AS DÍZIMAS PERIÓDICAS NA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE WITTGENSTEIN[1]

André Porto
Universidade Federal de Goiás
aporto@fchf.ufg.br

Resumo: O presente artigo tem como tema as extensas discussões de Wittgenstein sobre uma das formas mais simples e elementares de infinitude em matemática: as dízimas periódicas. Tentamos organizar os vários argumentos do autor em uma única exposição continuada. No final do artigo, introduzimos, ainda que de forma breve, o famoso argumento sobre "execução de regras" de Wittgenstein, bem como a idéia de interpretações não-standard de processos infinitos.

Palavras-chave: Wittgenstein, filosofia da matemática, dízimas periódicas.

> Às vezes parece que descobertas matemáticas são feitas ao executarmos o que poderíamos chamar de um experimento matemático. Por exemplo, o matemático inicialmente nota uma certa regularidade e então prova que *tinha* de ser assim. E isto parece ir contra o que eu disse, que talvez o que chamamos de descoberta em matemática deveria mais propriamente ser chamado de invenção. (Wittgenstein)[2]

O PROBLEMA DAS DÍZIMAS NA OBRA DO FILÓSOFO

O primeiro registro que temos do pensamento de Wittgenstein, logo após sua volta a Cambridge em 1929, são as transcrições feitas por Waismann das discussões do filósofo com os integrantes do que, anos mais tarde, seria conhecido como o Círculo de Viena. Já na primeira discussão preservada – 18 de dezembro de 1929 –, Wittgenstein lança mão do exemplo da divisão periódica *1 : 3*[3] para

Recebido em 12 de agosto de 2003
Aceito em 5 de novembro de 2003

ilustrar um dos dois tipos fundamentais de demonstrações que, segundo o autor, classificariam todo o discurso matemático. À medida que avançamos em direção ao período da mutação no pensamento do autor, que separa a fase média da final, o caso de *1 : 3* e *1 : 7* torna-se cada vez mais conspícuo em seus escritos e palestras.

Encontramos, por exemplo, repetidos embates do filósofo com esses dois exemplos nas seções VI e VII da *Philosophical Grammar,*[4] bem como nas transcrições das palestras de Wittgenstein,[5] editadas por Alice Ambrose, do período de 1932 a 1935. Nas palestras de 1939, editadas por Cora Diamond, nos deparamos mais uma vez com as dízimas periódicas abordadas no final da palestra XII e em toda a XIII. Afinal das contas, qual era exatamente o problema de Wittgenstein com as dízimas periódicas? O que o filósofo poderia ver de tão instigante em um exemplo tão prosaico como o dessas divisões, normalmente dominadas por crianças ainda em seu primeiro período elementar de aprendizagem?[6]

A despeito do caráter elementar do exemplo, todo o programa de filosofia da matemática de Wittgenstein, com sua forte separação entre questões de fato e regras matemáticas, parece enfrentar um contra-exemplo derradeiro no simplório exemplo das dízimas periódicas. Ao nos darmos conta do ciclo de repetição entre resto e dividendo, diferentemente do que o filósofo deixa claro que preferiria (ver, por exemplo, em nossa epígrafe no início de nosso artigo), estaríamos apenas descobrindo, como que por um caminho alternativo, algo que sempre esteve "potencialmente" lá, à nossa espera, a seqüência infinita de algarismos *3*. O próprio filósofo reconhece:

> O uso da regra [da recