реалност, от една страна, и с концепцията за допълнителността на методологично и философско равнище. Хипотезата за скритите параметри, от такава гледна точка, всъщност консервира изходния и тук вече ясно формулиран възглед на Айнщайн да бъдат разделяни двата противоречащи си аспекта на континуалност и дискретност в различни отношения.

Както ще видим, квантовите корелации, особено по начина, по който ги интерпретира Джон Бел, възраждат, но без да реставрират подхода на Айнщайн, доколкото взаимодействието е дискретно, произтичайки от съществуването на константата на Планк, но самò по себе е континуална среда. Проблематично е обаче дали може или следва да им се приписва енергия. В настоящата работа по-нататък се обосновава подходът, при който имат собствена енергия, но за разлика от

---

[29] Айнщайн цитира коефициента $\boldsymbol{\beta}$ в контекста на формулиране мотивацията на цялата статия по следния начин: „Сега бихме искали да покажем, че опредлението от г-н Планк на елементарни кванти е до определена степен независимо от неговата теория за „излъчването на черното тяло”. Формулата на Планк ([посочена в бележка 4 под линия:] M. Planck, *Ann. d. Phys.* 4 (1901): 561) за ρ_ν, която се удовлетворява от всички експерименти досега, гласи

$$\boldsymbol{\rho_\nu = \frac{\alpha\nu^3}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1}},$$

където

$$\boldsymbol{\alpha = 6.10 \times 10^{-56}}$$
$$\boldsymbol{\beta = 4.866 \times 10^{-11}} \text{ ”}$$

(Einstein 1905U: 136).

постоянстващите физически обекти, не и „енергия на покой": тоест, енергия притежава само информационният поток, или изменението на информацията във времето, но не и статичната информация. Такава гледна точка следва тъкмо от второто приведено уравнение (което всъщност е публикувано първо, няколко месеца преди бележката, приравняваща маса и енергия), а именно $\boldsymbol{E} = \hbar\boldsymbol{\nu}$**,** след като честотата се тълкува в качеството на изменение на информационното съдържание, т.е. като битове за секунда.

Действително структурата на $\boldsymbol{E} = \hbar\boldsymbol{\nu}$ е напълно аналогична на предходната формула – $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{mc}^2$, – свързваща масата и енергията. Така осмислена, тя ни казва, че на всяка честота на вълна съответства енергия, в т.ч. и на дьобройловската вълна, асоциируема според вълново-корпускулярния дуализъм на коя да е „частица", т.е. на всеки микрообект в аспекта му на самоидентичност, легитимирана от запазването на неговата енергия.

Нека вникнем в едно философско тълкуване на понятието „*честота на дьобройловска вълна*": тя е *брой избори*, произхождащи от фундаменталната дуалност на физическата реалност, изявена от квантовата механика, *за единица време*. Броят избори е *безразмерна* физическа величина, фактически *информация*, и следва да се измерва в двоични единици – битове. Последната формула тогава ни казва, че на нещо, което няма „самò по себе енергия" – да наречем израза, отделен в кавички, *енергия на покой* по аналогия с израза „маса на покой" в специалната теория на относителността, – тъй като е просто и единствено информационен процес, протичащ във времето, следва да препишем енергия, която по същата аналогия можем да наричаме ***релативистка*** *енергия*.

Двойно подчертаният термин „релативистка" ни насочва към същността на основанията за приравняване или не на двете уравнения на Айнщайн, произтичащи от негови работи, публикувани в непосредствено съседство през 1905 година. Ако следваме буквално неговата идея, развита и подчертано експлицирана по-късно в концепцията за скритите променливи, такова приравняване е неправомерно, тъй като те следва да се разглеждат само и единствено в различни отношения: от една страна, енергетично квантуваното взаимодействие и от друга, континуално енергетичното съдържание като маса.

Ако се следва, обаче, духът на творчеството на Айнщайн по-нататък и особено неговата перспектива, намерили израз например в приравняването на инерциалната и гравитационната маса или в равноправието на всички отправни системи, по-скоро трябва да се обсъжда тяхната еквивалентност. По отношение на принципа на относителността, така както го формулира през 1918 г. (Einstein 1918: 241), това означава да се премине към инвариантност спрямо всички морфизми, вкл. и дискретните, а не само за дифеоморфизмите. Може би се налага да бъде пожертван – или по-скоро, сведен до частен случай – и „принципът на Max".

Изглежда такова „голямо обединение" ни подсказва съседното във времето публикуване на двете работи от Айнщайн, което предполага, че ако бихме могли да се върнем още малко назад и да надникнем в съкровената му вътрешна лаборатория, те биха били „едно и също". С тяхното излизане в две различни, макар и последователни работи се датира началото на раздалечаване, кулминирало с годините в неприемането и набедената „непълнота" на квантовата механика.

Тук обаче възниква трудност от методологично, формално математическо и фундаментално онтологично естество. Приравняването на двете уравнения изисква такова за ‘континуално’ и ‘дискретно’ и както ще видим – за ‘крайно’ и ‘безкрайно’, за различните видове канторовски безкрайности. Сега двойно подчертаната по-горе дума „релативистка" вече ни се разкрива откъм своето пълно съдържание: става дума за ‘относителност’, по-обща, отиваща отвъд, но и продължаваща делото на Айнщайн. Оказва се, че всъщност подходът е отдавна развит от Скулем в качеството на решение на парадокса, носещ неговото или – и неговото име. Това, което трябва да направим – към края на втората част от книгата – е само да изясним физическото му тълкуване и смисъл.

Уравнението $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{mc}^2$ от такава гледна точка казва, че всяко нещо се състои от и взаимодейства като *непрекъсната* енергия, докато $\boldsymbol{E} = \hbar\boldsymbol{\nu}$ – че *също така* и *заедно с това* всяко нещо се *състои от* и взаимодейства като дискретни порции енергия, кванти. Тяхното приравняване $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{mc}^2 = \hbar\boldsymbol{\nu}$ означава, че можем и трябва да се откажем от разделянето им в различни отношения, а именно „само по себе си" и „взаимодействие" и да застанем на по-универсалната позиция за относителност дори и на континуално и дискретно, на крайно и безкрайно. Тя вече е развита от Скулем още през 20-те години на XX век и остава единствено да се пренесе и интерпретира по отношение на Айнщайновия принцип на относителността като негово обобщение и спрямо дискретните морфизми. Но по всичко личи, че тогава трябва да се откажем от „принципа на Max" (Einstein 1918: 241-242) и да предположим хипотезата за информационния характер на т. нар. тъмна енергия и тъмна материя и с това да ги приравним.

Следователно допустима е *хипотезата за нарушаване „принципа на Мах": не само маса (енергия), но и информационен процес може да предизвика гравитационно поле и ефекти*. Обратно, поправъчният член, съдържащ космологичната константа, която по начало има глобален характер, може да се тълкува като сумарна гравитация, породена от информационни процеси. Айнщайн пише:

> *В нашия свят наистина материята не е равномерно разпределена, а е концентрирана в отделни небесни тела, пребивава не в покой, а в (по-бавно от скоростта на светлината) относително движение. Обаче е напълно възможно, щото средната („естествено определена") пространствена плътност на материята, взета за пространства, които обхващат твърде много неподвижни звезди, да е една почти константна величина в света. В този случай уравнението (1)* [„$\mathbf{G}_{\mu\nu} = -\varkappa\left(\mathbf{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{T}\right)$" (Einstein 1918: 243)] *трябва да се допълни с допълнителен член от вида на λ-члена; …* (Einstein 243-244).

В настоящия контекст особено впечатление прави една „почти" незабележима дума, която, за да я подчертая сега още повече, ще поставя в курсив: онова, което се нарича понастоящем космологична константа, „да е една *почти* [nahezu] константна величина в света". Не само с нея, но и с целия цитиран пасаж явно се подсказва – без по едни или други причини да я афишира – идеята за (много слаба) неадитивност на масата (енергията), при положение, че цялата работа е центрирана около експлицитното формулиране на „принципа на Мах" (Einstein 1918: 241). В резултат на такава много слаба неадитивност – било то с положителен (при сферична геометрия), или с отрицателен знак (при хиперболична) – „средната („естествено определена") пространствена плътност на материята, взета за пространства, които обхващат твърде много неподвижни звезди", ще варира почти незабележимо и следователно ще е „една почти константна величина в света".

И така, може да се постави въпросът за еквивалентността на два подхода, а именно Айнщайновият: „принцип на относителността", „принцип на Мах", (много слаба) неадитивност на масата (енергията); обобщаване на „принципа на относителността" за дискретни морфизми и на „принципа на Мах" за информационни процеси и възстановяване адитивността на масата (енергията) чрез точен количествен израз за поправъчен член за маса (енергия), дължаща се на изменение на количеството информация в даден обект за други обекти. Реставрирането на адитивността в граничния случай на вселената като цяло ще се представя от добавъчния член на прословутата „космологична константа”, въведена в „поправеното” уравнение:

$$\boldsymbol{G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}T\right)} \quad \text{(Einstein 1918: 243)} \qquad (11)$$

Тогава тази, да приемем, намекната чрез почти незабележимото „почти” нова корекция би изглеждала така:

$$\boldsymbol{G_{\mu\nu} - \lambda(g_{\mu\nu}) = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}T\right).} \qquad (12)$$

И ако $\lambda(\boldsymbol{g_{\mu\nu}})$ има най-простата възможна, линейната форма, тоест: $\lambda(\boldsymbol{g_{\mu\nu}}) = \boldsymbol{\lambda g_{\mu\nu}}$**,** ще се озовем в предходното уравнение.

Срещу подобно тълкуване, може би подсказано от самия Айнщайн в качеството на хипотеза, не можем да имаме нищо против.

„Четвъртото” съотношение за неопределеност, а чрез него и „първите три”, придобива ясен физически смисъл. Приписвайки енергия на всеки информационен процес (т.е. на всяко количество фундаментални физически избори, измерени в битове, за единица време), то следователно минимално възможната енергия е за един избор (бит): $\boldsymbol{E.t} \geq \hbar.\mathbf{1}$ **.**

Дали тогава не би било възможно да тълкуваме квантовите корелации като гравитационно поле? Отговорът на този въпрос ще се търси по протежение на цялото изследване. Логическата структура на хипотезата може да се изясни така. Разбира се, всяко физическо взаимодействие ограничава степените на свобода на взаимодействащите обекти, т.е. поражда корелации. Дали обаче и обратното е вярно? Дали и на всяка корелация между отдалечени физически обекти, каквито са квантовите корелации, трябва или можем да съпоставим физическо взаимодействие. Намаляването на степените на свобода е величина, която може да се измери в битове. На нея, според току-що вече широко изтълкуваната последна формула на Айнщайн бихме могли да съпоставим енергия. Така и на квантовите корелации при явленията на сдвояване ще съответства строго определена енергия – изключително малка (поради стойността на константата на Планк), но не нулева! *В какви експерименти* би могло да се потвърди или отхвърли нейното съществуване?

Въведената няколко абзаца по-горе „относителна" формулировка на квантовата механика има също така предимството, че изяснява и формализира нейния холистичен аспект, многократно изтъкван преди всичко при философски разглеждания. В подобна на току-що изложената по-горе трактовка, константата на Планк определя минимално възможната степен на взаимодействие между цяло и част във физическа система. Условието за това е наличие оператор и на времето, с което обаче законът за запазване на енергията и самотъждествеността на физически обект се оказват нарушени или проблематични, предполагайки възможност и за някакво обобщение.

И *СТО* и *КвМ* притежават абсолютност (или едностранчивост), аналогична в известно отношение (отчасти преодоляна от *ОТО*). Така както *СТО* абсолютизира частицата за сметка на светлината чрез понятието „отправна система", така *КвМ* абсолютизира макрообекта за сметка на микрообекта чрез понятието „уред". Очевидно е, че и „отправна система", и „уред" се оказват привилегировани по еднаква схема, а именно поради привилегироването на човека в качеството на познаващоТО, спрямо което и двете понятия характеризират посредници, пратеници между него и обектите, „светейки с отразена привилегированост".

Квантовата информация разчупва схемата, като вече самите обекти „се познават помежду си" посредством квантовите корелации и следва да се обоснове по-общо съхранение (респ. самотъждественост) чрез енергия ***и*** квантови корелации, или във философски смисъл на единна и в общия случай неделима цялост съществуване-познание, субстанция на която да е информацията.

ТЕОРЕМАТА НА ФОН НОЙМАН ЗА ОТСЪСТВИЕ НА СКРИТИ ПАРАМЕТРИ В КВАНТОВАТА МЕХАНИКА

Формализъм и реалност – Как хилбертовото пространство съчета матричната механика на Хайзенберг и вълновата механика на Шрьодингер – Вълново-корпускулярният дуализъм от логическа гледна точка – За отношенията по Ръсел – Статията на Шрьодингер за еквивалентността на двете формулировки – Условията за такава еквивалентност – Материята като „функция от нейните граници" – Квантови корелации и неразрешими твърдения – Отношения „сами по себе си" и релационна онтология – Отново за „елемента на реалността" – Платоновата „пещера" в компютърната ера – Дуалните векторни пространства – Хипермаксималните оператори и физическите величини – Уравнението на Шрьодингер – „Ян и Ин" – Лагранжовият и Хамилтоновият формализъм на механиката – Подходът на Гибс – Законът за запазване разширяването на фазовия обем – „Скрити параметри" и „възможни светове" – Действителен обект, оказал се във възможно състояние на друг – δ-функцията на Дирак – разпределенията на Шварц – Несепарабелни и обзаведени хилбертови пространства – А лоренцовата инвариантност? – Вълново-корпускулярният дуализъм – Битието на квантовия обект като въпрос – Отговорът, или отново за избора – Шеъновата информация – „Кърлинг" на действителното от случайностите – Едновременност и „едносъбитйност" – Относителност на дискретно и континуално – „Бра и кет вектори" и тяхното пространство – Теоремата на Рис за представянето – Слаба и силна топология – Невъзможността на „абсолютно неподвижното тяло" – Суперквантови корелации? – Аксиомите на Уитман за квантовото поле – Подходите на Гибс и Айнщайн за статистическо описание – Общността на очертания контекст и смисълът на теоремата на фон Нойман – Причинност по фон Нойман – „Даоистка" илюстрация за нея – За „скритите параметри" – Ръселовите „несиметрични транзитивни отношения" – Една или повече времеви последователности – Аксиомата за избора и повторният избор – Ако вместо индетерминизъм постулираме корелациите, а него извеждаме ... – „Принцип на несигналността" и „несигнални теории" – Едновременност в квантовата механика и в теорията на относителността – „Едновременна неизмеримост" и „едновременна неразрешимост" – Предпоставките на теоремата – Цалисова информация – Точното твърдение на теоремата и неговият смисъл – Ермитови, максимални и хипермаксимални оператори – Скулемовска интерпретация на аргумента АПР – Отново за „дуалистичното питагорейство" – Изометрични и унитарни оператори – Времето като „скрит параметър" – Запазване и тъждественост

В настоящата глава ще се върнем малко назад във времето – от 1935 към 1932 година, – за да обсъдим философското значение на забележителната книга на Джон фон Нойман „Математически основи на квантовата механика", като – в съответствие със задачите на настоящата книга – ще се съсредоточим върху следните въпроси:

1. Философското значение на формализма на хилбертовите пространства, обединил матричната механика на Хайзенберг с вълновата механика на Шрьодингер в съвременната квантова механика.

2. Теоремата за отсъствие на скрити параметри и критиката на причинността (глава IV, параграф 2, озаглавен „Доказателство на статистическите формули).

Започвайки с първата точка, да проследим и коментираме как Шрьодингер обосновава еквивалентността на двата формализма на квантовата механика[30], за да можем да изясним границите и логическите условия за нея.

В Нобеловата си реч Шрьодингер подсказва философската същност на разликата и единството на двата подхода по следния начин:

> *Тъкмо с пълната сила на логически закон между едно*
> *Или-Или (точковата механика)*
> *и едно*
> *Както-така и (вълновата механика)*
> *се сблъскваме тук* (Schrödinger 1967: 99).

В какъв смисъл Шрьодингер говори за логически закон? Става дума за своеобразната еквивалентност на логическата равнозначност и на логическата неравнозначност при заместване с отрицание по следния начин:

$$\{\boldsymbol{A} \not\Leftrightarrow \boldsymbol{B}\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \neg \boldsymbol{B}\} \qquad (13)$$

Тоест „Или $\boldsymbol{A}$, или $\boldsymbol{B}$" на матричната механика е еквивалентно на „Както $\boldsymbol{A}$, така и не-$\boldsymbol{B}$" на вълновата механика. В случая, разбира се, става дума за една интерпретация на класическата формална логика в термините на квантовата механика, при която фон Наймановата „едновременна неразрешимост" е тълкувана

---

[30] В работата на Карлос Касадо „Кратка история на математическата еквивалентност между двете механики" (Casado 2008) се проследява изчерпателно приноса на множество математици за утвърждаването ѝ.

като „⇎", а „¬" – като заместване със съответно твърдение за спрегнатата физическа величина (напр. за пространствената координата, такава е импулсът), а ***A*** и ***B*** са „квантови" твърдения, т.е. проекционни оператори според разглеждането на фон Нойман.

Особено вълнуващото за нас в случая е условието за горната – оказала се в крайна сметка логическа – еквивалентност между матричната и вълновата механика. Очевидно това е законът за изключеното трето, чрез непосредствено следствие от който ще се гарантира идемпотентността на логическото отрицание:

$$\neg\{\neg \boldsymbol{B}\}\Leftrightarrow\boldsymbol{B} \tag{14}$$

Тъкмо интерпретацията на последното, едва ли не тривиално твърдение в термините на квантовата механика изостря напрежението. То означава тъкмо отсъствие на сдвоените състояния, от една страна, и степените на декохеренция, т.е. протичането ѝ като реален процес във времето, а не като скокообразна, почти мистична редукция на вълновия пакет до измерената стойност, от друга.

Обратно, наличието на сдвоени състояния влече нееквивалентност на матричната и вълновата механика. Същността на тази нееквивалентност представлява безкрайномерното обобщение – т.е. за хилбертово пространство в общия случай – на несъвпадението на ковариантни и контравариантни координати, добре известно в крайномерния случай от формализма на общата теория на относителността.

Обсъжданото несъвпадение обаче има и друго, собствено математическо и заедно с това логико-онтологично измерение. Докато матричната механика е формулирана направо върху множеството от безкрайномерни матрици от комплексни числа, то вълновата механика ги тълкува – посредством манифестираната еквивалентност – като определен тип оператори, т.е. като преобразования на нещо, а именно на хилбертовото пространство, чиито точки са $\boldsymbol{\Psi}$-функциите, на свой ред интерпретирани като състояния на квантови обекти. Условието за едно-еднозначно съответствие между матрици и оператори в този случай е деликатен математически въпрос, чието философско осмисляне изисква натрупването на още гледни точки и поради това ще се отложи за по-нататък.

Още тук обаче можем да изясним логико-онтологичната основа на съответствието. В случая на матрици направо разполагаме с „неидентифицирани" в логическо отношение обекти[31], които посредством съответствие с операторите тълкуваме като отношения, т.е. като подмножества на някое декартово произведение. За да си позволим второто, а оттук и това тълкуване, трябва да разполагаме с аксиомата за избора (или достатъчно мощен по-слаб вариант). Ако останем обаче при матриците и тяхната логическа амбивалентност, не се нуждаем от аксиомата за избора и нейната мощна подреждаща сила.

Ако обаче, обратно, аксиомата за избора ни е „отпусната", разликата между матричното и вълновото представяне придобива следния логико-онтологичен облик. От една страна, имаме „чисти" отношения, а от друга, отношения, които се представят чрез свойства на *нещо*, а именно $\boldsymbol{\Psi}$-функциите като състояния на квантови обекти; следователно, от първата страна, релационна онтология в собствен смисъл и логика от тип, предложен от Ръсел, а от втората – по-традиционната субстратна и някаква съответна предикатна логика. Тогава може да се постави въпросът на Ръсел (Russell 1993: 56)[32] дали всяко отношение е представимо чрез предикации и чрез това сводимо до свойства. Следва да се подчертае, че аксиомата за избора е само условие да се постави такъв въпрос в качеството на интерпретация на съвпадението/несъвпадението на матричната и вълновата механика, т.е. той да има смисъл, но няма отношение към избрания отговор.

Ако приемем за даденост сдвоените състояния и разполагаме с аксиомата за избора, с това вече сме предопределили съществуването на „чисти" отношения, които по принцип не могат да бъдат свойства на нещо, „скрито параметризиращо" ги. Оттук Ръселовият въпрос за „чисти" отношения и кореспондиращия с него за

---

[31] Този подход също е развит от фон Нойман в серия статии от 30-те и от 40-те години (Neumann 1929; 1936; 1938; 1940; 1943; 1949) относно операторни алгебри, които носят понастоящем неговото име. Въпреки че генетичната връзка с операторите в хилбертови пространства е съхранена дори в названието, използването на аксиоматичен подход напълно ги освобождава от необходимост за подобна интерпретация: това са просто обекти, които се подчиняват на изискванията на математическата структура „пръстен". Подходът е развит в C*- и W*-алгебрите (Bratteli, Robinson 1979).

[32] Цитираното място е интересно с това, че непосредствено след него съществуването на „чисти" отношения се обосновава чрез несиметричните транзитивни отношения, понеже последните не могат да се сведат до предикации (Russell 1993: 57). Некомутативните оператори могат да се представят именно като несиметрични транзитивни отношения и по този начин по ръселовски да се обоснове съществуването на чисти отношения в областта на квантовата механика.

„собствено” релационна онтология получава най-малкото умерено положителен отговор: да, съществуват, като такива може да се интерпретират нередуцируемите $\boldsymbol{n}$-торки проекционни оператори, съответстващи на сдвоените състояния.

Поставим ли обаче обратния въпрос: дали всяко свойство и предикация може да се представи като частен случай на отношение – да го наречем екстремен вариант на положителен отговор на Ръселовия въпрос, – то интерпретирайки го пак в термините на квантовата информация, сред авторите преобладава предпазливостта[33]: квантовите корелации са реално съществуваща област, но не първооснова на света. По-нататък ще обсъдим тези гледни точки, както и техните условия и съответствие с експерименталните данни.

Всичко това показва важността на въпроса за еквивалентността на матричната и вълновата механика. Да се върнем оттук към обосновката ѝ от Шрьодингер в оригиналната статия от 1926 година:

> *В последващото трябва сега да се разкрие твърде интимната* вътрешна връзка *на хайзенберговската квантова механика и моята вълнова механика. От формално-математическа гледна точка навярно трябва да я означим като тъждественост на двете теории. Мисловният ход на доказателството е следният:* (Schrödinger 1984(III): 144).

Преди да проследим скицата на доказателството, да напомним, че нашата цел е логико-онтологичната същност на това тъждество и неговите граници,

---

[33] Едно подчертано изключение от преобладаващия умерен тон са възгледите на Мермин. Той резюмира своята работа със знаменателното заглавие „Какво е това, което квантовата механика се опитва да ни каже?” по следния начин: „Изследвам дали е възможно да се придаде смисъл на квантово-механичното описание на физическата реалност чрез приемане като собствен предмет на физиката корелациите и единствено корелациите и отделяне проблема за разбиране на природата на обективната вероятност в индивидуални системи и от даже още по-трудния проблем за природата на съзнателното разбиране [conscious awareness]. Резултатът е перспектива на квантовата механика, поддържана от някои елементарни, но недостатъчно изтъквани теореми. Независимо дали това е адекватно като нов *Weltanschauung*, тази гледна точка към квантовата механика осигурява различна перспектива, от която да се преподава предмета или да се обяснява неговия особен характер на хора от други области” (Mermin 1998: 753). В статия под същото заглавие и в същото списание две години по-късно той „представя нова интерпретация на квантовата механика”, която „разширява значението на „измерване” да включва всички факти, посочващи свойства [property-indicating facts]” (Mermin 2000: 728).

т.е. в кои случаи двата подхода престават да бъдат еквивалентни и до какви следствия води това.

> *Хайзенберговската теория свързва решаването на проблем в квантовата механика с решаването на система от безкрайно много алгебрични уравнения, чиито неизвестни – безкрайни матрици – са съпоставени на класическите позиционни и импулсни координати на механични системи и функции на същите и се изпълнява своеобразен* аритметичен закон [*Rechengesestze*]. (*Съпоставянето е такова: на* една *позиционна, на* една *импулсна координата или* една *функция на същите съответства винаги тъкмо* една *безкрайна матрица*) (Schrödinger 1984(III): 144).

Може да се добави добре известният факт, че произведението на матрици в общия случай не е комутативно. Матриците могат да се разглеждат като декартови произведения или подмножества на такива, както и отношенията. Оттук несиметричните транзитивни отношения, чрез които Ръсел – видяхме по-горе (Russell 1993: 56-57) – обосновава наличието на „чисти” отношения, които не са сводими към свойства, се интерпретират тъкмо чрез некомутиращи матрици. Появата на „чисти”, или в термините на квантовата информация – квантови корелации, е дотолкова важно, че може да се разглежда като причина за въвеждането на матрици за описание на физическите величини; те обобщават физическите величини, приемащи стойности числа, тъй като последните могат да се осмислят като матрици от един ред и един стълб.

> *Сега най-напред ще покажа* (§§ 2 *и* 3) – продължава Шрьодингер, – *как може да се съпостави на всяка функция на позиционни и импулсни координати една матрица по такъв начин, че тези матрици във всеки един случай изпълняват Борн-Хайзенберговите формални аритметични правила (към които причислявам и т. нар „квантово условие” или „правило за заместването”). Това съпоставяне на матрици и функции е* общо, *то не казва още съвсем нищо по отношение на* отделната *механична система, която тъкмо е налице, а посоченото е за всички механични системи. (С други думи: отделната хамилтоновска функция не участва още в закона на съответствие.) Съпоставянето е обаче, от*

> *друга страна, още* неопределено във висша степен. То следва именно чрез посредничеството на една произволна *пълна ортогонална система от функции с дефиниционна област*: цялото конфигурационно пространство. (NB: *не pq-пространството, а q-пространството*.) *Първоначалната неопределеност на съпоставянето лежи тъкмо в това, че ролята на посредник може да носи* произволна *ортогонална система* (Schrödinger 1984(III): 144-145).

Приведеният току-що абзац е от голямо значение за философското осмисляне на значението на условията за еквивалентност на двете теории, положени в темелите на квантовата механика. И така, за да имаме съответствието между матрици и функции, е необходима произволна, но ***ортогонална** система*. Следователно: 1) ако системата не е ортогонална, съответствие няма да има, което ни насочва към вече описаното сравнение с контравариантни или ковариантни координати, вектори, тензори в „крива" в общия случай координатна система; 2) но ако системата е ортогонална, тя може да е *произволна* и да е налице разглежданото съответствие. С ортогонална система се имплицира възможността за интерпретация в термините на стандартна логико-онтологична основа, т.е. на някакъв „свят", в който отношенията са изцяло представими като свойства на *нещо*, *и то дори цяла безкрайна съвкупност от светове*, за всеки един от които продължава да е валидно съпоставянето. Така всички тези светове са *от неща, от субстанция,* т.е. *материални светове*, макар и различни: тяхната релационна онтология е *изцяло сводима* до субстанционална, точно както в логически план отношенията – до свойства на неща.

По-нататък сред всичките тези възможни, но до един материални светове ще се избере „най-добрият" чрез фиксиране на хамилтониана, комутиращ с всяка матрица на физическа величина (т.е. *също така и* с онези, които не комутират помежду си), и чрез това – присъединяване на закона за запазване на енергията с прилежащото му обичайното време, течащо равномерно. Така се оказваме снабдени с универсален критерий за тъждественост, който ни позволява да *предицираме „едновременно неразрешими свойства"* (с термина на фон Нойман) *на едно и също нещо*, самотъждествено чрез запазването си по отношение на вездесъщата величина на енергията[34]. Виждаме, че ортогоналността, онтологично представима като мате-

---

[34] Можем да представим нагледно нещата по следния прост начин: двумерен вектор, който се проецира върху абсцисата и ординатата. Свойството „дължина на векторите" (т.е. енерги-

риалност на света във физическия смисъл на енергийна субстанционалност, е предпоставка да се избере свят, притежаващ „благото" да се запазва, *продължавайки* да бъде нашият, с други думи – приемственият и в този смисъл *най* -добрият.

Разполагайки чрез хамилтониана не просто с някой материален свят, а с *точно един* измежду неопределено и безбройно многото, неявно сме се възползвали с аксиомата от избора и чрез нея сме получили во веки веков достъп и до „благото" на добрата наредба и тъкмо в това се състои той да е най-добрият: че имаме осъществен безкраен избор, какъвто и да е той. Благото на материалния свят, неотделимо от тегобата на времевостта и смъртта, е, че може не само да се подреди, но да се подреди *добре*!

С база в нашия добре подреден свят, можем да започнем да обмисляме инвазия в неведомото, а то и сакрално и нуминозно.

Предстои да осмислим как вече при една определена ортогонална система ще се съотнесат матричният подход на Хайзенберг и вълновият на Шрьодингер:

> *Според това матриците се образуват така по твърде общ начин, който изпълнява общите аритметични правила, които ще покажа в § 4 от следващото: решаването на* отделната*, характерна за* отделния *проблем алгебрична система, която свързва* матриците *на позиционните и импулсните координати* с матрицата *на* хамилтоновската *функция и която авторите обозначават като „уравнения на движението" се извършва без остатък, поради това че ролята на посредник се носи от една* определена *ортогонална система; а именно от системата* собствени функции *на онова частно диференциално уравнение, което образува основата на моята вълнова механика. Решаването на естествената*[35] задача за граничните стойности *на това диференциално*

ята) е валидно и за самия вектор, и за проекциите по двете оси, които можем да смятаме за „едновременно неизмерими". Като всеки прост наглед и този е неадекватен в множество други отношения и заради това „куца".

[35] „Обикновено се оказва, че естествените безкрайно отдалечени граници образуват сингуларност на диференциалното уравнение и еднозначно се допуска само едно гранично условие „за оставане крайно" (Schrödinger 1984(III): 158). Това, че единственото гранично условие, може обикновено да се интерпретира като „изискване за крайност" в полюса на философската абстракция, е самò по себе си натоварено с дълбок смисъл: неговата същност ще се опитаме да изясним във втората част на книгата. Крайното е разположено компактно между двете части на като цяло некомпактната област на актуално безкрайно малкото и актуално

> *уравнение е* напълно еквивалентно *с решаването на* хайзенберговския *алгебричен проблем. Всички хайзенберговски матрични елементи, от които можем да се интересуваме при предположение, че те определят „вероятностите за преход” или „интензивностите на линиите”, могат действително да се решат, веднага щом е решена* задачата за граничните стойности чрез диференцирания и квадратури. *Впрочем на тези матрични елементи или величини се придава във вълновата механика едно съвсем нагледно значение на амплитуди на хармониците на електричния момент на атома. Интензивността и поляризацията на излъчената светлина следователно може да се разбере на* основата на теорията на Максуел-Лоренц (Schrödinger 1984(III): 145).

Би следвало много внимателно да се прочете горният цитат, тъй като тук неявно е дадена *важна, доста необикновена и нова философска идея*: материята, ако е фиксирана, т.е. всяка дадена материя, такава на един точно определен свят, е еквивалентна на неговите граници, стига те да са точни[36], т.е. за всяко нещо да можем еднозначно да кажем, че принадлежи на този свят, с други думи има *тази* материя. Тогава, ако всяко едно нещо от един свят има свойството да се запазва, то това свойство има и самият свят. Оттук материята, обикновено разбирана като, и то само като крайна, можем в общия случай да разглеждаме в качеството на „физическа причина” за отсъствието на неразрешими твърдения. За всяко нещо можем да решим дали то е материално, „направено” е от субстанцията на въпросния свят, или че не е. В първия случай му принадлежи, попада в неговите граници, очертани от общия субстрат на всяко негово нещо, във втория това не се случва.

Обратно, ако трето не е дадено, т.е. в света няма неразрешими твърдения, то и погранични явления, трети неща, „област на здрача” няма. Доколкото обаче квантовите корелации са именно такива, от това следва съществуването на неразрешими твърдения, което между впрочем легитимира ясно философията като

безкрайно голямото (вкл. и в смисъла на Робинсън за нестандартна, т.е. несобствена интерпретация на анализа). Така „разполовеното” от крайното безкрайно може да поддържа своето единство само чрез отношения, чрез корелации, но не и чрез материалност, предоставена изглежда единствено на крайното.

[36] Ако светът е точно определен, то с това все още не се изисква неговите граници също да са точно определени.

онази област от човешкото познание – за разлика от науките, особено „*точните*", – чийто предмет се очертава тъкмо от такъв тип въпроси, *неразрешими*.

Може да се изясни логическият смисъл на тези трети неща като свойства-отношения, или дори „свойство-отношения", т.е. отношения, които, от една страна, не са представими чрез две или повече свойства, но от друга, могат да се разглеждат като подобни на едно свойство, със свой имплицитен субстрат и с това повдигат въпроса дали всяко свойство не имплицира нещо такова – „свойство-отношения". В областта на квантовата информация утвърдителен отговор, че – да, имплицира, е предложен в концепцията на Мермин за квантовите корелации като фундаментални (Mermin 1998; 2000).

При приемане на отрицанието на Шрьодингерова еквивалентност на „или-или" (1) и „и-и" (2) във връзка с квантовата механика този хибриден тип съответства на непразно сечение от областите (1) и (2). Очевидно класическата логика, дори и интуиционистката, не помагат. Проблемът е не толкова в това, че броят на истинностните стойности „рекурсивно" нараства да безкрайност, а по-скоро, че като резултат изчезват границите между пропозиционална и логика от първи, втори и т.н. ред, което би било добре да се има предвид във втората част, когато въпросът за това размиване чрез появата на стълба или континуум между свойство и отношение, а и между предикат и пропозиция, ще се подхване отново в контекста на Скулемовата относителност.

По-нататък нобеловият лауреат за 1933 г. обсъжда и как, ако са дадени числено матриците, еднозначно – при обсъдената вече необходимост за това на ортогоналността – се определят собствените функции; т.е. в нашата току-що предложена интерпретация чрез „субстанция" и „граници на свят" от последните еднозначно се фиксира първата:

> *Във всеки случай обаче е от интерес следното* допълнение *на изведеното предложено горе доказателство за еквивалентност: ако еквивалентността съществува действително, тя съществува и* в обратна посока. *Не само може – както по-горе се показа – да се образуват от матриците собствени функции, а също така и обратно, от числово дадени матрици – собствените функции. Последните следователно не образуват някак едно* произволно и специално, *поддало се на нуждата от нагледност „телесно обличие" на голия мат-*

> *ричен скелет; което фактически щеше да обоснове епистемологично предимство на последния* (Schrödinger 1984(III): 160).

Това положение на нещата може просто да се онагледи по следния начин. Ако са дадени параметрична фамилия ограничени повърхнини, като параметърът ще съответства на материята на света, представен от една повърхнина, то точно една такава и следователно един параметър ще съответстват на тези граници, стига те да са добре определени (без да навлизаме в математически подробности). Използвайки метафората на Шрьодингер, субстанцията не е само „телесно обличие", което е случайно и напълно несъществено спрямо скелета от отношения, но е изцяло определена и дори еквивалентна на тях, служи те да бъдат заместvани в своята цялост. Във втората част на книгата, посветена по-скоро на логическа, теоретико-множествена и метаматематическа гледна точка към квантовата информация, ще бъде обсъдена следващата от аксиомата за избора Скулемова относителност на интерпретацията (тук „телесното обличие") на аксиоматиката (тук „скелета от отношения"). Шрьодингеровата еквивалентност на „или – или" с „и – и" тълкуванието е много тясно свързана с необходимото съществуване на несобствена интерпретация, което после ще разискваме.

В качеството на общо, философско и методологично обосноваване на симетричното отношение между двете теории (и в изложението непосредствено предхождащо) е едно разсъждение, на което следва да се обърне фотографски внимание, доколкото твърде се доближава до една от водещите гледни точки в тази книга, а от друга страна, но по различен начин – до вече подробно обсъдената концепция на Айнщайн, Подолски и Розен за „елемент от реалността", върху която те базират своето доказателство за непълнотата на квантовата механика:

> *Днес не са малко физиците, които в смисъла на* Кирхоф *и* Мах, *съзират задачата на физическата теория единствено в едно* възможно най–икономично *математическо описание на емпиричната връзка между наблюдаваните величини, т.е. описание, което предава връзката по възможност без посредничество на принципно ненаблюдаеми елементи. При такава гледна точка математическата еквивалентност е едва ли не равнозначна на физическа еквивалентност. В дадения случай най-вече може да се види известно предим-*

> *ство на математическото представяне в това, че то – поради своята съвършена абстрактност – не съблазнява да се формират времепространствени картини на атомните събития, която може би трябва да остане принципно неконтролируема* (Schrödinger 1984(III): 160).

Що се отнася до становището на самия Шрьодингер по отношение на такъв физико-математически изоморфизъм то е подчертано предпазливо:

> *В останалото, на тезата, че математическата еквивалентност е равнозначна с физическа еквивалентност, може да се признае изобщо само условна валидност* (Schrödinger 1984(III): 160-161).

Понастоящем, в компютърната ера можем да перифразираме Платоновата притча за пещерата посредством обсъжданата физико-математическа еквивалентност и на основата на един „хардуерно-софтуерен дуализъм". Можем да се представим света като компютър с пространствено-времеви „монитор", на чийто екран сме самите ние и познатият ни материален свят. Използвайки аналогията с компютър, предполагаме, че в нашата основа, както на образите, които виждаме на монитора, са дълги поредици числа или математически структури, взаимодействащи помежду си по определени закони. Образуваният чрез хардуера образ на екрана е в някакъв смисъл едно и също със софтуерната си основа. Пълният детерминизъм на нашите досегашни програми трябва да се изключи от аналогията, съществена е само числовата, математическа основа на „видимия" в компютрите ни свят.

Така може би и ние, като персонажи на един три- или четириизмерен екран подозираме, че сме в пещерата, по чиито стени играят сенки в привидното многообразие на материалния ни свят, но те са само образи на скрита числова или математическа същност.

Това ***не*** *предполага*, че има някакъв външен творец, който е написал „софтуера" и го е „стартирал" върху отделно създаден пак от него „компютър", запазвайки неизменно трансцендентната си, мета-позиция, по отношение на своята креация. По-скоро светът поражда вътре в себе си собствения си творец и чрез това се самосъздава, и то в изначална самореференциалност и неразрешимост, чрез което възниква и времето, свеждащо фаталната противоречивост тъкмо до неразрешимост, безопасна поради възможността за непрекъснато отлагане. Дори можем да твърдим, че същността на времето е тъкмо в това непрекъснато отлагане на окончателното решение и замяната му с частични, непротиворечиви, но валидни само за даден момент или период решения.

По-нататък, при обсъждане на концепцията за квантов компютър, ще може да се види, че чрез нея и чрез обобщаването на елементарните двоични състояния, битовете до кюбитове, т.е. до квантови състояния, тълкуванието на света като (вече квантов) компютър престава да бъде само метафора и се превръща във философска и методологична позиция. От друга страна, нашият днешен свят и виртуалният му образ вътре в себе си, разширяването му и придобиването на все по-голяма значимост сякаш по още един начин ни подсказват същия подход.

В пътя, следван от Шрьодингер при показване на „обратната” еквивалентност, т.е. че матриците на свой ред също така *еднозначно* определят вълновите функции, прави впечатление изключването на посредничеството на плътността на вероятността, която непосредствено се екстраполира от опитните данни. По този начин очевидно се предявява претенция за не- или над-емпирична субстанциална еквивалентност на двата подхода:

> *„В уравнението*
>
> $$\boldsymbol{q_i^{ik} = \int u_i(x)\,.\,u_k(x)dx} \qquad (15)$$
>
> лявата *страна се мисли числено дадена и се търсят функциите* $\boldsymbol{u_i}(\boldsymbol{x})$. (NB: *„плътността на вероятността” умишлено е пропусната,* $\boldsymbol{u_i}(\boldsymbol{x})$ *трябва да бъдат самите ортогонални функции.*) (Schrödinger 1984(III): 160-161.)

Най-сетне валидността на еквивалентността се обсъжда и в общия случай, когато системата от функции не е дискретна:

> *Във всички формули положената в основата ортогонална система се разглеждаше като напълно* дискретна *система от функции. Тъкмо в най-важните случаи на приложение обаче това* не *е така. Не само при водородния*

> *атом, а и при висшите атоми вълновото уравнение трябва да притежава освен един линеен спектър – непрекъснат спектър от собствени стойности, който се проявява в частност в непрекъснатите* оптични *спектри, които клонят към границите на сериите* (Schrödinger 1984(III): 159).

Валидността на еквивалентността се потвърждава и в този случай:

> *Главната цел на тази* [горната] *бележка е тъкмо формалната връзка на двете теории да се установи възможно най-ясно и това със сигурност не се изменя по същество с появата на непрекъснат спектър* (Schrödinger 1984(III): 159).

Да преминем отвъд условието за ортогоналност, необходимо за еквивалентността на матричната и вълновата механика.

Още с въвеждане на тензорите в общата теория на относителността с характерното преплитане и преход между ковариантни и контравариантни координати започва вече не само да се обсъжда, но и да се изчислява единството и взаимната корелация между измервателния базис и измерваните стойности. Те биват представени чрез формализма на векторни пространства съответно като ко- и контра-вариантни координати. При изкривени пространства, към които спада псевдоримановото от общата теория на относителността, двата типа координати вече не съвпадат и разликата между тях, характерна за всяка точка, е тясно свързана с диференциалната „кривина” или метричния тензор, представляващ два пъти ковариантния тензор в точката. Изкривените пространства допускат представяне чрез две обичайни плоски пространства (т.е. със съвпадащи ко- и контравариантни координати, при които едното съответства на ковариантното, а другото – на контравариантното пространство), а „кривината” – на ъгъла между тях, който, разбира се, е многомерен.

Можем да онагледим тази идея чрез най-простия ѝ случай, а именно движение на точка по двумерна крива, което във всяка точка от кривата може да се разложи на два ортогонални вектора: тангенциална и нормална съставяща, като отношението на нормалната към тангенциалната съставяща представлява очевидна интуитивна мярка за „кривината” на кривата.

Все пак в този случай, двете същности – в квантовата механика вече взаимно изключващи се, ‵дуални′, или ‵допълнителни′ – тук са едновременно дадени. Изборът и вероятността не се привличат в описанието на първично фундаментално равнище, а се появяват както в класическата физика вторично: или обективно – като статистика на случаи; или субективно – като мярка на нашето незнание за действителното състояние на нещата. Бог *все още няма* нужда „да играе на зарове".

Три типа математически пространства са от фундаментална важност за съвременната физика, поради което и философското тълкуване на връзките между тях и единството им е от особено значение: това са фазовото, хилбертовото и четиримерното псевдориманово (или в „плоския" си вариант – пространството на Минковски). Докато единството на първите две се разкрива още при самото възникване на съвременната квантова механика (Weyl 1927; Wigner 1932; Moyal 1949), формулирана в термините на хилбертовото пространство в епохалната работа на фон Нойман, която обсъждаме в настоящата глава, на основата на работата Шрьодингер (Schrödinger 1984(III): 143-165), показала еквивалентността на матричната формулировка на Хайзенберг и вълновата механика на Шрьодингер, то въведените от Айнщайн и Минковски (Minkowski 1909) пространства от третия тип остават настрана, включително и поради несъответствие в най-фундаментални философски принципи.

С въвеждането на хилбертовото пространство в квантовата механика, което в общия случай е безкрайномерно, матриците на Хайзенберг се оказват линейните преобразования, операторите, строго определено подмножество на които съответства на физическите величини, докато вълновите функции на Шрьодингер, прословутите $\boldsymbol{\Psi}$-функции, са неговите точки и съответстват на състоянията на квантово-механичните системи.

Не по-малко известното уравнение на Шрьодингер има за решение т.н. собствен вектор $\boldsymbol{\Psi_0}$, който е $\boldsymbol{\Psi}$-функция, съответстващ на физическата величина и на нейния оператор, който чрез линейна трансформация на хилбертовото пространство привежда едно състояние, началното, в друго, търсеното – $\boldsymbol{\Psi_0}$.

С въведеното от него понятие „хипермаксимален оператор" (Neumann 1932: 87), което играе съществена роля в теоремата за липса на скрити параметри, фон Нойман установява по същество взаимно еднозначно съответствие между физическите величини, хипермаксималните оператори и възможните състояния на системата при дадено начално. Ако уравнението на Шрьодингер има решение, то операторът, който привежда системата от началното в търсеното състояние, е хипермаксимален, съответства му физическа величина, и обратното. С това единството на матричната и вълновата механика постига съвършенство, пълна еквивалентност между физическите величини (= хипермаксималните оператори в хилбертовото пространство), и възможните състояния на квантово-механичната система при дадено начално – $\boldsymbol{\Psi_0}$-функциите.

Да погледнем и към философското осмисляне на това идеално решение от гледна точка на единството на споменатите три фундаментални пространства за съвременната физика. Във фазовото пространство двете дуални същности, образуват клетки, чиято минимална площ в двумерния случай е фиксирана до константата на Планк чрез съотношението за неопределеност. Ако в духа на установилата се квантова механика се откажем от „четвъртото” съотношение за неопределеност, то енергията $\boldsymbol{E}$ е производната на фазовия обем $\boldsymbol{V}$ – „броя клетки” $\boldsymbol{nh}$ – спрямо времето $\boldsymbol{t}$:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dt}} = h\frac{\boldsymbol{dn}}{\boldsymbol{dt}} \qquad (16)$$

Всъщност тъкмо такъв е смисълът на лявата страна на уравнението на Шрьодингер, в която $\boldsymbol{\Psi}$-функцията участва в качеството на фазов обем на системата. От дясната страна е хамилтонианът на системата, операторът, съответстващ на величината на механичната енергия, който преобразува началното състояние на системата в търсеното ново.

Уравнението на Шрьодингер тогава казва: системата може да премине в такова ново състояние, в което енергията за сметка на изменение на фазовия обем, да я наречем условно термодинамична и означим $\boldsymbol{E_T}$, е равно на изменението на механичната енергия $\boldsymbol{E_M}$:

$$\boldsymbol{E_T} = \boldsymbol{E_M} \qquad (17)$$

За разлика от функцията на състоянието в класическата механика, $\boldsymbol{\Psi}$-функцията е също така и термодинамична същност.

Да се опитаме сега да видим как двете дуални същности, представени като фундаментална клетка във фазовото пространство, са налице в хилбертовото пространство. Разбира се, в случая става дума за философско разсъждение, т. нар. спекулация. По подобие на случая в пространството на общата теория на относителността, те са налице, от една страна, като неговия базис, който – следвайки Нилс Бор – можем да тълкуваме физически като виртуални хармонични осцилатори с линейно и дискретно нарастваща енергия, и от друга, като контравариантните координати спрямо този базис на всяка точка ($\boldsymbol{\Psi}$-функция) в хилбертовото пространство.

Обаче докато в общата теория на относителността съответствието – макар и променящо се от точка в точка с промяна на „кривината" (метричния тензор) – между пространството и неговото спрегнато е взаимно еднозначно, то същото съответствие в квантовата механика, а именно между числовата област на стойностите на един функционал и неговите аргументи функции, е сюрективно, но не е биективно, т.е. ако се опитаме да построим обратното изображение се натъкваме на трудността, че в общия случай на една стойност на функционала съответства множество от праобрази, и то с мощност на континуум.

И така, хилбертовото пространство се оказва определен тип решение – според досегашните представи единствено възможното – за разрешаване на парадоксалната същност на физическата величина в квантовата механика, вече обозначена с девиза „и точка, и краен интервал" (всеки краен интервал съдържа множество от точки с мощност на континуум). Тя е точка, числова стойност $\boldsymbol{a_\Psi}$ в спрегнатото пространство на стойностите на функционала след измерване с макроуреда и заедно с това (или „преди това" в друга философска интерпретация, която може да се усили и в израз като „физическата величина сама по себе си") множество от $\boldsymbol{\Psi}$-функции, всяка от които е разположена според т. нар. многосветова интерпретация на квантовата механика, предложена от Хю Еверет III и Уилър[37] (Everett 1957; DeWitt, Wheeler (eds.) 1967) и за която нататък подробно ще стане дума, в различен „свят", а квадратът на нейния модул – $\|\boldsymbol{\Psi}\|^2$, според статистическата интерпретация

---

[37] Еверет развива концепцията в своята докторска дисертация „Теория на универсалната вълнова функция", чийто научен ръководител е Джон Уилър.

на Макс Борн (Born 1926ZQ) – на вероятността дадената стойност $\boldsymbol{a_i}$ да се окаже измерената или респ., на вероятността да се окажем в този свят, измервайки величината $\boldsymbol{a}$. Но е налице математическа теорема, която ни позволява в известен да отъждествим света „$\boldsymbol{i}$" със света изобщо, т.е. със съвкупността от всички светове, в която той е само елемент.

Бихме могли да използваме метафората за „клавиатура", в която всеки „свят" е един „клавиш". Клавиатурата като цяло представлява базисната $\boldsymbol{\Psi}$-функция, а всеки клавиш – получената чрез хипермаксималния оператор конкретна за света „$\boldsymbol{i}$" – функция $\boldsymbol{\Psi_i}$ и точно определена за този свят стойност на величината: $\boldsymbol{a_i}$. Заедно с това обаче клавиатурата е и съвкупността от клавишите. Както ще видим по-нататък, тези два начина на разглеждане на „клавиатурата" – като цяло и като съвкупност от „клавиши" – е постоянно присъстващ момент на взаимно неразбиране в дискусията около валидността и границите на валидност при теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика.

Ще отбележим, че във функционалния анализ съществува една прелюбопитна теорема, според която спрегнатото на спрегнатото пространство е самото изходно пространство[38] (един вид, „окото, с което бог ни наблюдава, е това, с което ние го виждаме"). Спрегнатостта (също както движението между две отправни системи) е отношение между две пространства, но не е свойство на никое от тях. От друга страна обаче, физическата интерпретация е напълно несиметрична: измерената числова стойност принадлежи на нютоновското пространство на макроуреда, докато неизброимото множество от $\boldsymbol{\Psi}$-функции принадлежи на квантовия обект. Един изход е споменатата вече възможност за относителна интерпретация на квантовата механика, допълнена от едно отъждествяване на най-малкото и най-голямото в духа на подхода на Николай от Куза[39]. Ако отъждествим вселената и квантовия

---

[38] Имаме предвид теоремата на Рис (F. Riesz) за представяне на хилбертовото пространство, според която хилбертовото пространство и неговото дуално са изометрични (антиизометрични), ако полето върху, което са дефинирани елементите му, които са функции, е реално (комплексно). (Теоремата е доказана независимо от Рис и Фреше в две съседстващи си публикации през 1907: F. Riesz.1907. Sur une espèce de géométrie analytiques des systèmes de fonctions sommables. – *Comptes rendus de l'Académie des sciences*. Paris. T. 144, 1409–1411; M. Fréchet (1907). Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires. – *Comptes rendus de l'Académie des sciences*. Paris. T. 144, 1414–1416).

[39] „Maximum, quo maius esse nequit, simpliciter et absolute cum maius sit, quam comprehendi per nos possit, quia est veritas infinita, non aliter quam incomprehensibiliter attingimus. Nam cum non sit de natura eorum, quae excedens admittunt et excessum, super omne id est, quod per nos concipi

обект, симетрията на отношението за спрегнатост, изисквана от математическия формализъм, се възстановява спрямо системата макроуред – квантов обект (≡ вселена) и отново ни навежда към поучителния холизъм на квантовата механика.

Макар и централна тема за изложението, засега ще отбележим само няколко щриха относно начина за възможно отъждествяване на псевдоримановото пространство (или това на Минковски като частен случай) с хилбертовото и чрез него или непосредствено с фазовото пространство:

1. Виртуалните хармонични осцилатори на Нилс Бор
2. Преобразования от типа на тези на Льожандър
3. Въвеждане на допълнителна мирова линия в реалната област на псевдоримановото пространство.

При философско разглеждане, което естествено има по-общ качествен характер, следва да се обсъжда и търси не конкретен математически формализъм, теореми и доказателства, а възможните предпоставки за такива, техния физичен и онтологичен смисъл, т.е. техните т. нар. условия за възможност.

Проблемът е за представянето на две дуални, или допълнителни същности, в математическия формализъм отъждествими с две спрегнати векторни пространства и осмислени вече като елементарни и неделими по-нататък клетки,

---

potest; omnia enim, quaecumque sensu, ratione aut intellectu apprehenduntur, intra se et ad invicem taliter differunt, quod nulla est aequalitas praecisa inter illa. Excedit igitur maxima aequalitas, quae a nullo est alia aut diversa, omnem intellectum; quare maximum absolute, cum sit omne id, quod esse potest, est penitus in actu; et sicut non potest esse maius, eadem ratione nec minus, cum sit omne id, quod esse potest. Minimum autem est, quo minus esse non potest. Et quoniam maximum est huiusmodi, manifestum est minimum maximo coincidere” (Nicolai de Cusa Opera Omnia. De docta ignorantia. Vol. I: De docta ignorantia. – Capitulum IV. Maximum absolutum incomprehensibiliter intelligitur; cum quo minimum coincidit. – http://www.hs-augsburg.de/~harsch/Chronologia/Lspost15/Cusa/cus_d100.html#04). Български превод: „Единственият начин да се докоснем до простия и абсолютен максимум, от който нищо не може да е по-голямо, е да постигнем неговата непостижимост, защото като безпределна истина е твърде голям за възможността ни да го обхванем в познанието. Щом като природата му е различна от природата на нещата, които допускат превишаващо и превишавано, то той надминава всичко, което можем да схванем. И наистина всички неща, които се възприемат чрез сетивата, разсъдъка или разума, се различават до такава степен вътре в себе си и помежду си, че между тях никога няма точно равенство. Следователно максималното равенство, което не се явява нещо друго или различно за нито едно нещо, надвишава всяко разбиране. Ето защо, след като е всичко онова, което може да съществува, абсолютният максимум е изцяло в действителност и, както не може да е по-голям, със същото основание не може и да е по-малък, бидейки актуално всяко възможно битие. От своя страна максимумът е онова, от което няма нищо по-малко, а тъй като и максимумът съществува по такъв начин, явно минимумът съвпада с максимума” (Николай Кузански. За ученото незнание. С.: Наука и изкуство, 1993, 35-36).

своеобразни „атоми” на фазовото пространство, от една страна, и като аргумент и стойност на функционал, дефиниран в хилбертовото пространство, от друга. Доказаната и положената в основата на квантовата механика еквивалентност на двата подхода навежда на хипотезата, че би могло да се търси (поне частично) съответствие и с третото фундаментално пространство на съвременната физика – псевдоримановото.

Докато в общата теория на относителността двете спрегнати пространства са, фигуративно казано, „пропорционални”, като „коефициентът на пропорционалност” е два пъти ковариантният метричен тензор (респ. съответният два пъти контравариантен тензор в обратния случай), изменящ се в псевдоримановото пространство от точка в точка, то в двете други разглеждани пространства, те са „обратно пропорционални”, залегнало в самите основи на квантовата механика, а именно като съотношение за неопределеност:

$$\boldsymbol{\Delta p . \Delta q} \ \geq \ \hbar; \tag{18}$$

както и като условието за нормировка на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията (което и позволява квадратът на нейния модул да бъде тълкуван като вероятност):

$$\boldsymbol{\Psi . \Psi^{*}} \ = \ \mathbf{1}, \tag{19}$$

където с $\boldsymbol{\Psi}^{*}$ е означена спрегната на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията, с други думи, нейният взаимно еднозначен образ в спрегнатото хилбертово пространство, което, разбира се, е векторно.

Ако обозначим двете философски същности – в духа на философските търсения на Нилс Бор – *Ян* и *Ин*, то формалното математическо представяне на тяхната връзка посредством отношение на обратна пропорционалност показва, от една страна, взаимна дуалност, допълнителност (ако едното е ‛нула’, „няма го”, другото е ‛безкрайност’), но от друга – взаимното им преливане в общото им „дао” във всеки конкретен случай. Тъкмо последният елемент липсва в изключващата диалектика („или – или”) на великия сънародник на Нилс Бор – Сьорен Киркегор, – към чиято философия първоначално се обръща в търсене на онтологична опора за обосноваване на твърде необикновеното положение на нещата в квантовата механика[40].

Тази „обратна пропорционалност" има още множество твърде значими отражения и последствия в самия фундамент на физическото знание. Във връзка с обсъждания въпрос ще обърнем внимание само на две:

1. Тъй като в *лагранжовия формализъм на механиката*, „двете същности" са свързани линейно, „пропорционално", като променлива и нейната производна в едно диференциално уравнение от втори ред, то при своето възникване квантовата механика използва ***този на*** *Хамилтон*, при който има две независими променливи (чиято връзка е възможно в това число да бъде и „обратно пропорционална") в система от две диференциални уравнения от първи ред. Преходът се извършва чрез преобразования от типа на тези на Льожандър, чиято същност може да се онагледи чрез замяната на кривата на променливата с обвивката на множеството от тангенциалните прави във всяка точка кривата. Ако пространството, в което е разположена кривата на променливата, е „плоско", двете представяния са еквивалентни. Обратно, количествен израз за нееквивалентността на двете представяния може да служи като мярка за кривината му. Една възможност е да се въведе имагинерна кривина, за случаите на „обратна пропорционалност".

2. Законите за запазване (към които следва да се причисли и лоренцовата инвариантност в специалната теория на относителността като запазване спрямо въртенето от и към оста на времето) предполагат права, а не „обратна пропорционалност" между двете дуални начала: особено релефно показано във фундаменталната работа на Еми Ньотер (Noether 1918). Както вече видяхме, решението на това противоречие в квантовата механика е „соломоновско": „обратно пропорционални" първите три съотношения за неопределеност заедно с „право пропорционален" закон за запазване на енергията вместо четвъртото. Не е изключено обаче това мъдро практическо решение да притежава свое теоретично обосноваване, изхожда-

---

[40] Степента и начинът на влияние на възгледите на Киркегор върху философските, методологични и физични концепции на Нилс Бор са дискусионни и оценките варират от „решаващо" до „несъществено": B. Register. (1997-12-01) Complementarity: Content, Context and Critique – http://enlightenment.supersaturated.com/essays/text/bryanregister/bohr_compliementarity.html; D. Favrholdt. 1992. *Niels Bohr's Philosophical Background*. Copenhagen: Munksgaard, 42-63; J. Faye. 1991. *Niels Bohr: His Heritage and Legacy*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers .

що от формализма на пространството на Минковски и/или евентуалното му тълкуване като две спрегнати „обратно пропорционално” векторни пространства.

Всъщност в пространството на Минковски (което използваме за попросто онагледяване на псевдоримановото пространство от общата теория на относителността, частен, а именно „плосък” случай на което се явява) е налице кандидат за „обратно пропорционална”, „дуална” същност, за съжаление обаче емпирично недостижим и заради това открит за тази, но и за всякакви други теоретични спекулации. Това, разбира се, е реалната му област (използваната от специалната теория на относителността е имагинерната), чиито физически смисъл е на комуникация на сигнали със свръхсветлинна скорост, с други думи – на отказ от лоренцовата инвариантност, респ. от унитарността. За късмет, не изглежда неестествено да се тълкува основният обект в настоящата работа – *квантовите корелации* – именно като такава комуникация на сигнали със свръхсветлинна скорост. Корекцията в сравнение с обичайното им разбиране е, че се отхвърля мигновената корелация на произволно разстояние, следователно осъществявана с безкрайна скорост, и се заменя с крайна, но свръхсветлинна скорост. Такава хипотеза решава множество проблеми и в частност поставения сега за разглеждане: за връзката и дори евентуалната еквивалентност на фазовото и хилбертовото пространство, от една страна, и псевдоримановото, от друга. Ето как:

Всички механични величини в специалната теория на относителността зависят от поправъчния коефициент $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{v})$ – функция от относителната скорост между отправните системи $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{\beta} = \sqrt{\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}} \qquad (20)$$

За всеки две отправни системи могат да се постулират две относителни скорости, а именно $\boldsymbol{v_1}$ и $\boldsymbol{v_2}$, такива че: $\boldsymbol{v_1} \leq \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{v_2}$, където $\boldsymbol{v_1}$ е обичайната относителна скорост на механично движение, а $\boldsymbol{v_2}$ е „относителната скорост” на квантова корелация.

Отново следва да се подчертае, че използваните точни математически изрази не претендират да бъдат разглеждани като физическа хипотеза, а само да онагледят определени философски идеи не с количествен, а с качествен характер и насочени към тълкуване предпоставките и насоките за развитие на тези теории.

Ако се въведе скорост – макар и съществено различна, свръхсветлинна – за квантовите корелации, то те могат да бъдат разглеждани като особена форма на механично движение, чийто физически смисъл е промяната на вероятността за случване на едно или друго събитие. Тогава квантовите корелации биха се тълкували като движение на вероятности, мярка за което е информацията; а на информационния поток за дадено време ще съответства строго определена енергия, която е тъждествено равна на нула, ако промяната, т. нар. движение на вероятностите се преустанови: физическите явления, съответстващи на информационни процеси, имат нулева енергия на покой по аналогия с фотоните, които имат нулева маса на покой.

Това би довело до появата на двойник на обичайната мирова линия в реалната област на псевдоримановото пространство, който ще представлява функция с физически смисъл на относителна квантова корелираност и с аргумент мировите координати.

Двойката мирови линии вече би представлявала самата $\boldsymbol{\Psi}$-функция: една от двете, без съществено значение коя, ще съответства на реалната ѝ част, а другата – на имагинерната. Нещо повече, ще се появят две функции – обичайно обозначавани с $\boldsymbol{\Psi}$ и $\boldsymbol{\Psi}^*$, – които могат да се разглеждат по два еквивалентни начина: веднъж, съответно като съвпадащи $(+,+;\ -,-)$ и несъвпадащи $(+,-;\ -,+)$ знаци на стойностите на корена в коефициентите $\boldsymbol{\beta}$; втори път чрез онази трансформация $\boldsymbol{T}$ на цялото псевдориманово пространство (нека го онагледим за простота с „плоския” му вариант на пространството на Минковски), която само заменя една с друга реалната и имагинерната му област, но без по никакъв друг начин да ги променя; тогава:

$$\boldsymbol{T} \coloneqq \boldsymbol{\Psi} \ \rightarrow \boldsymbol{\Psi}^* \ . \qquad (21)$$

Почти очевидно е, че операторът $\boldsymbol{T}$ е еквивалентен на обръщане посоката на времето. Тогава „обратно пропорционалните” според условието за нормиране вектори $\boldsymbol{\Psi}$ и $\boldsymbol{\Psi}^*$ от двете спрегнати векторни пространства имат смисъл на комплексна мирова линия на механично движение и квантови корелации при права и обратна посока на времето (без съществено значение коя функция на коя посока съответства).

Така двете дуални същности – наречени в квантовата „митология" *Ян* и *Ин* , – „прочути" със своята допълнителност или „обратна пропорционалност", се оказват възможно отново съчетани и в псевдоримановото пространство, както и фазовото и хилбертовото, но по собствен, трети начин, легитимиращ съществуването му на свое основание, а именно като суб- и свръх-светлинна област, което осмисляне на свой ред позволява по-дълбоко тълкуване на спрегнатите функции $\boldsymbol{\Psi}$ и $\boldsymbol{\Psi}^*$ като съответстващи на двете посоки на времето. От друга страна обаче, с простиращи се надалеч последствия, се построява един (от вероятно многото възможни) мост за обобщаване на общата теория на относителността чрез на свой ред обобщена квантова механика, спрямо която досега известната би представлявала „плоския" частен случай.

Да обобщим: „Ян" и „Ин", заедно с умиротвореното им „Дао" ни се представиха досега в поне шест различни ипостаса във всяко от различните пространства:

Пространство	„Ян" и „Ин"	„Дао"
Фазово (термодинамично)	Цяло и част	Състояние $\boldsymbol{\Psi}$
	Импулс и координата	Елементарна клетка $\boldsymbol{h}$
Хилбертово (квантово-механично)	Измерено число и $\boldsymbol{\Psi}$	Функционал
	$\boldsymbol{\Psi}$ и $\boldsymbol{\Psi}^*$	Нормиране
Псевдориманово (релативистко)	Суб- и свръх-светл. обл.	$\boldsymbol{\Psi}$
	Право и обратно време	$\boldsymbol{H}$

Фиг. 4. „Ипостаси" на „Ян" и „Ин" и тяхното „Дао" в математическите пространства на фундаментални физически теории

Разбира се, тази таблица се стреми по един шеговит и илюстративен начин да насочи внимание към вездесъщото присъствие на определен философски принцип, а именно този на допълнителността, въведен в качеството тъкмо на такъв от Нилс Бор и обобщен в по-късни работи[41] като методологичен и онтологичен принцип за области на човешкото познание, далечни от физиката.

Нека обърнем внимание на първия и последния ред от таблицата, за да се опитаме да разгърнем в явен текст скритата им синкретичност, характерна впрочем и за цялата таблица.

За целта да въведем физическо понятие с точен математичен израз за 'специфична дължина на настоящето, характерна за всеки физически обект', да означим съответната физическа величина с $\boldsymbol{\alpha}$[42] и да я определим като периода на дьобройловската вълна аташирана с физическия обект:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{nh}}{\boldsymbol{E}}. \tag{22}$$

В този израз $\boldsymbol{E}$ е енергията, $\boldsymbol{n}$ – брой елементарни клетки във фазовия обем, $\boldsymbol{n.h}$ – самият фазов обем, заеман от обекта.

Тук се нуждаем от един постулат в съдържателно отношение еквивалентен на това, че състоянието на всеки физически обект се описва от $\boldsymbol{\Psi}$-функция и следователно предполагащ съответствие с класическата физика само в граничен преход. За разлика от последната, където частта обикновено заема по-малък фазов обем от цялата система, то в квантовата механика би трябвало да се приеме, че цялата система и която да е нейна част (но не и ако същата тя принадлежи и/вместо това на друга система) притежават еднакъв фазов обем. Тъкмо този фазов обем идентифицира както системата, така и всяка нейна част: ако фазовият обем не се променя, то оставаме в нейните рамки.

В първа глава на „Основни принципи на статистическата механика" Гибс формулира „закон за запазване разширяването на фазовия обем" (Gibbs 1902: 10), който би бил непосредствено следствие от закона за запазване на енергията, в случай че съществува производна на фазовия обем по времето и се разглежда именно изменението на фазовия обем във времето. В този последен случай

---

[41] N. Bohr. 1950. On the Notions of Causality and Complementarity. – *Science*. Vol. 111, No 2873, 51-54; N. Bohr. 1937. Causality and Complementarity. – *Philosophy of Science*. Vol. 4, No 3, 289-298.

[42] От древногръцкото ἄρτι (arti) – „сега".

постоянният фазов обем означава нулева енергия на физическия обект, т.е. според обичайното разбиране не можем да говорим за физически обект.

В контекста на идеите, цялостния подход и цитираната работа на Гибс такова „болцмановско” разглеждане е неадекватно: (1) изменението не е във времето, а между възможните състояния на системата, което обаче е еквивалентно (в една или друга степен) на изменението във времето; има и (2) едно междинно тълкуване, при което се разглеждат само онези възможни състояния, чийто фазов обем се разширява с еднаква скорост т.е. имат еднаква енергия, тази на системата. По-нататък нашето обсъждане ще има неявно предвид само тези две алтернативи, но не и непосредствено цитираната преди това и окачествена като „болцмановска”.

‘(2)’ позволява дискретният и континуалният аспект да се разделят абсолютно, т.е. „в различни отношения”: непрекъснато, и то плавно изменение във времето на фазовия обем за всяко възможно състояние на системата (или в рамките на всеки възможен свят), но дискретно (регулирано от константата на Планк) между две такива. Такъв подход е по същество еквивалентен на хипотезата за скрити параметри от обобщен – да го наречем – *беловски тип*. Скритият параметър е „възможният свят”, възможното състояние на системата.

‘(1)’ изисква или поне насочва към една скулемовска относителност на континуално и дискретно, на възможните състояния на системата и на нейните последователни състояния във времето: преходът от множеството на първите към това на вторите налага аксиомата за избора (или достатъчно мощен по-слаб вариант), която сега – тоест в светлината на Гибсовия закон за съхраняване разширението на фазовия обем – се оказва родствена на самотъждествеността на системата и запазването на нейната енергия. В какъв смисъл?

Съществува едно единствено подреждане, или респ. един единствен път според принципа на най-малкото действие, по който енергията е постоянна, т.е. обектът остава същият. Тълкуванието на Ричард Файнман на формализма на квантовата механика чрез интеграл по траектории обаче ни наставлява за това, че възможните състояния на системата могат реално да се подредят по различен начин, но с различна вероятност съответно по различни файнмановски траектории: и трябва – чрез сумиране (интеграл) – да се отчете приносът на всяка една от тях в осъществения дискретен пространствен морфизъм (механично движение). С други думи, при квантов преход от точка m в точка n на конфигурационното пространство на обект $\boldsymbol{A}$ – и то при това: $\boldsymbol{A_m} \equiv \boldsymbol{A_n}$ (!) – обектът не е изцяло самотъждествен (в една или друга степен) или иначе казано, в дискретния преход $\boldsymbol{m} \overset{\boldsymbol{A}}{\rightarrow} \boldsymbol{n}$ *участие с определен коефициент в смисъла на вероятност на файнмановската траектория взимат множество* $\boldsymbol{V_A}$ ***виртуални или действителни обекти, всеки един от който се намира в точно едно възможно състояние на обекта*** (системата) $\boldsymbol{A}$**:** $\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{V_A}: \boldsymbol{m} \overset{\boldsymbol{A}}{\rightarrow} \boldsymbol{n}: \boldsymbol{m} \overset{\boldsymbol{V_A}}{\rightarrow} \boldsymbol{n} = \int_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{V_A}\, \boldsymbol{dA} = \sum_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{V_A}$ **.** Последната част на верижното равенство, а именно $\int_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{V_A}\, \boldsymbol{dA} = \sum_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{V_A}$ се стреми да изрази и приложи за случая скулемовската относителност на континуално и дискретно.

Така придобиваме допълнителен, но фундаментален поглед и към формалния, и към онтологичния смисъл на *явленията на сдвояване*: такива са налице, ако *действителен обект се намира във възможно състояние на друг*[43]. Използва ли се формализмът на хилбертовите пространства, такова отношение е винаги рефлексивно, ако обаче се обобщи в топологично разглеждане, като се постулира най-слабата аксиома за отделимост ($\boldsymbol{T_0}$), би се допуснало съществуване на полусдвоени обекти, т.е. единият от които е сдвоен с останалите, но обратното не е необходимо вярно.

Суханов, Рудой (2006: 551-552)[44] обръщат внимание, че Гибс въвежда наред с микроскопичното разглеждане, също и макроскопично в глава IX на цитираната работа.

> *В тази глава ще се върнем към разглеждането на каноничното разпределение, за да изследваме онези свойства, които специално се отнасят до функцията от енергията, която сме означили* $\boldsymbol{\phi}$ (Gibbs 1902: 100).

---

[43] Това може да подскаже друг подход и към философските проблеми за самотъждествеността и интерсубективността; освен това, само възможното, виртуалното, и то най-вече близкото възможно насочва действителното в неговото изменение и движение посредством своеобразен „кърлинг”.

[44] „Основната цел на настоящата бележка се състои в това да покаже, че в книгата на Гибс се съдържа и друга – *макроскопична* – версия на статистическо описание на природата непосредствено в пространството на макропараметрите, различна от широко разпространената *микроскопична* версия на статистическото описание във фазовото пространство” (Суханов, Рудой 2006: 552).

Самата функция $\boldsymbol{\phi}$ е въведена в предшестващата глава VIII по следния начин:

$$\boldsymbol{\phi = log\frac{dV}{d\epsilon}} \text{ (Gibbs 1902: 88, eq. 266).} \qquad (23)$$

„Нека с $\boldsymbol{V}$ означим разширението на фазовия обем под определена граница на енергията, която ще наричаме с $\boldsymbol{\epsilon}$" (Gibbs 1902: 87). Следователно, в качеството на физическа величина $\boldsymbol{\phi}$ има измерение на време. С нейното въвеждане разпределението по вероятност представено с формулата (91):

$$\boldsymbol{P = e^{\frac{\psi-\epsilon}{\Theta}}} \text{ (Gibbs 1902: 33)} \qquad (24)$$

се съпоставя с израза (317):

$$\boldsymbol{Ne^{\frac{\psi-\epsilon}{\Theta}+\phi}} \text{ (Gibbs 1902: 100),} \qquad (25)$$

който „представя това, което може да бъде наречено *плътност по енергия* [*density-in-energy*]" (Gibbs 1902: 100). Означенията са следните: „$\boldsymbol{\Theta}$ и $\boldsymbol{\psi}$ са константи и $\boldsymbol{\Theta}$ е положително" (Gibbs 1902: 33), „$\boldsymbol{P}$ е коефициентът на вероятност или дялът на плътността във фазовото пространство от целия брой системи" (Gibbs 1902: 32); „означаваме с $\boldsymbol{N}$, както обикновено, общия брой на системите в ансамбъла" (Gibbs 1902: 100).

Ако $\boldsymbol{N = 1}$, т.е. ако имаме една единствена система в ансамбъла, и ако $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0}$, т.е. $\boldsymbol{dV} = \boldsymbol{d\epsilon}$, което може да се разгледа като друга, повече в гибсовски дух формулировка на цитирания по-горе закон за запазване разширяването на фазовия обем, то изразите, номерирани от Гибс като (91) и (317), биха се оказали равни.

Съпоставянето и приравняването при определени условия на микро- и макро-разглеждането, което следва при подхода на Гибс към статистическата механика и термодинамика, е твърде важно за квантовата механика, тъй като съпоставя двете гледни точки – на микрообекта и на уреда, или в полюса на философското обобщение: на обекта 'сам по себе си' и на знанието 'за него'.

Нека обобщим в няколко точки – в светлината на настоящия контекст – същността на неговата идея:

1. Вместо болцмановска статистика на частите на системата, напр. молекулите на обем газ, да се разгледа статистиката на възможните състояния на системата като цяло във фазовото пространство.

2. Такъв подход е твърде подходящ и удобен за начина на мислене в квантовата механика и във философията на квантовата информация, тъй като позволява да се представят еднообразно и да се съпоставят дуалните аспекти на квантовия обект 'сам по себе си' и на уреда, т.е. на знанието 'за него' (за обекта).

3. Нещо повече, може да се формулира строго, чрез точен количествен израз, а именно $\boldsymbol{dV = d\epsilon}$**,** условието за отъждествяване на двете, постоянството на величината $\boldsymbol{\phi}$, чийто физически смисъл е изменение на времето при преход от една възможно състояние на системата в друго, или иначе казано, от един (възможен) свят в друг.

4. За да се уверим, че такава е експлицитната идея на Гибс, при това формулирана преди все още и да се подозира съществуването на квантовата механика и съответната област на действителността, да приведем следния цитат, който представлява контекста на въвеждане на разпределението чрез вече цитирано уравнение (91):

Разпределението, представено с

$$\boldsymbol{\eta = log\, P = \frac{\psi - \epsilon}{\Theta}} \quad \textit{(90),} \qquad (26)$$

или

$$\boldsymbol{P = e^{\frac{\psi - \epsilon}{\Theta}}} \quad \textit{(91),} \qquad (27)$$

> *където $\boldsymbol{\Theta}$ и $\boldsymbol{\psi}$ са константи и $\boldsymbol{\Theta}$ е положително, изглежда представя най-простия мислим случай, тъй като има свойството, че когато системата се състои от части с отделни енергии, законите на разпределението във фазовото пространство на отделните части да бъдат от същото естество – свойство, което в огромна степен опростява обсъждането и е основанието за крайно важни съотношения за термодинамиката* (Gibbs 1902: 33).

5. Ако времето е универсално едно и също както за частите, така и за цялото (както за микрообектите, така и за системата, разглеждана като тяхна статистическа общност; както за нейните възможни състояния, така и за тяхната гибсовска статистическа съвкупност), то тогава измерването е „прозрачно", т.е. изпълнено е условието на класическата субект-обектна методология за „прозрачно" измерване (познание): като изключим неизбежните, но поправими субективни грешки, 'обектът сам по себе си' съвпада със 'знанието за него', и то – по принцип.

По-нататък, нека запазим условието $\boldsymbol{N = 1}$, но да обсъдим общия случай, когато $\boldsymbol{dV \neq d\epsilon}$, *с други думи, времето на системата като цяло, уреда, и на микрообекта, не е едно и също***.**

Пред нас се откриват две възможности: да съпоставим (1) фазовия обем или (2) изменението (нарастването) на фазовия обем на квантовия обект и на системата. Според закона за запазване на нарастването на фазовия обем би трябвало да се отнесем към втория начин.

Приравняването на „макроскопичното" и „микроскопичното" разглеждане (т.е., в термините и означенията на Гибс, изпълнение на условието $\boldsymbol{dV = d\epsilon}$, чийто физически смисъл е, че изменението на фазовия обем е само за сметка на енергията, или с други думи, не е поради изменение на дължината на настоящето) обаче постановява (1): че фазовият обем на системата и на обекта, т.е. на цялото и частта съвпадат. Тогава отношението на техните специфични 'дължини на настоящето', съответно $\boldsymbol{\alpha_s}$ и $\boldsymbol{\alpha_o}$, ще е обратно пропорционално на отношението на енергиите на системата $\boldsymbol{E_s}$ и на разглеждания обект $\boldsymbol{E_o}$, който е част именно от нея:

$$\frac{\boldsymbol{\alpha_o}}{\boldsymbol{\alpha_s}} = \frac{\boldsymbol{E_s}}{\boldsymbol{E_o}} \,. \tag{28}$$

Според начина на обсъждане (2) същото равенство би трябвало да се запише в диференциален вид: фундаменталното за квантовата механика дискретно разглеждане нямаше да го позволи, ако не ставаше дума за „специалните” величини време и енергия, отредени да поддържат единството между уред и квантов обект:

$$\frac{d\alpha_o}{d\alpha_s} = \frac{dE_s}{dE_o} \,. \tag{29}$$

Това равенство – премислено вече в термините и концептуалната канава на „класическата” квантова механика – е твърде необикновено, тъй като лявата му страна е число (понеже е отношение на две „ само числа”, доколкото са ‛време’), а дясната е оператор (или дори супероператор, ако се допуска разглеждане спрямо различни системи и обект). Коя е или какъв би бил физическият смисъл на такава величина, която – за разлика от обичайните величини в квантовата механика – има „двете лица”: и на „число”, и на „оператор”, *още в диференциален вид*? Обратно казано, какъв собствено физически смисъл може или трябва да се препише на функцията на Дирак непосредствено или ако се разглежда като производна?

В параграф 15 на своята знаменита книга „Принципи на квантовата механика” (1928) Дирак въвежда прочутата делта-функция ($\boldsymbol{\delta}$-функция), която сега носи неговото име, по следния начин:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\delta(x)dx = 1}$$

(30)

$$\boldsymbol{\delta(x) = 0} \text{ за } \boldsymbol{x \neq 0}$$ (Dirac 1958: 58).

Това не е „функция”[45] в точното значение на термина, тъй като за $x = \mathbf{0}$ няма точно една стойност, която да ѝ съответства (не са дори нито краен

---

[45] Всъщност е „обобщена функция” или „разпределение” в термините на Л. Шварц (Schwartz 1958). Аналогията с допълването на рационалните числа с ирационалните като (граници на) безкрайни редици от рационални числа добре описва техния смисъл и същност: могат да се дефинират и разглеждат като (граници на) безкрайни редици от обичайни функции. Едно тяхно физическо тълкуване, което ще се използва и тук, е като производни (скорости) на

брой, нито изброимо множество нейните стойности за тази стойност на аргумента). Грубо казано, тя представлява безкраен пик в безкрайно малък отрязък, собствено – в една единствена точка на аргумента, като „площта” на този пик, бидейки неопределена (равна на умножени $\mathbf{0}$ и ∞), е конвенционално приета за единица.

Нейният физически смисъл се подсказва чрез второто и еквивалентно определение, което ѝ дава малко по-нататък Дирак:

> *Алтернативен начин на дефиниране на δ-функцията е като диференциалния коефициент $\epsilon'(x)$ на функцията $\epsilon'(x)$, дадена чрез*

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}) = {} & \mathbf{0}\ \ (\boldsymbol{x} < 0) \\ = {} & \mathbf{1}\ \ (\boldsymbol{x} > 0) \end{aligned}\right\} (5)\text{” (Dirac 1958: 59)} \qquad (31)$$

Оттук вече става ясно, че $\boldsymbol{\delta}$-функцията представлява физически скоростта или все едно първата производна при дискретен, „скокообразен” преход. Ако се стремим да обобщим Айнщановия принцип на относителността (Einstein 1918: 241), въвеждайки на мястото на „плавните” преобразования (т.е. дифеоморфизмите) всякакви морфизми и съответно осмисляйки понятието „съвпадение” за пространствено произволно отдалечени точки, не ни остава друг избор освен да обхванем в по-широка концептуална рамка и лоренцовата инвариантност (респ. постулата за ненадвишаване скоростта на светлината).

Следва да се подчертае, че понятието за $\boldsymbol{\delta}$-функция присъства неявно и обединява квантовата механика и специалната теория на относителността. То е едно от ключовите, посредством които Пол Дирак полага основите на релативистката квантова теория и квантовата електродинамика. Все пак има известна разлика в употребата в двете теории по отношение на лоренцовата инвариантност, която особено ясно изпъква при явленията на сдвояване, обсъждани от квантовата информация.

За да покажем начина на присъствие на $\boldsymbol{\delta}$-функцията в специалната теория на относителността, ще обобщим обичайното тривиално въвеждане на поня-

---

прекъснати функции. Тяхната поява в квантовата механика е неизбежна и органична, доколкото тя разглежда едновременно дискретни и континуални преобразования.

тието скорост ($\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}$, където с x е означено времето, а с $\boldsymbol{t}$ – времето) по следния начин:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \tag{32}$$

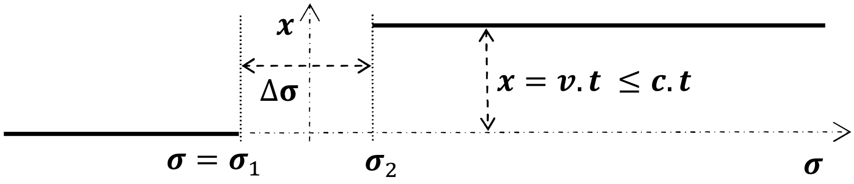
където със $\boldsymbol{\sigma}$ е означено лоренцово инвариантното времепространствено разстояние между две събития. Очевидно, обичайната формула се получава от последната за $\sigma = \boldsymbol{const}$. Обратно, за $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{const}$: $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{d\sigma}}$.

Действително, лоренцовата инвариантност, еквивалентна в *това* отношение с постулата за ненадвишаване на скоростта на светлината във вакуум, изключва физически обекти с $\boldsymbol{\epsilon}$-функция $x(\boldsymbol{t})$, такава че нейната производна в коя да е точка $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_0}$ да е $\boldsymbol{\delta}$-функция. Ако това не беше вярно, щеше да означава едно физическо тяло да се намира на две, произволно отдалечени места по едно и също време или с други думи, да се премести от едното в другото местоположение с безкрайна скорост, консумирайки безкрайна енергия.

Заедно с това СТО постулира съществуването на физически обекти, а именно електромагнитното излъчване, каквото е и светлината, които се описват и дори биха могли да се дефинират чрез $\boldsymbol{\delta}$-функция за $\boldsymbol{\epsilon}$-функция $x(\boldsymbol{\sigma})$:

Фиг. 5. Изотропната хиперповърхност на светлинния конус, представена чрез $\boldsymbol{\delta}$-функция

Очевидно, съвпадението след „скока" (т.е. $\boldsymbol{\Delta\sigma} = \boldsymbol{0}$) е частен случай, допускащ обобщение и търсещ за своя физическа интрепретация. Това е един необичаен начин за въвеждане на вълново-корпускулярния дуализъм от квантовата механика чрез изходна гледна точка от формализма на специалната теория на относителността:



Фиг. 6. Вълново-корпускулярният дуализъм, представен чрез δ-функции

На фигура 6 същата идея е онагледена и обобщена на основата на вълново-корпускулярния дуализъм за произволен квантов обект, както с нулева, така и с ненулева маса на покой и съответно със скорост, както равна, така и по-малка от скоростта на светлината във вакуум. При това, образно казано, интервалът на прекъсване $\Delta\sigma$ се разтегля от нулева до някаква крайна стойност. Такова прекъсване, което в общия случай не е само в множеството на стойностите на функцията $x(\sigma)$, но и в множеството на аргумента σ, от една страна, не позволява изобщо да се разглежда въпросът за прекъснатост или непрекъснатост на функцията[46], а от друга, изисква обсъждане на прекъсване и по t, с други думи, на нарушаването на лоренцовата инвариантност.

Несъответствие между величината на прекъсването по σ и по x, ако има такова: $c^2t^2 \neq (\Delta\sigma)^2 + (\Delta x)^2$, би изисквало или прекъсване и по t, или добавъчен член, за да се възстанови равенството, какъвто, ако можеше да се посочи, би бил нов ипостас на „скрития параметър”. Теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика, интерпретирана в този случай, оголва дълбокото противоречие между квантовата механика и *всяко възможно обобщение* на лоренцовата инвариантност, напр. това, което се случва в общата теория на относителността. Тя изисква просто *случайно* нарушаване, флуктуиране

---

[46] По определение за прекъснатост или непрекъснатост на функция може да се говори само при непрекъснатост на аргумента.

на лоренцовата инвариантност, каквото единствено съответства на прекъсване по $\boldsymbol{t}$, т.е. квантовият обект не само изчезва тук и се появява другаде, но *също така и в произволен друг момент*: за времевия промеждутък на „паузата в съществуването" на квантовия обект законът за запазване на енергията се оказва суспендиран, тъй като квантовият обект не се е превърнал в някакъв друг или други с равна енергия, а отсъства, изчезнал е.

Ако елементарно преобразуваме условието за лоренцовата инвариантност (постулата за ненадвишаване на скоростта на светлината във вакуум) за функцията $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\sigma})$, то се оказва удивително естествено: $\boldsymbol{\sigma^2 \geq 0}$. С други думи, то е изпълнено за всяка реална стойност на времепространствения интервал между две произволни събития в мировия континуум. В контекста на току-що направеното обсъждане в горния абзац, неговото нарушаване, т.е. това че $\boldsymbol{\sigma}$ не е реално, физически би могло да означава единствено, че не същества: между двете събития в мировия континуум има дискретен, „квантов" скок, пауза, и за това „разстоянието" между тях е неопределено, различно в зависимост от различната мирова линия, по която се приеме, че все едно се е извършил скокът.

Но странностите не могат да приключат дори и с това: налага се да продължим обсъждането на вълново-корпускулярния дуализъм, онагледен на фиг. 6, в термините на $\boldsymbol{\delta}$-функции. Според вълновата природа на всеки квантов обект би трябвало да има прекъсване, скок във величините, означени със $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{x}$: в термините на Файнмановата интерпретация преходът следва да се осъществява все едно с различна вероятност по всяка възможна мирова линия, която свързва двете събития. Доколкото и не в по-малка степен, обаче, квантовият обект е „частица", то той заедно с това се движи *по точно една* – но неизвестно коя – *от мировите линии*, строго съблюдавайки (евентуално обобщена) лоренцова инвариантност.

Отдавна се е превърнало в труизъм, че „от логическа гледна точка ситуацията в квантовата механика не е проста": по-искрено казано, понякога изглежда „отчайваща и безнадеждна": „можем да смятаме, но не и да я осмислим".

Придвижваната в настоящата работа концепция на *дуалистичното питагорейство* предполага, че осмислянето на квантовата механика не може да се реши като частен проблем, не само научен или методологичен, но дори и като частен философски: изисква коренен прелом в нашето разбиране какво представлява светът, с други думи, и в „първата философия”, и в мирогледа на хората. Защо?

Оказва се всъщност, че квантовата механика и особено квантовата информация не само ни дават възможност, но и единствени сред научните дисциплини изискват да разбираме света като цяло. За човека е неизбежно да има своя частна и изключително ограничена позиция в света: поради нейното постоянство, от невъзможност да напусне нейните рамки, заради навика и удобството, той приема познаваното и разбираното в тази неподвижна и много трудно рефлектируема гледна точка, още повече че в същността си се споделя и от другите хора, следователно и от обществото като цяло и от човешкото познание, за принципно подобно на света сам по себе си, който трябва да е почти същият.

В контекста на вълново-корпускулярния дуализъм, който сега обсъждаме, общият логико-онтологичен и епистемологичен въпрос, който възниква е този: как да мислим самата дуалност, двете (или повече) взаимно-изключващи се алтернативи, които заедно със и въпреки това се реализират *и двете*. Със сигурност не можем да останем в рамките на класическата логика, доколкото в нейните рамки, от едновременното наличие на две контрадикторни възможности в една логическа система следва изводимост на всяко твърдение. Квантовият свят обаче не е такъв: не е напълно неопределен и аморфен; разбира се, неопределеността и случайността са част от него, но заедно с това и техните противоположности – детерминираността и необходимостта.

В това място от изложението е уместно да се рефлектира специфична особеност или очакване на човешкото познание и мислене, която безгрижно прехвърляме в „света сам по себе си”. За да се „загрижим”, ще я превърнем в тема и предмет за осмисляне. *Нашето познание се състои изцяло от отговори, т.е. от еднозначни твърдения, предполага се и се очаква, че ако формулираме правилно нашия човешки въпрос, неизбежно природата ще ни даде ясен и точен отговор.* Тъкмо и затова корпусът на нашето научно знание е сума от твърдения, възможно някои от тях не напълно верни или в известен смисъл неверни: както „светът не е нищо друго освен движеща се материя”, така и „нашето познание не е нищо друго освен променящи се (развиващи се) твърдения” – реалната посока на сравнението би трябвало да е по-скоро обратната, тъй като прехвърляме качества, поради принципната ограниченост на нашето познание, от него в света „сам по себе си", и то „без да се усетим".

Дуализмът на света, с който ни сблъсква квантовата механика и информация, по-скоро налага да мислим за него като състоящ се от *въпроси*, а в нашето познание за него изначално е включен *избор*, но не поради специфичното му качество на познание (т.е. мислейки познанието, произтичащо от субект и съответно избор, привнасян от него), а поради това че изначално познанието е взаимодействие, а изборът – и то в този фундаментален смисъл – е присъщ на всяко взаимодействие.

Така или иначе, трябва да дадем някакъв повече или по-малко познат облик на тази нова ситуация според човешките представи и предразсъдъци: направим ли го, би трябвало да кажем, че познанието, и оттук информацията, са не само част от света „сам по себе си", но вероятно и негова основа (не единствената). „Светът е – с думите на Хайдегер – „един разговор". Нещата се питат и си отговарят, т.е. обменят информация и това е фундаментален начин на тяхното битие (не непременно единственият). Че човек има самоподразбиращ се монопол върху познанието, чрез което е отделѐн, отличѐн и отреден да властва над всичко друго, е поредната антропоморфна и антропоцентрична самозаблуда, с която човечеството ще се раздели по своя философски път – този, който води към мъдростта.

Положението на нещата се схематизира чрез понятието за информация и за нейната двоична единица – бита: всеки бит е един *въпрос* и един *избор* между два възможни отговора, означавани условно, но както по-нататък ще видим – не случайно, като двете фундаментални числа: $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, неутралният елемент на събирането и неутралният елемент на умножението. Самата формула за информация посочва число като мярка за целостта от въпроса и неговите отговори от определен тип (без значение какъв, без значение верни или неверни). Понятието за квантова информация и за нейната единица, кюбитът, на които ще се посветят специални глави в последваща книга, не само обобщава тази формула и съответното ѝ понятие, но и разкрива информацията като съществуваща, като притежаваща битие в света на собствено основание.

Понятието за информация е много широко. В някои случаи, следвайки класическата работа на К. Шенън (Shannon 1948) може да се въведат

> *мерки за информация, избор и неопределеност. Формата на $\boldsymbol{H}$ ще бъде разпозната като онази на ентропията, дефинирана при определени формулировки на статистическата механика, където $\boldsymbol{p_i}$ е вероятността системата да бъде в клетка $\boldsymbol{i}$ на своето фазово пространство* (Shannon 1948: 20*)[47].

Шенън обаче въвежда количествената мярка за информацията по друг, и то напълно независим начин. Той полага и съумява да докаже, че функцията $\boldsymbol{H = -K\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i}$ „(константата K просто възлиза на един избор за единица мярка)" (Shannon 1948: 20*)[45] е единствената, която изпълнява три изисквания:

> *Да предположим, че имаме множество от възможни събития, чиито вероятности на случване са $\boldsymbol{p_1, p_2, \dots\ p_n}$. Тези вероятности са известни, но това е всичко, което знаем относно кое събитие ще се случи. Можем ли да намерим мярка за това, колко* [how much] *„избор" се включва в селекцията на събитието или на това, колко несигурни сме ние за изхода? Ако има такава мярка, да кажем $\boldsymbol{H(p_1, p_2, \dots\ p_n)}$, разумно е да се изискват за нея следните свойства: 1. $\boldsymbol{H}$ би трябвало да бъде непрекъсната за $\boldsymbol{p_i}$-та. 2. Ако всички $\boldsymbol{p_i}$-та са равни, $\boldsymbol{p_i = \frac{1}{n}}$, то $\boldsymbol{H}$ би трябвало да бъде монотонна нарастваща функция на $\boldsymbol{n}$. С еднакво вероятни събития има повече избор, или неопределеност, когато има повече възможни събития. 3. Ако изборът бъде разкъсан на два последователни избора, първоначалната $\boldsymbol{H}$ би трябвало да бъде претеглената сума от индивидуалните стойности на $\boldsymbol{H}$* (Shannon 1948: 19*)[45].

Вижда се, че определението на Шенън може да се разглежда като обобщение на физическото понятие за ентропия, доколкото последното е частният случай, когато събитието е „системата да бъде в клетка $\boldsymbol{i}$ на своето фазово пространство". От друга страна обаче, наличието на минимална клетка на фазовото

---

[47] Страниците отбелязани със „*" са по изданието: C. Shannon. *The mathematical theory of communication*. Vol. 1. Chicago: University of Illinois Press, 1949. В онлайн варианта (http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/shannon1948.pdf .) цитираният текст е разположен на с. 10 и 11.

пространство, определена от константата на Планк, поставя въпрос пред свойството 3, тъй като от него, поне на пръв поглед, следва възможност за безкрайна делимост на клетката във фазовото пространство. Всъщност обаче, буквалната формулировка – „ако изборът бъде разкъсан на два последователна избора” – няма отношение към случая, когато условието не е налице, т.е. изборът не може да бъде разкъсан на два последователни избора, тъй като клетката на фазовото пространство е неделима.

Ако с такъв поглед се завърнем към вълново-корпускулярния дуализъм, можем да видим битието на квантовия обект като въпрос, или с термините на Шенън като избор, несигурност или неопределеност, на което както човекът с избирания от него тип експерименти, така и другите физически неща посочват единия от двата типа отговор. Количествената мярка на така разбраното битие на квантовия обект тогава би трябвало да е шенъновата информация или подходящо нейно обобщение. Информацията е основа на света от изначалната неразрешимост. Неизбежността на тази ситуация, както и на фундаменталността на информацията в конкретния случай произтича от равнопоставянето на дискретно и континуално или с други думи, от неразрешимостта на тяхната алтернативност, от тяхната допълнителност: квантовият обект ***и*** се движи по всички възможни континуални мирови линии между две събития, съблюдавайки при това строго лоренцовата инвариантност, ***и*** дискретно прескача между тях, случайно флуктуирайки около лоренцовата инвариантност и следователно, нарушавайки я в общия случай. Както по-нататък ще видим, такова поведение, разбиващо на трески нашите обичайни предразсъдъци, почерпени главно от ограничеността на нашия опит, от епистемологичната ни тесногръдост и самолюбие, не са екзотична „приумица” за някаква специална област, тази на квантовата механика и информация: те произхождат самото наличие на относителност, неразрешимост и казано по-конкретно, от фундаменталната относителност на дискретно и континуално, сродно или – от съответна гледна точка – еквивалентно на относителност между видовете безкрайности, между крайно и безкрайно, а ако си позволим типичното за философията спекулативно обобщение, и между профанно и сакрално:

Светът по принцип не е изцяло представен в научната картина на света; надценяваната в миналото, но подценявана понастоящем сфера на „божественото” е също толкова важна и равноправна сфера на човешкия опит, и то именно на човешкия; ‛бог’ е и самият човек, негова способност, дотолкова чужда и противопоставена на останалия му опит, че изглежда напълно външна. Заедно с това тя, „сама по себе си", се противопоставя се на неговата отделеност от света, чрез каквато се конституира психически като „аз". И въпросността на битието, и хармониращата с нея фундаменталност на информацията са тясно свързани с такова обединение или единство на научно и сакрално.

Информацията е начин и понятие, разбиране, което позволява привидният недостатък на неопределеността, случайността, избора да се използва градивно и да се постави в основата на света, и то – обратно на очакванията и само привидно парадоксално – *като надеждна и здрава опора*.

Въпросът за съвкупното въздействие на случайностите не е изследван от научна и философска гледна точка. Едва ли някой би спорил, че в живота ни и в света като цяло няма „чудеса": всяко нещо – по думите още на Лукреций Кар[48] – има причина, за да се случи. В областта на квантовата механика и информация също не става дума за отхвърляне на тази проста истина, а за нейното обобщаване в резултат на експлозивното разширяване на човешкото познание в области, твърде далечни от традиционната когнитивна ниша, в която е възникнал човешкият разум.

Заедно с това обаче остава въпросът дали съвкупността от случайностите следва да се разглежда винаги като неутрален фактор по отношение на всеки процес: било поради това че (1) въздействат слабо, или че (2) техните въздействия като цяло взаимно се неутрализират. По отношение на дисипативните процеси, които могат да се нарекат също и лавинообразни, (1) е отхвърлено от научното мислене и оттам дори отдавна е пренесено в масовата култура и ежедневната оценка на фактите посредством напр. на образа на „пеперудата, чието размахване на криле предизвиква ураган". Хипотезата (2) всъщност е тази, която не е изследвана: нейното отрицание представлява съвременен, най-малкото непротиворечащ на научното мислене еквивалент на „чудесата" от преднаучния възглед за света.

Добре насочвани случайности биха могли да задушат една тенденция и да осъществят „кърлинг" за друга, благоприятствайки я по всякакъв начин. Не само според обичайния здрав (дори за него в по-малка степен) разум, но и според досега съществуващото научно мислене подобен тип въздействие би останало незабелязано според негласния постулат за „невинността" на случайностите, т.е. за

---

[48] Вж. бел. 62.

съвкупната им неутралност. Разбира се, във всяка монета, при която за 100 хвърления около 70 се оказват „тура", ще се заподозре нещо нередно. Но какво да кажем, ако тя бъде хвърлена веднъж и според естеството си се окаже „тура". Ще приемем, че случайно се е оказала „тура" и е безусловно вярно, че такъв резултат *не е строго* детерминиран (вероятно е да се окаже и „ези", но *по-малко*). В житие-битието на човека и в историята уникалните събития имат огромно значение.

Очевидно, между отделните хора съвкупният резултат от техния живот силно се различава. Според общоприетия „западен" начин на мислене решаващият фактор са или способностите и недостатъците на отделния човек („десни" политически възгледи), или външните материални условия, при които е поставен („леви" възгледи). В религиозния мироглед – поне на християнството, исляма и юдаизма, но и в други – съществува концепцията за „божията воля", също за „благодатта" или от друга страна, за „фатума".

Единственото, което може да се каже е, че приемането на постулата за неутралност на случайностите по отношение на всеки процес, е също толкова обосновано или необосновано, колкото и една обратна аксиома: за тяхното въздействие в една или друга посока.

В частност, понятието за информация би ни помогнало да превърнем в обект на нашето мислене не само отношението между възможности, но и отношението между случайности, да изследваме по рационален начин теми, категорично „заприходени" в извъннаучното или дори антинаучното: „съдба", „благодат", „висша сила" и пр. Това са въпроси от една широко разбрана научна и със сигурност философска проблематика, към която вече можем да разработим подстъпа на категориална, научно-понятийна и дори количествена, математически моделираща методология.

Да преминем към много по-тесния, но в основата си сроден въпрос за същността на лоренцовата инвариантност. Тя напълно отсъства като принцип в класическата механика и се появява в специалната теория на относителността поради постулата за ненадвишаване на скоростта на светлината във вакуум; в резултат: по нютониански отделяните физически време и пространство се оказват необходимо обединени в четиримерното псевдоевклидово пространство на Минковски. Появява се нов тип ротация: между оста на времето и всяка от трите пространствени оси и тя може напълно да се опише чрез формулата $\boldsymbol{v = \cos\alpha = \frac{x}{t}}$, или в диференциален вид: $\boldsymbol{v = cos\,\alpha = \frac{dx}{dt}}$. Почти всички величини, обичайни за класическата физика, се оказват лоренцово неинвариантни, т.е. те се променят при подобно въртене на ъгъл α, което има физическия смисъл на преход от една към друга отправна система. Въвеждат се обаче нови величини, каквото е времепространственото разстояние между две мирови събития и означено по-горе със $\boldsymbol{\sigma}$, чиято физическа реалност и следователно важност за познанието се твърди именно на основанието, че е лоренцово инвариантно.

Обикновено понятието за едновременност в специалната теория на относителността се тълкува по начина, осветен още от Айнщайн във фундаменталната му публикация (Einstein 1905Z: 892-895)[49], при което тя бива установявана от произволна мирова линия по отношение на друга произволна чрез изпращане и получаване на светлинен сигнал. Ударението пада – дори и по начина, по който, както по-нататък ще видим, бива обсъждана от фон Нойман в контекста на неговата теорема за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика – обичайно върху конвенционалността на определението за едновременност по отношение на физическата величина времето.

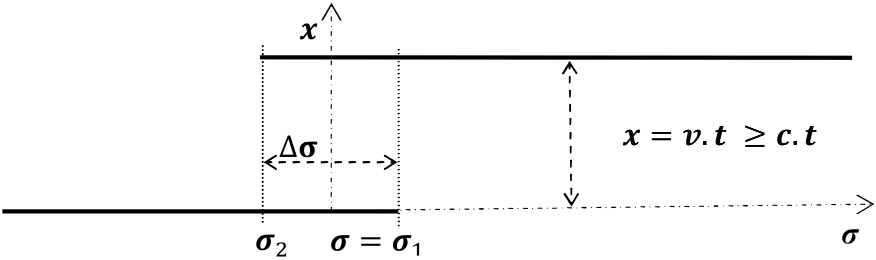
Такова разглеждане, обаче, затъмнява обстоятелството, че същностната в едновременността е по-скоро „едносъбитийността”, а не времето. Всъщност едновременността в специалната теория на относителността е напълно запазена, и то тъкмо в смисъла ѝ на далекодействие, но чрез обобщаването ѝ до по-обхватно понятие и съответно физическа величина, лоренцово инвариантното времепространствено разстояние $\boldsymbol{\sigma}$. Светлинните сигнали разбира се не могат да надвишат фундаменталната константа, означавана чрез формулата $\boldsymbol{v(t) = \frac{dx}{dt} = c}$. По начина на по-широко обсъждане, използван по-горе, при който $\boldsymbol{v = v(t, \sigma)}$, за тях е валидно: $\boldsymbol{v} = \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \infty$. В този смисъл разликата не е в абсолютността на едносъбитийността между класическата и релативистката механика, а в пространството в което се установява: обичайното тримерно евклидово, в първия случай, и това на Минковски във втория. Ето защо би трябвало да се подчертае дебело, че лоренцовата инвариантност също така означава абсолютна едносъбитийност – ако използваме

---

[49] Това е §1 в работата му.

такъв термин в качеството на разбираемо обобщение за този на 'едновременността', – но в четиримерното псевдоевклидово времепространство на Минковски.

Уточняване и експлициране и на 'лоренцовата инвариантност' е необходимо във връзка с изясняване същността и смисъла, който трябва да се влага, в нейното нарушаване. Ако тя флуктуира произволно, то и едновременността на две събития ще флуктуира произволно. При това ще се премине от онагледеното на фиг. 5 към това на фиг. 6. Нещо повече, трябва да се допусне и случаят на своеобразен „хистеризис", в посока, обратна на представения на фиг. 6:



Фиг. 7. „Едносъбитийност" при нарушаване на лоренцовата инвариантност

Фигурите 5, 6 и 7 представят три различни възможни случая на „едносъбитийност". Фиг. 5. представя стандартния за специалната теория на относителността случай за установяване на едносъбитийност чрез обмен на светлинни сигнали (електромагнитно излъчване). Фиг. 6 би онагледила случая, когато едносъбитийност се установя чрез квантови обекти с ненулева маса на покой: тогава за едносъбитийност може да се говори поради вълновия аспект на квантовия обект, постулиран от вълново-корпускулярния дуализъм. На фиг. 7 би бил изобразен случая на установяване на едносъбитийност чрез хипотетични обекти, движещи се със свръхсветлинна скорост. Заедно с това фиг. 5, 6 и 7 представят случайната флуктуация на лоренцовата инвариантност „и в двете посоки", при което частен случай от онагледеното на фиг. 7 би била класическата, нютонианската едновременност.

Но нека сега обсъдим какво би видял наблюдателят, който изпраща светлинни сигнали към друга отправна система и заедно с това е привърженик на строгата и безусловна лоренцова инвариантност. Дали ще възникне противоречие в неговия начин на тълкуване, или нарушаването на лоренцовата инвариантност ще се окаже успешно еквивалентно, но алтернативно представено в неговата понятийна „отправна система”?

Ако скоростта на светлината флуктуира към забавяне (фиг. 6), то наблюдателят ще установи намаляване на относителната скорост на движение на другата отправна система: това обаче няма да го затрудни, тъй като веднага ще обясни явлението чрез въздействие на сила, която е придала отрицателно ускорение, т.е. е забавила движението до нова, по-ниска скорост. Реципрочно, ако скоростта на светлината флуктуира в другата посока (фиг. 7), ортодоксалният привърженик на теорията на относителността ще заключи въздействие на сила, която е придала положително ускорение. Тъй като и в двата случая силата няма да има локализиран източник, за привърженика на Айнщайн все пак ще остане възможността да я припише на гравитационно въздействие. При това неговата теория, представяща дискретното „барабанене” на квантовата флуктуация като континуално гравитационно взаимодействие, ще се потвърждава прецизно от експериментите. Защо? Тъкмо поради валидността на следващата крачка в посоката, очертана от самия Айнщайн: така както равномерното праволинейно движение има относителен характер (по принцип не можем да знаем нашият влак ли е потеглил или този на съседния перон), така както ускореното движение и гравитацията са неразличими (по принцип не можем да знаем дали се ускоряваме под въздействие на механична сила или падаме в гравитационно поле), така и дискретно представяне в понятийната канава на квантовата механика и информация – в бегло очертания по-горе мислен експеримент – и континуалното осмисляне чрез общата теория на относителността са въпрос единствено на терминологични и метафизични предразсъдъци, пристрастия или просто навици, а не на какъвто и да било – та дори и само мислено – възможен експеримент, чрез какъвто двата случая да могат да се разграничат в опита.

Става дума за една, и то още по-дълбока относителност: между континуално и дискретно, между класическата физика на гладките траектории и квантовата – на скоковете. Явленията на сдвояване и гравитационните са в основата си едно и също, но видени съответно дискретно (от квантовата механика) и континуално (от теорията на относителността).

Ако отново употребим вече използваната метафора за света като разговор на нещата в неговата цялост, то гравитацията би била общата звукова картина на непресекващ шум. Следва обаче да направим една изключително съществена уговорка в духа на теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика: шумът не е просто производен статистически от разговора. Ако застанем на позицията на вселената като цяло и на тази като съставена от части, те са *дуални*. Или казано иначе, както „разговорът на нещата" може да се приеме, че е в основата на „шума", то напълно равноправно и еквивалентно може да се смята, че и „шумът" като взаимно привличане, гравитация е в основата на „разговора".

Самият Дирак мотивира въвеждането на математическия инструмент на δ-фунциите чрез появата на безкрайни физически величини в § 10 на неговата книга (Дирак 1958: 58). Необходими са няколко думи за въведената от него терминология на бра и кет векторите (Dirac 1958: 18-22), още повече че според него:

> *Пространството на бра или кет-векторите, когато векторите са ограничени до крайна дължина и да имат крайно скаларни произведения, се наричат от математиците* хилбертово пространство. *Бра-векторите и кет векторите, които сега използваме* [вкл. с безкрайни дължина и скаларно произведение]*, образуват пространство, по-общо от хилбертовото* (Dirac 1958: 40)

Както ще видим и обосновем физически и философски защо, това по-обобщено пространство[50] е т. нар. обзаведено хилбертово пространство ($\mathbb{G}$), което съдържа като свое същинско подмножество обичайното хилбертово пространство и заедно с това всички елементи от типа на Дираковите δ-функции или според терминологията на математиците, Шварцовите разпределения. Следователно, то се състои хилбертово пространство ($\mathbb{H}$) и негово подпространство ($\mathbb{S}$) с по-фина или иначе казано, с по-силна топология и както след няколко абзаца ще видим, еквивалентно на разглеждане на елементите на едно обичайно хилбертово пространство в две топологии, едната по-обхватна, спрямо полунорма, съответстваща на всички квантови обекти, другата по-тясна, спрямо същинска норма, само за „частиците", напр. с

---

[50] Съществуват и други отчасти еквивалентни възможности за обобщаване на хилбертовото пространство, също така намиращи приложение в квантовата механика (напр. Antoine 1998). Тяхното обсъждане е пропуснато, тъй като почти не би допринесло за философско и методологично изясняване същността на обсъждания проблем, а изисква въвеждане на обемист математически апарат.

ненулева маса на покой. Понятието за обзаведено хилбертово пространство се оказва особено вълнуващо след осмисляне на следното негово свойство (почерпено от т. нар. тройка на Гелфанд):

$$\mathbb{G}(\mathbb{H},\mathbb{S}): \mathbb{S} \subseteq \mathbb{H}, \mathbb{H}^* \subseteq \mathbb{S}^*, \qquad (33)$$

или ако отъждествим поради рицовската изометричност хилбертовото пространство и неговото спрегнато $\mathbb{H} = \mathbb{H}^*$, то тогава:

$$\mathbb{G}(\mathbb{H},\mathbb{S}): \mathbb{S} \subseteq \mathbb{H}, \mathbb{H}^* \subseteq \mathbb{S}^*\,. \qquad (34)$$

Напрежението нараства, след като спрегнатото пространство се изтълкува физически като обръщане посоката на времето: ако обърнем посоката на времето, частиците ще се окажат вълни и обратното.

Етимологията на термина „бра и кет вектори” – от английската дума за скоба („bracket” $= \text{bra} - \text{c} - \text{ket} = \langle \quad | \quad \rangle$, откъдето $\text{"bra"} = \langle \quad |, \text{"ket"} = | \quad \rangle$) – произлиза от обичайното използване на остри скоби, „$\langle \quad \rangle$” за означаване на скаларно произведение в хилбертовото пространство. Ако представим $\boldsymbol{\Psi}$-функцията по начина на бра и кет, то нейният базис ще бъде бра вектора, а нареденото множество от комплексните коефициенти – кет вектора. Условието за ортогоналност на базиса, за което можем да употребим оставащата буква „c”, след като „bracket” се раздели на „bra” и „ket”, изисква – ако онагледим бра и кет представянето като матрица – всички нейни елементи, които не са по главния диагонал, да са тъждествено равни на нула.

Бра-кет представянето е много подходящо за идеите на квантовата информация, тъй като чрез него може вече явно да се обсъжда отношението на $\boldsymbol{\Psi}$-функции от несъвпадащи хилбертови пространства, с други думи – на сдвоени квантови обекти.

Оригиналното въвеждане на бра-кет означенията от Дирак, обаче, макар и еквивалентно, по-точно – изометрично на изложеното по-горе, все пак е различно: бра векторът на един кет е просто неговият спрегнат (следователно ако неговите компоненти са само реални – съвпада). Тъй като обаче ще вземем предвид теоремата на Риц за представянията (Riesz 1907) в случая, когато функциите са дефинирани върху полето на комплексните числа, то бра векторът е антиизометричен, или с други думи – антиизометрично представен, на едно-еднозначно съответстващия вектор от дуалното пространство.

Това може да помогне за осмислянето на функцията $\boldsymbol{\Psi}^*$, т.е. функцията, спрегната на функцията на състоянието: тя е просто изометричният еквивалент на съответстващата от дуалното пространство. От друга страна, в своя изометрично еквивалентен вид $\boldsymbol{\Psi}^*$-функцията може да се тълкува като обръщане посоката на времето. Ако $\boldsymbol{\Psi}^*$-функцията се разгледа като ковекторът от алгебрично дуалното пространство, то изометрията като универсално свойство на хилбертовото пространство и неговото дуално ще е валидна само в случая, когато е плоско или с други думи – когато неговият базис е ортогонален. Тъй като е налице „стрелата на времето" и двете негови посоки не са еквивалентни, то това свидетелства, че 'хилбертовото пространство на света' не е плоско и оста на времето не е ортогонална по отношение на хиперравнината на обичайното тримерно, какъвто впрочем е и общият случай, изучаван от общата теория на относителността.

По-нататък обаче трябва също така и разграничим (1) дуално алгебрично и (2) непрекъснато дуално пространство. Несъвпадението между тях е съществено в случая, когато векторното пространство и съответно неговото дуално е безкрайномерно, каквито са в общия случай използваното в квантовата механика хилбертово пространство и неговото дуално. Непрекъснатото дуално пространство, включващо съответно на наименованието си само непрекъснатите функционали, е линейно подпространство на алгебричното дуално подпространство. За всяко крайномерно нормирано векторно пространство или топологично векторно пространство двете съвпадат. Това не е вярно в случай на прекъснати изображения, в т.ч. и за използваните в квантовата механика линейни.

Разграничението между двата типа дуално пространство – алгебрично[51] и непрекъснато – съответства на въвеждането на слаба (понякога на български

---

[51] Ако е дадено векторно пространство $\boldsymbol{V}$ върху поле, алгебричното дуално се дефинира като множеството от всички линейни функционали върху $\boldsymbol{V}$, което се оказва, че също така е векторно пространство, и то според теоремата на Риц за представянията (Riesz 1907) изометрично на даденото, ако полето е на реалните числа, и антиизометрично, ако полето е на комплексните числа. За разлика от непрекъснатото дуално пространство, тук се включват и прекъснатите линейни функционали.

се използва и терминът „мека”) топология върху векторното пространство чрез непрекъснатостта на функционалите в дуалното пространство. Ако за всички непрекъснати линейни функционали, т.е. следователно за всеки елемент на непрекъснатото функционално пространство редицата от образите на дадена редица от елементи на векторното пространство е сходяща, то се казва, че е слабо сходяща. С други думи, слабата топология се основава не на идеята за непрекъснатост на елементите на самото множество чрез въведената тяхна норма, а на скаларните им образи чрез непрекъснати функционали. Всяко векторно пространство със силна топология притежава и слаба, но обратното не е вярно.

Разликата между силната и слабата топология може да се представи – и то при това в тясна връзка с настоящия контекст и с тяхното физическо осмисляне – чрез разграничението между норма и полунорма. Последната е по-обхватното понятие и допуска възможността ненулеви елементи на векторното пространство да имат нулева полунорма. В примерите по-горе, разстоянието x определя норма, а времепространственото разстояние $\boldsymbol{\sigma}$ – полунорма в четиримерно векторно пространство. Очевидно, понятието за едносъбитийност, характерна за теорията на относителността, за вълново-корпускулярния дуализъм и за квантовата информация, от една страна, изисква въвеждането на слаба топология, а от друга – вече чрез нея, – позволява единното им разглеждане.

Като нàглед, вълново-корпускулярният дуализъм се представя така: всеки квантов обект е непрекъснат. Тогава, според силна топология един квантов обект е частица, а според слаба – вълна. Освен това има особен клас обекти, които са непрекъснати само според слаба топология и това са т. нар. полета, исторически първи и класически пример за каквото е електромагнитното. С въвеждането на хилбертовото пространство върху полето на комплексните числа като формализъм за описание на квантовите обект, неизбежно следват и двете топологии и вълново-корпускулярния дуализъм.

От цялото обсъждане следва, че явленията на сдвояване или сами по себе *сà*, или са еквивалентни на взаимодействие между обекти (светове) с различен ход на времето, респ. различни възможни светове. Различният ход на времето се представя чрез различно хилбертово пространство, т.е. с различен базис и следователно различно „минало” в смисъла на транслация по оста на времето, обратна на посоката на неговата „стрела”. От друга страна, един неразрешим проблем е, че заедно с това – както показва например класическата схема на аргумента АПР – сдвоените обекти имат общо минало. Забележете, как веднага, след като изглеждаше – чрез понятията за слаба и силна топология – сме успели да разделим в различни отношения, вълновия и корпускулярния аспект на квантовите обекти, то тяхното единство мигом се оказа възкръснало на „друго място” в теорията, а именно в дуализма *общо и заедно с това самостоятелно минало на сдвоените обекти*, напомняйки за неунищожимостта на самата квантова информация, която ако изчезне тук и сега, непременно се оказва появила се на друго място и в друг момент.

Налице е и един „дуалистичен дуализъм”: дуалните цяло и части, като единство дуални на също така дуалните сами по себе си действителен свят и възможни светове.

Изследване на физическия смисъл и прецизиране на отношенията между понятията „слаба и силна топология” на векторно пространство, от една страна, и негово „алгебрично и непрекъснато дуално пространство”, от друга, ще помогне – но по-нататък – за изясняване връзката между квантовата механика и теорията на относителността.

Още отсега може да се отбележи следното: една напълно неразработена област, за която все още няма никакви експериментални данни е тази на преобразованията, прекъснати не само според силната топология. Особено важни сред тях са прекъснатите според слабата топология и тъй като тя е най-слабата възможна (множеството от отворените множества е с минималното възможно кардинално число), те могат да се нарекат абсолютно прекъснати, понеже са необходимо прекъснати за всяка друга топология. По същата схема за въвеждане на термин, непрекъснатите за силна топология морфизми, могат да се обозначат като абсолютно непрекъснати.

Освен това времето може да бъде въведено чрез две топологии, най-естествено чрез слабата и силната, като се върви по обратния път. На двете топологии се приписват съответно полунорма и норма, каквито в онагледените на фигури 5, 6 и 7 представляваха съответно времепространственото разстояние $\boldsymbol{\sigma}$ между две събития в пространството на Минковски и обичайното разстояние x между две точки в тримерното евклидово пространство. С това обаче не въвеждаме все още собствено време, а неговият еквивалент по норма (разстояние), който би варирал от скорост до скорост (респ. при преход от една отправна система към друга). Прави го едва фиксирането на точно една скорост, каквото представлява фиксирането на фундаменталната скорост на светлината във вакуум (но без необходимост от постулата за нейното непревишаване, т.е. от лоренцова инвариантност).

Ако обаче даден морфизъм е абсолютно прекъснат, то време в качеството на аргумент за диференциране на непрекъснатия морфизъм (очевидно сме предположили допълнително, че е и „плавен", т.е. поне веднъж диференцируем) е невъзможно да се въведе на основата на разликата между разстояние по норма и по полунорма. Обаче това последно разстояние, да го означим с $\boldsymbol{\chi} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{\sigma}^2}$, продължава да е еднозначно определено: както за случая на абсолютно непрекъснати, както за прекъснато-непрекъснати (т.е. нито абсолютно прекъснати, нито абсолютно непрекъснати): в термините на „класическата" квантова механика – това е всеки квантов обект, подчинен на вълново-корпускулярния дуализъм, така и за абсолютно прекъснати морфизми.

В настоящия контекст следва да положим няколко насоки на мисълта по-скоро като проблеми, отколкото в качеството на избрани алтернативи като отговори:

1. Можем ли да приравним прекъснатото преобразование с някакво $\boldsymbol{\chi} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{\sigma}^2} \neq \mathbf{0}$ като непрекъснато, но с кривина $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\chi})$**?** В първия случай съпоставяме две точки като логически предикати, поставяйки или оставяйки под въпрос дали те имат общ субект, т.е. дали има физически обект, за който се явяват различни стойности на една и съща величина, напр. пространствено местоположение. Във втория, можем да съпоставим две различни скорости и следователно ускорение и сила, възможно под въздействието на гравитационно поле. Следователно, основата на въпроса е: винаги ли – респ. при какви условия, ако не винаги – наличието на две топологии можем да приравним на действието на гравитационно поле?

2. Както постулатът за ненадвишаване скоростта на светлината във вакуум определя една максимална скорост, така и съотношението за неопределеност посочва известна минимална скорост $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{v_0}(\boldsymbol{m}, \Delta\boldsymbol{x})$, която изключва съществуването на „абсолютно неподвижно тяло". Но тъкмо такова е „материалната точка", която е в началото на отправната система: по дефиниция нарушава съотношението за неопределеност, тъй като за нея е валидно: $\Delta\boldsymbol{p} = \Delta\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Несъществуването

на „абсолютно неподвижно тяло” е в пряка връзка с теоремата на фон Нойман за несъществуване на скрити параметри в квантовата механика.

3. Постулатът за ненадвишаване на скоростта на светлината, от една страна, и съотношението за неопределеност, ограничават физическата реалност все едно в противоположни посоки в смисъл, който става ясен чрез обсъжданите по-горе слаба и силна топология, респ. абсолютно прекъснати и абсолютно непрекъснати морфизми. От такава гледна точка от нея са изключени както първите, така и вторите, или иначе казано няма физически обекти, за които да не е в сила вълново-корпускулярният дуализъм: няма „абсолютни частици”, т.е. физически обекти с движение, представяно чрез абсолютно непрекъснати морфизми, впрочем както няма и „абсолютни вълни”.

4. Но съвременното развитие на квантовата информация сериозно разклати тези постулати на „класическата” квантова механика. В еднаква степен непристъпността „и в двете посоки” на областите отвъд вълново-корпускулярния дуализъм се оказа по същество отхвърлена. По-очевидна за масовата научна публика беше – поради ореола на Айнщайновата съпротива – атаката срещу ненадвишаване скоростта на светлината при квантовите корелации (явленията на сдвояване). Заедно с това обаче – както ясно показва Джон Бел в статията си от 1966 година – последните в известен смисъл отхвърлят теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри, респ. реставрират „абсолютно неподвижното тяло”, което обаче се оказва напълно детерминирано, не вътрешно, т.е. класически, в лапласовско значение на термина, а от другите физически обекти, фиксиращи еднозначно състоянието му чрез квантовите корелации. Така, макар и по-незабелязано, квантовата информация щурмува – наред със свръхсветлинната – също и субквантовата област. Както на вълните сами по себе си, така и на частиците сами по себе си, ала заедно с дуалните обекти на „класическата” квантова механика следва в еднаква степен да се признае физическа реалност.

4. Философски особено потресаващо е размяната на местата между непрекъснато и прекъснато в следния смисъл. Математическият анализ и впоследствие теорията на множествата създадоха представата за континуална среда, която изпълва и запълва дискретните, дори и безкрайно малки интервали. Квантовият възглед преобърна нещата, представяйки континуалното като статистическа илюзия от огромно множество дискретни събития. Двете представи – инфинитезималната

математическа и квантовата – обаче не си противоречат, ако могат да се разположат съответно в сферата на теоретичното или моделното и на емпиричното или реалното. Както обаче нестандартният анализ на Робинсън, от едната страна, и примери от типа на теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика или Шрьодингеровата „котка", от другата, показаха: дискретното е не по-малко първично теоретично от континуалното, поне в същата степен, в която континуалното е не по-малко първично емпирично от дискретното. Концепцията на „дуалистичното питагорейство" прави следващата крачка в същата посока: самата граница между теоретично и емпирично, между моделно и реално е не просто проблематична – *такава няма*.[52]

5. Квантовата информация изисква фундаментална промяна на възгледа за налична на съотнасяне на математическо и физическо, моделно и реално, теоретично и емпирично, субективно и обективно и пр. опозиции, представляващи метафизически полярни двойки. Същността на тази постепенна промяна е, че тяхното противопоставяне беше първоначално отслабено от противоречие до дуализъм, въдвори се между тях междинна буферна зона на едновременна валидност за всеки от двойката „противоборстващи" членове от опозициите и тази област на дуализъм дори се превърна в основния предмет за изучаване от „класическата" квантова механика и нейната философия. Нещо повече, светът като цяло беше обявен за подобен на тази област, т.е. дуален, Ян и Ин, споени в единното им Дао. Квантовата информация обаче реставрира двата полярни членове в модуса всеки от тях в битие „сам по себе си", но за разлика от възгледа на класическата физика и нейната философия, споени в неразделно единство, или с други думи, плавно преминавайки един в друг посредством буферната зона на едновременна валидност.

Тази фундаментална промяна в нейните исторически и историко-онтологически реализиращи се степени се отнася до „първата философия", до

---

[52] Названието „магически реализъм" – в смисъл, съществено различен или обобщаващ по отношение на обичайното използване на термина в литературната теория и критика – би подхождало. Ако мислим за дискретния скок като за „чудо" или „магия", което обаче е не повече от другата страна на континуалната, мудно и винаги причинно променяща се реалност, или за социалната революция и историческата приемственост като за дуални, бихме вече се насочили към визирания по-дълбок пласт на търсеното философско значение за „магически реализъм".

тезауруса от основни категории, споделяни в една или друга степен от различните направления и школи в нея. Тя изисква философията да се пренапише.

Един пример: така както квантовите корелации удивяват мисленето ни и противоречат на установените и дълбоко вкоренени представи, квантова информация изисква физическо съществуване на област на дискретното само по себе си, абсолютно прекъснатото според използваната по-горе терминология. В такъв случай обаче въдворяваме във физическа употреба не просто вакуум, който мислим като своеобразен празен съд, а небитието между двете дискретни стойности, „между" които не просто няма материя или енергия, но няма напр. пространство и време, няма следователно самата основа на „между". Проблемът звучи като „коан": да вземем дискретното множество от естествените числа, и то при това само то и нищо друго; какво има *между* две естествени числа? Нещо повече, тази, да я наречем „дискретна", „аритметична" позиция следва да се мисли като напълно равноправна на обичайната „континуална" или „физическа": светът възниква от небитието, не само някога, при „Големия взрив", но и винаги, но и сега, в настоящия момент, фигуративно казано, от взаимодействието на разделеното на части небитие, доколкото небитието – по самото се естество и в реториката на християнските мислители – е колкото цяло, толкова и части. Това обаче *не е новият* истинен възглед за света, а трябва да приемем *и него*, наред с обичайния, търсейки и осъществявайки чрез самите себе си тяхното примирение. Изобщо битието е неоправдано не само надценено, но философски абсолютизирано и „неговата" гледна точка е „идеологически" универсализирана. Небитието се еманципира чрез дискретното и аритметичното. Ако обаче приемем, че светът в еднаква степен битийства и небитийства, акцентът и центърът се премества от актуалността към виртуалността, от действителността към възможността, от необходимостта към случайността, от статистическата към феноменологичната вероятност. Това е преходът, в който участва или дори е започнат за западната култура от „класическата" квантова механика и нейната философия, но който има множество съзвучни аспекти в най-разнообразни области на културата, науката, политиката, философията и пр.

Въоръжени с такъв контекст, нека отново се върнем към причините – с оглед на математическия формализъм на квантовата механика, – накарали Дирак да въведе δ-функцията. В параграфа с показателното заглавие „Наблюдаемите" може да открием:

Преди да завършим този параграф би трябвало да изследваме условията, интеграл, такъв, какъвто се оказва в (24)[53] *да има смисъл. Да предположим* $|X\rangle$ *и* $|Y\rangle$ *са два кета, които могат да се изразят като интеграли на собствените кетове на наблюдаемата* ξ*,*

$$|X\rangle = \int |\xi' x\rangle \, d\xi' , \qquad |Y\rangle = \int |\xi'' y\rangle \, d\xi'', \tag{35}$$

x *и* y *бидейки като етикети да се разграничават двете подинтегрални функции. Тогава имаме, вземайки имагинерно спрегнатото на първото уравнение и умножавайки го по второто*

$$\langle X|Y\rangle = \iint \langle \xi' x|\xi'' y\rangle \, d\xi' d\xi'' . \quad (28) \tag{36}$$

Да разгледаме сега единичния интеграл

$$\int \langle \xi' x|\xi'' y\rangle \, d\xi'' . \quad (29) \tag{37}$$

От теоремата за ортогоналността[54] *подинтегралната величина тук трябва да изчезва по целия интервал на интегриране освен една точка* $\xi' = \xi''$*. Ако подинтегралната функция е крайна в тази точка, интегралът (29) изчезва и ако това е в сила за всички* ξ'*, от (28) получаваме, че* $\langle X|Y\rangle$ *изчезва. Ако в общия*

---

[53] Формулата, означена от Дирак като (24), е следната: $|P\rangle = \int |\xi'\rangle \, d\xi'$ (Dirac 1958: 37). Много важен е и контекстът в който се появява: „Нека изследваме математически условието за една реална динамична променлива ξ да бъде наблюдаема. Нейните собствени стойности могат да се състоят от (крайно или безкрайно) дискретно множество от числа или алтернативно те могат да се състоят от всички числа от известен интервал, такива като всички числа, лежащи между a и b. В първия случай, условието, че всяко състояние е зависимо от собствените стойности на ξ е, че всеки кет може да се изрази като сума от собствените кетове на ξ. Във втория случай условието се нуждае от модификация, тъй като може да има интеграл вместо сума, т.е. един кет $|P\rangle$ може да бъде изразим като интеграл от собствените стойности на ξ, $|P\rangle = \int |\xi'\rangle \, d\xi'$ (24), $|\xi'\rangle$, бидейки собствен кет на ξ, принадлежащ на собствената стойност ξ', и интервалът на интегриране бидейки и интервалът от собствени стойности, понеже такъв кет е зависим от собствените кетове на ξ" (Dirac 1958: 37).

[54] Наречената от Дирак теорема на ортогоналността, твърди, че два собствени вектора на реална динамична променлива, отнасящи се до различни собствени стойности, са ортогонални (Dirac 1958: 32).

> *случай $\langle \boldsymbol{X} | \boldsymbol{Y} \rangle$, то в общия случай $\langle \boldsymbol{\xi}' \boldsymbol{x} | \boldsymbol{\xi}'' \boldsymbol{y} \rangle$ трябва да бъде безкрайно голямо по такъв начин, че да направи (29) неизчезващо и крайно в една точка. Формата на безкрайността, изисквана за това, ще бъде обсъдена в § 15* [в който и заради което се въвежда $\boldsymbol{\delta}$-функцията] (Dirac 1958: 39).

Би трябвало да изясним защо Дирак смята за необходимо да разглежда случая, когато $\langle \boldsymbol{X} | \boldsymbol{Y} \rangle \neq \boldsymbol{0}$ и $\langle \boldsymbol{\xi}' \boldsymbol{x} | \boldsymbol{\xi}'' \boldsymbol{y} \rangle$ трябва да бъде безкрайно голямо:

> *В работата ни чак дотук се предполагаше, че нашите бра и кет вектори са с крайна дължина и техните скаларни произведения са крайни. Сега виждаме необходимостта от отслабване на това условие, когато боравим със собствени вектори на наблюдаема, чиито собствени стойности образуват интервал. Ако не го отслабим, явлението на интервали от собствени стойности не би могло да се случи и нашата теория би била твърде слаба за повечето практически проблеми* (Dirac 1958: 39).

Ние няма да следваме или по-точно казано, няма да следваме единствено физическия смисъл на мотивировката, предложена от Дирак, а именно въвеждане и изследване на наблюдаеми с непрекъснат спектър от собствени стойности.

Всъщност моделът, който предлага Дирак – да напомним, че първото издание на книгата „Принципите на квантовата механика" излиза още през 1928 г. и тогава са оставали цели седем години до появата на аргумента АПР и Шрьодингеровите *verschränkten Zustände* – добре описва явленията на сдвояване, стига да приемем, че кет векторите $|\boldsymbol{X}\rangle$ и $|\boldsymbol{Y}\rangle$ са два собствени вектора, които се отнасят не до различни собствени стойности на една и съща „реална динамична променлива", а до такива на две едноименни „реални динамични променливи", и то на два различни, макар и сдвоени квантови обекта.

Според основното определение за сдвояване, хилбертово пространство не може да се представи като тензорно произведение (не може тензорно да се факторизира) на хилбертовите пространства на съставящите я части. Това се случва тогава и само тогава, когато двете последни хилбертови пространства не са ортогонални помежду си. В такъв случай също и разглежданите от нас кет вектори няма да са ортогонални $|\boldsymbol{X}\rangle$ и $|\boldsymbol{Y}\rangle$, поради което и условието $\langle \boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}\rangle \neq \boldsymbol{0}$ се оказва изпълнено, необходимо изисквайки $\langle \boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi}''\boldsymbol{y}\rangle$ да бъде безкрайно голямо, което налага да се използват въведените в § 15 $\boldsymbol{\delta}$-функции. Дискретният скок, чиято „скорост" те представляват, обаче няма да се случва между две дискретни стойности на една съща динамична променлива на един и същ квантов обект, а между две едноименни динамични променливи на два различни, макар и сдвоени квантови обекта.

Съпоставянето на оригиналната мотивировка на Дирак за въвеждане на $\boldsymbol{\delta}$-функцията, а именно представяне и изследване на наблюдаеми с континуален спектър (интервал) от собствени стойности, и току-що приведената – за сдвоени обекти, навежда на идеята, че в известен смисъл, подлежащ на уточнение, те са еквивалентни. В какъв?

В общия случай континуалният спектър от собствени стойности на наблюдаеми изисква да се разглеждат в несепарабелно хилбертово пространство, т.е. в такова, чийто базис е неизброим. От друга страна, още фон Нойман (Neumann 1932: 24; 34-38) установява, че обичайно използваното хилбертово пространство в квантовата механика е сепарабелно, т.е. неговият базис е изброим. Въпросът отново се изследва, и то в тясна връзка с настоящия контекст в забележителната работа на Стретър и Уитман (Streater, Wightman 2000), публикувана за първи път през 1964, но чиито основни положения са формулирани още през 50-те години.

Основната идея е да се предложи аксиоматика на квантовата теория на полето: фактически те определят такова хилбертово пространство, върху което групата на Поанкаре (състояща се от всички движения в пространството на Минковски) действа унитарно и следователно не променя физическите величини, поради което основните понятия за енергия, импулс, момент на импулса, център на маси и пр. могат да се въведат и използват аналогично на случая с макротела: хилбертовото пространство и пространството на Минковски да се разглеждат съвместно и следователно по непротиворечив начин, което се гарантира от съвместимостта и непротиворечивостта на съответния комплект аксиоми. Въпросът за сепарабелността на хилбертовото пространство в квантовата механика (Streater, Wightman 2000: 85-87) се обсъжда в следната връзка:

> *Понякога се твърди, че в квантовата теория на полето се борави със система с безкраен брой степени на свобода и така трябва да се използва несепарабелно хилбертово пространство. Грубо, идеята е:*
>
> $$\begin{pmatrix}\text{система с краен брой}\\ \text{степени на свобода}\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}\text{сепарабелно хилбертово}\\ \text{пространство}\end{pmatrix}$$
>
> $$\begin{pmatrix}\text{система с безкраен брой}\\ \text{степени на свобода или нещо}\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}\text{несепарабелно хилбертово}\\ \text{пространство}\end{pmatrix}$$
>
> *Нашата следваща задача е да обясним защо това е погрешно или в най-добрия случай грубо подвеждащо* (Streater, Wightman 2000: 85).

Същността на тяхното разглеждане от математическа гледна точка е, че множество от изброимо количество множества е изброимо. С други думи, дори и да се въведе отделно сепарабелно хилбертово пространство за всяка различна „степен на свобода или нещо”, то тяхната съвкупност отново може да се представи в сепарабелно хилбертово пространство, стига обаче – дебело да подчертаем – съвкупността да е адитивна по отношение на „степените”, което да позволи новополученото хилбертово пространство да се представи като директна сума от тези на степените.

> *Кога в действителност* – заключават двамата автори, – *несепарабелни хилбертови пространства се появяват в квантовата механика? Има два случая, които заслужават да се споменат. Първият възниква, когато се вземе безкрайно тензорно произведение от сепарабелни хилбертови пространства. … Безкрайните тензорни произведения от хилбертови пространства (с размерност, по-голяма от 1!) са винаги несепарабелни* (Streater, Wightman 2000: 87).

При сдвояване хилбертовото пространство не може да се представи като тензорно произведение от участващите (естествено краен брой) квантови обекти, но то винаги може да се представи като такова от безкраен. Следователно обектите на квантовата информация биха били представими чрез несепарабелно хилбертово пространство[55]. Конкретна обобщена $\boldsymbol{\Psi}$-функция (в смисъла на Шварцовите обобщени функции) може да се опише вместо като сума, т.е. вместо като състояние на адитивна съвкупност от осцилатори (адитивността е представена чрез ортогоналността на базиса), по следния „математически нагледен" начин:

$$\boldsymbol{\Psi(k) = \prod_{k=1}^{\infty} C_k e^{ik\varphi} = \int_0^{\infty} C(k) e^{i\varphi(k)}\, dk} \qquad (38)$$

Чрез интегриране по $\boldsymbol{k}$ сме се опитали да представим сумиране на неизброим брой членове. Самата собствено математическа идея за представяне на интеграл като произведение чрез посредничеството на несепарабелно хилбертово пространство е интересна.

Ако обичайната квантова теория на полето все пак може да се ограничи до сепарабелно хилбертово пространство, при което наблюдаемите се отнасят до целостта от осцилатори, квантовата информация може да се разглежда като нейно обобщение, навлизаща в сложните взаимодействия между осцилаторите, поради което трябва да се дефинира върху тяхното множество. В частност напр., постулатът за ненадвишаване скоростта на светлината няма да е валиден в общия случай за произволно тяхно подмножество[56].

---

[55] Те продължават: „Тъй като едно (бозоново) поле може да се мисли като система, съставена от безкраен брой осцилатори, би могло да се помисли, че такова безкрайно тензорно произведение е естественото пространство на състоянията. Обаче за теорията на полето е характерно, че някои от нейните наблюдаеми включват всички осцилатори наведнъж и се оказва, че такива наблюдаеми могат да бъдат естествено определени върху много малко сепарабелно подмножество на безкрайното тензорно произведение. Именно подпространството, обхванато от такова подмножество е естественото пространство, отколкото самото цяло тензорно произведение" (Streater, Wightman 2000: 87).

[56] Едновременността в нютоновски смисъл изисква безкрайна скорост. Нарушаването на лоренцовата инвариантност е много по-широко понятие и би изисквало самостойно подробно обсъждане, за да се набележат неговите варианти и връзките между тях. Ако запазим онагледяването по-горе – на фиг. 7, чрез функцията $\boldsymbol{x(\sigma)}$ и фиксирана (макар и евентуално надвишима) скорост $\boldsymbol{c}$, то участъкът на застъпване $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ ще варира. В случая на нютоновска едновременност, той би бил безкраен (две успоредни линии на разстояние $\boldsymbol{x}$). Забележете, че понятието за нарушаване на лоренцовата инвариантност се „параметризира" чрез интервала $\Delta\boldsymbol{\sigma}$, извън който няма да е налице (вътре в неговите рамки може както да е налице, така и да отсъства). Чрез мярка на подмножествата на тензорното произведение на хилбертовите пространства на осцилаторите върху $\boldsymbol{\sigma}$ можем да ги съотнесем с нарушаването на лоренцовата инвариантност. Ако подмножеството е изброимо, т.е. съответното хилбертово пространство е сепарабелно, то неговата мярка е $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$, лоренцовата инвариантност няма да се нарушава и попадаме в случая, обсъждан в книгата на Стретър и Уитман. В частност, каквото и

> *Вторият пример на случай на несепарабелно хилбертово пространство се появява в статистическата механика, когато се преминава към границата, в която конвенционалната кутия съдържаща системата, става безкрайно голяма, плътността бидейки поддържана постоянна. Двете състояния на ограничаваната система, които имат различни плътности действително се отличават по присъствието на безкраен брой частици. Би могло да се очаква те да са ортогонални и действително случаят е такъв във всички примери, изследвани досега. Следователно има ортонормална система с непрекъснат параметър, плътността, и хилбертовото пространство е несепарабелно* (Streater, Wightman 2000: 87).

Приведената процедура – от математическа гледна точка – всъщност съвпада с единия от начините за въвеждането на разпределенията на Шварц, аналогичен на въвеждането на ирационалните числа като граници от сходящи безкрайни редици рационални числа. Така безкрайна редица от обичайни функции, зависеща от непрекъснат параметър се оставя да клони към разпределение, играещо ролята на ирационалното число. В нашия случай всяка от функциите ще имплицира еднозначно базис на сепарабелно хилбертово пространство и така ще получим съответното на разпределението несепарабелно хилбертово като граница на безкрайна редица от хилбертови пространства. Следователно чрез разпределенията се появява въпросът за връзката и евентуалната еквивалентност на обзаведените (със слаба и силна топология) сепарабелни хилбертови пространства и несепарабелните хилбертови пространства като два еквивалентни начина за въвеждане на обобщените функции. Слабата топология се оказва аналогична на топологията, въвеждана от рационалните числа, чрез която ирационалните числа „съдържащи"[57] и „малко"[58] отличаващи се от дадено рационално число се „отъждествяват" с него. При слаба

да е отъждествяване между $\boldsymbol{\delta}$-функция ($\mathbf{0} < \Delta\boldsymbol{\sigma} \leq \infty$) и нютоновска едновременност (т.е. случаят, когато $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \infty$) е неправомерно.

[57] Тоест съвпадащи до последния ненулев десетичен знак на въпросното рационално число.

[58] Ако означим с $\boldsymbol{n}$ последния значещ разряд на „съдържащото се" рационално число, „малката" разлика са разрядите на ирационалното число след $\boldsymbol{n}$. „Малката" разлика $\boldsymbol{\sigma}$ е произволно малка, но не безкрайно малка. Едва ако се остави $\boldsymbol{n} \to \infty$, то $\boldsymbol{\sigma} \to \mathbf{0}$.

топология върху хилбертово пространство „отъждествяването" се извършва чрез непрекъснат функционал[59].

С помощта на погледа, почерпен от работите на Дирак и на Стретър и Уитман, се връщаме към тази на Гибс. Бихме могли също така запишем и чрез това в известен смисъл да изтълкуваме равенството $\frac{d\alpha_o}{d\alpha_s} = \frac{dE_s}{dE_o}$ посредством въведената от Гибс функция $\boldsymbol{\phi}$, бидейки с измерение на време, от енергията $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\frac{d\phi_o}{d\phi_s} = \frac{d\epsilon_s}{d\epsilon_o}. \tag{39}$$

Всъщност физическият смисъл на тези съотношения е аналогичен на клоненето на плътността на вероятността на разпределение на клетките от фазовия обем към функцията на Дирак. Това е тъкмо „вторият пример на случай на несепарабелни хилбертови пространства", предложен от Стретър и Уитман, цитиран по-горе, стига да вземем предвид, че поради отъждествяването, фазовото пространство на квантовия обект се разширява до безкрайното фазово пространство на вселената и че несепарабелното хилбертово пространство имплицира $\boldsymbol{\delta}$-функция. Става дума за това, че колкото е по-голяма енергията на дадена подсистема, толкова е „по-стръмна" функцията на разпределение на вероятността по клетките на фазовия обем: толкова по-рязко локализирана е нейната позиция във фазовото пространство.

В тази връзка би било добре да се обърне внимание на една друга работа на вече цитираните – във връзка с обсъждането на фундаменталния труд на Гибс – автори Рудой и Суханов (2000), посветена на съпоставяне на подходите на Гибс и Айнщайн към статистическото изследване на физически явления и всъщност към „статистическото" в най-общ смисъл:

---

[59] С това отново се докосваме до въпроса, разработван от А. Кон (напр. Connes 1995), за представяне на *актуално* безкрайно малките чрез хилбертово пространство и оператори в него.

> *Подходът на Гибс, или* статистическата механика, *е по смисъла си „твърдо" осреднено* микроописание, *не допускащо едновременна флуктуация на два термодинамично спрегнати параметъра (напр., на вътрешната енергия и температура или на налягането и обема) в рамките на един равновесен ансамбъл. Подходът на Айнщайн, или статистическата термодинамика, изначално е вероятностно макроописание и при това не се предполага наличие на някакво микроописание (динамически „праобрази", играещи ролята на своего рода „скрити параметри"). В сравнение с подхода на Гибс подходът на Айнщайн е по-„мек", доколкото допуска едновременни флуктуации на двойки термодинамично спрегнат величини* (Рудой, Суханов 2000: 1291).

Всъщност начина на разглеждане на Айнщайн (впрочем парадоксално и противоречащ, и съвпадащ с подхода му към квантовата механика), ако приемем неговото представяне в позицията на двамата съвременни автора, неявно съответства на Дираковото въвеждане на δ-функции. Това е още един пример как единството чрез математическия формализъм – всъщност и самият той допускащ няколко напълно или частично еквивалентни формулировки: Дираковите δ-функции, Шварцовите разпределения, обзаведените хилбертови пространства, несепарабелните хилбертови пространства – открива, на свой ред, перспективата за единство на описания на различни физически явления, и то при това от различни физически дисциплини или интерпретации: квантова механика, квантова информация; статистическа механика, статистическа термодинамика, лоренцово инвариантна квантова теория на полето, лоренцова неинвариантна квантова теория на полето (последната все още в зародиш).

Такъв поглед вече позволява да се премине към равнището на методологично и философско обобщение. Ако обичайното разбиране за движение е на някаква част по отношение на фиксирано цяло, то сега се стремим да го обобщим и обхванем – разбира се, от различни гледни точки, – случая, когато *и цялото* се изменя, при което движението получава двойна обусловеност: в частност възниква феноменът на „движение на неподвижното" поради това, че неговата рамка, целостта, към която принадлежи, са се променили. Търсим онази универсална гледна точка, от която да се представят по еднообразен и еквивалентен начин тези все едно два типа движение. Континуално и дискретно, крайно и безкрайно, цяло и част, вълнов и корпускулярен аспект се обединяват в този обобщен тип движение. Докато преходът от една към друга част може да се извърши чрез дифеоморфизъм, в съгласие с частния начин, по който Айнщайн формулира своя общ принцип на относителността, то изглежда преходът между цяло и част е необходимо прекъснат. Нуждаем се от нов принцип на относителността, чрез който да се изрази и фиксира единна позиция към движението независимо дали негова „причина" е промяна в частта или в цялото. Оказва се, че позицията на Айнщайн, този път спрямо статистическата термодинамика, във философски план обобщава гледната му точка, експлицирана в принципите на теорията на относителността. От математическа гледна точка се набелязва пътят, вече скициран в работата на Стретър и Уитман: да се изследва унитарността в хилбертовото пространство при действие на групата на Поанкаре. Ако последната се „изкриви" в съответствие с геометрията на едно псевдориманово пространство, то и унитарността ще се нуждае от обобщение[60]. От гледна точка на теорията на двамата автори би трябвало да се обхване несепарабелно хилбертово пространство: всъщност ще се окаже, че относителността на континуално и дискретно е преобразувана в такава между изброимо (сепарабелно хилбертово пространство) и неизброимо (несепарабелно). Това е въпрос, който ще се обсъжда по-подробно във връзка с парадокса на Скулем.

Според „патоса" на цялата книга и в тясна връзка с другите – нека ги наречем философски – относителности: между крайно и безкрайно, дискретно и континуално, цяло и част и множество подобни, изборът между постулиране еквивалентност на (1) фазовия обем и (2) неговото нарастване изглежда също неразрешим проблем, с други думи, „хляб" именно за философите. В първия случай сме в позицията на цялото, но трябва за привлечем противоположно обсъждане, при което частите – в духа на Гибс – се оказват мислени като възможности, докато във втория се оказваме на гледната точка на частите, но трябва да се възстанови цялото, което не е никак тривиално, когато такова реставриране или проектиране е неадитивно.

Вече на няколко пъти се натъкваме на една любопитна логическа хипотеза или евентуално постулат: идеята за приравняване или отъждествяване на алтернативите на един избор; нещо повече: това сякаш е единственият изход за продължаване на обмислянето в случая, когато изборът между алтернативите е неразрешим проблем.

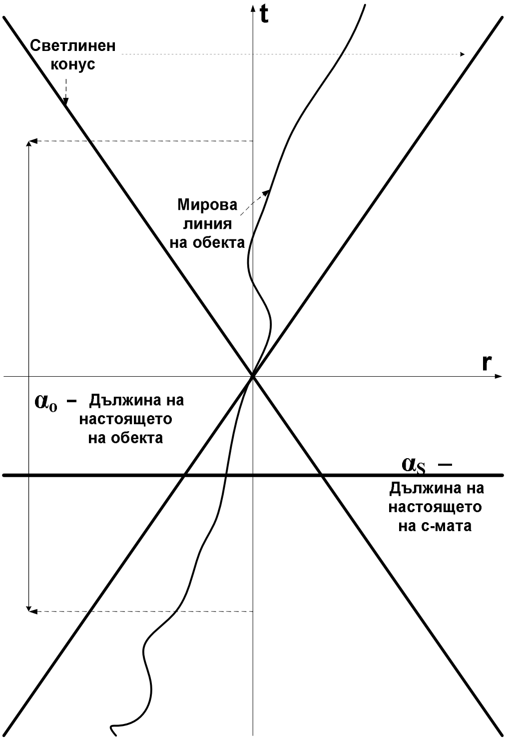
---

[60] Такава позиция се разработва в книги на М. Менски (Менский 1976, особ. 1983).

На такава основа можем по гибсовски да видим частите на цялото като негови възможности и обратното. Тогава толкова мъчителната за нашето, човешко осмисляне $\boldsymbol{\Psi}$-функция просто представя частите на системата, видени от „нейната” позиция на собствена първичност и неделимост, просто като нейни, и по-точно казано, вече като „свои” възможности. От друга страна, преминавайки към „гледната точка” на мегасвета, всяко тяло в нашия обичаен макросвят би бил едно състояние на вселената.

Бихме могли да си послужим с две сродни – „физиологична” и „гносеологична” – метафори. Мисълта не е част, а е възможно състояние на ума на човека, но от друга страна, ако умът се разгледа като мозъка, т.е. като съвкупност от материални части, определени типове мисли биват локализирани – според съвременното познание – в отделни пространствено обособени части на мозъка, наричани центрове. Ако приравним познанието като цяло, състоящо се от „теории” за ‛неща’, в граничен преход с максималното познание биха съвпаднали със самите ‛неща’. Найсетне на основата на „физиологичната” и на „гносеологичната” метафора можем да построим обобщена, да я наречем онтологична, метафора, която да ги съпоставя.

Горният тип равенства – относно $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\phi}$, респ. $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\alpha}$ – позволяват да се тълкуват и по следния начин:



Фиг. 8. Настоящето на системата избира случаен момент измежду „моментите на настоящето” на обекта

Предложената илюстрация е прелюбопитна в няколко отношения:

1. Тя изяснява един възможен смисъл на теоремата на фон Нойман – чието философско значение предстои подробно да се обсъди след малко в настоящата глава – за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика: параметърът и това, на което той би трябвало да е параметър, не могат да бъдат едновременно дадени, тъй като са допълнителни един спрямо друг.

2. Въпреки това, тъй като, ако и доколкото времето е „само число” в квантовата механика – във вече обсъдената тясна връзка със закона за запазване на енергията и сякаш неизбежната абсолютност на отправната система свързана с

уреда, – времето е единственият възможен „скрит параметър” в квантовата механика.

3. Това обаче не ни извежда непременно от обхвата на теоремата на фон Нойман, понеже онтологичният и физическият статус на бъдещи и минали момент е открит да обсъждане, всъщност дори напълно неизвестен. Ето защо въпросната теорема за отсъствие на скрити параметри може да се тълкува тъкмо като такова.

Като заключение от тази теорема, той прави изводи за причинността изобщо. Изясняването на този въпрос вероятно е скритият философски и физически интерес, който го мотивира в това доказателство. Преди да се насочим към подробно разглеждане на неговия подход, нека резюмираме погледа, до който може да ни доведе прилагането на концепцията за допълнителността към проблема за причинността. Отсъствието на скрити параметри може да се тълкува като допълнителност, дуалност на причина и следствие в квантовата механика. Последните всъщност дори не могат да се приемат за едновременно дадени и в макроприближение: причината трябва постепенно да изчезне, за да се появи следствието по плавен, „обратно пропорционален” на нея начин. Очевидно е, че самото време „се движи” по този начин, миналият момент трябва постепенно да изчезне, за да се появи новият.

Вместо това концепцията за причинността предполага, фигуративно казано, „пропорционалност”, на причината и следствието. Интересно е защо, когато разглеждаме отдалечени, прекъснати моменти от време този подход дава множество полезни резултати и дори има основания да претендира за статуса на всеобщ принцип на природата. При най-общ качествен анализ, като философски фундамент на такова преобръщане на темпоралното взаимодействие от микро- към макро-равнище или обратно може да се посочи идемпотентността на обратната пропорционалност: обратно пропорционалната на обратно пропорционалната на една величина съвпада с нея.

Така, между „пропорционалните” причина и следствие в макроприближение винаги остава скрит, от една страна, още непоявил се, а от другата, вече изчезнал времеви момент, който опосредства като „антитеза” – ако си позволим да използваме хегелианска терминология – съотнасянето и прерастването на „тезата” (макропричината) в „синтезата” (макроследствието). Разгледана „под лупа”, непрекъснатостта на времето ни се представя като много ситна прекъсната линия, фин пунктир само създаващ привидност за плътност отдалеч. Теоремата за отсъствие на скрити параметри и съответния на нея анализ на причинността, който може да се нарече *микропричинност*, навлиза в интимния механизъм на времето. Би могло да се предположи произход от – или еквивалентност на концепцията за допълнителност с – такава една фундаментална структура на времето.

Това ни помага да вникнем и уточним концепцията на фон Нойман за причинността в квантовата механика:

1. От една страна, Ψ-функцията като функция от времето (а също и при отсъствие на неконтролируемото вмешателство на измерването) се изменя причинно: следователно и всички произтичащи от нея характеристики.

2. От друга обаче, самата Ψ-функция обладава изначална дисперсност (вероятностен характер), оставайки при това еднородна, хомогенна същност (а не смес от състояния, чието съотношение да обяснява дисперсността).

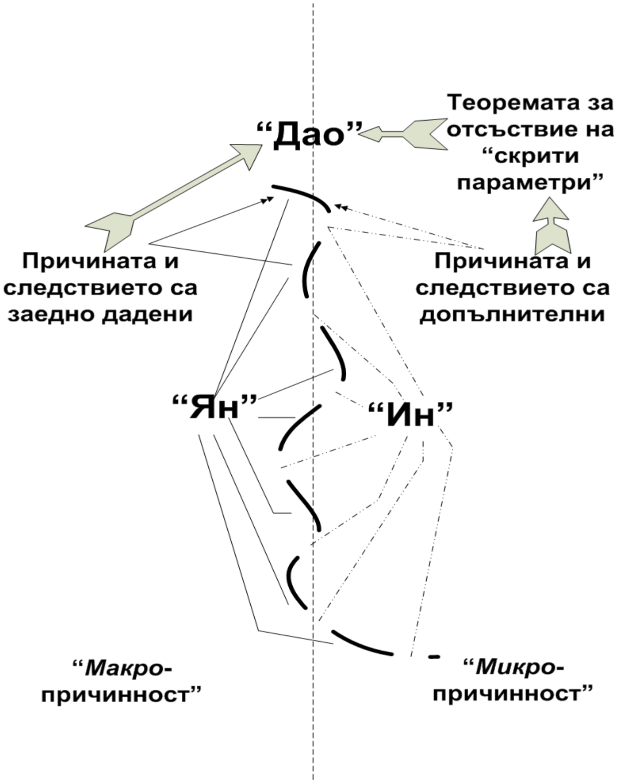
И двете положения произтичат от формализма на хилбертовите пространства в квантовата механика, който фон Нойман подлага на обстойно изследване.

Според тук излагания подход на свързване на принципите на допълнителността и причинността: (1) се отнася към макропричинността, която поставя в скоби неслучилата се антитеза на измерването, представляваща истинската предпоставка за нея, докато (2) визира допълнителността на причина и следствие (и в този смисъл отсъствието на скрити параметри, „причини” за вероятностната дисперсия на състоянието на квантовия обект) на микроравнище – т. нар. микропричинност.

Фигуративно казано, настоящето състояние на Ψ-функцията е причинно, в смисъла на макропричинно, „пропорционално” от миналото ѝ състояние като две последователни „тирета” в привидната отдалеч непрекъснатост на пунктира, докато нейната дисперсия е обусловена „микропричинно”, „обратно пропорционално” от паузата между тиретата[61] – от „Ин”:

---

[61] Бих искал внимание на публикацията на Шрьодингер „Законът на случайностите”, където говори за „разкъсване на причина и следствие” в „модерната наука за природата” и по-специално на следната идея: „само взето в цялото, безпорядъкът постоянно нараства. На отделни места от света или за определени системи от тела, може да стане твърде възможно „нарастване на подредеността” поради това, че на други се извършва достатъчна компенсация” (Schrödinger 1984(IV): 317). Да подходим така: ако аксиомата за избора и следващата



Фиг. 9. „Даоистка" илюстрация към концепцията на фон Нойман за причинността в квантовата механика

Нека преминем към непосредствено разглеждане на възгледа на фон Нойман за причинността. Негова основа е математическото доказателството за т. нар. теорема за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика, чието заключение е: *съвкупности без дисперсия няма. Еднородни – има* (Neumann 1932: 170):

от нея добра наредба подреждат, то те би трябвало да са валидни само в отделни участъци, и то чрез „компенсация" в други: така се появява мисълта за „аксиоматично" поле във физически смисъл, при което аксиоматиката се променя от точка в точка на пространството, т.е. на областта, в която е дефинирано. Такава математическа структура попада в обхвата на теорията на категориите.

> *Следователно в рамките на нашите условия попаднахме на решение, и то насочено срещу причинността: тъй като всички съвкупности са дисперсни, даже и еднородните* (Neumann 1932: 170).

По-нататък той обобщава своя резултат по следния начин и по отношение на макроскопичните явления:

> *Резюмирайки, може следователно да се охарактеризира положението с причинността в днешната физика така: няма макроскопичен опит, който да я поддържа, и не може и да има, тъй като видимият каузален порядък на макросвета* (*т.е. за обекти, които могат да се възприемат с невъоръжено око*) *няма, разбира се, никаква друга причина освен „закона за големите числа", напълно независимо от това, дали законите на природата, управляващи елементарни процеси* (*т.е. истинските*)*, са причинни или не. Че макроскопично еднаквите обекти се държат макроскопично еднакво, има малко общо с причинността: та нали тези обекти не са еднакви, тъй като онези координати, които точно установяват състоянията на техните атоми, почти никога не съвпадат и макроскопичният начин на разглеждане осреднява по тези координати* (*тук са „скритите параметри"*)*, но понеже тяхното количество е много голямо* (*за* $\mathbf{1}\ g$ – *около* $\mathbf{10^{25}}$)*, и оттук осредняването има – според известните закони за изчисление на вероятности – за следствие отиващото далеч намаляване на всички дисперсии* (Neumann 1932: 172).

Следователно доводът на фон Нойман е, че за макроскопичните явления тя е валидна само в качеството на статистическо осредняване, докато на микроравнище, на което и собствено може да се постави въпросът за наличие или отсъствие на причинност, отговорът е отрицателен:

> *Едва в атомните, при самите най-елементарни процеси въпросът за каузалността можа действително да се провери, но тук при днешното състояние на нашите знания, всичко говори „против": тъй като единствената налична за момента формална теория, която обобщава и подрежда нашия опит по доня-*

къде удовлетворителен начин, т.е. квантовата механика, се намира в принудително логическо противоречие с нея (Neumann 1932: 172-173).

Като извод от приведените доводи заключението на фон Нойман е категорично:

понастоящем няма нито повод, нито извинение за това да се говори за каузалност в природата: тъй като няма опит, който да поддържа нейното наличие, понеже за това макроскопичните са принципно неподходящи, и единствената известна теория, която е съвместима с нашите опити за елементарните процеси – квантовата механика – ѝ противоречи (Neumann 1932: 173).

Трябва да отбележим, че фон Нойман – както впрочем и предложилият вероятностното тълкуване на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията Макс Борн – е напълно категоричен по отношение на това, че самото вероятностно разпределение на наблюдаемите стойности, както и самата $\boldsymbol{\Psi}$-функция, лежаща в неговата, основа се изменят причинно обусловено:

Впрочем, този статистичен характер се ограничава до предсказването на стойностите на физическите величини, докато бъдещите и миналите състояния на $\boldsymbol{\varphi_t}$ остават да се изчислят от: $\boldsymbol{\varphi_{t_0} = \varphi}$ каузално. Това прави възможно уравнението на Шрьодингер зависимо от времето, тъй като:

$$\boldsymbol{\varphi_{t_0} = \varphi, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\varphi_t}{\partial t} = -H\varphi_t} \qquad (40)$$

определя целия ход на $\boldsymbol{\varphi_t}$ (Neumann 1932: 108).

Преди да преминем нататък в обсъждането на възгледа на фон Нойман за причинността, както и на неговото обосноваване чрез т. нар. теорема за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика, е наложително да обсъдим два косвено свързани въпроса:

1. Защо за закона за запазване на енергията се приема, че е валиден и за всяко отделно явление на микроравнище, а причинността – само статистически? Да си припомним предложението на Бор и неговите сътрудници за нарушение на закона за запазване на енергията за отделни микроявления, при аналогична само статистическа валидност в макроопита.

2. Как следва да се тълкува разликата в отсъствие на причинност във възгледа на фон Нойман, що се касае до измерените стойности на физическите величини, но наличие – по отношение на тяхното вероятностно разпределение?

Пред нас са два взаимно изключващи се аспекта на времето: при закона запазване на енергията, според фундаменталните теореми на Еми Ньотер, се изисква еднообразно течащо равномерно и хомогенно време, не повече от континуален аналог на броенето, едно „метрономно” време; при изначално вероятностна причинност, се предполага принципно неподобие на последователните моменти, най-просто математически представимо като обратна пропорционалност, реципрочност. Така се оказваме пред понятие за време с два дуални, взаимно изключващи се аспекта: по отношение на (1) закона за запазване на енергията и на (2) причинността.

Всъщност решението на Бор, което беше цитирано и обсъждано в първа глава на настоящата част, „Дебатът между Айнщайн и Бор относно основата на квантовата механика”, за допълнителността на времепространственото причинното описание поне що се касае до квантовата механика, е по-общо:

В приведената позиция на фон Нойман, и която понастоящем е по-скоро общоприетата, се разглежда само едната от двете дуални възможности, а именно съхранена валидност на закона за запазване на енергията, но отхвърлена причинност. Ако обаче, както е според тезиса на Бор, времепространственото и причинното описание са допълнителни, то релевантен би бил и полярният подход: отказ от закона за запазване на енергията, но възможността за причинно описание да остане недосегаема.

Обсъждането на тази неоповестена алтернатива също е сред важните задачи в настоящата работа. В рамките на сегашния контекст, свързан с разискване на концепцията за причинността на фон Нойман в светлината на неговата теорема за отсъствие на скрити параметри, може да се представи така: съществува и може конструктивно да се получи друга времева последователност, в която стойностите на физическата величина са строго детерминирани в нейните рамки, в които обаче – поне в общия случай – следва да се допусне не само скокообразна, но и ретроспективна причинност по отношение на обичайното време, измервано от нашите часовници; освен това стандартно би се оказало изчезването на квантовите обекти без следа (това разбира се няма да е просто превръщане от един в друг, а буквално „дематериализация”, по-точно „деенергетизация”), както и обратното, внезапно появяване ex nihilo, от нищото[62].

Едва ли може да се приеме, че такова положение на нещата би реализирало мечтата и претенцията на Айнщайн по отношение на квантовата механика, тъй като изначалната случайност пак не е изгонена, а е само видоизменена в може би принципно произволната наредба на времевите моменти, едва спрямо каквато последователност биха били запазени заедно и причинността, и съхранението на енергията и самотъждествеността.

Би могло донякъде да реабилитираме рационалния момент и причинността при подобно двойно подреждане на времева последователност чрез следното онагледяване. Текстът, който сега четете, е, разбира се, линейно подреден (бележ-

---

[62] За нашето разглеждане е любопитен и поучителен първоначалният контекст у Лукреций Кар, у когото се появява тази прочута фраза:
Húnc igitúr terrór(em) animí tenebrásque necéssest
Nón radií solís neque lúcida téla diéi
Díscutiánt, sed náturáe speciés ratióque.
Príncipiúm cujus hínc nobís exórdia súmet,
Núllam r(em) e nihiló fierí divínitus únquam.
Quípp(e) ita fórmidó mortális cóntinet ómnis,
Quód mult(a) ín terrís fierí caelóque tuéntur,
Quór(um) operúm causás nullá ratióne vidére
Póssunt ác fierí divíno númine réntur.
Quás ob rés ubi víderimús nil pósse creári
Dé niló, tum quód sequimúr iam réctius índe
Pérspiciémus, et únde queát res quáeque creári
Et quo quáeque modó fiánt operá sine dívum.
„И тъй, този страх и мрак в душата трябва да се разпръсне не с лъчите на слънцето, нито с блестящите стрели на деня, но с изучаването на вида и устройството на природата.
Ето принципа, който ние ще вземем за изходен пункт: Нищо не се ражда никога от нищо под влиянието на някаква божествена сила. И затова страхът тъй завладява всички смъртни, понеже те виждат, че стават на земята и на небето много явления, чиито причини те не могат да забележат по никакъв начин, и мислят, че те стават под влиянието на някаква божествена сила. Поради това, щом като разберем, че нищо не може да бъде създадено от нищо, тогава вече ще можем и да схванем по-ясно това, което търсим, и ще видим от какво всяко нещо може да произлезе и по какъв начин всички неща стават без намесата на боговете” (Тит Лукреций Кар. *За природата на нещата*. С.: Наука и изкуство, 1971, с. 14; Книга първа, стихове:146-159)

ките под линия могат да се приемат като поставени в скоби непосредствено след думата, на която са сложени, и вместо номера на бележката). Да наречем тази линейна наредба последователност на читателя. Но текстът може да бъде подреден според точния времеви момент, в който е написан съответният откъс (пренебрегвайки последващите редакции): това да бъде последователността на автора. И двете последователности се подчиняват на определен, но различен тип детерминираност. Връщайки се към квантовата механика можем да говорим съответно за времева последователност на макроскопичния уред и за такава на самия квантов обект. В класическата физика двете времеви последователности съвпадат, тъй като и самите физически обекти са макроскопични, тук обаче – не.

Както изяснява фон Нойман, всички тези проблеми отсъстват в нютоновската физика, в чиито рамки статистиката е ясно и категорично подчинена на причинността:

> *Класическата механика е каузална дисциплина, т.е. ако в нея се знае точно състоянието на система – за което при* k *степени на свобода са необходими* $2k$ *числови данни:* k *координати* $q_1, \dots, q_k$ *в пространството на състоянията и* k *техни производни по времето:* $\frac{\partial q_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial q_k}{\partial t}$ *или пък на мястото на същите –* k *импулси* $p_1, \dots, p_k$*, – то може стойността на всяка една физическа величина (енергия, импулс и т.н.) да се определи числено точно и еднозначно. Въпреки това, съществува и статистически начин на обработка в класическата механика, но той е, така да се каже, само лукс, подправка: а именно, ако са ни известни не всичките* $2k$ *части за определянето* $(q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k)$*, а само някои от тях и евент. също и те не напълно точно, то може, осреднявайки по някакъв начин по частите за определянето, останали неизвестни, да се правят поне статистически изказвания относно всички физически величини. Съответно е в сила за бъдещите или последните състояния на системата: знаят ли се* $q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k$ *за момента* $t = t_0$*, то с помощта на уравненията на движението на класическата механика може (каузално) да се изчисли състоянието във всеки друг момент* t*; знаят ли се обаче само част то тях, то трябва да се*

> *осредни по останалите, и могат да се правят само статистически твърдения за други времеви моменти* (Neumann 1932: 107-108).

Напълно различен според фон Нойман е характерът на статистическите твърдения в квантовата механика. За да бъдат различавани от същите в класическата, би могло да се използва различен термин, напр. „фундаментално вероятностни твърдения” или „вероятностни твърдения”:

> *Статистическите твърдения, които откриваме в квантовата механика, имат друг характер. Тук в случая на* $\boldsymbol{k}$ *степени на свобода състоянието се описва от вълновата функция* $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{q}_{\mathbf{1}}, \dots \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k}})$*, т.е. чрез точка* $\boldsymbol{\varphi}$ *от подходящо реализираното* $\boldsymbol{R}_{\infty}$ ($\|\boldsymbol{\varphi}\| = \mathbf{1}$ *– численият множител за абсолютната стойност* $\mathbf{1}$ *е несъществен*)*. Макар и ние поради това да вярваме, че по данни за* $\boldsymbol{\varphi}$ *знаем напълно състоянието, то все пак това прави възможни само статистически твърдения за стойностите на физическите величини* (Neumann 1932: 108).

Наред с обсъдените и свързана косвено с тях е налице допълнителна причина за поява на теориите със скрити параметри и тя е съпоставянето на положението на нещата, изложено в двата предшестващи цитата, съответно в класическата и квантовата механика:

> *Ако се опитаме да обясним акаузалния характер на връзката между* $\boldsymbol{\varphi}$ *и стойностите на физическите величини по примера на класическата механика, то очевидно е следното схващане: в действителност* $\boldsymbol{\varphi}$ *съвсем не определя състоянието точно, за да се знае напълно, по-скоро са необходими още числови данни. Т.е. системата, наред с* $\boldsymbol{\varphi}$*, има повече параметри за определяне, повече координати. Биха ли били всички те известни, можеше да се посочат стойностите на всички физически величини точно и определено, само с помощта на* $\boldsymbol{\varphi}$ *единствено, обратно – точно както в класическата механика на основата само на част от* $\boldsymbol{q}_{\mathbf{1}}, \dots \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{p}_{\mathbf{1}}, \dots \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}$*,– са възможни само статистически твърдения. Такова схващане естествено е само хипотетично, то е опит, чиято ценност*

> *зависи от това, дали ще се успее действително да се открият повече координати, следващи да се добавят към* $\boldsymbol{\varphi}$*, и с тяхна помощ да построим каузална теория, която да се намира в съзвучие с опита и при задаване само на* $\boldsymbol{\varphi}$ *(и осредняване по останалите координати) да дава пак статистическите твърдения на квантовата механика* (Neumann 1932: 108-109).

И така, в класическата механика е налице едно единствено описание с функция на състоянието, зависеща от $\boldsymbol{2k}$ параметри. В квантовата механика има две взаимно изключващи се описания, всъщност и с две взаимно изключващи се функции на състоянието, всяка от които зависи от две непресичащи се множества от $\boldsymbol{k}$ параметъра, всеки един от които едно-еднозначно съответства на елемент от множеството с $\boldsymbol{2k}$ елементи на класическата механика. Може да се допусне, че причина за подобно необикновено положение на нещата е подвеждаща аналогия с класическата механика, дори оформена и възвестена от Бор не само като методологичен, но и като и общ философски принцип – принципът на съответствието. Доколкото ми е известно нито той, нито неговите следствия, за разлика от принципа на допълнителността, не са били някога непосредствено атакувани от Айнщайн. Но в рамките на теориите за скрити параметри е налице такава възможност: множеството от $\boldsymbol{k}$ аргумента да се допълни с още $\boldsymbol{k}$ други, т.е. различни от неизползваните в съответното множество от $\boldsymbol{2k}$ параметъра на класическата механика:

> *Тези хипотетични повече координати е прието да се означават «скрити координати» или «скрити параметри», понеже те би трябвало да играят действително скрита роля наред с* $\boldsymbol{\varphi}$*, единствено откритата от досегашните изследвания. Обяснението посредством скрити параметри в класическата физика вече е довело някои привидно статистически характеристики до каузалните основания на механиката: характерна за това е напр. кинетичната теория на газовете* (Neumann 1932: 109).

От тук следва същността на дискусията между привържениците на теориите със скрити параметри, какъвто е Айнщайн, и защитниците на ортодоксалната интерпретация на квантовата механика, настояваща за нейната изчерпателност, знаменосец на които пък е Бор. Ето как тази основа е предадена от фон Нойман:

> *Дали става дума за такъв род обяснение с помощта на скрити параметри в квантовата механика, е един много обсъждан въпрос. Възгледът, че все някога ще се отговори в положителен смисъл, и сега има изтъкнати представители. Ако му се дадеше право, на днешната форма на теорията щеше да се сложи щемпел за предварителна, тъй като тогава $\boldsymbol{\varphi}$-описанието на състоянието би било съществено непълно* (Neumann 1932: 109).

За да изясним точно чие отсъствие или отсъствие на какво, има предвид предстоящата да се обсъди съвсем скоро теорема на фон Нойман, ще разграничим напълно отчетливо две формулировки на теоремата със скритите параметри:

I. Съвкупността от $\boldsymbol{k}$ аргументи на функцията на състоянието в квантовата механика може и следва да се допълни точно с едноименните, но отсъстващи в нея параметри в аналогичната съвкупност от $\boldsymbol{2k}$ аргументи на функцията на състоянието в класическата механика.

II. Тази съвкупност може и следва да се допълни *със **неизвестна** друга* съвкупност от още $\boldsymbol{k}$ параметъра. Поради това в този случай са възможни два типа доказателство в полза на теориите със скрити параметри: (1) чисто, за съществуване, и (2) конструктивно, което да посочва еднозначно поне една такава *дотогава още неизвестна **друга*** съвкупност.

Тъй като аргументът на Айнщайн – Подолски – Розен има логическата форма на *reductio ad absurdum*, той е от първия тип: „чисто" доказателство за съществуване. Забележете, че при приемане на формулировката I на теориите със скрити параметри, „чистото" доказателство е безпредметно, тъй като съвкупността от още $\boldsymbol{k}$ допълнителни координати е предварително известна. Оттук косвено може да се постави въпросът, макар Айнщайн и вероятно да не е атакувал – по едни или други съображения – пряко принципа на съответствието, дали той все пак имплицитно не го изоставя в прочутата статия от 1935 г. или обратно, неявно го е предпоставил без обсъждане.

Точно тук, в предверието на разглеждането на доказателството на фон Нойман от 1932 г. за отсъствие на скрити параметри е мястото да се каже, че то визира само и единствено случая I, поради което аргументът на Айнщайн – Подолски – Розен три години по-късно не би попадал под неговите удари, ако и доколкото или най-точно казано, в степента, в която принадлежи към групата II.

В литературата и в изказвания на философи съм срещал следната неточна формулировка на последното обстоятелство: теоремата на фон Нойман отхвърляла локални скрити параметри, докато доказателството АПР се позовава на нелокални (или на общия случай и на локални, и на нелокални).

Би могло да се посочи един особен случай между формулировките I и II, при който допълващите още $\boldsymbol{k}$ скрити координати са едноименни на останалите в класическия случай с $\mathbf{2}\boldsymbol{k}$ параметъра, но се вземат в друг момент. Малко по-горе споменахме наличието на две несъвпадащи времеви последователности, но всяка една от тях добре и линейно подредена, отговорни съответно за запазването на енергията и в крайна сметка за идентичността на една система и за причинния ред. Доколкото добрата наредба за всяка от тях изисква аксиомата за избора, то тя следователно ще гарантира съществуването и на декартово произведение между тях, в което ще се съдържа и едно-еднозначното изображение, установимо при всяко измерване.

И така, при току-що използваната интерпретация термините на фон Нойман „едновременна разрешимост", „едновременна измеримост" и техните производни се тълкуват буквално. Ако две величини са едновременно неизмерими или две съждения са едновременно неразрешими, то те се отнасят до различни моменти от времето, т.е. са нееднoвременни, въпреки че се отнасят до един и същ квантов обект или система. Разполагаме с две времеви последователности и можем да ги тълкуваме като „последователността на читателя", която е последователността на уреда, на измерването, на макросвета, но за разлика от класическата физика и още една *несъвпадаща* с първата „последователност на автора", която е тази на самия квантов обект или система, на състоянието, на микроскопичния или квантовия свят.

Можем освен това да обърнем внимание, че ситуацията измерване – състояние при нашето разглеждане е напълно симетрична. С други думи, нищо в използвания формализъм не пречи да си представим суб-наноучени, намиращи се „вътре" в електрона и изследващи, от наша гледна точка измерващия го уред, със свои такива. Формализмът на квантовата механика би бил валиден и за тях с единствената разлика, че времевите последователности – забележете: от нашата гледна точка – на каузалното и енергетичното обяснение са разменени. Спрямо тях, приемайки подобно на нас „аподиктично" своето самозапазване, самотъждественост и причинност, биха наблюдавали вероятностно поведение на всички величини, свързани с макроуреда, при това добре описвани от нашата и следователно общата за нас с тях квантова теория.

Лесно можем да продължим аналогията, поставяйки самите себе си на мястото на „суб-наноучените", изследвайки вече не микро-, а мега-света. Но веднага се натрапва, че астрономията ни няма вероятностен характер: времевите редове на каузалното и енергетичното обяснение съвпадат, принципите на класическото макрофизично описание са безусловно и без остатък валидни и за мега-света.

Това положение на нещата някак самоочевидно и безвъпросно се тълкува като фундаментално различната природа на мега- и микро-света: те имат принципно различни свойства, първият е абсолютно по-голям, а вторият също така абсолютно по-малък от нашия. Единството на каузалното и енергетичното описание тогава е правилото, докато тяхното разминаване при изследването на микросвета е дразнещото изключение, вероятно притежаващо свое просто, но за съжаление все още неизвестно на човечеството обяснение.

В семантичната мрежа на настоящото изследване, която, разбира се, все още е в началото на своето изграждане, едно решение на проблема е свързано с обратно приложение на вече споменатото Ръселово обосноваване на отношенията „сами по себе", т.е. несводимите към субект-предикатно представяне, чрез несиметрични транзитивни отношения. Нека явленията на сдвояване или квантовите корелации приемем в качеството на такива отношения „сами по себе си": като следствие бихме могли да предположим, че отношенията „микро – макро" и „макро – мега" са едно и също отношение от горния тип и поради това транзитивно, но несиметрично. Квантов характер на описанието или несъвпадение на „причинната" и „енергетичната" времева последователност се наблюдава само в посока от втория към първия член на отношението. Двете времеви последователности съвпадат в обратната посока, т.е. от първия към втория.

Такова обяснение е тясно свързано и със следното съображение: ако разгледаме статистическа съвкупност от двойки такива времеви последователности, респ. от изображенията, определено чрез всяка една двойка, то единият член ще флуктуира много по-малко от другия, в граничен преход дори може да се приеме, че е постоянен. Тоест, съществува – най-малкото в граничен преход – универсален времеви ред, една *абсолютна* времева последователност, обща за дадена физическа цялост (система) и еквивалентно определяща я, споделяна от всички нейни части и подсистеми. Ако в качеството на такава разгледаме вселената, то епитетът „абсолютна" би бил оправдан във възможната висша степен.

Тогава несиметричността, с други думи, нееквивалентността на двете посоки в отношенията „микро – макро" и „макро – мега", би се обяснила с това, че в посока от първия към втория член времевата последователност на изследвания обект (втория член), т.е. „каузалната", заедно с това представлява универсалната последователност на първия член, наречена от нас енергетична. Обратно, в посока от втория към първия, времевата последователност на изследвания обект, който в този случай е първият член на отношението, ***не** е* универсалната последователност на втория. В крайна сметка несиметрията на отношението между цяло и част (по-строго казано, ако такава е приета в качеството на аксиома) влече току-що обсъденото.

Както ще видим обаче във втората част на настоящето изследване несиметрията на отношението между цяло и част е тясно свързана или еквивалентна на аксиомата за фундирането в теорията на множествата, гарантираща при всяко множество, фигуративно казано, съществуването на „дъно", т.е. на такъв елемент, който не е множество, или част, която не е на свой ред цяло; или обратното – „капак", такова множество, което не е елемент на никое множество, цяло, което не е част по принцип. Както виждаме, хипотезата или понятието за вселена е противоположна, но по същество еквивалентна формулировка на аксиомата за фундирането.

Ако приемем обаче отрицанието на последната, заедно със съществуването на отношения сами по себе си, т.е. явленията на сдвояване или квантовите корелации, бихме могли да построим друга, и то твърде интересна нестандартна или несобствена интерпретация на квантовата механика и информация, която би описвала *непосредствено* нашия макроскопичен свят: без да го представя като статистическо осредняване по огромен брой квантови микроскопични събития, а *разглеж-*

дайки неговите явления като ***единични събития****, самите те подчиняващи се на законите на квантовата механика и информация*.

Цялото това разискване, вече отнесено към теоремата на фон Нойман за отсъствието на скрити параметри, позволява по-ясно да се очертае сферата на нейната валидност и оттук нейният смисъл:

> *Ще се покаже по-късно* (IV.2) – пише той, – *че въвеждането на скрити параметри е със сигурност невъзможно, без настоящата теория същностно да се измени. Мимоходом само ще посочим това, че* $\boldsymbol{\varphi}$ *съвсем същностно се различава от частична система от координати и импулси* $\boldsymbol{q_1}, \dots, \boldsymbol{q_k}$, $\boldsymbol{p_1}, \dots \boldsymbol{p_k}$ *от класическата механика по това, че нейната зависимост от времето е каузална, а не статистична:* $\boldsymbol{\varphi_t}$*, както видяхме по-горе, определя всички* $\boldsymbol{\varphi_t}$ *еднозначно* (Neumann 1932: 109).

За да изясним от нашата гледна точка току-що цитираното обстоятелство, трябва още по-отчетливо да уточним смисъла на теоремата чрез отговор на въпроса, дали предложената по-горе междинна формулировка – между формулировките обозначени като I и II и която използва две времеви последователности, но параметри, едноименни с класическия „$\boldsymbol{2k}$" случай – попада или не попада под нейния удар.

Избързвайки с изложението, но и като негов предварителен анонс може да се обяви, че по-скоро, т.е. все пак с известни допълнителни уговорки, трябва да се приеме, че *попада*, но такова отхвърляне на междинния случай в резултат на нейното приложение е тясно свързано или еквивалентно с твърденията на фон Нойман, окачествени от Джон Бел като погрешни в статията от 1966 г., представляваща обосновка на прочутата работа от 1964 г. Оттук позволяването на такъв тип скрити параметри като предложените в междинния случай е родствено на различното поведение – и следователно на експерименталната проверимост за съществуването – на системи с отсъствие на скрити параметри спрямо такива с наличието им.

Какво тогава означава, че вълновата функция „същностно се различава от частична система от координати и импулси" „по това, че нейната зависимост от времето е каузална, а не статистична"? Ако преминем в наши термини, очевидно факта, че на всеки момент от времето може да се препише една (но *не* непременно различна, напълно или отчасти) времева последователност. Ако е налице този случай на частично или напълно обща времева последователност за два различни момента от времето на една и съща квантова система или обект, то те биха взаимодействали: не само че би било налице взаимодействие през времеви интервал, но и бъдещо състояние ще оказва влияние на минало, следователно открито и поддаващо се на изменение би било не само бъдещето, но и миналото. Може да се говори в този случай за времеви сдвоявания или квантови корелации.

Аналогично, ако разгледаме система от два или повече обекта, локализирани на различни места в пространството (времепространството), то съответните им втори времеви последователности могат отчасти или напълно да съвпадат: пространствени (времепространствени) сдвоявания или квантови корелации. Както ще обсъдим много по-подробно в частта от следващата книга, посветена на неравенствата на Бел, тъкмо допускането на времеви корелации – и поради това и времепространствени корелации в общия случай – позволява да се разграничат емпирично теориите за скрити параметри от стандартната квантова механика по наличието при последната на случаи на нарушаването им.

Първо, трябва да се подчертае, че наличието на сдвоени състояния или квантови корелации не влече (непременно) нарушаване на неравенствата на Бел. Обратното обаче е вярно, тяхното наличие изключва обяснение посредством теория със скрити параметри. Налице е една междинна област – напр. при някои разглеждания с два квантови обекта това са корелации с числени стойности в интервала $(\mathbf{2}, \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}]$, – която е недостижима чрез скрити параметри[63] (областта $(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}, \infty)$ при същите условия обаче не е достижима по никакъв начин в рамките на квантовата механика, т.е. не дори и посредством квантови корелации).

---

[63] Нейното наличие и граници могат да се осмислят чрез некомутативността на спрегнатите физически величини. Например може да се въведе „количествена „степен на некомутативност” в термините на ъгъл между наблюдаемите на спина” (Seevinck, Uffink 2007: 042105-1). Двамата автори показват, че варирането на степента на некомутативност съответства на варирането на очакваната стойност на оператора на Бел и максималната степен на некомутативност – антикомутивността – съответства и предопределя максималната стойност, с която – в рамките на квантовата механика – могат да се нарушават неравенствата на Бел, а именно $\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$. Обратно, доколкото по-голяма степен на некомутативност от антикомутивността изглежда невъзможна, то и границата $\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$ се предполага обоснована. Да не забравяме обаче, че не по-малко интуитивно правилна изглеждаше невъзможността да се нарушат самите неравенства на Бел.

Ако се постулира нелокалността (Popescu, Rohrlich 1994), вместо да се извежда от вероятностния характер на предсказанията в квантовата механика, както напр. в неравенствата на Бел, биха могли да се изведат „суперквантови" корелации, съхраняващи релативистичната каузалност, които нарушават неравенствата на Бел повече от всяка квантова корелация (т.е. в рамките на квантовата механика). Квантовата механика може да се разглежда като член на по-широк клас от теории, „несигнални теории" и да се потърсят техните общи свойства (Masanes, Acin, Gisin 2006). Те изясняват мотивацията на подобен подход така:

> *Има два експериментални факта, които – когато се разгледат заедно – значително ограничават всяка възможна физическа теория, която цели да ги има предвид. Първият е постоянството на скоростта на светлината във всяка отправна система. От това следва, че няма сигнал, пренасящ информация, който се разпространява по-бързо от светлината. По-общо, ние се отнасяме до невъзможността от изпращане на информация произволно бързо като към принцип на несигналността. Вторият факт е съществуването на корелации между пространствено-подобно отделени събития, които нарушават неравенствата на Бел* (Masanes, Acin, Gisin 2006: 012112-1).

При подхода настоящата книга тези две изисквания също се приемат в известен смисъл за валидни, представлявайки двете страни на един още по-широк принцип на относителността: както спрямо плавни, така и спрямо дискретни морфизми. Проблем при съотнасяне с цитираното непосредствено по-горе е дали сигналността, т.е. пренасянето на информация, трябва непременно да се обвърже с дифеоморфизъм. Казано по друг начин и по-философски, дали непременно тя трябва да бъде обвързана с нещо самотъждествено, т. нар. енергиен носител, дали все пак не съществува и в чист вид. Склонни сме да твърдим, че целостта от фактите и интерпретации по-скоро навеждат към мисълта, че принципът на несигналността има ограничена валидност, а именно до класическата информация, т.е. върху енергиен носител: неговото унищожаване означава изчезване и на информацията, която е пренасял. Що се отнася до квантовата информация тя изглежда не удовлетворява принципа на несигналността, бидейки тъкмо „чиста информация", „без носител" и едва вторично може да ѝ се припише еквивалентна енергия от пренасянето на информация, и то неплавно пренасяне.

Трите автори продължават:

> *КвМ не е единствената теория, консистентна с двата споменати експериментални факта. Добре известно е, че съществуват несигнални корелации, които са по-нелокални от онези, предсказани от КвМ. Наистина Попеску и Рорлих доказаха, че има несигнални корелации, даващи нарушение на неравенствата на Бел, по-голямо от предсказаното от квантовата механика* (Popescu, Rohrlich 1994). *Това предполага съществуване на теории, различни от КвМ, които позволяват нарушение за неравенствата на Бел без противоречие с принципа на несигналността*[64]*. Макар че няма експериментални основания да се отхвърли КвМ, твърде желателно е да се знае природата на тези алтернативни теории, за да „се изучава квантовата механика отвън"* (Masanes, Acin, Gisin 2006: 012112-1).

Според тези автори, „от постулатите на КвМ следва несигналност (ако приемем локалността на взаимодействието) и нелокалност" (пак там). Всъщност с предлаганото от нас още по-широко обобщение на принципа на относителността (също и спрямо дискретните преобразувания) се отхвърля тъкмо локалността на взаимодействието, поради което от постулатите на КвМ сами по себе си не следва несигналност. Принципът на несигналността е допълнителен и независим от аксиомите на квантовата механика; с други думи, и той, и неговото отрицание са консис-

---

[64] Ако такъв тип теории биха се потвърдили експериментално, то биха съществували подобни на квантови, „суперквантови" корелации между обичайни макроявления, изучавани от физиката или да речем, историята; нещо повече, биха присъствали в ежедневния ни опит. Ако е така защо не ги забелязваме? Може би, просто защото няма такива. Но са възможни и други отговори: понеже са изключително редки или слаби, недоловими; или тъй като се оказват „маскирани" като „случайности". Би могло да се говори за скулемовски тип относителност на необходимост и случайност. В книгата си „Милиард години до свършека на света" Аркадий и Борис Стругацки въвеждат идеята за обусловеност на човешкото знание и по-точно, на неговата възможност – от природни сили или закони, или казано с техния образ, от „полета с квант рижо джудже": по случаен начин пречат на човешкото познание и то толкова повече, колкото то напредва и се разраства. За суперквантовите корелации (напълно хипотетични, поне засега) можем да пренесем шеговития образ „полета с квант рижо джудже" в смисъла, че тяхното действие евентуално би се проявявало под формата на малко вероятна случайност, а не по детерминиран и закономерен начин, както „нормалните" полета; възможно биха имали някаква непосредствена връзка с човешкото познание (т.е. не само като негов обект).

тентни с квантовата механика. Както показва начинът на обсъждане на Попеску и Рорлих, изглежда обаче валидността на принципа на несигналността е тясно обвързана с въпрос, още чиято форма е добре известна както с философичността си, така и с неразрешимостта си: *кое е първично* – квантовата вероятност или квантовите корелации?

Логическият смисъл и в резултат на това емпиричният и експериментален еквивалент на този въпрос е дали има квантова вероятност, при такива условия, че квантови корелации отсъстват (първичност за квантовата вероятност); и обратно, дали има квантови корелации на напълно детерминирани физически обекти, например макрообектите, описвани от класическата физика (първичност на квантовите корелации).

Според съвременното равнище на знанията би трябвало да приемем първата възможност, т.е. първичност за квантовата вероятност и индетерминизма; по-нататък, ако и доколкото приемем обосноваването на Попеску и Рорлих за връзката между принципа на несигналността и постулирането на квантовите корелации (т.е. тяхната първичност), по-скоро следва да се заключи, че принципът на несигналността не се съгласува с корпуса от знания, с който разполагаме.

От друга страна, в съответствие с общия философски патос на книгата, при каквато принципът на несигналността би се разглеждал като неразрешимо твърдение, би трябвало да предположим хипотетична област от досега неизвестни явления, състоящи се в квантови корелации за детеринирани (бездисперсни) събития, напр. макросъбитията, които биха могли да се описват както от квантовата механика, така и чрез разглежданите от тримата автори (Masanes, Acin, Gisin 2006) цял клас „несигнални теории”, сред които попада и тя. Очертаване контурите на подобен тип теории също попада в перспективата на настоящата работа.

В стандартната квантова механика е налице добавъчна компонента в корелациите и тя е родствена на сдвояването, наречено по-горе времево, и изключваща причинността по отношение на конкретната измерена стойност на квантова физическа величина, доколкото последната в общия случай е обусловена не само от непосредствено предшестващото състояние на системата (както е според принципа на каузалността), дори не само включително от произволно отдалечено състояние в миналото, „ненадейно решило” да въздейства в настоящето чрез своеобразен скок във времето, но също така и от бъдещи състояния. Откриването на тази добавъчна компонента дължим на работите на Джон Бел, позволили да се превърне в тема своеобразието в разглеждането на фон Нойман.

В термините на нашето малко по-горе приведено обсъждане, последното означава да се позволят „скрити параметри" от друг момент във времето, макар и едноименни. Всъщност, ако се придържаме към буквален смисъл на „едновременно" във въведените от фон Нойман понятия „едновременна разрешимост", „едновременна измеримост", то те би трябвало да се допуснат, тъй като не биха били *едновременно* измерими, а твърдения относно тях – *едновременно* разрешими, съответно с величини и твърдения, характеризиращи състоянието на квантовия обект или система.

Да преминем към крайния извод на фон Нойман по отношение на съществуването на скрити параметри, който той прави от доказаната непосредствено преди това теорема за отсъствието им:

> *Би следвало да се обсъди още и повдигнатият в III.2* [от който са нашите предходни цитати] *въпрос за „скритите параметри", т.е. въпросът дали не предизвиква дисперсията на еднородните съвкупности, характеризирани от вълновата функция* $\boldsymbol{\varphi}$ *… това, че тези съвкупности не са истински състояния, а само смеси от повече състояния, докато за характеризиране на действителните състояния, освен задаването на вълновата функция* $\boldsymbol{\varphi}$*, биха били необходими още повече данни (това са „скритите параметри"), които всички заедно се определят каузално, т.е. водят до съвкупности, свободни от дисперсия. Статистиката на еднородна съвкупност* ($\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}_{[\varphi]}$, $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \mathbf{1}$) *би възниквала тогава чрез осредняване по всички действителни състояния, от които тя е изградена; т.е. чрез осредняване по онази област от стойности на „скритите параметри", която е одействителностена в онези състояния. Това обаче е невъзможно по две причини: първо, понеже тогава въпросната еднородна съвкупност би могла да се представи като смес от две различни съвкупности, въпреки нейната дефиниция. Второ, понеже съвкупностите, свободни от дисперсия, които би трябвало да съответстват на „действителните" състояния (т.е. които се състоят от чисти системи, намиращи се в същото „действително" състояние), изобщо не съществуват* (Neumann 1932: 170-171).

Оттук приведеният по-рано извод на фон Нойман срещу причинността се основава на следните доводи от току-що цитираното. Ако можем да разделим дадена съвкупност на смес от подсъвкупности, то принадлежността към една от последните може да се разглежда като причина за дисперсията на изходната съвкупност; ако обаче съществува съвкупност, която не може да се представи като такава смес или в термините на физика „еднородна съвкупност" и тя все пак притежава дисперсия, а такъв е изводът от теоремата за отсъствието на скрити параметри в квантовата механика, то това би бил решаващ довод срещу всяко причинно обяснение за дисперсията на измерваните стойности на физическите величини в квантовата механика. Тя има изначално вероятностен характер: той по принцип не е сводим до статистика на *едновременно* налична съвкупност от квантови обекти. От вече направеното разглеждане е ясно, че поставянето в курсив тъкмо на „едновременно" следва от него и не произтича от контекста на изложението на фон Нойман.

Преди да преминем към шестте предпоставки в теоремата на фон Нойман и техния смисъл, е добре да приведем още едно твърде поучително за нас негово сравнение между смисъла на „едновременно" в Айнщайновата специална теория на относителността и в квантовата механика:

> *Струва да се спомене още и следното обстоятелство: съотношенията за неопределеност имат на пръв поглед известно подобие с основните постулати на теорията на относителността. Там именно се твърди: принципно е невъзможно да се установи едновременността на две събития в точки, разделени от разстояние $\boldsymbol{r}$, по-точно отколкото времеви интервал с дължина $\frac{r}{c}$ ($\boldsymbol{c}$ = скоростта на светлината); докато според съотношенията за неопределеност се казва: принципно е невъзможно да се посочи положението на материална точка във фазовото пространство, по-точно отколкото област с обема $\left(\frac{h}{4\pi}\right)^{3}$* (Neumann 1932: 171).

Първо, не бива да убегне от внимание, че двата интервала, а именно $\frac{r}{c}$ и $\left(\frac{h}{4\pi}\right)^{3}$, могат да се приемат за еквивалентни, ако приемем запазването на системата, т.е. $E = const$. При това положение вече ясно се вижда, че за една и съща област фон Нойман по-долу изказва полярни и следователно принципно несъвместими твърдения, а именно, че в случая на Айнщайновата теория определението за едновременност е конвенционално, тъй като *всяка една точка* от областта може да се приеме за едновременна с дадената външна, а в случая на квантовата механика *нито една точка* не може да се приеме, че е едновременна с дадената външна:

> *Въпреки това* – продължава фон Нойман – *съществува фундаментална разлика. Теорията на относителността отхвърля напълно възможността за обективно, точно измерване на едновременността, въпреки това обаче е възможно, чрез въвеждане на галилиева отправна система, да се положи в света координатна система, която да направи възможна дефиниция на едновременност, която е в достатъчно съответствие с нашите нормални представи в тази връзка. Обективен смисъл не може да се признае на тази дефиниция за едновременност само понеже такава система от координати може да се избере по безкрайно много различни начини, чрез което възникват безкрайно много различни дефиниции на едновременност, които всички са еднакво добри. Т.е.: зад невъзможността за измерване се намира безкрайна многозначност за възможни теоретични дефиниции. Другояче е в квантовата механика: там изобщо не е възможно да се описва система с вълновата функция* φ*, чрез точка във фазовото пространство, също не и тогава, когато се въвеждат нови (хипотетични, ненаблюдаеми) координати, „скрити параметри", тъй като това би довело до съвкупности без дисперсия. Т.е.: не само измерването е невъзможно, но и никаква разумна (т.е. макар и емпирично недоказуема, както в теорията на относителността, то все пак поне емпирично неопровержима) теоретична дефиниция. Принципната невъзможност за измерване почива следователно на това, че в единия случай има безкрайно много,* [а] *в другия случай изобщо няма дефиниционни определения на въпросните понятия, които да не противоречат на непосредствения опит (респ. на общите допускания на теорията)* (Neumann 1932: 171-172).

От това парадоксално положение на нещата, а именно, че двете теории изказват противоположни твърдения за една и съща област – *всяка една точка* от областта може да се приеме за едновременна с дадената външна при разглеждането на СТО, а в случая на квантовата механика *нито една точка* не може да се приеме, че е едновременна с дадената външна, – може да излезе по следния начин (подсказан от аналогията с геометриите на Лобачевски, Евклид и Риман): ако приемем, че външната точка в първия случай е вътрешна за съдържаща интересуващия ни интервал фундаментална област, а във втория външна. Както е описано от фон Нойман, за нас съотношението напомня това между броя прави, минаващи през точка вън от нея, съответно в геометриите на Лобачевски, на Риман и на Евклид.

Действително СТО и квантовата механика имат и друго съществено подобие: те капсулират една област и отхвърлят от физическо разглеждане нейната допълваща като емпирично недостъпна. В първия случай постулатът за ненадвишаване скоростта на светлината във вакуум поражда изотропната граница или обвивка на светлинния конус около т. нар. имагинерна област на пространството на Минковски, *единствено вътре* в която сме разположени ние и нашият физически опит. Във втория случай постулатът за квант на действието, определящ минималната порция от физическо взаимодействие, изгражда фундаменталната клетка на фазовото пространство, *само отвън* на която сме разположени ние и нашият физически опит.

Това, което ни пречи да забележим, че става дума за една и съща капсулирана област, е с чисто психологически характер. Смятаме това, на което сме абсолютно отвътре, за „голямо”, а именно за мегасвета на вселената, а това на което сме принципно отвън, за „малко” – микросветът на квантовата механика. Всъщност нашата субстанциална идеология (в смисъла на придаване универсалност на едно частно положение, което в случая е „субстанционалността”) ни забранява да отъждествим микро- и мега-света като един и същ, в духа на споменаваните вече възгледи на Николай от Куза.

Нека си послужим със следния изключително прост, но достатъчен довод в полза на реалността на отношенията сами по себе си и поради това срещу субстанционалната идеология (т.е. неправомерната универсалност на ‛субстанция’). Отношението между микро- и макро- и между макро- и мега- най-малкото може да се разгледа като едно и също транзитивно, но несиметрично отношение. Ако се откажем от универсализирането на субстанцията, според каквото трите области са непременно различни, и вместо нея използваме отношения сами по себе си, които според предложения от Ръсел и цитиран по-горе пример биха могли да бъде несиметрични и транзитивни, то се оказваме пред следното, прелюбопитно положение на нещата:

Отношението на микро- и макро- и това на макро- и мега- са едно и също, но по принцип то е несводимо до свойства на субстанция. Ако го разгледаме чрез свойства на субстанция, необходимо се разпада на две *различни* отношения. Квантовата механика ни е въоръжила с математически апарат да изследваме първия случай. Нещо повече, ако третираме математическите структури в духа на платонизма, а още по-добре в този на дуалистичното питагорейство, в качеството, от една страна, на чисти идеи, а от друга, на отношения, то такъв математически формализъм е приложим към математически структури и в крайна сметка самореференциално приложим. Заедно с това квантовите корелации се представят като отношения между такива „чисти” отношения.

Един начин да примирим двата полярни възгледа за едновременността е тъкмо дуалното им разглеждане „отвън” и „отвътре”: съответно в първия случай можем да говорим за „едновременна неразрешимост” или „едновременна неизмеримост”. От друга страна, конвенционалността на определението за ‛едновременност’ „вътре” в областта може да се тълкува и че тя е едновременна като едно цяло в своеобразен синкретизъм.

Аналогичен е моделът в най-общ план на взаимодействието: то може да се представи като отношение между момент на взаимодействие и момент, в който то все още или вече отсъства, с други думи, на едновременност и на нееднновременност, последната в смисъла на отсъствие на едновременност. С този модел на едновременността като взаимодействие можем да мислим също така и битието на физическия обект в квантовата механика като две, и то принципно дуални едновременности.

С такава представа сдвояването може да се опише като тип взаимодействие, характерно само за квантови обекти. Докато при класическите физически обекти са налице точно две възможности – едновременност и отсъствие на едновременност, – то при квантовите обекти може да се говори и за частична едновременност, чрез каквато да се обясняват явленията на сдвояване.

Например, чрез квантувано фазово пространство, т.е. такова, което се състои от неделими клетки с големина, равна на константата на Планк, взаимодействието се описва като частично и пълно припокриване на фазовите пространства на два или повече взаимодействащи квантови обекта. Тъкмо поради това припокриване, за общите клетки – при условията например на аргумента на Айнщайн –

Подолски – Розен – е възможно точно да се определи едната компонента на фазовото пространство посредством опити с едната от двете сдвоени системи, но и другата, съответно чрез опити с другата от двете.

С обсъждането за едновременна неразрешимост или неизмеримост може да се изясни също така и особеният времеви статут на квантовото фазово пространство: проекциите на състоянието на системата по двата типа спрегнати оси никога не са едновременни. То се получава чрез проекцията на един времеви момент върху друг, непременно различен от първия и по този начин имплицира ненулев времеви интервал. От друга страна, разглеждайки съответни хилбертови пространства можем да кажем, че на фазовото пространство следва да се съпостави двойка хилбертови пространства, или едно и също, но в различни моменти от времето, при това от единия момент се взима едното спрегнато, а от другата – другото от двете спрегнати хилбертови пространства във всеки един момент.

В логически план и в настоящия контекст са възможни две гледни точки към физическото взаимодействие. То да се обсъжда като производно, т.е. като взаимодействие на неща с определени свойства, бидейки винаги възможно да бъде *изчерпателно* описано като изменение на тези взаимодействали неща и чрез техните претърпели промяна свойства. Това е подходът, който се следва още с формирането на физиката в Новото време не само в теорията на относителността, но и в господстващото съвременно физическо светоусещане за квантови обекти: „частици" и четири основни типа взаимодействие *между тях*. От другата страна е новата – която бихме могли да окачествим като интегрална – квантова механика и информация с въвеждането на взаимодействия, които по принцип са несводими до промяна на неща и свойства, запазващи свое напълно самостоятелно битие: тя утвърждава изначално характер на отношение за физическото взаимодействие.

Това ни позволява да видим по нов начин отношението между споменатите физическите теории. Със собствено логически средства противоречието между тях е неразрешимо и може да се уподоби на противоречието между геометриите на Евклид и на Лобачевски – всяка от тях е вътрешно консистентна. Но както можем да говорим за геометрия на реалния свят, за каквото поради опитите в полза на общата теория на относителността се приема неевклидовата геометрия, така може да се постави въпросът за „физиката на реалния свят". Самият факт на утвърждаването на дисциплината квантова информация през 90-те години на миналия век подкрепя еднозначно и може би решаващо „парадигмата на взаимодействието и отношението” срещу тази на частици със свойства и взаимодействия *едва между тях*.

Стои обаче едно голямо предизвикателство пред първата, а именно да представи и експериментално да защити най-малкото толкова релевантен проект, колкото този обединил три от четирите типа взаимодействия и с перспектива за т. нар. Велико обединение, но изцяло на основата на явленията на сдвояване.

Да добавим, че в изначално философско разглеждане въпросът за субстанцията е неразрешим. В различни исторически епохи, обхващащи столетия, той последователно получава противоположни решения. Следователно, поради това, че ние сега обсъждаме именно *философия* на квантовата информация, би трябвало да разграничим факта, че вероятно предстои или вече е започнало същностно десубстанционализиране на физиката или привеждане под знаменателя на една особена и донякъде парадоксална, не материална или енергийна, а релационна субстанция, каквато е информацията, от принципната неразрешимост на този проблем по отношение, фигуративно казано, на вечността. Най-общо можем да предположим, че след още нови столетия, субстанцията ще бъде възстановена под толкова обща форма, която понастоящем не можем по никакъв начин дори си въобразим, поради отсъствие на какъвто и да било съответен опит.

Самото доказателство на теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри се основава (Neumann 1932: 167) на следните шест допускания **A'**, **B'**, **α'**, **β'**, **I.** и **II.**:

> *A'. Ако величината $\mathfrak{R}$ по своята природа никога не е отрицателна, ако тя напр. е квадрат на някоя друга величина $\mathfrak{S}$, то* $\boldsymbol{Erw(\mathfrak{R})\ \geq\ 0}$ (Neumann 1932: 165).

Тук под $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ се имат предвид физически величини в квантовата механика, т.е. такива на които съответстват ермитови оператори в хилбертовото пространство, а с $\boldsymbol{Erw}(\mathfrak{R})$ е означено математическото очакване на дадената величина $\mathfrak{R}$**.** Математическото очакване се дефинира като сума или интеграл от произведенията на стойностите, които може да приеме дадена величина, всяка от които умножена по вероятността да бъде измерена. Тази предпоставка предопределя, че не може да има отрицателни вероятности.

Проблемът за физическия смисъл на отрицателни вероятности, тяхното възможно дефиниране чрез неадитивни определения за ентропията, каквото е например това, което принадлежи на Цалис[65] (Tsallis 1988), връзката и прилагането им при явления на сдвояване, ще се обсъждат в следващите книги, посветени на философията на квантовата информация.

> *$\boldsymbol{B'}$. Ако $\boldsymbol{\mathfrak{R}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$ са какви да е величини и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, … са реални числа, то:* $\boldsymbol{Erw}(a.\boldsymbol{\mathfrak{R}} + b.\boldsymbol{S} + \dots) = a.\boldsymbol{Erw}\,(\boldsymbol{\mathfrak{R}}) + b.\boldsymbol{Erw}(\boldsymbol{S}) + \dots$ (Neumann 1932: 165).

Тъкмо тази предпоставка, допълнена до изводимото от следващите предпоставки твърдение, че изразът $(a.\boldsymbol{\mathfrak{R}} + b.\boldsymbol{\mathfrak{S}} + \dots)$ също така представлява наблюдаема величина, се отхвърля в статията на Бел (Bell 1966: 448-449), посветена на ограничената валидност на теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика. Както се знае, тази статия, макар и публикувана по-късно, съдържа обосновката на прочутата работа от 1964, въвеждаща „неравенствата на Бел”, както биват наричани днес. Всъщност тя е валидна, ако използваме термините на Бел, ако двете системи са сепарабелни, отделими, могат да се разглеждат локално, т.е. всяка сама за себе си. С други думи, ако са налице явления на сдвояване, в дясната част на равенството трябва да се появи добавъчен член $\boldsymbol{Erw}[\boldsymbol{f}(a\boldsymbol{\mathfrak{R}}, b\boldsymbol{S})]$, чиято големина ще съответства на нелинейността, т.е. на степента на нарушаване на горното равенство, или с други думи, на степента на сдвояване. За този добавъчен член може също да се разглежда съответна физическа величина, ако операторът, преобразуващ от хилбертовото пространство на едната система в хилбертовото пространство на другата, е също така хипермаксимален и оттук е ермитов, а двете пространства са с еднаква размерност. Следващите две предпоставки, които въвежда фон Нойман, определят какво трябва да се разбира под „бездисперсна величина”:

---

[65] „С употребата на величина, нормално мащабирана по мултифрактали, се постулира обобщена форма за ентропията, а именно $\boldsymbol{S_q} \equiv \boldsymbol{k}[\boldsymbol{1} - \sum_{i=1}^{W} \boldsymbol{p}_i^{q}]/(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{1})$, където $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}$, характеризира обобщението и $\{\boldsymbol{p_i}\}$ са $\boldsymbol{W}$ (микроскопични) конфигурации ($\boldsymbol{W} \in \mathbb{N}$). … Статистиката на Болцман – Гибс се възстановява като границата $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{1}$ ” (Tsallis 1988: 479).

$\boldsymbol{\alpha'}$) Една $\mathfrak{R}$-функция, която е $\boldsymbol{Erw}(\mathfrak{R})$, се нарича бездисперсна, ако $\boldsymbol{Erw}(\mathbf{1}) \neq \mathbf{0}$ и е крайна, така че можем да приемем за $\mathbf{1}.\ \boldsymbol{Erw}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$″ (Neumann 1932: 166).

Тази предпоставка означава просто, че величината, която приема една и само една стойност, дефинитивно ще бъде наричана бездисперсна. Всъщност тя, както и следващата могат да се разглеждат и като определения.

$\boldsymbol{\beta'}$) $\mathfrak{R}$-функцията, която е $\boldsymbol{Erw}\ (\mathfrak{R})$, се нарича еднородна или чиста, ако за нея условието M$_2$.[66] *има за следствие:*

$$\boldsymbol{Erw'}(\mathfrak{R}) = c'.\boldsymbol{Erw}(\mathfrak{R}),\ \boldsymbol{Erw''}(\mathfrak{R}) = c''.\boldsymbol{Erw}\ (\mathfrak{R}) \qquad (41)$$

($\boldsymbol{c'}, \boldsymbol{c''}$ *са константи, разбира се,* $\boldsymbol{c'} + \boldsymbol{c''} = \mathbf{1}$, *и поради* ***A'*** *и* ***1.***, ***2.***[67] $\boldsymbol{c'} > 0, \boldsymbol{c''} > 0$) (Neumann 1932: 166).

С други думи, това определение изразява факта, че математическото очакване на еднородната или чистата величина не може да се разложи на математически очаквания на някакви различни съставящи: буквално, ако предположим, че са две различни, следва, че е само една.

$\boldsymbol{I}$. Ако величината $\mathfrak{R}$ има оператора $\boldsymbol{R}$, то величината $\boldsymbol{f}(\mathfrak{R})$ има оператора $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{R})$ (Neumann 1932: 167).

$\boldsymbol{II}$. Ако величините $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \ldots$ имат оператори $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \ldots$, то величината $\mathfrak{R} + \mathfrak{S} + \ldots$ има оператор $\boldsymbol{R} + \boldsymbol{S} + \ldots$ (Едновременната измеримост на $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \ldots$ не се предпоставя …) (Neumann 1932: 167).

---

[66] Условието M$_2$ гласи: $Erw(\mathfrak{R}) = \alpha.\boldsymbol{Erw'}(\mathfrak{R}) + \beta.\boldsymbol{Erw''}(\mathfrak{R})$, $\boldsymbol{\alpha} > 0$, $\boldsymbol{\beta} > 0$, $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}$ (Neumann 1932: 163).

[67] „**2.**" гласи: „Функцията $\boldsymbol{Erw}(\mathfrak{R}) \equiv \mathbf{0}$ (за всички $\mathfrak{R}$) не изразява никакво изказване и затова трябва да се изключи " (Neumann 1932: 165).

Последните две условия поставят в пълно съответствие величини и оператори; по-точно казано, посочват онези операции, които са необходими за доказателството и чието действие не нарушава това съответствие.

При явления на сдвояване предпоставката $\boldsymbol{II}$. не може да бъде изпълнена, тъй като се добавя и някаква ненулева функция: $\mathfrak{R} + \mathfrak{S} + \dots$ има оператор $\boldsymbol{R} + \boldsymbol{S} + \dots + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \dots)$, което се дължи на факта, че хилбертовите пространства, имплицирани съответно от $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$, не могат да бъдат приети за едно и също; фигуративно казано, те сключват някакъв ъгъл помежду си, налице е фазово отместване между ортогоналните функции, съставящи техните базиси. Това фазово отместване може да се тълкува и като нееднovременност, откъдето следва доводът на Айнщайн, Подолски и Розен, перифразиран под формата, че техният аргумент показва възможността за едновременна измеримост на едновременно неизмерими (с термина на фон Нойман) величини.

Следва да се отбележи, че фон Нойман изрично посочва, че „едновременната измеримост на $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \dots$ не се предпоставя". Както многократно вече и от най-разнообразни гледни точки се изтъкна, от довода АПР не следва непълнота на квантовата механика в смисъла на „скрити параметри". Всъщност не самата величина $\mathfrak{S}$ се оказва едновременно измерима с $\mathfrak{R}$, а нейната проекция – да я означим с $\mathfrak{R}'$, на която и съответства операторът $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \dots)$ – върху времевия момент на $\mathfrak{R}$.

Ако приемем, фактически без стесняване на общността, че времевият момент на $\mathfrak{R}$ е след този на $\mathfrak{S}$, то виждаме, че каузалността е своеобразно реабилитирана чрез явленията на сдвояване, тъй като $\mathfrak{R}'$ може да се разглежда като причина на $\mathfrak{R}$. Но $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ (респ. $\mathfrak{R}'$) – според схемата на мисления експеримент на Айнщайн, Подолски и Розен – не са разположени различно във времето, а в пространството. Следователно сдвояването може да се разглежда и като нов вид пространствена причинност, която – поради рефлексивния характер на пространството и за разлика от обичайната времева асиметрична – е *симетрична*.

Наличието на подобна собствено пространствена причинност може да се предположи още на основата единното времепространствено разглеждане на явленията, легитимирано от теорията на относителността: пространството придобива иначе характерната само за времето черта да обуславя причинно. Ала откритата от тримата автори нов тип причинност и чрез това обобщаването на нейното понятие са изтълкувани единствено в термините на обичайната, тясна, собствено времева причинност, като довод в нейна полза и необходимо изискващ съществуването на „скрити параметри", а оттук и свидетелстващ и за набедената непълнота на квантовата механика. Любопитно би било да се изследва (в друга работа) двусмислената – т.е. и пречеща, и помагаща – роля на метанаучните пристрастия, в случая към принципа на причинността и детерминистично описание.

Следващият въпрос за обсъждане в изложението на фон Нойман е използваното в доказателството на теоремата за отсъствие на скрити параметри едно-еднозначно съответствие между физически величини и определен тип оператори в хилбертовото пространство:

> *На физическите величини на квантовомеханичната система еднозначно са съпоставени хипермаксимални оператори … и е целесъобразно е да се допусне, че това съответствие е едно-еднозначно, т.е. че действително на всеки хипермаксимален оператор съответства физическа величина* (Neumann 1932: 167).

Тогава следват последните две изходни положения (**I.** и **II.**) (Neumann 1932: 167).

Що е хипермаксимален оператор (II.9)? Този тип оператори представляват същинско подмножество на максималните оператори, които на свой ред биват дефинирани по следния начин:

> *Оператор, който не притежава истинно продължение – следователно вече и е дефиниран на всички места, където би могъл да се дефинира по разумен начин, т.е. без нарушаване на ермитовия характер, – ще наречем максимален* (Neumann 1932: 79).

Максималните оператори биват въведени във връзка с проблема за собствените стойности:

> *Следователно обсъдихме докрай проблема за собствените стойности, и то със следния резултат: ако той е решим, то той има само едно реше-*

ние, обаче за немаксимални оператори, той е определено нерешим (Neumann 1932: 87).

Проблемът за собствените стойности (II.6): изисква

намирането всички решения $\boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0}$ *на*

$$\text{E.} \qquad \boldsymbol{\mathcal{H}\varphi} = \boldsymbol{\lambda\varphi}, \tag{42}$$

където $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ *е ермитов оператор, съответстващ на функцията на Хамилтън* (…), $\boldsymbol{\varphi}$ *е елемент на хилбертовото пространство,* $\boldsymbol{\lambda}$ *е реално число* ($\boldsymbol{\mathcal{H}}$ *дадено,* $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\varphi}$ *търсени*) (Neumann 1932: 53).

Решението на проблема за собствените стойности допълнително се ограничава според общото изискване за физически смисъл по следния начин:

Решението на проблема за собствените стойности в смисъла на квантовата механика следователно изисква да се намерят толкова на брой решения

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi_1}, \boldsymbol{\psi_2}, \dots \text{ и } \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \dots \tag{43}$$

на $\boldsymbol{E}$*., че от тях може да се образува пълна нормирана ортогонална система* (Neumann 1932: 55).

Ако обобщим дотук проследяването на връзката между физически величини и оператори в хилбертовото пространство според изложението на фон Нойман, можем да кажем, че за част от ермитовите оператори, а именно максималните, проблемът за собствените стойности има решение, и то такова, че може да му се съпостави ортонормиран базис на хилбертово пространство. Възможно е обаче да се случи, че на множество от повече от един елемент максимални оператори да се съпостави едно и също хилбертово пространство. В този случай се приема, че хилбертовото пространство е едно-еднозначно съпоставимо на квантов обект. Ако е налице крайномерно хилбертово пространство за дадена величина, то може винаги да се допълни с нули до безкрайномерно. Тъй като безкрайномерното пространство е необходимо изоморфно на свое същинско подмножество, то за произволно множество от емпирични (оттук следователно крайно множество от) квантови обекти, може да се приеме, че споделят едно общо самотъждествено безкрайномерно хилбертово пространство, изоморфно с това на всеки един от квантовите обекти, при което второто е същинско подмножество на първото. Така се достига до универсалното хилбертово пространство на „класическата" квантова механика, в което квантовите обекти се подвизават и взаимодействат аналогично на тези в нютоновската физика или на онези в теорията на относителността.

Условието за подобна изоморфност обаче е да отсъства сдвояване, между които и да е два от разглежданите квантови обекти, понеже, ако е налице сдвояване, тоталното хилбертово пространство по определение никога не може да е изоморфно на частните хилбертови пространства на сдвоени обекти.

От друга страна обаче, може да се постави въпросът дали, ако на сдвояване напр. между два обекта припишем две различни хилбертови пространства, то това е необходимо *или* достатъчно да следва отсъствие на изоморфизъм между двете?

При наличие на сдвояване между два квантови обекта, техните хилбертови пространства „поотделно" отново могат да се разглеждат като тъждествени помежду си, *но не и с това на системата като цяло*.

Това позволява явленията от този тип да се интерпретират и по друг начин, оправдаващ наименованието *сдвояване*. Условието – съвкупното хилбертово пространство да съвпада с това на всяко от двата обекта поотделно – е тъкмо да отсъства сдвояване между тях; с други думи, първото да може да се представи като тензорно произведение от вторите две, т.е. в качеството на подпространства на съвкупното те да са ортогонални помежду си, което ще рече всяка функция от ортонормирания базис на едното да е ортогонална с всяка функция от ортонормирания базис на другото; и поради което съвкупността от двата отново представлява ортогонален и евентуално нормиран базис на хилбертовото пространство.

Ако обаче това условие не е спазено, то ние разполагаме с две хилбертови пространства, при това в общия случай – безкрайномерни, нормирани различно. Преобразованието от едното в другото може да се разглежда като ермитов оператор, на който чрез преобразованието на Кели – за което, цитирайки фон Нойман, ще стане дума малко по-надолу, – съответства едно-еднозначно унитарен оператор, който може да се осмисли като обобщен в смисъла на безкрайномерен ъгъл между двете хилбертови пространства.

Обратно, тъй като условието за отсъствие на сдвояване няма да е изпълнено, то следва, че двете пространства не са ортогонални в точното значение, посочено по-горе и унитарният оператор, преобразуващ едното в другото не може да се разглежда като идентитет. Тогава на него отново и по вече посоченото едно-еднозначно съответствие следва да се съпостави ермитов оператор, който може да се тълкува като отношение на съответните норми на функциите, ортогонални само в рамките на всеки един от двата базиса[68].

В резултат на това, за всяка величина на един от двата квантови обекта, разгледана обаче като принадлежаща на системата, ще се добавя ермитов оператор, произхождащ от корелацията, т.е. от неортогоналността или нееднаквата нормировка на двете ортонормирани системи. Както ще се изяснява по-нататък, двете величини, произтичащи съответно от квантовия обект „сам по себе си” и от неговата корелация с другия, следва да се разглеждат като ортогонални. При това, ако се разглежда случаят, когато величината има еднаква стойност и за двата обекта, вторият компонент не може да надвиши първия (а са равни само в случая на максимално сдвояване, т.е. отношението между двата може да се разглежда като мярка за степента на сдвояване).

Както виждаме, отговорът на поставения въпрос е дотук отрицателен.

Заедно с това симетричността на отношението на ортогоналност между двете – величината и корелацията – позволява да се постави отново за обсъждане тяхната неразличимост или относителност. Ако е налице непълно сдвояване, то тогава – при условията на обсъждания случай – корелацията е по-малката от двете. Но ако сдвояването е пълно, двете величини са неразличими. Следователно,

---

[68] Макар и комплексните коефициенти пред някои от тях да са нула, самите норми не могат да са нула и следователно отношенията са винаги крайни и ермитовият оператор трябва да е ограничен.

самата физическа величина на квантовия обект, може да се разглежда като корелация със самия себе си и от това винаги максимална.

За да ограничи и изследва само онези от максималните ермитови оператори, при които проблемът за собствените стойности има решение, фон Нойман въвежда понятието хипермаксимален оператор, тъй като:

> *Условието за максималност обаче не е точно същото, както условието за решимост на проблема за собствените стойности. Първото гласи* $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}_\infty$ *или* $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}_\infty$*, второто* $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}_\infty$ *и* $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}_\infty$ (Neumann 1932: 87).

За онези максимални оператори, за които е изпълнено също така и второто условие, американският математик от унгарски произход въвежда понятието „хипермаксимален оператор” в следния контекст:

> *Не искаме по-отблизо да изследваме тук онези оператори, за които е налице първото условие и не е налице второто, т.е. онези, за които проблемът за собствените стойности е неразрешим и тъй като поради максималността не съществуват истинни продължения, т.е. това състояние за тях е окончателно. Те се характеризират със:* $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}_\infty$ *,* $\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{R}_\infty$*, или* $\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{R}_\infty$*,* $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}_\infty$*. Такъв род оператори съществуват в действителност и те всички се образуват от две прости нормални форми, така че могат да се разглеждат като изключения, съпоставени с максималните оператори с разрешим проблема за собствените стойности. … Във всеки случай тези оператори трябва текущо да се отделят от квантово-механично разглеждане, тъй като разлагането на единицата, принадлежащо на даден ермитов оператор, така същностно се вживява, както ще се убедим в последващото, във всички понятийни образования на квантовата механика, че не можем да се откажем от неговото съществуване, т.е. от разрешимостта на проблема за собствените стойности. Съответно като правило ще допускаме само такива ермитови оператори, за които проблемът за собствените стойности е решим, тъй като това свойство е усилване на максималността, ще наричаме такива оператори хипермаксимални…* (Neumann 1932: 88).

Самото различаване на максимални и хипермаксимални оператори[69] обаче съдържа едно затруднение, по-скоро от философски или методологичен характер. За да го изясним да започнем с прост пример:

Да разгледаме вектор върху ос, т.е. в едномерно векторно пространство, и същият този вектор, след като сме използвали тази ос като абсциса на координатна система в равнината. Проблемът е дали този вектор е един и същ.

Различаването на максимални и хипермаксимални оператори би изисквало отрицателно решение на проблема, тъй като винаги можем да допълним крайномерното хилбертово пространство с безкраен брой нули до безкрайномерно. Както видяхме, тази операция се използва при обсъждане явленията на сдвояване.

Философската трудност на въпроса може да се обобщи по следния начин: остава ли един обект същият, ако се промени неговият контекст. Очевидно, за да твърдим, че остава, се изисква да предположим, че отношенията между обект и контекст са изцяло производни от свойства на самия обект и на контекста. Както видяхме обаче, квантовата механика и особено информация се образуват около признаването на отношения сами по себе си. Следователно позицията на фон Нойман, а именно да разграничи максимални и сред тях хипермаксимални оператори е по-последователната. Но ако това е така, т.е. фигуративно, ако сме казали „а” и трябва да кажем „б”, то би означавало, че трябва *да различим* ***принципно*** както квантовия обект „сам по себе си” от *същия* обект като (истинска, т.е. строго „по-малка”) част от система, така и безкрайномерното хилбертово пространство на първия от това на втората, дори и при отсъствие на сдвояване.

Избързвайки и анонсирайки изложението във втората част, това води до друг подход към самото понятие за безкрайност, както ще се види при обсъждането на парадокса на Скулем, тъй като безкрайно множество – по определението на Дедекинд – е такова, което допуска едно-еднозначно съответствие със свое същинско подмножество. Но според направеното малко по-горе разсъждение, различавайки

---

[69] Фон Нойман посочва два класа максимални оператори, които необходимо са хипермаксимални: „В заключение следва да се отбележат два класа (затворени) ермитови оператори, които определено са и хипермаксимални. Първо, непрекъснатите: тъй като те са определени навсякъде и така максимални – и тъй като според Хилберт проблемът за собствените стойности за тях е разрешим (…) – даже хипермаксимални. Второ това са операторите, реални в някаква реализация $\boldsymbol{R}_\infty$, в случай че са максимални…” (Neumann 1932: 88).

едно множество „само по себе си" от същото то, но вече в качеството на подмножество на друго, то следва да определим понятието за безкрайност като относително, т.е. валидно само в рамките на предварително зададено множество, каквато впрочем е и тезата на Скулем, чрез която отхвърля действителна парадоксалност на разглежданите от него примери.

С позицията на Скулем, мислена в максималната ѝ философска общност, да се върнем към тази на Айнщайн – Подолски – Розен: очевидно основата на техния аргумент е отъждествяването – чрез понятието за елемент на реалността или за обективна реалност – квантовия обект „сам по себе си" със същия в рамките на система с друг обект. Едната от двете спрегнати и следователно едновременно неизмерими величини се получава от първия, а другата – от втория. Оттук, чрез отъждествяване на първия с втория, се прави изводът, че следва да се припишат *и двете* едновременно неизмерими величини на квантовия обект, а фактът, че това противоречи на принципите на квантовата механика, се приема като свидетелство за нейната непълнота.

Обратно, експериментално доказаната в наше време пълнота и валидност на предсказанията на квантовата механика в случаите на експлицитно сравняване с тези на теориите със скрити параметри е на свой ред доказателство от противното за необходимостта от различаване на обекта „сам по себе си" и като (същинска) част от система, от една страна, и в полза на отношения, принципно несводими към самостоятелни свойства, т.е. чисти корелации.

От така скицираната гледна точка бихме могли да се запитаме дали тя не ревизира отговора на поставения преди въпрос: ако на сдвояване напр. между два обекта припишем две различни хилбертови пространства, то дали това е еквивалентно на отсъствие на изоморфизъм между двете?

Отново попадаме в своеобразно, но „съседно" философско „тресавище". Проблемът е, доколко подходът на математическата практика за отъждествяване на изоморфните обекти като един и същ, е онтологично оправдан? За да се разгледат като изоморфни хилбертовите пространства на сдвоени обекти, но запазвайки онтологичната разлика между обект „сам по себе си" и „в система", то изоморфните математически обекти следва да се приемат за различни.

Преведено на езика на аксиоматично-дедуктивния подход това означава, че една и съща аксиоматиката, респ. математическа структура, но в различни рамки – а именно напр. без или със добавена нова, аксиома, запазваща консистентността, – „сама по себе си” и вече като част от по-пълна аксиоматика следва да се приемат за различни. Може да се предложи следната илюстрация: едно и също твърдение, което не използва аксиомата за избора, трябва да се смята за различно в аксиоматика на теория на множествата без или със аксиомата за избора.

Тези уточнения са необходими главно предвид спецификата на изследването, което обединява в обща онтология и философски контекст – под рубриката „дуалистично питагорейство” – подходи от квантовата механика и информация, от една страна, с такива на метаматематиката и логиката, от друга, за да се избегнат противоречия, произтичащи лошо съгласуване на двете съставки. Тъкмо поради последното съображение, се налага различаване, в т.ч. *и особено важно също така и математически* на изоморфността от идентичността.

В тази връзка е уместно да си припомним вече по-горе цитираното становище на Шрьодингер по доста сходен въпрос:

> *на тезата, че математическата еквивалентност е равнозначна с физическа еквивалентност, може да се признае изобщо само условна валидност* (Schrödinger 1984(III): 160-161).

При определението на хипермаксимален оператор се използваха две линейни многообразия, S, T, в нашия случай хилбертови пространства, чийто смисъл фон Нойман изяснява чрез унитарния оператор U, начинът на съответствие на който с ермитовия оператор на физическата величина се посочва малко по-долу:

> U *е дефиниран в затвореното линейно многообразие* S *и го изобразява върху затвореното линейно многообразие* T (Neumann 1932: 85).

Връзката между унитарния оператор U и ермитовия оператор A се проследява по аналогия с крайномерните матрици:

> *Ако приложим рационална функция* $f(\lambda)$ *към (безкрайномерна, унитарно трансформируема до диагонална форма) матрица* A, *то собствените*

вектори на матрицата $\boldsymbol{A}$ *остават запазени и собствените стойности* $\boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_n}$ *преминават във* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda_1}), \dots, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda_n})$*. Ако сега* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})$ *изобразява реалната ос (в равнината на комплексните числа) в окръжността на единичния кръг, то матриците с чисто реални собствени стойности преминават в онези със собствени стойности единица по модул – т.е. ермитовите матрици в унитарни.*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{i}} \tag{44}$$

има напр. това свойство, съответното преобразование:

$$\boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{i}\mathbf{1}}{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{i}\mathbf{1}}, \ \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i}\frac{\boldsymbol{U}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{U}-\mathbf{1}} \tag{45}$$

се нарича преобразование на Кели. Ще опитаме това преобразование и при ермитовите оператори от $\boldsymbol{R}_\infty$*, т.е. един оператор* $\boldsymbol{U}$ *се дефинира така:* $\boldsymbol{Uf}$ *има смисъл тогава и само тогава, когато* $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{i}\mathbf{1})\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{A\varphi} + \boldsymbol{i\varphi}$*, и то тогава* $\boldsymbol{Uf} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{i}\mathbf{1})\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{A\varphi} - \boldsymbol{i\varphi}$*. Надяваме се, че това определение дава* $\boldsymbol{Uf}$ *еднозначно за всички* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{U}$ *е унитарен.* (Neumann 1932: 80).

По-нататък фон Нойман използва също така разграничение между изометричните и унитарните оператори:

(Затворените) ермитови оператори $\boldsymbol{A}$ *съответстват следователно на нашите линейно-изометрични* [linear-längentreuen] $\boldsymbol{U}$*, с навсякъде плътни* $\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{U\varphi}$*, едно-еднозначно – ако на всяко* $\boldsymbol{A}$ *съпоставим неговия по Кели трансформиран* $\boldsymbol{U}$[104]*"* (Neumann 1932: 86).

Малко преди това търсенето на съответствие между ермитови и линейно-изометричните оператори е мотивирано така:

> *Изхождаме сега обратно, от две затворени линейни многообразия $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ и линейно-изометрично изображение на $\mathfrak{S}$ върху $\mathfrak{T}$. Има ли тогава ермитов $\boldsymbol{A}$, чийто трансформиран по Кели е този $\boldsymbol{U}$? Във всеки случай за това трябва $\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{U\psi}$ да лежи навсякъде плътно, следователно това се приема* (Neumann 1932: 85-86).

Ето и бележката 104 в края на книгата, съдържаща важно уточнение:

> *За да бъде проблемът за собствените стойности винаги разрешим, трябва оттук да следва унитарността на $\boldsymbol{U}$, т.е. условието $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R_n}$ или $\boldsymbol{R}_\infty$. В $\boldsymbol{R}_\infty$ това, както изведохме от съществуването на немаксимални $\boldsymbol{A}$, не е така. В $\boldsymbol{R_n}$, напротив, то трябва да е в сила …* (Neumann 1932: 247, Anm. 104).

Разграничаването между унитарни и изометрични оператори почива на същата философска основа – вече обсъдена по-горе, – както между един и същ вектор, но като елемент на подпространство на някое пространство и като елемент в самото пространство. За да се разграничат изометричните от унитарните оператори, трябва да се приеме, че векторът и същият той, но допълнен с нули, до размерността на другия, при изометричен оператор, са различни.

Може да се обърне внимание на едно любопитно съответствие: по-горе времето беше обсъждано в качеството на единствено възможния „скрит параметър” в тясна връзка с това, че е само число, т.е. не му съответства оператор. Въпросът е: дали, ако по един или друг начин, по една или друга причина една физическа величина се изключи от такова взаимно еднозначно съответствие с хипермаксималните оператори, то това я „превръща” в „скрит параметър”? Грубо казано, дали ако една величина е без оператор – ако изобщо съществува такава – тя е „скрит параметър” и в какъв смисъл?

Изглежда струва си въпросът да се „разчепка” поне на едно качествено, философско равнище. И така, в квантовата механика има една особена – в известен смисъл привилегирована двойка – спрегнати величини: времето и енергията. Първо, остава открит въпросът дали за тях е валидно отношението на неопределеност. Второ, ако такова отношение не е валидно, то двойката се разпада на: само число – абсолютно време, валидно както за макроуреда, така и за квантовия обект; величината на енергията, с оператор, комутиращ с оператора на *всяка* физическа величина; освен това законът за запазването на енергията изпълнява аналогични на „абсолютното време” функции по комуникация между макросистемата и квантовия обект, съхранявайки идентичността на обекта чрез запазването на неговата енергия. Трето, времето може да играе единствено ролята на своеобразен скрит параметър, тъкмо чрез конвенционалното нарушаване на предпоставката на теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри, а именно взаимно еднозначното съответствие между физически величини и „хипермаксимални оператори”.

Вглеждайки се в математическия формализъм, се забелязва, че числата, т.е. измерените стойности на величините *при макроуреда* се представят като стойности на функционала, чийто аргумент е резултатната (от действието на оператора на величината) ***Ψ***-функция, т.е. състоянието *при квантовия обект*. Времето се оказва прехвърлено ***също и*** *при квантовия обект*, а съответно енергията и нейният оператор – ***също и*** *при макроуреда*. Така времето и енергията, благодарение на своето специфично положение, са натоварени да подържат единството на системата макроуред – квантов обект, преди което тя обаче е била разцепена на тези две части.

Ако се откажем от това разцепване, което ни лишава и от възможността за признаване на валидността на измерените стойности, макар и разпределени по вероятностен закон, както и на съжденията за квантовия обект и което следователно е твърде важно за познанието, веднага се вижда, че за системата като цяло се запазва величина с димensия на действие, т.е. на фазов обем: брой елементарни клетки с големина, равна на константата на Планк, но се запазва не като константа, а като функция, а именно: ***Ψ***-функцията на общата система.

Очевидно се сблъскваме с обобщаване на запазването, в т.ч. на идентичността. В почти цялата физика, също и в голяма част от квантовата механика, запазването и съответно поддържането на идентичността на системата или обекта се разбира в качеството на запазване *като константа* на определена величина, оторизирана за тези „свещени” функции, а именно енергията. Сега обаче, опитвайки се да навлезем в територията на квантовата информация, се оказва, че сме принудени да обобщим запазването и съответно идентичността *като запазване на функ-*

ция – ***Ψ***-функцията на системата, както и димensията ѝ като действие, т.е. енергия по време.

Какво означава да се запазва функция, в случая ***Ψ***-функцията на системата? Всъщност добре известното положение, че ако системата остане затворена, тя ще остане в кохерентно състояние. С други думи, ако можехме да изолираме контейнера с нещастната котка, фигуративно казано, „извън вселената", то щяхме да увековечим за вечни времена (ако можехме да пренебрегнем някои собствени характеристика като собствената му маса) нейната агония в състоянието „жива-и-мъртва".

Този нов тип запазване ни изправя заедно с това и пред нов тип субстанция на света, чието основно и дефинитивно свойство по принцип не може да се представи като запазване (напр. на нещо, аналогично на веществото или енергията), а само като непрестанна промяна.

Ако си послужим с примера на вселената в качеството на затворена система, която следователно трябва да се намира в кохерентно състояние на всички възможни свои състояния, то нейната субстанция е тази непрестанна промяна. Дори тя да е изцяло идеална, т.е. чист информационен поток (може би включващ и шум), със само числова димensия на количество битове (или кюбитове), то на него посредством константата на Планк трябва да съпоставим едно променливо количество от физическата величина действие, или фазов обем, а оттук ако разцепим по един или друг начин вселената на поне две части, ще се появят време и енергия, и маса. Кохерентната суперпозиция на вселена ще се редуцира под въздействие на нейната маса и светът ще застине в повече или по-малко известната за нас негова форма. Както вече се цитира във връзка с радиационната хипотеза на Бор, Крамерс и Слатер, според Шрьодингер

> *определена стабилност на световите събития* sub specie aeternitatis *може единствено да съществува чрез* връзката *на всяка отделна система с целия останал свят. Единичната отделена система, от гледна точка на единството, би била хаос. Тази връзка е нужна като непрекъснат* регулатор, *без която би се лутала в енергетично отношение без план* (Schrödinger 1924: 724).

Такъв механизъм може да се оприличи на отрицателна обратна връзка, гарантираща стабилност на системата. Прекаленото увеличаване на флуктуациите, чистото изменение, в нашия пример, на фазовия обем, поражда енергия и маса, която „стеснява" дисперсията на вероятностното разпределение, т.е. намалява флуктуациите. Ако обратно, флуктуациите намалеят твърде много, съответно това ще намали масата и енергията и ще доведе резултатно до „разширяване" дисперсията на вероятностното разпределение. От така скицирана гледна точка, се разкрива веднага *защо* е невъзможно да съществува дори еднороден ансамбъл без дисперсия (т.е. *защо* трябва да е валидна теоремата на фон Нойман): дори и случайно да възникне състояние безкрайно близко до ансамбъл без дисперсия, той няма да е устойчив и неговата дисперсия веднага ще се „разшири" до крайни стойности. Разбира се, към подобно съвсем качествено разглеждане могат да се предявят множество уточнения, които обаче ще се направят на своето място, в контекста на възраженията на Бел (1966) по отношение всеобщата валидност на теоремата на фон Нойман.

Един въпрос, който остава открит, е: дали и как един принцип за запазване на кохерентното състояние на затворена квантова система може да служи за методологичен и евристичен принцип.

„ПРИНСТЪНСКИЯТ" ДУХ

*Съвременно неопитагорейство – Приютените в Принстън бежанци – За квантовата информация като математическо учение – Непълнота на квантовата механика и на аритметиката? – Избор, число и вероятност – **Ψ**-функцията като число в обобщена бройна система – Смисълът на Айнщайновата „всеобща ковариантност" – „Принстън" и за калибровъчните теории – Още за „дуалистичното питагорейство" – Величина и свойство – Проекционните оператори като твърдения (по фон Нойман) – Едновременната неразрешимост – Имплицира ли понятието за физическа величина инвариантност по отношение на моментите във времето? – Комутиращите и некомутиращите оператори – Усъвършенстване на понятието за едновременна неизмеримост – Квантовата механика в прокрустовото ложе – Светът по своята същност е и математическа структура*

Ако си позволя да перифразирам шегата на Джефри Бъб, че копенхагенската интерпретация на квантова механика е развита на много места в Европа, с изключение на Копенхаген, то Принстънският дух е характерен за множество научни центрове по света, но е под въпрос за Принстън.

Все пак към няколко велики учени, живели и творили в Принстън, Айнщайн и фон Нойман, а и Паули, ще бъде добавен и Курт Гьодел. Шрьодингер също е канен да се включи в Института за перспективни изследвания, докато гостува през 1934 г., а и по-късно. Не само това, но и през 1939-1940 година оглавява физическия институт на новосъздадения аналогичен и едноименен институт, но в Дъблин, където остава 17 години. За още двама велики принстънци – Алонсо Чърч и Алън Тюринг[70] – засега само ще споменем, тъй като техните основополагащи работи съответно за λ-изчислението и за ординалните логики, както и концептите, известни като „тезис на Чърч"[71] и „машина на Тюринг", са от решаващо значение за подхода към квантовия компютър, още повече че подтикът идва от т. нар. теореми на Гьодел за непълнотата. Тяхното дело е толкова съществено, че необходимото обстойно

---

[70] Пребивава в Принстън от 1936 до 1938. Удължава до две години посещението си през 1936 г. Срещал се е и възможно е работил с фон Нойман. През 1938 г. фон Нойман му предлага да стане негов асистент, но Тюринг отказва (Turing 2004: 21). Пише дисертация под ръководството на Чърч, посветена на „Логическите системи, базирани на ординали": тя може – най-малкото ние ще направим също и така – да се разглежда като обобщение на λ-изчислението, предложено от последния.

[71] Известен и като тезис на Чърч – Тюринг.

разглеждане, изискващо около стотина страници, се налага да бъде отложено до главите от трета книга, посветени собствено на квантовия компютър.

Ако се опитам да изясня какво имам предвид под „дух на Принстън", така че то да може да се отнесе към няколко – въпреки колосалните им приноси – толкова разнородни автори, освен, разбира се, че всички те произхождат от Централна Европа, откъдето са под една или друга форма прокудени, за да бъдат привлечени от и в Центъра за перспективни изследвания – Принстън (респ. Дъблин), то бих го назовал с една твърде рядко използвана в наше време дума – *питагорейството*.

Разбира се, възгледът, че светът се основава на разумен план или концепция, поради което в него може да се прониква по рационален път, е характерен за цялата наука на Новото време, чиито бележити представители те се явяват. Но това, че в основата на света не метафорично, а буквално са математически форми и структури, е едно много по-силно твърдение, определено заслужаващо наименованието „съвременно питагорейство", в което „числата" са се превъплътили в математическите структури, като са запазили своето значение на първооснова.

Досега „квантова информация" според своя произход се разглеждаше в рамките на физиката и по-специално на квантовата механика. Естествено е обаче, нейната философия да се стреми към разкриване на изначалната ѝ същност, намираща израз в множество научни дисциплини и особено в техния синтез, в специфична многодисциплинарност, в характерен общ поглед към света. В известен смисъл такава нейна изначалност може да се характеризира най-грубо с това, че информационните процеси, представими като операции с числа, тоест като тяхно изменение и преобразуване, са в основата на света, превръщайки се във физични величини чрез посредничеството на фундаменталните константи: особено и на първо място, чрез константата на Планк, известен смисъл „породила" квантовата механика.

Така и квантовата информация е „от Принстънския дух", от Айнщайновото геометризиране на физиката, намерило израз между другото и в съвременните калибровъчни теории, също така „заченати" в Принстън, от прочутата Шрьодингерова „котка": иначе казано, от суперпозиционните състояния на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията, от похода на Паули в защита на закона за запазване на енергията; също така и в систематичното изграждане от фон Нойман на квантовата механика върху геометричната основа на хилбертовите пространства, днес вече „канонизирано”; най-сетне в Гьоделовото обсъждане на непълнотата (!) на аритметичните системи в сравнение с пълнотата на логическите. Като мост между първите двама и третия може да послужи разглеждането на действията с проекционните оператори като нестандартна логика – III.5. Проекционните оператори като твърдения: от фонНоймановата „Математически основи на квантовата механика”, – какъвто подход ще се опитаме да скицираме към края на настоящата глава.

Нека обърнем внимание и на „непълнотата” като част от питагорейския Принстънски дух. Най-грубо казано, непълнотата на аритметичните системи за разлика от определен тип логически, се състои в това, че съществуват твърдения, за които се доказва, че нито те, нито техните отрицания могат да се изведат от изходните аксиоми. Непълнотата на квантовата механика според разбирането на Айнщайн се състои в наличието на скрити параметри, които допълнително биха детерминирали привидно изначално вероятностното поведение на квантовите обекти и го разкриват като собствено статистическо. В този общ смисъл непълнотата е проблем за една може би само на повърхността несводимост на физическото към математическото, на случайното и вероятностното към закономерното и рационалното, на безкрайното аритметично към крайното логическо.

Вместо свеждането на вероятностното до статистическо чрез неоправдалата се или обобщената хипотеза за скритите параметри, понятието за информация и нейното точно математическо определение намират пътя за преход и връзка от едно вероятностно разпределение към друго: всяко едно от две или повече събития може да е случайно, но отношението между тях да е строго детерминирано. Така в математическата основа на света могат да се поставят вероятностите и изборът.

В основата на числата също така в действителност е изборът. Например, произволно число при основа n и неговите разряди могат да се представят като последователни избори между n алтернативи. Изборът, както вече се показа, е фундамент и на вероятността: например последната може да се представи като отношение на *избраните* към всички алтернативи. Така всъщност числата и вероятностите се оказват „първи братовчеди”, ако не и „брат и сестра”: два частично еквивалентни аспекта на една и съща по-дълбока реалност: *първичният избор*, досега някак си убягвал от философско разглеждане.

С този подход е лесно да се забележи, че и всяка $\boldsymbol{\Psi}$-функция представлява число или по-скоро обобщение на число: неговите последователни $\boldsymbol{n}$ разряда се представят чрез сферите $\boldsymbol{e^{in\omega}}$, а комплексните коефициенти $\boldsymbol{C_n}$ са стойностите на тези разряди. Така $\boldsymbol{\Psi}$-функцията, съпоставяна като състояние на квантов обект с координати $\boldsymbol{x}$ в конфигурационното пространство:

$$\boldsymbol{\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n \cdot} e^{in\omega}} \tag{46}$$

не е нищо друго освен обобщение на понятието за число:

$$\mathrm{N(x)} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{\mathrm{p}} \mathrm{a_n\, e^n} \tag{47}$$

и в този смисъл не е нищо повече от едно безразмерно число, съпоставяно на координатите $\boldsymbol{x}$ в конфигурационното пространство.

Обобщението от $\boldsymbol{N(x)}$ към $\boldsymbol{\Psi(x)}$ се състои в това, че стойността на $\boldsymbol{n}$-ия разряд при основа $\boldsymbol{e}$, а именно $\boldsymbol{a_n}$ (при обичайните бройни системи естествено число измежду $\boldsymbol{0}, \dots\ \boldsymbol{e-1}$; основата на бройната система $\boldsymbol{e}$ е цяло число $\boldsymbol{e \geq 2}$; $\boldsymbol{a_n}$ лесно се тълкува като избор между $\boldsymbol{e}$ алтернативи, представени чрез възможните стойности на разряда) е заменен с комплексното число $\boldsymbol{C_n}$, което може да се види като съвкупност от два независими избора между безкраен брой алтернативи. Например, при обичайното представяне на кюбита с изоморфната единична сфера в обичайното $\boldsymbol{3D}$ евклидово пространство това са стойностите на двата ъгъла $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ $(\boldsymbol{0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi})$ от два произволни, но взаимно ортогонални кръга, определящи единичната сфера. Съответно основата на числото $\boldsymbol{\Psi(x)}$ ще бъде, първо, комплексна и второ, безкрайна**.**

Следва да се отбележи, че съществуването на избор между безкраен брой алтернативи изисква аксиомата за избора, а двата независими избора между безкраен брой алтернативи поставят на дневен ред разликата между две нееднакви уточнения (формулировки) на аксиомата за избора: безкраен избор може/ не може (винаги) да се повтори. Аксиомата за избора вече се беше промъкнала незабелязано в нашето разглеждане чрез *безкрайномерните* хилбертови пространства (например, ако искаме за всяко хилбертово пространство да съществува базис).

Едно число, оставайки едно и също, може да се представи в различни бройни системи, напр. $(\mathbf{7})_{\mathbf{10}} = (\mathbf{111})_{\mathbf{2}}$. С това се дефинира оператор на преход от представяне на едно и също произволно число в една към друга бройна система. Като негово обобщение в разглеждания случай на бройна система с безкрайна основа може да послужи свойството, че при преход всеки разряд се трансформира според равенството

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{p} a_n\, e^n = \sum_{n=1}^{p} a_n^1\, e_1^n \ , \qquad (48)$$

където $\boldsymbol{a^1}$ е новата цифра в $\boldsymbol{n}$-ия разряд при новата основа $\boldsymbol{e_1}$. Оттук лесно се вижда, че в случая на разглеждане на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията като обобщение на понятието за число на оператора, запазващ стойността на числото при преход от една към друга бройна система, съответства унитарният оператор, доколкото той запазва модула на всеки член (тъй като само го „завърта”) от представянето на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията:

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{in\omega} \ . \qquad (49)$$

Другият особено важен клас оператори, – самоспрегнатите (ермитовите) – каквито са и тези, съответстващи на физически величини, изразяват свойство, специфично само за бройни системи с цифри, представляващи комплексни числа (каквито обичайните бройни системи не са): те въздействат еднакво на реалната и на имагинерната част на всяка комплексна цифра:

$$\alpha_n = \frac{A^n}{A_1^n} = \frac{B^n}{B_1^n} \ , \qquad (50)$$

където $\boldsymbol{A^n}$ и $\boldsymbol{B^n}$, $\boldsymbol{A_1^n}$ и $\boldsymbol{B_1^n}$ са съответно реалната и имагинерната част на първоначалната и трансформираната $\boldsymbol{n}$-та „цифра” на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията, а $\boldsymbol{\alpha_n}$ е реално число, диагоналният член на $\boldsymbol{n}$-ия ред на диагоналната матрица, представляваща ермитовия оператор.

Не става дума просто за повърхностна аналогия, а по-скоро за изоморфизъм със същностни и далеч отиващи философски, математически и физически последствия. Така между геометрията (векторните пространства) и аритметиката (бройните системи) са установява мост за преинтерпретиране и пренасяне на твърдения в двете посоки, а чрез това между измерването и броенето. Изборът като лежащ във фундамента на този мост позволява да се види ясно и основанието на връзката с вероятностите.

Изглеждащото донякъде изкуствено определение за количество информация, във всички свои варианти представляващо (интегрална) сума от произведения на стойности и логаритми от вероятности (на тези стойности – „ентропия”; или на други стойности: собствено „информация”) придобива ясен интуитивен смисъл на стойността на число, инвариантна спрямо представянето му по различен начин: в една или друга бройна система. Величината под логаритъм играе ролята на основа на бройната система, а тази, по която е умножена – на цифра в съответния разряд.

И така, през Айнщайновото геометризиране на физиката, се набелязва път вече и към нейното аритметизиране, отвеждащо ни в дълбочината на понятието за квантова информация. Важен жалон по този път ще бъде свързването с аритметизираната логика и изключително съществените теореми на Гьодел за пълнотата и непълнотата. Връзката ще се осъществи чрез набелязаното от фон Нойман съпоставяне на определен тип оператори, отнасящи се до квантовата механика, и твърдения за физически величини.

Философската същност на Айнщайновото геометризиране на физиката добре и най-вече кратко се представя чрез неговия „принцип на относителността”: законите на природата са единствено изказвания за пространствено-времеви съвпадения; затова те намират естествен израз в общи ковариантни уравнения (Einstein 1918: 241). С други думи, на математическо равнище законите на физиката трябва да са инвариантни спрямо произволни дифеоморфизми, т.е. спрямо произволни диференцируеми трансформации на времепространствените координати, физическият смисъл на което е, че трябват да бъдат валидни при преход между всякакви отправни системи, ако може „плавно", по-точно казано, диференцируемо да се премине от едната в другата.

Смисълът на тази „борба за обща ковариантност" лесно се интерпретира и може би дори е по-очевиден при собствено аритметичния подход към физиката, чиито очертания започнахме да скицираме и който навярно е по-близо до едно класическо питагорейство, отколкото Айнщайновото ѝ геометризиране: законите на физиката трябва да се формулират по начин, независим от конкретните бройни системи, в които се представят стойностите на величините.

Нека бегло разгледаме и подхода на калибровъчните теории в качеството му на по-нататъшно геометризиране на физиката и връзката му с нейното аритметизиране. Можем да си представим, че разгледана „под лупа", всяка точка от известно физическо пространство, представимо с формализма на едно или друго математическо пространство, винаги векторно в своята основа, има сложна структура: да речем, то също се явява пространство от същия или от друг тип. По-точно казано, на всяка точка можем да съпоставим един и същи тип пространство и да обсъждаме безкрайно близкия преход от точка в точка на фундаменталното пространство като някакъв оператор на това нововъведено „вътреточково" пространство. При това е основателно да се търси повторение на глобалната инвариантност за крайни трансформации на фундаменталното пространство на локално равнище, между две негови безкрайно близки точки. Значимостта на такъв един принцип се проявява при комплексно хилбертово пространство, фундаментално за квантовата механика. Физическите величини, и по-точно съответните им оператори, остават унитарно инвариантни, т.е. при произволни фазови трансформации, които, грубо казано, само „въртят" векторите, без обаче да променят тяхната големина.

Не така е, обаче, на инфинитезималното, локално равнище: операторите на „вътреточковите" пространства, съответни на физически величини, не са унитарно инвариантни. Те обаче могат „да се поправят", така че да станат унитарно инвариантни, като се калибрират с подходящи калибровъчни полета, които действат на това локално микроравнище само във „вътреточковите" пространства. На специфичните симетрии в тях съответстват закони за запазване на едни или други квантови числа.

Съществено от философска гледна точка е, че в случая на калибровъчните теории са налице две същности – както може би е неизбежно на квантово равнище – пространства и полета „вътре" в тях, докато според Айнщайновия принцип за обща ковариантност и съответната му обща теория на относителността трябва да е налице една единствена същност: някакъв особен тип пространство, в случая псевдоримановото, докато съответното поле – в случая гравитационното, произтича напълно от особените свойства на това пространство. Макар и геометрични по своя характер калибровъчните теории само превъплъщават по един псевдокласически начин квантовия дуализъм, а именно като пространства и полета. Напрежението между тях (бидейки дуалистични) и монистичната обща теория на относителността остава и досега не е намерен общоприето убедителен начин за неговото преодоляване под формата на теория на Великото обединение, която да успее да разгледа и гравитационното поле еднообразно, наред с представимите като калибровъчни, другите три основни взаимодействия: силно, слабо и електромагнитно. Появата на две същности в тези „вътреточкови" пространства е само парафраза на изначалната за квантовата механика дуалност между глобално и локално, между макроуред и квантов обект.

Идеята за „калибровка" може да се представи и на аритметичния език на квантовото изчисление, разглеждащо $\boldsymbol{\Psi}$-функцията като обобщение на бройна система. Всеки от коефициентите $\boldsymbol{C_n}$ би могъл на свой ред да се представи като стойност в бройната система „$\boldsymbol{\Psi_n}$ функция", като нейните коефициенти $\boldsymbol{C_{n_n}}$ на свой ред могат да се представят като стойности в бройните системи на съответните $\boldsymbol{\Psi_{n_n}}$ функции и т.н:

$$\boldsymbol{\Psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n_n} \cdot e^{i n_n \omega}} \qquad (52)$$

$$\boldsymbol{\Psi_{n_n} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n_{n_n}} \cdot e^{i n_{n_n} \omega}} \qquad (53)$$

...

Тогава се поставя въпросът дали функциите $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\Psi_n}$, $\boldsymbol{\Psi_{n_n}}$, … споделят общо хилбертово пространство; общо в следния смисъл: дали базисът $\boldsymbol{\Psi_{i_0}}$ на функционалите

$$\boldsymbol{C_i = f(\Psi_i) = \int \Psi_{i_0}.\Psi_i\,dx = \int \Psi_{i_0}.O(\Psi^*_{i_0}\,)\,dx} \quad (54)$$

е един и същ.

Като изходна точка е естествено да се приеме глобалният базис, при който $\boldsymbol{\Psi}$ приема своята стойност $\boldsymbol{C}$. Ако обаче за дадени стойности $\boldsymbol{C_i}$ базисът $\boldsymbol{\Psi_0}$ трябва да се „калибрира”, то това може да се направи чрез съответен оператор, който изразява съответното калибровъчно поле:

$$\boldsymbol{\Psi_{i_0} = O(\Psi_0)} \quad (55)$$

При такъв подход би било чудесно, ако се окаже, че необходимата калибровка може да се сведе до няколко основни типа оператори $\boldsymbol{O}$ и съответно калибровъчни полета, въздействащи на първото равнище (електромагнитното поле), на второто равнище („слабото” поле), на третото равнище („силното” поле) на представяне на коефициенти като стойности в бройна система $\boldsymbol{\Psi_i}$.

Предложените примери не претендират за точност в детайлите, необходима при собствено физическо изложение, а се стремят да послужат като илюстрация на философската идея за аритметизация на физиката, всъщност „подмолно” осъществявана от теорията на квантовата информация, често наричана просто квантова информация или включвана в една единна квантова механика и информация.

Монистичният подход на Айнщайн, който предпоставя геометрична математическа същност и както видяхме възможно трансформируем в собствено аритметичен подход, е по-близо до питагорейството. Затова за нас са особено ценни подходите на Гьодел към непълнотата, които – ще се опитаме да покажем – въвеждат дуалност още на аритметично равнище и по този начин отварят вратата за едно дуалистично питагорейство, поне засега изглеждащо най-подходящо и като обща философия, и като методология на квантовата информация.

Така квантовата информация също е от двама съвсем различни родители, вероятно обуславящо нейната жизненост: от монистичния питагорейски Принстънски дух, но и от дуалистичната квантова механика. Този оказал се твърде плодотворен синтез занапред накратко ще обозначаваме като „дуалистично питагорейство”. Но ако за едната му същност има ясно определен термин: числата, втората все още е под въпрос, може би има нещо общо или дори съвпада с безкрайността. В някакъв смисъл и класическото питагорейство е отнесено и към безкрайността посредством мистичното и сакралното, но по един твърде неопределен и за съвременни научни теории напълно неудовлетворителен начин.

Друг възможен кандидат за дуална на числата в едно дуалистично питагорейство същност е целостта, или на математически език, множеството, класът или категорията, чрез Канторовата теория на множествата пряко свързвани с безкрайността.

Нека по-нататък проследим начина, предложен от фон Нойман в параграфа „Проекционните оператори като твърдения” (III.5), по който дуализмът може да проникне в логиката:

> *Наред с физическите величини* $\mathfrak{R}$ *има обаче още нещо, което е предмет на физиката: именно свойствата на системата* $\mathfrak{S}$*. Свойство е напр., че някоя величина* $\mathfrak{R}$ *приема стойност* $\boldsymbol{\lambda}$ *или че стойността на* $\mathfrak{R}$ *е положителна, или че стойностите на две едновременно наблюдаеми величини* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{S}$ *са равни на* $\boldsymbol{\lambda}$*, респ.* $\boldsymbol{\mu}$*, или че сумата от квадратите на тези стойности е:* > 1 *и т.н. Означавахме величините с* $\mathfrak{R}$*,* $\mathfrak{S}$*, ..., желаем да означаваме свойствата с* $\mathfrak{S}$*,* $\mathfrak{T}$*, ... На величините съответстват хипермаксимални ермитови оператори* $\boldsymbol{R}$*,* $\boldsymbol{S}$*, ..., както току-що обсъждахме; какво съответства на свойствата?* (Neumann 1932: 131.)

Тук и по-нататък ще се изисква в най-общ философски план изясняване на начина на съотнасяне на физически и логически понятия, конкретно в случая – „величина" и „свойство". От гледна точка на логиката понятието „величина" е съществено неопределено: то може да се разбира и като свързана променлива, с други думи като множеството от стойностите („$\forall x$:") или като произволен елемент от това множество („$\exists x$:"), но и като свободна променлива, т.е. като такава, която може да се замести с конкретния елемент „ x " от множеството на стойностите. Причината за това е, че понятието „величина" възниква в класическата физика, в рамките на която разграничаването на двата аспекта може да се пренебрегне. За щастие, съхранената в логиката и в теория на множествата дистинкция, помага за вникване в ситуацията в квантовата механика, както и чрез решенията, до които последната се е добрала, да предложи обратен отблясък към логиката: в случая на свободна променлива се говори за наблюдаема или за измерима величина.

По начина, по който фон Нойман дефинира „свойствата на системата $\boldsymbol{S}$", се вижда, че има предвид наблюдаема, поради което тя може да се предицира със стойности. Оттук свойството може да се сведе до твърдение или клас от такива относно това дали даден елемент (стойност) принадлежи или не на дадено множество (приписва се на наблюдаема). Обратно, ако е дадено свойство в обсъждания смисъл, то еднозначно му съответства величина, която поради това съответствие със свойство е наблюдаема, измерима величина:

> *Можем да съпоставим на всяко свойство $\mathfrak{S}$ величина, която определяме така: всяко измерване, което разрешава за $\mathfrak{S}$ наличие или не, се разглежда като измерване на тази величина; и то нейната стойност е $\mathbf{1}$, ако $\mathfrak{S}$ е налице и $\mathbf{0}$ в противния случай. Тази съответна на $\mathfrak{S}$ величина желаем също да означаваме със* $\mathfrak{S}$ (Neumann 1932: 131).

Нека преди да преминем нататък, да онагледим и осмислим представата, според която проекционните оператори (изобщо, т.е. не само в квантова механика) съответстват на свойства. За целта трябва да свържем два типа нагледи чрез посредничеството на т. нар. диаграми на Вен. Единият кръг се отнася до прехода от свързани към свободни променливи като своеобразна проекция. За да се премине към свободна променлива, просто се отстранява кванторът: с това вече престава да се има предвид множеството като цяло. Оттук вече позволеното заместване с константа, т.е. с даден елемент на множеството, може да се разгледа като проекция. Самото заместване е оператор от множеството, разглеждано вече не като единно, „кохерентно" цяло, към фиксиран имплицитно, чрез избрания оператор елемент или елементи на това множество.

Другият кръг се отнася до измерването на физическа величина в качеството на проекция, фигуративно казано, върху „екрана" на субекта: представа, водеща началото си още от Платоновата „притча за пещерата":

> *На свойствата $\mathfrak{S}$ са следователно съответни (чрез посредничеството на принадлежащите им величини $\mathfrak{S}$, които току-що дефинирахме) проекционни оператори $\boldsymbol{E}$. Или също така, затворените линейни многообразия $\mathfrak{M}$, ако ние наред с $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{P}_{\mathfrak{M}}$ разглеждаме и принадлежащите им затворени линейни многообразия $\mathfrak{M}$* (Neumann 1932: 132).

Тоест, „в термините" на Платоновата притча можем да говорим за сенките $\mathfrak{S}$, играещи по стените $\mathfrak{M}$ на пещерата. Не е случайно, че фон Нойман обозначава „сенките" по същия начин както „самите неща" – „ $\mathfrak{S}$ ": ход на мисълта, същностен за квантовата механика. Да подчертаем: самите неща са *само* обозначени по същия начин, но те са различни от сенките. Това, в което могат да бъдат напълно сигурни обитателите на пещерата в качеството на максимално възможното за тях познание, е: сенки и фактът, че са сенки. На „такава" основа квантовата механика изгражда непротиворечива теория, удвоявайки „сенките" и като „самите неща" и забранявайки едновременното разглеждане на „сенките" и „самите неща": те не са едновременно наблюдаеми, едновременно измерими:

> *Както при величините, така и при свойствата възниква въпросът за едновременната измеримост* (*собствена разрешимост* [Entsheidbarkeit]). *Ясно е, че $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ са разрешими едновременно тогава и само тогава, когато принадлежащите им величини $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ са едновременно измерими* (...), *т.е. ако $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ комутират. Същото е в сила за повече свойства $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$, ...* (Neumann 1932: 132).

Следователно Платоновият подход за „сенки” и „неща” е преизтълкуван в квантовата механика като наличие на два типа същности, напълно аналогични, но едновременно неизмерими, ненаблюдаеми. Подходът на логиката за два типа променливи, свързани и свободни, или на теорията на множествата, за множества и елементи, е сходен, но се различава по това, че дистинкцията не се разглежда като изначално отношение, при което относимите са взаимно заменими, а като различни свойства, чието предициране изключва алтернативния тип свойство. Така, точно по платоновски, се предполага, че сянката „сама по себе си” е „нещо” различно от „самото нещо”, свързаната – от свободната променлива, множеството – от елемента; може да се добави в същия ред на мисли: означаваното – от означаващото.

> *Както се вижда, отношението между свойствата на физическа система, от една страна, и проекционните оператори, от друга, прави възможно един вид логическо изчисление с тях. Сега то е – противно на онова на обичайната логика – обогатено с характерното за квантовата механика понятийно образование „едновременна разрешимост* [Entsheidbarkeit]” (Neumann 1932: 134).

Нека после се опитаме да онагледим тази „едновременна разрешимост” – респ. „едновременна неразрешимост” – на свойства на физическата система чрез елементарната представа за проекция на отсечка $\boldsymbol{AB}$ върху равнина, в която е обособена компактната област $\boldsymbol{D}$, която, интерпретирана посредством т. нар. диаграми на Вен, ще осмислим като множеството от обекти, притежаващи свойството $\boldsymbol{D}$ в смисъла на логиката, обозначена от фон Нойман като „обичайна”.

Да започнем разглеждането с „едновременна неразрешимост” на *едно* свойство. Следва да отбележим, че математикът неявно има предвид едновременна неразрешимост на *две* свойства, но заедно с това никъде не забранява особения случай, когато двете свойства съвпадат и следователно имат един и същ проекционен оператор. Да означим проектираната върху равнината на $\boldsymbol{D}$ отсечка с $\boldsymbol{A'B'}$. Очевидно са налице три възможности: отсечката $\boldsymbol{A'B'}$ да е (1) изцяло вътре в областта $\boldsymbol{D}$, (2) изцяло вън, (3) отчасти вътре, отчасти вън; в последния случай може да посочим еднозначно число $\boldsymbol{p}$ в интервала $(\mathbf{0},\mathbf{1})$, означаващо каква част от цялата отсечка е вътре в областта $\boldsymbol{D}$; в случая (1) това число би било $\mathbf{1}$, а в (2) – $\mathbf{0}$: трите случая заедно еднозначно определят число в интервала $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$.

И така: имаме като свързана променлива свойството $\boldsymbol{AB}$. Съпоставяме му чрез проекция (измерване) свободна променлива – свойството $\boldsymbol{A'B'}$. Нашият проблем е: можем ли да ѝ припишем като стойност свойството „$\boldsymbol{D}$", респ. „не-$\boldsymbol{D}$". Когато това не е възможно, казваме, че свойството $\boldsymbol{A'B'}$ е неразрешимо по отношение на свойството $\boldsymbol{D}$. Очевидно, така определена, ‛неразрешимостта' представлява *също и* [72] отношение между две свойства и това отношение ще отъждествим с фонНоймановата „едновременна неразрешимост", като във всеки конкретен случай можем еднозначно да припишем число $\boldsymbol{p} \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$, което да тълкуваме като вероятност на свободната променлива ‛свойството $\boldsymbol{A'B'}$ ' да може да се припише стойност „свойството $\boldsymbol{D}$".

За вникнем по-дълбоко в понятието „едновременна неразрешимост" нека изясним: защо то не се появява в т. нар. обичайна логика и теория на множествата. За целта да разгледаме множеството $\boldsymbol{D'}$, съответстващо на $\boldsymbol{A'B'}$, но представено като компактна област в равнината на $\boldsymbol{D}$. В случая (3) няма да е подмножество нито на $\boldsymbol{D}$ нито на **не-**$\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{D}$ на свой ред няма да е подмножество нито на $\boldsymbol{D'}$, нито на **не-**$\boldsymbol{D'}$. „Едновременна неразрешимост" на $\boldsymbol{D}$ и на $\boldsymbol{D'}$ няма, тъй като всяко от двете множества разцепва другото на две подмножества с празно сечение (дизюнктни подмножества).

В случая на квантовата механика за „едновременна неразрешимост" говорим в случаите, когато едното от двете множества остава, фигуративно казано, в „кохерентно състояние", т.е. принуждава да бъде разглеждано само като цялост и поради това не може да бъде разцепено от другото множество на две дизюнктни подмножества. За да представим такова множество, което е само цялост, използвахме досега логическото понятие за свързана променлива. Може също така да се спомене като насока за мислене нарушаване на изоморфизма между логика и теория на множествата, когато пространството, в което се извършва проекцията, не е „плоско", има „кривина" и следователно проекцията се извършва по геодезичните линии в него.

Накрая на параграфа фон Нойман дава конкретен пример, изясняващ следната негова теза:

---

[72] ‘Неразрешимостта’ може да се разглежда и като свойство, и като отношение.

> *Това основано на проекционни оператори изчисление със съждения има, освен останалото, още предимството над изчислението с величини, основано на съвкупността от всички (хипермаксимални) ермитови оператори, че понятието „едновременна разрешимост" [Entsheidbarkeit] представлява усъвършенстване на понятието „едновременна измеримост"* (Neumann 1932: 134).

Би могло да се обсъди какъв смисъл следва да се влага в „усъвършенстване". За целта бих предположил, че в израза „усъвършенстване на понятието за „едновременна измеримост" [eine Verfeinerung des Begriffes der „gleichzeitigen Meßbarkeit"], както и навсякъде в съчетанията „едновременна разрешимост", „едновременна измеримост", думата „едновременна" е употребена буквално. Такъв буквален смисъл на „едновременна" може да се тълкува по следния начин:

Всяка физическа величина в квантовата механика, която е необходимо (без да е достатъчно) ермитов оператор, ***имплицира*** *инвариантност спрямо моментите на времето*. За да изясним смисъла на поставеното в курсив, но без да навлизаме в „тресавището" на математическа прецизност, ще използваме като изходна точка онагледяване на ермитов оператор с оператора умножаване на вектор с реално число. Този оператор запазва „направлението" на вектора. Ако на всяка посока сме съпоставили момент от времето на цикличен процес, то ‛едновременност' означава, че два или повече вектора са с една и съща посока (имат една и съща фаза) и в този смисъл са *едновременно*, и то тъкмо в буквален смисъл *измерими*.

По-нататък можем да разширим нашето онагледяване на ермитови оператори, с такива, които, когато действат върху кои да е два вектора, имат една и съща стойност на скаларното произведение на вектора и на проекцията на другия върху него. Това може да се случи само когато времето (представено чрез фазата между векторите) тече „по нютоновски": равномерно, еднообразно, хомогенно, непрекъснато. Ако използваме относителността между непрекъснатост и дискретност, която нататък ще обосновем чрез парадокса на Скулем и многократно ще използваме, можем да кажем, че такова време просто „брои" по подобие с метроном и нищо повече. При това положение ще е в сила и т. нар. унитарност – според нашия наглед всеки вектор (всяка физическа величина) ще има една съща големина при какво да е негово завъртане (т.е. в произволен друг момент, ако системата междувременно не е изпитала въздействие), – която в крайна сметка е еквивалентна на закона за запазване на енергията.

С това достигаме до пълния смисъл, който следва да се влага в това, че „всяка физическа величина в квантовата механика имплицира инвариантност спрямо моментите на времето”: ако използваме еталон от произволен друг момент от времето като мярка за измерване на величината, то нейната стойност ще бъде една и съща, независимо от това еталон от кой момент от времето е използван (това е необходимо тъкмо защото моментът от време, от който произхожда еталонът, се избира принципно случайно). В такъв случай, ако измерваме две величини заедно, можем да изберем произволен момент от времето, напр. този на едната от тях, и да сме сигурни, че направеното измерване с еталони от този момент, е валидно за всеки друг момент. В класическата физика това, разбира се, е вярно за кои да е две величини.

Фон Нойман показва на основата на предшестващи публикации на други изследователи, че това не е вярно в общия случай за квантовата механика и тогава се говори за едновременно неизмерими величини. Всички знаят, разбират или просто повтарят, че в този случай съответните оператори, а те необходимо трябва да са ермитови, понеже става дума за физически величини, *не комутират*. Какво обаче ще рече това? Ако се избере произволен момент от времето, от който напр. да се вземат еталоните и се обсъждат проекциите на двете величини под въпрос върху този момент, то има значение редът, в който се проектират, тъй като в двата случая ще се получат различни резултати. За да се избегне тази конфликтна ситуация на явно противоречие за стойностите на тези две величини, което, ако не се отстрани по един или друг начин, би довело до пълна неопределеност и следователно непредсказуемост, т.е. до ненаучност на квантовата механика, всички случаи от този род *се описват като строго определено множество и се забраняват* : това са едновременно неизмеримите величини.

Фигуративно казано, „нозете” на квантовата механика, стърчащи извън прокрустовото ложе на научността, „не се отрязват”, понеже няма как, нито пък „ложето” се обявява за неподходящо, т.е. за недостатъчно, „непълно”, както биха се стремили да покажат привържениците на теориите със скрити параметри, а се забранява едновременното им „разглеждане” с останалата част от тялото (тъй като и те могат да се настанят на ложето, а тялото „да стърчи” навън).

Обаче при понятието за „едновременна неизмеримост” ситуацията на проектиране – в нашия гротесков пример, представена с премерването върху прокрустовото ложе, – от която собствено следва и ‵едновременната неизмеримост′ остава неявна, имплицитна. Тъкмо в този смисъл „едновременната неразрешимост”, въведена от фон Нойман чрез тълкуването на проекционните оператори като твърдения, е „усъвършенстване на понятието за едновременна неизмеримост”, тъй като непосредствено включва причината за едновременната неизмеримост, а именно неопределеността – в уточнения малко по-горе смисъл – при проектиране на две такива величини върху един и същи момент от времето, от който напр. „се вземат еталоните” за тези величини.

На шега казано, добавим ли и един метър по дължината на прокрустовото ложе, ако желаем да измерим части или само от тялото, или части само от краката на „великана” „квантова механика” няма проблеми да го направим заедно, но последователно, като в първия случай ще разположим туловището, а във втория – нозете върху ложето-метър. Например обаче „дължината на врата” и „дължината на бедрото” ще бъдат едновременно неизмерими, тъй като трябва да завъртим „великана” на $\mathbf{180}^{\circ}$ за второто измерване. Може да използваме, и дори е по-коректно, „проекционния оператор” за грамаданските телесни членове – дали се проектират едновременно върху ложето или не, – за да изясним причината за едновременната им измеримост, респ. неизмеримост.

В заключение на главата, чрез която се опитах да въведа един доста неопределен термин, „принстънски дух” и да го изтълкувам като „съвременно питагорейство”, би могло да се каже следното. Постоянно будещата удивление, дори много преди началото на Новото време и на математизираната наука, числовост, или с днешни термини, математическа структурираност на света, при положение, че той заедно с това е и толкова неопределен, аморфен и случаен, получава чрез дуалното или дуалистичното питагорейство такова обяснение: *светът по своята същност е* ***и*** *математическа структура*. Използването на математически средства за неговото описание и разкриване не е външно и акцидентално. Това, че дори не само книгата на природата, но и изобщо на света, е написана на математически език, не е метафора, или може би по-точно, не е само метафора и следователно би трябвало да се разбира също така и буквално. Такава е мъдростта и поуката, която донякъде условно, разположихме в Принстън.

ДВЕТЕ ТЕОРЕМИ НА КУРТ ГЬОДЕЛ ЗА НЕПЪЛНОТАТА

Самореференциалността – Концептуалният ни фон – Множеството, чието множество от подмножества е изброимо – Аксиомата за фундираността и аксиомата за избора – Подходът на Генцен и концепцията на Тарски за истината – Отново за $\boldsymbol{\Psi}$-функцията като число в обобщена бройна система – Теоремата на Мартин Льоб за пропозицията, твърдяща доказуемостта си – Редундантната концепция на Рамзи за истината – Субективна и обективна вероятност – Интерпретация в квантовите термини – Обща основа за парадокса на Лъжеца и на Стрелата – Подход към проблема за пълнотата на Пеановата аритметика – Синтаксис и семантика – Теоремата на Генцен – Принципът на трансфинитната индукция – Стратегия за дуално обосноваване на пълнотата – Идея за дуална непротиворечивост – Трансфинитна индукция до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ – Трите равнища на математиката по Генцен – Въпросът за математика и физика отвъд пълнотата – Трансфинитност и финитизъм – Финитизъм, конструктивизъм, интуиционизъм и „актуализъм" (формализъм) – От позиция на „дуалистичното питагорейство" – Функцията „наследник" и функцията „цялост" – Трансфинитна и пълна индукция – Трансфинитно изчисление и трансфинитен алгоритъм – Квантов компютър чрез две машини на Тюринг – Суперфинитна индукция – Дуалност на крайно и безкрайно – Аритметика на Генцен – За недоказуемостта на трансфинитна индукция до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ –„Възможността за примиряване на различните гледни точки" – Математика и физическа реалност по Генцен – Рефлексия на отправната точка към теоремите на Гьодел – Скицата на Гьодел на първата теорема за непълнотата – Включване на антиномично твърдение в доказателство – Цената – Теория с противоречие и теория с неразрешимо твърдение – Проблемът със самореференциално прилагане на първата теорема – Твърдение, от чиято валидност следва неразрешимостта му – Идея за негьоделова, или хилбертова математика – $\boldsymbol{\omega}$-непротиворечивостта – Метаматематическото изключване на самореференциално прилагане на първата теорема за непълнотата – За статута на втората теорема за непротиворечивост – Реалибитация за хилбертовата програма – Недоказуемост също така и за несамообосноваването на математика – За гьоделовия номер на първата теорема за непълнотата – Проблем с „първичните знаци" – Хилбертова и Гьоделова математика – Коя е математиката на реалния свят? – Позицията на „дуалистичното питагорейство"

Тъй като съдържанието – както и множество интерпретации с различна степен на отдалечаване и различно количество допълнителни допускания – на двете теореми е добре известно, нека отложим разглеждането на оригиналните текстове за края на главата, а да започнем с вече намекната „дуалистично питагорейска" философска перспектива, чиято пряка насоченост е по-скоро към квантовата информация и към поставянето ѝ в собствено онтологични рамки.

Най-общата скица на подхода е следната: освен на първата теорема на Гьодел за непълнотата, да обърнем внимание и на теоремата на Мартин Льоб (1955) за връзката между наличие на гьоделов номер и това, че твърдението следва от собствената му доказуемост; също така и скицата на доказателството на теоремата на Герхард Генцен (Gentzen 1969: 26), показваща, че при по-слаби (а не по-силни! – каквото е разпространението недоразумение) изходни предпоставки аритметичните системи могат да бъдат пълни и следователно да съдържат доказателство за собствената си непротиворечивост. Философското тълкуване ще се стреми да покаже, че дуалните (в един точен и формализируем смисъл) аритметични системи могат да бъдат пълни и че монистичните аритметични системи са необходимо непълни, което ще представлява и конкретната интерпретационна рамка, в която ще се поставят Гьоделовите теореми за непълнотата.

В по-големи и вече собствено логически детайли, следва да се уточни при какви условия доказуемостта от себе си е равносилно на твърдението, че това твърдение следва от себе си. В резултат, изводимостта би могла вече да се разглежда като свойство на определен клас твърдения, без оглед на една или друга аксиоматика, в която те са изводими или неизводими; с други думи, да се ограничи (или обобщи, в зависимост от гледната точка) обсъждането до твърденията, изводими или неизводими във *всяка* аксиоматика. Така може да се построи мост за интерпретиране на теоремата на Кохен – Шпекер (1967), която макар и логическа по характер се отнася до отсъствието на „скрити параметри" в квантовата механика, в термините на теоремите на Гьодел за непълнотата: налице е скрито противоречие, което чрез теоремата на Кохен – Шпекер се експлицира, между наличието на определена истинностна стойност на едно твърдение (вярно/ невярно) и неговата „неконтекстуалност", т.е. независимост от „контекста" на определена аксиоматика[73].

---

[73] В тази връзка е уместно да се спомене семантичната концепция за истината на Тарски, според която „*понятието за истина никога не съвпада с това за доказуемост*, понеже всички доказуеми твърдения са истинни, но има истинни твърдения които не са доказуеми" (Tarski 1944: 354). Следва да се има предвид, че тя представлява по-скоро металогическа и философска позиция, макар и съзвучна с т. нар първа теорема за непълнотата на Гьодел и чрез нея и по-опосредствано – с т. нар. втора теорема за непълнотата и теорема за пълнотата. От скицираното в настоящото изложение би трябвало да приемем, че това е неразрешимо, и то собствено философско твърдение, от което и произтича неговата неразрешимост (за разлика напр. от сродната т. нар. първа теорема за непълнотата, чиято неразрешимост има логически произход, бидейки и формализируема). Начинът на пренебрегване на въпроса за самореференцалността на т.нар. първа теорема от страна на Гьодел изглежда сходен със

С други думи, двете предпоставки на една вече логически интерпретирана теория на „скритите параметри", са „допълнителни": или истинностната стойност на всяко едно твърдение е определена, но заедно с това контекстуално обусловена, или обратно, истинностната стойност на едно твърдение е контекстуално независима (от всяка една аксиоматика, т.е. явява се свойство на това твърдение, а не отношение спрямо дадена аксиоматика), но заедно с това е неопределена: фигуративно казано, представлява произволна суперпозиция на двете „ортогонални" състояния – истинно и неистинно. По подобие на Шрьодингеровата котка – при това не е просто аналогия, а морфизъм, – твърдението „само по себе", т.е. преди да сме го „измерили" в даден контекст, формализиран чрез фиксирана аксиоматика, е „вярно-и-невярно" (както тя е „жива-и-мъртва").

Теоремата на Герхард Генцен ще ни помогне да разкрием същностната връзка между аксиомата за фундираността и монистичното разглеждане. Съществува ли такова безкрайно множество, чието множество от подмножества да съвпада с него? И при крайните множества – като такова например може да се обсъжда празното множество или съдържащото един елемент – това е въпрос на конвенция, на дефиниция на множество от подмножества: дали съдържа $\mathbf{2}^{N}$ или $\mathbf{2}^{N}-\mathbf{1}$ елементи, където N е кардиналното число (броят) на елементите на изходното множество. В качеството на „единично" безкрайно множество се разглежда такова с мощността на естествените числа. Сега аксиомата за фундираността, която забранява „бездънните" множества, се оказва еднакво валидна за крайните и безкрайните множества и представлява своеобразна основа както стандартната, така и за трансфинитната индукция. Но трансфинитната индукция, а по подобие на нейната и стандартната, може да се обоснове и без помощта на аксиомата за фундираността – в една все пак не напълно еквивалентна форма, – при което тя може да се прилага както към обичайните „фундирани", така и към нестандартни „бездънни" множества.

същността на концепцията на Тарски за истината, още повече че самият той я въвежда също и с оглед изолиране на антиномии от типа на Лъжеца (Tarski 1944: 347-348). Така или иначе остава проблемът, че Гьодел веднъж прилага формализиран довод, основан и по собствените му думи на антиномии от типа на Лъжеца, следователно в собствено логически контекст, но заедно с това пропуска аналогично прилагане на метаравнище, неявно споделяйки концепцията на Тарски за истината (тогава – 1931 г. – последната още не е съществувала или поне не е била експлицирана и публикувана). Обратно, ако приемем формализируемостта – сложен или неразрешим проблем – на концепцията на Тарски или на алтернативна на нея при условията на т. нар. първа теорема за непълнотата, би могло да се обсъжда в собствено логически план самореференциалността или несамореференциалността на последната.

В тази формулировка, индуктивният извод е валиден $\forall\boldsymbol{n}$, ако е валиден (2) за $\boldsymbol{N}$, (1) за $\forall\boldsymbol{n} < \boldsymbol{N}$ и (3) ако от (1) следва (2).

Аксиомата за фундираността трябва да се разграничава от добрата наредба, тясно свързана или произтичаща от аксиомата за избора.

Теоремата на Генцен в оригиналната си формулировка приема аксиомата за фундираността и трансфинитна „единица”, чрез която да се обоснове втората, трансфинитна индукция, аналогична на първата, финитна. Трансфинитно разширена, една аритметична система може да бъде пълна и да съдържа доказателство за собствената си непротиворечивост. Така построена аритметичната система е очевидно „дуална”, тъй като трансфинитните разглеждания са допълнителни (в смисъла на едновременно невъзможни) със стандартните аритметични, понеже заставайки на едната позиция, независимо коя, другата „се слива” до една единствена стойност: било то „$\mathbf{0}$”, или „∞”.

Тази ситуация със сливане на дуалното разглеждане до неразличимост, заставайки на една от двете допълнителни позиции, всъщност е твърде поучителна, защото позволява да се осмисли и впоследствие обобщи положението в теорията на относителността (да говорим в качеството на най-прост пример за специалната теория на относителността): втората същност, светлинната, т.е. на обекти без маса на покой, от гледната точка на притежаващите, маса се „свива” до една единствена скорост „$\boldsymbol{c}$” и се преобразува в изотропна повърхност, всички разстояния върху която по определение са нулеви, следователно изотропната повърхност може да се тълкува като „повърхност-точка”.

Но ако преминем към формулировка на индукцията без помощта на аксиомата за фундираността (независимо дали тя бъде запазена, заменена с отрицание или пренебрегната) по описания по-горе начин, може да се построи дуална аритметична система – и следователно възможно съдържаща доказателство за собствената си непротиворечивост вътре в себе си – само върху целите числа, но освен естествените: и нулата, и отрицателните числа. При това ще съществуват твърдения и с отрицателен гьоделов номер, какъвто по определен начин ще може да се приписва на неразрешимите твърдения. Така ще се появи взаимна неразрешимост, произтичаща от Гьоделовата неразрешимост, в пряка връзка с едновременно неразрешимите твърдения, въвеждането на каквито беше скицирано в края на предната глава чрез подхода на фон Нойман за „квантова” логика на проекционните оператори в хилбертово пространство.

Съотношението за неопределеност – все едно чрез „логаритмуване” – при такива дуални системи, базирани на цели числа, преминава от мултипликативен в адитивен вид:

$$\boldsymbol{\Delta x \Delta p \ \geq h} \xrightarrow{\text{преминава в}} \boldsymbol{ln\Delta x + ln\Delta p \ \geq ln\ h} \qquad (56)$$

На това място все още няма да се обсъждат условията за възможност на такъв преход, както и на обратния; същественото от философска гледна точка, аксиомата за фундираността, вече се спомена.

Понятието и особено количествената величина на информацията изисква (интегрална) сума от произведения на числа и логаритми, следователно и съвместното съществуване на мултипликативни и адитивни дуални аритметични системи, като първата има смисъл на стойности или цифри в бройна система, а втората – на разреди или степени на основата на бройната система.

Вече е налице достатъчен фундамент най-малкото да може да се изкаже хипотезата, че $\boldsymbol{\Psi}$-функцията представлява стойност на число в ***дуална*** *бройна система*, чиято аритметика е и (1) необходимо или (2) възможно пълна (трябва или може да съдържа доказателство за собствената си непротиворечивост в себе си). Налага се да отложим за по-нататък обсъждането на разликата и условията на (1) и (2), поради това, че релевантните понятия все още не са въведени.

Да преминем към теоремата на Мартин Хуго Льоб (Löb: 1955).

Тя може да се изкаже под формата на импликация, а именно:

От това (1), че от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, то *следва* (2), че от твърдението за неговата доказуемост следва самото то.

Обратното твърдение, че от (2) *следва* (1) обикновено не се формулира като теорема, не защото е невярно, а защото се приема, че е тривиално.

Налице е следователно равнозначност на (1) и (2):

Ако от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, то цялата тази импликация е равнозначна на импликацията, че от собствената доказуемост на твърдението следва самото то.

Теоремата е доказана, за да се реши като следствие задача, поставена от Л. Хенкин три години преди това в същото списание (Henkin 1952: 1960). Ако Σ е коя да е стандартна формална система, адекватна за рекурсивната теория на числата, може да се построи формула (имаща цялото число q като свой Гьоделов номер), която изразява пропозицията, че формулата с Гьоделов номер q е доказуема в Σ. Дали тази формула е доказуема, или независима в Σ?

Буквално Мартин Льоб е записал – след като в бележка под линия отбелязва, че в първоначалния вариант теоремата е формулирана непосредствено като решение на задачата на Хенкин, а тази формулировка е по препоръка на рецензента – своята теорема така:

ТЕОРЕМА: *Ако* $\mathfrak{S}$ *е произволна формула, такава че* $\mathfrak{B}(\{\mathfrak{S}\}) \rightarrow \mathfrak{S}$ *е теорема, то* $\mathfrak{S}$ *е теорема* (Löb 1955: 116).

Непосредствено под нея е формулирано като следствие решението на задачата на Хенкин, а именно: *твърдението според нейното условие е теорема* (не е независимо твърдение в Σ).

Нерядко теоремата се обсъжда като ход на мисълта, провокиран от този в първата теорема на Гьодел за непълнотата: вместо твърдение, твърдящо собствената си недоказуемост (своеобразен аналог на Лъжеца от парадокса за него), да се разгледа твърдение, което – обратно – твърди собствената си доказуемост.

Друга формулировка на теоремата на Льоб (Сморинский 1983: 33):

Еквивалентни са (1') и (2'):

(1') От това, че от теория, съдържаща аритметиката на Пеано, следва Гьоделов номер за дадено твърдение, следва самото твърдение.

(2') От теория, съдържаща аритметиката на Пеано, следва самото твърдение.

Следователно необходимо и достатъчно условие дадено твърдение да е доказуемо в дадена теория, която, поради това че съдържа аритметиката на Пеано, позволява да му се определи Гьоделов номер, е самият този Гьоделов номер.

От философска гледна точка особен интерес представляват свойствата „коректност" (всичко доказуемо е истинно) и „пълнота" (всичко истинно е доказуемо: за всяко твърдение е доказуемо или то, или неговото отрицание) на теорията (Сморинский 1983: 32).

Нека разгледаме теоремата на Льоб за една коректна и пълна теория. За нея би било валидно:

От това (1"), че от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, тогава и само тогава (2"), когато от твърдението за неговата истинност следва самото то.

Но ако твърдението за истинността на едно твърдение $\boldsymbol{P}$ е еквивалентно на самото твърдение: $\boldsymbol{P} \leftrightarrow \{\boldsymbol{P}\ \text{е истинно}\}$, то в случая на коректна и пълна теория би било валидно:

Наличието на Гьоделов номер е еквивалентно на това, че дадено твърдение следва от себе си.

„$\boldsymbol{P} \leftrightarrow \{\boldsymbol{P}\ \text{е истинно}\}$" е по същество една метаматематическа хипотеза; тя има прекалено общ характер, за да бъде обсъждана в качеството на аксиома. По-скоро заслужава название „концепция за истината" и това е т. нар. редундантна концепция за истината, обикновено приписвана на Франк Рамзи, поредния отишъл си твърде рано математик (1903-1930).

В контекста на една негова, малко по-ранна работа „Истина и вероятност" (Ramsey 1978: 58-100), т. нар. редундантна концепция за истината може да бъде тълкувана[74] като приписване вероятност единица на дадено твърдение в смисъла на пълна достоверност или убеденост в него.

Нека се обърнем за интерпретация към квантовата механика. Според използвания тук класически подход на фон Нойман налице са хипермаксимални оператори, които са физически величини, и проекционни оператори, които са съждения относно тези физически величини и могат да приемат стойности „$\mathbf{0}$" и „$\mathbf{1}$". Освен това $\|\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q})\|^2$ е вероятността микрообектът $\boldsymbol{Z}$ с тази вълнова функция да се окаже в състояние $\boldsymbol{q}$. Нека при тези предпоставки обсъдим проекционния оператор – да го означим със **Z**, – който съответства на съждението „Микрообектът $\boldsymbol{Z}$ е в състо-

---

[74] Привеждан като редундантна концепция за истината, възгледът на Рамзи съществено се обеднява: за неговите пренебрегвани аспекти може да се прочете в работата „Рамзи за истината и истината за Рамзи" (Le Morvan 2004).

яние $\boldsymbol{q}$". Пред нас се откриват две възможности. Едната е да отъждествим $\boldsymbol{Z}$, с която да е *пълна* съвкупност от едновременно измерими величини, и тогава $\boldsymbol{Z}$ съществува и приема стойност $\mathbf{1}$ – вярно, $\mathbf{0}$ – невярно. Другата е да отъждествим $\boldsymbol{Z}$ със съвкупността от всички, макар и *неедновременно* измерими величини и тогава $\boldsymbol{Z}$ не съществува.

Ще покажем, че в последна сметка в първия случай е приета аксиомата за избора, а във втория – не. В първия случай можем да останем в рамките на хипотезата за скритите параметри по един особен начин, който да я примирява с положенията и експериментите на квантовата механика, и на причинността в смисъла на фон Нойман, докато във втория случай бихме постулирали като най-изначална случайността и следващата оттук интерпретация на квантовата механика бихме могли да наречем радикално Копенхагенска в смисъл, че се явява краен вариант на последната.

Основа за сравнението на метаравнище за двете интерпретации може да бъде концепцията на Рамзи за истината, като при тази предпоставка би се оказало, че нещата в края на краищата опират до сравняването на субективна и обективна вероятност и съответните им „истини" в смисъла на Рамзи.

Ако приемем съществуването на оператора $\boldsymbol{Z}$ по начина, по който е дефиниран да получава стойност или „$\mathbf{1}$", или „$\mathbf{0}$", то разпределението на вероятността $\boldsymbol{P}$: $\boldsymbol{q} \overset{\boldsymbol{P}}{\rightarrow} \|\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{q})\|^{2}$ е статистика на елементарните събития, всяко от които представлява прилагане на проекционния оператор $\boldsymbol{Z}$ към вълновата функция на квантовия обект $\boldsymbol{Z}$. В този случай в качеството на скрит параметър можем да разгледаме времето, каквото предложение вече беше направено в друг, но свързан с настоящия контекст. До противоречие с квантовата механика не се достига, тъй като този скрит параметър е невъзпроизводим. Не е възможно да повторим измерването, за който и да е момент $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{\mathbf{0}}$.

Пред нас се открива една твърде особена връзка между парадокса на Лъжеца, този на Стрелата и сентенцията, приписвана на Хераклит: „Не можеш два пъти да влезеш в една река":

Времето и оттук, физическата величина на времето, забранява самореференциалното прилагане, оттук и парадоксите, свързани с последното, следователно и каквато и да било неразрешимост, на следното основание:

„Аз лъжа” не може да се отнесе за миналия момент, в който е изказано, затова самореференциалната употреба е забранена.

„Стрелата не е тук” не може да се отнесе към настоящия момент, вече отминал, в който е изказано твърдението, т.е. пак не се допуска самореференциалната употреба.

Чрез времето в качеството на аргумент за всяка функция на физическа величина се постулира, че тя може да се нареди добре[75] и с това също както аксиомата за избора, така и всеобща валидност на принципа на причинността. Ако се приеме следният уточнен вариант на аксиомата за избора, за който вече стана дума, че безкраен избор може да се направи, но не може да се повтори, респ. че всяко множество може да се нареди добре, но не и втори път по същия начин, то подходите на Айнщайн и на Бор към квантовата механика се оказват примирени по следния начин:

В квантовата механика съществува скрит параметър, който определя причинно дисперсията на физическите величини статистически. Това съществувание може обаче да се твърди единствено на основата на аксиомата за избора и следователно този параметър не може да се посочи, респ. не може да се построи (не е конструктивен). Много деликатен в логическо (а и в онтологическо) отношение е въпросът дали като такъв не може да се приеме физическата величина на времето.

За да го обсъдим, да се върнем към това, че предпоставка за разглеждането на вероятностното разпределение $\boldsymbol{P(q)}$ в качеството на статистика, използвайки проекционния оператор $\boldsymbol{Z}$, е съществуването на последния. На свой ред това изискваше обектът $\boldsymbol{Z}$ да бъде отъждествен с пълната съвкупност от едновременно измерими физически величини. За нас сега остава въпросът какво да правим, ако обектът $\boldsymbol{Z}$ (нека сега го означим със $\boldsymbol{Z'}$) се отъждестви с дуалната съвкупност от едновременно измерими величини и следователно с коя да е друга, различна съвкупност едновременно измерими величини. За да продължат да бъдат примирени подходите на Айнщайн и на Бор към квантовата механика, е необходимо: $\boldsymbol{Z} \neq \boldsymbol{Z'}$. Един начин, вече предложен и експлоатиран в настоящата работа, е да се интерпретира последната нетъждественост чрез двойно време, да речем на квантовия обект

---

[75] Става дума фактически за прилагане на две сходни и в съществените аксиоматики еквивалентни позиции, а също така и с аксиомата за избора: ‘всяко множество може да се нареди добре’ и ‘винаги съществува декартово произведение между две множества’.

и на уреда, което да приема в общия случай напр. комплексни стойности. Такъв подход е тясно свързан с посоченото уточнение на аксиомата за избора, което нататък също така ще бъде означавано като аксиома за неповторимия избор, или просто „неповторим избор", респ. в другия случай – „повторим избор".

Ситуацията „$\boldsymbol{Z} \neq \boldsymbol{Z}'$ " обаче може да се тълкува и на основата на повторимия избор като тогава би се избягнала или пропуснала възможността явленията на сдвояване да се отъждестяват с гравитационните, бидейки иначе обединявани и разграничени съответно в квантовия и в макроскопичния свят.

Най-прецизното, което може да се каже, относно твърдението, че физическата величина на времето е (единственият) „скрит параметър" в квантовата механика, е, че то е неразрешимо, но приемането на едната или другата алтернативна хипотеза в качеството на аксиома води до принципно различни теории, които *засега* са експериментално непроверими (най-малкото заради това, че още не са формулирани експлицитно). Неразрешим е също така проблемът как да се разбира „засега": само по отношение на човешкото познание или по отношение на самото състояние на нещата (зависещо от действията ни в настоящия или бъдещи моменти, т.е. от нашия избор). Току-що формулираната позиция не е задължително да се осмисля в термините на интуиционизма и неговата логика. По-нататък ще посветим на тези въпроси немалко страници и усилия.

Нека сега, постепенно приближавайки се към подхода на Рамзи към истината, да приемем за неразрешими всички твърдения, които не са едновременно разрешими с дадените и за разрешими всички, които са едновременно разрешими с дадените. Обиграният в „козните" на самореференциалността читател, предполагам, вече е „настръхнал" от такова определение за неразрешимост: „неразрешими са всички твърдения, които не са едновременно разрешими с дадените"; навярно тогава биха съществували твърдения, които за които няма да може да се каже дали са разрешими или неразрешими, т.е. самото твърдение за неразрешимост не е (винаги) разрешимо.

Рамзи пише:

> *Но преди да продължим по-нататък с анализа на съждението е необходимо да кажем нещо относно истината и лъжата* [falsehood]*, за да покажем, че няма отделен проблем за истината, а само лингвистична среда* [middle].

> *Истина и лъжа са приписани първично на пропозициите. Пропозициите, на които те са приписани могат да бъдат или експлицитно дадени или описани. Да предположим сега, че е експлицитно дадена; тогава е очевидно, че 'Истина е, че Цезар е убит', не значи повече отколкото, че Цезар е убит, и 'Лъжа е, че Цезар е убит' значи, че Цезар не е убит. Има фрази, които използваме за подчертаване или по стилистични причини, или за да посочим позицията, заемана от твърдението в нашия аргумент. Така също можем да кажем, „Факт е, че той е убит" или „Че той е убит, е обратно на факта"* (Ramsey 1978: 44).

И малко по-нататък:

> *Когато се въведат всички форми на пропозиция, анализът е по-сложен, но не е съществено различен; и е ясно, че проблемът не е що се отнася до природата на истината и лъжата, а що се отнася до природата на съждението или твърдението…* (Ramsey 1978: 45).

В работата на Рамзи „Истина и вероятност" (1928) „теорията на вероятността е взета като клон на логиката, логиката на частичната убеденост и незаключителния аргумент" (Ramsey 1978: 59). За целта той въвежда „Степени на убеденост" (68-86), показва различни начини за тяхното измерване като непрекъсната физическа величина и предлага аксиоматика. По-нататък разграничава логика на непротиворечивостта, относно която е валидна неговата концепция за истината, която не случайно бива наречена впоследствие редундантна концепция за истината, тъй като предикатът 'истинен' (респ. 'неистинен') е просто излишен (не добавя нищо в повече), от *логика на истината*, която отъждествява с индуктивната логика: на всяко съждение може да се припише степен на убеденост в интервала на крайните стойности между 'истина' и 'лъжа'. Чрез противопоставянето между т. нар. субективна и обективна вероятност, концепцията на Рамзи се описва в едри щрихи така:

Първата е предмет на логиката и чрез понятието „степени на убеденост" може да се придаде съществен смисъл на това за истина, докато втората – на физиката и статистиката.

> *Наистина общата разлика на мненията между статистиците, които в по-голямата си част приемат честотната теория на вероятността, и логиците, които най-вече я отхвърлят, се отнася вероятно до това, че двете школи обсъждат реално различни неща и че думата 'вероятност' е използвана от логиците в един смисъл, а от статистиците в друг* (Ramsey 1978: 59).

Направеното малко по-горе разглеждане, от една страна, и отъждествяването на „логиката на истината" с индуктивната логика от Рамзи, от друга, ни позволява едновременно да разграничим и обединим „логическото" и „статистическото" понятие за вероятност чрез дискусията около физическата величина на времето, в т.ч. и в квантовата механика. Към нейния „портрет" бихме могли да добавим следния щрих:

На основата на предстоящата скоро да се обсъди Скулемова относителност (при валидност на аксиомата за избора) между канторовските видове безкрайност и дори между крайно и безкрайно, физическата (непълната) и математическата (пълната) индукция могат да се отъждествят чрез следното съответствие $\boldsymbol{V}$: при предпоставките за валидност за начално (число $\overset{\boldsymbol{V}}{\leftrightarrow}$ момент от време) и за (функцията наследник $\overset{\boldsymbol{V}}{\leftrightarrow}$ причинна връзка) на дадено твърдение следва неговата истинност за (всички числа, по-големи или равни на началното $\overset{\boldsymbol{V}}{\leftrightarrow}$ началния и всички следващи моменти от време). Обратно, начинът и степента на отхвърляне на причинната връзка в квантовата механика заедно с валидност на аксиомата за избора, която гарантира съществуването на '$\boldsymbol{V}$', би въздействало – което е в подкрепа на нашето т. нар. дуалистично питагорейство – на може би най-продуктивната в пеановската аритметика аксиома, тази за пълната индукция.

Да се върнем отново към теоремата на Льоб за една коректна и пълна теория, за която би било валидно, че от това (1"), че от аксиомите на Пеано за аритметиката следва, че дадено твърдение има Гьоделов номер, следва тогава и само тогава (2"), когато от твърдението за неговата истинност следва самото то.

Съществува ли обаче коректна и пълна теория? Според теоремата на Гьодел, не и ако „съдържа" аритметиката на Пеано, смисълът на което е, че за доказуемите в нея твърдения съществува Гьоделова номерация и тя е взаимно-еднозначна: за всяко доказуемо твърдение точно един Гьоделов номер.

Нека отбележим нещо много важно: първо, за *хипотетичната коректна и пълна теория*, щеше да е в сила, че всички твърдения, които следват от себе си, са доказуеми. Обратно, твърденията, които не следват от себе си, няма да бъдат доказуеми *в нея*.

Малко по-нататък, чрез теоремата (1936) на Герхард Генцен ще покажем, че обратно на общоприетия предразсъдък, не ако отслабим аксиоматиката на Пеано, а ако я усилим[76], по начин, достатъчен, за да бъде включена трансфинитната индукция в нея, можем да получим лелеяната, досега хипотетична *коректна и пълна теория*, относно която ще е валидно, че всички твърдения, които следват от себе си, ще бъдат доказуеми в нея. Може да се предположи, че твърденията, които не са доказуеми в нея са логически допълнителни в смисъла на фон Нойман с доказуемите в нея; тоест, съждение за валидност на недоказуемите твърдения не може да се твърди заедно със съждение за валидността на доказуемите твърдения.

Нека отбележим още нещо много важно: второ, нека за тази коректна и пълна теория да допуснем, че не е пълна, например озадачени от факта, че сме получили теория, която не се включва в условията на първата теорема на Гьодел за непълнотата не като е отстранена, а като е *добавена* аксиома към аксиоматиката на Пеано (а именно в случая – за трансфинитната индукция); тоест, че твърденията, които не следват от себе си, всъщност следват от себе си и също така са доказуеми, но ако се добавят допълнителни, неизвестни, да ги наречем с подчертан намек *скрити* аксиоми. С други думи, да разгледаме наличието на недоказуеми твърдения в тази – за нас вече само привидно – коректна и пълна теория като свидетелство за нейната непълнота (без да поставяме под въпрос нейната коректност). Очевидно по този начин ще възпроизведем и пренесем несъгласията и съмненията на Айнщайн относно квантовата механика на един логически език. По-нататък с помощта на

---

[76] По този начин условията на първата Гьоделова теорема за непълнотата се обезсилват, тъй като изискването да съдържа аритметиката на Пеано в действителност е много силно и ненужно: не се изисква като нейно условие. То се използва като общоприет (и неточен) прост израз вместо твърде сложните за описание, но много по-слаби условия. *Условието, което всъщност „се атакува", т.е. реално се отслабва с добавянето на трансфинитната индукция* е да съществува *взаимно еднозначно* съответствие между доказуемите твърдения и техния Гьоделов номер. Много грубо казано, сега за всяко твърдение съществуват поне два Гьоделови номера: един финитен и един трансфинитен, чрез което теоремата престава да бъде в сила за този случай, тъй като той не влиза и не се поддава на включване в рамките на нейните условия. Разбира се, това е само необходимо, но не и достатъчно условие за валидността на теоремата на Герхард Генцен, каквото обаче също е налице.

теоремата на Кохен-Шпекер ще покажем, че ако „скритите аксиоми" са независими от предполагаемо непълната теория, те не могат да следват от себе си, или с други думи, да имат определена истинностна стойност. Също и обратно, ако те следват от себе си, непременно са зависими от набедената за непълна теория. Следователно съществува доказателство от противното, че теорията е пълна.

Сморински (1983: 34) в друг, макар и косвено свързан с настоящия контекст, отбелязва, че теоремата на Льоб представлява обобщение на теоремата за непълнотата. На пръв поглед изглежда това да не е така: тя е само паралелна; докато теоремата за непълнотата визира твърдения, които не са доказуеми, то теоремата на Льоб – такива, които са доказуеми. Тя обаче е обобщение в смисъл, че е валидна както за твърдения в непълни аритметични системи (в съответствие с първата теорема на Гьодел за непълнотата), така и за пълни аритметични системи (в съответствие с теоремата на Генцен и други подобни).

В рамките на настоящата работа въпросът за пълнотата на аритметиката (например с аксиоматиката на Пеано) има подчинена роля, по отношение на въпроса за пълнотата на квантовата механика, от който собствено покълва и израства дисциплината „квантова информация". Въпреки това обаче е налице специфична концепция за пълнотата в аритметиката, която съответства и произтича в известна степен от опровергаването, включително и експериментално, на предложената от Айнщайн хипотеза за непълнотата на квантовата механика.

Такъв подход към евентуална пълнота на Пеановата аритметика се основава на няколко изходни положения:

1. От четирите типа „неподвижни точки" на предиката, представящ Гьоделовия номер, т.е. от четирите възможни типа пропозиции, твърдящи или отхвърлящи собствената си доказуемост, наричани самореференциални, само споменатите вече изречения на Хенкин – като следствие от теоремата на Льоб – са доказуеми и следователно разрешими (Люцканов 2008: 75). Именно тяхното обсъждане следва да се постави в основата на пълнотата на аритметиката.

2. Следва да се търси доказателство за пълнота не на самата Пеанова аритметика, защото: а) това е изключено от втората теорема на Гьодел за непълнота, а да се обсъжда нейна некоректност е в най-добрия случай абсурдно; б) евентуално доказателство на пълнотата на аритметиката с помощта на някаква метатео-

рия не решава големия въпрос, предположен от Хилберт относно аритметиката, за самообосноваващата се и в този смисъл окончателна или изначална теория.

3. Подходът на квантовата механика подсказва аритметиката на Пеано да се допълни с неин дуален двойник, при което обаче да се изключи едновременното разглеждане на двете чрез едно „аритметично" съотношение за неопределеност. В качеството на такава изглежда най-естествена кандидатурата на трансфинитната аритметика. Крайното и безкрайното са очевидно допълнителни: всички крайни числа се израждат до едно единствено – „$\mathbf{0}$" – от „гледна точка" на трансфинитните числа и операциите с тях; аналогично трансфинитните се израждат до символа „∞" от „гледната точка" на естествените числа.

4. Ако непълнотата се обсъжда като разлика между синтактичната и семантичната пълнота, то изглежда философски обосновано и интуитивно ясно, защо семантично релевантните твърдения, за които „не достига" „Гьоделов синтаксис", са именно относно *актуалната безкрайност*, с други думи, които са твърдения – или те, или техните отрицания са теореми – от една трансфинитна аритметика. Например, най-прочутите примери, обсъждани още от Гьодел (Gödel: 1940) – аксиомата за избора и обобщената континуум-хипотеза – явно се отнасят към актуалната безкрайност. Грубо казано, истинните твърдения относно актуалната безкрайност, не могат да получат Гьоделов номер в резултат на операции в една финитна аритметика и остават „неразрешими".

5. Макар и проблемите със самообосноваването на математиката да се експлицират – а според някои: и да възникват – в резултат на широкото и непрецизно навлизане на актуалната безкрайност посредством Канторовата теория на множествата, понятието за число лесно се дефинира посредством нея[77] и така идеята за актуална безкрайност, се оказва вече косвено включена в аритметиката.

---

[77] А именно като класа от крайни множества, които чието кардинално число по определение съвпада с числото $\boldsymbol{n}$, подлежащо на дефиниране. Обаче същото число във всяка една пеановска аритметика се дефинира чрез броене, т.е. чрез $\boldsymbol{n}$ (респ. $\boldsymbol{n-1}$) пъти прилагане на операцията наследник по отношение на първия елемент. В аксиоматиката Цермело-Френкел 'естествено число' може да се дефинира и по двата начина; вторият е видоизменен: отъждествяване на $\boldsymbol{n}$-тия ($\boldsymbol{n-1}$-ия) член в редицата, постулирана чрез аксиомата за безкрайността, с поредното естествено число. Обратно: ако ни е необходимо кардиналните и ординалните числа да не са взаимообвързани, съответно – преброените части да не са обвързани с целостта на своята съвкупност строго едно-еднозначно, трябва в една или друга степен да ревизираме тази аксиоматика.

6. Съществува прост начин да се получи трансфинитния „дуален” двойник на Пеановата аритметика, а именно като се добави аксиомата за трансфинитната индукция (макар и двойник, в редица отношения подлежащ на усъвършенстване).

7. Налице е теоремата на Генцен (1936), с която предстои накратко да се запознаем – известна и обсъждана също така и от Гьодел (Gödel 1938: 107-111) – и която коректно извежда пълнотата и непротиворечивостта, т.е. консистентността на Пеановата аритметика, както и собствената си консистентност.

Ако се върнем към Гьоделовата гледна точка, то въвеждането на актуална безкрайност в аритметичната система е „противоречиво” и това е цената, на която – в пълно съгласие с първата теорема за непълнотата – е получена пълнота, с други думи, по недопустим начин.

Преминавайки към теоремата на Герхард Генцен и съответно вече към неговата позиция, трябва да се изтъкне, че използваното от мен позоваване на актуалната безкрайност е нерелевантно, тъй като той определя себе си като конструктивист и дори като финитист:

> *Ако трябва да изразим същността на конструктивисткия възглед като колкото е възможно по-общ принцип, бихме го формулирали както следва: „Нещо* безкрайно *не трябва никога да се разглежда като* завършено, *а само като нещо* ставащо, *което може да се изгражда конструктивно все по-нататък и по-нататък* (Gentzen 1969: 225).

На практика и технически това означава отказ не от понятието за безкрайност, а от това за актуално безкрайно множество и оперирането с такова. От друга страна обаче, по този начин се имплицира и дори неявно се обосновава принципът на трансфинитна индукция.

> *Тази индукция не е нищо повече от разширение на правилото за пълна индукция от естествените числа към трансфинитните ординални числа. Пълната индукция може, както е добре известно, да бъде формулирана както следва. Ако една пропозиция е в сила за числото* $\mathbf{1}$ *и ако е доказано, че от нейната валидност за всички числа, предшестващи числото* $\boldsymbol{n}$, *следва нейната ва-*

> *лидност за n, тогава пропозицията е в сила за всички естествени числа. Ако тук заместим 'естествено число' с 'трансфинитно число', получаваме правилото за трансфинитна индукция. Можем лесно да се убедим в коректността на това правило за първоначалните сегменти на трансфинитна числова последователност. Да предположим, че пропозицията важи за числото $\mathbf{1}$ и е било доказано по-нататък, че ако пропозицията е в сила за всички числа, предшестващи определено ординално число, то тя е в сила за това ординално число. После се аргументираме така. Пропозицията е в сила за числото $\mathbf{1}$, оттук следователно за числото $\mathbf{2}$, оттук следователно за $\mathbf{3}$ и т.н., оттук за всички естествени числа. Следователно тя е в сила за числото $\boldsymbol{\omega}$, точно защото е в сила за всички негови предшественици. По същата причина е в сила за числото $\boldsymbol{\omega} + \mathbf{1}$, оттук следователно за $\boldsymbol{\omega} + \mathbf{2}$, и т.н., най-накрая $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{2}$; и съответно, показваме нейната валидност по-нататък за $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{3}$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{4}$ и т.н., най-накрая следователно за $\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{2}}$. Продължавайки по този начин, можем да се убедим във валидността на правилото за трансфинитна индукция чрез изкачване стъпка по стъпка в последователността от трансфинитни ординални числа. Колкото числата стават по-големи, по общо признание, ситуацията започва да изглежда доста усложнена, но принципът винаги остава същият* (Gentzen 1969: 231).

Този дълъг цитат си заслужаваше, тъй като адресира почти всички основни моменти на нашето разглеждане:

1. Първо: твърде трудно е да се приеме, че принципът на трансфинитна индукция не използва „срамежливо" и неявно понятието за актуална безкрайност, както впрочем още и този за пълната индукция. В противен случай, как можем да твърдим, че една пропозиция е в сила *за всички* естествени числа[78]. По-нататък,

---

[78] Собствената позиция на Герхард Генцен е противоположна и експлицитно е изложена по следния начин: „В елементарната теория на числата се натъкваме на безкрайността в най-простата ѝ форма, а именно под формата на безкрайната последователност от естествени числа. Според актуалисткта интерпретация, можем да разглеждаме тази последователност като завършена безкрайна тоталност, докато конструктивиската интерпретация ни позволява да кажем единствено това: можем да напредваме в числовата последователност и винаги да построяваме нови числа, но не трябва да говорим за завършена тоталност. Такава пропозиция като всички естествени числа имат свойството $\mathfrak{B}$, например, има във всеки от случаите

как можем да преминем към числото $\boldsymbol{\omega}$ освен като неявно се обосноваваме чрез множеството от *всички* негови предшественици. И съмненията ще продължат при всеки преход от подобен род.

2. Все пак можем да внесем определена яснота, ако разграничим обратими от необратими преходи и заявим, че всички преходи от типа на визираните в т. 1 са само в процес на ставане и поради това са винаги обратими. Напротив преходът към броя елементи на едно крайно множество, който може да се разглежда като завършен, е необратим. Такова тълкуване е съвсем приемливо от гледна точка на квантовата информация и възможно плодотворно във връзка с теорията на квантовия компютър. Действително, всяка измерена физическа величина е крайно число, процесът на измерване е необратим, а терминът „потенциално”, „обратимо” относно нейното „съществуване” добре характеризира главното в $\boldsymbol{\Psi}$-функцията.

3. Принципът на трансфинитната индукция разглежда крайното и безкрайното напълно еднообразно, като аксиомите на Пеано се обобщават по един – бих го нарекъл многозначително – *самореференциален* начин. Наистина, лесно можем да получим ординалните числа от аксиомите на Пеано, като заменим първия елемент – „$\mathbf{1}$” в оригиналната формулировка или „$\mathbf{0}$” в повечето съвременни – с цялата Пеанова аритметика. Тогава, за да преминем към „$\mathbf{2}$” (респ. „$\mathbf{1}$”), обаче в качеството ѝ на следващата единица, т.е. към следващия първи елемент, обичайно означаван като първото трансфинитно число $\boldsymbol{\omega}$, трябва да пробягаме цялата изходна Пеанова аритметика с нейния обичаен първи елемент. За да получим първи еле-

---

донякъде различен смисъл. Според актуалисткaта интерпретация тя значи: свойството $\mathfrak{B}$ важи за всяко число, което може да бъде някак отделено от пълната тоталност числа. Според конструктивисткaта интерпретация можем да кажем единствено това: независимо колко далеч сме напреднали в образуването на нови числа, свойството $\mathfrak{B}$ продължава да е в сила за тези нови числа. На практика, тази разлика в интерпретацията е тук, обаче, несъществена. Една пропозиция относно всички естествени числа е законно доказана чрез пълна индукция, и този извод изглежда да е в хармония също така и с конструктивисткaта интерпретация; тъй като пълната индукция се основава преди всичко на идеята за *напредването* ни в числовата последователност” (Gentzen 1969: 225). Изглежда вън от всякакво съмнение, че за целите, които си поставяме в настоящата работа, трябва да се облегнем на актуалисткaта интерпретация. За да я разгледаме безкрайността като дуална на крайността, неминуемо трябва да приемем съществуването ѝ наред с крайността на собствено основание. Към това може да се прибави и собствено съществуване за целостта, от каквото изглежда съществуването на безкрайността може да се изведе. На безкрайността и на целостта може да се гледа като на единичен обект, но не се ли прави това и когато се присвоява единичният символ $\boldsymbol{\omega}$ на безкрайно ординално число?

мент $\boldsymbol{\omega^2}$, трябва да повторим операцията на самореференциално заместване. Ако приложим $\boldsymbol{\omega}$ пъти самата операция на самореференциално заместване ще получим поредния качествено нов първи елемент, в случая $\boldsymbol{\omega^\omega}$. Означавайки като операция $\boldsymbol{\Omega}$ прилагането $\boldsymbol{\omega}$ пъти на самата операция по самореференциално заместване на единицата и оставим на интуицията на читателя да продължи до евентуалния смисъл на $\boldsymbol{\Omega^\Omega}$, ние все пак ще достигнем до „дъно" при пропадането в тази на пръв поглед „лоша" безкрайност, гарантирано от съществуването на ординала $\boldsymbol{\varepsilon_0}$, такъв че $\boldsymbol{\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0}$, с други думи $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ може да се определи като граница (Gentzen 1938: 38-39; 1969: 278).

По друг начин ординалът $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ може да се определи като най-малкия ординал, който изисква $\boldsymbol{\omega}$ символи в своята Канторова нормална форма, за която става дума малко по-долу.

Примерът със „самореференциалното влагане на Пеановата аритметика в своята единица" е твърде поучителен и в друго отношение. Очевидно така строим множества в нарушение на аксиомата за фундирането. Все пак обаче, въпреки че сме си разрешили безкрайното влагане на елементи, едно „много по-дълбоко дъно" на безкрайното влагане някак си съществува, гарантирано от ординала $\boldsymbol{\varepsilon_0}$. Така се разкрива една същност на аксиомата за фундирането, която насочва – може би произволно – експанзията на безкрайността „навън". Естествен тогава е въпросът дали експанзията на безкрайността „навън", чрез аксиомата (в зависимост от аксиоматиката, възможно – теоремата) за винаги съществуването на множеството от подмножества на дадено множество, от една страна и от друга, „навътре" – аритметично демонстрирано чрез „самореференциалното влагане на единицата" или теоретико-множествено формулирано чрез една огледална аксиома за винаги съществуването на множество, такова че неговото множество от подмножества съвпада с предварително зададено множество – са еквивалентни, както и сходният проблем за безкрайност от смесена форма: „навън" и „навътре".

4. Еднообразната трактовка на крайното и безкрайното в принципа за трансфинитна индукция означава също така, от една страна, винаги еднообразно броене – няма разлика между функцията „наследник" в Пеановата аритметика и аналогичната при трансфинитната индукция, – а от друга, както изрично подчертава

и Генцен, в принципа на индукцията: пълна, „финитна" или „трансфинитна". Ако в граничен преход преминем към едно континуално „броене", то ще получим физическата величина „време", с което цитираното вече, донякъде озадачаващо като форма твърдение на Паули, че времето е само число, се разкрива в нов, много по-дълбок смисъл. С броенето, аналогично на неговия физически двойник времето, е спрегнато фундаменталното свойство на индукцията, която – също както операторът, съответстващ на величината на енергията при прехода от квантов обект към макроуред – определя какво означава „тъждествено" при трансфинитния преход. Заедно с това обаче, едно в този смисъл „тъждествено" свойство не може да се разглежда заедно финитно и трансфинитно: заставайки на една от тези две гледни точки, другата губи определеност. С това „дуално питагорейско" обсъждане на времето – броене и енергията–индукция – вече се намеква за фундаментално онтологичния характер на някои свойства на математическия формализъм на квантовата механика, например дуалността (теоремата на Рис за хилбертови пространства).

5. Ако се използва Канторовата нормална форма за представяне на ординалните числа $\boldsymbol{\alpha}$, а именно:

$$\boldsymbol{\alpha = \sum_1^k \omega^{\beta_i} . c_i} \ , \qquad (57)$$

където $\boldsymbol{c_i}$ са естествени числа, а $\boldsymbol{\beta_i}$ са ординални числа, става очевидно че множеството трансфинитни преходи могат да се сведат до един единствен – този при първия трансфинитен преход към $\boldsymbol{\omega}$, след това повтарян чрез еднообразно прилагане на Пеановата аритметика до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$. Откроява се дуалният характер на аритметичната система, използвана от Генцен, чиито „Ин" и „Ян" са естествените числа и трансфинитните ординали. Между еднообразното броене и в двете дуални области е разположен трансфинитния преход, аналогичен на дискретен скок в непрекъснатостта при физичния, континуален двойник. Принципът на индукцията еднакво валиден и за двете части, ги свързва.

6. Добре известно е, че Канторовата нормална форма може да се разгледа и като своеобразна бройна система с основа $\boldsymbol{\omega}$. По-горе, по подобен начин беше представена $\boldsymbol{\Psi}$-функцията: като число, представено в бройна система с основа

безкрайност, обаче с комплексни „цифри” и също така безкрайна „основа” от вида $\boldsymbol{e^{i\omega}}$. Чрез последното безкрайността на монотонно нарастващото броене е преобразувана в безкрайното повтаряне или разгъване на вълнови процес. В тази връзка е уместно да обърнем внимание на теоремата на Рис – Фишер, поставяща знак на равенство между интегрируемостта (изискваща крайност) на една функция и сходимостта на нейното Фурие представяне (като вълнови процеси с дискретно нарастваща честота), с други думи, донякъде афористично казано, *крайността е свойство, което може да бъде пренесено в безкрайността* под формата на сходимост на Фурие-представянето (в граничен преход: вълновите процеси с по-голяма честота, имат по-малка амплитуда). С цялото това разглеждане трансфинитните ординали, или по-общо казано – безкрайността, се съпоставя с вълновите процеси, вълново-корпускулярният дуализъм на квантовата механика се тълкува чрез и интерпретира в дуализма на крайно и безкрайно.

Другата отлика е, че при прехода от Канторовата нормална форма към $\boldsymbol{\Psi}$-функцията, и двете в качеството им на числа в бройна система с основа безкрайност, и при „цифрите”, и при „основата” се осъществява комплексна континуализация, т.е. преход от множеството на естествените числа към континуума на комплексните числа. На валидността до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ (т.е. на по-малкия от изброим брой членове в Канторовата нормална форма) съответства изброим базис за хилбертовото пространство на $\boldsymbol{\Psi}$-функциите[79] . Остава открит въпросът доколко посочените отлики са съществени относно проблема за пълнотата (респ. непълнотата).

7. Ако въз основа на разглеждането в предната точка (6) започнем да мислим за трансфинитните ординали като за квантови обекти, то те биха съответствали на мегафизическите обекти спрямо измервателните макроуреди на човека. Вече можем свържем поставения в т. 3 въпрос за еквивалентността (или нейните условия) между безкрайност „навън” (съответстваща на мегаобектите) и безкрайност „навътре” (микрообектите). Идеята за подобна еквивалентност или поне подобност на разглеждането се промъква чрез употребата на „квантов обект”, както по отношение на ‘микро-обектите’, така и по отношение на ‘мега-обектите’. Съществен прецедент ни дават не само философски разглеждания (като например това на

---

[79] Оттук може да се насочим към сепарабелност на хилбертовото пространство в качеството му на Хаусдорфово.

Николай от Куза), но и *обратната пропорционалност* на актуално безкрайно малките и актуално безкрайно големите величини в нестандартния анализ.

8. Като връзка с последващото изложение и цитати да обърнем внимание и на една особена стратегия към въпроса за пълнотата в аритметиката, вдъхновена от квантовата механика. Става дума за дуално взаимно обосноваване на аритметиката на Пеано и аритметичната система на Генцен, включваща трансфинитна индукция, по-общо казано, за дуално взаимно обосноваване на крайното и безкрайното, всяко от които само по себе си е „непълно” и чрез тази своя непълнота предполага и изисква противоположното. От системата на Генцен в качеството на метатеория аритметиката на Пеано е пълна и непротиворечива, както и обратното, в качеството на метатеория аритметиката на Пеано обосновава трансфинитната индукция до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ както пълнотата и непротиворечивостта на системата на Генцен. Вместо йерархичен и безкраен, изключващ окончателното обосноваване преход към метаравнище, равнището и метаравнището са просто дуални, идемпотентни, всяко встъпва в качеството на метаравнище (респ. на негово обектно равнище) по отношение на другото. Така „лошата” безкрайност на обосноваването се избягва и се заменя с дуално обосноваване. Равнището и метаравнището са в отношение на допълнителност, не едновременно изцяло дадени, всяко едно от тях разкрива едно и също състояние на нещата, но в различен аспект.

Такава концепция може да бъде продължена и към философията изобщо, доколкото тя е възможно да се разглежда като метаравнище на обсъждане по отношение на онова, ***на*** което се явява философия: с други думи, напр. във „философия на физиката” ‛философия’ и ‛физика’ могат да се разглеждат като допълнителни, един подход служещ като методология на настоящата работа.

Бих искал тъкмо в тази връзка да спомена идеята на Генцен за трите равнища на математиката според три йерархични типа безкрайност:

> *Първо ще дам* класификация на математиката *в три отчетливи равнища според степента, в която понятието за „безкрайно” се използва в различните клонове на математиката. Първото и най-ниско равнище се представя от елементарната теория на числата, т.е. теорията на числата, която не използва техники от анализа. Безкрайното се случва тук в най-простата си форма. Въвежда се безкрайна последователност от обекти, в този случай естествените*

> *числа. Няколко други клона на математиката са логически еквивалентни на елементарната теория на числата, а именно всички онези теории, чиито обекти могат да се поставят в съответствие едно-към-едно с естествените числа и които следователно са изброими* (Gentzen 1969: 223).

Обсъждането на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията следва да отнесем към второто равнище, както ги скицира Генцен. С разглеждането в настоящата глава се установява известен паралелизъм между първото и второ равнище:

> *Второто равнище на математиката се представя от* анализа. *Доколкото се разглежда приложението на понятието за безкрайност, същностно новата черта тук е, че сега индивидуалните обекти на теорията могат сами да бъдат безкрайни множества. Реалните числа, т.е. обектите на анализа, са преди всичко дефинирани като безкрайни множества, като правило – за безкрайни последователности от рационални числа* (Gentzen 1969: 223-224).

Трансфинитна индукция до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$, както впрочем и изброимо безкрайномерното хилбертовото пространство от $\boldsymbol{\Psi}$-функции, следва да се разположи между второто и третото равнище. То включва безкрайни множества от безкрайни множества, и то дори безкраен брой пъти и т.н., но това не е всяка мислима безкрайност, тъй като тя е ограничена съответно до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ и до изброим базис на хилбертовото пространство:

> *С третото равнище на приложение на понятието за безкрайност, най-накрая, се сблъскваме в общата теория на множествата. Тук се допускат като обекти не само естествените числа и други можещи да се опишат като крайни количества, както първото равнище, също и безкрайни множества от тях, както второто равнище, но в добавка безкрайни множества от безкрайни множества и отново множества от такива множества и т.н., в пределно мислимата общност* (Gentzen 1969: 224).

Изложената концепция на Генцен за трите равнища на безкрайност в математиката, която има по-скоро философски характер, за нас е важна, тъй като задава гледна точка, от която може да се постави съвсем нов въпрос: не този за някакъв нов вид непълнота, макар че и така може да се интерпретира, а *за математиката* – а при нашия питагорейски подход, разбира се, – *и за физиката отвъд пълнотата*. Използвайки необичайната стратегия на дуално обосноваване, показваме, че финитната аритметика на Пеано до $\boldsymbol{\omega}$ заедно с трансфинитната на Генцен до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ взаимно се обосновават като всяка от двете встъпва в качеството на метатеория по отношение на другата.

Въвеждането на такава пълнота беше вдъхновено от квантовата механика, при която пълнотата може да се обсъжда като доказана и експериментално проверена за модели с изброимо-мерно хилбертово пространство.

Поне според съвременните ни знания и разбиране и светлината на непоколебимите ограничения, налагани от теоремите на Гьодел за пълнотата, „по-силна пълнота" от дуалната едва ли е възможна. Можем да останем в сигурното пространство до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ или съответно до хилбертово пространство с изброим базис и да се наслаждаваме на уюта в реално пълни математически и физически теории. Отсъства логически мотив за крачката отвъд. Но въпреки това такава може да се направи по силата на човешкото любопитство и вечна неудовлетвореност.

Всъщност тя е направена още от Айнщайн (заедно с Подолски и Розен) през 1935 г. в стремежа му да демонстрира формалната непълнота на квантовата механика. Квантовата механика формално не е непълна, напротив – както видяхме – тя може да встъпи в качеството на *образец на пълна теория* и да индуцира решаването на аналогични проблеми по обосноваването на математиката. Но тя може да се разгледа непълна в един друг смисъл, а именно да се премине отвъд единственото, универсално и окончателно хилбертово пространство с изброим базис на квантовата механика към две и повече хилбертови пространства, неминуемо изисквани от математическите модели, използвани за изучаване на явленията, обект на квантовата информация. В метаматематиката на това съответства крачката отвъд $\boldsymbol{\varepsilon_0}$.

На нея не сме принудени от несъвършенство на теорията, тя е наш доброволен избор. Подобна смелост веднага се отплаща и чрез самата дисциплина квантова информация, нейните приложения и зашеметяващи перспективи и чрез концепцията за „дуално питагорейство", обсъждана в настоящата книга, разкриваща много по-дълбоко единство на физика и математика. Отвъд ε_0 заставаме на гледната точка, от която те вече могат да се разберат като два ипостаса на обща същност.

Може да се постави въпросът за по-нататъшни точки в безкрайността, аналогични или представляващи ε_0 . Може би по-нататък следват много по-големи и дълбоки обединения, може – напротив – точката ε_0 да е уникална: не сме в състояние да кажем каквото и да било по тази тема, тъй като отсъстват съответният опит и знания.

Да разгледаме също така и въпросът за типа пълнота, наречена тук дуална, по отношение на аритметиката, в светлината на спора между актуалистката и конструктивистката интерпретация на безкрайността, защитавана от Генцен:

> *Ситуацията е различна в случая на* екзистенциални пропозиции. *Пропозицията 'съществува естествено число със свойството* $\mathfrak{B}$*' казва, според актуалистката интерпретация: 'Някъде в пълната тоталност от естествени числа се случва такова число'. Според конструктивистката интерпретация, такова твърдение е, разбира се, без смисъл. Но това не значи, че при тази интерпретация екзистенциалните пропозиции трябва да бъдат отхвърлени напълно. Ако определено число* $\mathfrak{n}$*, за което свойството* $\mathfrak{B}$ *е в сила, може да бъде действително посочено, тогава при тази интерпретация може да се говори за съществуването на такова число; в действителност, екзистенциалната пропозиция сега вече не се отнася до безкрайната тоталност от числа; преди всичко би било достатъчно да се говори само за числата от* 1 *до* $\mathfrak{n}$*. Доказателствата за съществуване, които наистина се случват на практика, са наистина най-вече такива, че действително може да се даде пример. Обаче, доказателства са също така възможни, когато случаят не е този, а именно косвени доказателства за съществуване. Допуска се, че няма число, за което свойството* $\mathfrak{B}$ *важи. Ако това допускане води до противоречие, от всичко това се извежда, че число, за което свойството* $\mathfrak{B}$ *е в сила, съществува. Може тогава да се случи, че ефективна процедура за действително пораждане на такова число е напълно недостижима. Според конструктивистката гледна точка такова доказателство, трябва да бъде следователно отхвърлено* (Gentzen 1969: 226).

Как би трябвало да се решава въпросът за косвените доказателства за съществуване при „дуална пълнота”? Принципът на изключеното трето, на който се основават косвените доказателства за съществуване, се допуска както при финитни, така и при трансфинитни обекти. Не се допуска обаче едновременното му прилагане в пропозиции, отнасящи се едновременно и до финитни, и до трансфинитни обекти. Може да се обобщи: косвени доказателства за съществуване, основавани на принципа за изключеното трето, се допускат като в теорията, така и в метатеорията. Не се допуска обаче в пропозиции, когато те се оказват едновременно приложени.

Въпросът за пълнотата и прилагането на косвени доказателства за съществуване са взаимно неустановими твърдения в смисъла на фон Нойман. Само доколкото нито аритметиката на Пеано, нито трансфинитната аритметика на Генцен поотделно могат да се разглеждат като пълни теории, само дотолкова тези доказателства могат да се прилагат. Разгледани заедно, те се оказват дуално пълни, но такива доказателства вече не могат да се прилагат.

В една друга своя публикация (Gentzen 1938: 19-42; 1969: 252-286) представя „нова версия на доказателството за консистентност”, при „което главното ударение ще бъде поставено върху развитието на *фундаменталните идеи* и върху това да се направи всяка единична стъпка на доказателството толкова *прозрачна*, колкото е възможно” (Gentzen 1969: 19). Параграф 2 е „Скица на доказателството за консистентност”:

> *Следва да се покаже, че всеки извод е консистентен; това може да се перифразира като се каже, че няма извод с празен краен секвент: тъй като от едно противоречие,* $\to\mathfrak{A}$ *и* $\to\neg\mathfrak{A}$*, можем първо да изведем секвентите* $\to\neg\mathfrak{A}$ *и* $\neg\mathfrak{A}\to$ *и от тях, чрез съкращаване, празен секвент. (Обратно, от празния секвент може да се изведе всеки произволен секвент чрез ‘съкращения’)* (Gentzen 1969: 26).

В основата на схемата на доказателство е принципът на математическата индукция, тук по необходимост обобщен до този на трансфинитната индукция:

> *Има смисъл да започнем доказателството на консистентността на прости изводи, после на по-сложни, използвайки консистентността на по-простите изводи и така нататък. Следователно постъпваме индуктивно. По-нататък не е невъзможно повторението на процедурата да изисква проверката на вече* безкрайна *последователност от изводи преди да може да се захванем с по-сложен клас; например, първо изводите, състоящи се само от един секвент, после всички изводи състоящи се от два секвента и т.н. Това в действителност значи, че прилагаме* 'трансфинитна индукция'. *На практика моделът на този анализ е, разбира се, значително по-усложнен от случая на дадения пример* (Gentzen 1969: 26).

Доказателството се извършва на три етапа. Основата на първия етап е стъпаловидното редуциране стъпка по стъпка на по-сложен към непосредствено по-простия извод :

> *1. Консистентността на произволен извод се свежда до консистентността на всички 'по-прости' изводи. Това се прави чрез дефиниране на – еднозначна –* стъпка на редукция *за произволни 'противоречиви изводи', т.е. изводи с* празен секвент като краен секвент; *тази стъпка преобразува такъв извод в 'по-прост' извод със същия краен секвент* (Gentzen 1969: 26).

Много съществено е, че вече на всеки извод вече може да се съпостави, трансфинитно ординално число. Това прави невъзможен „диагоналния довод" на Гьодел, който ще бъде обсъден по-нататък:

> 2. *После се съпоставя* трансфинитно ординално число *с всеки извод и се показва, че в стъпката на редукция разглеждания противоречив извод се превръща в извод* с по-малко ординално число. *По този начин досега само хлабаво определеното понятие за извод получава своя точен смисъл: колкото е по-голямо* ординалното число *на един извод, толкова е по-голяма* 'сложността' *в контекста на доказателството за консистентност* (Gentzen 1969: 26).

Следва да обърнем внимание на особения смисъл, който влага Генцен в термина „финитност” по отношение на трансфинитната индукция. Според принципа на математическата индукция въпросът дали дадено произволно естествено число $\mathfrak{n}$ притежава свойството $\mathfrak{U}$ може да се реши за краен брой стъпки. Според нейното обобщение като трансфинитна същото се отнася и за произволно трансфинитно число $\mathfrak{n}$:

> *3. От това консистентността на всички изводи тогава очевидно следва от ‘трансфинитната индукция’. Извеждането на трансфинитната индукция, което, първо, е доста ‘дискутируемо’ извеждане, не може да бъде предположено в доказателството за консистентност, нито доказано както в теория на множествата. Това извеждане изисква по-скоро отделно обосноваване посредством недискутируеми ‘конструктивни’ форми на извод* (Gentzen 1969: 26).

Самият Генцен изтъква, че неговото доказателство се основава изключително на валидността на трансфинитната индукция, като според неговата привързаност е изключително важно тя да се обоснове „финитно”:

> *Трансфинитната индукция заема специално положение в доказателството за консистентност. Докато всички други форми на извод са от доста елементарен вид, от гледната точка да бъдат ‘финитистки’ – това важи колкото за новото, толкова и за старото доказателство – това не може да се твърди за трансфинитната индукция. Тук имаме следователно* задача от различен вид: *не просто изискваме* да докажем *трансфинитната индукция – това не е особено трудно и е възможно по-различни начини, – но по-скоро да я докажем на* финитистка *база, т.е. да установим ясно, че тя е форма на извод, която е в хармония с принципите на* конструктивистката интерпретация *на безкрайността; едно начинание, което не е вече* чисто математическо, *но което независимо от това е част от доказателството за консистентност* (Gentzen 1938: 44; 1969: 285-286).

Доказателството на трансфинитната индукция се основава на пълната индукция (Gentzen 1969: 192-193). Ключова е ролята на конструктивността, т.е.

на допускането, че преходът към първия трансфинитен ординал $\boldsymbol{\omega}$ и всеки последващ аналогичен „трансординален" преход съвпада с прехода от типа от $\boldsymbol{n}$ към $\boldsymbol{n+1}$. Оттук следва и:

> ЗАКЛЮЧЕНИЕ: *Посредством теоремата за трансфинитната индукция* финитността на процедурата на редукция *за произволни изводи сега следва веднага. Ако финитността на процедурата на редукция е била вече доказана за всички изводи, чието ординално число е по-малко от дадено число* $\boldsymbol{\beta}$*, то също така е в сила за всеки извод с ординалното число* $\boldsymbol{\beta}$*; тъй като за* единична *редуктивна стъпка последният извод се преобразува в извод с* по-малко *ординално число или извод в редуцирана форма. (Ако изводът вече е в редуцирана форма, тогава няма какво повече да се доказва.) Следователно свойството крайност на редукционната процедура се извежда от тоталността на изводите с ординално число* по-малко *от* $\boldsymbol{\beta}$ *към изводите с ординално число* $\boldsymbol{\beta}$*; по теоремата за трансфинитната индукция това свойство следователно е в сила за* всички *изводи с* произволни *ординални числа. Това* завършва *доказателството на доказателството за консистентност* (Gentzen 1969: 193).

За нас, от гледна точка на защитаваното „дуалистично питагорейство", е особено важно да проследr; връзката на трансфинитната индукция с т. нар. колапс на вълновата функция, при което се реализира със строго определена вероятност една случайно избрана стойност. При схемата на доказателството за консистентност на Генцен е съществено, че всеки извод ще „колапсира", но не и необходимо вероятностният характер на подобен „колапс". Терминът и скритата метафоричност на термина „колапс" съответства на неговата идея за финитност. Обратно, неограниченото удържане на кохерентно суперпозиционно съдържание щеше да бъде свидетелство (каквото като правило не се наблюдава, макар да съществуват изключения) за нефинитния характер на трансфинитната индукция.

Доказателство на трансфинитната индукция се съдържа в § 15.4 на предходната работа на Генцен относно доказателството за консистентност на аритметиката: „Консистентността на чистата теория на числата" (Gentzen 1969: 132-213). В нея той описва замисъла на работата си така:

> *От най-голяма значимост в този пункт е следната теорема от теорията на доказателствата, доказана от К. Гьодел: 'Не е възможно да се докаже консистентността на формално дадена (ограничена) теория, която съдържа елементарната теория на числата (нито даже самата елементарна теория на числата) чрез средствата на пълната съвкупност от техники, присъщи на теорията, която се разглежда (при положение, че теорията е реално консистентна)'. От това следва, че консистентността на елементарната теория на числата, например, не може да се установи чрез част от методите за доказателство, използвани в елементарната теория на числата, нито наистина чрез всички тези методи. … Остава напълно разумно, че консистентността на елементарната теория на числата може в действителност да се верифицира чрез средствата на техники, които отчасти не принадлежат към елементарната теория на числата, но които независимо от това могат да се разглеждат като по-надеждни, отколкото несъмнените компоненти на елементарната теория на числата* (Gentzen 1969: 138-139).

Следователно същността на замисъла на Генцен е да изясни *какво още* трябва да се прибави към аритметиката на Пеано, така че новополучената система да е „пълна и непротиворечива", т.е. с използвания тук обобщаващ термин – „консистентна". Както многократно вече се изтъква това „още" е трансфинитната индукция, която изглежда обаче има финитен характер *не по-малко* от обичайната пълна, или математическа индукция. По този начин теоремите на Гьодел за непълнота се заобикалят, без ни най-малко да се поставя под съмнение тяхната валидност. Така трансфинитността се оказва необходимото и достатъчно условие за консистентност на една аритметична система. При това обаче по конструктивистки маниер трансфинитността може да се разбира подчертано аритметично, т.е. чрез функцията „наследник" (добавяне на единица към предходното число) и за разлика от т. нар. актуалистки начин на обсъждане в теория на множествата, където тя се предицира на някои множества. Самото понятие за множество въвежда вместо функцията „наследник" една сходна, но много по-обща функция, която ще си позволя да нарека функция „цялост", постулираща съществуването и „конструктивно" съпоставяща нейната цялост на всяка не-цялост ('съвкупност', 'множество', механичен сбор от отделни, ясно различими и следователно броими неща), при това забележете, че това последно изображение, което нарекохме „цялост”, е взаимно еднозначно, точно както функцията „наследник”.

Например „аксиомата за безкрайността” е превод на теоретико-множествен език на Пеановата аксиома за винаги съществуване на функция „наследник”:

$$\begin{array}{ccccc} \varnothing\ , & \{\varnothing\}, & \big\{\{\varnothing\}\big\}, & \Big\{\big\{\{\varnothing\}\big\}\Big\}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{0}, & \mathbf{1}, & \mathbf{2}, & \mathbf{3}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{58}$$

В първата редица, точен превод на втората, с $\varnothing$ е означено празното множество, а с $\{\ldots\}$ – функцията, която нарекохме „цялост”. Докато интуитивният смисъл на втората редица е ясен и напълно приемлив, а именно към всяко естествено число (към които, според съвременната трактовка, е добавена и нулата) може да се прибави единица, то първата, теоретико-множествената по-скоро шокира: нищо, целостта на нищото, целостта на целостта на нищото и т.н., тъй като идеята за цялост на нищото изглежда абсурдна. Всъщност обаче фактическото основание да се въведе първата редица е втората.

Съпоставянето на функциите „цялост” и „наследник”, освен като илюстрация, имаше също така за цел да подскаже идеята за вероятност чрез съпоставяне на множество (цялост) и число: от множеството се избира един елемент, при което то „колапсира” или се редуцира до него с вероятност равна на отношението на „броя” (кардиналното число, мярата) на класа на еквивалентност, зададен от този елемент към „броя” (кардиналното число, мярата) на цялото множество. При това обаче като фон остава, че и аритметиката, и теория на множествата са еднакво фундаментални, доколкото функциите „наследник” и „цялост” са несводими една към друга и поради това тяхното отношение има дълбок съдържателен смисъл, представим чрез интуициите за избор и за вероятност.

Като конструктивист Генцен се придържа строго към аритметичния подход. В заключителните параграфи (по-специално 16.2) на своята работа описва постигнато от него, сравнено с теоремите на Гьодел за непълнотата, по следния начин:

> *За да проверим степента, до която доказателството за консистентност* съвпада с теоремата на Гьодел (2.32) *би трябвало първо* да съпоставим естествени числа *с обектите от теория на доказателствата (формули, изводи и т.н.), съответстващи на начина, по който това е направено в статията на Гьодел, цитирана в бележка под линия 3, и би трябвало също така да въведем изискваните функции и предикати за тези обекти като функции и предикати за съответните естествени числа. Тогава доказателството за консистентност става доказателство с естествените числа като обекти. За да получим формално ограничен формализъм, би трябвало да ограничим възможностите за дефиниция, осигурени за горното, до определени схеми; те лесно могат да бъдат избрани достатъчно общи, за да позволят дефиниция на всички функции и предикати, изисквани в теория на доказателствата; ср. например версията на Гьодел* (Gentzen 1969: 197).

Резултатът, получен от Генцен, е в хармония с теоремите за непълнота на Гьодел, тъкмо поради принципа на трансфинитната индукция, добавен от първия. Преминавайки към един по-свободен и философски начин на изразяване, можем да кажем, че може да се постави знак за съответствие, ако не и за равенство между непълнота и крайност, от една страна, или между пълнота и безкрайност (дуално „включваща" крайността), от друга:

> *Формите на извод* – продължава Генцен – *в доказателството за консистентност тогава не са други от онези представени в нашата формализация на теорията на числата; единствено доказателството за крайността* (15.4) *пак заема специално положение. Невъзможно е да се види как последното доказателство може да се изведе с техники от елементарната теория на числата. По тази причина доказателството за консистентност е в хармония с теоремата на Гьодел* (Gentzen 1969: 197).

Малко по-надолу Генцен привежда две твърдения, за съжаление оставяйки ги без доказателство, тъй като то – по неговите думи – би го отвело далеч от темата на неговата статия. Първото от тях изяснява, че принципът на трансфинитна индукция при доказателството за консистентност на елементарната аритметика е необходим единствено за извеждане на пълната индукция:

> 1. *Ако извеждането на* пълната индукция *се пропусне от формализираната елементарна теория на числата, тогава доказателството за консистентност може да се формулира без съществена промяна по такъв начин, че – след извеждане на споменатото пренасяне в доказателство относно естествени числа – техниките от елементарната теория на числата* (включително *пълната индукция*) *са достатъчни* (Gentzen 1969: 197).

От друга страна, в аритметичната система на Генцен принципът на трансфинитна индукция беше обоснован или доказан чрез принципа на пълната индукция. Така Пеановата и Генценовата аритметика споделят едно общо, съвпадащо в двата случая ядро и два дуални взаимно извеждащи се принципа, съответно на пълната и на трансфинитната индукция.

От формално-логическа гледна точка, положението не е просто: ако двете системи бъдат непосредствено обединени, то двата принципа биха образували порочен кръг. Тогава теоремата на Гьодел за непълнотата по отношение на тази обединена аритметика, би била тривиално валидна, поради това, че наличието на порочен кръг може да скрива противоречие и тъкмо то да е нежелано високата цена за подобна „пълнота". Именно за да се избегне кръговостта, въвеждането на дуалност, която обаче впрочем може да се обоснове и по други пътища, е неизбежно: двете предпоставки принадлежат на теория и метатеория и това предпазва от едновременното им разглеждане.

Каква е логическата стойност на подобно „измъкване"? То не е тривиално или винаги възможно при наличие на „порочен кръг". Ако беше така, то щеше да се обезсмисли. Всяко от двете кръгови твърдения, които обаче, забележете, не са взаимно изключващи се, (1) образува с корпуса от останалите твърдения непротиворечива система; (2) всяка една от двете, така образувана непротиворечива система може да послужи като метатеория за доказване пълнотата и непротиворечивостта на другата. В този случай може да се говори за *дуална непротиворечивост*. Най-сетне тази ситуация допуска дълбоко съдържателна интерпретация в термините на квантовата механика. Хилбертовото пространство, в което се построява математическият ѝ модел, следва да се отнесе към второто равнище в математиката, по цитираната класификация на Генцен, където се разглеждат „безкрайности от безкрайности” и за което използва термина „анализ”:

> 2. *Доказателството за консистентност на цялото на елементарната теория на числата, пренесено в теория с естествените числа като обекти, може да се осъществи с техники от* анализа (Gentzen 1969: 197).

Така второто от двете споменати твърдения на Генцен, оставени без доказателство, ни насочва към следното. Елементарната аритметика може да се обоснове дуално с теорията на хилбертовото пространство. От *тази* гледна точка последната е изоморфна на аритметиката на Генцен. В собствено философската област това ни навежда към един втори, в квантовата механика физически дискутируем и косвено наблюдаем ипостас на безкрайността – кохерентността. С други думи, синкретичната неразличимост на безкрайно различни състояния, намиращи се обаче в кохерентна суперпозиция, ни предлага физически модел на безкрайността по един диференциран начин, а именно като областта на трансфинитното (на свой ред делящо се на две подобласти от ординала ε_0). Цялото последно разсъждение е от изключителна важност и за философията, и за теорията на квантовия компютър; както ще видим по-нататък: *квантовият компютър изчислява* ***трансфинитно***! Следователно с машината на Тюринг квантовият компютър без сдвояване (и първата, и вторият по-скоро в качеството им на математически модели) образува дуална, взаимно обосноваваща се двойка. В частност квантов компютър със сдвояване изчислява отвъд ε_0[80]. Независимо от това, че квантовият компютър изчислява транс- или дори супер-финитно според съвременните разбирания, които биха могли да се подложат на ревизия или да се обобщят, резултатът от неговите изчисления трябва да се представи финитно, т.е. да се редуцира чрез измерване.

Генцен обръща внимание на особеното място на пълната индукция и в друг аспект, също така много важен в контекста на нашето разглеждане:

---

[80] Като синоним на термина „отвъд ε_0” (който се разбира „ $\geq \varepsilon_0$”) нататък ще се използва „суперфинитно”, по аналогия с термина „трансфинитно” за областта „ $\geq \omega$ ”.

> *Специалното положение на извеждането на* пълната индукция *се дължи на следния факт: ако това извеждане* се пропусне, *тогава може да се даде* определена горна граница за пълния брой стъпки на редукция, *изисквани за редукцията на дадена последователност. Ако все пак извеждането на пълната индукция се включи, тогава този брой, в зависимост от* избора, *може да стане* произволно голям (Gentzen 1969: 197).

В приведения пасаж, а и от целия текст на статията, не става напълно ясно как следва да се разбира *„определена горна граница* за *пълния брой стъпки на редукция*", тъй като допуска съществено различно тълкуване: 1) като крайно число, респ. ординал $\alpha < \omega$; 2) както като крайно, така и като трансфинитно число, респ. произволен ординал, вкл. и $\alpha \geq \omega$, вкл. $\alpha \geq \varepsilon_0$.

На пръв поглед изглежда очевидно, че тъй като става дума за пълна индукция, то изразът трябва да се разбира във варианта (1) $\alpha < \omega$: т.е. определената горна граница за пълния брой стъпки на редукция е произволно, но фиксирано крайно число. Пропуснатото извеждане е тъкмо на принципа на пълната индукция, който сякаш е еквивалентен на точна горна граница $\alpha = \omega$ (респ. $\alpha < \omega + 1$). Вече отбелязахме, че трансфинитното, (но не суперфинитно) разглеждане е разположено между равнищата „две" и „три" според Генценовата класификация на безкрайностите в математиката: става дума за безкраен, но ограничен „брой" пъти самореференциално прилагане на понятието за безкрайност. По същия начин може да се подходи и сега: необходимо е извеждане, но до един фиксиран трансфинитен ординал, най-естествено е да се избере най-малкият – ω. В този случай обичайно разбраната пълна индукция с аритметиката на Пеано като метатеория извежда аритметиката на Генцен с трансфинитна индукция до ε_0, а последната на свой ред в качеството на метатеория извежда аритметиката на Пеано, вкл. и пълната индукция.

При безкрайно множество негово същинско подмножество може да се постави в едно-еднозначно съответствие с него и това свойство може да се използва за определение на безкрайно множество. Склонни сме да предложим хипотезата, че всяко суперфинитно множество *може да се обоснове* чрез свое безкрайно същинско подмножество и това може да се използва за негова дефиниция. Какво следва да се разбира под термина „да се обоснове", се пояснява с примера на аритметиките на Пеано и Генцен.

На основата на така скицирания модел на взаимното обосноваване може да се предложи модел на квантов компютър, който ще се обсъжда нататък по-подробно, състоящ се от поне две машини на Тюринг. Първата машина – или може би по-точно безкрайно множество от номерирани машини – $\boldsymbol{T}$ са обичайни машини на Тюринг, а втората $\mathfrak{T}$ е „трансфинитна", като изпълнява метаоперации по отношение на цели безкрайни ленти на машините $\boldsymbol{T}$ и тези операции са (без претенция за минималност и прецизност):

– върни се на предходната лента;

– отиди на следващата;

– запиши „$\mathbf{0}$" във всички клетки на лентата;

– запиши (в общия случай) дадена безкрайна поредица от нули и единици върху лентата (= установи съответния кюбит в точно определена стойност);

– край.

Един проблем, който отсега може да се постави, е дали квантовият компютър и от какъв тип обосновава аритметиката на Пеано? Ако тази процедура се продължи йерархично, както по-горе е описана първата ѝ стъпка, до равнище „$\boldsymbol{\omega}$", дали полученият модел на квантов компютър ще решава подобна задача? Интуитивният отговор изглежда положителен, тъй като ординалното число на подобна йерархия като цяло е $\boldsymbol{\varepsilon_0}$. В такъв случай типът квантов компютър би бил „без сдвояване".

В друга своя работа „Доказуемост и недоказуемост на ограничената трансфинитна индукция в елементарната теория на числата" (Gentzen 1969: 287-308) Генцен изяснява следното:

> *Невъзможността да се докаже трансфинитната индукция чак до ординалното число $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ с елементарни техники от теория на числата може да се изведе пряко от следните два факта:*
>
> *1. Теоремата на Гьодел: консистентността на елементарната теория на числата не може да се докаже с техники от тази теория.*
>
> *2. Консистентността на елементарната теория на числата е била доказана чрез прилагане на трансфинитна индукция до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$, заедно с изключително елементарни техники от теория на числата* (Gentzen 1969: 287).

Предмет на същата негова работа е

> *пряко доказателство на недоказуемостта на трансфинитната индукция чак до* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ *в елементарната теория на числата* (Gentzen 1969: 287)[81].

Какво е философското значение на подобно „пряко доказателство”? Недоказуемостта на суперфинитната индукция не е логически еквивалентна на непълнотата на аритметиката в смисъла на Гьодел. От втората не следва първата: недоказуемостта на суперфинитната индукция в Пеановата аритметика има и други възможни основания. Също така видяхме, че към суперфинитната крачка, съответстваща на явленията на сдвояване, не ни тласка, някаква предполагаема логическа непълнота, аналогична на непълнотата на квантовата механика в смисъла на Айнщайн, Подолски и Розен. В такъв случай можем да предположим, че прякото доказателство за недоказуемост на суперфинитната индукция, предложено от Генцен, е възможно да съдържа указание за логическа принуда към подобна стъпка. Но ако суперфинитната индукция е както недоказуема, така и неопровержима, то не свидетелства ли това, че и системата на Генцен е в някакъв смисъл непълна? Такова впрочем изглежда да е неговото становище:

> *Бихме могли да мислим, че включвайки трансфинитна индукция до* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ *в елементарната теория на числата като нова форма на извод, непълнотата не би могла да се преодолее. Освен това аналогична непълнота после несъмнено възниква по-отношение на една по-висша трансфинитна индукция и т.н.* (Gentzen 1969: 308).

Нашето становище обаче е по-различно, вменявайки това заключение по-скоро на ограниченията, налагани от конструктивисткия, а още повече от финитисткия подход, към който се стреми да се придържа Генцен. Не може да се оспори, че *взета сама за себе си* аритметиката на Генцен (т.е. с добавена или

---

[81] „В добавка процедурата ще направи възможно да се покаже, че още по-ограничени форми на трансфинитна индукция до числа *под* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ не са доказуеми в определени подсистеми на формализма на теория на числата” (Gentzen 1969: 287).

изведена трансфинитна индукция) е също така непълна както и обичайната финитна, тази на Пеано. Така да се каже, *априорното* отхвърляне на безкрайността сама по себе си, с други думи – на актуалната безкрайност, изключва от полезрението *възможността за разглеждане на 'крайност' и 'безкрайност' като допълнителни, но* ***равностойни*** *начала на аритметиката*. По Генцен 'безкрайността' не е ипостас, не е дори епифеномен, т.е. зависимо огледално изображение, тя е просто и само продължение на 'крайността', една разширена крайност[82]. Именно поради това се извежда на основата на пълната индукция и може да се покаже на такъв фундамент същностно финитисткия ѝ характер, който при нашия възглед би следвал от една *собствено математическа* теория на измерването, чиято същност би била редукция на безкрайното към крайното, на безкрайното от по-висш към такова от по-низш порядък.

Ако областта на безкрайното е *втора* област, наред с тази на крайното и между двете има пропаст, която – ако се разгледат като непрекъснати – би изглеждала като дискретна пауза, то трансфинитната индукция следва да се постулира самостоятелно, или най-малкото, заедно с други Пеанови аксиоми да следва от удвояването или огледалното изображение на крайността. Има ли някаква несиметрия между крайно и безкрайно в последния случай? Засега, само като храна за размисъл може да се подхвърли следната идея: може ли да се създаде интерпретация, чрез която нарушаването на закона за запазване на четността при слабите взаимодействия да може да се тълкува като такава несиметрия? Ако говорим за „удвояване", напълно равнопоставяме крайност и безкрайност, ако употребяваме „огледално изображение", откриваме поле за „доксографична" конфронтация по въпроса: кое от двете е „оригиналът" и кое „копието"?

Същността на прякото доказателство на Генцен, дадена в заключението (Gentzen 1969: 306) е, че при индукция до произволни големи крайни числа (следователно, по-малки от ω) можем да изведем трансфинитна индукция до ординали строго по-малки от ε_0. Следва да уточним смисъла, който трябва да влагаме в „аритметиката на Генцен", „системата на Генцен":

---

[82] Генцен живее и работи в нацистка Германия, въпреки това току-що споменатото е напълно в съзвучие с обозначеното като „Принстънски дух" и показва универсалното значение на последния като интелектуална еманация на епохата.

1. В тесен смисъл тя се получава, с думите на Генцен,

> *включвайки трансфинитна индукция до* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ *в елементарната теория на числата като нова форма на извод* (Gentzen 1969: 308).

При това се разглеждат обикновени крайни числа, но не и трансфинитни, а единствено трансфинитна индукция в качеството на финитистка процедура. Тъкмо така разбрана, в нея възможно винаги възниква непълнота, колкото и по-висша трансфинитна индукция да се добавя и използва.

2. Широко, или несобствено тълкуване, към което заявихме вече привързаност: трансфинитните ординали могат и следва да се определят като строго определени количества, т.е. като актуално безкрайни, напълно еднакво с обичайните крайни числа, достъпни „сами по себе си”, а не само чрез конструктивна процедура на все по-нататъшно броене.

Също като Генцен и конструктивизма изобщо, но и в духа на споменаваното „дуалистично питагорейство” споделяме загриженост за „реинтерпретирането” (с неговия термин) на математическите резултати, особено тези касаещи, безкрайността в качеството ѝ – на шега казано – „на доказан развъдник на парадокси”. Една собствено „математическа теория на измерването”, изясняваща редукцията от безкрайни към крайни величини, както и на безкрайни от по-висш към такива от по-низш порядък, следва да обобщи трансфинитните индукции. При това конструктивисткото „броене” може навярно напълно да се изостави.

При така скициран подход, продължавайки пълната индукцията точно до $\boldsymbol{\omega}$, ще достигнем в обосноваване на трансфинитната индукция до $\boldsymbol{\varepsilon_0}$, и т.н. Трансфинитните в актуален смисъл числа се „реинтерпретират” като емпирично измерими сдвоени състояния, или пък като кохерентни макросъстояния. Придобили сигурен начин за достъп до тях, напълно независим от конструктивисткото „броене”, за което остава статут на спомагателен механизъм за достъп, не повече от това да е в някои случаи по-удобен, можем дори да се освободим от него при необходимост. Напълно достатъчна е аксиомата за избора[83], която гарантира добрата наредба във всяко множество, смисълът на която в настоящия контекст е, че може вторично,

---

[83] Както вече споменахме и по-нататък също ще видим, аксиомата за избора придобива нова тежест, заради детайлизирана формулировка.

именно на този фундамент, да се възстанови броенето за неговите елементи винаги, щом тя е в сила.

> *От друга страна, известно е, че трансфинитна индукция чак до произволен ординал* под ε_0 *е доказуема в елементарната теория на числата. В § 2 ще покажа как такива доказателства* се формализират *във формализма на теория на числата* (Gentzen 1969: 287).

В заключение да повторим собственото твърдение на Генцен, за да подчертаем разликата от тълкуванията, които му дадохме непосредствено по-горе:

> Трансфинитната индукция до ε_0 и по-високи ординални числа не е доказуема в елементарната теория на числата. *От друга страна е в сила … : трансфинитната индукция до всеки ординал* под ε_0 *е доказуема в елементарната теория на числата* (Gentzen 1969: 306).

Специално внимание бихме искали да обърнем на аргумента на Генцен, че „актуалисткаta математика идеализира, например, понятието за съществуване" (Gentzen 1938: 17; 1969: 248). Вече се спомена, че практически разлика между конструктивизма и „актуализма" се наблюдава при доказателствата за съществуване, първият отхвърля косвените такива при безкрайни множества. Пасажът, който следва, обаче ще се цитира, тъй като в него е добавен аргументът, „че тази интерпретация съответства повече на позицията на физѝка" (Gentzen 1938: 17; 1969: 249):

> *Едно число* съществува, *ако неговото съществуване може да се докаже посредством доказателство, в което логическите дедукции са приложени до* завършени безкрайни *тоталности в същата форма, в която те са валидни за крайни тоталности; напълно както ако тези безкрайни тоталности бяха актуално настоящи величини. По този начин понятието за съществуване следователно наследява предимствата и недостатъците на един идеален елемент.* Предимството *е, преди всичко, че се постига значителното опростяване и елегантност на теорията – тъй като интуиционистките доказателства за съществуване са, както се спомена, най-вече много усложнени и страдат от неприятни*

> *изключения*, – недостатъкът, *обаче, е, че това идеално понятие за съществуване вече не е приложимо в същата степен към физическата реалност, както, например, конструктивисткото понятие за съществуване* (Gentzen 1938: 17; 1969: 248).

Цитираният абзац е в § 4, който е заключителен за статията „Настоящото състояние на изследванията по обосноваване на математика" (Gentzen 1938: 1-181969: 234-251) и носи знаменателното название „Възможността за примиряване на различните гледни точки" (Gentzen 1938: 16-18; 1969: 247-251).

Както се спомена, в светлината на настоящото разглеждане се открива същностна аналогия между редукцията на извод със съответстващо трансфинитно ординално число в доказателството за непротиворечивост и редукцията на вълновия пакет в процеса на измерване в квантовата механика. Доказателството за непротиворечивост е еквивалентно на твърдението за несъществуване на „живата-и-мъртва котка" на Шрьодингер, т.е. отсъствието на макрообекти в състояние на кохерентна суперпозиция на ортогонални, с други думи, взаимно-изключващи се състояния. Последното твърдение обаче не е вярно (напр. Blatter 2000), по-скоро обаче под формата на изключение. Следователно изглежда сякаш, че доказателството за непротиворечивост или неговата еквивалентност на твърдението за несъществуване на макрообекти в кохерентна суперпозиция е невалидно. Изходът от ситуацията, която решава привидното противоречие, е в това, че на макрообекти в кохерентна суперпозиция, както впрочем и на сдвоените микрообекти, следва да се постави в съответствие ординално число $\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\varepsilon_0}$. Последното твърдение е много важно в теорията на квантовия компютър. При преминаване към макросъстояние се извършва редукция и при $\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{\varepsilon_0}$, и при $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\varepsilon_0}$, но в първия случай тя ни отвежда в областта $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\varepsilon_0}$, т.е. на кохерентните суперпозиционни състояния, а във втория – в $\boldsymbol{\alpha} < \omega$, т.е. в тази на измерените собствено макросъстоянията.

В контекста на статията на Генцен следва по-скоро да се подчертае, че позицията на дуалното питагорейство в конкретния случай е по-близка до тази на конструктивизма, но, така да се каже, с „обратен знак". Сближаване на математиката с практическите процедури по нейното прилагане тук се изисква от стремежа на питагорейството да погълне фактическото съществуване като особена форма на числовост (респ. математическа структурираност). Доколкото теорията и метатеорията, макар и дуални се включват, във всеобемаща, доказано пълна (с извинение за тавтологията) тоталност, т.е. процесът на интерпретация, явяващ се изображение на втората в първата, е част от същата тази тоталност и подлежи на тълкуване и обяснение, при това, забележете, вътрешно математическо. При такъв подход съществува гледна точка, от която може да се постави знак за равенство между предполагаемата финитност на трансфинитната индукция (независимо от „подозрителното име" с израза на Генцен) и измеримостта на една квантово-механична величина. При това фактът на такова измерване се приема за математическо доказателство, не по силата на един вероятно изглеждащ „чудовищен" в очите на мнозина математици емпиричен подход към математиката, все едно като към опитна наука, по подобие на физиката, а – *обратното,* – поради всеобемащо питагорейство, което включва измерването в качеството на доказателствена процедура със собствено математически характер. По такъв, донякъде парадоксален и неочакван начин можем да се присъединим към патоса на Генцен:

> *Сега възниква въпросът: каква полза от елегантните корпуси знание и особено* прости *теореми, ако те не са приложими към физическата реалност в буквалния им смисъл? Не би ли било за предпочитане в този случай да се възприеме процедура, която е* по-трудоемка *и която получава* по-сложни *резултати, но която има предимството да прави тези резултати непосредствено значими в реалността? Отговорът лежи в успеха на първата процедура. Отново да разгледаме пример от геометрията. Великите постижения на математиката в напредъка на физическото познание произхождат тъкмо от този метод на* идеализиране *на това, което е физически дадено, следователно на* опростяване *на неговото изследване. Във всяко приложение на общите резултати до реалността, специалният им статус, дължащ се на идеализацията трябва, разбира се, да се има предвид и да се извърши една съответна* реинтерпретация. *Тъкмо тук* приложната *математика има своя област на дейност* (Gentzen 1938: 17; 1969: 249).

Време е да преминем към самите теореми на Гьодел. Те са интерпретирани изключително много, според мен най-вече затова, защото твърде специализирания начин на тяхната оригинална формулировка, скрива или предпазва истинското им съдържание и значение. В резултат, всеки един от техните десетки хиляди „разказвачи” и тълкуватели малко или повече ги преиначава и пригажда към контекста на собственото разглеждане. Не бих бил в състояние и аз да избегна тази създала се традиция, водеща до митологизиране на теоремите и до граничещо с профанизирането им опростяване, до разширяване и обобщаване на техния обхват до почти пълна неопределеност.

Това, което обаче е по силите ми, е да се опитам да рефлектирам изходните си предпоставки, с които се насочвам към тях. До голяма степен те вече неявно са зададени чрез предшестващото разглеждане:

1. В контекста на обосноваване на математиката се обсъждат шансовете на едно неопитагорейство на основата на философията на квантовата информация, обозначавано като „дуалистично питагорейство”. Неговите „Ин” и „Ян” могат да се тълкуват и като дуални крайност и безкрайност.

2. Така теоремите за непълнота се предполага, че могат да бъдат включени в контекста на „дуална пълнота”, при която всяка една от две теории встъпва в качеството на метатеория, за да обоснове на своята основа пълнотата и непротиворечивостта на другата, при това всяка една от тях сама чрез себе си остава непълна в смисъла на Гьодел в опита си да се самообоснове.

3. Водеща нишка е образецът на пълнота от нов тип, зададен и отстояван от квантовата механика в почти вековна епична битка и в наше време прераснал и дал плодотворни резултати в нова физическа дисциплина: квантовата информация, толкова тясно свързана с квантовата механика, че вече сякаш се налага обобщаващият термин „квантова механика и информация”.

4. За да може да се следва тази нишка, се строи по-скоро философски модел на аритметиката в хилбертовото пространство като математически формализъм на квантовата механика. Безкрайността се тълкува като кохерентност и по-точно като кохерентна суперпозиция.

5. Съществува стремеж непълнотата в смисъла на Гьодел да се изтълкува като невъзможност да се построи пълен модел на безкрайността в крайността или по-общо на една дуална система в монистична, в т.ч. и в заедно дадената съвкупност от двете ѝ начала.

Отправна точка в текста на Гьодел (1931) ще бъде скицата на доказателството, която той предлага в увода на своята работа (Gödel 1931: 146-151), отделни бележки относно конструктивността на доказателството на основните теореми (Gödel 1931: 189-190; Gödel 1931: 176-178, 177-179; Gödel 1931: 197; 1986: 194, 195), както и нейният контекст, зададен от предшестващата работа (Gödel 1930) относно пълнотата на логически системи. Защо в системи, съдържащи аритметиката на Пеано, за разлика от логическите системи, пълнотата и непротиворечивостта се оказват допълнителни? Дали източникът на подобна непълнота, впрочем и за теоретико-множествените, семантични и пр. парадокси, не е необходимостта, за да е налице „пълнота”, да се включат на метатвърдения по отношение на – в общия случай – безкрайни множества, и поради това неявно разглеждащи ги като актуални цялости? Можем ли да построим съдържателна интерпретация *в термини от физиката* на теоретико-множествени и особено на семантичните парадокси, които по мнението на различни автори, в това число и на самия Гьодел, третирани подходящо, фундират доказателствата за непълнотата? Макар че няма да наречем тези и аналогични въпроси реторични, те все пак навеждат по посока на определен тип отговори, които в качеството на хипотези могат да залегнат в последващото изложение.

Самият Гьодел изтъква:

> *Аналогията на този извод с антиномията на Ришар бие на очи; също и с „Лъжеца”*[84] *се намира в близко родство, тъй като неразрешимото твърдение* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *означава тъкмо че* $\boldsymbol{q}$ *принадлежи на* $\boldsymbol{K}$*, т.е., според* (1), *че* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *не е доказуемо. Следователно пред нас имаме твърдение, което твърди своята собствена недоказуемост*[85] (Gödel 1931: 175; 1986: 148, 149).

---

[84] Може да се използва изобщо всяка епистемологична антиномия за такъв вид доказателство за неразрешимост. [Всички бележки под линия от цитат са от автора на цитата, в случая – Курт Гьодел, освен ако изрично не е посочено друго.]

[85] Такова твърдение обратно на външния вид няма в себе си кръговост, понеже то твърди най-напред недоказуемостта на една съвсем определена формула (а именно на $\boldsymbol{q}$-тата в лексикографския ред при определено вмъкване) и едва допълнително (до известна степен случайно) наистина се оказва, че тази формула е тъкмо онази, чрез която се изразява самото твърдение.

Редно е специално внимание да се обърне на първата бележка под линия в цитирания пасаж, твърдяща че *всяка* (!) епистемологична антиномия може да се положи в основата на доказателството.

В тази връзка би следвало да се разгледат няколко тясно свързани въпроса:

1. Каква е цената, която следва да заплати едно доказателство, подобно на скицираното, в случай че включи в качеството на необходим – или в този смисъл се основава също и на – довод от такъв специален тип?

2. Валидно ли е самореференциално разсъждение, което би дало положителен отговор за приложимостта на теоремите на Гьодел по отношение на собственото им съдържание?

3. Какъв е гьоделовият номер на неговите теореми: краен или безкраен?

4. Конструктивни ли са неговите доказателства, както той експлицитно твърди (Gödel 1931: 189-190; Gödel 1931: 176-178, 177-179; Gödel 1931: 197; 1986: 194, 195)?

5. Действително ли т. нар. теореми на Гьодел за непълнотата са теореми, т.е. разрешими твърдения? Или поради самореференциалната приложимост на теоремите на Гьодел се оказва, че от тяхната валидност (разрешимост), следва собствената им неразрешимост (невалидност).

6. Очевидно обаче – и поради самото доказателство на Гьодел – обратното твърдение, т.е. за тяхната невалидност (неразрешимост) е невярно. Следва ли от това, че и самите теореми на Гьодел са неразрешими твърдения?

7. Ако на последния поставен въпрос се даде положителен отговор, то какъв е истинностният, или по-общо логическият и онтологическият статут на твърденията за непълнота на системи, съдържащи аритметиката на Пеано?

8. Може ли дуален подход да намери изход от ситуацията и дали такъв подход не може сам да се разглежда в този смисъл като следствие от неразрешимостта на проблема за пълнотата?

Добре известна е теоремата, че от формална система, която съдържа противоречие, следват както верни, така и неверни твърдения, т.е. грубо казано, „може да се изведе всичко”. Аналогично може да се постави въпросът, дали съществува общ закон, във философски план, или подобен извод, в логически, който да визира статута на формална система, съдържаща довод от такъв специален тип, а именно самореференциален и свързан с един или друг парадокс.

Нека като илюстрация си послужим с парадокса на Лъжеца, изключително прост и нагледен, а освен това изрично цитиран и перифразиран от самия Курт Гьодел по отношение на обосноваващия довод на неговото доказателство. Проблемът при Лъжеца е, че когато казва „Аз лъжа”, той казва истината, но ако казва истината, значи не лъже и следователно не казва истината и т.н. Изглежда интуитивно вярно, че ако в дадена логическа верига от изводи се включи, твърдение от този тип, то цялата фигура на доказателството ще придобие същия характер.

По думите на Гьодел в случая, който той обсъжда, „имаме твърдение, което твърди своята собствена недоказуемост”. В резултат на използването на този довод съвършено коректно следва изводът, че съществуват недоказуеми твърдения, при съблюдаване на определени условия, както най-общо може да се резюмира Гьоделовият аргумент за непълнотата.

Парадокс при „Лъжеца” се получава едва при самореферециалното прилагане на неговия извод по отношение на самия него, тъй като изпълнява своите собствени предпоставки. Дали при Гьоделовия аргумент възможността за аналогично самореференциално прилагане, водеща до парадокс, е *наистина* отстранена? *Тоест, дали самата теорема на Гьодел за неразрешимост не удовлетворява своите собствени условия, в резултат на което самата тя да се явява неразрешимо твърдение?*

Да приемем, че е така. Какво се получава? Тъй като съществуването на неразрешими твърдения самò е неразрешимо твърдение, то ние *бихме били свободни да приемем както теоремата на Гьодел така и нейното отрицание в качеството на* ***аксиома***. Самото доказателство на Гьодел остава валидно, но в качеството на доказателство за непротиворечивост на – вече! – *аксиомата за непълнотата* със системата PM. Би трябвало обаче да съществува също така доказателство и за независимост, като с предходните разсъждения вече се набелязват неговите контури.

Да приемем, че е валидно отрицанието на аксиомата за непълнотата. Тогава попадаме в не-Гьоделова математика, която е справедливо да бъде наречена Хилбертова, в чест на предложената от последния програма за формално самообосноваване на математиката. В нея „няма да съществуват неразрешими твърдения”. Но смисълът на това, че „няма да съществуват неразрешими твърдения” подлежи на уточнение.

Може да помогне аналогията с понятието „успоредни прави” при прехода от евклидова към неевклидова геометрия: и по-специално, към хиперболичната геометрия на Лобачевски и сферичната – на Риман. Според прочутия пети постулат на Евклид (в кратка, съвременна формулровка) през точка извън дадена права минава точно една права успоредна на нея. В геометрията на Лобачевски през точка извън дадена права минават неопределено много прави, които не я пресичат, като понятието „успоредна” придобива нов смисъл, а именно на двете „най-близки” спрямо дадената прави, които не я пресичат. В геометрията на Риман всеки две прави необходимо се пресичат и понятието „успоредни прави” остава безсъдържателно и не се използва.

Както в евклидовата геометрия понятието „успоредни прави” е изключително съдържателно и полезно, така и „неразрешими твърдения” – в Гьоделовата математика. Както в геометрията на Риман „няма успоредни прави”, така и в предположената по-горе Хилбертова математика „няма неразрешими твърдения”. Заедно с това има смисъл, както ще видим по-нататък, в Хилбертовата математиката да се включи и една дуална област, аналогична на геометрията на Лобачевски, в която да е валидно: „всички или неопределено много твърдения са неразрешими”. Така както понятието за „пресичане на прави” помага да се изясни какъв смисъл да се влага съответно в отсъствието и в наличието на успоредни прави, така в нашия случай ще използваме понятието следване от себе си на едно твърдение.

Това понятие вече беше обсъждано по-горе във връзка с теоремата на Мартин Льоб. Така хилбертовата математика, при която по постулат няма да има неразрешими твърдения, т.е. за всяко твърдение е изводимо, че или то, или неговото отрицание е изводимо, се разбира така: в нея, за всяко твърдение, което следва от себе си, е валидно, че или то, или неговото отрицание е изводимо. Обратно, от това, че не е вярно, че дадено твърдение е изводимо, следва, че даденото твърдение не следва от себе си, т.е. то принадлежи на дуалната област, за която по-горе се каза, че е валидно: „всички твърдения са неразрешими”.

Модел на „логиката на хилбертовата математика” може да се построи в духа на квантовата логика от типа на фонНоймановата, спомената по-горе, напр. с помощта на „взаимно неустановимите твърдения”: когато твърденията от едната от двете дуални области имат определени истинностни стойности, тези от другата, нямат такива. В първия случай казваме, че твърденията следват от себе си, а в другия, че не следват от себе си, или по друг начин казано, че не са тъждествени на себе си.

Ако сравним с гьоделовата математика, то там всички твърдения имат определени истинностни стойности и съществуват неразрешими твърдения. В хилбертовата математика някои (фигуративно казано, „половината“) твърдения нямат определени истинностни стойности, но неразрешими твърдения няма. В резултат на това подмножеството на всички разрешими твърдения би била пълно и непротиворечиво. Засега ще изоставим изследването на предполагаемата хилбертова математика и съпоставянето ѝ с гьоделовата, но ще се върнем към него по-нататък.

Нека вместо това да преминем към въпроса дали е валидно самореференциалното разсъждение, което дава положителен отговор за приложимостта на теоремите на Гьодел по отношение на собственото им съдържание? В термините на теорема VI (Gödel 1931: 187; 1986: 172, 173) от изложението на Гьодел (обичайно наричана първа теорема на Гьодел за непълнотата), въпросът следва да се постави така:

Дали доказателството на Гьодел може да се формализира като „$\boldsymbol{\omega}$-консистентен клас от ФОРМУЛИ“? Или казано с малко повече свобода на езика, дали доказателството на Гьодел съдържа в себе си аритметиката на Пеано, което, за да бъде изпълнено, е достатъчно да съдържа нейните аксиоми.

Една теория е „$\boldsymbol{\omega}$-консистентен клас от ФОРМУЛИ“, ако и само ако: 1) съществува взаимно еднозначно съответствие $\boldsymbol{\omega}$ между част от тази теория и естествените числа и техните свойства; 2) по-точно това означава, че не съществува свойство $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n})$, и то за нито естествено число $\boldsymbol{n}$, такова че то да е валидно за естествените числа, но да не е валидно при интерпретацията му в термините на теорията посредством взаимно еднозначното съответствие $\boldsymbol{\omega}$. В скицата на доказателството Гьодел, която вече започнахме да обсъждаме, пише:

За метаматематическите разглеждания е естествено безразлично, какви обекти са взети като първични знаци и се решаваме на това да използваме *естествените числа като такива*[86]*. Съответно на това, една формула тогава е крайна последователност от естествени числа*[87] *и фигурата на едно доказателство – крайна редица от крайни редици естествени числа. Метаматематическите понятия (твърдения) чрез това стават понятия (твърдения) относно естествени числа, респ. редици от такива*[88] *и оттук (поне отчасти) изразими в символите на самата система PM. В частност може да се покаже, че понятията „формула", „фигура на доказателство", „доказуема формула" са дефинируеми вътре в системата PM, т.е. можем, напр., да посочим формула* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$ *от PM с една свободна променлива* $\boldsymbol{v}$ *(от типа на числова последователност)*[89]*, така че* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$*, интерпретирана съдържателно да означава:* $\boldsymbol{v}$ *е доказуема формула* (Gödel 1931: 174; 1986: 146, 147).

Какво следва от този подход относно $\boldsymbol{\omega}$-консистентността на самото доказателство на Гьодел в качеството му на „$\boldsymbol{\omega}$-консистентен клас от ФОРМУЛИ"? Ако изобщо съществува такъв клас от формули, то той ще превърне доказателството на Гьодел в $\boldsymbol{\omega}$-консистентно, тъй като ще се окаже част от него. Също така и изводът на самата теорема – по силата на нейната валидност – веднага се прилага и към самата нея. Тъй като от теоремата, разгледана в качеството на теория, формализирана като „$\boldsymbol{\omega}$-консистентен клас от ФОРМУЛИ" следва единствено нейното заключение, то в резултат на прилагането ѝ към самата себе си, следва, че както самото заключение, така и неговото отрицание са недоказуеми. Тоест обобщено, от доказуемостта на самата теорема и валидността на нейната самоприложимост следва нейната недоказуемост. Обратно, да приемем, че е вярно отрицанието на теоремата: тогава следва, че теоремата е доказуема и поради това, в крайна сметка валидна. От приведеното разсъждение следва, че включването на парадоксален довод от

---

[86] Т.е., изобразяваме първичните знаци по едно-еднозначен начин върху естествени числа.

[87] Т.е., разполагане на отрязък от числова редица с естествени числа. (Числата наистина не могат да се доведат до пространствено подреждане.)

[88] С други думи: гореописаната процедура поражда изоморфен образ на системата PM в областта на аритметиката, и всички метаматематически разсъждения могат еднакво добре да се проведат в този изоморфен образ. Това става в следващата скица на доказателството, т.е. под „формула", „твърдение", „променлива" и т.н. *трябва винаги да разбираме съответните предмети от изоморфния образ*.

[89] Би било много лесно (само малко обременително) да се изпише тази формула фактически.

типа на парадокса на Ришар или на Лъжеца в самото обосноваване на доказателството на теоремата за непълнотата не може да остане без последствия за самата теорема: тя придобива същия характер на недоказуемо твърдение.

За да проследим отчетливо философските следствия от това състояние на нещата, нека отново използваме илюстрацията с парадокса на Лъжеца, тъй като тя запазва всички същностни черти, необходими за разглеждането на въпроса. При обичайна употреба в езика твърдението „Аз лъжа" имплицира обект на лъжата, от който обаче напълно естествено, т.е. по общоприето подразбиране, се изключва самореференциално използване по отношение на самото твърдение. В парадокса на Лъжеца отсъствието на нормално подразбирания от контекста *друг* обект на лъжата, изключен чрез изваждането от какъвто и да било контекст, принуждава в качеството на контекст да се разгледа само твърдение, което чрез това се слива с огледалния си образ на метаравнище: единственият възможен обект на лъжата при тази насилствено и разбира се, изкуствено, нарочно измислена употреба остава самото твърдение, пораждайки необходимата за появата на парадокса самореферентност.

Гьодел изрично пише:

> *От забележката, че* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *твърди своята собствена недоказуемост, следва веднага, че* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *е истинно, понеже* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *е наистина недоказуемо (понеже е неразрешимо). Неразрешимото в системата PM твърдение следователно все пак се разрешава чрез метаматематическо съображение. Точният анализ на това странно обстоятелство води до поразителни резултати по отношение на доказателството за непротиворечивост на формална система, които ще бъдат по-детайлно разработени в Раздел 4 (Твърдение XI)* (Gödel 1931: 176; 1986: 150,151).

Въпросното Твърдение или Теорема XI е всъщност т. нар. втора на Гьодел за непълнотата, която в най-едри щрихи твърди, че самата аритметика на Пеано (еквивалентна на нея или включваща я) съдържа доказателство за собствената непротиворечивост тогава и само тогава, когато е противоречива.

Да подчертаем следната връзка: Гьодел изрично поставя в началото на току-що приведения цитат от него основополагащото т.нар. първа теорема за непълнотата твърдение, твърдящо собствената си недоказуемост, в контекста на

не*саморефлексивна* употреба, която съответства при обсъдената малко по-горе илюстрация чрез парадокса на Лъжеца на обичайната употреба на изречението „Аз лъжа” в някакъв имплицитен контекст. По такъв начин той напълно извежда от обсъждане самореференциалната употреба на т. нар. първа теорема на Гьодел за непълнотата.

По-горе обаче показахме, че това е възможно, оставяйки я сама за себе си извън всякакъв контекст, с който да се съотнесе. Това стана под лозунга тя да бъде разгледана не в качеството на теорема, по какъвто начин се имплицира контекст, а като завършена теория. С това повторихме по същество процедурата, чрез която обичайно употребяваното в контекст твърдение „Аз лъжа” се извежда от него, чрез което се принуждава да се отнесе към себе си, да стане самореференциално. Също така показахме, че т. нар. първа теорема за непълнотата не съдържа никакви необходими логически пречки за самореференциална употреба, както впрочем и самият парадокс на Лъжеца.

Ако и само ако самореференциалната употреба на т. нар. първа теорема за непълнотата бъде изключена чрез външни и следователно произволни съображения, наречени от Гьодел „метаматематически”, съответстващи на интуитивната употреба на твърдението „Аз лъжа”, но противоречащи на начина на самореференциална употреба на аналогично твърдение в хода на самото доказателство, ***тогава и само тогава*** е валидна т. нар. втора теорема за непълнотата.

Ако включим на обичайни основания за последователност, и толкова повече – за логическа прецизност и коректност също и самореференциалната употреба на т. нар. първа теорема за непълнотата, то тогава т. нар. втора теорема за непълнотата е недоказуема, което обаче следва тъкмо от недоказуемостта и на т. нар. първа теорема за непълнотата, тъй като нейната валидност след самореференциална употреба влече нейната собствена недоказуемост.

От приведеното разсъждение и експлицитните цитати би трябвало вече да е ясно, че логик от ранга на Гьодел не може да не си е давал сметка за особения статут на т. нар. първа теорема за непълнотата, поради това че самореференциалната ѝ употреба, от която следва нейната недоказуемост, е изключена по метаматематически съображения. С други думи, изглежда твърде невероятно да не е разбирал, че тя е аксиома и едва след приемането ѝ (заедно с отхвърляне на нейното отрицание по външни спрямо математиката съображения) следва непълнотата на

Пеановата аритметика, визирана в т. нар. втора теорема за непълнотата и оттук зачеркването като невъзможна на програмата за самообосноваване на математиката на Хилберт.

Какво е тогава истинското положение на нещата? От валидността на т. нар. първа теорема за непълнотата следва неосъществимостта на Хилбертовата програма, но заедно с това е необходимо да се въведе външно съображение, което да забрани самореференциалната ѝ употреба. Следователно то има характер на аксиома, и при това последната е необходимо в тясна връзка с т. нар. първа теорема за непълнотата, възможно дори при определени подходи логически еквивалентно с нея.

Ако тази аксиома не бъде добавена (което е различно от това да се приеме нейното отрицание в качеството на аксиома), тогава поради самореференциалната употреба на теоремата, от нейната валидност следва нейната недоказуемост. Тогава т. нар. втора теорема за непълнота не може да се изведе, най-малкото по пътя, следван от Гьодел.

Тогава проличава изключително деликатното и интересно съотношение на т. нар. първа и втора теорема за непълнотата. Неговите последствия вече бяха обрисувани по-горе. Може да говорим за два алтернативни типа математики: Гьоделова математика и Хилбертова математика според това дали математиката не може (Гьоделовата) или може (Хилбертовата) да се самообоснове. Според досега общоприетото разбиране на резултата на Гьодел математиката не може да се самообоснове, но това се доказва с *вътрешно*-математически средства.

Един по-прецизен анализ, чиято скица се опитахме да започнем по-горе, обаче показва, че с изцяло вътрешно-математически средства не може да се докаже нито че математиката може да се самообоснове, *нито че математиката* ***не*** *може да се самообоснове*. С други думи, това е едно неразрешимо твърдение, чиято неразрешимост непосредствено следва от неразрешимостта на т. нар. първа теорема за непълнотата. Неразрешимостта на последната следва от валидността на последната след самореференциално прилагане.

Тогава в рамките на собствено математическо разглеждане ние сме свободни да положим в качеството на аксиома самообосноваването на математиката, и то – тъкмо според програмата на Хилберт – на основата на аритметиката. В този случай е валидно отрицанието на т. нар. втора теорема за непълнотата: аритметиката на Пеано е пълна в смисъл, че съдържа доказателство за собствената непротиворечивост и заедно с това е непротиворечива. От тук веднага следва, че е валидно и отрицанието на първата теорема за непълнота, т.е. от теория, съдържаща аритметиката, не може да се изведе неразрешимо твърдение. Нещо повече, в този случай формулировката на т. нар. първа теорема за непълнотата придобива изглед, аналогичен на т. нар. втора теорема: твърдение, визирано в нея, е разрешимо тогава и само тогава, когато е неразрешимо, поради което трябва да се приеме, че не съществува.

Що се отнася до това: валидно ли е прилагането на т. нар. първа теорема за непълнотата към самата нея, може да се добави още: самият Гьодел изтъква, че неговият

> *метод на доказателство очевидно може да се приложи към всяка формална система, която, първо, съдържателно тълкувана, има на свое разположение достатъчно средства за изразяване, за да дефинира понятията, появяващи се в горното разсъждение (в частност, понятието „доказуема формула") и в която, второ, всяка доказуема формула е истинна също и съдържателно* (Gödel 1931: 175-176 1986: 150, 151).

В последващото изложение замества „втората от току-що приведените предпоставки с чисто формална и далеч по-слаба" (пак там), а по същество именно – че всяка доказуема формула се интерпретира в истинно съждение относно целите числа (т. нар. ω-непротиворечивост).

Въпросът за самореференциалното приложение на т. нар. първа теорема за непълнотата ни отвежда и към третия поставен въпрос: какъв е нейният Гьоделов номер? Основните проблеми тук са два. Първо, съществува ли явна забрана да се присъедини Гьоделов номер на т. нар. първа теорема за непълнотата? Второ, кои символи участват в записа на формулата ѝ: символ за множеството от всички естествени числа или самите символи на естествените числа?

Отговорът на първия въпрос е отрицателен. Не съществува забрана да се присъедини Гьоделов номер на т. нар. първа теорема за непълнотата. Това следва от факта, че такъв се приписва на всяко твърдение от „формалната система P, за която искаме да докажем съществуването на неразрешими твърдения" (Gödel

1931: 176; 1986: 150, 151) и от дефинитивното описание на такава формална система $\boldsymbol{P}$ (Gödel 1931: 176-177; 1986: 150-152, 151-153), според което т. нар. първа теорема за пълнотата, разгледана в качеството на формална система в съответствие със съображенията, изложени по-горе, изпълнява изискванията за такава формална система.

Отговорът на втория въпрос е, че се изброяват в качеството на символи всички естествени числа и това следва от описания (Gödel 1931: 178-179; 1986: 156, 157) начин, по който се построява взаимно еднозначно съответствие между първичните знаци на формалната система $\boldsymbol{P}$.

От тези две съображения следва, че Гьоделовият номер ϯ, който би трябвало да се присъедини на самата т. нар. първа теорема за непълнотата, е ϯ $= \prod_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n_i}}$, където $\boldsymbol{p_i}$ са простите числа, подредени по нарастваща големина, а $\boldsymbol{n_i}$ са естествените числа, които кодират чрез едно-еднозначното съответствие първичните знаци от формалната система $\boldsymbol{P}$. Очевидно този номер ще бъде безкраен и няма да е уникален, тъй като и на отрицанието на т. нар. първа теорема за непълнотата ще бъде приписан същият (!?) безкраен номер. За всеки краен гьоделов номер можем да възстановим еднозначно оригиналната формула, обаче за самата Гьоделова теорема, поради това, че номерът ѝ е безкраен, се присъединяват поне две формули: самата тя и нейното отрицание и по него е невъзможно да бъде възстановена еднозначно. Поради това доказателството му не може да се приеме за конструктивно, тъй като съществува поне едно твърдение, а именно самата т. нар. първа теорема за непълнотата, по чийто номер ϯ не може да се възстанови еднозначно самото твърдение. Що се отнася до т. нар. втора теорема за непълнотата, то тя не е конструктивна по силата на това, че е недоказуема. В нашия контекст следва да се постави също така следният проблем: валидно ли е твърдението ϯ $< \boldsymbol{\varepsilon_0}$.

Тъй като вече скицирахме отговора на въпроси 5, 6 и 7, да преминем към отговора на въпрос 8. Може ли дуален подход да намери изход от ситуацията и дали такъв подход не може сам да се разглежда в този смисъл като следствие от неразрешимостта на проблема за пълнотата? Очевидно тук по-скоро трябва да се премине към философски тип отговор. Оформя се дуализмът: или Хилбертова самообосноваваща се математика, или Гьоделовата математика на непълнотата. Двата подхода са еднакво валидни, но несъвместими. Както вътре в Хилбертовата, така и вътре в Гьоделовата математика имаме съответно или две дуални области, в която или всички твърдения са разрешими, или нито едно твърдение не е разрешимо, от една страна, или от друга, съществуват както разрешими, така и неразрешими твърдения, при което принадлежността към единия или другия клас трябва да се решава конкретно за всяко отделно твърдение. Очевидно е също така, че едно неразрешимо твърдение може да се разглежда като две дуални, еднакво валидни, но несъвместими твърдения, с други думи, като кохерентната суперпозиция „да-и-не твърдение", както и че една кохерентна суперпозиция, да речем, пословутият и вече разгледан пример с Шрьодингеровата „жива-и-мъртва котка", може да се тълкува като неразрешимо твърдение, чието разрешаване се извършва чрез необходимо външната процедура на измерването (наблюдението).

Квантовата механика и информация ни предлага интерпретативния ключ, чрез който можем да осмислим и да си изясним от философска гледна точка съотношението между Хилбертовата и Гьоделовата математика. Последната съответства по-точно на онтологично-епистемологичния изход, намерен от квантовата механика и информация, за специфични, но аналогични напрежения и това ни позволява да говорим за особен стил на мислене, условно наречен тук „Принстънски дух", характерен за епохата, но непроизтичащ необходимо от самото състояние на нещата, чието дуално осмисляне е и тъкмо Хилбертовата самообосноваваща се математика.

Затова обаче има и по-дълбоки *историко*-философски и може би дори историко-*онтологически* основания. С еднакви основания можем да говорим за две взаимно трансцедентни, но свързани и поне отчасти огледални, „рефлексивни" области (които и да са те, напр. крайно и безкрайно, субект и обект и пр.) или за една единствена интегрална област, в която двете начала се проникват взаимно, в общия случай във всеки обект, без това да изключва самостоятелното съществуване на двете начала, обаче само в качеството на гранични частни случаи, крайните точки на един всеобхватен континуум между тях.

В историята на духа по-скоро първоначалният, „класическият" вариант, който се реализира, е първият, докато т. нар. Принстънски *дух* характеризира развитието на специфичните конфликти в него и преходът към втория подход, всъщност еднакво възможен според състоянието на нещата.

За да си изясним съотношението между контекста на откритието, зададен чрез т. нар. теорема за пълнотата на Гьодел, и неговото съдържание, съответстващ на т. нар. първа и втора теорема за непълнотата, нека сега отново се насочим към общия план и замисъла на доказателството, така както са изложени от Гьодел:

> *Ще скицираме, преди да навлезем в детайли, първо главната идея на доказателството, естествено, без да предявяваме претенция за точност. Формулите на една формална система (тук се ограничаваме до системата PM [90]) са, отвън разгледани, крайни последователности от основни знаци (променливи, логически константи и скоби или, съответно, точки за разделяте) и лесно може точно да се прецизира,* кои *редици от основни знаци са смислени формули и кои не са [91]. Аналогично, доказателствата, от формална гледна точка, не са нищо друго освен крайни последователности от формули (с определени свойства, които могат да се посочат)* (Gödel 1931: 174; 1986: 146, 147).

Тук бихме искали да подчертаем два момента относно формулите, които биват разглеждани, а именно: че са множества с *краен* брой елементи и че са последователности, т.е. елементите им са *номерирани еднозначно* и тук – както и в разгледаното по-горе доказателство на Генцен – на всяка формула съответства ординал. Както вече видяхме, с това възниква проблем със самата т. нар. първа теорема за непълнота, разгледана в качеството на формула: тя трябва да съдържа безкраен брой елементи, тъй като необходимо включва подмножество с безкраен брой елементи, а именно естествените числа. След като тя не е формула (можем да приемем ограничението до системата PM) единствената възможност, която остава, е да я тълкуваме като теория и с това да продължим по пътя към самореференциалното ѝ приложение. От друга страна, може да се предположи, че нейният ординал в качеството ѝ на формула, нека го означим с ϯ, е по-малък от $\boldsymbol{\varepsilon_0}$: $ϯ < \boldsymbol{\varepsilon_0}$.

Следователно може да се издигне хипотезата, че макар т. нар. първа теорема за непълнотата – след обосноваването на нейното самореференциално

---

[90] Системата на „Принципи на математиката” от Ръсел и Уайтхед. – Бел. моя: В.П.

[91] Разбираме тук и в следващото под „формула от PM” винаги формула, написана без съкращения (т.е. без използване на дефиниции). Дефинициите служат винаги само за по-кратък начин за запис и са следователно по принцип ненужни.

прилагане – се оказва недоказуема като следствие от собствената ѝ валидност, тя все пак е доказуема посредством трансфинитна индукция, т.е. в системата, използвана в качеството на метатеория в доказателството на Генцен.

Едно друго съображение е тясно свързано с контекста на обсъжданото доказателство както в творчеството на Гьодел, така и при стандартното ѝ изложение, а именно във връзката с т. нар. теоремата на Гьодел за пълнотата, представляваща основен резултат в неговата дисертация. Нейното доказателство е публикувано в 1930 г. – годината, предшестваща публикацията „За формално неразрешими пропозиции на Principia mathematica и родствени системи I" (1931). За нас в тази връзка са особено съществени два въпроса:

1. По какво в основата си се различават условията, описващи една математическа система, в т. нар. теорема за пълнотата и в първата теорема за непълнотата, така че на такава разлика да може да се вмени ролята на „причина", т.е. на достатъчно и може би необходимо условие за поява на „непълнотата"?

2. На коя аксиома в теория на множествата съответства тази съществена разлика?

За изясняване смисъла на първия въпрос много помага т. нар теорема за компактността:

> *За да бъде изброимо безкрайна система от формули изпълнима* [erfüllbar], *е необходимо и достатъчно всяка нейна крайна система да е изпълнима* (твърдение 10: Gödel 1931: 358; Gödel 1986: 118, 119).

Един възможен, често срещан, но *неверен* отговор на първия поставен въпрос е следният: докато в т. нар. теорема за пълнотата става дума за краен брой „първични знаци", съставящи евентуално безкраен брой формули, то т. нар. първа теорема за непълнотата се отнася до формули, съставяни с помощта на безкраен брой теорема първични знаци, сред които със сигурност, твърди тя, може да се открие такава, която се явява неразрешимо твърдение.

Необходимо условие за дадения отговор и други аналогични или дори еквивалентни твърдения от същия тип е абсолютна разлика между първичен знак и формула, на което в теорията на множествата съответства такава между елемент и множество, а в елементарната аритметика, аксиоматизирана по Пеано – аналогична между число и неговия наследник, респ. между число и неговия предходник. За никое n не е вярно, че n и $n+1$ съвпадат. При крайни както кардинални, така и ординални числа това е безусловно вярно. Но всъщност това е фундаменталната и основополагаща разлика между безкрайните ординали и кардинали: докато първите запазват това свойство, като се оказва в основата на изискването за ‛конструктивност′ и дори за ‛финитност′, то не е вече валидно за безкрайните кардинали.

Що се отнася до теорията на множествата от изначална важност е аксиомата за фундирането: ако допуснем, че не е валидна, то съществува множество, за което разликата между елемент и множество, остава винаги относителна; обратно, ако бъде приета, наличието на „дъно” предполага, че винаги съществуват елементи, които по принцип не могат да бъдат множества.

По един парадоксален начин обаче, ролята на такова „дъно” изпълнява празното множество, $\emptyset$, т.е. множеството, което няма елементи. В елементарната аритметика, такъв елемент е първото естествено число, за каквото в повечето съвременни трактовки – поради съображението да бъде включен и неутралния елемент на събирането – се приема нулата, т.е. онзи брой, когато няма какво да се брои. Обсъждането на необходимостта от тази парадоксалност на празното множество или на началното число ще оставим засега настрана.

Както вече видяхме, че е възможно, ако се приеме за пълна, такава система, която съдържа безкраен брой „първични знаци” (т.е. такава, която може да се кодира чрез естествените числа), то това веднага изисква суспендиране на аксиомата за фундирането, съответно и най-нагледно – въвеждането на отрицателните числа в качеството на естествени; или с други думи: заличаване на каквато и да е разлика между символ и формула, между елемент и множество; фигуративно казано, една „всеобща ковариантност”, „пълна относителност” в първичната логика, теорията на множествата и аритметиката.

Подсказаната чрез последната фраза връзка между векторни и тензорни пространства, типове от които, обслужващи чудесно не само специалната и общата теория на относителността, но и квантовата механика и информация, от една страна, и първична логика, теория на множествата и елементарна аритметика, от друга, може би на пръв поглед изглежда съвсем изкуствена, „метафорична”, дори може би некоректна и „чудовищна”, всъщност обаче отдавна е въдворена в употреба чрез теоремата за компактността и доказаната ѝ еквивалентност в редица съществвени аксиоматики със сега обсъжданата теорема за пълнотата. Този подход е в основата на теорията на категориите, в която се изучават изображенията („функтори") от една в друга между различни структури („категории", които в случая са три: булеви алгебри, топологически и векторни пространства).

От голяма важност са две теореми на Стоун: чрез едната от тях на всяка булева алгебра (на свой ред изоморфна на обичайното пропозиционално смятане) еднозначно се съпоставя компактно напълно несвързано хаусдорфово пространство (наричано още пространство на Стоун[92]) и чрез това някакъв базис както на топологично, така и на векторно пространство. Оттук по теоремата на Тихонов, че произведението от компактни пространства е компактно, следва теоремата за компактността и тясно свързаната или еквивалентна на нея теорема за пълнотата. Другата теорема на Стоун, в тясна връзка с първата, установява еднозначно съответствие между самоспрегнатите оператори в хилбертово пространство (обхващащи и т. нар. хипермаксимални оператори, на свой ред еднозначно свързани с физическите величини в квантовата механика) и еднопараметричните семейства от унитарни оператори в него. Теорията на категориите позволява да се очертават фундаментални структури, за които обичайни математически структури, често изучавани в отдалечени клонове на математиката, се явяват не повече от различни модели на една и съща такава фундаментална структура.

За да си изясним защо даденият и характеризиран като често срещан отговор на първия въпрос е неверен, следвам да навлезем в подробности в доста необикновената логическа връзка между т. нар. теорема за пълнотата и двете теореми за непълнотата в светлината на вече направените по-горе разсъждения относно самореференциалната приложимост и оттук неразрешимост на т. нар. първа теорема за непълнота.

Поразителното е, че всъщност и Гьодел винаги го е твърдял, но по един доста необичаен, логически прецизен, но твърде софистициран начин, който е на самата граница на това да се предположи съзнателно въвеждане в заблуждение.

В доказателството на т. нар. теорема за пълнотата никъде не се твърди, че то е конструктивно, за разлика от цитираните места в публикацията

---

[92] Точките в пространството на Стоун са ултрафилтрите на булевата алгебра. Оттук може да се построи непосредствена връзка и с актуално безкрайно малките в нестандартния анализ на Робинсън, както и тяхното представяне чрез компактните оператори в хилбертово пространство, предложено от Ален Кон (Connes 1995).

(1931) относно т. нар. теореми за непълнотата. В наше време не се оспорва, че то не е конструктивно в точно определена степен, а именно в степента, в която не е конструктивна „лемата за ултрафилтрите”[93], по-слаба форма на аксиомата за избора. Освен това никъде не се твърди и следователно, никъде не се използва, че броят на „първичните знаци” – вкл. и според цитираното описание, дадено им в публикацията относно т. нар. теореми за непълнотата – е краен. При безкраен брой „първични знаци” могат да бъдат изпълнени едновременно и теоремата за пълнота и т. нар. първа теорема за непълнотата (след самореференциалното ѝ прилагане, което я превръща в неразрешимо твърдение), но не може да бъде изпълнена т. нар. втора теорема за непълнотата. Обратно, ако са изпълнени т. нар. първата и втората теорема за непълнотата, не може да е изпълнена т. нар. теорема за пълнотата.

Обсъжданото наведено за „въвеждане в заблуждение” има чисто психологически характер: докато връзката между т. нар. първа и втора теорема за непълнота се преекспонира, поради очевидно натрапващото се тяхно единство в рамките на една публикация, то еквивалентната по логическа значимост връзка между т. нар. теорема за пълнотата и т. нар. първа теорема за непълнотата се скрива в сянката на пролома между двете публикации, в сякаш изкуствено предизвикана „кокоша слепота” чрез светкавицата между т. нар. първа и втора теорема за непълнота и оттук и чрез оглушаването от грохота от предизвиканото от нея предполагаемо срутване на Хилбертовата програма за самообосноваване на математиката.

Това навежда и към един съвсем подчертано психологически въпрос: какви собствено са били отношенията между наследилия короната на Гаус като крал на математиката Хилберт и младия, борещ се за място под слънцето Гьодел? Изследването му обаче би ни отвело прекалено далеч от тематиката, подходите и методите на настоящата работа.

Бихме обърнали вместо това внимание на една неспоменавана възможност за съотношение между Хилбертовата и Гьоделовата математика, а именно че тяхното сечение не е непременно празно, при което биха били валидни, както т. нар. теорема за пълнота, така *и двете* т. нар. теореми за непълнота. С други думи, не може да се изключи съществуването на аксиоматики, необходимо съдържащи брой първични знаци, който не е краен, които заедно с това удовлетворяват

---

[93] Според нея, не съществува филтър в множество, който да не се съдържа в някой ултрафилтър в това множество.

едновременно т. нар. теорема за пълнотата и първа теорема за непълнотата. Най-прост наглед за такава ситуация може да се даде посредством интуиционисткото суспендиране на правилото за изключеното трето при безкрайни множества. За целта просто трябва да изключим аксиомата за фундирането, т.е. не да я заместим с нейното отрицание, а да я премахнем: с това „по интуиционистки" оставяме висящ въпроса, съществува ли множество, което няма „дъно" (= няма крайно „дъно"). С други думи, трябва да оставим без какъвто и да било отговор въпроса съществуват ли първични знаци[94], които заедно с това са формули; елементи, които не могат да бъдат множества; или ординали, които съвпадат със своя наследник. Този отказ от отговор изглежда свързан и с отказ от алтернативата: или потенциална, или актуална безкрайност, както и с приемане на хипотезата, че валидността на самореференциално прилагане на едно твърдение трябва да се решава винаги конкретно и често необходимо по съображения, външни за формализма, в който се съдържа.

Подобно русло, напомнящо прагматизма, на пръв поглед изглежда напълно чуждо на питагорейството, докато не си спомним, че обсъжданият тук негов вариант включва също така и една теория на измерването като редукция на трансфинитното или кохерентното към финитното, и то в качеството на собствено, т.е. вътрешно математическа.

Да проследим от набелязаната философска гледна точка, която си позволихме да наречем дуално или дуалистично питагорейство, как в скицата на доказателство, предложена от Гьодел, се построява неразрешимото твърдение:

> *Сега създаваме неразрешимо твърдение за системата PM, т.е. е твърдение* ***A****, за което нито* ***A****, нито не-****A*** *е доказуемо, по следния начин:*
>
> *Формула от PM с точно една свободна променлива, и то от типа на естествените числа (клас от класове), наричаме* знак на класове[95]*. Знакът на класове си [го] мислим някак подреден в последователност*[96]*, означаваме*

---

[94] За съжаление много интересната връзка с философското направление на феноменологията, разглеждаща феномените като знаци на самите себе си, или по определението на Хайдегер „показващи сами себе си в себе си" няма да има възможност да се проследи в настоящото изследване, но може би в някое следващо.

[95] Klassenzeichen, в английския превод „class sign": срещащият се понякога на български превод „клас знаци" е неправилен и изопачава смисъла.

[96] Например, по нарастваща сума на членовете и при еднаква сума лексикографски.

$\boldsymbol{n}$-ия с $\boldsymbol{R(n)}$ и забелязваме, че понятието „знаци на класове", както и подреждащото отношение $\boldsymbol{R}$ може да се дефинира в системата PM. Нека $\boldsymbol{\alpha}$ е кой да знак на класове; със $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{n}]$ да означим онази формула, която съответства на знака на класове $\boldsymbol{\alpha}$ чрез това, че свободната променлива е заместена със знака за естественото число $\boldsymbol{n}$. И тройното отношение $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{y}; \boldsymbol{z}]$ се доказва като дефинируемо в PM. Сега ще дефинираме клас $\boldsymbol{K}$ от естествени числа по следния начин:

$$(1) \qquad \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{K} \equiv \overline{\boldsymbol{Bew}}\,[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}); \boldsymbol{n}] \qquad (59)$$

(където $\boldsymbol{Bew}\ \boldsymbol{x}$ означава: $\boldsymbol{x}$ е доказуема формула)[97]*. Тъй като понятията, които се срещат в определящият израз, заедно с това са дефинируеми в PM, така и понятието $\boldsymbol{K}$, съставено от тях, т.е., има знак на класове $\boldsymbol{S}$, така че формулата $[\boldsymbol{S}; \boldsymbol{n}]$, съдържателно тълкувана, означава, че естественото число $\boldsymbol{n}$ принадлежи на $\boldsymbol{K}$* [98]*. $\boldsymbol{S}$ е като знак на класове идентичен с едно определено $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q})$, т.е. е в сила*

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}) \qquad (60)$$

за определено естествено число $\boldsymbol{q}$. Сега показваме, че твърдението $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}); \boldsymbol{q}]$ е неразрешимо в PM [99]*. Тъй като предположеното твърдение $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}); \boldsymbol{q}]$ би било доказуемо, то би било също и истинно, т.е. обаче според горното $\boldsymbol{q}$ щеше да принадлежи на $\boldsymbol{K}$, т.е. според (1), $\overline{\boldsymbol{Bew}}\,[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}); \boldsymbol{n}]$ би било в сила, в противоречие с допускането. Ако, обратно, отрицанието на $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}); \boldsymbol{q}]$ беше доказуема, то*

---

[97] С чертата отгоре е означено отрицание.

[98] Не представлява отново никаква трудност да се запише формулата S фактически.

[99] Забележете, че „$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}); \boldsymbol{q}]$" (или, което значи същото, „$[\boldsymbol{S}; \boldsymbol{q}]$") е просто *метаматематическо описание* на неразрешимото твърдение. Но веднага щом формулата $\boldsymbol{S}$ е получена, можем естествено да определим и числото $\boldsymbol{q}$ и чрез това реално да запишем самото неразрешимо твърдение.

> *щеше* $\overline{\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{K}}$*, тоест* $\boldsymbol{Bew}\,[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n}); \boldsymbol{n}]$ *би било в сила.* $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q});\ \boldsymbol{q}]$ *би било доказуемо едновременно със своето отрицание, което отново е невъзможно* (Gödel 1931: 174-175; 1986: 146-148; 147-149).

С други думи, неразрешимото твърдение, което построява Гьодел, е, че за всяко едно число може да се реши проблемът *дали то принадлежи на множеството от всички числа, за които това* (а именно поставеното в курсив в същото това изречение) *твърдение не е вярно*. Това ни позволява да оценим постигнатото от Гьодел – имайки предвид и цитираната вече негова бележка под линия 14 (Gödel 1931: 175; 1986: 148, 149):

> *Може да се използва изобщо всяка епистемологична антиномия за едно доказателство за неразрешимост от такъв вид –*

по следния начин: построен е *обобщаващ* модел в аритметиката на Пеано вероятно[100] на всички самореференциални семантични и теоретико-множествени твърдения, водещи до парадокс. Както вече изказахме хипотезата, включването на твърдение от такъв тип в доказателство има твърде висока цена, аналогична, макар и не чак толкова висока, на включването на противоречиво твърдение в едно доказателство. Тази цена е че *доказаното по такъв начин твърдение придобива самото то неразрешим характер*, при това напълно достатъчно е, щото последното твърдение (а именно поставеното в курсив) да не е опровержимо, т.е. може да бъде както доказуемо, така и неразрешимо.

Вече видяхме, че Гьодел не напуска така очертаната прецизна логическа схема, но същевременно тя се оказва съзнателно или несъзнателно реторично оформена. В резултат на това мнозина нейни тълкуватели са се оказвали подведени по интенциите на нейната реторика, оставайки в „кокоша слепота” за логическата ѝ цялост.

---

[100] Тук „вероятно” е добавено, за да не обсъждаме възможността настоящето твърдение също така да се окаже или от него непосредствено да следва неразрешимо твърдение.

ГЬОДЕЛ И АЙНЩАЙН

Рационалистичен монизъм – Непълнотата и нейното изправяне – Принстънският дух от гледна точка на едно дуалистичното питагорейство – Кое е същото? – Познанието на безкрайното

И двамата велики учени са приютени в Принстънския Институт за перспективни изследвания. Налице са множество свидетелства за срещите им, обмен на мисли и приятелство (напр. Yourgrau 2006).

За нас обаче в руслото на настоящото разглеждане е по-важно да обърнем внимание на общността на техните интенции по проблеми, контурите на чието единство вече започнаха да се набелязват.

Такава общност може да се обобщи най-грубо и като встъпление по следния начин: рационалистичен монизъм; да се търси единна първооснова за обяснение на света изобщо и за конкретните изучавани явления в частност. Централна е важността на причинните връзки в физиката и съответните им импликативни връзки в математиката. Изходната основа е крайното, логическото, рационалното, а обратните членове в опозициите – безкрайното, аритметичното, емпиричното са производни и играят подчинена роля. Така и за двамата, съответно за Айнщайн квантовата механика, а за Гьодел аритметиката, са непълни.

По-възрастният, Айнщайн е и по-краен: той се опитва „да поправи” непълното, да разкрие *скритата* му пълнота, чрез изказване и доказване на хипотезата за „*скритите* параметри”. Той сякаш има и повече основания. $\boldsymbol{\Psi}$-функцията зависи от половината променливи в сравнение с аналогичната функция на състоянието в класическата физика. Къде са останалите? Какво е станало с тях? Разширяването на човешкото знание в случая на квантовата механика изглежда като намаляване.

По-младият, Гьодел е и по-умерен. Не се стреми „да поправи” аритметиката в прокрустовото ложе на логиката. Не гледа на неизводимите твърдения като на скрити аксиоми или като на изводими от такива.

Във връзка с това може би е уместно известно разяснение. Поради съществуването на неизводими твърдения съответната аксиоматика не престава да бъде пълна, нито пък става противоречива. Нейната пълнота и непротивоворечивост се състои в това, че за *всички изводими* твърдения от нея се извеждат или те, или техните отрицания. Така пълнотата в математически смисъл не засяга изобщо и по принцип въпроса за неизводимите твърдения. Пълнотата не означава изводимост на всички синтактично правилно построени твърдения в дадена аксиоматика (разбира се, или на тях, или на техните отрицания).

След узнаването на фундаменталния резултат на Гьодел се откриват редица твърдения, неизводими в конкретни аксиоматики, покриващи изискванията на Гьоделовата теорема за непълнотата. Може би най-известното сред тях е континуум-хипотезата, предложена още от Кантор, която в един от своите варианти на формулировка гласи, че между мощността на целите и числа и тази на континуума няма друга мощност. Както то, така и неговото отрицание е съвместимо с аксиомите на теорията на множествата (Gödel 1940; Cohen 1963, 1964, Коэн 1969) в смисъл, че добавянето им не води до противоречие.

Как обаче стои въпросът с пълнотата? Несъмнено има твърдения, зависими от хипотезата за континуума и които, както и самата тя, не могат да бъдат изведени (нито техните отрицания) *от* аксиомите на теорията на множествата. По отношение на какво да преценяваме пълнотата? По отношение на всички синтактично правилни твърдения в дадената аксиоматика, или само по отношение на онези от тях, които следват от себе си: тъй като по силата на вече обсъжданата в предната глава теорема на Мартин Льоб (1955), ако те следват от собствената доказуемост, следва, че са изводими.

Отговорът зависи от определението, което даваме на пълнота. Същественото е да се разграничат и да не се смесва пълнотата, да я наречем в синтактичен смисъл, с пълнота в смисъла на теоремата на Льоб.

Такова или може би по-скоро аналогично разграничение на понятието за пълнота може съществено да помогне в изясняване на аргументите на привържениците на хипотезата за „скритите параметри” в квантова механика. Например, бихме могли да се опитаме да формулираме едно „льобово” твърдение във физиката: ако нещо е причина на самото себе си, то необходимо се причинява от други неща. Любопитна е разликата в двата подхода – логическия и физическия. Докато теоремата на Льоб обсъжда доказуемостта, с други думи, следването от себе си в определен контекст, то причинността се разглежда независимо от всякакъв контекст.

На тази основа хипотезата за скритите параметри се изказва вече по нов начин: *всяко* нещо е причина на самото себе си. Внимателното вглеждане в това твърдение показва, че то има метафизичен, в смисъла на Попър, т.е. нефалшифицируем характер, който първоначално ще илюстрираме чрез неговия аналог в логиката: всяко твърдение следва от себе си. За да не следва едно твърдение от себе си, т.е. тази импликация да не е валидна, първо трябва да е налице твърдението като предпоставка, но, второ, да отсъства като следствие. Тази ситуация се забранява обаче от явното или предразсъдъчното определение на твърдение, сякаш интуитивно разбираемо като известно постоянство. Със съзнателното или несъзнателно приемане на такова постоянство фалшифицируемостта на твърдението „всяко твърдение следва от себе си" се изключва и то се превръща в метафизика в един попъровски смисъл или в идеология (в смисъла, че една частна позиция, в случая тази на „постоянстващите твърдения" се приема за или замества универсалната, в случая на всички, т.е. и на постоянстващите, и на променливите твърдения).

Вече пренесено във физиката, това означава, че не всички неща са причина на самите себе си, а само запазващите се, т.е. за тези, за които е валиден законът за запазване на енергията. Както вече видяхме, законът за запазване на енергията в обичайната квантова механика играе фундаментална роля, заедно с универсалното време на макроуреда, валидно и за квантовия обект. Той позволява да се отговори на въпроса, кое е същото, когато преминаваме от „гледната точка" на макроуреда към тази на квантовия обект. Ако ние се откажем от него, въпросът – „Кое е същото?" – престава да бъде тривиален и дори може да няма никакъв, в т.ч. и нетривиален отговор.

Това – от една страна, от друга обаче, такъв отказ, вероятно под формата на обобщение на закона за запазване на енергията, би ни позволило да „сверим часовника си" с реалното положение във физиката, където изглежда има неща, които не са причина на себе си, тъй като са в състояние да изчезват или да се появяват без друга причина, т.е. от само себе си, и следователно в нарушение на закона за запазване на енергията, евентуално обаче в съответствие с по-общ закон.

Разширената аналогия, която построихме, позволява също така да се види скритата „метафизика" и „идеология" в твърдението „Всички неща са причина на самите себе си", поне що се отнася до квантовата механика и при направените уточнения. Законът за запазване на енергията се *постулира*, чрез което квантовият свят ни *се привижда* в зашеметяващи по своята сложност „птоломеански епицикли” от уж „елементарни” (!?) *частици*. Целият свят, всичко трябва да се „върти около земята” в случая около макроуреда, чиято частна гледна точка се универсализира като една „идеология”, която може да се нарече идеология на макросвета, чиято първичност обаче е скрит антропоцентризъм, тъй като произтича от може би по-скоро случайния факт, че е „когнитивната ниша”, в която е възникнал човешкият интелект. Заедно с това, метафизично нейното фалшифициране се оказва забранено по силата на едно сякаш „скандиране” и донякъде „вълпяване” на закона за запазване на енергията.

Ако обаче се откажем от тази безвъпросно „ясна” централност на макроуреда и на емпиричността, ако си позволим „коперникански преврат” и в квантовата механика, при което водеща позиция да придобие квантовият обект, вероятно в двете обличия и на микрообект, и на вселена, чието единство се скрепя от целостността, от холизма, то изглежда птоломеански сложната картина на нашето познание за квантовия свят рязко ще се опрости, ще придобие простота и естественост. При това обаче следва да се отхвърлят привидно толкова очевидните закон за запазване на енергията и универсално време на макроуреда: това би била вече една ***не****унитарна* квантова механика. Постоянството на квантовия обект, идеологическата универсалност на макросвета и изключителната простота на времето са трите свързани илюзии, от които следва да се откажем.

Гьодел и Айнщайн, а чрез тях и „Принстънският дух”, присъщ не непременно на Принстън, се оказват свързани не само от едно осъвременено питагорейство, което сме склонни с охота да приемем, но и от известна специфична едностранчивост, която се опитахме бегло да скицираме. Тя може да се нарече, преди всичко за да се обозначи, метафизична идеология на крайността, която се опитва не да търси равновесие или сътрудничество с безкрайността, а към подчинението на последната, но по този начин и с това – оставайки в рамките единствено на своето подчинение.

Въпреки че настоящата работа е в областта на философията на физиката, тя бегло докосва някои въпроси, междинни с философията на математиката. Платонизмът или реализмът в математиката настоява за съществуването на математическите обекти. Добре известно е, че оригиналното учение на Платон, а впоследствие и неоплатонизмът изпитват силно въздействие или дори възникват под влияние на древното питагорейство, което остава в съществена степен сакрализирана и мистична доктрина. Следователно на реализма в математиката може – чрез посредничеството на Платоновото учение – да се гледа и като на едно смекчено, профанизирано, опортюнистично, но заедно с това и универсализирано питагорейство.

Начинът, по който се опитваме да подходим към „Принстънския дух” в качеството му на своеобразно неопитагорейство, напомня подобно смекчаване, постигано, както в оригиналния платонизъм чрез удвояване. Специфичното, идващо може би от „Копенхагенската интерпретация” на квантовата механика е, че двете същности се уравновесяват, което не може да се постигне чрез винаги несъвършеното отражение, при което една от двете доминира, а чрез принципа на допълнителността, при който двете същности взаимно се заместват, бидейки и винаги оставайки еднакво необходими – *дуални*.

При това обаче, заставайки на собствено философска и следователно универсалистка позиция, не може да не отбележим, че макар и дуалистична, неопитагорейската доктрина на квантовата информация не преодолява, по-скоро трансформира или дори „сублимира” току-що споменатата „Принстънска едностранчивост”. Така за нея и двете равноправни, дуални същности остават собствено и чисто математически: крайното число и безкрайното, мислено до голяма степен по подобие на крайното, обединени в $\boldsymbol{\Psi}$-функцията, разбрана като своеобразна бройна система с комплексни крайни цифри и безкрайна имагинерна основа. Освен това някак си просто има (незнайно защо) също така и фундаментални константи, които осигуряват превод на числовото на „езика на материята”, при което се повтаря може би трансформираният, „сублимиран”, „преобърнат” превод на безкрайното на езика на крайното.

Съществено в случая е не толкова „самокритиката” – по-скоро не повече от това да улеснява възприемането на възгледа, – колкото артикулирането на специфичните напрежения и оттук на проблемите, които именно той поставя или ще поставя:

1. *Фундаменталните константи*. Дали някои от тях, или всички те могат да се обосноват собствено математически. Само да споменем, че тези, които са най-близко до настоящото разглеждане – константата на Планк и на скоростта на светлината във вакуум – се разцепват на две величини (например съответно: разс-

тояние и импулс; разстояние и време) *по обратен* начин: чрез тяхното умножение – деление.

2. Материалният свят. Дали той съдържа и собствена несводима към чисто математическото и безразмерното същност, която по този начин да ограничава неопитагорейското нашествие на квантовата информация в донякъде повтарящия се и частично запазващ се свят, който познаваме.

3. *Познанието на безкрайното*. Имаме ли друг, непосредствен път за неговото познание освен косвения по подобие на крайното, при което *някои* свойства на последното се абстрахират и въдворяват в безкрайното, в някаква степен насилствено (или с други думи, конвенционално) му се вменяват. Впоследствие обратното движение на едно „разкаяние”, което ги привижда като *„отразени*” от безкрайното (с това наподобявайки един класически ход на мисълта за възвръщането на абстрахираните свойства на материалното обратно в него самото като отразени от идеалното), навежда към представа за безкрайното, или по-общо – за другата същност, просто като огледало, което позволява първата същност да се появи като ейдос, идея, т.е. в обличието на втора същност. Всъщност не става ли дума за не повече от рефлексия: нещо и неговото виждане като цяло, като едно, като негов облик, цялост?

Нека накрая завършим с едно специфично напрежение, обаче допускащо съществено напредване по посока на конкретен отговор, а именно със съображения и опит за оценка на броя (кардиналното число на множеството) на гьоделово неразрешими твърдения, което е в пряка връзка с направеното философско обсъждане на причинността, запазването, както и с този на състоянията АПР (сдвоените състояния). Грубо казано, дали и в двата случая става дума за екзотично явление, което без особена загуба може да се пренебрегне или точно напротив, за общия случай, спрямо който обхватът на всички явления, разглеждани досега от логиката (респ. математиката) или физиката представляват граничен краен частен случай.

НЕПЪЛНОТАТА В СМИСЪЛА НА ГЬОДЕЛ И НЕПЪЛНОТАТА НА КВАНТОВАТА МЕХАНИКА ПО АЙНЩАЙН

Непълнота на непълнотата – Смисъл на непълнотата на квантовата механика по Айнщайн – Принципът на относителността – „Актуалистки" преформулирана диагонализация – Подходи към диагонализацията – Парадоксът на Скулем – Относителност по Скулем – Относителност на видовете безкрайности – Относителност на крайно и безкрайно – Относителност на дискретно и континуално – Неразрешимост на безкрайността – Относителност на множество и изображение – Парадоксът на Скулем и теоремите на Гьодел – Подходът на Скулем за обезболяване от парадокса – Необходимото наличие на невъзнамерявана интерпретация – Теоремата на Рамзи – Два начина за дефиниране на безкрайност в Пеановата аритметика – Относителност на пълнота и непълнота – 1. На аритметиката – 2. На квантовата механика – Аксиоматиката ZFC и аксиоматиката NBG – Скулемова относителност на понятието за множество – Отново за единната неразрешимост на парадокса на Лъжеца и на Стрелата – Противоречие и неразрешимост – Относителност на относителността и неразрешимост на неразрешимостта – Общият проблем на Айнщайн и Гьодел – Обобщение на принципа на относителността – Аксиома за избора и постулат за ненадвишаване скоростта на светлината във вакуум – Проблемът за идентичността след квантов скок – Приемане или отказ от закона за запазване на енергията – Парадоксът на Скулем и относителността на познанието – Аритметична версия на парадокса – Относителност на конструктивизма и Хилбертовия формализъм – Онтологична перспектива към парадокса на Скулем – „Модели и реалност" на Х. Пътнам – Аксиомата на Гьодел за построимостта (конструктивността) – За относителността на реализма – За неизбежната едностранчивост на всяка философска концепция – За математиката на реалния свят

Ако предната глава по-скоро се стремеше да се въздигне на достатъчна философска висота, за да обедини, да види като едно двама, несъмнено твърде различни автори и велики учени, то настоящата – но на нейна основа – ще се опита да разграничи някои разлики и може би присъствието по друг начин на специфично свойство на възгледа за непълнотата на Айнщайн (спрямо квантовата механика) при Гьодел, както и от този на Гьодел (по отношение на определени по даден начин аритметични системи) у Айнщайн.

Да започнем с едно изброяване на характерните белези на смисъла, който Айнщайн влага в непълнотата на квантовата механика:

1. Вероятностното разглеждане на квантовата механика може да се сведе до статистическо при откриване и въвеждане на подходящи „скрити параметри”

2. С тяхна помощ по-специално дисперсията на квантовите величини може да се редуцира до функционална зависимост от съответните „скрити величини” („скрити величини” и „скрити параметри” ще се употребяват като синоними).

3. В подкрепа на наличието на скрити величини говори фактът, че **Ψ**-функцията зависи съществено само от половината променливи, от които зависи функцията на състоянието на система от материални тела в класическата физика.

4. При това положение явните и скрити параметри, както в класическата физика, ще определят причинно стойностите на всички физически величини в зависимост от състоянието на системата в предходен момент (в множество случаи в зависимост само от стойността на физическата величина в предходни моменти).

5. Тогава може строго да се определи „елемент на реалността”, съответстващ на всяка физическа величина, като достатъчно условие за това е, че може да се предсказват нейните бъдещи стойности без смущение на системата.

6. Физическо далекодействие – действието на разстояние – трябва да се изключи според постулата за ненадвишаване на скоростта на светлината във вакуум.

7. Всички физически закони трябва да са инвариантни по отношение на отправните системи, които „плавно”, диференцируемо преминават една в друга. С други думи, наблюдател свързан с материална точка, движеща се по произволна траектория, във всяка нейна точка ще констатира еднаквост на физическите закони (тъй като в класическата физика и теорията на относителността не е възможно материална точка да промени траекторията си не само скокообразно, но и неплавно, т.е. в точка от траекторията си скоростта ѝ да не е определена).

Може да се твърди, че под непълнота на квантовата механика в един по-широк смисъл, Айнщайн разбира отклонението или дори драстичното скъсване на квантовата механика с определен идеал на физическо познание, споделян от моделите както на класическата физика, така и от теорията на относителността, който се опитахме донякъде да скицираме с изброените седем признака.

Както Айнщайн и редица изследователи след него подчертават, че определящ е признакът, тук посочен като седми и наричан още „принцип на относителността" или „обща ковариантност". Налага се да се разграничат в него две съставки, тъй като идеалът на познание, залегнал и реализиран в квантовата механика, отчасти му съответства, а отчасти може да се разглежда като негово обобщение. Тези два компонента са:

7.1. **Принцип на относителността**: физическите закони са еднакви във всички възможни отправни системи и следователно за всички наблюдатели.

7.2. **Принцип на плавността**[101] (диференцируемостта): *Всички възможни* отправни системи могат да се получат една от друга по плавен, диференцируем начин, следователно, те са възможни състояния на отправна система на наблюдател, свързан с движение на материална точка по траектория, според класическата физика.

Можем да твърдим, че квантовата механика приема „Принципът на относителността" във формулировката, дадена в 7.1., но не и „принципът на плавността" (7.2): отхвърляне, залегнало дори в названието ѝ – *квантова* механика.

„Принципът на плавността" е заменен с един (наречен от нас) „принцип на непрекъснатостта", който би звучал така:

7.3. **Принцип на непрекъснатостта**: във всяка точка от траекторията съществува тя самата или нейната скорост, по-точно импулсът в тази точка (разбира се, това може да е една само вече по хамилтониански еманципирала се скорост, която не е производна от движението по траекторията и която да изчезва с прекъсване на траектория в тази точка).

---

[101] „Принцип на непрекъснатостта" не би било точно, тъй като непрекъснатостта е необходимо, но не достатъчно условие за диференцируемост. Например, всяка начупена крива, в точката на начупване е непрекъсната, но не е диференцируема (макар че е диференцируема или само „отляво", или само „отдясно"). Съответно скорост на материална точка в точката на начупване не може да се определи. Тя скокообразно трябва да премине от стойността, да речем, на дясната в стойността на лявата производна. Следователно „принципът на плавността" означава непрекъснатост с по-строги изисквания: едновременно на траектория и скорост. От скоростта се иска само да е непрекъсната, т.е. да съществува във всяка точка от траекторията на материалната точка, но не и да е диференцируема. В резултат ускорението може да се променя скокообразно и тъкмо такава промяна е свидетелството, че в тази точка е въздействала външна сила. Цялата тази картина е описана по-скоро според лангранжова формулировка на класическата физика. В своята по-късна хамилтонова формулировка диференциалната връзка между траектория и скорост вече не се изисква. Понятието за сила загубва своето значение, наследено от оригиналната формулировка на класическата механика, дадена от Нютон. Използван е по-неопределеният термин „плавност", вместо математически точния „гладкост", за да не се обсъжда въпросът, колко пъти траекторията е диференцируема във всяка своя точка.

Така формулиран, „принципът на непрекъснатостта” не означава, че (7.4) *алтернативно съществува или точка от траекторията, или нейната скорост (импулс)*: т.е. допуска се и класическият случай на едновременното им съществуване[102]; забранено е единствено едновременното им отсъствие[103], в който случай понятието движение вече наистина губи смисъл.

С последната уговорка вече е очевидно, че „принципът на непрекъснатостта” е обобщение на „принципа на плавността”. При неговата валидност се стремим към по-обща формулировка на физическите закони, така че да са в сила за много по-широк клас от отправни системи, респективно движения.

Но възниква специфична трудност, която е нов израз на постоянно съществуващото напрежение в съвременната физика още между самите познавателни принципи на теорията на относителността и на квантовата механика. Класическата физика очевидно е сечение на своята лагранжова и хамилтонова формулировка, всякаоот които може да се разглежда като нейно обобщение, валидно съответно или и в теорията на относителността или и в квантовата механика. Въпреки че до формално-логическа несъвместимост не се достига – съществуват лагранжова формулировка на квантовата механика (Sugano 1971) и хамилтонова на теорията на относителността (Dirac 1950) – все пак няма общопризната или дори общоизвестна формулировка на механиката, такава че лагранжовата и хамилтоновата да се явяват нейни частни случаи.

Да се върнем в набелязания контекст към въпроса за конструктивността на доказателството на Гьодел за непълнотата, вече обсъждано в „Двете теореми на Курт Гьодел за непълнотата”: както видяхме той експлицитно твърди конструктивност, както по отношение на т. нар. първа, така и за т. нар. втора теорема за непълнотата. Също така да обвържем предстоящото да се направи разсъждение с обсъждане на това, доколко приведеният от Гьодел метод може да се окачестви като „диагонализация”. За целта ще се позволя едно „актуалистко” преформулиране на диагонализацията, без да оспорвам, че по начало тя има конструктивен характер, и то, фигуративно казано, двумерно конструктивен.

---

[102] Тук „едновременното им съществуване” в някои случаи е по-добре да се смекчи до „съществуването им заедно”, т.е. да не се обвързва с физическата величина „време”.

[103] Същото се отнася и за „едновременното им отсъствие”.

Нека разделяме едно безкрайно изброимо множество, напр. това на естествените числа, на две компактни подмножества, така че всеки елемент на първоначалното множество да принадлежи точно на едно от двете. Методът на диагонализацията показва, че необходимо съществуват такива разделяния, при които и двете подмножества могат да се поставят в едно-еднозначно съответствие с първоначалното.

Как – след така „актуализирано” преформулирана диагонализация – трябва да се окачестви твърдението за конструктивност в аргумента на Гьодел? Склонен съм да мисля, че той се ограничава само до такива разделяния, които са еквивалентни по строго определено правило на разделяния, в които едното множество, и то тъкмо онова, за което твърдението с предикат за принадлежност към него, е неразрешимо. Следователно твърдението за конструктивност, може да се окачестви като *дефинитивно* ограничаване до недиагоналните случаи. Обаче самата т. нар. първа теорема за непълнотата може да се разглежда като „диагонално” (в този смисъл) твърдение. Самата формулировка не премахва диагоналните случаи, но те са изключени от Гьодел чрез вече обсъжданата и донякъде неявна забрана за самореференциалност при показването на конструктивността на доказателството. Съотношението между т. нар. първа теорема за непълнотата и т. нар. теорема за пълнотата вече ни се представя *също и* по нов начин: първата е валидна в конструктивистката математика, докато втората от горните две, т.е. т. нар. теоремата за пълнота е валидна в „актуалистката” математика.

Диагонализацията, приемана като аргумент, в последната, може да се отхвърли по два и дори може би три съществено различни начина:

– интуиционистки, при което при разделянето на две безкрайни компактни множества се предполага противоречие с условието „така че всеки елемент на първоначалното множество да принадлежи на *точно* едно от двете подмножества” (т.е. интуиционисткото отхвърляне на правилото за изключеното трето при безкрайни множества);

– финитистки, когато разделянията от такъв тип се отхвърлят като безсмислени, тъй като нито едно от получените по този начин множества не е крайно;

– конструктивистки, ако се отхвърлят „двумерно” конструктивните процедури, към които принадлежи диагонализацията, което в съществените аксиоматики съвпада с финитисткия или с интуиционисткия подход.

Подходът на Гьодел за изключване на диагонализацията обаче е различен от изброените. Както видяхме, по външни съображения, наречени от него „метаматематически”, се забранява самореференциалното прилагане (всъщност тъкмо в духа на Ръселовата теория на типовете) на новополученото твърдение в резултат на използването на финитистки ограниченото и чрез това сведено до непарадоксално, първоначално, т.е. в актуалисткия си вариант, антиномично изходно твърдение. Същността на неговия довод е много добре доловен и експлициран от Генцен с използването на *трансфинитна индукция до* $\boldsymbol{\varepsilon_0}$: от валидността във финитните случаи следва трансфинитна валидност, т.е. собствено при диагонализация.

Самият Генцен е категоричен поборник за финитност на трансфинитната индукция. Може би по-мъдрият Гьодел успява логически прецизно да заобиколи обсъждането на въпроса. Повечето съвременни логици също по-скоро го избягват или най-малкото избягват да дават еднозначен отговор. В рамките обаче на тук обсъждания, наречен „дуалистично питагорейски” подход трансфинитната редукция е финитна процедура на основание на обсъждането ѝ като редукция на кохерентно състояние, т.е. като реална числова стойност на функционал (функцията с дефиниционна област хипермаксимални оператори и стойности в множеството на реалните числа).

В настоящия контекст за нас е много важен т. нар. парадокс на Скулем. Като трета точка в своя доклад пред 5-ия конгрес на скандинавските математици през 1922 г. той посочва: „относителност на понятието за множество, което е неизбежно при всяка последователна аксиоматика” (Skolem 1970: 138). И по-нататък в изложението го разяснява по следния начин, включително и от философска гледна точка:

> *Тази трета точка е най-важната*: в случай, че аксиомите са непротиворечиви, то има област B, за която аксиомите са валидни и заедно с това всички елементи на B могат да се номерират с помощта на крайните цели положителни числа (Skolem 1970: 139).

Поради рефлексивността на разглежданите отношения вярно е и обратното: ако разглеждаме изброимо множество, например самите естествени числа, и при валидност на аксиомата за избора (т.е. „докъдето" е валидна), то на него може да се съпостави всяко множество, което е номерирано чрез него и да се разглежда като еквивалентно на изброимото. Ако използваме термина на норвежкия логик и математик „относителност", може да обобщим, че относителни са не само висшите безкрайности, но също така и изброимата безкрайност: чрез аксиомата за избора винаги съществува разглеждане, чрез което всяко изброимо множество може да се представи като неизброимо.

В частност оттук следва *относителност и между много важните понятия за непрекъснатост (континуум) и дискретност*. Дискретността на квантовата механика, неизбежна поради кванта на действие, е само втората (дуалната) страна във взаимната относителност с не просто непрекъснатостта, а гладкостта, изисквана от диференциалните уравнения на класическата физика[104]. Същото е валидно и по отношение на въздигнатия в ранг на първичен принцип на относителността на Айнщайн: цитираната в началото на главата инвариантност по отношение на дифеоморфизмите.

За съжаление можем само да намекнем интересните интерпретации, следващи от едно дискретно разглеждане на анализа изобщо, обичайно фундиран в неизброимо множество (континуум) – реалните или комплексните числа. Перспективата всеки негов резултат да се повтори за дискретни редици изглежда объркваща, но е логически непротиворечива.

Завръщаме се към дилемата – оказва се, наистина далновидно изоставена от основателите, Лайбниц и Нютон – „нули или не-нули" относно диференциалите от нова гледна точка: това не е противоречиво, а *неразрешимо* твърдение; или с други думи, те имат също така относителен характер, както и всичко свързано с безкрайността. „Да бъдат диференциали" не е свойство на някакъв клас обекти, а отношение (което впрочем е очевидно и от най-разпространените им, „школски" или

---

[104] Бих искал да обърна внимание на интереса на Шрьодингер към въпросите на безкрайността тъкмо във връзка с квантовата механика. Той пише: „физикът е силно заинтересуван от вероятното значение на поразителните свойства на непрекъснатата безкрайност върху теориите за атома и енергийните кванти" (Schrödinger 1984(IV): 611) . Малко по-нататък говори за „желанието да се замени непрекъснатото с изброимата безкрайност, с която се борави по-лесно".

„студентски” определения) и поради това следва да се отнесе и винаги се е отнасяло до функции, т.е. до изображения между множества, а не до (които и да било) множества. От друга страна обаче, чрез лемата за ултрафилтрите, която, знаем, е сред по-слабите варианти на аксиомата за (неограничения) избор, и в пряка връзка със сега обсъждания парадокс на Скулем, можем да построим нестандартно разширение на множеството на реалните числа и да обосновем анализа не върху изображения, а върху този специален тип множества от „актуално безкрайно малки”, т.е. диференциали в собствен смисъл, а не като отношение и следователно на основата на изображение между множества.

Така (а и по много други начини) можем да се насочим също и към относителността на фундаменталните за работещите математици понятия за множество и изображение, която относителност може да се обсъжда и като креативния принцип на теория на категориите[105], подхождаща към обосноваването на математиката по начин, съществено различен от теоретико-множествения и логическия: последният е характерен по-скоро за първата половина на XX век. Ако се подходи към обосноваване на математиката и логиката чрез топосите, т.е. чрез аксиоматизирана категорията на множествата и следователно ограничаваща се не непременно до последната, то топологичният аспект на непрекъснатост и теоретико-множественият на дискретност се оказват преплетени в относителност, аналогична на визираната, от която в частност следва относителност на свойство и отношение, но също така и на елемент и множество, т.е. в общия случай аналогът на аксиомата за фундирането е невалиден и ограничен до свойство на определен, и то много тесен клас математически обекти, за които се изпълнява.

След строгото доказателство, което Скулем привежда на цитираното твърдение, той предлага също и следния коментар:

> *Доколкото ми е известно, никой не е обърнал внимание на тази странна и очевидно парадоксална ситуация. По силата на аксиомите може да се покаже съществуването на по-висши мощности; може да се покаже съществува-*

---

[105] Ако съществува изоморфизъм на една категория върху себе си, различен от тривиалния, напр. между морфизмите и обектите на една категория, при което имаме два класа обекта, но не може да се посочи, кой е „субстратът”, „първичният” и кой – „вторичният”.

> *нето на по-висши числови класове. Как може тогава цялата област* $\boldsymbol{B}$[106] *да се преброи с помощта на крайните цели положителни числа?* (Skolem 1970: 143).

По-нататък Скулем предлага обяснение, поради което мнозина са се подвели да твърдят, че това не е „истински” парадокс. Може дори да се приеме, че такова е общото становище. Самият аз бих казал, че и това е поредното неразрешимо съждение.

Мотивите на самия Скулем да смекчава оценката са очевидни: за разлика от другите дотогава обсъждани парадокси, при които авторите им печелят признание „на чужд гръб” и са заинтересувани „да раздухат” значимостта на откритото и да го представят като противоречие и следователно опровержение, то той е съществено ангажиран и с теорията, от чиято основна теорема (на Льовенхайм – *Скулем*) следва твърдението.

По-нататък ще покажа, че парадоксът на Скулем допуска разглеждане, при което е пряко следствие от станалия нарицателно име за парадокс в основите на математиката парадокс на Ръсел и от транзитивността на релацията на еквивалентност по отношение на множества. С други думи, той е точно толкова парадокс, колкото и последният, но заедно с това лечението, предложено още от Цермело (1908), да се изключи от теорията на множествата рефлексивното разглеждане[107] и чрез това множеството от всички множества и от този тип, превръща и парадокса на Скулем в „безобидно заболяване”. С други думи, норвежкият математик може да се ползва от натрупания опит в „борбата с парадоксите по теория на множествата”.

Нов етап в ранната диагностика и профилактиката на антиномиите е т. нар. първа теорема за непълнотата (1931), случила се обаче вече след цитирания доклад (1922). От една страна, тя показва, че те са генетичен дефект на всяка математическа теория, обсъждаща изброима безкрайност, с други думи, включваща естествените числа. От друга страна обаче, всяко антиномично твърдение, както

---

[106] „Цермело разглежда област от неща $\boldsymbol{B}$, в която множествата представляват част. Между тези неща съществува отношение от вида $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ е елемент на $\boldsymbol{b}$) и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. За областта трябва да са изпълнени 7 аксиоми, за чието съдържание се позовавам на статията на Цермело” [Zermelo 1908] (Skolem 1970: 137).

[107] Това се прави обаче чрез един изначален, по същество пак рефлексивен ход: всички множества са части от областта $\boldsymbol{B}$, самата тя аксиоматизирана като множество: вж. предходната бележка под линия.

изрично посочва в бележка под линия самият Гьодел, може да се използва за изработване на „ваксина”, ако чрез конструктивистко „третиране” се намали неговата „вирулентност”: от пряко противоречие, унищожаващо теорията, се редуцира до неразрешимо в нейното рамки твърдение. След такова „повишаване на имунната ѝ защита”, тя оцелява, но за сметка това, се оказват заразени всички теории, от същия „генотип”, правещ ги податливи към тази, макар и вече несмъртоносна, „патология”.

Както видяхме по-горе обаче, случвалото се с великите откриватели на ваксини не отминава и т. нар. първа теорема за непълнота: тя също се оказва „болна” от вече по-скоро безобидната неразрешимост.

По този начин парадоксът на Скулем е наистина такъв: в смисъл, че е неразрешимо в известни рамки твърдение. Той, бидейки изглежда наясно с реалната ситуация, въвежда в обръщение и понятието „относителност” по отношение на теорията на множествата и както ще видим, всъщност то е по-широко, по-съдържателно и много по-релевантно на главния за нас физически контекст от това за „неразрешимост”, но в редица съществени аспекти сродно или тъждествено с него.

Ето и станалия класически подход на Скулем към открития от него, но и в собствената теория парадокс:

> *Обяснението не е трудно да се намери. Едно „множество” според аксиоматиката не означава някаква дефинирана цялост* [Zusammenfassung]; *множествата са само неща, които се познават едно чрез друго и се свързват чрез аксиомите във фиксирани отношения. Затова не е налице никакво противоречие, ако едно множество* $\boldsymbol{M}$ *от областта* $\boldsymbol{B}$ *е неизброимо в смисъла на аксиоматиката; тъй като това само значи, че вътре в* $\boldsymbol{B}$ *няма едно-еднозначно съответствие – изображение* $\boldsymbol{\Phi}$ *от* $\boldsymbol{M}$ *върху* $\boldsymbol{Z_0}$ *(цермеловска редица от числа). Въпреки това съществува възможността, всички неща в* $\boldsymbol{B}$ *и следователно и елементите на* $\boldsymbol{M}$ *да се номерират с целите положителни числа; едно такова номериране е естествено също така цялост на известни двойки; обаче тази цялост не е „множество”, т.е. тя не е налична в областта* $\boldsymbol{B}$*. По-нататък е също така ясно, че множеството* $\bigcup \boldsymbol{Z_0}$ *не може да се съдържа като елементи на някаква определена част от множеството* $\boldsymbol{Z_0}$*. После, тъй като елементите на* $\bigcup \boldsymbol{Z_0}$ *са само някои от нещата на*

> *областта $\boldsymbol{B}$, то те биха могли да се номерират с целите положителни числа, също както елементите на цермеловската числова редица $\boldsymbol{Z_0}$ и по начин, който е известен, тогава може да се* дефинира *нова част от $\boldsymbol{Z_0}$; това не е множество, т.е. не принадлежи на $\boldsymbol{B}$* (Skolem 1970: 143).

Същността на довода, който предлага Скулем, вече беше описана, а именно: *номерирането не е изображение, нито множество в $\boldsymbol{B}$*. Какво пречи обаче множеството на естествените числа да се добави в тази област, така както бива добавяно напр. в т. нар. първа теорема за непълнотата? Между цермеловската теория на множествата и пеановската аритметиката няма противоречие, нито едната следва от другата. Всяка една от двете обаче може да се интерпретира в другата и тогава непротиворечивостта на втората чрез модела ѝ в първата ще следва от предположената непротиворечивост на първата.

Чрез добавяне на естествените числа към областта $\boldsymbol{B}$ обаче бихме построили нейна несобствена (невъзнамерявана) интерпретация $\boldsymbol{B}'$ тъкмо в смисъла на парадокса на Скулем, чрез което и за него ще демонстрираме самореференциална приложимост, с други думи, ще сме показали нагледно неговата неразрешимост, ако преди това сме го разгледали в качеството на твърдение.

По-нататък норвежкият математик предлага една по-силна и твърде любопитна от философска гледна точка версия на парадокса:

> *Даже понятията „крайно", „безкрайно", „проста безкрайна редица" и т.н. стават само относителни вътре в аксиоматичното учение за множествата. Едно множество $\boldsymbol{M}$ трябва – според дедекиндовското определение – да е крайно, ако никое негово истинско подмножество не е подобно на него самото. Валидността на аксиомите обаче не забранява, че първите части на $\boldsymbol{M}$ биха могли да са дефинируеми без да са подмножества, както и вторите, че биха могли да се дефинират съответствия, които не са изображения, т.е. множества от двойки. Затова е дори напълно възможно вътре в една област $\boldsymbol{B}$, за която са валидни цермеловските аксиоми, да могат да съществуват такива „крайни" множества в дедекиндовски смисъл, че да притежават едно-еднозначно изображе-*

> *ние върху своя истинска част; тези „изображения" обаче не са множества от областта* (Skolem 1970: 143-144).

На основа на току-що цитираното може да се предложи следната хипотеза: понятието за „крайно" и „безкрайно" са точно толкова относителни, колкото и различните „видове безкрайности"; или, ако се върнем към логическите термини, от теоремите на Гьодел: непълнотата, респ. пълнотата дори и на *логически* системи, т.е. състоящи се от краен брой първични знаци и следователно неможещи да включат изброимото множество на естествените числа, е неразрешимо твърдение при *определени условия*. Кои или какви са тези условия? Според горното цитирано разсъждение, трябва да вземем какъвто и да е „куп неща", които ***не*** *принадлежат* на областта $\boldsymbol{B}$ и следователно не са множества и чрез преброяване да установим, че са краен брой; след това да вземем само истинска част от тях и с тяхна помощ, и със съответствие, което също няма да е множество в областта $\boldsymbol{B}$, да номерираме *всички*: очевидно поне два различни елемента ще получат еднакъв номер. Сега да си зададем въпроса: от какво, освен от нашето голословно намерение и възможно безпочвено твърдение, следва, че множеството, неговата част и изображението между тях не са множества от M. Във всеки случай не от цермеловските аксиоми, най-малкото защото понятието за едно-еднозначно изображение изобщо не се споменава, нито неявно се съдържа в тях. Следователно изключително просто и с чудна лекота построихме невъзнамерявана (и честно казано, съвсем нежелана) интерпретация, в която *също така и крайността е относителна*.

Дотук добре: не откриваме грешка. Обаче и на приведеното разсъждение можем да дадем веднага една вероятно съвсем нежелана (поне за част от читателите) интерпретация, хвърляща ни в смут по отношение теоремите на Гьодел. За целта трябва само да си зададем въпроса: как, а и дали изобщо е изключена подобна нежелана интерпретация на т. нар. първа теорема на пълнотата на Гьодел?

За целта да приведем положената от него

> *система от аксиоми в основата:*
>
> *Недефинирани първични понятия:* $\vee$, $\overline{}$ *и* (x). *(От тях могат да се дефинират* $\&$, $\rightarrow$ *и* $(\boldsymbol{Ex})$ *по известен начин.)*

Формални аксиоми:

$$\begin{array}{ll} 1.\ \boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} & 4.\ (\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}) \to (\boldsymbol{Z} \vee \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z} \vee \boldsymbol{Y}) \\ 2.\ \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y} & 5.\ (\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) \\ 3.\ \boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y} \vee \boldsymbol{X} & 6.\ [\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})] \to \boldsymbol{X} \vee (\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \end{array} \tag{61}$$

Правила за извод:

1. Схемата за извод: от $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, може да се изведе $\boldsymbol{B}$.

2. Правилото за заместване на пропозиционални и функционални променливи.

3. От $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ може да се изведе $(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$.

4. Индивидуалните променливи (свободни или свързани) могат да се заменят от кои да е други, доколкото чрез това не се извършва припокриване на областта на действие на променливите, означени с един и същ знак (Gödel 1930: 350: 1986: 102-104, 103-105).

Веднага се вижда, напр. чрез прословутите диаграми на Вен, че модел на теория с посочените аксиоми се построява без затруднение в цермеловската теория на множествата. Нещо повече, диаграмите на Вен подсказват една по-дълбока връзка с топологични и векторни пространства, която всъщност и се експлоатира и от самия Гьодел в последната, десета теорема на току-що цитираната работа, т. нар. теорема за компактността. Добре известно е, че тя е следствие от теоремата на Тихонов за компактни пространства (произведението от компактни пространства е компактно пространство) приложена към пространствата на Стоун (компактните напълно несвързани хаусдорфови пространства). В случая обаче изоморфността (като пропускам твърде трудоемкото и неуместно за нашите цели прецизиране на тази изоморфност) на логика и теория на множествата ни навежда на мисълта, че разглеждаме само частния случай на „плоски” векторни или топологични пространства, при които „ковариантната” логика и „контравариантната” теория на множествата съвпадат.

Забелязваме също така че за разликата от първоначалната, т. нар. наивна теория на множествата в цермеловската е въведена областта $\boldsymbol{B}$, или с други думи универсалното множество, чрез което, видяхме, фундаменталното за логиката понятие „отрицание” придобива еднозначния теоретико-множествен еквивалент на допълнението до универсалното множество. Това обаче се оказва, че има изключително далеч отиващи последствия: *появява се външната, втора, или* ***дуална*** *област спрямо универсалното множество, област, която в частност е област на несобствените интерпретации, но която дословно изпълнява цермеловските аксиоми,* от една страна*, и цитираните по-горе в Гьоделовия им вариант ръселово-уайтхедовски аксиоми на логиката,* от друга. Поради това приведеният по-горе пример, съответстващ на предложеното от самия Скулем усилване на парадокса за крайни множества, преминава безпрепятствено в логиката. В резултат на това, *дори и за крайни множества и логически системи пълнотата, но респ. и непълнотата е неразрешимо твърдение*.

Това обаче отдавна би трябвало да е спряло да ни учудва, тъй като и самата аксиоматика на Пеано за елементарната аритметика има несобствена интерпретация, върху множество с наистина безкраен брой елементи, но *краен брой* ***различни*** елементи. Напълно достатъчно е вместо обичайната, подразбираща се, „собствена” релация на еквивалентност, да вземем като такава равенството по остатък при деление на естествените числа с фиксирано за дадената интерпретация произволно естествено число $\boldsymbol{n \geq 2}$.[108] От приведения пример веднага се вижда, че броят на такива интерпретации е безкраен (макар вече и само в относителен

---

[108] В тази връзка бих искал да спомена т. нар. теорема на Рамзи, в нейния най-прост вариант, от който той започва разглеждането си: „Теоремата, от която наистина се нуждаем, разглежда само крайни класове, но ще започнем с подобна теорема относно безкрайни класове, която е по-лесно да се докаже и дава прост пример за метода на доказателство. ТЕОРЕМА А. *Нека* $\boldsymbol{\Gamma}$ *е безкраен клас и* $\boldsymbol{\mu}$ *и* $\boldsymbol{r}$ *са положителни цели числа; и нека всички онези подкласове на Γ, които имат точно* $\boldsymbol{r}$ *членове, или както можем да кажем, всички* $\boldsymbol{r}$*-комбинации от членовете на Γ бъдат разделени по някакъв начин в* $\boldsymbol{\mu}$ *взаимно изключващи се класове* $\boldsymbol{C_i}$ $(\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, \mu})$*, така че всяка* $\boldsymbol{r}$*-комбинация е член на един и само един* $\boldsymbol{C_i}$ *; тогава, допускайки аксиомата за избора, Γ трябва да съдържа безкраен под-клас Δ, такъв че всички* $\boldsymbol{r}$*-комбинации на членовете на Δ принадлежат на едно и също* $\boldsymbol{C_i}$” (Ramsey 1978: 233). За нас теоремата на Рамзи – на която и без това са посветени множество, вкл. и философски изследвания, в т.ч. и по отношение на обсъжданите тук теореми на Гьодел – представлява интерес, поради това че строго количествено фиксира връзката между двата аспекта, а именно на „броене” и на „еквивалентност”, налични в аксиоматиката на Пеано чрез трети, който е броят $\boldsymbol{r}$ на елементите в $\boldsymbol{r}$-комбинациите, т.е. максималната в смисъла на теоремата големина като брой на класовете на еквивалентност. Чрез броене се посочва броят елементи в дадена съвкупност, а чрез класовете на еквивалентност – броят на различните елементи. Аксиомата за избора, теоремата на Рамзи и т. нар. лема за безкрайността на Кьониг, според която всеки граф с безкраен брой възли, всеки от който обаче е свързан само с краен брой други възли, има безкраен път, т.е. безкраен клон, в който нито един възел не се повтаря, са много тясно свързани (Forster, Truss 2007).

смисъл) – $\forall \boldsymbol{n}$. Именно чрез такъв тип интерпретация можем да приложим т. нар. първа теорема за непълнотата към условията на т. нар. теорема за пълнотата. Оттук можем да си позволим най-разнообразни, при това логически правилни игри на комбинации от пълни и непълни, крайни и безкрайни, и то в общия случай различно безкрайни аксиоматични системи, както като количество аксиоми, така и като визирани собствени и несобствени обекти. Имаме по-важна работа: за нас е напълно достатъчна показаната *относителност на пълнота и непълнота* в смисъла на Гьодел.

Косвено т. нар. (но не от Скулем) несобствени интерпретации се визират в следния пасаж:

> *От подходяща аксиоматична основа може следователно да се достигне до това, че теоретико-множествените твърдения са валидни според буквалния смисъл – естествено при условие, че аксиоматиката е непротиворечива, – това обаче се основава само на това, че употребата на думата множество е регулирана по подходящ начин. Винаги ще може да се дефинират цялости, които не означават множества; обаче стане ли дума за множества, трябва да са валидни твърденията на учението за множествата* (Skolem 1970: 144-145).

Бих искал да подчертая известно разминаване между точния смисъл на приведения цитат и реторичната му интенция: Скулем *не твърди*, че за „цялости, които не означават множества" в общия случай никога няма „да са валидни твърденията на учението за множествата". Той само казва, че последното е в сила „стане ли дума за множества". С други думи, следва да се ограничим в изискванията по отношение на аксиоматиката на теорията на множествата до валидност по отношение на собствената интерпретация, което „обаче се основава само на това, че употребата на думата множество е регулирана по подходящ начин". Що се отнася до несобствените интерпретации, Скулем не твърди нищо друго освен, че „винаги ще може да се дефинират".

С пеановска аритметика с краен брой различни, но безкрайно много елементи да се върнем към Скулемовото разсъждение, цитирано преди това по-горе, чрез което обосновава относителността на „крайно" и „безкрайно". Нека сега обърнем внимание, че прави това не само чрез извеждане извън областта $\boldsymbol{B}$ на „собствените” интерпретации, но и чрез *използване на изображение*, макар и извън тази област.

Всъщност „безкрайност” в рамките на пеановската аритметика може да се дефинира по два различни начини: като свойство на функцията „наследник” или чрез релацията на еквивалентност. В „собствената” интерпретация на пеановската аксиоматика двата подхода са в унисон. Нищо обаче не забранява предложената, а и аналогични интерпретации: крайни според релацията за еквивалентност, но безкрайни според функцията „наследник”. Дори и *ad hoc* да се добави подходяща аксиома, която да изключи такава, „неканена” интерпретация, не може да се докаже, че новополучената аксиоматика е вече пълната, тъкмо според т. нар. втора теорема за непълнотата на Гьодел.

Това, на което специално и особено подчертано бихме искали да обърнем внимание, е, че и в двата случая „безкрайност” се дефинира чрез изображение и следователно, изобщо, относително, доколкото понятието изображение ангажира и второ, в общия случай различно, множество, при което „безкрайност” се дефинира чрез тяхното отношение, т.е. именно относително.

Но между двете възможни изображения за дефиниране на безкрайност има съществена разлика: докато функцията наследник е изображение на множеството на естествените числа върху себе си и по принцип не може да изведе извън естествените числа, то релацията на еквивалентност не е непременно изображение върху себе си и може да изведе извън тяхната област, пример за което е всяко номериране, или с други думи „добрата наредба” на едно множество, чиято възможност във всеки един случай съответства на аксиомата за избора[109].

Оттук може да се насочим към някои, вече намекнати, но и твърде деликатни уточнения в аксиомата за избора, засягащи *отношението на два безкрайни избора*: 1) чрез два безкрайни избора върху множества винаги можем да построим едно-еднозначно изображение помежду им; 2) един безкраен избор в дадено множество може да се повтори, т.е. дефинираното в (1) едно-еднозначно изображение може да бъде идентитет. И по-нататък ще продължим да обмисляме тези възможности и техните отрицания, включително и чрез интерпретациите им посредст-

---

[109] Чрез това обаче можем да предефинираме „несобствено” и самата функция „наследник”, напр. като $+2$ в множеството само от четните или само на нечетните числа или в крайна сметка, като произволна рекурсивна функция, стига да е описано как може да получим следващата от всяка стойност.

вом математическия апарат на квантовата механика и информация в конкретни мислени експерименти.

Скулемовата относителност на „крайно" и „безкрайно", приложена по отношение на аксиомата за избора ни насочва към хипотезата, че ако не можем да наредим добре произволно множество, то не можем да наредим добре никое множество. И тъй като очевидно следствието е погрешно, то значи и предпоставката е невярна. С други думи, изглежда тази относителност на крайно и безкрайно е най-малкото тясно свързана, ако не и еквивалентна в рамките на съществени и общоприети аксиоматики, с аксиомата за избора. За съжаление проследяването на любопитните връзки с неразрешимостта на проблема за пълнотата/ непълнотата на *произволна* аксиоматична система би ни отвело прекалено далеч от тематиката в рамките на философията на квантовата информация.

В качеството на довод, съществено различен от приведения от Скулем и досега обсъждания, в подкрепа на относителността на крайно и безкрайно, може да се добави, че безкрайната аксиоматична схема ZFC (Цермело – Френкел – аксиома за избора), представляваща по-скоро усъвършенстване само по отношение на трансфинитните числа на идеите, залегнали в тук разглежданата собствено цермеловска аксиоматика на теория на множествата, допуска краен еквивалент по отношение на доказуемостта на твърденията: аксиоматика на фон Нойман – Бернайс – Гьодел (NBG). В крайна сметка Скулемовата относителност на крайно и безкрайно, от една страна, и еквивалентността в посочения смисъл на ZFC и NBG са тясно свързани. За съжаление прецизното разглеждане, дори и само от философска гледна точка, би било обемисто и най-вече няма пряко отношение към преди всичко вълнуващите ни сега въпроси относно философията на квантовата информация. Все пак мостът може да се намекне така:

Ако разгледаме и сравним варианта на NBG, в който безкрайната аксиоматична схема от ZFC, обикновено означавана като аксиома или аксиоматична схема на заместването (и която е добавената от Френкел), и този, в който тя е заменена с краен брой аксиоми, може да забележим следното: вместо да се строи итеративно (рекурсивно) теорията на множества за следващия кардинал (ординал) на основата на настоящия (схемата на заместването в ZFC), поради „ортогоналността" и оттук изоморфността на логика и теория на множествата можем да построим в теория на множествата модел на логиката: добавяйки за целта, както знаем, само краен брой аксиоми. Оказва се, че тази теория на множествата, в която, фигуративно казано, безкрайността е описана „логически”, т.е. чрез модела на логиката, който може да се построи в теория на множествата, е с краен брой аксиоми (NBG). В случая схемата на заместването е не само безкрайна, но съдържа и безкраен брой символи, а именно за всяко ординално (кардинално) число. Еквивалентността по отношение на доказуемостта на ZFC (безкраен брой символи) и NBG (краен брой символи) изисква пълнота и за ZFC. С други думи достигнахме до неразрешимостта на въпроса за пълнотата на ZFC, до която бяхме достигнали и на основата на Скулемовата относителност на крайно и безкрайно и на видовете безкрайности. Оттук вече имаме цялостен мост, по който можем да се движим между еквивалентността спрямо доказуемост на NBG и ZFC, от едната страна, и Скулемовата относителност на крайно и безкрайно, от другата, като при това изяснената амбивалентност на т. нар. теорема за пълнотата по отношение на краен или безкраен брой символи („първични знаци”) е свързващото звено.

Може би мнозина читатели вече са забелязали, че в преобладаващия брой случай, дори и имплицитно, не се уточнява дали става дума за логика от по-висш ред, за такава от първи ред или дори за пропозиционална (от „нулев” ред). Всъщност обяснението е очевидно: при Скулемова относителност на видовете безкрайности, на безкрайно и крайно, са аналогично относителни и изброените три типа логики. Това изглежда интуитивно ясно на основата на неопределеността на разграничението между предикат и пропозиция, свойство и отношение, към която ще имаме случай да се обръщаме и по-нататък. Опитите за изясняване смисъла на т. нар. теореми за непълнотата чрез логики от по-висш ред не са съществени.

Едно друго следствие е относителността между кохерентно и некохеретно състояние в квантовата механика, което впрочем е отдавна известно под формата на еквивалентност на матричната механика на Хайзенберг и вълновата механика на Шрьодингер или като въведеното вероятно още от Картан квантово обсъждане на мегаобектите във вселената. В същия ред на мисли (и при неограничена аксиома за избора) е и предложената в настоящата работа хипотеза за относителност спрямо очевидната некохерентност на макросъстоянията: тя е такава ако и само ако наблюдателят е макронаблюдател. Следователно спрямо друг възможен, но не макро-, а да речем мега-наблюдател може да се обсъжда кохерентност на макросъстоянията, явления на сдвояване. Противоречие в описанието няма да възникне поради неразрешимостта (относителността) на дилемата случайно – необходимо. 'Необходимите' за предпòложения меганаблюдател явления, възникнали поради ограничаването на степените на свобода при сдвояване, за макронаблюдателя ще изглеждат случайни.

Фигуративно казано, „с обратен знак" същата относителност на кохерентно (вълново) и некохерентно (корпускулярно) може да се предположи и при квантовите (микро) обектите. Напр. за един предположен микронаблюдател кохерентността няма да бъде експериментално проверима (наблюдаема, видима).

> *Също така понятието „проста безкрайна редица" или това за дедекиндовска „последователност"* [Kette][110] *има само относително значение. Ако* $\boldsymbol{Z}$ *е множество, за което аксиома VII*[111] *е изисквано свойство, то цермеловската числова редица* $\boldsymbol{Z_0}$[112] *е определена като свойство (на последователността) на сечението на всички подмножества на* $\boldsymbol{Z}$*. Подмножествата на* $\boldsymbol{Z}$ *обаче не са изобщо дефинируеми и не може a priori да се попречи да могат да съществуват*

---

[110] К се нарича последователност [Kette], когато $\boldsymbol{K'} \subseteq \boldsymbol{K}$ (Dedekind 1918: 11). Вместо знака за подмножество „$\subseteq$" Дедекинд използва знак „$\mathfrak{Z}$" като означение за релацията „част" в съвременния смисъл на подмножество. С „$\boldsymbol{K'}$" е означен образът на $\boldsymbol{K}$ чрез изображение. С други думи, „последователност" е някакъв клас К заедно с изображението върху себе си. Дедекинд започва с неща [Dinge], за които може да се мисли. Съвкупностите от неща нарича системи и те също са неща. Той приема като абсолютно фундаментално за човешкото мислене понятието „изображение". И по-нататък извежда пълната индукция за последователности. На § 4 (Dedekind 1918: 11-16) от „Какво са и какво трябва да бъдат числата" Цермело полага своето твърдение за еквивалентност: „Ако подмножествата на две множества $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ са еквивалентни, то и самите множества са еквивалентни" (Zermelo 1908: 272).

[111] Обсъжданата вече по-горе аксиома за безкрайността: „В областта съществува поне едно множество $\boldsymbol{Z}$, което съдържа празното множество и се образува така, че всеки от неговите елементи съответства на следващ елемент от вида $\{\boldsymbol{a}\}$, или което с всеки свой елемент $\boldsymbol{a}$, съдържа и множеството $\{\boldsymbol{a}\}$ като елемент" (Zermelo 1908: 266-267).

[112] „Ако $\boldsymbol{Z}$ е едно произволно множество със свойството, изисквано в VII, то всяко негово подмножество $\boldsymbol{Z_1}$ се дефинира дали притежава свойството. Нека $\boldsymbol{a}$ е кой да е елемент на $\boldsymbol{Z_1}$, тогава е дефинирано дали също и $\{\boldsymbol{a}\} \in \boldsymbol{Z_1}$ и всички така създадени елементи на $\boldsymbol{Z_1}$ образуват елементите на едно подмножество $\boldsymbol{Z'_1}$, за което е дефинирано, дали е или не е $\boldsymbol{Z'_1} = \boldsymbol{Z_1}$. Следователно построяваме всички подмножества $\boldsymbol{Z_1}$ с разглежданото свойство, които са елементи на едно подмножество $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{2^Z}$ и съответното им сечение $\boldsymbol{Z_0} = \bigcap \boldsymbol{T}$ е множество със същото свойство. … Множеството $\boldsymbol{Z_0}$ съдържа елементите $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}$ и т.н. и може да се означи като „*числова редица*" могат да заменят позициите на числовите знаци (Zermelo 1908: 267 – при превода използваните от Цермело символи са заменени със съвременните им еквиваленти).

> *две различни цермеловски области* $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{B}'$*, за които* $\boldsymbol{Z_0}$ *да се оказва различна* (Skolem 1970: 144).

Същността на последния цитат се състои в това, че за двете различни цермеловски области $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}'$, от аксиомите не следва, че празното множество от едната област съвпада с празното множество от другата област. Разбира се за философ това е прелюбопитна възможност: да се обсъждат различни типове „нищо” и оттук различни съвкупности естествени числа. Да се построи смислена интерпретация на тази на пръв поглед чудновата ситуация никак не е трудно: едното „нищо”, респ. „празно множество” е реално, а другото – имагинерно; в резултат получаваме множествата от реалните и от имагинерните положителни цели числа.

Поради всичко това изводът, който предлага Скулем, едва ли може да се сметне за необоснован:

> *Следователно*: аксиоматичното обосноваване на учението за множествата води до относителност на понятието за множество и това е неотстранимо свързано с всяка последователна аксиоматика (Skolem 1970: 144).

За да си изясним напълно значението на тази *относителност*[113] в нашия контекст, трябва да си припомним, че докладът на Скулем е изнесен през 1922 година – тъкмо времето на триумфа на теорията на относителността, когато понятието за относителност става модно, използва се много широко и нерядко в неуместен

---

[113] С оглед интенцията на текста аспектът на относителност се подчертава. В достатъчно широк план обаче не по-маловажна е „неотносителността”, „абсолютността”, и то в един не само или не толкова онтологичен, колкото във физичен и методологичен смисъл: напр., ако вземем превърналия се в труизъм случай на два влака в относително движение един спрямо друг, все пак аз в качеството на наблюдател се намирам в точно единия от двата влака, и то напълно, „абсолютно” определено в кой от тях. Във всички тук и по-нататък обсъждани примери на относителност, при това все по-далеч отиващи в степента на обобщение, действителността в качеството на философска категория – и то за разлика от възможността – се свързва тъкмо с „неотносителността”, „абсолютността” на битие, което е тъкмо тук – Dasein, с термина на Хайдегер – и сега, за чието подчертаване може да се използва неологизмът „Dazeit”, от една страна, или целостта, тоталността, в т.ч. и от възможностите, от друга. Нещо повече, тези две страни в известен, и то онтологичен смисъл са еквивалентни.

контекст, превръща се в съществена част от културния фон на епохата, т.е. в своеобразна културогема в тогавашния стил на мислене.

Ако си позволим да възвърнем вече цитирания Айнщайнов принцип на относителността – за инвариантност на законите спрямо дифеоморфизмите (грубо казано, „гладките” или „плавните” преобразования) между отправни системи – към неформализираната му основа, то неговият смисъл е, че *всяко* движение, т.е. и покоят като негова форма, и равномерното, и ускореното произволно променливото движение са (1) винаги непрекъснати, и (2) винаги отношение между две отправни системи.

Нещо повече, (3) *неразрешимостта* в Гьоделов смисъл, която – както видяхме – може да се обоснове чрез парадокса за Лъжеца, посредством притежаващия не по-малко почетна древност парадокс на Стрелата *може да се пренесе към движението*. Този ход на мисълта всъщност е отдавна известен в рамките т. нар. диалектическа логика и философия, представян обикновено чрез понятието за диалектическо „противоречие” и формализиран в параконсистентните и сродни на тях логики. Относно преобразуването на „противоречие” в „неразрешимост” вече стана дума.

Нека сега обърнем внимание, че и двата току-що споменати парадокса могат да бъдат разгледани като различни интерпретации на една и съща структура, която – за разлика от подхода на диалектиката – няма да мислим като противоречива, още по-малко да противопоставяме формалната на диалектическата логика, а като неразрешима:

Противоречието предполага A и не-A едновременно истинни. *Неразрешимостта* не решава, кое от A и не-A е истинно. *Дуалността*, прехвърлена в логически план, например чрез фон Паймановото тълкуване на съжденията за квантовомеханични величини посредством проекционни оператори, забранява разглеждането на някои противоречия, а именно между съждения, чиято истинност не може да се твърди едновременно, каквито са съжденията за величини, чиито оператори не комутират. *Законът за непротиворечието* изисква, A и не-A да не могат да бъдат едновременно истинни. *Законът за изключеното трето* (не непременно еквивалентен на предходния) постулира, че трета възможност освен A и не-A не съществува. Видно е, че става дума за пет *различни* твърдения, относно (логическо) отношение между A и не-$\boldsymbol{A}$.

Общата структура на парадокса на Лъжеца и на Стрелата може да се опише в термините на неразрешимост по следния твърде прост начин: не може да се реши между две контрадикторни възможности *A* и не-***A***, съответно „Аз лъжа" и „Аз не лъжа", от една страна, и от друга, „Стрелата е тук" и „Стрелата не е тук".

Общността на двата парадокса не се изчерпва с приведената обща структура на неразрешимост. Трябва да се добави специално за тях също обсъжданите вече по отношение на т. нар. теорема за компактността пространства на Стоун, представящи топологично, а оттук и векторно булевите алгебри, към каквито принадлежи и математическата структура на обичайната пропозиционална логика. В същата връзка вече се подхвърли идеята, че изоморфността на теория на множествата и класическа логика (съзнателно не уточняваме дали пропозиционална, от първи или по-висш ред) предполага своеобразна „ортогоналност" или „плоскост", „неизкривеност" и оттук съвпадение на „ковариантни" и „контравариантни координати". Същото условие е необходимо и по отношение на тази *допълнителна* общност на двата парадокса.

Сега ще се опитаме да покажем по прост начин, че към структурата на двата парадокса може да се причисли и парадоксът на Скулем. В парадокса на Стрелата можем да разграничим две различни отношения, *или изображения*: по отношение на себе си в минал момент – съответстващо на функцията наследник или Дедекиндовите „последователности" (вериги) – „Стрелата не е тук"; по отношение на самотъждествеността на стрелата (своеобразна парафраза на закона за запазване на енергията) – т.е. по отношение на релацията на еквивалентност (дефинирана било то „собствено" или „несобствено") – „Стрелата е тук". Както видяхме, разглеждането на Еми Ньотер, поддържа двата аспекта еквивалентни. При нашия подход от тяхната еквивалентност следва неразрешимостта на парадокса. Подчертахме, че и Гьодел ясно разграничава двете страни в своето самореференциално неразрешимо твърдение от т. нар. първа теорема за непълнотата, самият той тълкувайки я посредством парадокса на Лъжеца. Всъщност *на* разграничаването на двата аспекта, видяхме, че почиваше валидността на теоремата. Обратно показвайки, че те могат и да не се разделят, приложихме самореференциално теоремата и оттук следваше, че нейната валидност влече нейната неразрешимост. Най-грубо казано, по много начини говорим за едно и също: набелязват се контурите на фундаментална философска структура, на която още не сме дали име.

Да си припомним същността на логически прецизното решение на Гьодел: аспектът на самотъждественост се разглеждаше като външен, метаматематически и така се заключаваше, че „Аз лъжа" е вярно твърдение, но в *друго* отношение. Перифразирано по отношение на Стрелата, то би гласяло: „Стрелата е в движение" (и самото това твърдение, фигуративно казано, е в покой, т.е. е истинно), но в *друго* отношение, по отношение на ***друга*** *отправна система*.

Оттук вече е очевидна – в рамките на неназованата фундаментална философска структура – общността на подходите на Гьодел и на Айнщайн, но и на Скулем. Айнщайновата относителност, също както Скулемовата или както Гьоделовата пък неразрешимост е логически необходима, за да се преобразува фаталната противоречивост в допустимата „неразрешимост" или относителност. И по този начин – с уважение към Сава Петров – да се изгради „непротиворечива теория за противоречив обект".

Все пак обаче Гьоделовата неразрешимост и Айнщайновата относителност, от една страна, и Скулемовата относителност или квантово-механичната допълнителност са различни и може би дори антагонистични в един съществен, и то решаващ аспект: отхвърляне/ приемане на относителност между крайно и безкрайно, между Канторовите видове безкрайности, между дискретно и непрекъснато. Основата за второто е постулирането на аксиомата за избора.

Айнщайн и Гьодел решават същия проблем – представил им се съответно като относителност на относителността и като неразрешимост на неразрешимостта – по друг начин: категорично и логически пределно ясно разграничават аспектите на абсолютност и относителност на относителността (първият) и разрешимост и неразрешимост на неразрешимостта в различни теории. За Айнщайн това са специалната (1905) и общата теория на относителността (1915-16), за Гьодел – т. нар. теореми за непълнотата (1931) и т. нар. теореми за пълнотата и компактността (1930).

Показахме, че положението на нещата – на основата на примера на квантовата механика и информация и аксиомата за избора – може да се атакува и по друг начин, при който пълнотата/ непълнотата се оказват относителни. Също така заявихме претенция, че при определен начин на разглеждане, предстоящ да се експлицира в детайли по-нататък, Айнщайновата теория на гравитацията и обсъжданите в рамките на квантовата механика и информация явления на сдвояване са различни интерпретации на обща същност.

Един подход, насочен към това, е да се потърси обобщение на принципа на относителността (напр. с помощта на Скулемовата относителност), да речем между произволни отправни системи в обичайния смисъл и новодефинирани: такива, които са свързани със светлината, или с други думи, спрямо клас морфизми, много по-широк от този на дифеоморфизмите.

Нека също така обърнем внимание на връзката между аксиомата за избора и постулата за ненадвишаване на скоростта на светлината във вакуум. В настоящия контекст тя най-лесно може да се посочи чрез разглеждане на изображение изобщо (заради аксиомата за избора) и изображението $\boldsymbol{t} \longrightarrow \boldsymbol{x}$ (заради постулата за ненадвишаване скоростта на светлината във вакуум, където $\boldsymbol{t}$ е физическата величина на време, а $\boldsymbol{x}$ – на разстоянието).

Както и при аксиомата за избора, при постулата за ненадвишаване на скоростта на светлината във вакуум всъщност разполагаме със семейство определения (с витгенщайниански „прилики” помежду им).

Ако става дума за $\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} \leq \boldsymbol{c}$ (където със „$\boldsymbol{c}$” е означена фундаменталната константата на скоростта на светлината във вакуум), то за да бъде винаги дефинирано това съотношение, върху изображението $\boldsymbol{t} \longrightarrow \boldsymbol{x}$ се налага изискването то да бъде дифеоморфизъм. Изглежда от тук произхожда спецификацията на изображението като дифеоморфизъм в Айнщайновия принцип за относителността (цитиран многократно по-горе).

От друга страна обаче, ако и доколкото $\boldsymbol{t}$ е само число в смисъла на Паули, също така „принстънец”, т.е за да бъде всеобщо валиден (а не само статистически, по предложението на Бор) законът за запазване на енергията, то понятието за скорост и дори още самото изображение $\boldsymbol{t} \longrightarrow \boldsymbol{x}$ не може да се обсъжда по отношение на квантови обекти[114]. По същество то е заменено с понятието вероятност,

---

[114] Забележете, че с това попадаме в ситуация, деликатна в логически план, по отношение на условието „I.” на обсъденото в първата част доказателство на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика. То е тривиално винаги изпълнено за коя да е величина, стига да е представима във вида $\boldsymbol{f(t)}$, поради това че на величината $\boldsymbol{t}$ *не* съответства оператор по определение; оттук на $\boldsymbol{f(t)}$ може да съответства кой да е оператор.

което се дефинира по начин да е валидно и за морфизми, които дори не са и непрекъснати. Нека видим как може да стане това:

Да разгледаме изображение, което е прекъснато в дадена „точка”**:** това означава, че за $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}\,,\ \boldsymbol{y} := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$**.** В този случай може да приемем, че $\forall \boldsymbol{y} \exists \overline{\boldsymbol{y}} \colon \forall \overline{\boldsymbol{y}} \colon\ \overline{\boldsymbol{y}} := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$, и по силата на аксиомата за избора да приемем изображението $\mathbf{F} \colon \overline{\boldsymbol{y}} \overset{\boldsymbol{F}}{\rightarrow} [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$**,** за което да е изпълнено условието: $\int_{\overline{y}}\ \overline{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{d} \overline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{1}$ (resp. $\sum_{\overline{y}} \overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{\iota}}\ =\ \mathbf{1}$). Смисълът на това формално полагане е, че за всяка точка на прекъсване на едно изображение, приемаме, че то се „осъществява” във всяка точка на множеството от стойностите му с различна вероятност. Тогава всяко прекъснато изображение (т.е. такова, което има поне една точка на прекъсване) може да се разглежда като непрекъснато в съответно функционално пространство, напр. в хилбертовото. Посредством добра наредба чрез аксиомата за избора и Скулемова относителност на континуално и дискретно може да изоставим изобщо представите за прекъсната и непрекъсната функция и вместо това да приемем всяко изображение за непрекъснато, но заедно с това – като прекъснато да е необходимо представено *дуално*, *т.е. втори път в съответно функционално пространство*. Като физическа величина ще приемем – според определението на квантовата механика – *изображението* (т.е. функционалът) *между изображения,* всяко от които е едно от двете дуални представяния.

Нека в такъв контекст по-подробно да обсъдим въпроса за идентичността на частица и вълна при квантов скок на основа на разглеждането на Шрьодингер (Schrödinger 1967: 115-120). Първо, понятието за идентичност е тясно свързано с това за непрекъснатост. Тъкмо затова е необходимо изясняване при квантови скокове. Основа за определяне на тъждествеността, т.е. че нещо е същото, е законът за запазване на енергията, оставащ еднакво валиден, както при непрекъсната траектория (частица), така и при прекъсване, квантов скок (вълна), но и при едновременното им разглеждане (вълново-корпускулярен дуализъм), обусловено от една скулемовска относителност на дискретно и непрекъснато и в крайна сметка – на крайно и безкрайно. Този подход се онагледява чрез файнмановските диаграми на взаимни превръщания на елементарните частици. Дори и квантовият обект да се окаже на друго място или в произволно различно състояние, идентичността на времето служи като стожер, който – с посредничеството на закона за запазване на енергията – позволява той да бъде отъждествен, поне принципно, като същия.

Въпросът се усложнява при разглеждане на няколко квантови обекта. Те биха могли да са взаимодействали и нито един да не е запазил енергията си и в известна степен въпросът „Кой кой е?" губи смисъла си . В класическата физика този проблем не може да възникне, тъй като освен стожера на времето е налице възможността всеки един от множество обекти да бъде маркиран, отбелязан, наименуван, номериран, така че да бъде разпознат като същия във всеки един момент от времето. Единственото, което може да „маркира" квантова система в различни моменти от времето е енергията ѝ, а в един и същ момент, ако е налице взаимодействие на повече от един – състоянието на всеки от тях.

Оттук квантовите обекти се налага да се разделят на две групи: ако разгледаме дуализма дискретност – непрекъснатост като последователен във времето, т.е. като една „пунктирана" траектория, състояща се от редуващи се участъци на непрекъснатост и прекъсване, за всеки квантов обект, за да онагледим и изясним ситуацията, и вземем предвид, че взаимодействие дефинитивно се осъществява в настоящия момент от времето, то за едната група той ще бъде участък на прекъсване, а за другата – на непрекъснатост.

В първия случай в едно състояние могат да се окажат неопределено много обекти и те следователно ще бъдат напълно неразличими, а във втория – само два, споделящите непрекъснатия участък на своето „сега", но в двете противоположни посоки[115] (тъй като той с еднакво основание може да се разгледа и като принадлежащ на бъдещето в качеството на първи, и като принадлежащ на миналото в качеството на последен момент). Очевидно, тези две всеобхватни групи биха съответствали на бозони, „частиците" с цял спин, и на фермиони – с полуцял.

Можем да се отървем от „патерицата" на нагледа за последователност във времето на участъците на прекъснатост и непрекъснатост, тъй като се изисква само по-общото и по-слабо „редуване", т.е. единствено забрана за едновременно разглеждане. Тогава тъждествеността за колектив от фермиони по закона за запазване на енергията ще се определя в участъците на непрекъснатост (грубо

---

[115] В случая на състояние, което е пространствено разположение, става дума за $\boldsymbol{CPT}$ теорема-та, т.е. инвариантност спрямо инверсия в пространството ($\boldsymbol{P}$), времето ($\boldsymbol{T}$) и между двата споделящи непрекъснатия участък ($\boldsymbol{C}$) квантови обекта.

казано, тяхното взаимодействие е извън времепространството), а на такъв от бозони – на прекъснатост (взаимодействието им е тъкмо във време-пространството, т.е. това са онези квантови обекти, които е обичайно да се смята, че кореспондират на полетата от класическата физика). Същите два аспекта в калибровъчните теории – които като правило са базирани на лагранжиана, за разлика от настоящото, по-скоро дуалистично разглеждане, уповаващо се на хамилтониана – се представят съответно с тангенциалните, „вътреточковите” пространства и с връзките между тях, нетривиални и променящи се между пространствата („точките”), т.е. калибровъчното поле.

Може да се добави в анонс към по-нататъшното изложение, че самите три пространствени координати са определими като разстоянията, получавани посредством константата на скоростта на светлината във вакуум между три времеви точки, характерни за всеки обект: минало, настояще, бъдеще с изохронност в настоящето на едно сдвояване, пораждаща изотропност. Нещо повече, можем да си представим по подобие на електромагнитната вълна една двукомпонентна вълна на времепространството: непрестанно взаимно преобразуващи се една в друга времева последователност и тримерна синхронност на пространството за реализиране на дуалните аспекти дискретност – непрекъснатост посредством декохеренция – кохеренция (сдвояване).

Нека сега, след приведените предварителни уточнения да разгледаме конкретния случай на физическата величина скорост, за която и е формулиран крайъгълният камък на теорията на относителността: постулатът за ненадвишаване скоростта на светлината във вакуум. Както видяхме, при универсална валидност на закона за запазване на енергията, на величината време не съответства оператор, тя е „дефектна” в смисъла на нашето представяне: тя е само континуална; и следователно изисква съществуването на множество, такова че аксиомата за избора да не е валидна за него, а оттук и за всички множества, на които е същинско подмножество, т.е. с кардинално число не по-малко от неговото. Фигуративно казано, то е с толкова много елементи, че те не могат да се подредят *добре*. Следователно имаме някакъв кардинал и съответен ординал, който може да се дефинира с това, че за по-големи трансфинитни числа аксиомата за избора не е изпълнена. Дали съответният ординал не би бил Генценовият – $\boldsymbol{\varepsilon_0}$?

За равни и по-големи трансфинитни числа, поради невалидността на аксиомата за избора, няма да може също така изобщо да се гарантира съществуването на изображението $\boldsymbol{t} \longrightarrow \boldsymbol{x}$, а оттук и съществуването на скорост. Следователно необходимо ще е налице такава недостижима скорост, за стойности равни или по-големи от която понятието скорост изобщо не може да се дефинира, тъй като неговото определение изисква съществуването на изображението: $\boldsymbol{t} \longrightarrow \boldsymbol{x}$.

Да резюмираме: законът за запазване на енергията влече особената физическа величина „време", на която не съответства хипермаксимален оператор и тя няма дуално прекъснато представяне, каквото се получава чрез аксиомата за избора за всички други физически величини. Оттук чрез максималното трансфинитно число, от което нагоре аксиомата за избора не е изпълнена, следва необходимото съществуване на особена физическа величина „скорост", за която е валидно, че за сметка на това, че също така е само непрекъсната има недостижима горна граница, след която изобщо не може да се дефинира, или *фигуративно казано*, в областта от стойности „по-големи" от тази горна граница е само прекъсната.

При валидност *на закона за запазване на енергията* теорията на относителността е само макро-теория, но не може по принцип да бъде формулирана за квантови обекти, точно както квантовата механика и информация не може да се отнесе към макро обекти, или казано афористично „квантовата гравитация" и „котката на Шрьодингер" са невъзможни като две дуални страни на една и съща забрана.

При отказ *от закона за запазване на енергията* обаче, което е равносилно при нашето разглеждане на всеобща (т.е. за какъвто и да е кардинал или ординал) валидност на аксиомата за избора, можем да обсъждаме „обичайната" обща теория на относителността също така и в качеството на квантова гравитация, чийто прекъснат аспект са явленията на сдвояване (entanglement), изучавани от квантовата информация. Цената, която ще се наложи да заплатим, а по-нататък ще бъде разгледана в подробности, е, че ще възникнат проблеми с тъждествеността; казано по-точно, необходимо съществуват обекти, чиято тъждественост е неразрешим проблем, т.е. от това че такова „нещо" е тъждествено, следва, че не е, както и обратното. Тази нова относителност, сега пък на тъждествеността, следва да бъде прибавена към вече добре и отдавна известните на науката: „релативистката" относителност на движението, теоретико-множествената относителност на крайно и безкрайно, на видове безкрайности, квантовата имплицитна относителност на съществуването, експлицирана чрез първичните (т.е. статистически, без „скрит параметър”), „феноменологични” вероятности, логическата относителност на пълнота и непълнота на една аксиоматика (респ. на разрешимост и неразрешимост на едно твърдение).

Примерите навеждат на мисълта, че нашето познание по принцип съдържа неизбежна или дори необходима относителност; но тя може да бъде „премествана” от теория в теория, както и за да „не пречи” на едно „абсолютно” изучаване на явленията, така и заради това – самата тя да бъде изучена в термините на разглежданата теория.

С поглед към подобна перспектива имаме възможност по-ясно да вникнем в следните думи на Скулем:

> *Относителността достига дотам, че нещата в* $\boldsymbol{B}$ *имат едно друго и далеч по-ограничено значение от изобщо определимото. Че тази относителност трябва да бъде неотделимо свързана с всяка последователна аксиоматика, е ясно; тъй като тя се основава на споменатите по-горе всеобщи твърдения на математическата логика. За да стане нещо абсолютно неизброимо би трябвало или самите аксиоми да са налице като абсолютно неизброимо безкрайно множество, или да има една аксиома, която да може да посочи едно абсолютно неизброимо множество от числови твърдения; обаче всичко това би било във всички случаи кръгово извеждане на висшите безкрайности, т.е.* върху аксиоматична основа висшите безкрайности са налице само в относителен смисъл (Skolem 1970: 144).

На основа на по-рано предложеното, „актуализирано” представяне на диагонализацията може да се построи аритметична версия на т. нар. парадокс на Скулем. На всяко разделяне от посочения тип може еднозначно да се съпостави реално число, при това така, че когато едното от множествата е крайно, числото да е рационално, а когато и двете са безкрайни – то да е ирационално. По натать може да се покаже, че съществува такова едно-еднозначно съответствие[116] между реалните числа и всички разделяния от този тип, които ще обозначим като множеството A. Най-сетне очевидно е, че може да се построи друго едно-еднозначно съответствие между естествените числа и множеството A. Тъй като композицията на две едно-еднозначни съответствия е също така едно-еднозначно съответствие, следователно с помощта на „междинната станция" на множеството A построихме едно-еднозначно съответствие между множеството на естествените числа и това на реалните числа и следователно те са равномощни.

Забележителното е, че беше използвана актуалистка версия на диагонализацията, която в своя първоначален „конструктивен" вариант е приложена от Кантор, за да покаже, че мощността на множеството на реалните числа е различна от тази на естествените и рационалните и тъй като се предполага, че мощността на изброимото множество е най-малката мощност на безкрайно множество, то следва, че тази на реалните числа е по-голяма, макар и не непременно *непосредствено* по-голяма*та* (че наистина е непосредствено по-голямата, представлява съдържанието на т. нар. хипотеза за континуума, предложена още от Кантор).

Често се твърди, че парадоксът на Скулем или понякога, на Льовенхайм – Скулем, тъй като е пряко следствие от фундаменталната теорема, носеща името и на двамата, не бил истински парадокс, тъй като поне между две от обсъжданите безкрайни множества не може да се установи никакво съответствие[117] (т.е. множеството на последното се оказва празно). Това обаче е щраусово заравяне на главата чрез въртене в кръг: тъй като, за да не може да съществува никакво съответствие на две безкрайни множества, то не бива да съществува (т.е. да е празно множество) и тяхното декартово произведение, подмножество на което е и всяко изображение, предположено като несъществуващо. Съществуването обаче на декартово произведение е еквивалентно (напр. в „класическите" аксиоматики –Whitehead,

---

[116] Напр. чрез кое да е едно-еднозначно кодиране, използвано при доказателството за непълнотата, вкл. дори самото това, което е използвано от Гьодел.

[117] Напр. Пол Коен: „Този парадокс, състоящ се в това, че изброим модел може да съдържа неизброимо множество, се разяснява със забележката, че твърдението за неизброимостта на някакво множество означава само несъществуване на взаимно еднозначно изображение на това множество върху множеството на всички цели числа. Неизброимото множество в M съдържа в действителност само изброимо количество елементи от M, но в M не съществува никакво взаимно еднозначно изображение на това множество върху множеството на всички цели числа" (Коэн 1969: 39).

Russell 1910: 561-562) на аксиомата за избора, която е тъкмо съществена предпоставка на теоремата на Льовенхайм – Скулем, чието пряко следствие е обсъжданият парадокс.

За нашите нужди в момента е достатъчно да се покаже, че съществува непосредствена връзка между два факта: първо, валидността на аксиомата за избора; действителната неразрешимост на парадокса на Скулем.

В приведената по-горе проста аритметична, но актуалистка версия, обаче в пълно съзвучие с Гьоделовото доказателство на т. нар. първа теорема за непълнотата, оригинално предложено в своя конструктивистки вариант като разрешимо твърдение за неразрешимост, от парадокса на Скулем следва неразрешимост на проблема: изброима ли е мощността на континуума? Конструктивисткият и интуиционисткият подход към континуума всъщност следват от втората страна на тази неразрешимост, докато първата е преексплоатирана в Канторовия подход към него. Лесно се вижда, че веднъж подложили на съмнения разрешимостта на проблема за изброимостта на континуума, аналогично възниква неразрешим проблем за изброимостта на кое да кардинално число, както и един последващ: съществува ли кардинално число, да го означим с ***ђ,*** за което да е разрешимо и валидно, че не е изброимо.

И в по-горе предшествалото изложение вече беше намекната идеята, че конструктивизмът и интуиционизмът, от една страна, и Канторовият „актуализъм” и Хилбертовият „формализъм”, от друга, са фундаментално различни и логически несъвместими. Всъщност тази разлика е едновременно експлицирана и прикрита в аксиомата за избора. Основата всъщност е по-дълбока: съществуването на актуална безкрайност е самостоятелна аксиома и по никакъв начин не следва от споменатата вече т. нар. аксиома за безкрайността. От нея в частност следва Канторовият „парад на безкрайностите”. Ако обаче заедно с това приемем „конструктивисткото броене”, не само трансфинитното, но и в рамките на аксиомата за пълната индукция, следва съществуването на неразрешими твърдения, както показва Гьодел, но такова, както пък ние видяхме, се оказва и самото то, твърдящото, че съществуват неразрешими твърдения.

Това ни позволява да предположим, че несъвместимостта между конструктивизма и „актуализма” (формализма) е по-мека от пряко контрадикторно противоречие. Едновременното им използване води не до доказуемост на произволно твърдение, а до неразрешимост на клас от твърдения, като въпросът дали този клас е множество изглежда отново е неразрешимо твърдение, т.е. съществуват неразрешими твърдения, каквото е т. нар. първа теорема за непълнотата на Гьодел, чиято неразрешимост следва от собствената им валидност (т.е. разрешимост).

Бихме искали тъкмо в този контекст накратко да обсъдим и онтологичната перспектива към парадокса на Скулем в смисъла на съответствие на език и интерпретация, която задава Хилари Пътнам в статията си „Модели и реалност” (Putnam 1980), както и своеобразното ѝ преобръщане в рамките на дуалистичното питагорейство. Неговата изходна точка е следната:

> *До един момент всички коментатори са съгласни относно значимостта на съществуването на „невъзнамерявани” интерпретации, напр. модели, в които това, което се „предполага да са” неизброими множества, са „в действителност” изброими. Всички коментатори са съгласни, че съществуването на такива модели показва, че „възнамеряваната интерпретация”, или както някои предпочитат да казват „интуитивното понятие за множество” не се „хваща” от формалната система. Но ако аксиомите не могат да хванат „интуитивното понятие за множество”, би ли могло да се допусне?* (Putnam 1980: 465).

Той предлага по-нататък свое тълкуване на това общоприето описание на състоянието на нещата. Неговата същност е в съпоставяне на невъзнамеряваната интерпретация и неизброимите множества, от една страна, и възнамеряваната и изброимите множества, от друга, респ. с реалността и моделите в езика, след което оценява вече така изтълкувания от него парадокс на Скулем като твърде тежък и дори може би решаващ довод срещу философската концепция на реализма, предполагаща повече или по-малко строго съответствие между модели и реалност. Пътнам изяснява съотношението на възможните отговори в рамките по-скоро на философия на математиката като довод в полза на крайните макар и противоположни варианти на платонизма и верификационизма, при което – поради атаката срещу съответствието – или математическата реалност, или моделите се еманципират: респ. или семантиката, или синтаксиса. За да изясни проблема, той се позовава на аксиомата за построимостта [constructability], известна в литературата на кирилица и като „аксиома за конструктивността”, предложена от Гьодел през 1938 г.:

> *аксиомата „$V = L$". Тук L е класът от всички построими множества, тоест, класът от всички множества, които могат да бъдат дефинирани от определена конструктивна процедура, ако претендираме да разполагаме с имена за всички ординали, колкото и да са големи. (Разбира се, този смисъл на „построимост" би бил анатема за математиците конструктивисти.) V е вселената от всички множества. Така „$V = L$" тъкмо казва:* всички множества *са* построими. *Чрез разглеждане на вътрешен модел за теорията на множествата, в който „$V = L$" е истинно, Гьодел е в състояние да докаже относителната непротиворечивост на ZF и ZF плюс аксиомата за избора и обобщената континуум-хипотеза* (Putnam 1980: 467).

На основата на приведените по-рано пасажи и доводи от Генцен, който определя себе си не просто като конструктивист, а като финитист, бих възразил единствено на вметната бележка, че предлаганият смисъл на построимост е „анатема" за конструктивистите. Всъщност принципът на неограничената трансфинитна индукция приема аксиомата „$V = L$" за предпоставка и отива по-нататък: валидното за V е валидно за L, чрез което заобикаля прякото разглеждане на опасното „множество от всички множества". Наистина финитизмът се ограничава до ординали строго по-малки от ε_0 и съответно само до аксиома за изброимия избор. В неговите рамки може да се предложи аналогична аксиома за изброимостта: *всички множества са изброими*, „$A = L$". Ако си позволим да преминем през L (т.е. да използваме транизитивност на „$=$" през L), „класът от всички множества" ще можем да твърдим: „$V = A = L$", всички (построими) множества са изброими. Чрез това се оголва както дълбоката основа на парадокса на Скулем, така и фактът, че става дума за истински парадокс, в степента в която това се отнася до превърналото се в нарицателно за антиномичност „множество от всички множества". А именно парадоксът на Скулем следва непосредствено от транзитивност през последното, и то не само по отношение на Гьоделовата „построимост": нещо повече, какъвто и да е предикат за множеството (или класа) от всички множества L след прилагане на транзитивност през L се отнася и до изброимите множества.

Чрез горното се оказва „проблемът решен" (Putnam 1980: 481-482), преведено на по-строг, теоретико-множествен език от собствено философската аргументация на Пътнам, според която това, което се пропуска, е, че по определение езикът винаги има интерпретация:

> *Това е фаталната стъпка. Да се приеме теория на значението, според която език, чиято пълна употреба е определена без да има нещо* [за което да се отнася] *– напр. неговата „интерпретация" – е да се приеме проблем, който* може *да има само налудничави решения. Да се говори сякаш* това *ми е проблемът: „Зная как да използвам езика, ама, сега, как ще посоча интерпретация?" е да се каже безсмислица. Или употребата* вече *фиксира „интерпретацията", или не може* нищо (Putnam 1980: 481-482).

Очевидно, за да се гарантира априорната валидност на последното твърдение във *всеки* един случай, т.е. да постулираме „Всеки език има известна интерпретация" , трябва да приемем прехода през L (на философски език: светът като цяло от своите части), с други думи да приемем съществуването на света едва след което употребата на всеки един език престава да бъде „безсмислица" и проблем, за който „*може* да има само налудничави отговори". Ясно е, че декларираното от Пътнам поражение на реализма чрез парадокса на Скулем и преминаването му поради това под знамето на верификационизма е само реторичен, тактически ход в дискусията, едно своеобразно ораторско доказателство от противното в полза на реализма.

От нашия контекст обаче се вижда, че реалисткото приемане на света (както впрочем и нереалисткото му отхвърляне) е неразрешим проблем (без да е противоречие) и приемането на което и да е решение води до каскада от неразрешими проблеми, които, честно казано, заедно с опитите за привидното им решение (един от които е и т. нар. първа теорема за непълнотата) представляват предмета и историята на философията.

Участта на тази неизбежна философска едностранчивост – да се предлагат решения за неразрешимото – няма да отмине и защитаваната в настоящата работа концепция за „дуалистичното питагорейство". Наистина, може да се построи собствено (вътрешно) математическа теория на измерването, чрез която в експерименти да се решава за реалната математика и метафизика на нашия свят. Заедно с това обаче, цената която ще платим е, че самият свят ще загуби стопроцентовата си реалност, отчасти, и то в неопределима степен, ще се виртуализира: явление, сред което вече всъщност живеем.

С помощта на изложената по-рано версия на парадокса на Скулем също така можем да построим своеобразен аритметичен модел на сдвоените състояния и да се освободим от парадоксалността на ситуацията (независимо дали реална или мнима) като приемем, че всички състояния „в повече" над изброимите са в съществена част съвпадащи, т.е. сдвоени. От тази гледна точка съществуването на сдвоени състояния необходимо следва от парадокса на Скулем и следователно от аксиомата за избора, съчетана с конструктивисткото броене, т.е. в общата област на актуализма (формализма) и конструктивизма, в която, посочихме, т. нар. първа теорема за непълнотата е неразрешимо твърдение:

В рамките на изброимостта, в която се включва финитността на всяко реално измерване, (напълно) сдвоените състояния могат да се приемат за едно и също. Тяхната различност в рамките на актуализма се представя чрез отдалеченото им и следователно решително несъвпадащо тяхно разположение в пространството (респ. във времепространството на теорията на относителността). Очевидно могат да се прокарат отчетливи паралели между „непарадоксалните" – или по-точно, непарадоксалните аспекти на – парадоксите на Скулем, от една страна, и на Айнщайн – Подолски – Розен от друга, кулминиращи в единното, в т.ч. и философско разглеждане на самообосноваването на математиката и на квантовата информация.

Обсъждането в този дух може да продължи и в крайния случай чрез споменатата вече и разгледана в безкрайния случай[118] $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m_0} = \infty)$ теорема на Рамзи:

---

[118] Теоремата в крайния случай следва от безкрайния, ако се приложи аргументът за компактност, както може да се обобщи типа разсъждение в теоремата за компактността. Връзката между теоремата на Рамзи и аксиомата за избора позволява да се изследва влиянието на последната, когато броят на елементите и на различните елементи не е един и същ и поне един от тях е краен. За нас това е съществено, тъй като експериментално наблюдаваните явления на сдвояване обикновено включват ситуация с краен брой, и то най-често два-три квантови обекта, в краен брой, не повече от няколко възможни състояния; разбира се, тази ситуация се наблюдава в значимо статистическо повторение.

Теорема В. *Ако са дадени произволни* $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}$ *и* $\boldsymbol{\mu}$ *можем да намерим* $\boldsymbol{m_0}$*, такова че ако* $\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{m_0}$ *и* $\boldsymbol{r}$*-комбинациите на всеки* $\Gamma_{\boldsymbol{m}}$ *са разделени на* $\boldsymbol{\mu}$ *взаимно изключващи се класове* $\boldsymbol{C_i}\ (\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{\mu})$*, тогава* $\Gamma_{\boldsymbol{m}}$ *трябва да съдържа под-клас* $\boldsymbol{\Delta_n}$*, такъв че всички* $\boldsymbol{r}$*-комбинации от членове на* $\boldsymbol{\Delta_n}$ *принадлежат на един и същ* $\boldsymbol{C_i}$ (Ramsey 1978: 236).

Четворките цели числа $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{m_0}$, такива че $\boldsymbol{m_0} = \boldsymbol{R}\ (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\mu})$ се наричат числа на Рамзи[119] и смисълът на теоремата често се онагледява чрез съществуването на едноцветен подграф в граф, оцветен с $\boldsymbol{\mu}$ на брой цветове. Аналогично можем да тълкуваме теоремата, че изисква съществуването на квантови обекти в едно и също състояние във всяка достатъчно голяма съвкупност от тях.

Съмненията и въпросите около теория на множествата и обосноваването на математиката доскоро изглеждаха напълно абстрактни, собствено математически или дори философско-метафизични. В действителност обаче се оказва, че те имат ясна физическа интерпретация посредством модели в квантовата механика и информация и следователно допускат експериментална проверка, най-малкото в същата степен и смисъл, в които може да се твърди, че опитите и явленията в областта на общата теория на относителността могат да служат за проверка относно „реалната геометрия на нашата вселена”. Аналогично, чрез квантовата механика и информация можем да поставяме въпроси за „реалната математика” на нашия свят, напр. за включването или изключването на аксиомата за избора, а също така и за (само)обосноваването на математика, т.е. за връзките, може би дуални, между математика и метаматематика. Обратно, доскоро полуемипиричната или най-много приложно-математическа теория на квантово-механичното измерване (редукция и декохеренция) имплицира необходимо своя фундаментална структура в областта на съотнасяне на математика и метаматематика. Тези, заедно с редица други, изброявани по-горе в съответния си контекст, са съществени моменти в концепцията на „дуалистичното питагорейство”.

---

[119] Съществуват и „кванторни на Рамзи”, които свързват две свободни променливи. С тяхна помощ може да се докаже, че някои типове аритметики са разрешими (Schmerl, Simpson 1982).

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЕ[120]: Статията на Бел „Върху проблема за скритите променливи в квантовата механика” (1966)

Условията за валидност на теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри – Понятието за причинност – Ограничаване на степените за свобода и идея за нелокална причинност – Обобщена квантово-механична причинност – Времепространствена причинност – Допълнителност на причинно и време-пространствено описание по Бор – Различни подходи към причинност и време-пространственост – Бел за философския фон на своя анализ – Концепцията на Бел за „съществуемите”– Локалност или нелокалност на съществуемите – „Съществуема = положението на копчетата + показанието на циферблата” – „Критерий за свободната воля” – Взаимодействие и причиняване – Измерването е изображението на физическа величина в число, т.е. на физическо в математическо, на материално в идеално – Квантовата механика като нова теория на вероятността – Допълнителност на истина и неистина – Субективна и обективна вероятност – Бел разглежда доказателството на фон Нойман – Предпоставката за адитивност на очакването – Доводът на Грете Херман – Следствия от съществуването на едновременно неизмерими величини – „Големият взрив” – Гравитация и квантови корелации – Употребите на „едновременност” и на „бездисперсни състояния” – „Междудисциплинарното неразбирателство” между физика и математика – Сумата от некомутиращи оператори – Операторът на енергията – Ко– и контра-вариантно обсъждане – Двусмислеността на термина „пренасяне” – Теоремите на Еми Ньотер – Квантовата информация като „субстанция” – Бел за логическата интерпретация на Яух и Пирон – Спорната аксиома – Бел за теоремата на Глийсън – Скритата предпоставка – Метафората за локални и нелокални скрити параметри – Идеята на Бом (1952) за квантова механика със скрити параметри – Вероятността като описание на сила и Ψ*-функцията като описваща поле – От позиция на дуалистичното питагорейство – „Квантово-механичният потенциал” на Бом – Локално причинната интерпретация на Бом – „*ψ*-полето” на Бом – Физическият смисъл на едно „вероятностно поле” – Бом за аргумента АПР – Метафората като логически елемент – Трите допускания на Бом – „Дуалистично питагорейска” редакция на третото от тях – Сравнение на видоизменената с оригиналната интерпретация на Бом – Други характерни нейни черти – Бом за теоремата на фон Нойман – Епистемологичният модел на Бом – Сравнение между подходите на Бел и Бом към „скритите параметри” – За статията на Яух и Пирон, цитирана от Бел – Логически еквивалент на теоремата на фон Нойман – Съвместимост на пропозиции по Яух и Пирон – Обобщена система от пропозиции – Усилена ли е теоремата на фон Нойман? – Определение за състояние на квантова система чрез пропозициите за нея – Логико-физическо разглеждане – Приблизително бездисперсно състояние – Теоремата на Глийсън – Отсъствието на онтологическа и дори на физическа интерпретация – Фрейм-функции – За тълкуването на теоремата – Спектърът от оценки за теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри – Критиката на Грете Херман – Концепцията за причинност и изчислимост на Грете Херман – Теоремата в светлината на преобразованието на Вайл-Вигнер – За статистическия подход на Вигнер-Моял към квантовата механика – Дуалност на измерването като физически процес и като математическа структура*

---

[120] Текстът, който следва, е втора глава от продължението на тази книга, озаглавено „Философия на квантовата информация. Неравенствата на Бел”.

В тази статия се разглежда ограничената валидност и оттук условията на вече много подробно обсъжданата в първата книга теорема на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика:

> *Преразглеждат се демонстрациите от фон Нойман и други, че квантовата механика не позволява интерпретация чрез скрити параметри. Показва се, че техни съществени аксиоми са необосновани. Настоява се, че при понататъшно изследване на този проблем интересна аксиома би била, че взаимно отдалечени системи са независими една от друга* (Bell 1966: 447).

Естествено с това – макар едва към края на статията и като заключение експлицитно – са засегнати философските и методологични въпроси за време, пространство и причинност, всъщност тъкмо онези, които са водещи теми и в дискусията между Айнщайн и Бор. В тази връзка е уместно да припомним един вече цитиран в първата книга пасаж от статия на Шрьодингер:

> *определена стабилност на световите събития* sub specie aeternitatis *може единствено да съществува чрез* връзката *на всяка отделна система с целия останал свят. От гледна точка на единството, отделната единична система би трябвало да е хаос. Тя изисква тази връзка като непрекъснат* регулатор, *без която би била, що се отнася до своята енергия, случайно блуждаеща* (Schrödinger 1924: 724).

Само явления, строго предшестващи изследваното във времето, се разглеждат като възможни причини в класическата физика и наука изобщо. Това положение получава строго обосноваване в теорията на относителността с понятието за светлинен конус на миналото, единствено точки от който могат да служат за причина на случващото се в настоящето. Заедно с това е налице и концепцията за физическо взаимодействие, при която причината и следствието са едновременни и рефлексивни. Така или иначе забраната за причина от бъдещето остава категорична.

Понятието за причинност е изключително широко, многопластово и с разнообразни употреби в различни исторически епохи или научни дисциплини. В настоящото изследване налагащото се ограничаване на разглеждането, но достатъчно за неговите цели, се свежда до подробно обсъдената в първата книга концепция на фон Нойман за отъждествяване на причинността („каузалност” се използва като пълен синоним) с бездисперсни величини. Обратно, наличието на еднородни бездисперсни величини е свидетелството за акаузалността на квантовата механика, а оттук – поради нейната фундаменталност – на мирозданието изобщо. Това тълкувание на причинността се оказва изключително плодотворно за развитието на квантовата механика и информация, както впрочем личи и от разглежданите сега статии на Бел.

В такива термини и с общата картина, предложена в цитата от Шрьодингер малко по-горе, критиката на Бел може да се представи така: като причина на едно квантово явление могат да се разглеждат всички, при това произволно отдалечени други явления, едновременни в нютоновски – не в Айнщайнов! – смисъл с даденото. С това се налага да припомним цитираната също така в първата книга мисъл на Бор, че концепцията за време и пространство, от една страна, и тази за каузалност, от друга, са допълнителни:

> *Самата природа на квантовата теория следователно ни принуждава да сметнем времепространствената координация и твърдението за причинност, обединението на които характеризира класическите теории, като допълнителни, но взаимно изключващи се черти, символизиращи идеализацията съответно на наблюдение и определяне* (Bohr 1928, 54 -55*).

От гледна точка на Бел в доказателството на фон Нойман се съдържа скрита предпоставка, ограничаваща валидността на неговото доказателство само до локални причини: обратно, всяко явление, едновременно с даденото, може да встъпи в качеството на нелокална причина в смисъла на ограничаване на степените на свобода на изследваното явление или на „свиване” на дисперсията на дадена физическа величина, вкл. и до степен на бездисперсност.

На тази основа могат да се съединят резултати на фон Нойман и вече разгледаната статия на Бел от 1964 година, въвеждаща прочутите неравенства, по отношение на причинността в класическата и квантовата механика. При това причинността би трябвало да се разбира по строго определен начин, следвайки фон

Нойман – като ограничаване на степените на свобода на даденото явление от протичането на друго, и то в различна точка на времепространството. При такъв подход причинността в квантовата механика може да се възстанови като обобщена форма на тази в класическата и привидното ѝ нарушаване да се разбере в качеството на излизане от рамките на тясно дефинираната, *чисто времево*, към по-широко определената – *а именно времепространствено* – каузалност[121]. Но и този път няма да е съвсем гладък.

Основният проблем е в това, че времето и пространството участват по различен начин във времепространствената концепция на теорията на относителността, от една страна, и в такава, обобщена квантово-механична причинност, от друга. Най-грубо казано, разстоянието във времепространството на Минковски е *разлика* от времето и пространството, докато в една концепция за обобщена каузалност, както личи и от вече разгледаните неравенства на Бел, те трябва да се *събират*. Разбира се, тук не става дума за формално-логическо противоречие или неразрешимост, а за това, как точно да се разделят, но заедно с това и да се съпоставят аспектите на причинността и времепространството по отношение на квантовата механика. Вече цитираната малко по-горе мисъл на Бор – да се разглеждат като допълнителни – наистина е решение, но прекалено общо, неколичествено, не съответства на пробива, вече осъществен от Бел по-късно. Ще си позволим да предположим следното:

Времепространството на теорията на относителността и фактически „плоските”, по нютоновски отделени време и пространство, и заедно с тях неизбежното далекодействие, т.е. едновременност на цялото пространство, на квантовата

---

[121] Ето едно сходно мнение (Laudisa 2002: 230), според което не се приема с дължимото внимание ролята на процеса на редукция на състоянието, тъй като в рамките АПР-Бел белегът на отношение, което би могло да се разглежда като каузално, между двата резултата е появата на действителни свойства на системата върху едното крило, като следствие от получаването на определен резултат след измерване на наблюдаема на системата в другото крило. Но в обичайната квантова механика самият процес, чрез който такива свойства се появяват, е тъкмо редукцията на състоянието, така че е целесъобразно изследването на това понятие за причиняване от разстояние все пак да се характеризира на фона на процеса на редукция. При допускането, че редукцията на състоянието е реален физически процес (че, както се твърди, липсва лоренцова ковариантност), има различни мнения за това, къде би могло да се случва редукцията на състоянието и предвид на гореспоменатата връзка на причинна редукция [causation-reduction], би трябвало да вземем под внимание как понятие за причиняване – дори много общо – съжителства по отношение на различните мнения за това, къде се случва редукцията на състоянието.

механика, следва да се примиряват не релативистки, с други думи, предполагайки малки относителни скорости (а то и не е вярно), а квантово-механично. Последното означава *то или също и то* да се разглежда като общия случай. Това непротиворечиво може да стане така:

Теорията на относителността обсъжда случая само напред във времето, понеже големините на настоящето, дефинирано като периода на дьобройловската вълна, на физически (макро) обект са поне от еднакъв порядък, а често и съвпадат, докато при квантовата механика не това е случаят: става дума за разлика от десетки порядъци, при което квантовият обект се съпоставя не само с настоящето, но също така и с бъдещето и миналото на уреда, разгледани спрямо неговото собствено настояще. При това положение, а именно в рамките на твърде обширното настояще на квантовия обект, идеализацията за стрела на времето трябва да се изостави и да се приеме, че двете посоки на времето са равноправни и в еднаква степен трябва да се имат предвид. Тоест, вместо

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{r^2 - \ c^2 t^2}} \qquad (62)$$

от специалната теория на относителността (където $\boldsymbol{\sigma}$ е разстоянието в пространството на Минковски, $\boldsymbol{r}$ е разстоянието в обичайното тримерно евклидово пространство, а $\boldsymbol{t}$ е времето) трябва да се разглежда „разстоянието по двете посоки на времето”, а именно

$$\boldsymbol{\tau = \sqrt{r^2 + \ c^2 t^2} = \sqrt{(r + ict).(r - ict)}} \ . \qquad (63)$$

Така се получава обичайно, т.е. не псевдоевклидово, а евклидово пространство, обаче четиримерно, в което времевата и новата, пространствената компонента на причинността вече се събират, както изисква експериментално доказаното нарушаване на неравенствата на Бел. Умножаването

$$\boldsymbol{(r + ict).(r - ict)}, \qquad (64)$$

а не, да речем, събирането, произтича от едно-еднозначното съпоставяне на хипермаксимален оператор с физическа величина в квантовата механика.

Тъй като

$$\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mathbf{2}}.\boldsymbol{r}\ , \tag{65}$$

то сумирането на разстоянията в псевдоевклидовото пространство на Минковски и нормалното евклидово, и двете четиримерни, дава непременно като резултат разстоянието в *тримерното* пространство, но умножен с многозначителния коефициент – $\sqrt{\mathbf{2}}$. Този разбираем модел може да се използва и по-широко, както ще видим понататък, за обясняване на квантовите корелации между отдалечени точки в пространството чрез разлагане от този тип, а именно на две четиримерни пространства – псевдоевклидово и евклидово, – при чието сумиране особената координата, която може да се тълкува като време, се елиминира. Разглеждането може да се обобщи и за риманово пространство.

Неговият смисъл изисква съпоставяне, отношение или разлика на обичайното времепространство от теорията на относителността, в което времето тече само в едната, и то обичайната посока, и двупосочно време-пространство, както по-горе, резултиращо в четиримерно евклидово или риманово пространство (но не псевдоевклидово или псевдориманово!), чието време тече в двете посоки. Първото може да се осмисли като времепространство на макроуреда, а второто – като това на квантовия обект.

Нека онагледим ситуацията чрез двумерна повърхност, движеща се равномерно по третата пространствена ос. Очевидно, за да няма разлика при промяна на посоката на движение, повърхността трябва да плоска, т.е. да бъде равнина.

От друга страна обаче, физическата величина в квантовата механика може да се разгледа тъкмо като несиметрия между протичането на процес в двете посоки на времето, следователно като „изкривяване на настоящето”, в нашия наглед – на двумерната повърхнина, която вече няма да е плоска равнина. Ако е налице последната, физическа величина няма. Но тъкмо такъв е и критерият за съществуване в общата теория на относителността според руските изследователи Коноплева и Соколик (1972: 118-119, 124).

На такава основа, имайки предвид и обсъждането малко по-горе, можем да поставим явно по-скоро философския и методологичен въпрос какво означава *нещо да е* ***във*** пространството (каквото и да е пространството). Пространството е „нулевият репер”, спрямо който нещо може да го има *като отклонение*, в тази точка. При това са възможни два подхода: или (1) да се приеме универсално изходно пространство, спрямо което наличното в него се представя чрез дискретно и, да се надяваме линейно преобразование на изходното, или (2) да се допуска всяко предшестващо състояние в качеството на изходно, спрямо което наличното в него може да се получи винаги и чрез непрекъснато преобразование.

Първият подход е този на квантовата механика, към който се оказва принудена, доколкото в нейното разглеждане универсалната константа на кванта на действие не може да се пренебрегне; вторият – на общата теория на относителността. Вижда се, че математическото тълкуване на принципа на относителността, дадено от Айнщайн, като инвариантност спрямо дифеоморфизъм на отправните системи, следва от това, че като предшестващо състояние се допуска и безкрайно близкото. Тогава, че нещо е налично, означава ненулева първа производна на преобразованието на отправни системи, т.е. наличие на ускорение и оттук специфичната съпротива на всяко съществуващо в пространството спрямо придаването на ускорение, т.е. неговата маса. Всъщност добре известният Нютонов закон получава своето обяснение едва чрез общата теория на относителността. При това едната посока на движение по мировата линия се фаворизира, докато обратната се пренебрегва.

На тази основа можем да представим неизбежната за квантовата механика дискретност чрез необходимостта от съвместно разглеждане на „еднопосочното” време на макроуреда с „двупосочното” време на микрообекта. Така квантовите скокове изключват от разглеждане своята „вътрешност”, вътре в която времето се разкъсва от противоречието да е еднопосочно заради уреда и двупосочно, заради квантовия обект.

Към същия проблем може да се подходи и с вече многократно използваната понятийна схема на скулемовска относителност на крайно, изброимо и континуално, на дискретно и непрекъснато. Ето как: ако оставим честотата на дьобройловската вълна да клони към безкрайност, то времето за „застъпване" на минало и бъдеще, свенливо избягвано чрез квантовия скок, ще клони към нула, а масата на квантовия обект вече не може да е или да се приема за нулева. С други думи, на един – да го наречем „трансфинитен" – преход в честотата на дьобройловската вълна съответства появата на ненулева маса (на покой). Заедно с това обаче, на всяка крайна честота – чрез константата на Планк – можем да припишем крайна, и то еднозначно определена енергия и оттук и маса. Тук пак ни се представя, макар и в ново обличие – освен скулемовската относителност – също така и перифразирания в първата книга „парадокс" на диференциалите в инфинитезималното смятане „и нули, и не-нули" като „и точка, и краен интервал" или: „и нула, и крайна стойност", или „и крайна, и безкрайна стойност".

Още веднъж към същия проблем, удачно в настоящия контекст, може да се подходи така: да се съпостави на всяка точка от едно пространство друго пространство, от същия или различен тип, все едно намиращо се „вътре в точката" или „вътре в квантовия скок"; всъщност, тъкмо така, но най-грубо, може да се опише подходът на калибровъчните теории.

И така, могат да се набележат поне няколко различни позиции относно това как могат или трябва да се съотнесат двете концепции – за причинност и за време-пространство:

1. В класическата физика, а до голяма степен и изобщо наука и двете са универсални и едновременно приложими; последното се отнася и до специалната и обща теория на относителността.

2. В квантовата механика това не е така, но според Айнщайн проблемът трябва да се търси в квантовата механика и в нейния предварителен, непълен характер.

3. Според Бор обаче, проблемът не е в квантовата механика, а в това че принципът на каузалността и на време-пространственото описание са различни и най-малкото на нейна територия се оказват *допълнителни*.

4. Според теоремата за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика на фон Нойман времепространственото описание не е и не може да бъде по принцип причинно. Пак според него, от друга страна обаче, самото време-пространствено описание в смисъла на описаното като ***Ψ***-функцията на състоянието се изменя причинно.

5. В статията на Бел, която разглеждаме, той показва, че възгледът на фон Нойман съдържа скрита предпоставка, а именно, че времепространственото описание е локално и ако и само ако тя е валидна, то не е причинно според теоремата за отсъствие на скрити параметри. Всъщност то не е „изцяло" причинно, тъй като причинността в квантовата механика има втора, нелокална или с други думи, пространствена компонента, която може експериментално да се установи чрез нарушаване на неравенствата, публикувани в предишна статия (1964) от същия автор.

Ако в класическата физика състоянието на обект или система, може ли тя да се разгледа като затворена, изцяло се детерминира от непосредствено миналото и състояние (т.е. физическите процеси са марковски), то – развивайки концепцията на Бел и заедно с постулата за неконтролируемо взаимодействие на квантов обект и уред, изключващ абсолютна затвореност на една квантово-механична система по принцип – нейното настояще се определя също така, и то в еднаква, количествено съвпадаща степен и от всичко налично в настоящия момент във вселената, синхронно в нютоновски смисъл. Разбира се, отделните, по нютоновски синхронни части на вселената не оказват еднакво и хомогенно дисперсирано *нелокално причинно* влияние върху изследваната. Фигуративно казано, всеки обект се оказва, че е принуден от останалите „да се свие" до своето действително наблюдавано състояние, „за да има място за всички"[122]. Обратно, кохерентното състояние

---

[122] Любопитна би била една аналогия с равновесие по Наш или неговите обобщения. Възлова би била представата за квантовите обекти като за „играчи" със свои „стратегии" и „печалби" под формата на измерваните стойности на физическите величини, асоциирани с тези обекти. Най-малкото, общоприетият „жаргон" в квантовата механика, а и в редица философски концепции, вдъхновени от нея, би бил склонен към употреба на такъв тип метафори. За да се види, че самият математически формализъм и понятийна структура на подхода на Наш подсказват негова интерпретация в термините на квантовата информация са достатъчни няколко цитата: „За нас игра с $\boldsymbol{n}$-участника ще бъде множество от $\boldsymbol{n}$ играча, или позиции, всеки [всяка] с асоциирано крайно множество от чисти стратегии; и съответстващи на всеки играч, $\boldsymbol{i}$, функция на печалбата, $\boldsymbol{p_i}$, която изобразява множеството от всички $\boldsymbol{n}$-орки на чисти стратегии в реални числа. Когато използваме термина $\boldsymbol{n}$-орка винаги ще имаме предвид множество от $\boldsymbol{n}$ неща, всяко нещо – асоциирано с различен играч. Смесени стратегии, $\boldsymbol{s_i}$: смесена стратегия на играч $\boldsymbol{i}$ ще бъде множество от неотрицателни числа, които имат сума единица и са в едно-еднозначно съответствие с неговите чисти стратегии. Пишем $\boldsymbol{s_i = \sum_\alpha c_{i\alpha}\pi_{i\alpha}}$, със $\boldsymbol{c_{i\alpha} \geq 0}$ и $\boldsymbol{\sum_\alpha c_{i\alpha} = 1}$, за да представим такава смесена стратегия, където $\boldsymbol{\pi_{i\alpha}}$-тата са чистите стратегии на играча $\boldsymbol{i}$" (Nash 1951: 286). „За смесени стратегии, които са вероятностни разпределения върху чистите стратегии, функциите на печалба за играчите са очакванията на играчите, с това ставайки полилинейни форми по вероятностите, с които различните играчи играят своите различни чисти стратегии" (Nash 1950: 48-49). „Всяка $\boldsymbol{n}$-торка стратегии, една за всеки играч, може да се разглежда като точка в произведението на

на квантовия обект трябва да се тълкува като състояние на (никога абсолютна) изолираност. При това измерването не само констатира предварително заетото обективно място в света, но също така и го създава, явявайки се „най-причиняващата" част от вселената квантовият обект да заеме едно точно определена, обективно наблюдавана позиция за измерваната величина.

6. Най-сетне малко по-горе беше скициран подход, при който боровската качествена допълнителност на каузалност и времепространственост при описание на квантово-механична система и беловските количествени оценки могат да бъдат съвместно разгледани непротиворечиво, ако се приеме, че в случая допълнителността – за разлика от мултипликативното съотношение за неопределеност – е представена като двукомпонентна константна адитивност: причинното и времепространственото описание се допълват като се събират по такъв начин, че то престава да зависи от времето. С други думи, времевият аспект на времепространственото описание и неговият каузален аспект са противоположни и взаимно се неутрализират за квантови обекти: първият съответства на необичайно двупосочно, а вторият – на стандартната „стрела на времето". Този последен подход ще бъде многократно обсъждан и по-нататък.

Доколко самата статия, както и общият характер на научните и имплицитни философски възгледи на Джон Бел дават основания за такива далеч отиващи хипотези?

> *Досега се съпротивлявахме срещу произволни изисквания за хипотетичните бездисперсни състояния* – пише той. – *Обаче, както и възпроизвеждайки квантовата механика при осредняване*, има *свойства, които е разумно да бъдат желани при схема със скрити параметри. Скритите променливи би трябвало навярно да имат някакъв пространствен смисъл и би трябвало да се развиват*

пространства, получено чрез умножаване на $\boldsymbol{n}$-те пространства на стратегии на играчите. Една такава $\boldsymbol{n}$-орка уравновесява [counters] друга, ако стратегията на всеки играч в уравновесяващата [countering] $\boldsymbol{n}$-торка получава най-високото достижимо очакване за своя играч срещу $(\boldsymbol{n-1})$-те стратегии на другите играчи в уравновесената [countered] $\boldsymbol{n}$-торка. Самоуравновесяваща се [self-countering] $\boldsymbol{n}$-торка се нарича точка на равновесие" (Nash 1950: 49). Наш изтъква, че „точка на равновесие е такава $\boldsymbol{n}$-торка $\boldsymbol{s}$, щото смесената стратегия на всеки играч максимизира неговата печалба, ако стратегиите на другите се държат фиксирани. Следователно стратегията на всеки играч е оптимална срещу онези на другите" (Nash 1951: 287). Дали стратегията на един играч в точка на равновесие по Наш може да се разглежда като причиняваща или като „скрита променлива" за тази на друг?

> *във времето според предписани закони. Това са предразсъдъци, но тъкмо тази е възможността за интерполация на някаква (за предпочитане, каузална) времепространствена картина между подготовката и измерванията на състояния, което прави търсенето на скрити променливи интересно за неизкушените. Идеите за пространство, време и каузалност не изпъкват при вида обсъждане, което разгледахме по-горе. Според знанията на автора най-успешният опит в тази посока е схемата на Бом от 1952 г. за елементарната вълнова механика. Като начин за заключение, тя ще бъде скицирана накратко и едно любопитно свойство – подчертано* (Bell 1966: 451).

Това, което прави впечатление, е, от една страна, срамежливата амбивалентна оценка на времепространствената и каузална картина като „предразсъдъци", но желателни, а от друга, стремежът за съчетаване с причинността като предимството и следователно водещата позиция е запазена все пак за времепространствеността. Цитираната работа на Дейвид Бом предстои да разгледаме обстойно по-нататък в настоящата глава. Бел я резюмира така:

> *Така в тази теория съществува експлицитен каузален механизъм, чрез който разположението* [disposition] *на част от уреда въздейства на резултатите, получени в отдалечена част. Фактически парадоксът на Айнщайн – Подолски – Розен е разрешен по начина, който Айнщайн би харесал най-малко*[123]*. По-*

---

[123] „A. Einstein, *Philosopher Scientist,* P. A. Schilp, Ed. (Library wherever located would not avail. Bohm's further remarks in of Living Philosophers, Evanston, Ill., 1949, p. 85". Вероятно Бел има предвид следния пасаж: „Това заключение може да се избегне само чрез това, че или се приема, че измерването на S_1 променя (телепатично) реалното състояние на S_2, или обаче, че изобщо се отричат, независими реални състояния на неща, които са пространствено отделени едно от друго. И двете ми изглеждат напълно неприемливи" (Einstein 1957: 84, 85). В концепцията на Бом по тълкуванието на Бел „реалните състояния на неща, които са пространствено отделени едно от друго" се оказват „зависими" и в този смисъл не би удовлетворила Айнщайн. На друго място, по отношение на собствената позиция Бел изяснява следното: „Това е да се каже, че макар системата от уравнения е ‘локална' в очевиден смисъл в $\boldsymbol{3n}$-измерното пространство, тя изобщо не е локална в обикновеното три-пространство. Що се отнася до ситуацията с парадокса на Айнщайн – Подолски – Розен, откриваме, че тази схема осигурява експлицитен каузален механизъм, чрез който операции върху едно от две измерващи устройства може да повлияе реакцията на отдалеченото устройство. Това е напълно обратното на решението, на което се надяваха АПР, които си представяха, че първото устройство може да служи само за да открие характера на информацията вече складирана в

> *общо, разглеждането със скрити променливи на дадена система става напълно различно, когато си спомним, че тя несъмнено е взаимодействала с огромен брой други системи в миналото и че пълната вълнова функция със сигурност няма да бъде факторизируема. Същият ефект усложнява разглеждането със скрити променливи на теорията на измерването, когато се желае да се включи част от „уреда" в системата. Бом, разбира се, добре осъзнава*[124] *тези черти на неговата схема и им е отделил много внимание. Обаче трябва да се подчертае, че според знанията на настоящия автор няма* доказателство, *че* всяко *разглеждане със скрити променливи* трябва *да има този необикновен характер*[125]*. Следователно би било интересно, вероятно, да се постигне някакво по-нататъшно „доказателство за невъзможност", заместващи произволните аксиоми, на които се възрази по-горе с някакво условие за локалност или за отделимост на отдалечени системи* (Bell 1966: 452).

Накратко следва да се обърнем към собствено философската концепция на Джон Бел за „съществуеми" (beables)[126] в противовес на „наблюдаемите" от стандартната интерпретация на квантовата механика. Неговата мотивацията е следната:

пространството и разпространяваща се по един несмущаван начин към другия апарат" (Bell 1971: 36*).

[124] "D. Bohm, Phys. Rev. 85,166,180 (1952)",D. Bohm, *Causality and Chance in Modern Physics* (D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., 1957); D. Bohm, in *Quantum Theory,* D. R. Bates, Ed. (Academic Press Inc., New York, 1962); D. Bohm and Y. Aharonov, Phys. Rev. 108, 1070 (1957)".

[125] „След завършването на тази статия такова доказателство е било намерено [J. S. Bell, Physics 1, 195 (1965)]" (Bell 1966: 451). Тази бележка на Джон Бел под линия поражда известно недоумение поради няколко обстоятелства. Първо, не е ясно на кого принадлежи добавката в квадратни скоби. Второ, ако става дума за прочутата статия на Бел, то тя е от 1964 г., всичко останало е валидно. Трето, статията, в която е тази бележка, е публикувана през 1966, т.е. *след* публикуването на визираната статия. Четвърто, предполага се или се смята за факт, че текстът на статията, публикувана през 1966 г., е написан от Джон Бел преди този на публикуваната през 1964. Все пак въпросът кое и от кого се има предвид под „такова доказателство" не е изяснен, макар сякаш да е очевидно обяснението, че се визира по-рано излязлата, но по-късно написана статия на Бел от 1964 г., а в посочената година – „1965" – просто е допусната техническа или фактическа грешка, независимо дали от самия Джон Бел или от редактор на текста.

[126] В статията на Бел от 1966, която се обсъжда в тази глава, терминът „съществуема" не се употребява, вкл. нито имплицитно, нито контекстуално. Вероятно идеята възниква по-късно от момента на написване на статията. Обсъждането на това понятие обаче позволява да се изясни методологичната и философска позиция на Бел.

Една бъдеща теория

> *би могла да не бъде фундаментално относно 'измерванията', понеже от това отново би следвало непълнота на системата и неанализирани въздействия отвън. По-скоро би трябвало отново да стане възможно да се говори, не че такава система може да се* наблюдава, *че е такава, а че тази и тази е така. Теорията няма да е относно* 'наблюдаеми', *а относно* 'съществуеми'. *Тези съществуеми, разбира се, няма нужда да приличат на онези от, да речем, класическата електронна теория; но поне би трябвало на макроскопично равнище, да дават един образ на ежедневния класически свят, понеже решаващото е да се признае, че макар явленията да отиват далеч отвъд обхвата на класическото физическо обяснение, резултатът от всички потвърждения трябва да се изрази в класически термини* (Bell 1973: 41*)[127].

Първо ще изброим някои белези на „съществуемите", позовавайки се на съответни места, а после ще покажем, че за съжаление като цяло те не са консистентни помежду си на територията на квантовата механика и информация, макар съвместното им разглеждане и приемане е напълно възможно в класическата физика, откъдето и произлиза замисълът:

1. Съществуемите се изразяват в класически термини*:* 'Класически термини'

> *се отнася просто до познатия език на ежедневните дела, включително лабораторните процедури, в които обективни свойства* – съществуеми – *се установяват за обектите. Идеята, че квантовата механика е първично относно 'наблюдаеми', е приемлива само ако такива съществуеми са приети за дадени. Наблюдаемите са* направени *от съществуеми* (Bell 1973 41*)

2. За разлика от математически дефинираните „наблюдаеми", съществуемите трябва да произтичат от опита:

---

[127] Където страницата е отбелязана със звездичка, това е нейният номер в събраното издание на работите на Бел: Bell, J. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*: collected papers in quantum mechanics. Cambridge: University Press, 1987.

> *Понятието за 'наблюдаема' подхожда много точно на математиката, когато се отъждествява със 'самоспрегнат оператор'. Но физически това е доста неясно понятие. Не е лесно да се отъждестви точно, на кои физически процеси следва да се даде статуса на 'наблюдения' и кои са низвергнати в неопределеността между едно наблюдение и друго. Така би могло да се надяваме, че известно увеличаване на точността би могло да бъде възможно чрез концентрация върху съществуемите, които могат да се опишат 'в класически термини', защото ги има. Съществуемите трябва да включват положенията на ключовете и копчетата на експерименталното оборудване, токовете в намотките и данните на инструментите. 'Наблюдаемите' трябва да са* направени *някак от съществуеми. Теорията на локалните съществуеми би трябвало да съдържа и да дава точен физически смисъл на алгебрата от локални наблюдаеми* (Bell 1975: 52*).

Във връзка с това *съществуемите трябва да се отнесат по-скоро към величините с непосредствен физически смисъл*, а не към въвежданите заради, или изискваните от самия математически формализъм:

> *Думата 'съществуема' също така ще бъде използвана тук за друго разграничение, вече познатото в класическата теория между 'физически' и 'не-физически' величини* (Bell 1975: 52*).

3. Съществуемите трябва да представят експерименталните условия като независими свободни променливи, т.е. да е изпълнен критерият на Бел за „свободната воля”:

> *Значим клас от теории, включително съвременната квантова теория, както тя се практикува, имат 'свободни' 'външни' променливи в добавка към онези вътрешни за и обусловени от теорията. Тези променливи са типично външни полета или източници. Те са призвани да представят експерименталните условия. Те също така осигуряват приложна точка за „експериментите на свободна воля”, ако отнасяне към такива хипотетични метафизични същности е позволено. Склонен съм да обърна особено внимание на теории от този вид, ко-*

ито ми се струват най-просто отнесени към ежедневния ни начин да гледаме на света (Bell 1977: 101*).

Критерият на Бел за свободна воля – изяснява друг автор – *е в конфликт с някои широко поддържани възгледи за това какво значи да можем да вложим свободна воля в една физическа теория – и отговорът на Бел на критиките обяснява, че той в действителност не възнамерява да изрази възглед върху проблема за свободната воля. Свободна воля, както Бел го използва, е не повече от удобно съкращение. Една теория удовлетворява критерия за свободна воля, ако тя ни позволява да обосновем разглеждането на настройките при измерване като независими променливи спрямо онези, характеризиращи състоянието на микроскопичната система (типично, на двойка отделени сдвоени частици), която се измерва* (Kent 2002: 163)

4. Съществуемите са по определение некохерентни:

Следва, че могат да са позволени само онези състояния, които са едновременно собствени стойности на всички съществуеми [beables] *или суперпозиция на такива състояния. Нещо повече, има нужда да разглеждаме единствено некохерентни суперпозиции, понеже съществуемите, неспособни да индуцират преходи между различни собствени стойности, са нечувствителни към каквото и да е кохерентност* (Bell 1973: 43*).

5. Съществуемите не осигуряват изчерпателно описание:

Съществуемите могат да не са пълно множество, а списък от техните собствени стойности може да не характеризира състоянието напълно (Bell 1973: 43*).

6. Съществуемите се определят взаимно, те са скритите променливи и са състояния (т.е. не съответстват на оператори като наблюдаемите):

Обаче обратното е вярно: когато състоянието на отделен член на некохерентна суперпозиция се определи, определени стойности се установяват

> *за всички съществуеми. Следователно теорията е със скрити променливи от детерминистичен тип, с Хайзенбергово състояние, играещо ролята на скрита променлива* (Bell 1973: 43*).

7. Изглежда *Бел разграничава локални и нелокални съществуеми* особено във връзка с определението за *локална причинност.* Бел въвежда понятието за

> локални *съществуеми, които (за разлика от пълната енергия) могат да се установят за някакъв ограничена времепространствена област* (Bell 1975: 53*).

„Локално причинна теория” по определението на Бел (Bell 1975: 54*) е такава, в която „съществуемите” [beable] извън светлинния конус не влияят на съществуемите вътре в светлинния конус; и по-точно: присъждане стойности на първите не променя плътността на разпределение на вторите. В този смисъл е неговото твърдение, че

> *обичайната квантова механика, даже релативистката полева теория, не е локално причинна* (Bell 1975: 55*).

Най-сетне Бел изяснява, че дори „в случая на два апарата и две частици” описанието остава нелокално (Bell 1975: 65*).

От по-скоро концептуална, методологична и философска гледна точка, идеята на Бел за „съществуеми” вместо „наблюдаеми” е твърде интересна. Тя произтича от цялостния подход, който го довежда до откритието на неравенствата и възможността за тяхното нарушаване: след като локално причинна теория със скрити параметри е невъзможна, то може да се покаже че теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри съдържа имплицитна предпоставка, която не е валидна в общия, „нелокален” случай, и по-нататък да се набележи перспективата на „нелокално” причинна теория със скрити параметри. „Съществуемите" тогава биха служили като знак за „елементите на реалността”, която вече се мисли обобщено като нелокална. Съвременната квантова информация възниква, следвайки до голяма степен неговия имплицитен „методологичен завет" за нелокалност[128].

От друга страна, идеята за съществуеми е подчертано емпиристка, противопоставена на духа на витаещи математически абстракции, чийто физически смисъл, ако има или се предположи такъв, нерядко изглежда налудничав. Крилата фраза, приписвана на Нилс Бор, да се търсят именно такъв, „налудничав" тип теории, понеже само те имат шанс да са истинни, е отвела прекалено далеч, според цялостния патос на творчеството на Джон Бел. Обратно съществуемите са или съответстват по прост начин на съвкупността от настройки на уреда и неговите показания, разкриващи състоянието на квантовия обект. За да подчертаем последната мисъл, ще запишем следното „уравнение": ***съществуема = положението на копчетата + показанието на циферблата***. Ревизия по отношение на методологията на класическата физика все пак е налице. Тя се състои в това, че 'положението на копчетата' на уреда причинява нелокално – и *се сумира* (!?) с локално причиняваното от квантовия обект във – 'показанието на циферблата'. Съкращението „критерий за свободна воля", който използва Бел донякъде в разрез с установеното от векове русло на употреби за „свободна воля", тъкмо подчертава, че тъй като 'положението на копчетата' е независимо от 'показанието на циферблата', те и могат просто да се *сумират*, образувайки понятието за съществуема.

Но не е ли твърде сходна „укритата" и разкрита предпоставка в теоремата на фон Нойман? Все пак обаче критиката спрямо нея се отнасяше до необоснована адитивност на математическите очаквания. При прехода от наблюдаеми към съществуеми вероятностите и очакванията ще изчезват, но се появява – виждаме – нелокална причинност, и само статистически и напълно в класически дух ще се възстановяват при обратния преход. Затова може да се твърди или поне се иска

---

[128] Алтернативни на нелокалния тип обяснения обаче продължават да се търсят: „Обща черта на минималистките интерпретации на теоремата на Бел е, че те отричат теоремата да засяга холизма и нелокалността. Вместо това твърдят, че това, за което теоремата действително се отнася, е видът вероятностна структура, която използваме в аргумента или неопределимостта на съвместни вероятности за некомутиращи наблюдаеми или просто (ин)детерминизма" (Cachro 2001: 1). Или друг автор: „Тук се разглежда алтернатива: вероятностна теория със скрити променливи, лежащи в основата на квантовата механика, би могла да бъде статистически локална в смисъл, че вероятности за глобалната конфигурация, които са дефинирани чрез изрази, включващи единствено локални термини" (Kent 2002). Всъщност тази последна идея е не повече от парафраза и възраждане под друго име на „съществуемите". В обратен отблясък тя осветява предположението, че сякаш и самият Бел се е стремял да мине, доколкото е възможно, без нелокалност.

„наблюдаемите да са *направени* от съществуеми". Току-що изложеното налага да се видоизмени нашето „уравнение": *съществуема = положението на копчетата + показанието на циферблата* ***+ нелокална причинност.*** Тъкмо добавеният член на „нелокална причинност" ще нарушава адитивността и съответно неравенствата на Бел и ще се изразява чрез точен количествен израз.

Тук се налага да подчертаем, че – при така експлицирана концепцията на Бел за съществуеми – едно нелокалното взаимодействие се различава от нелокалната причинност, точно както класическото или релативистко взаимодействие се различава от „причинност" в съответната теория: докато взаимодействието е реципрочно, рефлексивно, симетрично, обратимо, двупосочно, то причиняването е необратимо и еднопосочно и оттук – нереципрочно, нерефлексивно, несиметрично. В случая на класическа каузалност групата от тези нейни свойства се обуславя от ‛стрелата на времето'. При нелокална причинност аналогичният тип свойства могат добре да се обяснят с фрапантната несиметрия между квантов обект и уред. В класическата теория добре и без взаимно да си пречат съжителстват разнородните концепти за „взаимодействие" и за „причиняване". Защо този миролюбив и градивен опит да не се повтори и в теорията на квантовата механика и информация? Тогава нарушаването на неравенствата на Бел би се отнесло към случая на нелокално взаимодействие, а понятието за съществуеми – към нелокалната каузалност. Разграничението между двете е на основата на „количеството, което преминава в качество": ако масата или енергията на нелокално корелиращите обекти е еднопорядкова, можем да говорим за нелокално взаимодействие, ако техните порядъци са съществено различни – за нелокална причинност с посока от масивния към микрообекта. За сравнение, такова е разглеждането и в Нютоновата теория на гравитацията: да речем, земята и падащата към нея ябълка („преди да се сблъска с главата на Нютон") строго казано си взаимодействат и заедно с това земята и нейната гравитация е причината за падането на ябълката (но и на земята – „към" ябълката).

Оттук идва обаче и нашето главно възражение срещу – или според патоса на дуалистичното питагорейство, по-скоро уточнение на – идеята на Бел за „съществуеми": съществуемите се оказват идеализация, т.е. в известен смисъл не отговарят на името си, тъй като те не „са" или не „съществуват", понеже са идеални построения. Те са – фигуративно казано – квантов аналог на „материалната точка" или „идеално твърдото тяло" от класическата механика. Идеализацията се съдържа в изискването за некохерентност на съществуемите или за изпълняване на „критерия за свободна воля".

Може да се спекулира, че при друг ход на развитие на науката, квантовата теория е можело да възникне на основата на идеализацията за „съществуемите", т.е. като вариант на класическа теория[129], а разглеждането чрез хилбертови пространства, канонизирано след работата на фон Нойман, да е само спомагателно и известно по-скоро само сред специалистите. Тогава основно би било обсъждането във фазово пространство, а ***Ψ***-функцията щеше да представлява само „куриоз" или специфичен инструмент, получаван чрез преобразованието на Вайл, а за това, което 'при нас' сме нарекли „функция на Вигнер" би се споменавало много рядко. Квантовата механика може би ще щеше да се нарича квантова термодинамика, за да отговаря на своето собствено съдържание. Цялата философия, с която обраства квантовата механика поради своите шокиращи странности, едва ли би се появила, а настоящата книга съответно нямаше да бъде написана. Това обаче – за щастие или за съжаление – са или си остават само предположения или дори по-скоро чиста спекулация.

Едно предполагаемо изменение при този възможен и нереализиран, т.е. противофактов ход на събитията, би могло да бъде тогава отсъствието на тук лансираната концепция на „дуалистичното питагорейство". Един от нейните крайъгълни камъни е, че физическото и математическото – а философски погледнато: материалното и идеалното – не само са допълнителни, но и могат свободно, макар и по определени закони, да се преобразуват едно в друго. При този алтернативен ход на събитията ***Ψ***-функцията вероятно би заемала едно многократно по-скромно място и съответно въпросът за нейната физическа, методологична и философска интерпретация изобщо не би стоял или поне – не с такава небивала острота. Но там, в този възможен, но неслучил се свят, може би някой друг автор – съвсем в духа на онтологичната интрига от книгата на Филип Дик, „Човекът от високия замък" – би се опитвал да прозре контурите на нашия свят и трудностите с интерпретирането на ***Ψ***-функция, дилемата на дуалистичното питагорейство, пред която те ни изправят.

---

[129] Това е подходът Вайл – Вигнер – Моял, както като цена, така и като начин, по който квантовата механика може да се опише в термините на класическа статистическа теория: разпределението на вероятността се заменя с такова на квазивероятност, която може да приема и отрицателни стойности: предстои да се разгледа подробно.

Връщайки се сега към действителния ход на събитията, бихме могли да прибавим един обратен отблясък към скулемовската относителност на дискретно и континуално, крайно и безкрайно, подробни обсъждани в първата книга: континуалното и безкрайното могат да се разглеждат също така като специален вид идеализации съответно на дискретното и крайното, а скулемовската относителност да се обогати с отношението между физическо и математическо, между материално и идеално.

И така, след като отново сме сред уютното или поне добре познато борновски тип тълкуване за физическия смисъл на Ψ-функцията, според което градиентът на дадена величана в конфигурационното пространство е разпределението на вероятността тя да бъде измерена в точките му и е равно на квадрата от нейния модул, все пак за експериментално мислещия теоретик, какъвто несъмнено е Бел и какъвто е бил Айнщайн, остава известно неудовлетворение: какво собствено се изменя от точка в точка на конфигурационното пространство. Казано по друг начин, ако първата производна на една величина е вероятност, то какво следва да представлява самата величина. Вече така поставен, въпросът има очевиден отговор: това е мярката на величината, т.е. числото, което се съпоставя с нея. Можем да мислим и по следния начин, повече по беловски и особено в духа на неговите „съществуеми”: между точките на конфигурационното пространство и всички възможни положения на „копчетата на уреда” е установено едно-еднозначно съответствие; мярката на величината, т.е. показанията на *цифер*-блата е това, което се променя от точка в точка на конфигурационното пространство. Именно поради принципа на нелокалната причинност, според който *също така и* уредът причинява стойността на величината, нейното обективно представлява тъкмо *съвкупността всичките* ѝ стойности спрямо всички възможни положения на копчетата на уреда. Въвеждането на градиент по конфигурационното пространство напълно съответства на класическата представа за „плавно въртене на копчетата”, т.е. изменението е дифеоморфизъм.

Стъпката, която прави дуалистичното питагорейство оттук нататък, е по-скоро психологическа: така както Айнщайн е изоставил „прътите” и „часовниците”, с които може би си е представял концептите в специалната теория на относителността, то така и ние можем да захвърлим „патерицата на нагледа” за „плавно въртящи се копчета на уреда”, но заедно с това емпирическата основа и патос на беловските „съществуеми” и да видим същността на всяко измерване: *изображение-*

то на физическа величина в число, т.е. на физическо – в математическо, на материално – в идеално. Ако веднъж е възприет борновски тип тълкуване на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията, то се тематизира – и в този смисъл обективизира – горното изображение, или измерването, независимо от какъвто и да било измерващ субект или измерващо устройство; най-многото, което можем да си позволим е да забавим и психологически „преглътнем” необходимостта от подобна крачка. Да повторим:

В основата на природата се поставя изображението на физическите величини в числа. Числата се оказват неизбежно равнопоставени на величините по отношение на физическия им смисъл: не може да бъде вярно, че величините са първични, а техните мерки вторични, защото това би предполагало винаги да е налице принципна разделимост на едните от другите. $\boldsymbol{\Psi}$-функцията извиква и изисква да разглеждаме тъкмо тяхното изображение, следователно единство и неделимост. Самите физически величини се получават по обратния път – от числа.

Противофактовата „интермедия” малко по-горе не беше случайна. Както показва многосветовата интерпретация на квантовата механика, тъй като макроуредът в нашия свят в даден момент може да бъде с точно едно положение на копчетата, то останалите положения се налага плавно да ги разположим „по паралелните светове” (които могат да се тълкуват и като „възможните светове” на Лайбниц или Крипке). С други думи (с извинения за ироничния „тоталитаристки” привкус в израза, който следва): едно положение на копчетата на уреда – една точка от конфигурационното пространство – един свят – една стойност на измерваната величина! Тогава можем да отговорим, че това, което се изменя от точка в точка на конфигурационното пространство или от свят в свят, е мярката, *числото*, което се съпоставя на величината – дори в крайна сметка, за да подчертаем още повече, питагорейското сакрално число, – т.е. нейната измерена (и обективна в смисъла, че е измерена всъщност преди всяко човешко измерване) стойност. Изглежда всичките „светове” трябва да споделят обща квантова основа. Все пак обаче – въпреки че на дълбоките идеи на Еверетовата интерпретация ще посветим достатъчно място, – „паралелните светове” са също такава „патерица на нагледа”, каквато са и „положенията на копчетата на уреда” за беловските „съществуеми”, а в крайна сметка, такива са и самите те: начин да си представяме изображението на величина в число.

Но изобщо казано – поне в измерванията, извършвани от човек – са налице два типа: цифрови и аналогови. В първия случай изображението на „материалното”, физическата величина е в число, а във втория – отсечка, която може да се обобщи до произволно векторно пространство, стига мярката върху него да е адитивна. От тази гледна точка ***Ψ***-функцията представя: или вътрешното за „измерването по принцип” преобразуване между „отсечките” (обобщени до произволни вектори на дадено хилбертово пространство) и „числата” (обобщени до произволни подмножества на множеството от комплексните числа)[130], или направо преобразуването на физическата величина в число, при което еднакво можем да смятаме, че посредничеството на „отсечките” е отстранено или че между величини и „отсечки” съответствието е едно-еднозначно. Разграничението е изключително важно и когато числовата или аналогова мярка се поставя в основата на понятието за вероятност и оттук преминава в самата теория на вероятността:

Според Питовски (Pitowski 2005) формализмът на квантовата механика, основан на хилбертови пространства, е „нова теория на вероятността”. Теоремата на Глийсън[131] (Gleason 1957) напълно характеризира вероятностните мерки в алгебрата на събитията, така че правилото на Борн да се изведе. Всички експериментални аспекти на сдвояването (и нарушаването на неравенствата на Бел, в частност) се обясняват като естествени следствия от вероятностната структура. Питовски въвежда

> принцип на логическата неопределеност, *който изразява вероятностно основния принцип, който разграничава структурата на квантовите събития от тази на класическите* (Pitowski 2005: 21).

---

[130] Може да отбележим, че това което отличава първите и вторите е само наредбата, и то „добрата наредба” (наличието във всяко множество на първи елемент), следователно приемането или не (т.е. оставането въпроса открит) на аксиомата за избора. От това следва, че по-общото разглеждане е чрез множества от комплексни числа.

[131] Андрю Глийсън е роден на 4 ноември 1921 г. във Фресно, Калифорния и почива на 17 октомври 2008 г., американски математик. Завършва Йейлския университет през 1942 г. Във Флота на САЩ участва в групата за дешифриране на японските кодове през Втората световна война. Става преподавател в Харвард през 1946, където и се пенсионира през 1992 г. Рядко изключение е сред преподавателите в Харвард, тъй като никога не защитава докторат. Известен е освен с теоремата, която носи неговото име, и с работата си по Петия проблем на Хилберт. Неговото решение ще интересува и нас. Без излишни детайли смисълът му е: при какви условия едно отворена област в евклидовото пространство се изобразява *гладко* в област, на която първата е подмножество.

Идеята е „истина” и „неистина” да се тълкуват не като противоречащи си, а като допълнителни в смисъла на Бор. В онтологично отношение – Питовски *не* извежда подобни следствия – това би било твърде необикновено. Например, всяко истинно твърдение може да се разглежда като неистинно в друг аспект и това, което е забранено, е само едновременното обсъждане на аспектите на истинност и неистинност. Нещо повече, аналогично на съотношението за неопределеност,

> *могат да се получат пропозиции с вероятности, произволно близки до кое да е рационално число в интервала* [0, 1] (Pitowski 2005: 21).

По начало подобна „интерференция” на „истина” и „неистина” е характерна за баесианската вероятност, характеризирана като „субективна”. Въвеждането на мярка и вероятност върху хилбертови пространства по теоремата на Глийсън (Gleason 1957: 892-893) има за следствие подобна интерференция или „интерполация”, както я нарича Питовски, между състоянието „случило се” (= истина) и „неслучило се” (= неистина) за всеки елемент от пространството на събитията. Разликата от класическия случай е, че на всяко събитие се присвоява не някакво естествено число (брой случвания на събитието), а хилбертово подпространство $\mathbb{H}$. С това, във всяко друго хилбертово подпространство, което има непразно сечение с $\mathbb{H}$, събитието се случва „отчасти”.

В дълбоката си основа свойството произтича от факта, че върху хилбертови пространства вероятността е геометрична. При явленията на сдвояване, въпреки че протичат на различни места в пространството, хилбертовите пространства, които им се приписват като мярка, се припокриват отчасти или напълно. Следователно това, което твърди с несъмнено основание Питовски, е, че ако вероятността на събитие се дефинира геометрично (или както в случая – с хилбертови подпространства), то явленията на сдвояване следват необходимо.

Доколкото в класическия случай подобен модел на геометрична по същността си вероятност се използва за баесианска (субективна) вероятност и тъй като формализмът на квантовата механика е именно чрез хилбертови пространства, дотолкова и само дотолкова „привкусът” на субективност в нея изглежда неизбежен, но при такова разглеждане явно оставайки „външен”, „акцидентален”.

Склонни сме обаче да мислим, че разграничението между субективна и обективна вероятност, както впрочем и между геометрична (физическа) величина и числова променлива, е валидно в определени граници: в квантовата механика и информация се отива отвъд тях. Казано по друг начин, ако в качеството на „обективна честота" на събитие приписваме геометрична величина (хилбертово подпространство), както е в пространството на квантовите събития, такова разграничение е невъзможно и невалидно. Тъкмо и затова други автори (Caves, Fuchs, Schack 2001) изясняват, че „вероятностите за индивидуалните квантови системи могат да се разберат в рамките на баесианския подход", „независимо, че са предписани от фундаментален закон":

> *Аргументираме се* – пишат те, – *че разграничението между класическа и квантова вероятност лежи не в тяхното определение, а в природата на информацията, която кодират. В класическия свят, максималната информация относно една физическа система е пълна в смисъла на гарантиране на определени отговори за всички възможни въпроси, които могат да бъдат зададени за системата. В квантовия свят, максималната информация не е пълна и не може да бъде пълна* (Caves, Fuchs, Schack 2001: 022305(1)).

Следва да се подчертае, че Бел не предлага нова интерпретация на квантовата механика, неговите изводи следват от стандартния подход, но дотогава са останали повече или по-малко скрити за изследователите:

> *Интересуваме се от възможността за скрити параметри в обичайната квантова механика и ще използваме свободно всички обичайни понятия* (Bell 1966: 447-448).

Физикът предлага изключително прост пример, чрез който илюстрира доводите си и който вече беше разгледан в първа глава на втора книга, във връзка със самите неравенства на Бел:

> *За тази система може да се приложи схема с една скрита променлива. Дисперсията на свободните състояния се определя от реално число* $\boldsymbol{\lambda}$ *в интервала:* $-\frac{1}{2} \leq \boldsymbol{\lambda} \leq \frac{1}{2}$ (Bell 1966: 448).

Когато казваме, че Бел се отказва да даде интерпретация на своите изводи, имаме предвид конкретно, в контекста на тази негова статия, че на параметъра $\boldsymbol{\lambda}$ не се придава физически смисъл:

> *Би трябвало да се подчертае, че не се приписва физически смисъл на параметъра* $\boldsymbol{\lambda}$ *и че няма претенция да се даде пълна преинтерпретация на квантовата механика. Единствената цел е да се покаже, че на равнището, разглеждано от фон Нойман, такова преизтълкуване не се изключва. Една пълна теория би изисквала например да се вземе предвид поведението на скритите променливи по време на самия процес на измерване* (Bell 1966: 448).

Този параметър $\boldsymbol{\lambda}$ се разглежда само като помощно построение, чрез което да се изясни и да се покаже по-скоро математически, точно в духа на фон Неймановото доказателство, че теоремата за отсъствието на скрити параметри всъщност съдържа „скрита предпоставка” и поради това следва да се ограничи само до изолирани системи:

> *Фактически ще се види, че тези демонстрации изискват от хипотетичните бездисперсни състояния не само че подходящи съвкупности от тях би трябвало да имат всички измерими свойства на квантово-механични състояния, но също така определени други свойства. Тези допълнителни изисквания изглеждат обосновани, когато резултатите от измерването са нестрого отъждествени със свойства на изолирани системи* (Bell 1966: 447).

Според Бел обаче те са необосновани в цялостния контекст на квантовата механика, за чието формулиране в стандартния ѝ вид наличието на измерващ уред е необходимо условие:

> *Вижда се, че са напълно необосновани, когато с Бор се напомни за „невъзможността за каквото и да отчетливо разграничение между поведението на атомни обекти и взаимодействието с измерващите уреди, които служат да се определят условията, при които се появяват явленията". Осъзнаването, че доказателството на фон Нойман е с ограничена релевантност получава почва с работата на Бом от 1952 г* [132]*. Обаче тя далеч не е универсална. Нещо повече, авторът не е намерил в литературата никакъв адекватен анализ на това, което е погрешно* (Bell 1966: 447).

Тъкмо поради стремежа да се изтълкува параметърът λ в светлината на последвалото повече от половинвековно развитие, по-нататък в настоящата глава подробно ще се обсъди и статията на Бом. Това, което може да се изтъкне според досега изложеното, вкл. и в предшестващата книга, и то в най-общ план, допускащ само качествено определение, е следното:

1. Параметърът λ може да се разглежда като съответстващ на момент от времето „в порядъци по-дългото настояще" на микрообекта спрямо „настоящето на масивния уред".

2. Интервалът на параметъра λ намалява с нарастването на степента на неизолираност на микрообекта в процеса на измерване до окончателното му фиксиране.

3. И тук не може да избегнем дуалистичния характер на квантовата механика, който в случая се перифразира така. Фиксирането на измерената стойност има два допълнителни аспекта: на „мигновена" редукция на вълновия пакет и на процес на декохеренция, протичащ във времето. В първия случай, уредът встъпва като неделима цялост, във втория – чрез точно определена своя част, съответстваща еднозначно на момента от време в процеса на измерване.

4. Най-сетне самият скрит параметър λ – и в духа на статията на Бом – може да се разглежда като осредняване на степента на неизолираност на квантовия обект, или сдвояването, по всички възможни разделяния на уреда, при положение че самите те не са сдвоени, т.е. това ще рече онези разделяния, при които

---

[132] „D. Bohm, Phys. Rev. 85,166,180 (1952)" (Bell 1966: 447). „166" и „180" са началните страници съответно на първата и втората част на статията на Бом, която предстои подробно да се обсъди в рамките на текста на настоящата глава.

хилбертово пространство на уреда да е факторизируемо по хилбертовите пространства на разделянията.

5. Оттук вече като частен случай би следвала теоремата на фон Нойман, а именно: когато системата е изолирана, скрит параметър няма, тъкмо защото той изразява степента на неизолираност.

Вече на тази основа нека:

> *Да разгледаме сега доказателството на фон Нойман, че състояния, свободни от дисперсия и следователно скрити променливи са невъзможни. Неговото съществено допускане*[133] *е* : никоя реална линейна комбинация на кои и да е два ермитови оператора не представя наблюдаема и същата линейна комбинация на очакваните стойности да не е очакваната стойност на комбинацията. *Това е истина за квантово-механичните състояния; също така се изисква от фон Нойман за хипотетичните бездисперсни състояния* (Bell 1966: 448-449).

С други думи, ако една наблюдаема физическа величина е линейна комбинация от други, то нейното очакване е същата линейна комбинация от техните очаквания. Ако обсъждаме изображението на физическа величина в нейното очак-

---

[133] „Това се съдържа във фон Ноймановите **B'** (p. 311), **I** (p.313), и **II** (p.314)" (Bell 1996: 448). Цитираните предпоставки според посочените страници от английския превод гласят: „**B'**.'Ако $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \ldots$ са произволни величини и **a**, **b**, … реални числа, то $\mathbf{Exp}\ (\boldsymbol{a}\mathfrak{R} + \boldsymbol{b}\mathfrak{S} + \cdots) = \boldsymbol{a}\mathbf{Exp}\ (\mathfrak{R}) + \boldsymbol{b}\mathbf{Exp}(\mathfrak{S}) + \cdots$" „**I.** Ако величината $\mathfrak{R}$ има оператора **R**, то величината $\mathbf{f}(\mathfrak{R})$ има оператора **f**(**R**)"„**II.** Ако величините $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \ldots$ имат операторите **R, S, …**, то величините $\mathfrak{R} + \mathfrak{S} + \cdots$ имат оператора **R + S + …** (Едновременната измеримост на $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \ldots$ не се предполага, ср. обсъждането на този въпрос по-горе.)". Преведени на български направо от немския оригинал (Neumann 1932: 165, 167, 167) звучат дословно еднакво. Обединяването и интерпретирането им от Джон Бел по цитирания горе начин е несъмнено коректно. Мермин – споделяйки я и подкрепяйки я – привежда една крайна оценка на Джон Бел за доказателството на фон Нойман, което е „базирано на допускане, което може да се опише единствено като глупаво" (Mermin 1993: 805): В бележка под линия 8 (на същата страница) той изяснява, че „като много проникновени наблюдения за квантовата механика, това подчертано беше направено от Джон Бел: „Все пак доказателството на фон Нойман, ако наистина се захванем с него, се разпада в ръцете ви! *Нищо* няма в него! То не просто съдържа грешка, то е *глупаво* [*silly*]! Когато преведете [неговите допускания] в термините на физически порядък, те са безсмислени. Вие може да ме цитирате за това: доказателството на фон Нойман не е просто погрешно, а *глуповато* [*foolish*]" (Interview in *Omni*, May, 1988, p. 88). От цялото изложение е пределно ясно, че ни най-малко не споделяме подобен възглед.

ване, то се предполага да е линейно. Физическият смисъл на това е, че величините или техните измервания са независими събития в пространството на вероятностите.

По-нататък аргументът на Бел обосновава зависимостта на измерванията чрез случая на некомутиращи наблюдаеми и следователно чрез „едновременната неизмеримост" в смисъла на фон Нойман по следния начин:

> *Съществено допускане може да се критикува както следва. На пръв поглед изискваната адитивност на очакваните стойности изглежда съвсем разумно и по-скоро неадитивността на позволените стойности (собствените стойности) е това, което изисква обяснение. Разбира се, обяснението е добре известно: измерване на сума от некомутиращи наблюдаеми не може да се направи чрез тривиално комбиниране на резултатите от отделни наблюдения върху два термина – изисква напълно отделен експеримент* (Bell 1966: 449).

Оттук доводът е без изменение валиден и за очакваните стойности:

> *Но това обяснение на неадитивността на позволените стойности също така установява нетривиалност за адитивността на очакваните стойности. Последното е съвсем особено свойство на квантово-механичните състояния, не е да се очаква* a priori. *Тук няма причина да го изискваме индивидуално от хипотетичните бездисперсни състояния, чиято функция е да възпроизвеждат* измеримите *особености на квантовата механика, когато се* осреднят. (Bell 1966: 449).

Добре известно е, че Бел преоткрива довода на Грете Херман[134] (известна и като Грете Хенри) от 1935 година срещу теоремата на фон Нойман:

---

[134] Грете Херман е родена на 2 март 1901 г. в Бремен и умира на 15 април 1984 г. в родното си място. Изучава математика в Гьотинген при Еми Ньотер и получава докторска степен през 1926 година. Дисертацията ѝ е в областта на компютърната алгебра и обсъжда изчислимостта, т.е. съществуването на алгоритъм с краен брой стъпки, за да се реши дали даден идеал е полиномиален пръстен. Участва в съпротивата срещу нацизма, но през 1936 година е принудена да замине за Дания, а по-късно за Англия, където дочаква края на Втората световна война. В по-късните си години се интересува повече от политика и философия, отколкото от физика и математика. Като философ има особен интерес към основанията на физиката.

> *Фон Нойман изисква за тази функция* $\boldsymbol{Expt}(\mathfrak{R})$ *за очакваната стойност, дефинирана, използвайки съвкупност от физически системи и произвеждаща число за всяка физическа величина,* $\boldsymbol{Expt}(\mathfrak{R}+\mathfrak{S}) = \boldsymbol{Expt}(\mathfrak{R}) + \boldsymbol{Expt}(\mathfrak{S})$*. С думи: очакваната стойност на сума от физически величини е равна на сумата от очакваните стойности на двете величини. С това допускане доказателството на фон Нойман или успява, или пропада. За класическата физика това изискване е тривиално и съществува също така за онези квантово-механични величини, които не се ограничават помежду си в своята измеримост и за които не съществува съотношение за неопределеност, понеже именно в този случай за две такива величини стойността на тяхната сума не е нищо друго, освен сумата на стойностите, която всяка от тях получава поотделно. От това несъмнено получаваме същото отношение между очакваните стойности на тези величини. Отношението обаче не е тривиално за квантово-механични величини, за които съотношенията за неопределеност са в сила. Фактически сумата от две такива величини даже не е дефинирана: защото точното измерване на едната от тях изключва точното измерване на другата от тях и оттук, защото и двете величини не могат да имат точни стойности по едно и също време, общоприетото определение на сума от две величини се проваля: тъй като за по-горе определеното понятие от сумата на две, не съвместно измерими величини, по-горе споменатото уравнение изисква доказателство* (Hermann 1935a: 1).

В предходната книга вече беше обсъдена възможността фон Неймановото понятие за „едновременна неизмеримост” на две величини в квантовата механика или съответно – за „едновременна неразрешимост” на две съждения за тях (в неговия смисъл на проекционни оператори) да се тълкува буквално: т.е. че двете величини или двете съждения не могат да се отнесат към един и същ момент във времето и заедно с това, че всяка от тях може да се отнесе към различен момент. Ако оста на времето няма никакви особености – кривина, нехомогенност, прекъсване, неравномерност, сложна структура и пр. – транслацията на състояние и величина в даден момент в друг би трябвало да е позволена и еквивалентна на закона за запазване на енергията.

Обратно, след като в квантовата механика съществуват едновременно неизмерими величини, то горното предположение не е в сила и нека за определеност освен това предположим особеността на оста на времето да е кривина. Тогава законът за запазване на енергията би се нарушавал и енергия би изчезвала или възниквала в затворена система обаче не съвсем „от нищо”, а от нещо, което досега се приема за „нищо” в смисъла на материално или енергетично съществуване, а именно от хода на времето.

Може ли да се даде пример, който да онагледи такова възникване на енергия от хода на времето? Да, и то твърде лесно. По този начин могат да се обяснят всички наблюдаеми ефекти от т. нар Голям взрив, т.е. хипотетичното „начало на Вселената”. Първо трябва да се подчертае: въпреки че отдавна е навлязъл в масовата култура и дори в жизнената философия на хората, той не е непосредствено наблюдаемо явление, а бива реконструиран в миналото, като единна причина на множество фактически наблюдаеми ефекти. Но освен да се проектират към една начална точка и първопричина, с не по-малко основание може да се предположи една постоянно действаща причина във времето, чийто интегрален ефект от всички минали моменти съвпада с еднократния и начален, може би митологичен „Голям взрив”.

При такава хипотеза бихме могли да обясним изотропното фоново излъчване на небесния свод с температура **2.7°K**, наричано може би неосновятелно реликтово, тъкмо с хода на времето. Дори в чисто логическо отношение хипотезата за „Големия взрив” не обяснява защо той самият се е случил, сякаш самият теоретичен конструкт на „първопричина” изключва въпроса за нейна на свой ред причина. От първопричината произтича времето и следователно – неговият ход.

Нашето обяснение е в известен смисъл противоположно: предполагаемо нематериалният ход на времето се материализира и отделя от хода на времето като неговото начало, а именно „Големият взрив”.

В аргумента на Айнщайн – Подолски – Розен, въпреки че се изключва „телепатичното” действие от разстояние, се предполага – всъщност тъкмо поради законите за запазване, – че резултатите от една точка на времепространството могат да се пренесат „гладко” (т.е. чрез дифеоморфизъм) до произволна друга: това е една формулировка на общия принцип на относителността, предложена от самия Айнщайн (Einstein 1918: 241). С други думи, самото пренасяне – като обобщение на хода на времето – не е материално, по принцип никога не може да му се припише енергия. Заедно с това обаче, чрез тази теория се обяснява вездесъщото и фундаментално гравитационно взаимодействие, приписвайки на всяка точка маса (евентуално също така и нулева) и кривина. Единственият наблюдаем ефект обаче са преместванията във времепространството или стремежът към тях, ако са – по един или друг начин – възпрепятствани. На такъв наблюдаем ефект се приписва сила или взаимодействие: тази или това на гравитацията и едва на последните енергия – както кинетична, така и потенциална.

В един донякъде позитивистки дух, но принципно обосновано от предшестващото изложение, бихме могли да съкратим средния и пряко ненаблюдаем член – силата или взаимодействието. Тогава на самия пренос от точка в точка на времепространството трябва да припишем енергия: т.е. той, самият пренос – и то в разрез с няколко века традиция не само на физиката, но и изобщо на естествените науки – следва да се разглежда като материален или притежаващ енергия. Това би било и енергията на гравитацията.

Такова обсъждане съхранява без да докосне математическия формализъм на общата теория на относителността, но променя из основи нейното тълкуване и заедно с това я обобщава решително в светлината на съвременното състояние на дисциплината квантова механика и информация.

В стандартната, да я наречем айнщайнианска, интерпретация има две, и то напълно различни същности: принцип на относителността, който е по-скоро човешко творение и има епистемологичен характер; той е сечиво, за да бъде построена теория за втората същност, гравитацията, която не е човешко творение и има онтологически характер.

В нашето тълкуване, очевидно родствено на философията на квантовата механика и информация, която не различава толкова категорично познанието от състоянието, сливаме гравитацията с принципа на относителността: на дифеоморфизма между две точки във времепространството следва непосредствено – а не чрез „патерицата” или ненужното посредничество на гравитацията – да се припише енергия. Заедно с това самият дифеоморфизъм се обобщава до много по-широк клас морфизми, включващ прекъснатите преобразования, характерни за квантовата механика и информация.

Да „премерим“ такава интерпретация на аргумента на Айнщайн – Подолски – Розен и да отхвърлим едно възможно възражение. Очевидно квантовата корелация може да се припише на преноса от времепространствената точка на едното събитие към тази на другото. Заедно с това обаче квантовата корелация – според съвременното състояние на знанието – не зависи от разстоянието между сдвоените квантовите обекти. Обяснението е следното. Квантовите корелации – и според сега обсъжданата статия на Бел – се отнасят към едновременно неизмерими величини. Ние ги отнесохме към различни моменти във времето, чиято разлика съответства на фазовото отместване между техните съответните компоненти на базисите на техните хилбертови пространства. Така определено, времето не бива да се смесва с времева разликата, която може да се припише на всеки две различни точки според чисто пространственото разстояние между тях и която би варирала. Физическият смисъл се съпоставя с разликата между две стойности на параметъра λ, съответстващи на две различни разделяния, всяко от които взаимно несдвоено вътрешно, както беше обяснено по-горе, и асоцируеми с измерванията на двете едновременно неизмерими величини.

Как възниква – вече при такава интерпретация – усещането за парадокс при аргумента АПР? След като е постулирана всеобщата транслируемост на резултатите от измерванията и поради това е неоправдано разпростряна и на случая на едновременно неизмерими величини.

Да се завърнем към непосредствен коментар на хода на мисълта в статията на Бел:

В примера, който той предлага и който беше обсъден в първа глава на тази книга,

> *бездисперсните състояния (определено λ) имат адитивни очаквани стойности само за комутиращи оператори. Независимо от това, те дават логически консистентни и точни предсказания за резултатите от всички възможни измервания, които, когато се осреднят по λ, са напълно еквивалентни на квантовомеханичните предсказания* (Bell 1966: 449).

Получава се едно привидно логическо противоречие от различна употреба на понятието за ‘едновременност’. Бездисперсните състояния според простия пример, предложен от Бел, предполагат нютоновска едновременност на пространствено отдалечени квантови обекти. Комутиращите оператори в смисъла на неравенствата на Бел и на аргумента АПР не са същите в смисъла на фон Нойман и на стандартния формализъм на квантовата механика. При първите се извършва пренасяне между пространствено отдалечени обекти въз основа на законите на запазване. Вече беше изяснено, че привидно парадоксалният характер на довода на Айнщайн – Подолски – Розен възниква от отъждествяването на понятието за 'комутиращи оператори' в тези два различни смисъла, при което некомутиращи оператори във втория смисъл се оказват комутиращи в първия.

Аналогично на това може да се покаже, че Бел и Нойман употребяват понятието за 'бездисперсни състояния' в два подобно различни смисъла. При 'бездисперсни състояния' в смисъла на Бел се позволява „мигновена" транслация на ограничаването на степените на свобода в резултат на измервания на произволно отдалечени квантови обекти. Основата за това са законите за запазване. В смисъла на фон Нойман те не са позволени. Действително, сред предпоставките на теоремата за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика не са включени законите за запазване. При такова разглеждане може да се твърди, че резултатът на фон Нойман е по-общият. За разлика от един математик, за един физик обаче, какъвто несъмнено е Джон Бел, законите за запазване са условие, без което не може; те са скрита предпоставка, която никога няма да се постави под съмнение. Така в случая на различните гледни точки към проблема за 'бездисперсните състояния' се откроява основата на едно „междудисциплинарно неразбирателство":

> *Действително* – пише Джон Бел, – *за този тривиален пример на въпроса за скритите променливи в качеството на поставен неформално от фон Нойман* [135] *в неговата книга се отговоря положително. Следователно формалното доказателство на фон Нойман не оправдава неговото неформално заключение: „Това следователно не е, както често се допуска, въпрос на преинтерпретация на квантовата механика – настоящата система на квантовата механика би трябвало да бъде обективно погрешна, че да е възможно различно от статисти-*

---

[135] Тук Бел се позовава на пасаж в книгата на фон Нойман, който беше вече веднъж обсъден подробно в предишната книга, но сега отново ще бъде разгледан непосредствено след коментара на настоящия цитиран пасаж както поради неговата важност, така и поради поставянето му в нов контекст.

ческото описание на елементарния процес."[136] *Не са били обективно измеримите предсказания на квантовата механика, които изключват скрити променливи. Това е произволното допускане на частно (и невъзможно) отношение между резултатите на несъвместими измервания, всяко от които* би могло *да се направи по даден повод, но само едно от които може действително да бъде направено* (Bell 1966: 449).

Възможно е да направи впечатление едно донякъде комично недоразумение: това, което Бел вменява като неоправдано при теоремата на фон Нойман, е твърдо сходно с онова, което сякаш се приписва на самия Бел в настоящето изложение … но посредством законите за запазване, за които твърдим, че не се взимат предвид от американския математик с унгарски произход. Става дума за „произволното допускане на частно (и невъзможно) отношение между резултатите на несъвместими измервания, всяко от които *би могло* да се направи по даден повод, но само едно от които може действително да бъде направено" (цитирано по-горе). Доколко може да се твърди това по отношение на буквалния текст на изложение на теоремата от фон Нойман? В най-голяма степен основание е уточнението в скоби към предпоставеното условие **II.** с оригиналните означения на фон Нойман. Да припомним:

II. Когато величините $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \ldots$ *имат оператори* $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \ldots$ *, на величината* $\mathfrak{R} + \mathfrak{S} + \ldots$ *операторът е* $\boldsymbol{R} + \boldsymbol{S} + \ldots$ *.* (*Едновременната измеримост на* $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \ldots$ *няма да се предполага. Ср. по-горе казаното на приведеното място.*) (Neumann 1932: 167.)

Като релевантно може да се посочи следното „казано по-горе":

---

[136] Пасажът е цитиран според английския превод на книгата на фон Нойман, който използва Бел: J. von Neumann. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton: University Press, 1955, p. 325. В оригинала на книгата на немски, той се намира на 171 страница. Преведен непосредствено от немски на български той звучи така: „Следователно изобщо не става дума – както много пъти се приема – за въпрос на интерпретация на квантовата механика, а по-скоро същата би трябвало да е обективно невярна, за да е възможно друго отношение на елементарните процеси като статистическо" (Neumann 1932: 171).

> *В квантовата механика има обаче още една, излизаща извън досега обсъжданото изчислителна операция: именно събирането на две произволни, не непременно едновременно наблюдаеми величини. Тя почива на това, че за два ермитови оператора $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$ сумата $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S}$ пак е ермитов оператор, също и тогава, когато $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$ не са комутативни, докато напр. произведението $\boldsymbol{RS}$ само в случая на комутативност се оказва пак ермитово (ср. II. 5). Във всяко състояние $\boldsymbol{\varphi}$ стойностите на очакванията се събират: $(R\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})+(\boldsymbol{S\varphi},\boldsymbol{\varphi})=\left((\boldsymbol{R}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\right)$. (Ср. $\boldsymbol{E}_2$, III.1). Същото важи за повече събираеми. Този факт ще приемем в нашето общо (текущо още не напълно специализирано за квантовата механика) начало:*
>
> *$\boldsymbol{E}$. Ако $\mathfrak{R},\mathfrak{S},\dots$ са произволни величини, то съществува нова величина $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\dots$ (която не зависи от избора на функцията $\boldsymbol{Erw}\,(\mathfrak{R})$) от такъв вид, че е в сила $\boldsymbol{Erw}\,(\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\dots)=\boldsymbol{Erw}\,(\mathfrak{R})+\boldsymbol{Erw}\,(\mathfrak{S})+\dots$.*
>
> *Ако $\mathfrak{R},\mathfrak{S},\dots$ са едновременно измерими, то трябва тази $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\dots$, поради $\boldsymbol{D}$.* [вж. по-долу]*, да е обичайна сума. В общия случай тя е обаче по имплицитен начин характеризирана само чрез $\boldsymbol{E}$. и едва ли можем предписанията за измерване на $\mathfrak{R},\mathfrak{S},\dots$ да обединим до такива на $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\dots$"* (Neumann 1932: 164).

И така, събирането на оператори е винаги комутативно, ако, разбира се, е дефинирано, докато умножението не е. Когато се говори за некомутативни оператори се имат предвид онези, при които редът на умножаване е от съществено значение за получавания резултат, тъй като няма такива, за които редът при събиране да е съществен. Но какво се оказва: на некомутативността се гледа като на свойство, характеризиращо някои двойки оператори и следователно отношение между тях. Основанието за това е физическото тълкуване на некомутативността като едновременна неизмеримост на съответните величини в случая, когато операторите са хипермаксимални и следователно ермитови. Ако се приеме казусът за едновременната им неизмеримост в смисъл на нееднновременно съществуване, или с други думи отсъствие на един и същ момент, в който и двете величини съществуват, то логичното решение е да се приеме, че не бива да се разглежда сумата, макар и самата тя комутативна, на некомутиращи оператори (т.е. при умножение), понеже няма физически смисъл.

Често математически модели са, фигуративно казано, „по-широки” и съдържат формално правилни изводи, които обаче са лишени от физическа интерпретация. Очевидно Бел не приема разглеждането на адитивност по отношение на такъв тип оператори тъкмо на физически основания и обратното – на математически го въвежда фон Нойман.

Вече беше спомената възможността за известно междудисциплинарно неразбирателство: от едната страна е физическата интерпретация, за която теоремата за отсъствие на скрити параметри се отхвърля на физически основания, а от другата – математически модел, за който е безусловно валидна. Разминаването, или по-коректно казано, малката пролука на несъвпадение между модел и реалност, каквито нормално би следвало да обсъждат философите, води двамата изследователи сякаш до противоположни изводи.

За съжаление не можем да останем при това толкова удобно за всички решение: математическото на математиците, физическото на физиците, а дори и за философите „има хляб” поради несъвпадение на физическо и математическо, на реалност и модел. Впрочем, не такъв е духът и на дуалистичното питагорейство: всекиму неговото и без конфликти. Напротив, търси се преплитането на математическо и физическо и тъкмо тяхното единство се разбира като философско.

Не можем да останем обаче не поради общи съображения от рода на току-що приведените, а поради това че самият фон Нойман дава ясен, естествен и дълбоко съдържателен пример на физическа величина, която е сума от некомутиращи:

> *Така напр. операторът на енергията в Хайзенберговата теория за електрон, движещ се в потенциално силово поле* $\boldsymbol{V}\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$,

$$\mathbb{H}_0 = \frac{(\boldsymbol{P}^x)^2 + (\boldsymbol{P}^y)^2 + (\boldsymbol{P}^z)^2}{\boldsymbol{2m}} + V(Q^x, Q^y, Q^z) \qquad (66)$$

(ср. например, III.6) е сума от два некомутиращи оператора $\boldsymbol{S = V(Q^x, Q^y, Q^z)}, \boldsymbol{R = \frac{(P^x)^2 + (P^y)^2 + (P^z)^2}{2m}}$ (Neumann 1932: 256, Anm. 164).

Примерът, който дава фон Нойман, е с едва ли не основната физическа величина, енергията, и съответния ѝ оператор – хамилтониана. Според една от фундаменталните идеи на класическата механика, която преминава само частично видоизменена в квантовата, механичната енергия се състои от две части, свободно и еквивалентно превръщащи се една в друга: потенциална и кинетична. Освен това е валидно своеобразно правило за изключеното трето: механичната енергия е или потенциална, или кинетична: ***tertium non datur***!

Първата е функция само от координатите, а втората от скоростите или импулсите. „Третото" би изисквало въвеждане напр. на дробни производни, респ. дробни интеграли или физическата величина на действието:

Чрез размерността на константата на Планк, но много преди това, още с принципа на най-малкото действие и извеждането на законите на класическата механика от него, с фазовото пространство, представено не като шестмерно с фазови клетки, а като тримерно – по трите координатно-импулсни компоненти на действието, – чрез сродното разглеждане на механични и термодинамични въпроси посредством него, кулминирало в ергодичната теорема, физическата величина на действието отдавна е получила бляскав, но … малко загадъчен ореол. Всъщност там, където се проявява, именно във физическото взаимодействие, тя и нейният механизъм остават пряко ненаблюдаеми: за нея се съди по ефектите върху „по-обикновените" физически величини: енергия, импулс, положение, скорост, ускорение, сила. Факт е, че всяко физическо взаимодействие може да породи сдвояване, нещо повече, винаги може да се разглежда като сдвояване поради ефективното намаляване степените на свобода на взаимодействащите обекти. Но и обратно, сдвояването може да се тълкува като взаимодействие. В последното се оказват неразривно свързани два аспекта: дискретния и информационен, от една страна, и континуалния и собствено физически, от друга. Величината сила, представена като произведение от действие и скорост, ги показва в тяхното единство, свързвайки ги количествено. Информацията следователно може да упражнява непосредствено физическо въздействие, необикновено слабо според константата на Планк по отношение мащабите на човешкия свят.

В квантовата механика, поне и само на пръв поглед, потенциалната и кинетичната енергия няма как да бъдат едновременно дадени, особено ако останем на позицията на Бел, че не бива да се образува сума от едновременно неизмерими величини, каквито очевидно са импулса и положението и *може би* следователно кинетичната и потенциалната енергия. От друга страна обаче – и както видяхме при обсъждане на първоначално публикуваната му работа от 1964 г., – законът за запазване на енергията изисква еквивалентното превръщане помежду им в уравнението за общата енергия като сума от двете.

Общоизвестно е също така, че операторът на енергията, хамилтонианът комутира с некомутиращи помежду си оператори. Как обаче следва физически да се обясни това? Тъкмо с „вътрешното”, т.е. в рамките на оператора, „превръщане” между кинетична и потенциална енергия, поради темелната им еквивалентност за закона за запазване. Така с ‛местоположението’ и с всички величини, които комутират с неговия оператор, енергията се показва изцяло само в едното си лице, а именно това на потенциална енергия, *дали* винаги и напълно изразяващо другото – на кинетична (?!); *обратното* с ‛импулса’. Поради своята „янусова” двуликост хамилтонианът на енергията успява да комутира с некомутиращи помежду си оператори на съответните величини.

Нещо повече, ако вземем произволна комбинация от неизмерими заедно величини, то с нея необходимо ще комутира енергия, не непременно в един от двата янусови „профила”, а в някаква перспектива по-скоро на съответен „полуанфас”. Тази ситуация има ясен физически смисъл в класическата физика на изменение на скоростта под въздействие на потенциално силово поле, при което кинетичната енергия или се увеличава (положително ускорение), или намалява (отрицателно ускорение), или остава неизменна (ускорение нула, равномерно праволинейно движение, инерциална отправна система). В теорията на относителността и дори още от самия принцип на относителността, установяващ еквивалентност между гравитационното ускорение и всяко друго, предизвикано от произволна механична сила, на всеки един от тези три възможни случая съответства различна кривина на псевдоримановото (в общия случай) пространство.

Нека използваме Айнщайновия принцип на относителността, така да се каже, наобратно: вместо да разглеждаме гравитационната сила като механична, механичната – и то с „умисъл” за квантово-механична – сила да тълкуваме като гравитационна и респ. да използваме формално-математическия и концептуалния апарат на общата теория на относителността по отношение на квантовата механика и информация. До голяма степен досегашното изложение изясни и разреши основната методологична трудност: съпоставянето на континуалната теория на относителността и дискретната квантова механика посредством многократно обсъжданата вече скулемовска относителност.

Сега да потърсим и подходящ, наличен, понятиен и формално-математически концепт за такова единно разглеждане. Това е ко- и контра-вариантното тензорно представяне на произволно „криво" или „плоско" векторно пространство. *Единствената* относителност на крайно и безкрайно, дискретно и континуално ще ни помогне в обединението на безкрайномерното „плоско" хилбертово пространство и четиримерното (съвсем точно казано, (3+i)-мерното) и „криво" псевдориманово пространство).

И така, в случая на „класическата" квантовата механика, винаги само в „плоско" и „едно и също" хилбертово пространство, ко- и контра-вариантното представяне са и те винаги идентични, и то тъкмо поради току-що приведеното обстоятелство. Налице е само една, но решаваща несиметрия: преобразованията, в т. ч. и хипермаксималните оператори, от двете спрегнати пространства не комутират помежду си. Това ни навежда на мисълта, че необходимите, подходящи и допълващи се концепти са налице засега поотделно в квантовата механика и теорията на относителността. Следва пределно точно да ги ограничим и с това да ги изясним:

1. Квантовата механика добре представя, но САМО *равнинно*, подобието и единството на крайно и безкрайно, континуално и дискретно чрез разделянето и отражението на координатното и импулсното пространство, които са спрегнати, но операторите им не комутират. Въпреки това концептът за енергията ги обединява като постулира съвместяването на две функции, всяка от тях с аргументи само от едното от двете спрегнати пространства.

2. Теорията на относителността обсъжда – но ЕДИНСТВЕНО *континуално* – произволни случаи на изрази с преобразования и функции от двете пространства, ала те са винаги комутиращи, тъй като са само непрекъснати.

От гледна точка на теорията на относителността трябва да обобщим понятието за тензор, когато преобразованията от двете спрегнати пространства не комутират помежду си, с други думи, да въведем еднообразно обсъждане на дискретни морфизми наред с дифеоморфизмите и следователно да обобщим принципа на относителността. От гледна точка на квантовата механика следва да се дефинират „кривите” хилбертови пространства, допускащи произволна, при това точно количествено представима нееквивалентност на крайно и безкрайно, дискретно и континуално. Най-сетне следва да се покаже, че двете обобщения се различават само по изходната си точка, но фундаментално са едно и също и тази е споменатата и подчертана като *единствена* относителност на крайно и безкрайно, дискретно и континуално.

Доколкото така скицирана проблематика е далеч извън контекста на сега обсъжданата статия на Бел от 1966 г. подробното обсъждане ще се остави за предвидена следваща книга, в която сред централните проблеми би бил взаимодействието на концептуалните основи на квантовата механика и теорията на относителността от гледната точка на квантовата информация. Непосредствено във връзка с нея обаче е примерът на фон Нойман за физическа величина, представляваща сума от заедно неизмерими величини. Да продължим с обсъждането на неговата бележка 164, в която по-нататък пише:

> *Докато измерването на величината* $\mathfrak{R}$*, принадлежаща на* $\boldsymbol{R}$*, е измерване на импулса, а онова на величината* $\mathfrak{S}$*, принадлежаща на* $\boldsymbol{S}$*, е измерване на координатата, то величината* $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$*, която принадлежи на* $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{S}$*, се измерва съвсем иначе: напр. чрез измерване на честотата на спектрални линии, излъчвани от този (свързан) електрон, тъй като тези честоти определят – на основание на Боровите отношения на честотите – енергетичните равнища, т.е. стойностите на* $\mathfrak{R} + \mathfrak{S}$*. Въпреки това при всякакви обстоятелства:*
>
> $$\boldsymbol{Erw}\,(\boldsymbol{\mathfrak{R}} + \boldsymbol{\mathfrak{S}}) = \boldsymbol{Erw}\,(\boldsymbol{\mathfrak{R}}) + \boldsymbol{Erw}(\mathfrak{S}) \tag{67}$$
>
> (Neumann 1932: 256, Anm. 164).

Приведеният цитат отново подбужда към размисъл. Нека обърнем внимание и подчертаем, че установката за измерване на енергия – и кинетична, и потенциална, т.е. на функции от едновременно неизмерими величини: импулси и координати – е за измерване на честота, която се приравнява на енергия посредством константата на Планк. Склонни сме да мислим, че при сдвояване следва да се добавят още членове, съответстващи на смесени тензори: както с ковариантна, така и с контравариантна компоненти, тъкмо и от които произтича при такива явления неадитивността на физически величини, а не от предполаганата от Бел – и както виждаме неоправдана – представа за некоректност, ако се позволи и извършва събиране на едновременно неизмерими величини.

Приведеният пример е също така съществен за изясняване на понятието едновременна неизмеримост: очевидно то не изключва прякото измерване по трети и напълно независим начин на сумата от едновременно неизмерими величини, при това – забележете, – доколкото това измерване е на честота, то, по определението си още, може да се тълкува като осредняване по време. Би могло да се напомни, че вече на няколко места и в различен контекст в първата книга се изтъква, че информацията като физическа величина би трябвало да е сродна и в известен смисъл еквивалентна на честота на дьобройловската вълна на квантовия обект. На чисто информационни процеси, каквото представлява единствено наблюдаемото ограничаване на степените на свобода при явленията на сдвояване, следва да се приписва енергия (може би не непременно положителна, в зависимост от избраната посока на времето) и следователно – маса. Но ако такава крачка веднъж се направи по отношение на информационните процеси в природата, то тя би била неизбежна и по отношение на изкуствените технически процеси. Константата на Планк би могла да се дефинира като „тежестта" или „масата", точно казано – енергията от промяната на един бит за една секунда.

Свидетелство, че до известна степен и самият фон Нойман се колебае между приемане и отхвърляне на такава сума от едновременно неизмерими величини е онова, което пише непосредствено преди цитираното по-горе за наличие и на математически, и на физически основания за разглеждането ѝ, въвеждайки аксиомите за математическо очакване:

Очевидно е – пише той, – *че всяка функция* $\boldsymbol{Erw}\ (\mathfrak{R})$ *трябва да притежава следните свойства:*

> ***A***. *Ако величината* $\mathfrak{R}$ *е тъждествено равна на* $\mathbf{1}$ *(т.е. когато предписанието за измерване на* $\mathfrak{R}$ *гласи така: изобщо нищо няма нужда да се измерва, тъй като* $\mathfrak{R}$ *винаги има стойност* $\mathbf{1}$ *), то* $\boldsymbol{Erw}\ (\mathfrak{R}) = \mathbf{1}.$
>
> ***B***. *За всяка величина* $\mathfrak{R}$ *и за всяко реално число* $\boldsymbol{a}$ *е в сила равенството* $\boldsymbol{Erw}\ (\boldsymbol{a}\mathfrak{R}) \ = \ \boldsymbol{aErw}\ (\mathfrak{R})$.
>
> ***C.*** *Ако величината* $\mathfrak{R}$ *по своята природа никога не е отрицателна, ако тя напр. е квадрат на някоя друга величина* $\mathfrak{S}$*, то и* $\boldsymbol{Erw}\ (\mathfrak{R}) \geq \mathbf{1}.$
>
> ***D***. *Ако величините* $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \dots$ *са едновременно измерими, то* $\boldsymbol{Erw}\ (\square + \mathfrak{S} + \dots) \ = \ \boldsymbol{Erw}\,(\mathfrak{R}) \ + \ \boldsymbol{Erw}\,(\mathfrak{S}) \ + \ \dots$ (*За не едновременно измерими* $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \dots$ *не е определено* $\mathfrak{R} \ + \ \mathfrak{S} \ + \ \dots$ *, ср. посоченото по-горе*) (Neumann 1932: 163-164).

Както непосредствено се вижда, свойството ***D***. е противоположно спрямо по-горе обсъжданото свойство ***E***. На колебанието у фон Нойман, но по отношение на теоремата за отсъствие на скрити параметри обръща внимание и Бел, както вече по-горе беше цитиран. Всъщност една аналогична раздвоеност може да се открие и у последния по отношение на концепцията за наличие на скрити параметри. За своеобразното обръщане на позициите между Бор и Айнщайн също стана дума. Причината се крие в уникалната за една точна наука амбивалентност на предмета, всъщност тематизирана още от самите основатели като вълново-корпускулярен дуализъм, допълнителност, изначална вероятностност, случайност и дори като една съвсем неприемлива „хазартност" в самите основи на квантовата механика. От досегашното изложение вече е ясно, че смятаме причините за още по-дълбоки: те са още в *относителността на крайно и безкрайно, на дискретно и континуално*, обосновима в Скулемовата относителност между канторовските безкрайности или в една *гьоделовска неразрешимост на твърдения*, в т.ч. и в изяснената неразрешимост на самата неразрешимост.

> *Всичко това* – продължава фон Нойман – *следва наистина непосредствено от определенията на разглежданите величини (т.е. от предписанията им за измерване) и от определението на очаквана стойност като средно аритме-*

> *тично от всички резултати на измерване в достатъчно голяма статистическа съвкупност. При* $\boldsymbol{D}$*. трябва да се обърне внимание, че неговата валидност почива на онова твърдение при изчисляване на вероятности, вследствие на което очакваната стойност на сума винаги е сумата от очакваните стойности на отделните събираеми, независимо от това, дали съществува между тях вероятностна зависимост или не (в противоположност напр. на произведение). Че е формулирано* $\boldsymbol{D}$*. само за едновременно измерими* $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \ldots$*, е естествено: иначе* $\mathfrak{R} + \mathfrak{S} + \ldots$ *е безсмислено* (Neumann 1932: 164).

Противоречието между двете позиции на Нойман, които има предвид и Бел, но в малко по-различен смисъл и контекст, е привидно. Дължи се на това, че в единия случай Нойман говори от позицията на физик и това е собствено позицията на Джон Бел, а в другия – от тази на математик, чийто школуван в логическа прецизност ум никога не би допуснал скрити предпоставки в извода на едно доказателство. Ето визираната от Бел позиция на фон Нойман – физика:

> *Ако се опитаме да обясним акаузалния характер на връзката между* $\boldsymbol{\varphi}$ *и стойностите на физическите величини по примера на класическата механика, то очевидно е следното схващане: в действителност* $\boldsymbol{\varphi}$ *съвсем не определя състоянието точно, за да се знае напълно, по-скоро са необходими още числови данни. Т.е. системата, наред с* $\boldsymbol{\varphi}$*, има повече параметри за определяне, повече координати. Биха ли били всички те известни, би могло да се посочат стойностите на всички физически величини точно и определено, само с помощта на* $\boldsymbol{\varphi}$ *единствено, напротив – точно както в класическата механика на основата само на част от* $q_1, \ldots q_k, p_1, \ldots p_k$ *– са възможни само статистически твърдения. Такова схващане е естествено само хипотетично, то е опит, чиято ценност зависи от това, дали ще се успее действително да се открият повече координати, следващи да се добавят към* $\boldsymbol{\varphi}$*, и с тяхна помощ да построим каузална теория, която да се намира в съзвучие с опита и при задаване само на* $\boldsymbol{\varphi}$ *(и осредняване по останалите координати) да дава пак статистическите твърдения на квантовата механика* (Neumann 1932: 108-109).

Все пак ясно е, че тук фон Нойман обсъжда не повече от един хипотетичен случай, до голяма степен за да изясни смисъла на хипотезата за скритите параметри. Неговото доказателство за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика е валидно в математически смисъл безусловно. Това, което може и трябва да се обсъжда, е доколко неговите предпоставки съответстват на реалните физически експерименти. В контекста на разглеждането на Бел и експериментално доказаното впоследствие нарушаване на неравенствата, наречени на негово име, следва да се постави преди всичко въпросът за статута на законите за запазване. Тъкмо последните гарантират легитимност на операцията „пренасяне”.

Но в използвания термин „пренасяне” се крие една съществена двусмислица, впрочем вече подробно обсъждана в първата книга. От една страна, той може да бъде разбран като непрекъснато пренасяне, т.е. в крайна сметка посредством Айнщайновия общ принцип на относителността, инвариантност спрямо дифеоморфизъм, а от друга – като дискретно пренасяне, съответстващо на изходните принципи на квантовата механика: с други думи, инвариантност спрямо по-общ или дори произволен морфизъм. Разликата между двете употреби на термина опира до относителността на дискретно и континуално, обосноваващо се в Скулемовото понятие за теоретико-множествена относителност.

Според първата теорема на Еми Ньотер (Noether 1918: 238-239) инвариантността спрямо времепространствен дифеоморфизъм е тясно свързана със законите за запазване на енергия-импулса и лоренцовата инвариантност. Втората теорема може да се обсъжда в контекста на такава много по-широко тълкувана инвариантност, обхващаща и дискретния случай. Впрочем тъкмо тя е в основата на широко използваните в квантовата механика закони за запазване спрямо дискретни симетрии.

Положението по принцип понастоящем в квантовата механика добре се описва от отношението на двете теореми. Към по-частната инвариантност спрямо дифеоморфизми се добавят специфичните инвариантности спрямо квантови симетрии. Така се получава пълното описание на квантовия обект, който, от една страна се пренася по непрекъсната траектория във времепространството, но от друга, прескача между тях чрез произволен морфизъм[137]. Запазването или преобразуването

---

[137] Посоките на континуалния и дискретния преход не е задължително да съвпадат, но е необходимо, ако е приета „стрела на времето”. За случая на несъвпадение на континуалния и

по определени закони на специфичните квантови числа допускат физическият микрообект да бъде отъждествяван като същия. Ако си позволим по-широко, по-скоро метафорично, но дълбоко същностно тълкувание, последните представляват „името” или „физиономията на обекта”.

Един принципен въпрос, който поставя квантовата информация и като дисциплина, и като понятие, и то тълкувано според фундаменталната философска категория за субстанция, е дали не може да се въведе физическа величина – и за такава е „набедена” ‛информацията’ или ‛квантовата информация’, – чиито различни ипостаси да са ‛енергия-импулса’ и ‛квантовите числа’, но която също така чрез своето запазване да описва прехода между първото и вторите. Според използваната в горния абзац метафора тази физическа величина, която можем да наречем най-малкото във философски смисъл информация, би изяснявала връзката между ‛съществуване’ и ‛име’, по-точно казано, между непрекъснатите и дискретните симетрии.

В обичайното разглеждане, вкл. и в квантовата механика, между двете няма и не може да има връзка. Приемането или дори търсенето на такава би означавало да се пресече границата на науката в посока, трасирана от „магията” и приписвана на преднаучното мислене. Всъщност обаче се има предвид обобщаване и следователно развитие тъкмо на науката.

В по-нататъшното и по-дълбоко разбиране на отношенията между изброените по-горе понятията за ‛бездисперсност’ и за ‛едновременност’ следва да ги разглеждаме не само като допълващи се или допълнителни в смисъла на Бор, но също така да се опитаме да изясним начина, по който съответните явления „в различен смисъл” си взаимодействат. Явленията на квантовата информация отиват отвъд Боровата допълнителност: те очертават границата на нейната приложимост

дискретния преход ще използваме термина „контрамоция”, заемайки го от прочутата книга на А. и Б. Стругацки „Понеделник започва в събота”: въвежда се в нейната трета част. Всъщност пряко той е употребен за движение в обратна посока на времето, но се разкрива, че У-Янус (Поуектович Невструев, директорът на Института по чародейство и вълшебство) и неговият папагал Фотончо са прекъснати контрамоти, при което в полунощ прескачат в обратна посока на времето, т.е. в предходния ден, докато през целия останал ден, т.е. континуално, времето се движи в „правилна” посока. Следователно, за У-Янус и за папагала Фотончо посоката на континуалния и дискретния преход не съвпадат. По терминологията на книгата, буквално, би трябвало да се използва „прекъсната контрамоция”, но понеже и самият термин „контрамоция” е свободен, ще го употребяваме в смисъла на несъвпадение между посоките прекъсване – непрекъснатост.

като принцип. Последното обаче не може в никакъв случай да означава завръщане към теории за скрити параметри в тесен, а това ще рече – локален смисъл.

По-нататък Бел обсъжда собствено логическа интерпретация на теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри от Яух[138] (Йаух) и Пирон[139] в следния контекст:

> *Нова версия на аргумента се дава от Яух и Пирон[140]. Като фон Нойман те се интересуват от обобщените форми на квантовата механика и не допускат обичайната връзка на квантово-механичните очаквани стойности с вектори на състоянието и оператори. Ние допускаме последното и съкращаваме аргумента, понеже тук разглеждаме възможни интерпретации само на обичайната квантова механика. Да разгледаме единствено наблюдаеми, представени от проекционни оператори. Собствените стойности на проекционните оператори са* $\mathbf{0}$ *и* $\mathbf{1}$*. Техните очаквани стойности са равни на вероятностите* $\mathbf{1}$*, а не* $\mathbf{0}$*, да са резултати на измерването. За всеки два проекционни* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *се дефинира един трети* $(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b})$ *като проекцията върху сечението на съответстващите подпро-*

---

[138] Жозеф-Мария Яух е роден в Люцерн, Швейцария, на 20 септември 1914 г. и почива на 29 август 1974 г. Неговите прадеди са потомствени швейцарски професионални войници, служили в различни европейски страни. На 14 години остава сирак и е приютен и завършва образование в Католическия институт за бездомни момчета. В Цюрихския политехнически институт учи при Паули, който по-късно му става близък приятел. Докторска степен получава в Университета на Минесота, САЩ, 1940 г. Връща се в Швейцария, за да постъпи в армията. Отново заминава за Щатите и приема американско гражданство през 1945 г. Той е асистент в Принстънския университет (1942-1945), после доцент (1946), професор (1950) в Университета на Айова. От 1960 г. до смъртта си е директор на Института по теоретична физика към Университета в Женева.

[139] Константен Пирон е роден в Париж през 1932 г., по националност е белгиец, но никога не е живял в Белгия. Семейството му са франкмасони, а майка му учи теоретична физика в Университета на Брюксел и после работи в лабораторията Жолио-Кюри в Париж, за да подготви дисертация. След женитбата си не се връща в лабораторията. Поради войната Константен не получава диплома за завършено образование и не може да влезе официално в университет. Най-сетне през 1964 г., с помощта на професор Щукелберг получава право да получи висше образование като представи дисертация, която подготвя за две седмици. В нея предлага прочутата теорема, в която доказва, че определен тип решетка от пропозиции е изоморфна на съвкупността от затворени подпространства на обобщено хилбертово пространство. Работи в катедрата по дескриптивна геометрия в Университета на Лозана (1956), после (1957-1965) в лабораторията за експериментални ядрени изследвания в Лозана и от 1958 до 1964 г. – при проф. Щукелберг. От 1961 до 1966 г. работи и при проф. Яух и става доцент (1969) и професор (1974) в Университета на Женева. Оттегля се през 2000 г.; страница в Интернет: http://www.phytheomat.ch/ .

[140] J. M. Jauch and C. Piron, Helv. Phys. Acta 36,827 (1963).

> *странства. Съществените аксиоми на Яух и Пирон са следните: (A) Очакваните стойности на* комутиращи *проекционни оператори са адитивни. (B) Ако за някое състояние и два проекционни оператора* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ $\langle \boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{b} \rangle = \mathbf{1}$, *то за това състояние* $(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}) = \mathbf{1}$. *Яух и Пирон достигат до тази последна аксиома (4° в тяхната номерация) по аналогия със смятането с пропозиции в обичайната логика. Проекциите са до известна степен аналогични на логически пропозиции с позволена стойност* $\mathbf{1}$ *съответна на „истина" и* $\mathbf{0}$ *за „неистина" и конструкцията* $(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b})$ *на* $(\boldsymbol{a}\ \text{"и"}\ \boldsymbol{b})$. *В логиката имаме, разбира се, ако* $\boldsymbol{a}$ *е истинно и* $\boldsymbol{b}$ *е истинно, то* $(\boldsymbol{a}\ \text{и}\ \boldsymbol{b})$ *е истинно. Аксиомата има същата структура* (Bell 1966: 449).

Проблемът с последната аксиома също така възниква във връзка с правомерността на обединяването на резултати от измервания на едновременно неизмерими величини в квантовата механика. От логическа гледна точка може да се представи така: сечението на едновременно неизмерими величини е празно, напр. – както бе според тълкуванието в първата книга, – тъй като те буквално принадлежат към различни моменти във времето. Според тази аксиома би трябвало да припишем определено свойство на празно множество. Оттук става ясно възражението и на самия Бел:

> *Аксиомата е в сила за квантово-механични състояния. Но тя е съвсем специално свойство за тях, по никакъв начин не необходимост на мисълта. Само квантово-механични средни стойности по бездисперсни състояния необходимо възпроизвеждат това свойство* (Bell 1966: 450).

По-скоро е подходящо обратното: да изясним как едно толкова необикновено и противопоставено на логическата интуиция свойство все пак е валидно за квантово-механични системи. Причината за това положение на нещата следва да се търси във факта, че изходната математическа структура, а именно на проекционни оператори в хилбертово пространство, има по-богати свойства от тези на една само и просто булева решетка.

Следвайки още обширната бележка (Bohr 1935: 696-697) под линия в коментарната статия на Бор от 1935 година относно аргумента Айнщайн – Подолски

– Розен, можем да представим всяко явление на сдвояване като фазово отместване, или фигуративно казано „завъртане” едно спрямо друго на хилбертовите пространства, които могат да се съпоставят с отделните квантови обекти. В такъв случай би имало качествена разлика между проекционните оператори „вътре в” и „между” хилбертовите пространства: първите биха били ортогонални, а вторите, в общия случай – не.

Всъщност изложеното възражение срещу аксиомата 4° на Яух и Пирон няма да бъде в сила тъкмо за сдвоени състояния и ще бъде валидно за напълно изолирани системи, каквито според Бел единствено визира теоремата на фон Нойман. „Аксиомата – както вече цитирахме Бел обаче – е в сила за квантово-механични състояния”, и то при това: „Само квантово механични средни стойности по бездисперсни състояния необходимо възпроизвеждат това свойство”. Противоречието се изяснява, ако вземем предвид, че резултатът от всяко измерване в квантовата механика е в принципно отношение (не в техническо) „бездисперсен” и това се дължи на максималната степен на сдвояване на измервания квантов обект и уреда. Обратно, теоремата на фон Нойман има предвид само математическия модел на квантовия обект сам по себе си.

Подобно разглеждане е добър повод за още три забележки, които ще бъдат използвани по-нататък:

1. Относно същността на механизма на измерването от философска гледна точка: в измерването е налице *изображение* на измерваното в качествено еднородно еталонно множество и избор на такова еталонно множество. Също така склонни сме да мислим, че измерване можем да имаме само в резултат на целенасочените действия на субект – човек, който измерва, и следователно да отхвърлим идеята за измерване *само по себе си*. Моделът, който обаче предлага квантовата информация, оспорва в някои отношения такава предварителна представа. Това, което в класическата механика се приема за обективна стойност на измерваната величина преди и независимо от всяко измерване, би следвало да се тълкува като измерената в настоящия момент нейна стойност „от вселената”, в неочаквано нейно качество на уред в смисъла на квантовата механика. Тя също така осъществява и избора на еталонното множество чрез своеобразно „демократично гласуване” или съ-гласуване на всяко едно нещо в нея, което „гласува”, и то наистина *гласува* със своето съществуване, изявявайки се като „същество”. В резултат на тези „избори”

се избира еталонното множество, или уредът. Изображението, или с други думи измерването, няма друг субстрат, който да го пренася, освен вселената като цяло. В резултат на този чисто информационен процес, твърде напомнящ съзнателната човешка дейност за измерване, нещото, от което се интересуваме, получава своето присъдено в момента и за момента съществуване като обективни стойности на физическите величини, които тепърва могат да бъдат измерени от човека *вторично*. Последното има характер сякаш по-скоро на *обучение* по отношение на първичната създаваща и възсъздаваща роля и позиция на вселената. Квантовата информация ни пооткрехва вратата в стената от абсолютна завареност на нещата, вече ненужно застопорявана и абсолютизирана като трансцедентна обективност, към процеса на тяхната непрестанна текуща креация. Няма защо да се ужасяваме, че уредът в квантовата механика в известен и досега многократно обсъждан смисъл създава измерваната действителност, тъй като тази ситуация е изображение и може би дори нàглед за начина, по който вселената във всеки момент сътворява действителността.

2. Фазовото отместване и оттук проекцията между два сдвоени квантови обекта допуска модел чрез застъпване на тяхното настояще, чиято дължина съответства на периода на аташираната на всеки един от тях дьобройловска вълна. Отношението между момента на застъпване спрямо сумарния момент може да бъде мярка за степента на сдвояване.

3. Независимо, но в непосредствена връзка с това, съществува друг модел, при който сдвояването се представя като изкривяване на сега разглежданата като равномерна и хомогенна времева ос.

С тези забележки нека вече да преминем към обсъждане коментара на Бел за работата на Глийсън (Gleason 1957):

> *Забележителната математическа работа на Глийсън не е експлицитно адресирана до проблема за скритите параметри. Тя е насочена към редуциране на аксиоматичната основа на квантовата механика. Обаче, понеже тя очевидно включва резултата на фон Нойман да бъде получен без спорните допускания относно некомутиращи оператори, несъмнено трябва да я разгледаме. Релевантният извод от работата на Глийсън е, че, ако размерността на пространството на състоянията е по-голяма от две, изискването за адитивност на*

> *очакваните стойности на* комутиращи оператори *не може да се изпълни от бездисперсни състояния* (Bell 1966: 450).

По-нататък в настоящата глава ще имаме възможност по-подробно да се запознаем с работата на Глийсън, заедно с тези на Бом и на Яух и Пирон. Съществените предварителни моменти за нашия интерес са следните:

Това е доказателство, напълно различно и изхождащо от най-общи свойства на хилбертовото пространство, за да се покажат границите на адитивното му разделяне на части. Явленията на сдвояване, както и впрочем още самата възможност за нарушаване неравенствата на Бел, изискват съществуването на бездисперсни състояния. Следователно, ако релевантният момент, посочен от Бел в доказателството на Глийсън, е не само математически валиден, но също така физически и експериментално, то сдвояване не би съществувало. Трябва да се потърси дали и в този случай е налице предпоставка, която не се изпълнява, или, обратно, следва да се добави допълнителна предпоставка, която се изпълнява, що се отнася до реалния случай.

Естеството на релевантния момент в доказателството на Глийсън за отсъствието на бездисперсни състояния – без да навлизаме все още в подробното му излагане – е доказателство от противното: допускането на съществуването на бездисперсни състояния води до противоречие:

> *Следователно няма бездисперсни състояния* (Bell 1966: 451).

Целта по-нататък на Бел е да посочи скрита предпоставка, поради чието наличие и неизпълнение, току-що цитираният от Бел извод от теоремата на Глийсън не е валиден:

> *Това, че толкова много следва от такива очевидно невинни допускания ни води до въпроса за тяхната невинност. Дали наложените изисквания, които се удовлетворяват от квантово-механични състояния, са разумни изисквания за бездисперсните състояния? Действително те не са. Да разгледаме твърдението (B), операторът $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha\Phi_1}+\boldsymbol{\beta\Phi_2})$ комутира с $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Phi_1})$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Phi_2})$ само ако или $\boldsymbol{\alpha}$, или $\boldsymbol{\beta}$ е нула. Следователно изобщо измерването на*

> $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha\Phi_1} + \boldsymbol{\beta\Phi_2})$ *изисква съвсем отделна експериментална установка. Тогава можем да отхвърлим (B) на основанията, които са вече използвани: то свързва по нетривиален начин резултатите на експерименти, които не могат да бъдат изпълнени едновременно; бездисперсните състояния не е необходимо да имат това свойство, ще бъде достатъчно, ако квантово механичните осреднявания по тях го имат. Как стана, че (B) е следствие на допускания, в които се споменават експлицитно само комутиращи оператори? Опасността фактически е не в експлицитните, а в имплицитните допускания. Мълчаливо се допуска, че една наблюдаема трябва да получава една и съща стойност, независимо от това дали други измервания могат да бъдат направени едновременно. Следователно, както и* $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Phi_3})$ *показва, могат да се измерят* или $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Phi_2})$, или $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\psi_2})$, *където* $\boldsymbol{\Phi_2}$ *и* $\boldsymbol{\psi_2}$ *са ортогонални с* $\boldsymbol{\Phi_3}$, *но не помежду си. Тези различни възможности изискват различни експериментални установки; няма причина* a priori *да се смята, че резултатите за* $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Phi_3})$ *би трябвало да бъдат едни и същи. Резултатът от едно наблюдение може обосновано да зависи не само от състоянието на системата (включително скрити променливи), но също така от пълното разположение* [disposition] *на уреда* (Bell 1966: 451).

Освен това в добавка към току-що изложения довод Бел предлага непосредствен контрапример (Bell 1966: 451), който ще имаме също така възможността да споменем в релевантен контекст, когато по-нататък разгледаме значимостта и отношението на резултата на Глийсън към квантовата механика и информация. Това, което беше атакувано Бел в цитата по-горе, е предположението, че „една наблюдаема трябва да получава една и съща стойност, независимо от това дали други измервания могат да бъдат направени едновременно”. Подобно скрито допускане по същество съвпада с вече подробно и многократно обсъждания айнщайниански конструкт „елемент на реалността”. Тъкмо неговото приемане е равносилно на отхвърляне на съществуването на сдвоени състояния и на такава основа вече от показването на необходимостта от „скрити параметри” в квантовата механика би следвало, че те са локални скрити параметри, а и че квантовата механика е непълна в локален смисъл, т.е. в смисъла на статистическите теории от класическата физика. Това ни позволява отчетливо да разграничим възгледите на Айнщайн и на Бел (а както ще видим малко по-нататък – и на Бом) по отношение на концепта за „скрити параметри”:

Можем да говорим грубо и донякъде неточно за локални и нелокални скрити параметри. Докато за първия наличието на скрити параметри се тълкува класически, т.е. като локални, поради което и показвайки *правомерно* необходимостта от наличието на скрити параметри в квантовата механика, той и неговите сподвижници в едноименния аргумент *вече неправомерно* ги отъждествяват с *локални* скрити параметри, то Бел има предвид под „скрити параметри” нелокалните и никога не ги отъждествява с локалните. Нещо повече, в обсъжданата в настоящата глава статия, той изяснява чрез разглеждане на фундаментални работи (на фон Нойман, Бом, Яух и Пирон, Глийсън), че бездисперсните състояния в квантовата механика съществуват и тяхното наличие следва да се обосновава чрез скрити параметри, които не могат да бъдат други, освен нелокални.

Доказателството на Глийсън, както ще видим, е собствено математическо, впрочем каквото беше и това на фон Нойман. Във връзка с последното се изтъкна, че неговият резултат може да се разглежда като по-общ, тъй като концептът за нелокални скрити параметри изисква законите за запазване, които един физик като Джон Бел не поставя под съмнение. Не може да се твърди, че фон Нойман ги проблематизира, но като математик той не може да допусне в своите доказателства имплицитни предпоставки само заради единия физически „здрав разум”. Тъкмо законите за запазване „осъществяват” *нелокалния пренос* между произволно отдалечени квантови обекти. Какво обаче е положението на нещата по отношение на коментара на Бел към работата на Глийсън?

След като осветява имплицитното предположение, че „една наблюдаема трябва да получава една и съща стойност, независимо от това дали други измервания могат да бъдат направени едновременно”, нормално е да се приеме, че той го оспорва и че вероятно се твърди неговото отрицание. Заедно с това обаче, какъв е механизмът, и то тъкмо подчертано *физическият* механизъм на нелокалния пренос на скрити параметри посредством законите за запазване?

В първата книга вече беше изложена и подробно разработена хипотезата за тясна връзка между „конструктивисткото броене” и законите за запазване на енергията, импулса, момента на импулса и лоренцовата инвариантност, основаващи на непрекъснатите групи на транслация и ротация в пространството на

Минковски. Дискретното броене и непрекъснатата транслация или ротация могат да бъдат разглеждани еднообразно посредством една скулемовска относителност на дискретно и континуално.

В такъв случай физическият механизъм на нелокален пренос на скрити параметри би следвало да има за своя основа една и съща аритметика на целите числа (пеановска аритметика) във всяка точка на времепространството. Като философия на квантовата информация в първата книга беше развита идеята за дуалистично питагорейство, която може да бъде добре илюстрирана чрез предшестващото изречение. Като философска и физическа хипотеза то предполага освен видимата многообразна действителност една скрита еднообразна математическа същност, която е *не по-малко и не повече* валидна. Тъкмо затова допълващото определение „дуалистично" е релевантно. В конкретния пример зад многообразието на точки във времепространството се предполага еднообразието на една и съща аритметика в една и точка, която го споява същностно в цялост.

Както вече се спомена, идеите на квантовата информация отиват отвъд една просто боровска допълнителност към проблема за взаимопроникването, взаимодействието и преминаването на математическо във физическо, а и вероятно обратното, за точните количествени и принципни качествени закони, по които то се извършва. Понятието за физическа информация, а именно квантовата информация, се осмисля и е призвано да означава тъкмо такъв преход, както и сродните му – на основата на единството и на скулемовската относителност на дискретно и континуално, крайно и безкрайно, между различните канторовски безкрайности.

Предполагайки възможността за такова взаимодействие, взаимопроникване и взаимно превръщане на математическо и физическо, вече имплицитно е допусната възможността за по-общ закон за запазване на тази обща математико-физическа същност – физическата или квантовата информация. От такава позиция собствено математическият подход на фон Нойман, водещ към извода за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика на основата на игнориране на втората и допълваща математическа основа на света и собствено физическият подход на Джон Бел, от който следва наличието на нелокални скрити променливи, в последна сметка математически по своята същност, не би трябвало да се противопоставят, а да се осмислят като допълнителни и да се търси тяхното обединяване.

Когато говорим за по-общ закон за запазване и при това свеждайки го към областта на квантовата механика, то би трябвало да се има предвид преобразуване между спрегнатите физически величини, напр. време и енергия, разстояние и импулс и пр. Втората половина параметри, необходими за пълно описание на конфигурационното пространство на една система в класическата физика, но излишни или допълнителни в квантовата механика, следва да се изразяват и превръщат чрез първата половина.

Вече многократно, особено в първата книга, сме говорили за тълкуването на спрегнатите физически величини с некомутиращи съответни хилбертови оператори като за такива, за които фон наймановската „едновременна неизмеримост" трябва да се тълкува буквално, а именно че следва да се отнесат към различни моменти от времето. В такъв контекст преобразуването между спрегнати величини на основата на предполагаемия по-общ закон за запазване също така ще означава и преобразуване между различни моменти от времето, и то, подчертано, *в общия случай*, когато времето не се разглежда като равномерно, хомогенно, безструктурно, неизкривено и т. н. Сега известните ни закони за запазване биха били валидни само *за частния случай*.

На основата на така скицираната в контекста на статията на Бел позиция на дуалистичното питагорейство, можем да преминем към излагане и тълкуване на идеята на Бом за квантова механика със скрити параметри:

> *В контраст с обичайната интерпретация тази алтернативна интерпретация ни позволява да схванем всяка индивидуална система като биваща в точно определимо състояние, чиито промени с времето се определят от определени закони, аналогични на (но не идентични с) класическите уравнения на движението* (Bohm 1952, I: 166).

Намерението е да се покаже, че предлаганата нова интерпретация на квантовата механика е по-обща: тя би обхванала всички дотогава известни резултати, обяснявайки ги в духа на скритите параметри като статистическо приближение, но заедно с това би била с „ключово значение в областта на измервания от порядъка на $\mathbf{10^{-13}}\ cm$". В своята работа Бом подлага на критика

> *единствено факта, че тя изисква от нас да се откажем от възможността дори да разберем точно това, което определя поведението на една индивидуална система на квантово равнище, без да се предложи адекватно доказателство, че такъв отказ е необходим. Обичайната интерпретация е по-общо признание непротиворечива; но простата демонстрация на такава непротиворечивост не изключва възможността за други, еднакво непротиворечиви интерпретации, които биха включвали допълнителни елементи или параметри, позволяващи детайлно причинно и непрекъснато описание на всички процеси и без да изискват от нас да минем без възможността от разбиране на квантовото равнище в точни термини. От гледна точка на обичайната интерпретация, тези допълнителни елементи или параметри би могло да се нарекат „скрити" променливи* (Bohm 1952, I: 168).

Вече е очевидно, че замисълът на Бом е да покаже, че една интерпретация на квантовата механика според обичайната епистемологична установка на класическата физика, не само е напълно възможна, но би имала също така предимството да е по-обща, описвайки явления „на равнището, асоциирано с „фундаменталната дължина от порядъка на 10^{-13} cm", на което

> *скритите променливи могат да водят до съвсем нови ефекти, противоречащи на екстраполацията на настоящата квантова теория надолу до това равнище* (Bohm 1952, I: 168-169).

Бихме сумирали общата методологична позиция на Бом за реставрация на класическите физически възгледи в няколко положения: (1) времето и пространството са универсални, всички физически явления се осъществяват в него; (2) описанието на физическите явления винаги може да бъде: (a) причинно и (b) непрекъснато; (3) всяка промяна на състоянието на физическа система се осъществява чрез взаимодействие, пренасяно от поле; (4) на равнището на квантовата механика описанието чрез потенциали, потенциална енергия и сили не само продължава да бъде валидно, но и е по-общото; (5) в такава рамка (1-4) развитието и обобщаването на физическите теории се извършва, добавяйки нови сили, полета и допълнителни членове към вече известните.

Причината за нашия интерес към интерпретацията на Бом обаче е напълно различна от неговите намерения и може да се резюмира в два момента: при неговия подход вероятността и $\boldsymbol{\Psi}$-функцията се разглеждат съотв. като сила и поле, което се предлага в съвсем друго тълкуване и от „дуалистичното питагорейство”; в обратен поглед чрез него класическата физика може да се изтълкува в термините на квантовата механика и информация.

Завръщайки се към статията на Бом, ще се окажем пред двете „взаимно непротиворечиви допускания, върху които е основана обичайната интерпретация”:

> „(1) *Вълновата функция със своята вероятностна интерпретация определя най-пълното възможно детайлизиране на състоянието на една индивидуална система*;
>
> (2) *Процесът на пренасяне на единичен квант от наблюдаваната система до измервателния апарат е същностно непредсказуем, неконтролируем и неанализируем*” (Bohm 1952, I: 169).

Без да навлизаме в подробности, същността на подхода на Бом е да се даде ново тълкуване на уравнението на Шрьодингер, което да допуска неговото обобщаване, с помощта за „квантово-механичен потенциал”, чрез какъвто последното би могло да се изведе от уравнението на Хамилтън – Якоби за ансамбъл от частици (Bohm 1952, I: 170). Тогава:

> *Тъй като силата върху една частица сега зависи от една функция на абсолютната стойност,* $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$*, на вълновата функция* $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$*, получила стойност при действителното местоположение на частицата, фактически сме доведени до това да приемем вълновата функция на индивидуален електрон като математическо представяне на едно обективно реално поле. Това поле привежда в действие сила върху частицата по начин, който е аналогичен на – но не идентичен със – начина, по който електромагнитно поле въздейства със сила върху заряд и мезонно поле въздейства със сила върху нуклон. В последна сметка, разбира се, няма причина защо върху частица да не действа* $\boldsymbol{\psi}$*-поле, така както електромагнитно поле, гравитационно поле, множество мезонни полета и може*

> *би още други полета, които все още не са открити. Аналогията с електромагнитното (и другите) полета отива много далеч: понеже точно както електромагнитното поле се подчинява на Максуеловите уравнения, $\boldsymbol{\psi}$-полето се подчинява на уравнението на Шрьодингер* (Bohr 1952, I: 170).

Приведеният цитат, който е възлов за нашия прочит на Бомовата интерпретация, ни дава повод за няколко бележки. На първо място, че не единствено самата $\boldsymbol{\Psi}$-функция придобива физически смисъл, но също така нейният модул, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})}$ и фазата, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ (Bohm 1952, I: 169-170). Според добре известната и многократно цитирана в първата книга вероятностна интерпретация, квадратът на модула е равен на вероятността системата да се окаже с координатите $\boldsymbol{x}$ в конфигурационното пространство. Това положение преминава без изменение в подхода на Бом. Заедно с това $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ се тълкува като импулса на частицата. Доколкото функцията $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ е биекция или поне съдържа биективна част, на която единствено да се придаде физическия смисъл, дотолкова импулсът и местоположението биха били едновременно дадени.

На второ място, в класическата механика състоянието на системата, както е добре известно, се определя от местоположенията и скоростите на нейните части при трактовката на Лагранж. Последните могат да се тълкуват както като производни по времето от пространствените координати, така и като независими променливи под формата на импулси при подхода на Хамилтън. Заедно с това потенциалът (напр. в израза за потенциална енергия) е само от координатите. Така, ако модулът на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията може да бъде демонстриран като потенциал на някакво поле (за което сякаш най-много би подхождал епитетът „вероятностно"), „$\boldsymbol{\psi}$-поле", с термина на Бом, то тогава вълновата функция $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ би придобила ясен „класически" физически смисъл, не повече от това да представя по трети начин връзката между (1) координати и импулси (скорости), от една страна, и (2) потенциал и действително състояние (напр. потенциална и кинетична енергия), от друга. Тя би взимала импулсите от (1) и вече „вероятностния" потенциал от (2), за да описва състоянието на системата само по начин, необикновен, но еквивалентен на класическите подходи.

Следователно може да се каже, че $\boldsymbol{R}$ *и* $\boldsymbol{S}$ *се съопределят помежду си* (Bohm 1952, I: 170).

Тогава пред нас четирите подхода се оказват по следния начин в класификация (без да се опитваме засега да я доведем до абсолютна прецизност): (1) при подхода на Лагранж скоростите са изцяло зависими от местоположенията в качеството на техни производни; (2) при подхода на Хамилтън импулсите и координатите са напълно независими едни спрямо други променливи; (3) в стандартната интерпретация на квантовата механика те са дублиращи се, но допълнителни: не могат да бъдат едновременно дадени според съотношението за неопределеност; (4) при тълкуванието на Бом те се съопределят (може би през посредничеството на „$\boldsymbol{\psi}$-полето").

Проблемът в концептуално отношение е тъкмо онзи, който вълнува особено и нас: доколко е оправдано да се говори за „$\boldsymbol{\psi}$-поле", т.е. за „вероятностно поле" и точно как би могло или би трябвало да се тълкува неговият физически смисъл. Сега на частицата действа сила. Вижда се значението на въведения „квантово-механичен потенциал", $\boldsymbol{U(x)}$: тъкмо чрез постулиране на неговото съществуване функцията, $\boldsymbol{R(x)}$, от вероятността, $\boldsymbol{P(x)} = \boldsymbol{R^2(x)}$, може да се преобразува във физическа сила (Bohm 1952, I: 170, eq. 8):

$$\boldsymbol{U}(\mathbf{x}) = \frac{-\hbar^2}{\boldsymbol{4m}}\left[\frac{\boldsymbol{\nabla^2 P}}{\boldsymbol{P}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{(\boldsymbol{\nabla P})^2}{\boldsymbol{P^2}}\right] = \frac{-\hbar^2}{\boldsymbol{2m}}\frac{\boldsymbol{\nabla^2 R}}{\boldsymbol{R}} \qquad (68)$$

В какъв смисъл „квантово-механичният потенциал", зависещ от вероятността, може да се тълкува като поле? Очевидно поради това, че може да се приеме съществуването на имплицитна сила, която е насочена да премести системата от по-невероятно към по-вероятно разположение в конфигурационното пространство, така че в крайна сметка тя ще се окаже в най-вероятното разположение.

Например, ако правим фотографски снимки през равен интервал на механично движение в система от макротела и статистически ги сумираме, т.е. да речем – наслагваме снимките една върху друга, бихме получили статистико-вероятностна картина на действието на потенциалното поле, което е причинявало изменение във взаимното местоположение на частите на системата. Силата, пораждана от полето, би била обратно-пропорционална на статистическата вероятност за откриване на части от системата в дадена област, след наслагването на снимките. Ако не разполагаме с други емпирични и експериментални свидетелства за положението на нещата, освен снимките, и ако сме със съответната позитивистична епистемологична нагласа, бихме могли да подменим реалното физическо поле с вероятността за наблюдение. Такава е главната критична идея при предполагаемото възстановяване на реално физическо $\boldsymbol{\psi}$-поле зад вероятността за наблюдаване на местоположение в конфигурационното пространство $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{R}^2(\boldsymbol{x})$, и то посредством приведения по-горе точен количествен израз за квантово-механичния потенциал $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$.

Тук е мястото да изясним какво би могло да принуждава към вероятностна интерпретация и да изключва „скрито” поле зад нея. За целта нека си представим, че „снимките” не се правят на равни интервали от време, нещо повече, при всяка снимка се променя местоположението на фотоапарата и следователно, разбира се, перспективата. В резултат на това, от статистическото наслагване на снимките също така ще трябва да се предположи съществуването на еквивалентно и неразличимо физическо поле. Нещо повече, изглежда няма разумен начин да се разграничи външно поле от „поле”, което е резултат на промяна в условията на измерване. Ситуацията може да се оприличи с относителността на движението: никоя отправна система, включително и тази на наблюдателя, на квантово-механичния експериментатор не може да се приеме за неподвижна и неизменна. Идеята за „скрити параметри”, парафразирана и като скрито $\boldsymbol{\psi}$-поле, освен останалото, настоява за абсолютно разграничаване на квантов обект, от една страна, и експериментатор с уред, от друга, отсъствие на частично или напълно обратими морфизми, преобразуващи първия във вторите и/ или обратно.

Напротив, обичайната вероятностна интерпретация на квантовата механика всъщност се въздържа от това да екстраполира каквато и да било „скрита” метафизична същност отвъд или зад „снимките”: по този начин, макар и да се допускат, не се тематизира изучаването на морфизми между измерване и движение, експериментатор с неговия уред и квантов обект.

Тази крачка се прави от квантовата информация. Сдвояването напр. може да се тълкува и като „обективно измерване", т.е. вън и независимо от всякакъв уред и експериментатор. Понятието за квантова информация е специално насочено и към такъв тип морфизми, съответните явления и общо обяснение на света на подобна основа.

Второ положение, което би принуждавало към вероятностна интерпретация, е самата адекватност на представяне на действителността чрез поредица от снимки, т.е. посредством дискретизация, както и свързаният с това въпрос за фундаменталния начин на дискретизация на времето и пространството. След като в първата книга подробно сме разгледали Скулемовата относителност на канторовските видове безкрайности, на дискретно и континуално, то тук би трябвало да останем на позицията, че такова представяне на действителността чрез снимки (напомнящо описания от Бергсон кинематографичен метод на нашето мислене) е точно толкова обосновано, колкото и континуалното. В крайна сметка вероятностната интерпретация, наред с класическата, която е континуална, винаги остава едната от две допълнителни в смисъла на Бор алтернативи. В рамките на квантовата механика и информация, ако е налице коя да е от двете, неизбежно е приемането и на другата, но заедно с това, те си противоречат.

От изискването за ненарушаване на съотношението за неопределеност лесно може да се установи едно-еднозначна връзка между пространствената и времевата дискретизация.

Трета предпоставка е свързана с възможността или невъзможността за вероятностна интерпретация: доколко винаги е допустимо, че снимките могат да се подредят – *и то по един единствен начин* – според изискванията на добрата наредба (линейна последователност с първи елемент), винаги изпълнима за крайно множество, а за безкрайно – гарантирана от аксиомата за избора в общия случай. Тук биха се появили няколко все още необсъждани въпроса, на които ще посветим немалко място и усилия по-нататък:

Има ли физически съображения, които да ограничават добрите наредби на множеството от „снимки" (за крайно множество техният брой би бил равен на броя пермутациите на елементите му). По колко и кои от тях, мислени като последователни моменти във времето, законите за запазване и по-специално, на енергията биха били валидни? По колко и кои от тях каузалността в тесен (т.е собствено времеви) смисъл ще бъде в сила? Почти очевидно вероятностната интерпретация е тясно свързана с такъв тип отговори, при които биха се допускали множество от несъвпадащи добри наредби (т.е. все едно при различно протичане на времето), по всяка от които законите за запазване са в сила, но възможността за избор точно на една от тях на основа на причинността се отхвърля по принцип.

Интерпретацията на Бом – напротив – *съхранява също така и каузалността*. Според нея съществува *точно една* континуална траектория, по която *в действителност* се движи частицата. Привидно вероятностният ѝ и акаузален изглед се дължи на хаотичното въздействие на микрочастиците, от които е съставен уредът, по подобие на брауново движение: след наслагването – следвайки последната аналогия – на множество снимки на местоположението на частицата би се получила добре позната размита вероятностна картина за обективното състояние в квантовата механика посредством използването на $\boldsymbol{\Psi}$-функция.

Всъщност, предположението за $\boldsymbol{\psi}$-поле неотстранимо включва хипотезата за нютоновско време, при което „снимките” могат да се правят през равни интервали, и универсална валидност за всяка точка от пространството, с други думи, законите за запазване от класическата механика. Това, при установката на Бом „за реставрация”, е по-скоро концептуална последователност.

Възможността за такава интерпретация има свои още логико-философски корени: всяко отношение може да се тълкува като свойство след фиксиране на едното относимо. Оттук обаче също така се вижда и своеобразната „скрита”, и то може да се каже, „идеологическа” основа: фиксирането на едното относимо (не непременно измежду две) го универсализира неоправдано. Така, както впрочем отдавна изтъква поне Хайдегер, концепцията за обективност и научност, най-малкото в „класически смисъл”, всъщност означава краен субективизъм или антропоцентризъм, доколкото се явява неоправдано и некритикуемо, понеже е скрито, универсализиране на субекта и човека, спрямо които обективността, научността и „истината” са именно тези: те са такива по начин, който чрез всеобщността на свойството закрива изследването на друго възможно относимо или субект. Философията на квантовата информация разглежда подобен предразсъдък като частна и крайно ограничена предпоставка.

Във връзка с предполагаемото $\boldsymbol{\psi}$-поле Бом прави две съществени уточнения:

Равенството $\mathbf{p} = \boldsymbol{\nabla S}(\mathbf{x})$ няма принципен характер, а приблизителен. Що се отнася до атомно равнище, във визираната интерпретация е непротиворечиво

> *да се разглеждат модификации в теорията, които позволяват произволно отношение между* $\boldsymbol{p}$ *и* $\boldsymbol{\nabla S}(\boldsymbol{x})$ (Bohm 1952, I: 171).

Втората важна особеност е, че $\boldsymbol{\psi}$-полето е хомогенно:

> *това означава, че от нашите сегашни уравнения следва, че* $\boldsymbol{\psi}$*-полето не се поглъща или излъчва, а само променя своята форма, докато неговата интегрална интензивност остава постоянна* (пак там).

Бом обаче допуска, че $\boldsymbol{\psi}$-полето може да е нехомогенно в общия случай, да се излъчва и поглъща, подобно на електромагнитното, но на много малки разстояния и съответно да произвежда експериментално наблюдаеми ефекти.

Засега в тази връзка само ще поставим проблема, какъв би бил образът в теорията и философията на квантовата информация на едно нехомогенно вероятностно поле, което се поглъща и излъчва, да допуснем, на свои кванти. Поглъщането и излъчване всъщност означава съответно изчезване и поява. Това може да се случи, ако самата дискретизация във времето и пространството е променлива, и то по-специално, ако нейната големина нараства до безкрайност при изчезване (поглъщане) на вероятностното поле и намалява до нула при поява (излъчване).

Какъв би бил физическият смисъл? Очевидно излъчването на вероятностно поле ще означава намаляване на вероятността на излъчилия го обект, а неговото поглъщане – обратно – увеличаване. С други думи, това би предположило взаимодействие на $\boldsymbol{\Psi}$-функциите на излъчилия и погълналия вероятностното поле обект. В тази връзка могат да се направят няколко предварителни бележки:

1. Вече многократно отбелязваме, че при всички явления на сдвояване е налице пряко взаимодействие на $\boldsymbol{\Psi}$-функциите на участващите квантови обекти. Това предполага и дори изисква възможност за обяснение чрез поглъщане и излъчване на вероятностно поле, разбира се, ако приемем, че такова съществува. Нека – без да се нарушава общността на разглеждане – за простота да обсъдим

случая на два квантови обекта. От една страна, унитарен оператор, съответстващ на завъртане по „кривината” на едно „изкривено” хилбертово пространство между две крайно отдалечени негови точки, преобразува едното в другото хилбертово пространство. Но заедно с това то се проецира, т.е. действа също така и ермитов оператор, чиято композиция – в общия случай некомутативна – с унитарния, ще представлява целия оператор, който може да се нарече проекционен със следната уговорка: това е проекция, фигуративно казано, по „геодезичните линии”, т.е. в едно „криво” хилбертово пространство. Какъв е физическият смисъл на тези геодезични линии, по които се извършва проектирането? (Да прибавим, че проектирането се извършва „мигновено”, т.е. на принципа на далекодействието.) Това са законите за запазване, и най-вече за запазване на енергията, който позволява резултати от един момент от времето да се пренесат легитимно в друг.

2. Може също да се има предвид възможността за обобщаване подхода на фон Нойман за присъединяване на проекционните оператори логическия статут на съждения, подробно обсъждан в първата книга. Най-общо казано, при проекция в „плоско” хилбертово пространство съждението има характер на предикация относно някаква физическа величина, напр. притежава или не притежава дадена стойност. В случая на „криво”, съждението е отношение, и то такова, което не може да се разложи на предикации. С други думи, ако приемем, че отношението е двуместно, то това е съждение за отношението на величината $\boldsymbol{A}$ от квантовия обект $\mathbf{1}$ по отношение на величината $\boldsymbol{B}$ от квантовия обект $\mathbf{2}$. Доколкото величината $\boldsymbol{B}$ е свързана с $\boldsymbol{B}'$ от $\mathbf{1}$ чрез закон за запазване, можем да говорим за едновременна стойност дори и на едновременно неизмеримите $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}'$ от $\mathbf{1}$. С други думи и обобщено, *съждението за едновременна неразрешимост може да се преобразува еквивалентно в съждение за фундаментално отношение, несводимо към предикации*.

Последният извод е изключително важен, тъй като *позволява – след като противоречивостта е редуцирана чрез посредничеството на времето и пространството до неразрешимост – вече самата тази неразрешимост да се преобразува в съждение, а именно за фундаментално отношение.*

Нека по-подробно проследим този път. Неразрешимостта за разлика от непосредственото противоречие позволява едновременното разглеждане на твърдение и неговото отрицание, без това да води до срив в теория, в която е налице. С помощта на използваното и подробно обсъжданото в първата книга понятие за

„едновременна неразрешимост”, въведено от фон Нойман по отношение на проекционните оператори, тълкувани вече като съждения, на две едновременно неизмерими квантово-механични величини, неразрешимостта може да се интерпретира в термините на едновременната неразрешимост. По-нататък следва да се породи логически аналог на аргумента АПР по следния начин:

Само заради прегледността и аналогията: да си представим, че първоначалната аксиоматична система се разцепва на две дъщерни според приемане или отхвърляне на допълнителна аксиома или неразрешимо твърдение и те се озовават на физически различни места точно според аргумента на Айнщайн – Подолски – Розен. Нека, например – като най-известен, – това да бъде петият постулат на Евклид и в „точката”, в която е налице аксиоматичната система, която го включва, тримерното пространство ще бъде „плоско”, а тази, в която се намира аксиоматичната система с реализирано негово отрицание, пространството ще бъде „криво”. Има два крайни случая: (1) когато двата несъвместими предиката „право” или „криво” са на две различни места и тогава няма никакъв проблем, напр. може да мислим, че кривината на пространството, която в случая може да се тълкува като експлициран параметър, се променя от точка в точка; (2) когато двата несъвместими предиката „право” и „криво” се реализират на едно и също място и следователно е налице пряко противоречие. Ние при това ще добавим, че в първия случай имаме два субекта в логически смисъл (на различни места), всеки от които със свой, и то точно един предикат, а във втория – само един субект с двата несъвместими предиката.

Ситуацията може да се обобщи, като се допуснат поне по принцип, „междинни състояния”: субектите не са нито два различни, нито един и същ, можем да ги мислим като два различни, отчасти съвпадащи, или фигуративно, като „дробен брой субекти между един и два”. Освен това обаче трябва съществува логически метод, чрез който подобна ситуация да се реализира. Във физическия случай това бяха законите за запазване, които позволяват да се пренася стойност на величина в друга част от системата, в случай че тя продължава да бъде едно цяло или е налице сдвояване между разглежданите нейни части. В логическия – това ще е пренасяне чрез отношение между неговите относими. Пренасянето чрез отношение обаче е развито в теорията на метафората, т.е. в доста различна област на знанието: по-скоро поетика и реториката, отколкото логика. При такова пренасяне две предикации взаимодействат, макар обикновено да се има предвид само едната посока, а именно въздействието на едната предикация върху другата. Очевидно единството на метафората като неин смисъл не може да се разложи на съставящите я предикации[141].

Резюмиран, резултатът е: прякото логическо противоречие се снема чрез метафората. Тя може да се разглежда и като „синтезата” според Хегеловата терминология. Да проследим отново последователните стъпки:

1. Противоречието се разглежда като неразрешимо твърдение, при което неговата „теза” и „антитеза” се мислят като допълнителни в смисъла на Бор. Според аргумента АПР те могат да се локализират различно в едно или друго пространство.

2. Неразрешимото твърдение се преобразува еквивалентно в метафора, която е несводима към съставящите я предикации. Така то се оказва чисто отношение в смисъла на Ръсел, подробно обсъждан в първата книга.

Проблемът ще бъде разгледан от гледна точка на контекстуалността в следващата глава, посветена на теоремата на Кохен – Шпекер. Може също така да се твърди, че прякото противоречие се разрешава ефективно и на практика чрез контекстуалността: чрез контекста, който частично разделя и частично обединява несъвместимите значения в единство на смисъла.

Завръщайки се към проблема за предполагаемото вероятностно поле в термините на квантовата информация, самото то би могло да се тълкува като квантов обект, на който би следвало да се предицира физическа величина, съответстваща на оператора преобразуващ $\boldsymbol{\Psi}$-функцията на единия обект. Налице е обаче проблем, който вече е споменаван, но ще се обсъжда по-нататък подробно: този оператор не е ермитов и следователно не е хипермаксимален, не може да му се приписва физическа величина в стандартната интерпретация. Тогава би трябвало да се интересуваме от такова обобщение на понятието за величина, и най-вече от неговия възможен физически смисъл, че да може да съответства някакъв по-широк тип и в този случай.

3. При положение, че константата на Планк е фундаментална, то предполаганата нехомогенност на вероятностното поле, в т.ч. неговото излъчване и поглъщане, необходимо изисква изменение на масата, за да може да се изменя

---

[141] Общата формула на метафората е: $[(\boldsymbol{A}\ e\ \boldsymbol{B})$ се отнася към $(\boldsymbol{C}\ e\ \boldsymbol{D})]$. Тя допуска различни съкращения. Чрез тях може да се изведе предложената от Рикьор: $\boldsymbol{A}\ e/$ не е $\boldsymbol{D}$.

стъпката на дискретизация във времето и пространството (Δ). Какъв е физическият смисъл на това? За да може да е безкрайно малка и за да не се наруши съотношението за неопределеност, изменението на енергията, или съответно на масата, трябва клони към безкрайност. С други думи, енергия или маса трябва да възникне „от нищото”, за да се излъчи вероятностно поле. Обратно, трябва да изчезне, за да може да се погълне. Относно „изчезването” (а оттук може да се отнесе и до „възникването” на ψ-поле) Бом пише, че

> *частицата никога не може да достигне точка, където вълновата функция изчезва. Причината е, че „квантово-механичният” потенциал,* U*, става безкраен, когато* R *става нула* (Bohm 1952, I: 174).

Очевидно е, че съотношението за неопределеност би регулирало такова преобразуване на енергия във вероятност и/ или обратното чрез един по-общ закон за запазване, който вече се позволихме да обозначаваме като „закон за запазване на (квантовата) информация”. Още малко математическа спекулация: тъй като енергията на излъчващия полето обект трябва да нарасне след излъчването, а на поглъщащия – да намалее след взаимодействието, то енергията, еквивалентна на вероятност (информация) според такъв закон, би следвало да е отрицателна.

Това обаче не е единственият начин на разсъждение. Ако обърнем посоката на времето и разменим излъчващия и поглъщащия вероятностно поле квантов обект, еквивалентната енергия би била положителна, но вероятностното поле би се разпространявало назад във времето и няма да увеличава, а ще намалява вероятността на дадено събитие.

Нека в тази връзка обърнем отново внимание на общия израз за сумарния, „класически” и „квантово-механичен” потенциал (Bohm 1952, I: 170, eq. 6, 7):

$$V_s(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + U(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) - \frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right] =$$

$$= V(\mathbf{x}) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} \qquad (69)$$

4. Но вече изяснихме, че сдвояването може да се обсъжда в термините на взаимодействие на такова, чисто предполагаемо вероятностно поле. Естествен е въпросът дали на самото сдвояване не следва да се приписва енергия и следователно да се разглежда като физически обект; а също така дали може да се предположи и впоследствие експериментално да се наблюдава взаимно преминаване на енергия в информация и/ или обратното при явленията на сдвояване. В рамките вече на философска спекулация, това би означавало взаимно преминаване между физическо и математическо, каквото би било напълно в духа на „дуалистичното питагорейство".

Завръщайки се към статията на Дейвид Бом, следва да се постави въпросът дали, както, той твърди,

> *плътността на вероятността е числено равна на плътността на вероятността на частиците, получена в обичайната интерпретация. В обичайната интерпретация обаче, необходимостта за вероятностно описание се смята като присъща на самата структура на материята ... , докато в нашата интерпретация, тя възниква ... понеже от едно измерване към следващото не можем практически да предсказваме или контролираме точното положение на частицата, като резултат от съответните непредсказуеми и неконтролируеми смущения, внасяни от измерващия уред* (Bohm 1952, I: 171).

Както видяхме в първата глава, неравенствата на Бел показват, че при обичайната интерпретация необходимо съществуват стойности на математическо очакване, а следователно и на съвкупна вероятност, които не могат да се достигнат при статистическа интерпретация, осреднявайки неизвестното точно положение на частицата между две измервания. Впрочем, и самият Бом пише, че

> *би станало по принцип възможно да се намерят експерименти, при които* $|\psi|^2$ *би могло да се различава от плътността на вероятността и следователно да се докаже, че обичайната интерпретация, която дава на* $|\psi|^2$ *само вероятностна интерпретация, трябва да е неадекватна* (Bohm 1952, I: 171).

Както обаче знаем и както подробно ще разгледаме по-нататък, съответните експерименти се оказаха в полза на стандартната интерпретация.

Бом пише, че

> *всички резултати на обичайната интерпретация се получават от нашата интерпретация, ако направим следните три специални допускания, които са взаимно непротиворечиви: (1) че $\boldsymbol{\psi}$-полето удовлетворява уравнението на Шрьодингер; (2) че импулсът на частицата е ограничен до $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\nabla S}(\boldsymbol{x})$; (3) че не предсказваме или не контролираме точното положение на частицата, но имаме, на практика, статистически ансамбъл с плътност на вероятността $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})|^2$. Употребата на статистика е, обаче, присъщо не на понятийната структура, а само следствие от нашето незнание за точните първоначални условия на частицата* (Bohm 1952, I: 171).

Тъй като – поради експериментите, доказващи нарушаване неравенствата на Бел – стандартната интерпретация не следва от тази на Бом, то поне едно от приведените условия не е в сила по отношение на природата. Опитно е отхвърлено само третото условие: положението на частицата не може да представлява статистически ансамбъл. Това ни позволява да видоизменим интерпретацията на Бом в светлината на съвременното състояние на квантовата механика и информация по следния от много възможни начини:

1. Вероятностното (или можем да го наречем също – информационното) $\boldsymbol{\psi}$-поле удовлетворява уравнението на Шрьодингер.

2. Импулсът на квантовия обект е ограничен до $\mathbf{p} = \boldsymbol{\nabla S}(\mathbf{x})$.

Обаче:

3'. Вместо точно положение на частицата, каквото не само не можем да предсказваме или контролираме , но и по принцип не съществува, разгледана сама по себе си, трябва да вземем единия компонент, а именно амплитудата на $\boldsymbol{\psi}$-полето, $\boldsymbol{R}(\mathbf{x})$, такава че *неговата* – а не тази на отхвърления „статистически ансамбъл"! – плътност на вероятността е: $\boldsymbol{P}(\mathbf{x}) = |\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})|^2 = \boldsymbol{R}^2(\mathbf{x})$.

В духа на „дуалистичното питагорейство" такава интерпретация е не само възможна, но дори и желателна: конфигурационното пространство на $\boldsymbol{X}$ се изобразява по два независими начина: (1) в едно безразмерно и в този смисъл математическо, „вероятностно" или „информационно" поле; (2) в едно друго, вече собствено физическо. Тогава $\boldsymbol{\Psi}$-функцията би изразявала не само връзката, но също прехода (чрез оператори, които не са нито ермитови, нито унитарни) и единството между двете: между чистите математически и количествени същности, от една страна, и физическите обекти, от друга. На такава основа можем да приемем думите на Бом, казани по отношение на неговата собствена интерпретация, различаваща се – както видяхме – само в един пункт от току-що изложената:

> *Сега е лесно да се разбере защо възприемането на обичайната интерпретация на квантовата теория би имало тенденция да води встрани от посоката на нашата предположена алтернативна интерпретация. Понеже в теория, включваща скрити параметри, би било нормално да се очаква, че поведението на индивидуална система не би трябвало да зависи от статистическия ансамбъл, на който тя е член, понеже този ансамбъл се отнася до последователност от подобни, но несвързани експерименти, провеждани при еквивалентни начални условия. В нашата интерпретация, обаче, „квантово-механичният" потенциал,* $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$*, действайки на индивидуална частица зависи от интензитета на вълната,* $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$*, който е числено равен на плътността на вероятността в нашия ансамбъл. Именно в терминологията на обичайната интерпретация на квантовата теория мълчаливо се допуска, че вълновата функция има една единствена интерпретация; а именно в термините на вероятността, нашата предположена нова интерпретация би изглеждала като мистериозна зависимост на индивида от статистическия ансамбъл, на който е член. В нашата интерпретация, такава зависимост е съвършено рационална, поради вълновата функция, която може непротиворечиво да се тълкува и като сила, и като плътност на вероятността* (Bohm 1952, I: 171-172).

Нека на основата на току-що казаното отново да сравним, макар и само в концептуално отношение, скицираната малко по-горе видоизменена интерпретация, вдъхновена от съвременното състояние на квантовата механика и информация, с оригиналната, принадлежаща на Бом. Всъщност оказва се, че разликата е по-скоро терминологична и се дължи на различни метатеоретични предразсъдъци. Бом предполага, че в неговата интерпретация на понятието за „скрити параметри" обичайната може да се обобщи като се допусне взаимодействие между членовете на статистическия ансамбъл, дължащо се на също така скрито физическо поле – ψ-полето. Последното добавя „квантово-механичен” потенциал:

$$U(x) = f[R(x)] = f[P(x)]. \tag{70}$$

> *Сега ще преинтерпретираме* – пише Бом – $P(x)$ *като координатно поле, определено за всяка точка,* x*, и мълчаливо ще допуснем, че* $S(x)$ *е импулсът, канонично спрегнат с* $P(x)$ (Bohm 1952, I: 172).

Тъй като членовете на един статистически ансамбъл в общия случай са разделени във времето, то посредством квантовомеханичния потенциал се предполага взаимодействие между обекти в различни моменти от времето, с което – както ще видим по-нататък – възникват проблеми с постулата за ненадвишаване скоростта на светлината във вакуум. При явленията на сдвояване и според концептуалното ядро на дисциплината квантова информация се предполага пряко взаимодействие между вероятности, без да се обсъжда някаква лежаща в основата метафизична същност, ψ-поле, тъй като то не поражда самостоятелни (освен чрез вероятности) наблюдаеми ефекти, напр. обещаните от Бом на много малки дистанции. При видоизменената интерпретация и в духа на „дуалистичното питагорейство” обаче се придава първична реалност на $R(x)$, съотв. $P(x)$ – това е вероятностно поле, поради което то и може да взаимодейства физически пряко, т.е. без посредничество на някакъв хипотетичен „квантов етер” – Бомовото ψ-поле, чиито ефекти са ненаблюдаеми. Общата същност на двата подхода и „метафизичната” разлика между тях може да се проследи при обяснението на опитите с два процепа (Bohm 1952, I: 174).

Някои други характерни черти на интерпретацията на Бом:

1. Принципът на неопределеността се разглежда като „практическо ограничение върху точността”,

> *възникващо от непредсказуеми и неконтролируеми смущения на наблюдаваната система от измерващия уред* (Bohm 1952, II: 180).

Апаратът трябва да е конструиран така, че всяко дадено състояние на интересуващата ни система да води до определен обхват от състояния на апарата. Следователно взаимодействието въвежда корелации между състоянието на наблюдаваната система и състоянието на апарата (Bohm 1952, II: 180).

2. Според Бом,

ако две наблюдаеми $\boldsymbol{P}$ *и* $\boldsymbol{Q}$ *не комутират, то не може да се осъществи измерване и на двете върху една и съща система. Причината е, че всяко измерване смущава системата по начин, който е несъвместим с осъществяването на процеса, необходим за измерването на другата* (Bohm 1952, II: 183).

3. „Скритите променливи" са

свързани с реални и вече наблюдавани свойства на материята, защото (наред с $\boldsymbol{\psi}$*-полето) те определят по принцип действителния резултат от всяко индивидуално измерване* (Bohm 1952, II: 183).

В нашата интерпретация обаче твърдим, че понастоящем „скрити" точно определими положения и импулси на частицата определят резултатите от всеки индивидуален процес на измерване, но по начин, чиито точни детайли са толкова сложни и неконтролируеми и толкова малко известни, че за всички практически цели трябва да се ограничим до статистическо описание на връзките между стойностите на тези променливи и пряко наблюдаемите резултати от измерванията (Bohm 1952, II: 183).

4. В резултат на това е изводът, че

измерването на „наблюдаема" не е реално измерване на някое физическо свойство, принадлежащо единствено на наблюдаваната система. Вместо това, стойността на една „наблюдаема" измерва само една непълно предсказуема и контролируема потенциална възможност, принадлежаща точно толкова на измерващия апарат, колкото на самата измервана система (Bohm 1952, II: 183).

Ето защо напр.:

наблюдаемата „импулс" няма в общия случай просто отношение към действителния момент на частицата (Bohm 1952, II: 184).

Бом обяснява възникването на статистически ансамбъл напълно в духа на класическата физика:

Необходимостта от такъв ансамбъл възниква от хаотично сложния характер на взаимодействие между електрона и класически системи, такива като обеми газ, стени на контейнери, парчета от измерващия апарат и т.н., с които тази частица трябва на практика да взаимодейства (Bohm 1952, II: 185).

Поради това

в хода на такова взаимодействие „квантово-механичният" потенциал е подложен на силни и бързи флуктуации, които се стремят да направят орбитата на частицата да блуждае по цялата област, в която ψ*-полето е съществено* (пак там).

Естествен е изводът, че

в нашата интерпретация квантовите флуктуации и класическите флуктуации (такива като Брауновото движение) имат в своята основа един и същ произход; а именно хаотично сложния характер на движение на микроскопично равнище (Bohm 1952, II: 185).

Бом също така предлага свое обяснение на „хипотетичния експеримент на Айнщайн, Подолски и Розен":

ако измерим положението на първата частица, въвеждаме неконтролируеми флуктуации във вълновата функция за пълната система, които – чрез „квантово-механичните" сили – предизвикват неконтролируеми флуктуации в импулса на

> *всяка частица. Аналогично, ако измерим импулса на първата частица, неконтролируеми флуктуации във вълновата функция за системата предизвикват – чрез „квантово-механичните" сили – съответни неконтролируеми промени в положението на всяка частица. Следователно може да се каже, че „квантово-механичните" сили пренасят неконтролируеми смущения мигновено от едната частица до другата през средата на ψ-полето* (Bohm 1952, II: 185).

Въпросът за мигновено пренасяне на предполагаемото ψ-поле и следователно в нарушение на постулата за ненадвишаване скоростта на светлината е обсъден малко по-нататък. Основна е идеята, че

> *ако възприемем духа на общата теория на относителността, който е да се търси да се накара свойствата на пространството да зависят от свойствата на материята, която се движи в това пространство, то тогава е съвсем разбираемо, че метриката и следователно ограничението за скоростта, може да зависи от ψ-полето така, както и от гравитационния тензор $g^{\mu,\nu}$* (Bohm 1952, II: 187).

По повод и на двете току-що цитирани обяснения може да се коментира, че изобщо интерпретации от типа „скрити променливи", към които принадлежи и тази на Бом, имат склонност да се обръщат към други, фигуративно казано, „още по-скрити" променливи, което не може да прави добро впечатление.

Обсъждайки по-нататък теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити променливи в квантовата механика, позицията на Бом е, че

> *в своето доказателство, той се ограничава имплицитно до изключително тесен клас от скрити параметри* (Bohm 1952, II: 187),

т.е. до такива, отнасящи се до измерваната квантова система, така да се каже „сама по себе си", докато в Бомовата интерпретация

> *така наречените „наблюдаеми" … не са свойства, принадлежащи единствено на наблюдаемата система, но вместо това потенциалности* [potentialities], *чието*

> *точно развитие зависи еднакво от наблюдаващия уред и от наблюдаваната система* (Bohm 1952, II: 187).

Може напълно да се приеме самооценката на Бом, според която:

> *В тази точка сме в съгласие с Бор, който постоянно подчертава фундаменталната роля на измерващия уред като неотделима част от наблюдаваната система. Различаваме се от Бор обаче по това, че предлагаме метод, чрез който ролята на прибора може да се анализира и опише по принцип по прецизен начин, докато Бор твърди, че точна концепция за детайлите на процеса на измерване е принципно недостижима* (Bohm 1952, I: 188).

В контекста на обсъжданата статия на Бел, в която – както видяхме, – от една страна, се цитира работата на Бом тъкмо като оспорваща универсалността на резултата на фон Нойман, но от друга, се посочва, че точни ограничения на теоремата не са изследвани, за нас е важно да изясним разграничителните линии между двата подхода, сходни в това, че в една или друга степен, по един или друг начин се стремят към реабилитиране на „скритите променливи” в квантовата механика. Като ключ може да послужи философската позиция на Бом, според когото

> *в нашето описание проблемът за обективната реалност на квантово равнище е поне по принцип не фундаментално различен от онзи на класическо равнище* (Bohm 1952, I: 188).

Също така твърде важно е следното негово твърдение:

> *В тази връзка желаем да изтъкнем, че това, което можем да измерим, зависи не само от типа на апарата, който е наличен, но също така от съществуващата теория, която определя вида извод, който може да се използва да свърже пряко наблюдаемото състояние на уреда със състоянието на интересуващата ни система. С други думи, нашата епистемология се определя до голяма степен от съществуващата теория. Следователно не е мъдро да се уточняват*

> *възможните форми на бъдещи теории в термините на чисто епистемологични ограничения, извеждани от съществуващите теории* (Bohm 1952, I: 188).

По същество епистемологията, която използва Бом, е почти непосредствено класическата и тъкмо тя „определя вида извод, който може да се използва да свърже пряко наблюдаемото състояние на уреда със състоянието на интересуващата ни система". И този вид извод, свързващ показанията и състоянието на измерваната система, включва заимстваните от класическата физика и адаптирани за квантовата механика хипотези за: (1) съществуване на поле, а именно на ψ-полето; (2) разглеждане на получаваните резултати като макроосредняване (което в случая е на микро-равнището на квантовата система) на огромен брой пико-състояния на много малки разстояния; (3) универсалност на времепространственото описание и на каузалността.

В резултат на приемането на всички тези метапредпоставки, водещи своя произход от класическия епистемологичен модел, получил блясково потвърждение в миналото и превърнал се едва ли не в синоним на научност, предполагаемите „скрити променливи" също се тълкуват класически като състоянията на уреда, претърпяващи много резки флуктуации на микроравнище. „Наблюдаемите" в квантовата механика всъщност се отнасят в еднаква степен – и по принцип могат да бъдат описани еднакво, а именно класически – до квантова система и уред.

Епистемологичният модел, който използва Бел и както изрично заявява, е този на стандартната интерпретация на квантовата механика (СИКМ), поради което нито една от трите изброени, „класически" предпоставки на Бомовата интерпретация не е в сила. Въпреки това, както видяхме при обсъждането на предходната негова статия, изхождайки от СИКМ, той предлага ясни количествени неравенства, разграничаващи скрити параметри в смисъла на класическата физика и в смисъла на квантовата механика. Фактически доказаното впоследствие експериментално нарушаване на неравенства, еквивалентни на неговите, отхвърля скрити параметри в смисъла на класическата физика, които често се разбират или използват като синоним на скрити параметри изобщо. Обаче заедно с това се потвърждава съществуването на скрити параметри в смисъла на квантовата механика.

Тъкмо на съвсем прецизното и много важното за по-нататъшното изложение разграничение между двата смисъла ще бъдат посветени следващите няколко абзаца. В подхода на Бом също са налице елементи, които могат да се пренесат без промяна и да послужат като мост: в неговата интерпретация „така наречените „наблюдаеми" „не са свойства, принадлежащи единствено на наблюдаемата система, но вместо това потенциалности [potentialities], чието точно развитие зависи еднакво от наблюдаващия уред и от наблюдаваната система" (вече цитирано погоре).

В подхода на Бел обаче взаимодействието между тези потенциалности и уреда не се мисли като пренасяно от физическо поле, ψ-полето в термините на Бом, нито като сила или взаимодействие според класическата физика. Въздействието върху потенциалностите, описвани добре чрез Ψ-функцията, единствено ограничава степените на свобода, в резултат на което се получава измерената стойност за съответната физическа величина. Тук личи общата епистемологична нагласа на стандартната интерпретация: тъй като сме изправени пред явления от безпрецедентен тип, рязко отличаващи се от наблюдаваните в класическата физика, трябва не само да преустановим безкритичното пренасяне на нейните методологични установки, но да се въздържаме от каквато и да било отиване отвъд наблюдаваното и „наблюдаемите"; може би единственото изключение от тази насока е концепцията на Бор за допълнителността, самата тя обаче бидейки възможно да се разглежда като своеобразна „позитивистка метафизика". Затова нека си позволим да прецизираме какво точно казва Бел в двете си последователни статии без каквото и да било екстраполиране:

1. В първата: от математическия формализъм на квантовата механика и от подразбирана валидност и използване на законите за запазване следва, че корелацията между физически величини в квантовата механика може да надвиши максималната възможна корелация в класическата физика и дължаща се на „скрити променливи": т. нар. нарушаване на неравенствата на Бел.

2. Във втората: при същите изходни условия и възможно при наличие на такива свръхкорелации, квантови корелации между физическите величини, теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри в квантовата механика в общия случай не е валидна.

Едва и само в този смисъл може – и то с още уговорки – да се приеме, че Бел защитава концепцията за наличие „скрити параметри" в квантовата механика.

Следователно, докато за Дейвид Бом такива „скрити параметри” се обуславят от хаотичното взаимодействие от *класически тип* между уред и измервана система, и то на експериментално недостижими по онова време много малки разстояния, то за Джон Бел те имат за основа специфичните квантови корелации, напълно неизвестни и съответно неучастващи в концептуалния апарат на класическата физика.

Едва в резултат на последвалото половинвековно развитие може да се постави въпросът: дали не съществува по-обща гледна точка, от която квантовите корелации, от една страна, и физическите взаимодействия от класически тип, от друга, могат да бъдат обединени в по-широк клас. Но би било груба грешка на квантовите корелации да се приписва непосредствено характер на физическо ψ-поле в смисъла на Бом. Разграничението се дава тъкмо от неравенствата на Бел: първото изисква тяхното нарушаване, а второто дори не може да постави под въпрос възможността за тяхното нарушаване и следователно предполага безусловното им изпълнение.

Нека преминем към обсъждането на следващата статия, разгледана в тук обсъжданата работа на Бел – тази на Яух и Пирон. Двамата автори резюмират така своята цел:

> *Показва се, че скрити променливи могат да съществуват само ако всяка пропозиция (да-не експеримент) е съвместима с всяка друга. По-нататък се показва, че това свойство е в противоречие с емпиричните факти. Теоремата, която води до това заключение, е усилване на теоремата на фон Нойман със същия предмет. Повдига се въпросът дали могат да съществуват квантово-механични системи, които допускат приблизително бездисперсни състояния* (Jauch, Piron 1963: 827).

Както се вижда, предлаганият от двамата автори резултат, е освен усилване, но и по-скоро *логически* еквивалент на теоремата на фон Нойман. Условието „всяка пропозиция (да-не експеримент) е съвместима с всяка друга” се перифразира така: не съществуват неразрешими пропозиции. С други думи, скрити променливи могат да съществуват само ако не съществуват неразрешими твърдения. Обратно, от съществуването на неразрешими твърдения по отношение на квантовите системи следва отсъствие на скрити променливи.

Оттук вече и подробното обсъждане на резултатите на Гьодел и особено съвместното им разглеждане с аргумента АПР и теоремата на фон Нойман в първата книга, може да се обоснове естествено и напълно.

Приведеното условие всъщност е конюнкция от две подусловия и следователно неговото отрицание е дизюнкция от отрицанията на двете подусловия. Те са: (1) че всяка пропозиция е да-не експеримент, т.е. законът за изключеното трето е валиден, възможно и за непротиворечието; (2) този тип пропозиции по отношение на една квантова система са напълно съвместими помежду си.

Ако се приеме (макар и по-скоро като наглед) утвърденото присъединяване на – и дори понякога отъждествяване със – хилбертово пространство, то всяка интересуваща ни пропозиция в общия случай може да се разглежда като твърдение относно безкрайно множество, а именно безкрайния вектор на състоянието. Така двете отрицания съответстват: (1) на интуиционистското отхвърляне на „изключеното трето” за безкрайни множества, но и (2) на отказ от едно универсално конструктивисткото „броене” (доколкото от него следват законите за запазване и чрез тях своеобразно „разрешаване” посредством пренасяне на едната от двете „половини” на неразрешима пропозиция на „друго място”).

Следователно аргументът на Яух и Пирон в подкрепа на теоремата на фон Нойман допуска отхвърляне не само по начина, предложен от Джон Бел и обсъден по-горе, но и като едни „некласически” „скрити променливи” се преутвърдят по нов начин, а именно като се отрече съществуването на неразрешими или несъвместими пропозиции по отношение на квантова система.

С тези предварителни забележки относно смисъла на тяхната работа в нашия контекст да се насочим към възловото им определение за ‘състояние’:

> *едно състояние на физическа система е резултат от множество манипулации на системата, които образуват подготовката на системата. Едно състояние може да се измери чрез определяне вероятностното разпределение на достатъчно обширно множество от наблюдаеми. Резултатът от измерването може да се изрази с определена функция* $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{a})$*, определена върху множеството от всички пропо-*

> *зиции $\boldsymbol{a} \in \wp$. Можем и ще наречем тази функция състояние на системата* (Jauch, Piron 1963: 832).

Без все още да е ограничена общността на функцията $\boldsymbol{w(a)}$ трябва да се каже, че такова определение е по-скоро логическо и се различава съществено от обичайното в стандартната интерпретация, където под състояние на квантова система се разбира $\boldsymbol{\Psi}$-функцията или еквивалентният вектор в съответното хилбертово пространство. Ако обаче си припомним фон Неймановото определение за пропозиция по отношение на квантова система както проекционен оператор, което се използва и от двамата автори (Jauch, Piron 1963: 829)[142], или съответното линейно многообразие, върху което се проектира (хилбертово подпространство), то се вижда, че определението на Яух и Пирон навежда на мисълта, щото множеството от пропозиции $\boldsymbol{Y}$ за квантовата система да се разгледа като подмножество $\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{2^X}$ на множеството от подмножества $\boldsymbol{2^X}$ на някакво множество $\boldsymbol{X}$. Ако въпросното подмножество $\boldsymbol{Y}$ е самото множество от подмножествата на $\boldsymbol{X}$, т.е. $\boldsymbol{Y = 2^X}$, то винаги би представлявало булева решетка. От друга страна обаче, авторите изрично подчертават:

> *Функцията ще трябва да удовлетворява определени свойства, които я характеризират като обобщена вероятностна функция. Казваме „обобщена” понеже обичайната вероятностна функция се дефинира като нормализирана, адитивна функция върху множества. Подмножествата на множество винаги са булева решетка. Пропозициите на микросистемата не са … булева решетка и така ние трябва да обобщим понятието за обичайна вероятност. Обобщението трябва да се направи по такъв начин, че върху всяка булева подрешетка на $\wp$ функцията $\boldsymbol{w(a)}$ се редуцира до обичайна вероятностна функция* (Jauch, Piron 1963: 832-833).

---

[142] Заедно с това те посочват: „Пропозициите на произволна физическа система имат структура, която е съвсем независима от частния факт, че в квантовата механика, те се представят от проекционни оператори” (Jauch, Pirone 1963: 829)

Както ще видим, това преминаване към обобщена вероятностна функция, поради това, че множеството от подмножествата на пропозициите за квантовата система не е изоморфно на множеството от компонентите на нейния вектор на състоянието, е ключовото и е тясно свързано с онази (означената като 4°) аксиома на Яух и Пирон, която беше атакувана от Джон Бел, поради това, че не може да се приеме нейната априорна очевидност.

Следователно за нас е особено важно да изясним защо „пропозициите на микросистемата не са … булева решетка” и не съществува множество, на чието множество от подмножества те да са изоморфни. Този въпрос обсъден в параграф II на статията им. Краткият отговор е: понеже не всички пропозиции са *съвместими* според тяхното строго определение на това понятие.

> *Две пропозиции $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се казва, че са съвместими, ако те изпълняват симетричното отношение:*
>
> $$(1) \qquad (\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}') \cup \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b} \cap \boldsymbol{a}') \cup \boldsymbol{a}\,. \qquad (71)$$
>
> *Ще използваме краткото обозначение $\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}$ за това отношение* ” (Jauch, Piron 1963: 831).

Тук "′" означава отрицание.

> *Детайлният анализ на това отношение показва, че то има точно свойствата, които биха се асоциирали с измервания, които могат да се изпълнят едновременно без да се смущават взаимно. Например, ако пропозициите се представят с проекционни оператори в хилбертово пространство, какъвто е случаят за обичайната квантова механика, то отношението (1) е еквивалентно със свойството, че проекциите комутират помежду си* (Jauch, Piron 1963: 831).

Възникват въпроси около физическия смисъл и философското и методологично тълкување на току-що въведеното понятие за съвместимост, респ. несъвместимост на пропозиции относно квантова система. *От една страна* е оригиналното тълкуване на авторите, според което съвместимостта не само на всички, но дори на кои и да е две свойства е в противоречие с концепта за уреда в стандартната интерпретация на квантовата механика, особено ясно артикулирана от Бор. Неясно също така остава как да се тълкуват явленията на сдвояване, т.е. как да се разбира думата „смущават", тъй като сдвояването след като ограничава степените на свобода също „смущава", но освен това под „смущение" може да се разбира и чисто физическо смущение.

Понятието за съвместимост е много по-тясно от фон Неймановата „едновременна разрешимост", респ. – макар и не точно – и от „едновременна измеримост". Поради това, от наличието на едновременно неизмерими величини или едновременно неразрешими пропозиции веднага следва съществуването на несъвместими. Оттук се обосновава твърдението на двамата автори, че техният резултат е усилване на теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри, доколкото използват по-слаба предпоставка, а именно за несъвместимост. Тоест, дори да се отхвърли като прекалено силно фон Неймановото предположение за адитивност на очакванията на две физически величини, както е формулирано и атакувано от Джон Бел и беше изложено по-горе, то скритите променливи все още могат да се отхвърлят изцяло и по принцип поради несъвместимост на неадитивно очакваните величини в съответствие с резултата на Яух и Пирон.

Остава тогава въпросът дали при явленията на сдвояване условието за съвместимост е изпълнено, доколкото при тях сумарното очакване за физическите величини е неадитивно. Това, което може да се каже е, че от неадитивността не следва несъвместимост, но също така не следва и съвместимост. Необходими са експериментални данни за неговото решаване по отношение на реалното положение. Полагането на аксиома 4° от двамата автори предрешава въпроса в полза на несъвместимост и оттук към изводимост за отсъствието на скрити параметри. Както вече видяхме обаче, Бел я атакува заради нейната неочевидност. Дискусията остава открита и може би *неразрешима* в един философски смисъл, вече многократно изясняван в първата книга. Въпреки това предстои едно детайлно вглеждане в проблема малко по-нататък.

От друга страна, би могло да се предложи малко по-различно тълкуване на понятието за съвместимост в сравнение с оригиналното, на самите автори. Всъщност чрез съвсем прости булеви преобразования се показва, че условието за съвместимост е еквивалентно на комутативност на дизюнкцията: $\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{a}$. Ясно е, че за една дистрибутивна решетка, той е винаги изпълнен. За предложената обобщена система от пропозиции, за която е в силата новата аксиома (P), обаче не е необходимо вярно и това личи от следния пример: нека $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ бъдат пропозиции за стойностите на две некомутиращи величини на една квантова система и нека обръщаме реда на измерване. Тъй като комутативността на дизюнкцията няма да бъде изпълнена и съответно условието за съвместимост, то $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ биха били несъвместими пропозиции.

В довода им обаче е налице решаващ критичен момент и това е тъкмо положеното като аксиома твърдение 4°. Действително, в нашия пример конюнкцията на двете пропозиции ще наруши съотношението за неопределеност, ако заради прегледност приемем двете некомутиращи величини да са съответно положение и импулс.

Какъв би бил тогава логическият статут на твърдение, произтичащ от техния начин на разсъждение, който за квантова система може да се перифразира така: от постулиране на нарушаване съотношението за неопределеност следва, че ако система пропозиции допуска скрити променливи, то всяка пропозиция от нея е съвместима с всяка друга? Наистина всяка пропозиция не е съвместима с всяка друга и от това следва, че не може да има скрити променливи. Но самият този извод произтича от невярна предпоставка, а именно допускащ контрапримера на нарушаване на съотношението за неопределеност, и следователно той като заключение може да е както истинен, така и неистинен по отношение на една квантова система. Оценката на резултата на Яух и Пирон зависи от тълкуването и в резултат на това от приемането или от отхвърлянето на аксиомата 4°.

Поради изложеното, терминът „усилване" спрямо теоремата на фон Нойман би изглеждал некоректен по отношение на една квантова система. Въпреки това техният подход би запазил своята ценност като известна насока на мисълта и ще продължим обсъждането на статията от философска гледна точка. Нещо повече, работата има несъмненото достойнство да фокусира същността на логическия и методологичния проблем при явленията на сдвояване, представен особено отчетливо в аргумента АПР, а именно образуване на конюнкция от едновременно неразрешими пропозиции и оттук поставяне като тема на въпроса за нейната законност.

Проблемът още повече се усложнява от това, че физическата интерпретация на подобна конюнкция се подкрепя от изглеждащата непоклатима универсалност на законите за запазване.

В настоящата работа и във връзка със съвременното развитие на дисциплината квантова механика и информация се поддържа по-различен подход като коректен изход от логическите трудности. Аксиома 4° е неприемлива. Тя постулира съвместяване на резултати от различни моменти във времето и в различни измервателни ситуации, включително и когато другият резултат вече не е или още не е валиден. Третираме същия проблем по следния начин: вместо конюнкция, която също така предполага съвместното съществуване на двата резултата като предикации и в логически план води до пряко противоречие, постулираме съществуването на чисти отношения, несводими до проста конюнкция от две или повече предикации. При условията на аксиома 4° не е обосновано да се постулира конюнкция от пропозициите, тъй като по определение не могат да бъдат налице едновременно и следователно изобщо не може дори да се постави въпросът за тяхната едновременна истинност, но може да се разглежда тяхното отношение, което се оказва в общия случай от принципно нов вид: чисто отношение, или с други думи „отношение само по себе си”, несводимо до конюнкция от предикации. То също така може да се разглежда и като времево отношение, тъй като свързва относими, които в общия случай могат да бъдат налични в различни, непресичащи или частично пресичащи се периоди от време. С този тип отношения се свързва физическата величина на квантовата информация, за разлика от всички други величини, които имат предикативен характер и имплицират даден момент от времето, по отношение на който е релевантно да се обсъжда истинността на съответните пропозиции.

По-нататък вместо дистрибутивния закон, валиден за булеви решетки в две дуални форми, а именно:

$$\boldsymbol{a} \cap (\boldsymbol{b} \cup \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}) \cup (\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{c}) \qquad (72)$$

(D)

$$\boldsymbol{a} \cup (\boldsymbol{b} \cap \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}) \cap (\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{c}) \qquad (73)$$

Двамата автори въвежда следната аксиома

(P) $$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b}\ \text{влече}\ \boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b} \tag{74}$$

> *Има теорема, че една решетка е дистрибутивна (т.е. това е решетка, която изпълнява (D)), ако и само ако всеки две пропозиции са съвместими. Тъй като (D) е емпирично противоречиво за квантови системи, то следователно, също така емпирично се установява, че за такива системи винаги съществуват пропозиции, които не са съвместими. Тази важна точка ще бъде съществена в аргумента да се представи установяване невъзможността за скрити променливи* (Jauch, Piron 1963: 831).

За нововъведения тип недистрибутивни решетки, чийто аксиоми се предполага да се изпълняват за всяка система пропозиции относно състоянието на квантова система и в която дистрибутивните закони (D) са заменени с по-слабата аксиома (P), те използват термина „обобщена система от пропозиции”.

Накратко характеризиращият я смисъл е следният: макар че това не е обичайна булева решетка от пропозиции, всяко нейно напълно наредено множество е такова. По-нататък обобщената вероятностна функция се различава от обичайната само по това, че е дефинирана не върху обичайна булева решетка, а върху обобщена система от пропозиции според въведеното по-горе определение.

Нека е дадена обобщената система от пропозиции $\wp$ за някоя квантова система. Тя няма структура на дистрибутивна решетка, но всяко нейно напълно наредено множество притежава тази структура според аксиомата (P), която замества дистрибутивните закони (D) и нека дадем прост пример за такава:

Нейната $\boldsymbol{n}$-та пропозиция $\boldsymbol{a_n}$ е: „$\boldsymbol{n}$-тият компонент на вектора на състоянието (еквивалентен на $\boldsymbol{\Psi}$-функцията на квантова система) има стойност $\boldsymbol{x_n}$” $(\boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{C})$. Очевидно тя би описала изчерпателно и точно система с тази $\boldsymbol{\Psi}$-функция. С други думи, обобщената вероятностна функция би била $\boldsymbol{w(a_n) = 1}$. Множеството $\{\mathbf{a_n}\}$ е изброимо (в стандартната интерпретация на квантовата механика се предполага, че съответното хилбертово пространство е с изброимо множество измерения). Ако съществуваше някакво $\boldsymbol{X}$, такова че $\boldsymbol{2^X} = \{\boldsymbol{a_n}\}$, то на $\boldsymbol{Y}$ щеше да може да се придаде структура на дистрибутивна решетка. Понеже последното не е вярно що се отнася до система от пропозиции за една квантова система, то следва, че такова множество $\boldsymbol{X}$ не съществува. Обичайната теория на множества, напр. аксиоматиката ZFC, не изисква (1) за всяко множество $\boldsymbol{Y}$ да съществува такова множество $\boldsymbol{X}$, щото $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{2^X}$. Иска се само обратното: за всяко множество $\boldsymbol{X}$ да съществува множество $\boldsymbol{Y}$, такова че $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{2^X}$. Нещо повече, твърдението (1) се намира в частично противоречие с аксиомата за фундирането, чийто груб смисъл е, че съществуват елементи, които сами не са множества – въпрос, подробно обсъждан в първата книга. Обратно, ако приемем законите за запазване и конструктивисткото „броене” самото множество $\{\mathbf{a_n}\}$ може да се нареди напълно (сега не обсъждаме въпроса дали това е добра наредба) и следователно $\wp$ да представлява дистрибутивна решетка, всеки две пропозиции да са съвместими в смисъла Яух и Пирон и поне на основание на наличието на несъвместими пропозиции да не може да се отхвърлят „скритите променливи”. Също така няма да се отрече на това основание съществуване на $\boldsymbol{X}$, такова че $\boldsymbol{2^X} = \{\boldsymbol{a_n}\!: \boldsymbol{a_n} \in \wp\}$.

По-нататък авторите дават точно определение на състояние върху пропозициите за една квантова система:

> *По този начин достигаме до следната дефиниция: състоянието $\boldsymbol{a}$ е функционал $\boldsymbol{w(a)}$, дефиниран върху пропозициите $\wp$ на една физическа система със следните свойства*:

$$\mathbf{(1)} \quad \mathbf{0} \le \boldsymbol{w(a)} \le \mathbf{1}$$

$$\mathbf{(2)} \quad \boldsymbol{w}(\emptyset) = \mathbf{0},\ \boldsymbol{w(I\,)} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{(3)} \quad \text{ако } \boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b}, \text{то } \boldsymbol{w(a)} + \boldsymbol{w(b)} = \boldsymbol{w(a \cap b)} + \boldsymbol{w(a \cup b)}$$

$$\mathbf{(4)} \quad \boldsymbol{w(a_i\,)} = \mathbf{1}, \text{то } \boldsymbol{w}(\textstyle\bigcap_i \boldsymbol{a_i}) = \mathbf{1} \tag{75}$$

$$\mathbf{(5)} \quad \boldsymbol{a} \neq \emptyset, \text{то съществува състояние } \boldsymbol{w}, \text{такова че } \boldsymbol{w(a)} \neq \mathbf{0}$$

(Jauch, Piron 1963: 833).

Нека по-нататък обсъдим на какво основание те въвеждат критичната – и както изрично подчертахме неприемлива за нас, впрочем както и за Джон Бел – аксиома 4°:

> *Известен коментар може би е уместен относно свойство (4). Ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са две пропозиции, такива че за определено състояние $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{b}) = \mathbf{1}$, то това значи, че измерването на $\boldsymbol{a}$ и на $\boldsymbol{b}$ ще даде със сигурност стойността $\mathbf{1}$. Аксиома (4) казва тогава, че пропозицията $\boldsymbol{a}$ 'и' $\boldsymbol{b}$ ще даде със сигурност стойността $\mathbf{1}$. Ако $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са съвместими, то това е лесно следствие от (3), тъй като тогава:*
>
> $$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{b}) = \mathbf{2} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{w}(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}). \qquad (76)$$
>
> *Следва, че $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}) = \mathbf{1}$. Оттук $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{a} \cup \boldsymbol{b}) = \mathbf{1}$. Оттук за обичайна вероятностна функция върху булева решетка отношението*
>
> $$(4)° \quad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{b}) = \mathbf{1} \text{ влече } \boldsymbol{w}(\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}) = \mathbf{1} \qquad (77)$$
>
> *е винаги изпълнено*" (Jauch, Piron 1963: 833).

От приведения начин на въвеждане става ясно, че чрез нейното постулиране, на обобщената система от пропозиции се придават свойства на обичайна булева решетка:

> *Обаче за обобщените вероятности такива, каквито са необходими за състоянията, (4)° е отделен постулат. Ако се изпълнява, може да бъде обобщен по индукция до всяка крайна система от пропозиции $\boldsymbol{a_i}$. Изискваме да е в сила за произволна безкрайна система. С това изискване изключваме функции, които не биха имали разумна физическа интерпретация. Този постулат преминава отвъд пряко физическо оправдаване, тъй като физическите наблюдения могат да се отнасят само до краен брой пропозиции* (Jauch, Piron 1963: 833).

В последния параграф (Jauch, Piron 1963: 835-836) се показва, че (4°) е необходима само за следствие 3 от доказаната теорема, което гласи:

> *Ако система от пропозиции ℘ допуска скрити променливи, тогава всяка пропозиция на ℘ е съвместима с всяка друга пропозиция на ℘*” (Jauch, Piron 1963: 835).

Би било добре да обобщим и съпоставим резултата на Яух и Пирон и този на фон Нойман, а също и критиката на Бел, както и такава, която може да се отправи на други основания; би трябвало да се изтъкне следното: докато предпоставката на фон Нойман, резюмирана като адитивност на очакванията, изисква съответните на величините оператори да са хипермаксимални – и следователно, линейни и ермитови – и всъщност, в едно и също хилбертово пространство, то тази на Яух и Пирон предполага по отношение на съответните пропозиции нещо аналогично: да се обсъждат в една и съща булева решетка. При това и проблемът, който възниква, е аналогичен и сходен с трудностите, предизвикали появата на концепцията за допълнителността. При подхода на фон Нойман *имплицитно* (тъй като работата е от 1932 г. и аргументът АПР още не е публикуван: това ще стане едва след три години) би се изисквало отъждествяване на хилбертови пространства, които по принцип не могат да бъдат едновременни, докато при този на Яух и Пирон – конюнкция на пропозиции в тях, които също не могат да бъдат едновременно дадени. От друга страна, концепцията на Бор постулира в този случай съответните величини – а и двата члена респ. на тъждеството или на конюнкцията – да се разглеждат като допълнителни.

Според нас коректното решение е в този случай да се разглежда особен тип отношение, несводимо към предикации, и кореспондираща физическа величина – квантова информация. Едва ли може да се приеме претенцията, че резултатът на двамата автори усилва този на фон Нойман. За да бъде последното вярно, трябва да е налице несъвместимост в техния смисъл и в случаи на „едновременна разрешимост”, използвайки термина на последния. Значението на резултата им по-скоро се свежда до логическо интерпретиране на този на фон Нойман, много любезно към *присъщото* на дуалистичното питагорейство *логико-физическо разглеждане*. Това позволява и прави коректни твърдения подобни на:

> *Тази теорема позволява редукцията на въпроса относно скрити променливи до емпиричен въпрос, а именно дали съществуват пропозиции, кои-*

> *то не са съвместими. Тъй като операциите вътре в една решетка имат физическа интерпретация, която е достъпна за емпирична верификация, то можем да решим въпроса чрез проверка на действителното поведение на определени пропозиции при наблюдение. За да се изключат скрити променливи е достатъчно да се покажат две пропозиции на физическа система, които не са съвместими* (Jauch, Piron 1963: 836-837).

Сходна е и критиката на Бел, че както при двамата автори, така и при фон Нойман се съдържа експериментално неадекватна, и то и в двата случая аналогична предпоставка.

Важно е и логическото определение, което те дават, за „бездисперсно състояние” (както видяхме, и самото понятие състояние се определи чрез изображение на „почти” булева решетка във вероятности, т.е. в числовия интервал $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$):

> *Величината $\boldsymbol{\sigma(a) = w(a) - w^2(a)}$ ще бъде наречена дисперсия на състоянието $\boldsymbol{w}$ за пропозицията $\boldsymbol{a}$. Състояние ще се нарича бездисперсно, ако $\boldsymbol{\sigma(a) = 0}$ за всички $\boldsymbol{a} \in \wp$. За такива едно състояние е или $\mathbf{0}$, или $\mathbf{1}$. Това означава, че всяка пропозиция е със сигурност или истинна, или неистинна* (Jauch, Piron 1963: 833).

При това положение лесно се вижда, че:

> *Ако $\boldsymbol{w_1}$ и $\boldsymbol{w_2}$ са две различни състояния, то съществува пропозиция $\boldsymbol{a} \in \wp$, такава че $\boldsymbol{w_1(a) \neq w_2(a)}$. За това $\mathbf{a}$ тогава имаме $\mathbf{0} < \boldsymbol{\lambda_1 w_1(a) + \lambda_2 w_2(a)} < 1$ за всеки $\boldsymbol{\lambda_1} > \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda_2} > 0$ и $\boldsymbol{\lambda_1 + \lambda_2} = \mathbf{1}$. Следва, че сместа $\boldsymbol{w = \lambda_1 w_1(a) + \lambda_2 w_2(a)}$ трябва да има дисперсия. Следователно сме доказали, че бездиспресното състояние е необходимо чисто. Обратното не е необходимо вярно* (Jauch, Piron 1963: 834).

Обратното, а именно съществуването на чисти състояния без дисперсия, както видяхме в първата книга, се показва още от фон Нойман.

Важно е да се отбележи и по-нататък ще се използва въведеното от двамата автори „приблизително бездисперсно състояние" или с други думи, възможността за съществуване на бездисперсни състояния като граници на редици от състояния с дисперсия, клоняща към нула:

Дори и да не съществуват бездисперсни състояния, е възможно да

> *съществуват системи пропозиции, които допускат* приблизително бездисперсни състояния*. Бихме могли например да имаме следната ситуация. Нека*
>
> $$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{a}) \tag{78}$$
>
> *да бъде функцията на дисперсия и да дефинираме общата дисперсия със* $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{sup}\, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})$ *за* $\boldsymbol{a} \in \wp$*. Ще казваме, че системата има приблизително бездисперсни състояния, ако съществува редица от състояния* $\boldsymbol{w_n}$*, такива че съответното* $\boldsymbol{\sigma_n} \rightarrow \boldsymbol{0}$ за $\boldsymbol{n} \rightarrow \infty$ (Jauch, Piron 1963: 837).

Да преминем с установената и много подходяща логико-физическа нагласа към работата на Глийсън в контекста на статията на Бел, която обсъжда хипотезата за отсъствие на скрити променливи в квантовата механика.

Понятието за вероятност следва тривиално от това за мярка, поради което нататък ще става думи само за мерки:

> *Да определим всички мерки върху затворените подпространства на едно хилбертово пространство. Мярка на затворени подпространства означава функция* $\boldsymbol{\mu}$*, която присъжда неотрицателно реално число, такова че ако* $\{\boldsymbol{A_i}\}$ *е изброима съвкупност от взаимно ортогонални подпространства, имащи затворена линейна обвивка* $\boldsymbol{B}$*, то:*
>
> $$\mu\, (B\,) = \sum \mu\, (A_i). \tag{79}$$
>
> *Лесно е да се види, че такава мярка може да се получи чрез избиране вектор* $\boldsymbol{v}$ *и за всяко затворено подпространство* $\boldsymbol{A}$*, взимайки* $\boldsymbol{\mu\, (A)}$ *като квадрата на нормата на проекцията на* $\boldsymbol{v}$ *върху* $\boldsymbol{A}$ (Gleason 1957: 885).

Идеята на Глийсън е всъщност да изясни обхвата на това наблюдение в максималната му общност, а именно че всяка (да я означим като $\boldsymbol{i}$-тата) от координатите на квадратите на нормата на проекцията на $\boldsymbol{v}$ върху $\boldsymbol{A}$ *най-много* може да се умножи с положителен реален коефициент $\boldsymbol{\lambda_i}$. С други думи, непосредственият математически смисъл и подтик на теоремата е да покаже, че *максималното възможно обобщение* на понятие за мярка за произволна съвкупност от подпространства на хилбертовото с размерност $\boldsymbol{3}$ и по-висока се състои в това и само в това, че то се описва от $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{1} \rightarrow \boldsymbol{\lambda_i}$, където $\boldsymbol{\lambda_i} \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\lambda_i} > 0$, т.е. в произволно мащабиране, запазващо не само направлението, но и посоката, на всеки от единичните вектори на хилбертовото пространство. Ако преминем отвъд това максимално обобщение, ще погубим адитивността на вероятността, или с други думи ако $\boldsymbol{f}$ е различна от посочената, вероятността необходимо ще бъде неадитивна. Ето го и с думите на Глийсън:

> *Положителната линейна комбинация на такива мерки води до повече примери и – в граничен преход – се оказва, че за всеки положителен полуопределен самоспрегнат оператор $\boldsymbol{T}$ от класа оператори със следа,*
>
> $$\boldsymbol{\mu(A) = \, trace\,(TP_A)}, \tag{80}$$
>
> *където $\boldsymbol{P_A}$ обозначава ортогоналната проекция върху $\boldsymbol{A}$, определя мярка върху затворените подпространства. Целта на тази статия е именно да покаже, че в сепарабелно хилбертово пространство с размерност поне три, независимо дали реално или комплексно, всяка мярка върху затворените подпространства се извежда по този начин* (Gleason 1957: 885).

Може да се добави, че нареденото множество $\{\boldsymbol{\lambda_i}\}$ е еквивалентно на положителен полуопределен самоспрегнат оператор със следа $\boldsymbol{T}$. Фактически основната част на статията е посветена на математически прецизното доказване на тази еквивалентност по отношение на функцията $\boldsymbol{1} \xrightarrow{f} \boldsymbol{\lambda_i}$, от която еквивалентност почти непосредствено следва основният резултат на работата, тъй като предвид пълната адитивност” е *съвсем очевидно, че мярката върху затворените подпространства на сепарабелно хилбертово пространство се определя от нейните стойности върху едноизмерните подпространства* (Gleason 1957: 885-886):

> *Това ни води към онова, което ще наречем фрейм функции*:
>
> ***Определение**. Фрейм функция с тегло $\boldsymbol{W}$ за сепарабелно хилбертово пространство $\mathcal{H}$ е функцията с реални стойности $\boldsymbol{f}$, определена върху (повърхността на) единична сфера на $\mathcal{H}$, такава че ако $\{\boldsymbol{x_i}\}$ е ортонормиран базис на $\mathcal{H}$, тогава*:
>
> $$\sum \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}) = \boldsymbol{W} \text{ (Gleason 1957: 885-886).} \qquad (81)$$

С други думи, въведената с термина „фрейм функция” е известно обобщение на нашата: $\mathbf{1} \xrightarrow{f} \boldsymbol{\lambda_i}$, при което $\boldsymbol{W} = \sum \boldsymbol{\lambda_i}$, но освен това се иска $\boldsymbol{f}$ да придобива стойност за всяка точка от повърхността на или от самата единична сфера.

> *Ако $\boldsymbol{S}$ е затворено подпространство, тогава всяка фрейм функция за $\mathcal{H}$ става такава за $\boldsymbol{S}$ по ограничение, при което теглото възможно се променя. Едноизмерно $\boldsymbol{S}$ ни води незабавно до следното наблюдение: Ако $\boldsymbol{f}$ е произволна фреймова функция и $|\boldsymbol{\lambda}| = \mathbf{1}$, то $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$* (Gleason 1957: 886).

Въвеждане на понятието „регулярна фрейм функция” е насочено да отдели следния клас на еквивалентност:

> *Фрейм функция е регулярна ако и само ако съществува самоспрегнат оператор, определен върху $\mathcal{H}$ такъв, че $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{Tx}, \boldsymbol{x})$ за всички единични вектори $\boldsymbol{x}$* (Gleason 1957: 886).

> *Нашата цел е да докажем, че всички фрейм функции са регулярни, поне с подходящи допълнителни хипотези* (Gleason 1957: 886).

Те се свеждат до това, че „всяка неотрицателна фрейм функция от три[143] или повече измерения е регулярна" (Gleason 1957: 886). И това е съдържанието на теорема 3.5 (Gleason 1957: 892) що се отнася до реални или комплексни хилбертови пространства.

Въз основа на нея се доказва основният резултат, теорема 4.1:

> *Нека* $\boldsymbol{\mu}$ *да е мярка върху затворените подпространства на сепарабелно (реално или комплексно) хилбертово пространство* $\mathcal{H}$ *с поне три измерения. Тогава съществува положителен полуопределен самоспрегнат оператор* $\boldsymbol{T}$ *от типа със следа, такъв че за всички затворени подпространства* $\boldsymbol{A}$ *на* $\mathcal{H}$
>
> $$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}), \tag{82}$$
>
> *където* $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}$ *е ортогоналната проекция на* $\mathcal{H}$ *върху* $\boldsymbol{A}$ (Gleason 1957: 892-893).

С това се изчерпва съдържанието на статията на Глийсън. В нея не става дума не само за онтологична, но дори за каквато и да било физическа интерпретация. Връзката ѝ не само с философията, но и с квантовата механика е *имплицитна*. Популярността ѝ е до известна степен предизвикана от разглежданото тук обсъждане от Джон Бел във връзка с неговите знаменити неравенства и фонНоймановата теорема за отсъствие на скрити параметри.

Нейният смисъл се тълкува въз основа на съществени допълнителни хипотези и резултати, по отношение на които теоремата на Глийсън сама по себе си е ирелевантна. Засега само ще изброим някои от тях, на които предстои да обърнем внимание по-нататък, за да се спрем обстойно непосредствено по-долу на връзката

---

[143] „При едно измерение е очевидно, че всяка фрейм функция е регулярна. При две измерения фрейм функция може да се дефинира произволно върху затворен квадрант на единичния кръг в реалния случай и аналогично в комплексния случай. При по-голям брой измерения ортонормалните множества се преплитат и има да се каже повече" (Gleason 1957: 886).

ѝ с теоремата за отсъствие на скрити параметри и чрез нея с нарушаването на неравенствата на Бел. Следва да споменем: обосноваване правилото на Борн[144], теоремата за представянето [representation theorem][145] и изображението на кюбит в „класически" бит[146].

Вече изложихме тълкуванието на Джон Бел, според което:

> *Релевантният извод от работата на Глийсън е: ако размерността на пространството на състоянията е по-голяма от две, изискването за адитивност на очакваните стойности на* комутиращи оператори *не може да се изпълни от бездисперсни състояния* (Bell 1966: 450).

Нашата интерпретация ще бъде свързана с разглеждането на квантова система, съставена от части. Тогава от изискването за адитивност на обща мярка спрямо мярката на частите и теоремата на Глийсън следва, че системата може да се разглежда като и само като линейна суперпозиция с реални коефициенти от своите части. Тъй като обаче при всички явления на сдвояване е налице член с ненулев коефициент от тензорното произведение на частите на квантовата система и следователно тя не е такава линейна суперпозиция на частите си, то тогава като следствие от теоремата на Глийсън не съществува адитивна обща мярка за частите и цялото, но не се изключва съществуването на неадитивна.

---

[144] Ако наблюдаема величина с ермитов оператор $\boldsymbol{A}$ с дискретен спектър в система с нормализирана $\boldsymbol{\Psi}$-функция се измерва, то резултатът ще бъде една от собствените стойности на $\boldsymbol{A}$, а нейната вероятност ще бъде $\langle\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{P_i}|\boldsymbol{\Psi}\rangle$, където $\boldsymbol{P_i}$ е проекцията върху собственото подпространство на $\boldsymbol{A}$, съответно на измерената стойност.

[145] Теоремата за представянето в квантовата логика показва, че всяко множество пропозиции за квантова система, затворено спрямо обединение на изброимо много независими събития образува решетка, която е изоморфна на решетката от подпространства на векторно пространство със скаларно произведение, каквото е хилбертовото.

[146] То е необходимо прекъснато, неговата същност е да се радели сфера на две части, съответни на „**0**" и на „**1**". Ако се постулира непрекъснато изображение, от това следва, че ще съществуват точки от сферата, за които твърдението, дали принадлежат на „**0**" и на „**1**", ще бъде неразрешимо. Ако обаче в разглеждането се включи и скулемовска относителност на дискретно и континуално, самото разграничение помежду им е неразрешимо и проблемът може да се приеме за „разрешен", от една страна, но от друга – че изобщо не може да се постави. Може да се екстраполира онтологично, разглеждайки кюбита като *съществуваща информация*, т.е. сама по себе си, а класическия бит – като *наше знание* за него. Така неразрешимите твърдения придобиват нова конотация.

Да разгледаме като едно цяло с адитивни части – хилбертово пространство. От току-що изложеното необходимо следва, че трябва да е „плоско”, или с други думи, отсъства дефазиране между компоненти на базиса на Ψ-функцията, за да бъде ортогонален. В такова пространство със сигурност теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри е валидна. Но тя е също така универсално валидна локално и за такова пространство, което няма ортогонален базис или при което в качеството на такъв се разглежда някой неортогонален базис, ако всяка малка в определен смисъл околност може да се представи чрез обичайно, „плоско” хилбертово пространство.

Би следвало ясно да се разграничи подходът на Джон Бел за очертаване валидността на теоремата за отсъствие на скрити параметри, при който това се извършва чрез имплицитни физически допускания, произтичащи от законите за запазване и преминаващи непосредствено от аргумента АПР, от собствено математическия, изхождащ от теоремата на Глийсън и може би по-релевантен към доказателството на фон Нойман: теоремата е валидна за „плоско” хилбертово пространство, при което и само при което изискването за адитивност на мярката може да се изпълни. Последният е по-общ и в по-голяма степен съответства на патоса на нашето изложение и на допускането, че законите за запазване могат да се нарушават и да представляват частни случаи на обобщаващ, универсален и неизвестен закон за запазване.

Все пак остава още една ненапълно изяснена точка: как и дали изобщо от теоремата на Глийсън *следва* в точния логически смисъл, използван в математиката, теоремата на фон Нойман за отсъствие на скрити параметри, а именно, че не съществуват бездисперсни състояния, но съществуват чисти. Първо, очевидно е, че бездисперсните състояния също могат да бъдат адитивни, т.е. от изискването за адитивност не следва отсъствие на бездисперсни състояния. Второ, обаче условието за адитивност на мерките и оттук на вероятностите участва съществено в резюмираните от Бел условия на фонНоймановата теорема като адитивност на очакванията на физически величини. Поради това теоремата на Глийсън дава на математически език границите на приложимост на теоремата на фон Нойман: ако системата не може да се представи линейна суперпозиция с реални коефициенти на своите части, очакването не е адитивно и оттук няма условия за приложение на теоремата на фон Нойман. Но от теоремата на Глийсън по никакъв начин не следва, че теоремата на фон Нойман е в сила, ако тези условия са в сила. Фактически тъкмо поради това е възможен примерът, който дава Джон Бел (Bell 1966: 451), макар и както сам го определя „твърде изкуствен”, за да покаже, как условията на теоремата на Глийсън са налице и тя се изпълнява, но въпреки това имаме скрити параметри, и то в класическия смисъл на термина. Както вече посочихме, това не може да е критика към Глийсън, тъй като той не свързва своя резултат в текста на статията не само с теоремата на фон Нойман, не само с хипотезата за скрити параметри, но и изобщо не го свързва с квантовата механика и нейния формализъм.

Може да се остане с впечатление, че в литературата връзката между теоремите на Глийсън и на фон Нойман е замъглена и дори понякога изопачавана. Също така обаче нищо не може да се твърди и за отсъствието или наличието на скрити параметри при неадитивност на мярката; това, което може да се каже убедително, би било единствено, че в този случай и при определени допълнителни условия евентуалното отсъствие на бездисперсни или наличието на чисти дисперсни състояния няма да е следствие от теоремата на фон Нойман.

Нека в заключение преминем към изводи от обсъждането на Джон Бел за теоремата на фон Нойман въз основа на сега разглежданата статия:

1. Теоремата има ограничена валидност в квантовата механика.

2. Сумарното условие за адитивност на очакването не се изпълнява при огромен клас явления, които понастоящем се предмет на дисциплината квантова информация.

3. Теоремата е винаги валидна само локално, за малък участък, в който хилбертовото пространство може да се разглежда като плоско, а квантовата система – като изолирана.

Наред с това, особено при обстойното обсъждане теоремата на фон Нойман в първата книга, се подчерта, че тя е винаги валидна *тотално*, доколкото всяка обхватна система, напр. вселената, имплицира приемане на предпоставката за своята изолираност.

В хода на изложението и във връзка с работите на Бом, на Яух и Пирон, както и на Глийсън възникнаха множество от идеи, хипотези и твърдения, които обаче не следва да се отнасят непосредствено към статията на Джон Бел от 1966 година, а по-скоро до контекста на настоящето изложение, при което имплицитно и в една или друга степен се има предвид цялото последвало развитие, довело и до възникването на квантовата информация като самостоятелна дисциплина.

Известно заключение е възможно и по отношение на предмета, който обсъжда статията на Бел от 1966 година, а именно оценката на теоремата на фон Нойман:

Мненията сред авторите обхващат изключително широк спектър. В единия край можем да разположим крайно негативни, едва ли не обидни квалификации, каквито са тези на Мермин (Mermin 1993: 805) и възможно на Джон Бел (пак там, цитирано от Мермин). След тях може да се постави обвинението на Грете Херман в кръговост на доказателството (Hermann 1935a: 2). После се намира посочването или предположението за скрита предпоставка в доказателството пак първоначално от Херман и по същество преоткрито и повторено от Джон Бел в статията, обсъждана сега тук. След тях се разполага оценката на Розингер за коректно математически, но неадекватно физически, поради невалидност в квантовата механика на предпоставката за неадитивност на очакванията[147]. В работата на Бачагалупи и Крул (Bacciagaluppi, Crull 2009) се противопоставят статичен подход и динамичен подход към отсъствието на скрити параметри и самата теорема на фон Нойман се отнася към първия. Критика на Херман е валидна по-скоро тъкмо за статичния аспект в противовес на динамичния, възможно изповядван от Хайзенберг и от самата Херман[148]. По-нататък в този условен спектър на оценките се нарежда подходът на

---

[147] Според този автор, макар че е коректно математически, доказателството на фон Нойман се основава на „допускане, което физически не е основателно". И той повтаря аргументите на Бел и още на Грете Херман, всъщност обаче обсъдени дори още от самия фон Нойман, за линейност (адитивност) на наблюдаемите (операторите) независимо от това дали те комутират или не. „Въпросът за комутативността обаче е от критично решаваща важност" (с. 8) – пише той, понеже според него, ако наблюдаемите не комутират, те не могат да се измерят едновременно и физическият смисъл на тяхната сума остава неясен. До голяма степен такова е общоприетото отношение, когато е критично, на „научния здрав разум" спрямо теоремата на фон Нойман, следвайки по-скоро Джон Бел, а също Шрьодингер и Паули, отколкото Хайзенберг (Bacciagaluppi, Crull 2009) или още по-малко, Грете Херман и нейните обвинения в кръговост на доказателството. Същият автор твърди: „Подобни аргументи се прилагат до две други добре известни математически теореми, а именно на Глийсън и на Кохен и Шпекер, които често се разбират като еднакво доказващи невъзможността на съществуването на „скрити променливи" в квантовата механика" (Rosinger 2004: 1). Такова прилагане, макар и заявено, напълно отсъства в текста на статията на Розингер.

[148] „В контраст, подходът на Хайзенберг е динамичен: според Хайзенберг, съществуването на скрити променливи в един момент ще разруши ефектите на интерференция в по-късни

Стьолцнер[149], при който – както и в настоящото изложение – се разграничава физическото разглеждане на Бел от по-скоро математическото на фон Нойман. Най-сетне

моменти и по този начин ще поражда конфликт с квантово-механичните предсказания. Хайзенберг е също така единственият автор по онова време, който (макар и накратко) обсъжда, че теориите със скрити променливи биха могли да бъдат контекстуални, в смисъла на съвместна зависимост на резултатите от измерването и от скритите променливи, и от контекста на измерване. Тези два аспекта могат добре да се свържат: зависимостта от контекста на измерване е динамична черта на теориите със скрити променливи и нейната възможност е била осъзната от Хайзенберг точно защото той мисли за теориите със скрити променливи в динамични термини, в термините на това как скрити променливи биха могли да породят или да не успеят да породят резултати от измервания, а не в термините на това как те биха могли абстрактно да определят стойности за всички квантово-механични наблюдаеми. Би могло да се размишлява по-нататък що се отнася до това, което Хайзенберг мисли за доказателството на фон Нойман и всички други аргументи, за които може да е знаел, и за това как неговият подход се различава от другите подходи. Наистина той вероятно е бил осведомен поне за доказателството на фон Нойман и критиката му от Херман и следва да се очаква, че е чувал непосредствено аргументите на Паули срещу скритите променливи (даже макар може би и като реакция на неговата чернова). Може би Хайзенберг е мислел, че неговият е достатъчно различен от този на фон Нойман (и другите), така че няма нужда да се безпокои за критиката от Херман. Наистина, изглежда, че за Хайзенберг, самото съществуване на скрити стойности за поне една наблюдаема, различни от измерената, гарантира противоречие с квантовата механика, без отношение на каквито и да било ограничения, поставяни на тези стойности. Хайзенберг може да е мислел, че критиката на Херман е напълно оправдана и че неговият подход е по-малко тривиален и повече в целта. Критиката от Херман на фон Нойман следва да се чете вътре в по-широкия контекст на нейната статия, в която тя самата се аргументира срещу възможността за скрити променливи, защото квантова механика е вече причинно пълна. Може би забележките на Хайзенберг към Херман в нейната чернова от 1935 г. са знак за много по-широко съгласие между неговия подход и нейния” (Bacciagaluppi, Crull 2009: 17-18).

[149] „Бел погрешно приема, че от аксиоматичния метод следва претенция за окончателност и поради това игнорира фон Неймановата строго прагматична позиция. Ако обаче се разгледа Хилбертовият аксиоматичен метод като критично начинание, теоремата на Бел подобрява фон Неймановата чрез дефиниране на по-адекватно понятие за ‘скрита променлива’, което позволява да се включи интерпретацията на Бом, която възстановява предсказващия характер на квантовата механика. Противно на убеждението на Бел, приемането на този модел не изисква възприемане на метафизичната реалистка картина на Бом. Ако се приеме последната като физическа изследователска програма, се вижда, че тя само отчасти обсъжда обща област от факти с математически ориентираната изследователска програма на фон Нойман” (Stöltzner 2002: 37). Още по-ясен и категоричен е в тезите на доклада, по който е написана изглежда впоследствие статията: „На първи (математически-мислещ) поглед теоремата на Бел може да изглежда като по-адекватно обобщение на фон Неймановата теорема за отсъствие на скрити параметри от 1932 г. Все пак собствената интерпретация на Бел е съвсем различна и тя продължава на две равнища. От една страна, фон Неймановата теорема е сметната като един най-изпъкващ крайъгълен камък на ортодоксалната интерпретация. Теорията на Бом със скрити параметри от 1952 г. и по-ранната теория на дьо Бройл с пилот-на вълна показват, че фон Неймановите допускания са прекалено ограничителни. Бел им дава контрапример. От друга страна, Бел отхвърля подхода на фон Нойман даже на методологично равнище като рецидив на априоризъм или „неоправдани закони на мисълта”. Една главна цел на приноса ми ще бъде да покаже, че това грубо погрешно интерпретира фон

е апологетичното, но твърдо дълбоко и съдържателно обсъждане на Дмитриев[150]. Ще завършим изложението като в по-големи подробности разгледаме позициите на Грете Херман и Дмитриев.

Изходна точка за нашето обсъждане ще бъде следният въпрос, който поставя Грете Херман: „каква ревизия на принципа на причинността от класическата физика” налага квантовата механика:

> *Два момента от предшестващото разглеждане са решаващи за отговора: границите на предсказващата изчислимост на бъдещи събития наистина се оказват да са по принцип непреодолими; все пак няма ход на събития, за който не би могло да се намерят причини в рамките на квантово-механичния формализъм* (Hermann 1935: 41-42*)[151].

Изчислимостта и причинността, по идеята на Грете Херман, трябва да се разделят: в квантовата механика са налице явления, които са причинно обусловени, но са неизчислими. Но заедно с това веднага може да се постави въпросът дали изчислимостта не може да се обобщи – както това се прави в понятието за квантов компютър, – и то по такъв начин, че да обхване причинното изменение на вероятността. Значи ли обаче това, че квантовият компютър ще може да предвиди, стойността, която *трябва* следователно в такъв случай да се окаже *с необходимост* измерена? Всъщност валидността на теоремата на фон Нойман би гарантирала, че това по принцип не може да случи: между изчислимостта и причинността има ясна граница и тяхното отъждествяване в макросвета е само приблизително; всъщност дори минимално несъвпадение в настоящето ще поражда лавинообразно раздалечаване на изчислимост и причинност. Също така следва да се постави въпросът докол-

---

Неймановото разбиране за аксиоматичен метод. Има даже ясни индикации, че фон Нойман оценява теорията на Бом като интересен модел, засягащ пренасяне на неговия собствен подход. Това би било още по-вярно за теоремата на Бел, защото тя показва, че фон Нойман надценява последствията от смекчаване на неговата втора аксиома на измерването върху предсказващото съдържание на квантовата теория. Тази интерпретация се подкрепя от различни аргументи, които Бел развива в контекста на своята теорема” (Stöltzner 2001).

[150] Той „представя логически и аналитичен анализ на теоремата на фон Нойман за невъзможността да се въведат скрити параметри в квантовата механика. Заключаваме, че схемата за доказателство на фон Нойман наистина (имплицитно) влече твърдението на теоремата” (Дмитриев 2005: 431).

[151] Страниците със звездичка – „*” – в изданието, означено като (Hermann 1935), са по превода на английски, посочен в списъка на цитираната литература.

ко или как е възможно познанието на „неизчислимите причини", всъщност една необятна и почти неизследвана територия. Двете положения – за всеобщата причинност и ограничената изчислимост – са противопоставени само привидно:

> *Двете изглежда да си противоречат. Докато първото твърди, че неизводими граници са установени за приложението на причинни изводи и за контрола на природата, предоставен на хората, второто подчертава по принцип неограничената приложимост на причинните представяния, на които всеки естествен процес е винаги подчинен по отношение на всички физически черти, които го характеризират* (Hermann 1935: 41-42*).

По тази начин изчислимостта може да се разглежда като „субективно представяне" на „обективната причинност". Тогава теоремата на фон Нойман би поставяла абсолютни граници между двете и оттук между „субекта" и „обекта". Склонен съм да мисля, че такава е собствено позицията и на Грете Херман: тя е по-скоро съгласна със съдържанието и изводите от теоремата, но не приема, че това следва и може да се направи по математически път, тъй като доказателството страда от кръговост; според нея, може да се помисли, това би трябвало да е философска позиция, която се предпоставя и така всъщност е постъпил и фон Нойман, тъй като това, което се иска да се докаже – а именно че „елементите на съвкупност от физически системи, характеризирани чрез $\boldsymbol{\phi}$, не може да има никакви различаващи се характеристики, от които да зависи резултатът за $\mathfrak{R}$" – е прието предварително в перифразиран вид:

> *Интерпретацията на израза* $(\boldsymbol{R\phi};\ \boldsymbol{\phi})$ *е критична за цялото доказателство. Гледната точка, която то представя е, че очакваната стойност на величината* $\boldsymbol{R}$ *за системата в състояния* $\boldsymbol{\phi}$ *възлиза – както се показва от формализма – на същото нещо както вероятностната интерпретация на вълновата функция. Следователно разглежданията, отнасяни към тази интерпретация, могат да се използват без каквото и да е по-нататъшно доразработване: преди доказателството за невъзможността за нови характеристики да е намерено, което все още следва да се даде тук, изразът* $(\boldsymbol{R\phi};\ \boldsymbol{\phi})$ *може да бъде приет единствено да изразява очакваната стойност*

на $\mathfrak{R}$-измерването на съвкупности от физически системи, които се изисква да бъдат *в състояние $\boldsymbol{\phi}$; трябва да остане открит въпрос, така че да продължава да е приложим, дали тази очаквана стойност е същата във всички подсъвкупности, които могат да бъдат разграничени чрез произволни нови характеристики. Ако това наистина остане открито, то повече не може да се извежда от правилото за сума, което важи за $(\boldsymbol{R\phi}; \boldsymbol{\phi})$, че също така в тези подсъвкупности очакваната стойност на сумата от физически величини е равна на сумата от очакваните стойности. Но с тази необходима стъпка доказателството на фон Нойман претърпява крах. Ако някой – точно като фон Нойман – не се откаже от тази стъпка, то мълчаливо се е допуснало недоказаното предположение, че елементите на съвкупност от физически системи, характеризирани чрез $\boldsymbol{\phi}$, не могат да имат никакви разграничени характеристики, от които да зависи резултатът за $\mathfrak{R}$. Невъзможността за такива характеристики е тъкмо тезата за доказване. Доказателството следователно се натъква на кръговост* (Hermann 1935a: 2).

Нека разделим обсъждането на този дълъг цитат от Грете Херман, който съдържа съществената обосновка на нейната теза на две части: (1) по отношение на самата теорема на фон Нойман; (2) по отношение на критиката срещу теоремата около тридесет години по-късно от Джон Бел в контекста на неговите неравенствата.

Същността на възражението е, че предпоставената адитивност на очакванията всъщност е равносилна на отсъствието на скрити параметри: ако има скрити параметри, очакванията няма да може в общия случай просто да се сумират.

Първо, всяко математическо доказателство, разбира се, е аналитично: то показва, как изводът се съдържа в предпоставките; обикновено това не е очевидно и в разкриването на тази очевидност в крайна сметка се състои смисълът на доказателството: от такава гледна точка, всяко математическо доказателство е в една или друга степен „кръгово”.

Въпросът, който е съществен в аргумента на Грете Херман, е как се съотнася адитивността на очакванията с наличието на скрит параметър. Ако очакването е подадитивно, то може да се предположи непразно сечение от очаквания и на него тривиално може да се припише функцията на скрит параметър, който обаче обуславя също и други от останалите причини. Ако очакването е нададитивно, то недостигащото очакване безболезнено се приписва на скрит параметър. Остава единствено именно адитивност.

Самата Грете Херман обаче достатъчно коректно представя контрааргумента срещу собствения довод:

> *Обаче от гледната точка на фон Неймановото изчисление може да се възрази срещу това, че в неговото изчисление всички физически величини, по аксиома, се изисква да съответстват на определени ермитови оператори върху едно хилбертово пространство и че това съответствие неизбежно ще бъде прекъснато от откриването на нови характеристики, които премахват текущите граници на предсказуемост* (Hermann 1935a: 2-3).

Фон Нойман е приел за даден математическия формализъм на квантовата механика, при който физически величини могат да се съпоставят само на ермитови оператори и тъкмо от това следва адитивност на очакванията и респ. отсъствие на скрити параметри. Срещу това вече от собствена позиция Грете Херман възразява следното: „по никакъв начин не е възможно да се превърне *физическият* въпрос дали продължаващо физическо изследване може да доведе до по-точни предсказания, отколкото текущо възможните, в изобщо не еквивалентния *математически* въпрос дали такова откритие може да бъде представено, използвайки сечивата на квантово-механичното операторно изчисление. Едно заключително физическо обосноваване е необходимо, когато не само досега известните физически данни, но също всички бъдещи изследователски резултати трябва да се свържат в съответствие с аксиомите на този формализъм. Как може такова обосноваване да се намери? От това, че формализмът е текущо верифициран, така че е законно да се види като правилно математическо описание на известната съгласуваност на природата, не следва, че също и досега неоткритата законоподобна съгласуваност трябва да има същата математическа структура" (Hermann 1935a: 2-3).

Но с това фон Нойман всъщност предварително и изрично се е съгласил:

> *Въпреки че квантовата механика блестящо се съгласува с опита и ни е открила перспективата към една качествено нова страна на света, все пак*

не може никога за една теория да се каже, че тя е доказана чрез опита, а само че е най-доброто известно обобщение на същия (Neumann 1932: 172).

Въз основа на изложеното – и такова е общоприетото мнение – можем да заключим, че доказателството на фон Нойман не е кръгово. Като всяко математическо доказателство, а то безусловно е тъкмо такова, то не обсъжда и не се изисква да обсъжда онтологичния въпрос за съответствието на самия формализъм с физическата реалност, толкова повече с все още неизвестната и неоткритата.

Второ, обаче разглеждането на Джон Бел, особено в контекста на неговите неравенства, ни дават основание да се върнем към собствено философския патос на критиката на Херман: т.е. не дали тогава (а и сега) използваният математически формализъм на квантовата механика допуска скрити параметри – не допуска, – а дали те реално съществуват, ако бъдат допълнително дефинирани по един или друг начин, различен от класическия.

За „скрити параметри" от некласически тип можем да говорим само в случая на „нададитивност" на очакванията. В този случай възниква подобен на причинен ефект, произтичащ от цялото, от системата. Разбира се, това излиза далеч извън приемливото в сравнение с класическото въвеждане на скрити параметри: винаги в този последен случай се предполага, че параметрите, било то скрити, или явни, произлизат от самия обект и са напълно независими от възможно различните системи (светове), в които участва той: и в този смисъл обектът остава един и същ във всеки един от тях. Напротив, в квантовата механика обектът „сам по себе си" се описва чрез Ψ-функцията, която все едно го представя във всеки един възможен свят. Ако фиксираме света (системата, контекста) – но поне засега не ни е известен друг начин да вършим това освен като осъществим измерване, което чрез уреда осъществява това фиксиране, – то некласическият и нелокален „скрит параметър" на „света" доопределя резултата до пълна еднозначност.

Ако се върнем към терминологията, използвана от Грете Херман, „изчислимостта"[152] съответства на класическата локална причинност, докато причин-

---

[152] Понятието за „изчислимост" се използва от Херман – поне според цитираните текстове – по-скоро интуитивно, в смисъла може би на „Лапласовия демон". С оглед на обсъждането на квантовия компютър ще се позволим известно доуточняване на „изчислимост" в контекста на причинност: настъпването на едно събитие е тюрингово изчислимо, ако неговото настъпване може да се предскаже преди реалното му случване, използвайки машина на Тюринг.

ността в нейния смисъл е общата – локална и нелокална – причинност. От такава гледна точка подходът ѝ и този на фон Нойман могат да се обединят в онтологично отношение: квантовият обект не е напълно локално причинно определен, *той винаги се описва с дисперсия,* ***т.е. в повече от един свят***; това обаче не пречи нелокално, т.е. чрез контекста на света (уреда) да може да се до-определи причинно напълно.

Но е възможен и подход, при който общият случай на разглеждане е представен от фон Нойман: вселената като цяло обхваща всички възможни светове, а неговият резултат означава, че няма такова нещо, което да съществува в един единствен свят и следователно причинно да предопределя напълно своята система, цялост, контекст (т.е. те трябва да продължат да удовлетворяват критерия на Бел за „свободната воля”), в крайна сметка, своята действителност: последната възниква от вписването му сред останалите неща. Доколкото вселената по определение се мисли като единствена и универсална, по отношение на която няма обхващащи система, цялост, контекст, то и именно подходът на фон Нойман се оказва, че е универсалният.

На равнище вселена, видяна като съвкупността от всички възможни светове, няма начин да се осъществи избор, така че на един от световете да може да се закачи етикета „действителен”: изчерпателното описание е тъкмо чрез ***Ψ***-функцията, която описва нещото по отношение на всички възможни светове, с други думи – на всички уреди или дори „субекти”. Но „световете” са само една „патерица на нàгледа”, за да можем да си представим преобразуването от физическо (действително) в математическо (възможно) и да набележим твърде необикновената за нас хората гледна точка, при която възможното или математическото обхващат действителното или физическото: първото е общото и универсално, докато второто – частно и единично (след избора).

От направеното разглеждане се вижда, че Джон фон Нойман и Грете Херман символизират две противоположни позиции по отношение на възможното: от гледна точка на математиката действителното и физическото се получават чрез

Ако става дума за експериментално събитие, достатъчно е машината на Тюринг да дава резултат за произволно крайно време. Същественият проблем с тюринговата изчислимост възниква при реално събитие, при което машината на Тюринг трябва да завърши работа за *фиксирано* крайно време. Дали съществува принципно ограничение – абсолютно или относително – за минималната продължителност на една нейна операция?

„снизхождане” т.е. чрез обедняване на универсалното, обаче от стандартната позиция действителното се получава чрез доопределяне на *„само”* възможното: всъщност става дума за едно и също движение или двуместно отношение, но видяно от всяко едно от относимите. Появява се и проблемът за вторичното отношение (не непременно такова на тъждественост) между отношението и „отношението-конверс” с терминологията на Ръсел. Доколкото няма основание за избор между двете позиции, тъкмо и се използва в настоящата работа терминът *дуалистично* питагорейство, който вече – на основата на дуализма между физическо и математическо – се обогатява и с такъв между действително и необходимо: първото се съотнася с избора на точно един или на поне един свят (и със съответния квантор), а второто – с всички възможни светове (и съответния квантор). Само ако един единствен свят е фаворизиран „идеологически”, т.е. необосновано е приет за универсален, е възможен специалният случай на тъждество на действително и необходимо.

Както вселената, поради своята единственост, така и микрообектът „сам по себе си”, поради своята изолираност, се описват чрез $\boldsymbol{\Psi}$-функция. Нещо повече, напълно в духа на Николай от Куза можем да ги приемем за тъждествени или за едно и същото такова: тогава понятието за информация онтологично е призвано да опише отношението и движението на възможност между „два свята”, и то при това в строга количествена връзка с действителното, материалното във всеки един от тях, не непременно изключващо избирани като отправна гледна точка: явленията на сдвояване описват именно този преход между действителността и възможността или между действителностите.

След подобно разглеждане вече може да се премине и просто да се обясни гледната точка на Дмитриев, чийто възглед би могъл първоначално да изненада:

> *Тоест теоремата на фон Нойман не съдържа нищо повече освен това обстоятелство, че в квантовата механика се налага да се разглеждат поне два некомутиращи оператора, нямащи общ собствен вектор; обстоятелство, което смятаме за добре известно. Не че теоремата на фон Нойман е безсъдържателна, но тя е по-проста, отколкото много смятат* (Дмитриев 2005: 435).

Това става бързо очевидно, ако теоремата – въпреки че самата тя е формулирана в термините на формализъм с хилбертови пространства – бъде интерпретирана във фазовото пространство чрез функцията на Вигнер и квази-вероятностните разпределения (включващи и отрицателни вероятности[153]) и чрез статистическото и термодинамично (разбира се, обобщено спрямо класическото) разглеждане на Моял. Тогава $\boldsymbol{\Psi}$-функцията вече се тълкува като статистическа съвкупност, обаче не от действителни, а от възможни обекти:

> *Обичайната интерпретация на квантовата механика може очевидно да се излага по следния начин. Частиците (да кажем, в нерелативистката квантова механика) имат напълно определени положения и импулси, но освен това имат някакви скрити параметри или координати, които не се описват от квантовата механика (някакви фази). Квантовата механика описва само вероятности за намиране на частицата в едно или друго място, с един или друг импулс, осреднени или равновесни по скритите параметри-фази. Именно заради това, че тези разпределения на вероятностите са в някакъв смисъл равновесни, уравненията за тях могат да бъдат обратими подобно на обратимите процеси в термодинамиката. … Принципът на неопределеността не следва да твърди, че частицата не може да има определени координати и импулс. Достатъчно е да се каже, че квантовата механика може да смята еволюцията не на всякакви разпределения на вероятностите и импулса, а само на някакъв клас разпределения, в известен смисъл равновесни, и в този клас е валиден принципът на неопределеността. Всички качествени разсъждения и мислени експерименти, доказващи принципа на неопределеността не губят смисъл, а само малко го изменят. Сега служат за доказателство, че всички обичайни опити можем без голяма грешка да ограничим до равновесни разпределения (по скрити параметри)* (Дмитриев 2005: 436).

Какъв е физическият и онтологичният смисъл на преходите – самите те в общия случай неравновесни – между равновесните състояния, описвани от уравнението на Шрьодингер и формализма на „класическата” квантова механика?

---

[153] Двузначните – положителни и отрицателни – вероятности се налагат, тъй като от един „само” възможен свят са възможни движения както по посока на увеличаване, така и по посока на намаляване на вероятността (докато от един действителен – възможното движение е само по посока на намаляване на вероятността).

По начина на разглеждане, предложен от Дмитриев, теоремата на фон Нойман не е невалидна в областта на едновременно неизмеримите физически величини, а тъкмо напротив – следва от наличието[154] им в квантовата механика. Вече разполагаме с достатъчна основа, за да изкажем хипотеза за точния количествен израз на параметрите, наричани скрити и с необходимо нелокален характер, както и за това при каква идеализация, приемана от фон Нойман и от цялата „класическа" квантова механика, такива отсъстват. В случая „идеализация" – както впрочем и в дуалистичното питагорейство изобщо – може да се разбира не само като отклонение и приближение спрямо физическата реалност, но и като и като по-адекватно представяне на втората, собствено математическа страна на тоталността, от която материалният свят е само единият аспект (или дори само един от множество аспекти).

Съотношението за неопределеност, което при разглеждането на Дмитриев, влече отсъствието на бездисперсни величини в квантовата механика, всъщност именно и оставя неопределено отношението $\frac{\Delta p}{\Delta x}$, чиято размерност е $\left[\frac{m}{t}\right]$, и чийто физически смисъл[155] е скорост на самия процес на измерване – като

---

[154] „Можем да преразгледаме изходните изисквания на фон Нойман. Да се откажем от условие 2, че на *всеки* хипермаксимален оператор отговаря физическа величина [за която се изисква бездиперсност]. Да отхвърлим дори изискването [„Целесъобразно е да се допусне, че и обратно, на всеки хипермаксимален ермитов оператор съответства физическа величина" (Дмитриев 2005: 431)], за произволна физическа величина. Все едно докато го запазим поне за операторите на координатите и импулса, т.е. смятаме, че на бездисперсните състояния за координатите и импулса отговарят собствени вектори на съответните оператори, т.е. координатата има определена стойност, ако вълновата функция е делта функцията, а в импулсното пространство са плоски вълни, то по същество твърдението на фон Нойман остава в сила" (Дмитриев 2005: 435). С други думи, теоремата на фон Нойман следва от самия фундамент на квантовата механика, от съществуването на квант на действие и на съотношенията за неопределеност, то възможността и необходимостта на дискретното разглеждане. Доколкото дискретното разглеждане е по скулемовски относително спрямо континуалното, то и теоремата на фон Нойман описва винаги само едната страна на действителността, обаче именно тази, която е превърнала в свой предмет квантова механика и именно по отношение на формализма на която той я доказва.

[155] Но това не е единственият физически смисъл, който може да се потърси. Друг такъв е на функция от произведението на енергията на средата, произтичаща от нейната маса, и енергията на обекта, поради съдържащата се в него информация и пропорционална на честотата на приписаната му вълна на дьо Бройл. Такова тълкувание вече подчертава някакъв предполагаем механизъм, по който информацията в обекта взаимодейства със средата по материален начин: „изборът на свят", т.е. нелокалният „скрит параметър" се определя по различен, но може би еквивалентен начин от обекта и от средата (уреда). Заедно с това – т.е. по другото тълкувание за физическия смисъл на отношението $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ – измерването е процес, протичащ

изменението масата на частта от прибора, включена реално в процеса на измерване, за единица време. Респективно може да се разглежда $\frac{\boldsymbol{\Delta p}}{\boldsymbol{\Delta x}}(\boldsymbol{v^2}) = \frac{\boldsymbol{\Delta E}}{\boldsymbol{\Delta\, t}}$: с това би се фиксирала отправна система със скорост $\boldsymbol{v}$, би се постулиралото самото съществуване на скоростта в обичайния за класическата физика смисъл на $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}$ и би се поставил въпросът за всеобщност или ограничения за лоренцовата инвариантност (ако $\frac{\boldsymbol{\Delta p}}{\boldsymbol{\Delta x}}(\boldsymbol{v^2}) \neq \frac{\Delta \boldsymbol{E}}{\Delta\, \boldsymbol{t}}$, също и когато $\boldsymbol{v}$ в смисъла на $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}$ не може да се определи, т.е. движението в пространството не може да се опише като дифеоморфизъм). Тук само „в скоби", а нататък подробно, може да се отбележи, че обичайното движение в пространството и измерването са в редица отношения подобни, дори движението може да се разгледа като измерване от идеален уред, т.е. такъв за който е изпълнено: $\frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{const}$.

С други думи, става дума за „магическата" мигновена редукция на вълновия пакет в процеса на измерване от „класическата" квантова механика и от фон Наймановата теория на измерването. Ако запазим изискването физическите величини да са ермитови оператори и поради неговата връзка с лоренцовата инвариантност от специалната теория на относителността, то с това закриваме възможността за изследване на процеса на измерване (а философски казано – на взаимодействието на материален обект и познаващ субект) като реален физически процес, тъй като при него операторите в хилбертовото пространство, които му съответстват, в общия случай са необходимо неермитови, а самият той не е лоренцово инвариантен. Можем да мислим и така: от гледна точка на лоренцовата инвариантност и постулата за ненадвишаване на скоростта на светлината във вакуум, нарушаването им протича *обобщено само с една скорост*, наричана безкрайна, понеже трябва – поне понякога – да е по-голяма от светлинната.

Не бива обаче да се мисли, че тъкмо току-що изложената позиция е истинната. В качеството на „математически процес" – такъв е напр. разгледания в

във времето и поради това винаги има дисперсия; по настоящето тълкувание отсъствието на дисперсия означава, че няма обект, който да е само в един единствен свят. Оттук се вижда, че разликата в двете интерпретация е „скулемовска": дали процесът на измерване (респ. теоремата на фон Нойман) се обсъжда континуално или дискретно във времето, дали се допуска или не пермутация на последователността на моментите.

първата книга процес на трансфинитна редукция – редукцията на вълновия пакет необходимо трябва да „протича” с безкрайна скорост, за да приключи за крайно време, тъй като се изисква да се премине от кохерентно състояние, математически (при „скулемовско” разглеждане) еквивалентно на безкрайност, към декохерентно, еквивалентно на крайност. С достатъчна философска и методологическа широта погледнато, въпросът за крайната (физическа) или безкрайната (математическа) скорост на редукция на вълновия пакет, респ. на измерването, е нов ипостас на скулемовска относителност.

Реалният физически процес на измерване не е равновесен. Обратно: на поставения по горе въпрос – „Какъв е физическият и онтологическият смисъл на преходите – самите те в общия случай неравновесни – между равновесните състояния, описвани от уравнението на Шрьодингер и формализма на „класическата” квантова механика?” – можем да отговорим вече, че това е измерването, разбрано в много широк смисъл: като съгласуване между действителността, напр. като процеса на промяна на цялата система, при изменение в нейна част, така че тя да се съхрани като цялост. ***Реалният математически процес на измерване*** *обаче винаги е равновесен*.

ЛИТЕРАТУРА

Adami, C., N. Cerf. 1999. What Information Theory Can Tell Us About Quantum Reality. – In: *Quantum computing and quantum communications*. Berlin: Springer.

Antoine, J.-P. 1998. Quantum Mechanics Beyond Hilbert Space. – In: *Irreversibilty and Causality. Semigroups and Rigged Hilbert Spaces* (eds. A. Bohm, H.-D. Doebner, P. Kielanowski). Berlin, etc.: Springer, 3-33.

Aspect, A., R.Grangier, and G. Roger. 1981. Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem. – *Physical Review Letters*. Vol. 47, № 7, 460-463.

Aspect, A., R.Grangier, and G. Roger. 1982. Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedanken Experiment: A New Violation of Bell's Inequalities. – *Physical Review Letters*. Vol. 49, № 2, 91-94.

Bacciagaluppi, G., E. Crull. Heisenberg (and Schrödinger, and Pauli) on Hidden Variables – http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00004759/01/SHPMP_paper_07_10_09.pdf .

Bell, J. 1964. On the Einstein – Podolsky – Rosen paradox. – *Physics* (New York), 1, 195-200. (Bell, J. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: collected papers in quantum mechanics*. Cambridge: University Press, 1987, 14-21).

Bell, J. 1966. On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics. – Reviews of Modern Physics. Vol. 38, No 3 (July), 447-452. (Bell, J. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: collected papers in quantum mechanics*. Cambridge: University Press, 1987, 1-13.)

Bell, J. 1971. Introduction to the hidden-variable question. – In: *Foundations of Quantum Mechanics*. Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi', course IL, New York, Academic, 171-181. (Bell, J. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: collected papers in quantum mechanics*. Cambridge: University Press, 1987, 29-39).

Bell, J. 1973. Subject and object. – In: *The Physicist's Conception of Nature*. Dordrecht-Holland, D. Reidel, 687-690. (Bell, J. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*: collected papers in quantum mechanics. Cambridge: University Press, 1987, 40-44).

Bell, J. 1975. Locality in quantum mechanics: reply to critics. – *Epistemological Letters* (Nov 1975), 2-6. (Bell, J. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*: collected papers in quantum mechanics. Cambridge: University Press, 1987,63-66).

Bell, J. 1975. The theory of local beables. – TH-2053-CERN, 1975 July 28. Presented at the Sixth GIFT Seminar, Jaca, 2-7 June 1975, and reproduced in Epistemological Letters, March 1976. (Bell, J. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*: collected papers in quantum mechanics. Cambridge: University Press, 1987, 52-62)

Bell, J. 1977. Free variables and local causality. – *Epistemological Letters*. Feb. 1977. (Bell, J. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*: collected papers in quantum mechanics. Cambridge: University Press, 1987, 100-104).

Bennett, C., D. DiVincenzo, C. Fuchs, T. Mor, E. Rains, P. Shor, J. Smolin, and W. Wooters. 1999. Quantum nonlocality without entanglement. – *Physical Review A*. Vol. 59, № 2, 1070(22).

Bennett, J., G. Brassard, C. Crepéau, R.Jozsa, A.Peres, W. Wooters. 1993. Teleporting an Unknoun State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. – *Physical Review Letters*. Vol. 70, № 2, 1895-1899.

Blatter, G. 2000. Schrödinger's cat is now fat. – *Nature*. Vol. 406, 25-26.

Bohm, D. 1952. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of „Hidden" Variables. I. – *Physical Review*. Vol. 85, No 2, 166-179.

Bohm, D. 1952. A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of „Hidden" Variables. II. – *Physical Review*. Vol. 85, No 2, 180-193.

Bohm, D., B. Hiley. 1993. *The undivided universe: an ontological interpretation of quantum theory*. London: Routledge.

Bohr, N. 1928. The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory *(Nature* (Suppl.) Vol. 121, 580-590). – In: *Atomic Theory and the Description of Nature.* Cambridge: Cambridge University Press, 1934, 52-91.

Bohr, N. 1935. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? – *Physical Review*. Vol. 48 (15 Oct 1935), 696-702 (Н. Бор. 1936. Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным? – *Успехи физических наук*. Т. XVI, № 4, 446-457 – http://ufn.ru/ufn36/ufn36_4/Russian/r364_b.pdf).

Bohr, N. 1957. Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics. – In: *Albert Einstein: Philosopher – Scientist* (ed. P. Schlipp). New York: Tudor Publishing Co, 199-242. – http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/dk/bohr.htm

Bohr, N. 1984. *Collected works* (ed. E. Rüdinger). Vol. 5. The emergency of quantum mechanics (*Mainly 1924 – 1926*) (ed. vol. K. Stolzenberg). Amsterdam – New York – Oxford – Tokyo, North-Holland Physics Publishing – Elsevier Science Publishers B.V.

Bohr, N., H. Kramers, J. Slater. 1924. *The quantum Theory of Radiation* (With H. Kramers and J. Slater). – Philosophical Magazine. Vol. 47. 785-800. (Re-print: N. Bohr. *Collected works* (ed. E. Rüdinger). Vol. 5. The emergency of quantum mechanics (*Mainly 1924 – 1926*) (ed. vol. K. Stolzenberg. Amsterdam – New York – Oxford – Tokyo, North-Holland Physics Publishing – Elsevier Science Publishers B.V., 1984, 101–118; Н. Бор. Квантовая теория излучения (*Совместно с Г. Крамерсом и Дж. Слетером*). – В: Н. Бор. *Избранные научные труды*. Т. 1. Москва: „Наука”, 1979, 526-541; първоначална публикация също така: N. Bohr, H. Kramers, J. Slater. Über die Quantentheorie der Strahlung. – *Zeitschrift der Physik*. B. **24** (1924) 69.

Born, M. 1926. Zur Quantenmechanik der Stoβvorgänge. – *Zeitschrift für Physik*. Bd. 37, S. 863-867 – http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/QM/born_zp_37_863_26.pdf ; (Quantenmechanik der Stoβvorgänge) Bd. 38, S. 803-827.

Born, M. 1926. Zur Wellenmechanik der Stoβvorgänge. – *Göttinger Nachrichten,* 146-160.

Born, M. 1927. Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik. – *Zeitschrift für Physik*. Bd. 40, 3-4, 167-192.

Born, M. 1927. Physical aspects of quantum mechanics. – *Nature*. Vol. 119 (5 March 1927), 354-357.

Born, M. 1954. The statistical interpretation of quantum Mechanics (*Nobel Lecture, December 11, 1954*). – http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1954/born-lecture.pdf .

Born, M, V. Fock. 1928. Beweis der Adiabatensatzes. – *Zeitschrift für Physik*. Bd. 51, No 3-4, 165-180.

Bratteli, O., D. Robinson. 1979. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1. C*- and W*-Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States*. New York – Heidelberg – Berlin: Springer Verlag. (Браттели, У., Д. Робинсон. 1982. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. C*- и W*-алгебри. Группы симметрии. Разложение состояний*. Москва: «Мир».)

Cabello, A. 1999. Quantum correlations are not local elements of reality. – *Physical Review A*. Vol. 59, № 1, 113(3).

Cachro, J. 2001. Minimalist Interpretations of Bell's Theorem – http://confer.uj.edu.pl/bell.workshop/doc/cachro.pdf .

Casado, C. 2008. A brief history of the mathematical equivalence between the two quantum mechanics. – Latin American Journal of Physics Education, Vol. 2, No 2, 152-155.

Caves, C., C. Fuchs, R. Schack. 2002. Quantum probabilities as Bayesian probabilities. – *Physical Review A*. Vol. 65, No 2, 022305-022310 – arXiv:quant-ph/0106133v2 14 Nov 2001 .

Clauser, J., M. Horne, A. Shimony, R. Holt. 1969. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. – *Physical Review Letters*. Vol. 23, № 15, 880-884.

Clauser, J., M. Horne. 1974. Experimental consequences of objective local theories. – *Physical Review D*, Vol. 10, 526-535.

Cohen, P. 1963. The Independence of the Continuum Hypothesis. – *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. Vol. 50, No 6, (15 December) 1143-1148.

Cohen, P. 1964. The Independence of the Continuum Hypothesis, II. – *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. Vol. 51, No 1 (15 January, 1964), 105–110.

Connes, A. 1995. Noncommutative geometry and reality. – *Journal of Mathematical Physics*. Vol. 38, N 11, 6194-6231 (http://www.alainconnes.org/en/downloads.php).

Conway, J., S. Kochen. 2006. The Free Will Theorem. – http://arxiv.org/abs/quant-ph/0604079v1 .

Conway, J., S. Kochen. 2008. The Strong Free Will Theorem. – http://arxiv.org/abs/0807.3286v1 .

Dedekind, R. 1918. *Was sind und was sollen die Zahlen*? (Vierte unveränderte Auflage) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn (English translation: R. Dedekind. *Essays on the theory of numbers*. Chicago: the open court publishing company, 1901, 14-58.)

DeWitt, B, J. Wheeler (eds.). 1967. *The Everett-Wheeler Interpretation of Quantum Mechanics. Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics*. New York: W.A.Benjamin, 1968.

Dirac, P. 1950. Generalized Hamiltonian dynamics. – *Canadian Journal of Mathematics*, 2, 129-148.

Dirac, P. 1958. *Principles of Quantum mechanics* (forth edition). Oxford, New York: Oxford University Press (reprinted 2004).

Einstein, A. 1905. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? – *Annalen der Physik*. Bd. 18, No 13, 639–641. – http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1905_18_639-641.pdf .

Einstein, A. 1905. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. – *Annalen der Physik*. Bd. 17, No 6, 132–148. – http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1905_17_132-148.pdf *.*

Einstein, A. 1905. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. – *Annalen der Physik*. Bd. 17, No 10, 891-921. – http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1905_17_891-921.pdf *.*

Einstein, A. 1918. Prinziplelles zur allgemeinen Relativitätstheorie. – *Annnalen der Physik*. Bd. 55, № 4, 241-244. – http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1918_55_241-244.pdf .

Einstein, A. 1918. Prinziplelles zur allgemeinen Relativitätstheorie. – *Annalen der Physik*, 1918, 55, 241-244. – http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1918_55_241-244.pdf .

Einstein, A. 1957. Autobiographishes. – In: *Albert Einstein: Philosopher – Scientist* (ed. P. Schlipp). New York: Tudor Publishing Company, 1-95.

Einstein, A. 1957. Remarks to the Essays Appearing in this Collective Volume. – In: *Albert Einstein: Philosopher – Scientist* (ed. P. Schlipp). New York: Tudor Publishing Company, 663-688.

Einstein, A., B. Podolsky and N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be considered complete? – *Physical Review*, 1935, 47, 777-780. (А. Эйнштейн, Б. Подолски, Н. Розен. 1936. Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным? – *Успехи физических наук*. Т. XVI, № 4, 440-446 – http://ufn.ru/ufn36/ufn36_4/Russian/r364_b.pdf .

Einstein, A., M. Born. 1969. Albert Einstein Max Born Briefwechsel 1916 – 1955 (kommentiert von Max Born). München: Nymphenburger Verlagshandlung.

Everett III, H. 1957. „Relative state" Formulation of Quantum Mechanics. – *Reviews of Modern Physics*. Vol. 29, No 3 (July 1957), 454-462. – http://www.univer.omsk.su/omsk/Sci/Everett/paper1957.html .

Feynman, R. 1982. Simulating Physics with Computers. – *International Journal of Theoretical Physics*. Vol. 21, № 6-7, 467-488.

Forster, T., J. Truss. 2007. Ramsey's theorem and König's Lemma. – *Archive for Mathematical Logic*. Vol. 46, 37-42.

Gentzen, G. 1938. Die gegenwärtige Lage in der mathematishen Grundlagenforshung. – *Forshungen zur Logic und zur Grundlegung der exacten Wissenshaften*, Neue Folge, Heft 4. Leipzig: Hirzel, 5-18.

Gentzen, G. 1938. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. – *Forshungen zur Logic und zur Grundlegung der exacten Wissenshaften*, Neue Folge, Heft 4. Leipzig: Hirzel, 19-44.

Gentzen, G. 1969. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen* (ed. M. Szabo). Amsterdam-London: North Holland Publishing Company.

Gibbs, J. 1902. *Elementary Principles of Statistical Mechanics*. New York: Charls Scribner's Sons, London: Edward Arnold.

Gleason, A. 1957. Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space. – *Journal of Mathematics and Mechanics*. Vol. 6, No 6, 885-893.

Gödel, K. 1930. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. – *Monatshefte der Mathematik und Physik*. Bd. 37, No 1 (December, 1930), 349-360 (Bilingual German – English edition: K. Gödel. The completeness of the axioms of the functional calculus of logic. – In: K. Gödel. *Collected Works*. Vol. I. *Publications 1929 – 1936*. Oxford: University Press, New York: Clarendon Press – Oxford, 1986, 103-123.)

Gödel, K. 1931. Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I. – *Monatshefte der Mathematik und Physik*. Bd. 38, No 1 (December, 1931), 173-198. (Bilingual German – English edition: K. Gödel. The formally undecidable propositions of *Principia mathematica* and related systems I. – In: K. Gödel. *Collected Works*. Vol. I. *Publications 1929 – 1936*. Oxford: University Press, New York: Clarendon Press – Oxford, 1986, 144-195.

Gödel, K. 1938. Vortrag bei Zilsel. – In: K. Gödel. *Collected Works*. Vol. III. *Unpublished Essays and Lectures*. Oxford: University Press, New York: Clarendon Press – Oxford, 1995, 86-113.

Gödel, K. 1940. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Princeton: University Press. (*Collected Works*, vol. II, New York, Oxford: University Press, 1990, pp. 33-101.)

Gödel, K. 1957. A Remark About the Relationship Between Relativity Theory and Idealistic Philosophy. – In: *Albert Einstein: Philosopher – Scientist* (ed. P. Schlipp). New York: Tudor Publishing Company, 555-562.

Greenberger, D., A. Horne, A. Shimony, A. Zelinger. 1990. Bell's theorem without inequalities. – *American Journal of Physics*. Vol. 58, № 12, 1131-1143.

Greenberg, D., W. Reiter, A. Zeilinger (eds.) 1999. *Epistemological and experimental perspectives on quantum physics* (Vienna Circle Institute Yearbook Volume 7). Dordrecht: Springer.

Grover, L. 1998. Quantum Search on Structured Problems. – In: *Quantum Computing on structured Problems*. Palm Springs, California: Springer.

Henkin, L. 1952. A problem concerning provability, problem 3. – *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 17, No 2, p. 160.

Hermann, G. 1935. Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik – *Die Naturwissenschaften*. Vol. 23, No 42 (Oct 1935), 718-721**. (**G. Hermann. The Foundations of Quantum Mechanics in the Philosophy of Nature. – *The Harvard Review of Philosophy*. 1999, VII, 35-44: – http://www.hcs.harvard.edu/~hrp/issues/1999/Hermann.pdf).

Hermann, G. 1935a The circularity in von Neumann's proof. (Translation by Michiel Seevinck of "Der Zirkel in NEUMANNs Beweis", section 7 from the essay by Grete Hermann, *Die Naturphilosophischen Grundlagen de Quantenmechanik*. Abhandlungen der fries'schen Schule, 6, 1935 – http://www.phys.uu.nl/igg/seevinck/trans.pdf).

Jauch, J., C. Piron. 1963. Can Hidden Variables be Excluded in Quantum mechanics? – *Helvetica Physica Acta*. Vol. 36, No 7, 827-837.

Kent, A. 2002. Locality and reality revisited. – In: Non-locality and Modality (eds. T. Placek, J. Butterfield). Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Modality, Probability, and Bell's Theorems, Cracow, Poland, August 19-23, 2001. Springer, NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry , Vol. 64, 163-174. – arXiv:quant-ph/0202064v3 7 Nov 2002 .

Kochen, S., E. Specker. 1967. The problem of hidden variables in quantum mechanics. – *Physical Review A*. Vol. 17, № 1, 59-87.

Landauer, R. 1996. The physical nature of information. – *Physics Letters A*. Vol. 217, 188-193.

Laudica, F. 2001. Non-Locality and Theories of Causation in Quantum Mechanics. – In: Non-locality and Modality (eds. T. Placek, J. Butterfield). Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Modality, Probability, and Bell's Theorems, Cracow, Poland, August 19-23, 2001. Springer, NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry , Vol. 64, 223-234 – http://confer.uj.edu.pl/bell.workshop/doc/laudisa1.doc .

Le Morvan, P. 2004. Ramsey on Truth and Truth on Ramsey. – *British Journal for the History of Philosophy*. Vol. 12 No 4, 705–718.

Löb, M. 1955. Solution of a problem of Leon Henkin. – *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 20, No 2, 115-118.

Masanes, L., A. Acin, N. Gisin. 2006. General properties of nonsignaling theories. – *Physical Review A*. Vol. 73, No 1, 012112(9). – http://www.icfo.es/images/publications/J06-011.pdf .

Mermin, D. 1993. Hidden variables and the two theorems of John Bell. – *Reviews of Modern Physics.* Vol. 65, No. 3 (July 1993), 803-815.

Mermin, D. 1998. What Is Quantum Mechanics Trying to Tell Us? – *American Journal of Physics*. Vol. 66, No 9, 753-767, http://arxiv.org/abs/quant-ph/9801057v2.

Mermin, D. 2000. What Is Quantum Mechanics Trying to Tell Us? – *American Journal of Physics*. Vol. 68, No 8, 728-745.

Minkowski, H. 1909. Raum and Zeit. Vortrag, gehalten auf der 80. Naturforsherversamlung zu Köln am 21. September 1908. Leipzig und Berlin: B.G. Teubner. – http://de.wikisource.org/wiki/Raum_und_Zeit_(Minkowski) .

Moyal, J. 1949. Quantum mechanics as a statistical theory. – *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 45, No 1, 99-124. – http://epress.anu.edu.au/maverick/mobile_devices/apc.html .

Nash, J. 1950. Equilibrium point in n-person games. – *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. Vol. 36, No 1, 48-49. (*The essential John Nash* (eds. H. Kuhn, S. Nasar). Princeton: University Press. 2002, 49-50).

Nash, J. 1951. Non-cooperative Games. – *Annals of Mathematics*. Vol. 54, No 2, 286-295. (The essential John Nash (eds. H. Kuhn, S. Nasar). Princeton: University Press. 2002, 85-98).

v. Neumann, J. 1929. Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. – *Mathematische Annalen.* Vol. 102**,** No 1, 370–427.

v. Neumann, J. 1932. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Verlag von Julius Springer. (von Neumann, J. 1955. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton: University Press; , Й. фон Нейман. 1964. *Математические основы квантовой механики*. Москва: „Наука”.)

v. Neumann, J. 1936. On a Certain Topology for Rings of Operators. – *The Annals of Mathematics 2nd Ser.* Vol. 37, No 1, 111–115.

v. Neumann, J. 1938. On infinite direct products. – *Compositio Mathematica.* Vol. 6**,** 1–77, http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__1_0.

v. Neumann, J. 1940. On rings of operators III. – *The Annals of Mathematics 2nd Ser.* Vol. 41, 94–161

v. Neumann, J. 1943. On Some Algebraical Properties of Operator Rings. – *The Annals of Mathematics 2nd Ser.* Vol. 44, No 4, 709–715.

v. Neumann, J. 1949. On Rings of Operators. Reduction Theory. – *The Annals of Mathematics 2nd Ser.* Vol. 50, No 2, 401–485.

Noether, E. 1918. Invariante Variationsprobleme – *Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse* (1918), 235-257; (English translation by M. A. Travel, *Transport Theory and Statistical Physics* 1(3) 1971,183-207. Превод на руски: Э. Нетер 1959. Инвариантные вариационные задачы. – В: *Вариационные принципы механики*. Москва: Госиздфизматлит, 611-630.)

Norsen, T. 2006. Bell Locality and the Nonlocal Character of Nature. – arXiv:quant-ph/0601205 v1 30 Jan 2006 .

Omnès, R. 1997. General theory of the decoherence effect in quantum mechanics. – *Physical Review A*. Vol. 56, № 5, 3383 (12).

Omnès, R. 1999. *Quantum Philosophy Understanding and Interpreting Contemporary Science*. Princeton: University Press.

Pauli, W. 1980. *General Principles of Quantum Mechanics*. New York: Springer.

Pitowsky, I. 2005. Quantum Mechanics as a Theory of Probability. – arXiv:quant-ph/0510095v1 13 Oct 2005**.**

Popescu, S., D. Rohrlich. 1994. Quantum nonlocality as an axiom. – *Foundations of Physics*. Vol. 24, No 3 (March, 1994), 379-385. – http://arxiv.org/pdf/quant-ph/9508009v1 .

Post, E. 1995. *Quantum Reprogramming*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Putnam, H. 1980. Models and Reality. – *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 45, No 3, 464-482.

Ramsey, F. 1978. Foundations. Essays in Philosophy, Logic, Mathematic and Economics. London and Henley: Routledge & Kegan Paul.

Riesz, F. 1907. Sur une espèce de géométrie analytiques des systèmes de fonctions sommables. – *Comptes rendus de l'Académie des sciences*. Paris. T. 144, 1409–1411

Rosinger, E. 2004. What is wrong with von Neumann's theorem on „no hidden variables" – arXiv:quant-ph/0408191v2 16 Sep 2004 .

Russell, B. 1993. *Our Knowledge of the External World*. London: Routledge (цитираното място се съдържа в: Б. Ръсел. Логиката като същност на философията. – *Философски алтернативи*, 1996, 4, 3-16).

Schmerl, J., St. Simpson. 1982. On the Role of Ramsey Quantifiers in First Order Arithmetic. – *The Journal of Symbolic Logic*. Vol. 47, No 2, 423-435**.**

Schrödinger, E. 1924. Bohrs neue Strahlungshypothese und der Energiesatz. – *Naturwissenschaft*. Bd. 12, 720-724 (in: *Gesammelte Abhandlungen*. B. 3. *Beitrage zur Quantentheorie*. Wien: Verlag der Österreichischen Akademie des Wissenschaften, Friedr. Vieweg&Sohn Brunschweig/ Wiesbaden, 26-30**).**

Schrödinger, E. 1935. Die gegenwärtige situation in der Quantenmechanik. – *Die Naturwissenschaften*, Bd. 48, 807-812; Bd. 49, 823-828, Bd. 50, 844-849. (In English: http://www.tu-harburg.de/rzt/rzt/it/QM/cat.html; превод на руски: Шредингер, Э. 1971. Современное положение в квантовой механике. – В: Э. Шредингер. *Новые путы в физике*. Москва: „Наука", 1971, 66-106.)

Schrödinger, E. 1967. Der Grundgedanke der Wellenmechanik (Nobel-Vortrag, gehalten zu Stockholm am 12 December 1933). – E. Schrödinger. *Was ist ein Naturgesetz? Beitrage zur naturwissenschaftlichen Weltbild*. München/ Wien: R. Oldenbourg, 86-101.

Schrödinger, E. 1984. A Discourse on Transfinite Numbers. – In: *Gesammelte Abhandlungn*. B. 4. *Allgemeinen wissenschaftlichen und populäre Aufsätze*. Wien: Verlag der Österreichischen Akademie des Wissenschaften, Friedr. Vieweg&Sohn Brunschweig/ Wiesbaden, 609-611.

Schrödinger, E. 1984. Das Gesetz der Zufälle. – In: *Gesammelte Abhandlungn*. B. 4. *Allgemeinen wissenschaftlichen und populäre Aufsätze*. Wien: Verlag der Österreichischen Akademie des Wissenschaften, Friedr. Vieweg&Sohn Brunschweig/ Wiesbaden, 316-317.

Schrödinger, E. 1984. Gleichheit und Relativität der Freiheit. – In: *Gesammelte Abhandlungen*. B. 4. *Allgemeinen wissenschaftlichen und populäre Aufsätze*. Wien: Verlag der Österreichischen Akademie des Wissenschaften, Friedr. Vieweg&Sohn Brunschweig/ Wiesbaden, 356-358.

Schrödinger, E. 1984. Indeterminism and Free Will. – In: *Gesammelte Abhandlungn*. B. 4. *Allgemeinen wissenschaftlichen und populäre Aufsätze*. Wien: Verlag der Österreichischen Akademie des Wissenschaften, Friedr. Vieweg&Sohn Brunschweig/ Wiesbaden, 356-358.

Schrödinger, E. 1984. Über das Verhältniss der Heisenberg-Born-Jordan'schen Quantenmechanik zu der meinen. – In: *Gesammelte Abhandlungn*. B. 3. *Beitrage zur Quantentheorie*. Wien: Verlag der Österreichischen Akademie des Wissenschaften, Friedr. Vieweg&Sohn Brunschweig/ Wiesbaden, 143-165.

Schwartz, L. 1948. Génerelisation de la notion de function et de dérivation théorie des distributions. – *Annals of Telecommunications*. Vol. 3, No 4, 135-140.

Seevinck, M., J. Uffink. 2007. Local commutativity versus Bell inequality violation for entangled states and versus non-violation for separable states. – *Physiscal Review* A. Vol. 76, No 4, 042105(6) – http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0703134 .

Shannon, C. 1948. A Mathematical Theory of Communication. – *The Bell System Technical Journal.* Vol. 27, 379–423 (July, 1948), 623–656 (October, 1948). – http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/shannon1948.pdf .

Shih, Y. 2001. Quantum entanglement and quantum teleportation. – *Annalen der Physik*. Vol. 513 (ser. 8, vol. 10), № 1-2, 19-34.

Skolem, T. 1970. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. – In: T. Skolem. *Selected works in logic* (ed. E. Fenstad), Oslo etc: Univforlaget.

Stöltzner, M. 2001. Causality, Determinism, Realism: Some Philosophical Inequalities. – http://confer.uj.edu.pl/bell.workshop/doc/stoeltzner1.rtf .

Stöltzner, M. 2002. Bell, Bohm, and von Neumann: Some philosophical inequalities concerning No-go Theorems and the axiomatic method. – In: Non-locality and Modality (eds. T. Placek, J. Butterfield). Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Modality, Probability, and Bell's Theorems, Cracow, Poland, August 19-23, 2001. Springer, NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry , Vol. 64, 37-60. (http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00000494/00/Natopap3.doc).

Streater, R., A.Wightman. 2000. *PCT, Spin and Statistics and All That*. Princeton: University Press, Landmarks in Mathematics and Physics.

Sugano, R. 1971. On Consistency between Lagrange and Hamilton Formalisms in Quantum Mechanics. – *Progress of Theoretical Physics*. Vol. 46, No 1, 297-307.

Tarski, A. 1944. The Semantical Concept of Truth and the Foundations of Semantics. – *Philosophy and Phenomenological Research*. Vol. 4, No 3, 341-375 – http://www.ditext.com/tarski/tarski.html (http://www.crumpled.com/cp/classics/tarski.html).

Tsallis, C. 1988. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. – *Journal of Statistical Physics*. Vol. 52, No 1-2 (July, 1988), 479-487.

Turing, A. 2004. *The Essential Turing. Seminal Writings in Computing, Logic, Philosophy, Artificial Intelligence, and Artificial Life* plus *The Secrets of Enigma* (ed. B. Copeland). Oxford: Clarendon Press.

Weyl, H. 1927. Quantenmechanik und Gruppentheorie. – *Zeitschrift für Physik*. Vol. 46, No 1-2, 1-46. (H. Weyl. *Gesammelte Abhandlungen*. B. III. Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1968, 75-135; на руски: Г. Вейль. *Теория групп и квантовая механика*. М. Наука, 1986.)

Whitehead, A., B. Russell. 1910. *Principia Mathematica*. Vol. I. Cambridge: University Press.

Wigner, E. 1932. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. – *Physical Review*. Vol. 40, No 5 (June 1932), 749-759.

Williams, C., S. Clearwater. 1998. *Explorations in quantum computing*. New York: Springer.

Wooters, W., W. Zurek. 1982. A single quantum cannot be cloned. – *Nature*. Vol. 299 (28 October 1982), 802-803.

Yourgrau, P. 2006. *A World Without Time: The Forgotten Legacy of Gödel and Einstein*. New York: Perseus Books Group.

Yu Shi. 2000. Early Gedanken experiments of quantum mechanics revisited. – *Annalen der Physik*. Vol. 512 (ser 8, vol. 9), No 8, 637-648.

Zermelo, E. 1908. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. – *Mathematische Annalen,* Vol. 65, No 2: 261-281; English translation in: van Heijenoort, J. 1967). Investigations in the foundations of set theory", *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. (Source Books in the History of the Sciences). Harvard: Univ. Press, 199-215.

Zurek, W. 2000. Schrödinger's sheep. – *Nature*. Vol. 404, No 6774 (9 March 2000), 130-131.

Александров, П., Б. Пасынков. 1973. *Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерностей*. Москва: Наука.

Баргатин, И., Б. Гришанин, В. Задков. 2001. Запутанные квантовые состояния атомных систем. – *Успехи физических наук.* Т. 171, № 6, 625-646.

Белинский, А., Д. Клышко. 1993. Интерференция света и теорема Белла. – *Успехи физических наук*. Т. 163, № 8, 1-45.

Валиев, К. 2005. Квантовые компьютеры и квантовые исчисления. – *Успехи физических наук*. Т. 175, № 1, 1-39.

Дмитриев, Н. 2005. Теорема фон Неймана о невозможности введения в квантовую механику скритых параметров. – *Теоретическая и математическая физика*. Т. 143, No 3, 431-436. (Dmitriev, N. 2005. Von Neumann's Theorem on the Impossibilty of Introducing Hidden Parameters in Quantum Mechanics. – *Theoretical and Mathematical Physics.* Vol. 143 No 3: 848–853.)

Килин, С. 1999. Квантовая информация. – *Успехи физических наук*. Т. 169, № 5, 507-527.

Коноплева, Н., Г. Соколик. 1972. Симетрии и типы физической теории. – *Вопросы философии*, 1, 118-127.

Коэн, П. 1969. *Теория множеств и континуум-гипотеза*. Москва: Наука.

Люцканов, Р. 2008. *Теоремата за непълнотата: контексти на интерпретация*. С.: Изток – Запад.

Менский, М. 1976. *Метод индуцированных представлений: Пространство-время и концепция частиц*. Москва: Наука.

Менский, М. 1983. *Группа путей: измерения, поля, частицы*. Москва: Наука.

Менский, М. 2000. Квантовая механика: новые эксперименты, новые приложения и новые формулировки старых вопросов. – *Успехи физических наук*. Т. 170, № 6, 631-647.

Менский, М. 2001. Квантовое измерение: декогеренция и сознание. – *Успехи физических наук*. Т. 171, № 4, 459-462.

Менский, М. 2005. Концепция сознания в контексте квантовой механики. – *Успехи физических наук*. Т. 175, № 4, 413-435.

Пенчев, В. 2005. Квантовият компютър: квантовите ординали и типовете алгоритмична неразрешимост. – *Философски алтернативи*, № 6, 59-71.

Петров, С. 1980. *Методология на субстратния подход*. С.: „Наука и изкуство”.

Пилан, А. 2001. Действительность и главный вопрос о квантовой информации. – *Успехи физических наук*. Т. 171, № 4, 444-447.

Рашевский, П. 1967. *Риманова геометрия и тензорний анализ*. Москва: Наука.

Роженко, Н. 1973. Принцип Бора и картанова проблема. – В: *Методологический анализ теоретических и експериментальных оснований физики гравитации*. Киев: „Наукова думка”, 153-158.

Рудой, Ю., А. Суханов. 2000. Термодинамические флуктуации в подходах Гиббса и Эйнштейна. – *Успехи физических наук*. Т. 172, № 12, 1265-1296.

Сморинский, К. 1983. Теоремы о неполноте. – *Справочая книга по математической логике. Часть IV. Теория доказательств и конструктивная математика*. Москва: „Наука”, 9-56.

Суханов, А., Ю. Рудой. 2006. Об одной незамеченной идее Гибса (комментарии к главе IX его классической книги) – *Успехи физических наук*. Т. 176, № 5, 551-555.

Фейнман, Р. 1986. Квантовомеханическая ЭВМ. – *Успехи физических наук*. Т. 140, № 4, 671-688.

ПОКАЗАЛЕЦ НА ИМЕНА И ТЕРМИНИ *The INDEX of NAMES and TERMS*

Vasil Penchev

Philosophy of Quantum Information. Einstein and Gödel

(Abstract)

The book is devoted to the contemporary stage of quantum mechanics – quantum information, and especially to its philosophical interpretation and comprehension: the first one of a series monographs about the philosophy of quantum information. The second will consider Bell's inequalities, their modified variants and similar to them relations.

The beginning of quantum information was in the thirties of the last century. Its speed development has started over the last two decades.

The main phenomenon is entanglement. The subareas are quantum computer, quantum communication (and teleportation), and quantum cryptography.

The applied «Table of contents» in English displays the discussed topics and classical papers in details. That's why we are able to concentrate our attention on the problems, theses and hypotheses, and results in the suggested investigation:

1. «Dualistic Pythagoreanism» is a conception directed to explain the connection between 'mathematical structures' (Pythagorean «number» in a generalized sense) and 'physical quantity' in a new way: they are both the sides of any physical phenomenon. Its mathematical structures are not – more or less accidentally – mere ascribed to it by people in the process of cognition, but rather its parts in some physical relations and interactions with the others constituting a system as a wholeness. The notion of physical information (especially quantum information) designates the general type of such relations or interactions. Dualistic Pythagoreanism is such a conception which is a bridge between the dualism of quantum mechanics and the classical philosophical dualism of subject and object, of reality and idealness, of reality and models, incl. mathematical ones.

1.1. Dualistic Pythagoreanism as any kind of Pythagoreanism insists that ideal mathematical objects exist as an independent, but closely connected part of the world. By considering such a link, it proves out to be the genuine philosophy of quantum information, or more precisely, of quantum mechanics and information.

2. The suggestion of dualistic Pythagoreanism is achieved by the symbol of the imposing figures of Albert Einstein and Kurt Gödel, and of the close friendship between them situated in Princeton. The «spirit of Princeton» is another figure called to be a symbol of the conception of dualistic Pythagoreanism. Einstein's alleged incompleteness of quantum

mechanics and Gödel's incompleteness theorem of Peano arithmetic turn out to be relative and homogenous each to other.

2.1. The experimentally established completeness of quantum mechanics by refutation of Einstein, Podolsky, and Rosen's conclusion and by the violation of Bell-type inequalities inspires the possible completeness also of arithmetic and in that way, the possible rehabilitation of Hilbert's program of an arithmetical self-foundation of mathematics. Can the so-called first incompleteness theorem refer to itself? Many or maybe even all the paradoxes in mathematics are connected with some kind of self-reference. Gödel built his proof on the ground of self-reference: a statement which claims its unprovability. So, he demonstrated that undecidable propositions exist in any enough rich axiomatics (i.e. such one which contains Peano arithmetic in some sense).

2.2.1. What about the decidability of the very first incompleteness theorem? We can display that it fulfills its conditions. That's why it can be applied to itself, proving that it is an undecidable statement. It seems to be *a too strange kind of proposition: its validity implies its undecidability*. If the validity of a statement implies its untruth, then it is either untruth (reductio ad absurdum) or an antinomy (if also its negation implies its validity). A theory that contains a contradiction implies any statement.

2.2.2. Appearing of a proposition, whose validity implies its undecidability, is due to the statement that claims its unprovability. Obviously, it is a proposition of self-referential type. By Gödel's words, it is correlative with Richard's or liar paradox, or even with any other semantic or mathematical one. What is the cost, if a proposition of that special kind is used in a proof? In our opinion, the price is analogous to "applying» of a contradictory in a theory: any statement turns out to be undecidable.

2.2.3. If the first incompleteness theorem is an undecidable theorem, then it is impossible to prove that the very completeness of Peano arithmetic is also an undecidable statement (the second incompleteness theorem). Hilbert's program for an arithmetical self-foundation of mathematics is partly rehabilitated: only partly, because it is not decidable and true, but undecidable; that's why both it and its negation may be accepted as true, however not simultaneously true. The first incompleteness theorem gains the statute of axiom of a very special, semi-philosophical kind: it divides mathematics as whole into two parts: either Gödel mathematics or Hilbert mathematics. Hilbert's program of self-foundation of mathematic is valid only as to the latter.

2.3. In 1992, Thoralf Skolem introduced the term of «relativity» as to infinity. He demonstrated by Zermelo's axiomatics of set theory (incl. the axiom of choice) that there exist unintended interpretations of any infinite set. The very notion of set was also «relative». We can apply his argumentation to Gödel's incompleteness theorems as well as to his completeness theorem (1930). Then both the incompleteness of Peano arithmetic and the completeness of first-order logic turn out to be also «relative» in Skolem's sense. Skolem's «relativity» argumentation of that kind can be applied to a very wide range of problems and can be spoken of the relativity of discreteness and continuity, of finiteness and infinity, of Cantor's kinds of infinities, etc.

2.4. The relativity of Skolemian type helps us for generalizing Einstein's principle of relativity from the invariance of the physical laws toward diffeomorphisms to their invariance toward any morphisms (including and especially the discrete ones). Such a kind of generalization from diffeomorphisms (when the notion of velocity always makes sense) to any kind of morphism (when 'velocity' may or may not make sense) is an extension of the general Skolemian type of relativity between discreteness and continuity or between finiteness and infinity. Particularly, Lorentz invariance gains constrained validity, because the very notion of velocity is limited to diffeomorphisms. In the case of entanglement, the physical interaction is discrete. 'Velocity' and consequently 'Lorentz invariance' do not make sense. That is the simplest explanation of the argument EPR, which turns into a paradox only if the universal validity of 'velocity' and 'Lorentz invariance' is implicitly accepted. Correspondingly, a more general class of topologies is to be considered, including discrete or inseparable kinds.

2.5. Returning to Gódel's first incompleteness theorem, we may note that he excluded its self-reference by metamathematical consideration correlative to Tarski's conception of truth or to his distinction between metalanguage and object language. The theorem was formulated in metalanguage, but it could be applied only to statements in object language. However the symbols of the metalanguage and those of the object language were the same. Consequently, he involved an external hypothesis (and maybe *ad hoc*) to be excluded any self-referential use of the theorem: it should be accepted as an axiom and should be admitted the axiomatics including its negation. We cannot fulfill or prove Hilbert's program, but may demonstrate that Gödel's first and consequently second incompleteness theorem, which implies its alleged failure, is an undecidable statement.

2.6. The said may be illustrated by discussing the question about the Gödel number of Gödel's first incompleteness theorem. Its number turns to be infinite, that's why the same number (i.e. infinity) should be ascribed to its negation. Of course, we could merely postulate that Gödel's theorem is referred to metalanguage, or metamathematics and it is the cause to have not its Gödel number. Why to have not? It is formulated by the same symbols of the object language, to which it is referred. It as well as its negation is just a possible axiom or originating from an additional axiom, e.g. such one as the very first incompleteness «theorem». The problem about its constructivity is closely connected. If a legitimate proposition in a theory has an infinite Gödel number, then such a theory might hardly be designate as constructive. Forbidding the question about its Gödel number, we have mere postulate that the theory is constructive. So did Gödel implicitly: he claimed in many places of the paper (1931) that his proof was constructive.

2.7. Gentzen's completeness theorem of arithmetic by transfinite induction until ε_0 is very important to us. His argumentation was constructivist or even finitist's one. He claimed that transfinite induction (contrary to its name) is a finitary method. According to us, it is mere the sequential *undecidable* statement. We would prefer an «actualist» reinterpretation of it: both together, finiteness and infinity until ε_0, are dual and complementary. Peano arithmetic (including the principle of complete induction) can found infinity until ε_0 being the metatheory or metalanguage of Gentzen arithmetic comprising both of the finite numbers and infinite ordinals (less than ε_0). In its turn, Gentzen arithmetic (i.e. Peano axiomatics, in which complete induction is generalized to transfinite induction until ε_0) can found Peano arithmetic being the metatheory or metalanguge of it. Peano arithmetic and Gentzen arithmetic have almost the same axiomatics. Each of them can serve as metalanguage as object language of the other. They are correlative each to other in the manner of Skolem. Describing such a case, we may introduce the term of dual (dualistic, mutual) foundation (also «dual-foundation» instead of «self-foundation» as well as «dual-reference» instead of «self-reference») in relation to the completeness of arithmetic.

2.8. The common and mutually relative (in Skolemian sense) principle of complete and transfinite induction can be generalized as *counting*: an unity can always be added to any (1) finite or (2) infinite number (ordinal) as well as (3) between the «last» finite number and the «first» infinite ordinal (the principle of constructivism). Any unity, added wherever, is the same. So, constructivism rather universalizes counting to be the base for introducing infinity, than only to extend it over the domain on infinity. A decisive point is (3). How many unities should be added to a finite number to be gained an infinite one (ordinal): one, some or any finite number, or infinite? How many unities should be subtracted from an infinite number (ordinal) to be acquired a finite (one). The possible answers are the same. Is the number of unities to be either added or subtracted the same in both directions? Choosing one or other variant, we would introduce an axiom more, which could modify Gentzen arithmetic. Our purpose is another: to comprehend just the connection between finiteness and infinity it the terms of quantum mechanics and information by *dualistic Pythagoreanism* as its philosophy.

2.9. The phenomena of entanglement interpreted in the terms of finiteness and infinity require infinite unities between finiteness and infinity. However such a case would be inconsistent with the axiom of foundation. For example, what is the set whose set of subsets is countable: finite or infinite? We should suggest a third kind of numbers or sets, namely nonfinite, which are neither finite nor infinite, and they are less than the latter and bigger than the former.

2.10. Quantum computer as a mathematical model generalizing Turing machine can be represented as transfinite calculus. There exist at least two kinds of quantum computer: without or with entanglement. Quantum computer without entanglement can be modeled by means of calculus in «classical» Gentzen arithmetic, and the other with entanglement by a nonfinite generalization of Gentzen arithmetic. Such a nonfinite generalization may be considered as an unintended interpretation or a non-standard model of Gentzen arithmetic extended beyond $\boldsymbol{\varepsilon_0}$. The nonfinite generalization is not dual-founded with Peano arithmetic. Obviously, it would be equivalent to adding the set of Robinson's actual infinitesimals, or Leibnitz's differentials (Newton's moments) instead of their ignoring by the standard analysis of infinitesimals as limits à la Cauchy. The term of superfinite induction will be used about extending the principle of induction beyond $\boldsymbol{\varepsilon_0}$. The discrete nonfinite numbers (or ordinals) are Scolemian relative to continual curvatures, or to nonorthogonality between finiteness and infinity, respectively to any nonzero projection between them. So, we may discuss the nonfinite numbers as projections of the finite numbers onto infinity, or vice versa, of the infinite ordinals onto finiteness.

2.11. According to Emmy Noether's first theorem (1918), the translation along time's axis implies energy conservation. If we consider counting as a discrete Skolemian equivalent of time's continual translation, then complete, transfinite, and superfinite induction would be various variants of the equivalent of energy conservation. The generalized low of conservation corresponding to superfinite induction is one of great importance to us.

2.12. A new and maybe very fruitful interpretation of quantum mechanics can be outlined: in terms of arithmetic, logic and metamathematics. In that case, any coherence state is reckoned as a transfinite ordinal, any entangled state as a superfinite ordinal. Measurement and wave collapse refer to a conclusion by the method of trans- or superfinite induction. The results of quantum mechanics and information might be interpreted into the foundations of mathematics. «Dualistic Pythagorean interpretation» or mere «Pythagorean interpretation» will be used in that case.

3. The usual mathematical model of quantum mechanics uses separable Hilbert space. It is common for all the possible states of all the possible quantum objects. Only one kind of Hermitian operators, namely the «hypermaximal» ones in terms of von Neumann, corresponds (by one-to-one mapping) with the physical quantities. How do the fluently sketched outlines of the Pythagorean interpretation of quantum mechanics refer to the Hilbert space model? The ground of corresponding between the two mathematical models is based on the notion of dual space and its anti-isometry towards the basic Hilbert space according to the Riesz representation theorem. The dual space as the space of functionals corresponds with the finiteness, the basic Hilbert space with the infinity of the Pythagorean interpretation of quantum mechanics. The idempotence of dual vector spaces corresponds with the Skolemian relativity of finiteness and infinity.

3.1. Passing beyond $\boldsymbol{\varepsilon_0}$, i.e. into the domain of superfinite ordinals corresponding to the nonfinite domain between finiteness and infinity, we are forced to complicate also the usual mathematical model of a single separable Hilbert space for all the states. That could be accomplished in various ways, each of them partly or completely equivalent to others. Some of them are: «curved» Hilbert space, inseparable Hilbert space, rigged Hilbert space, the space of Dirac's ket vectors, Dirac's δ-functions, Scwartz distributions or generalized functions. They would be necessary describing entangled states.

3.2. The usual definition of entanglement is the following: such a Hilbert space of a given system which cannot be factorized to the tensor product of the Hilbert spaces of its composed parts. We can display that the definition is equivalent to using the elements of any set or space above (3.1). For example, a «curved» Hilbert space can be represented by two others if and only if the projection of the one onto the other is nonzero and consequently it cannot be represented as the tensor product of any two others. Besides, we would able to interpret entanglement as any nonzero projection of the state vector of a part of a system onto another, or in other words, as the nonadtivity of the system in relation to its parts.

4. Von Neumann's theorem about the absence of hidden parameters in quantum mechanics (1932) is discussed «by itself» as well as by Bell's article (1966) on the same topic. On the premise of expectation additivity explicitly disclosed later by Grete Hermann in 1935 and independently from her by John Bell in 1966 in the context of his famous inequalities, Jonh von Neumann demonstrated that free-dispersion ensembles did not exist whereas homogeneous ensembles did, consequently, any homogeneous

ensemble had dispersion. John Bell explained that von Neumann had considered implicitly only isolated systems, towards which his theorem is valid. In fact, he, as a real mathematical physicist, discussed only systems represented by the formalism of a single separable Hilbert space because entanglement was not yet known at that time. The meaning of the «hidden» premise could be represented rather as the condition to be used only a single separable Hilbert space as the formalism of quantum mechanics than as implicit expectation additivity. For example, the theorem is necessarily true in relation to the universe, or in other words, the theorem excludes only internal (or local) hidden parameters without discussing the problem of external (or nonlocal) ones. Until discovering of entanglement, first theoretically then experimentally, the hidden parameters were identified implicitly only as local or internal. Causality was comprehended only locally in correspondence with Lorentz invariance or Einstein's general covariance, the «principle of (general) relativity».

5. Von Neumann stated that causality was only averaging according to the law of large numbers. He interpreted the proved by him absence of free-dispersion ensembles in quantum mechanics as the crash of causation at all so long as quantum mechanics is the ground of our knowledge of nature. The possibility of such a claim was implicit identifying of causality with local causality. A violation of Bell's inequalities or any phenomenon of entanglement (even without such a violation) constrains the degrees of freedom (DOF) of both or more entangled systems. Similar constraining DOF can be defined as nonlocal causality, and the physical quantities of each of two or more entangled systems to be reckoned as the set of nonlocal hidden parameters towards the rest.

6. The historical beginning of quantum information was Einstein – Bohr's debate, the article of Einstein, Podolsky, Rosen (1935), the answer of Bohr (1935), Schrödinger's «cat paradox paper» (1935), where he introduced «vershränkten Zustände». Those papers are discussed in details.

Our book offers the following main conceptions, theses and hypotheses:

– dualistic Phythagoreanism as a new kind among the interpretations of quantum mechanics and information: arithmetical, logical, and metamathematical one;

– Gödel's first incompleteness theorem is an undecidable proposition, and consequently the second too.

– a partial rehabilitation of Hilbert's program for the self-foundation of mathematics;

– the dual-foundation of mathematics;

– Skolemian relativity between: Cantor's kinds of infinity, finiteness and infinity, discreteness and continuity, completeness and incompleteness, etc.;

– information is a physical quantity representing the non-reducibility of a system to its parts, particularly nonaddtivity.

– there exist pure relations «by itself», which cannot be reduced to predications;

– energy conservation can and should be generalized.

– Einstein's «general covariance» or «principle of relativity» can and should be generalized to cover discrete morphisms where the notion of velocity does not make sense.

Васил Пенчев

ФИЛОСОФИЯ НА КВАНТОВАТА ИНФОРМАЦИЯ

АЙНЩАЙН И ГЬОДЕЛ

Редактор: **М. Михайлов**

Коректор: **М. Михайлов**

Печат: **Bulged**

Издателство: **ИФИ-БАН**

Формат: А5
Печатни коли: 30, 25

ISBN **978-954-92145-9-8**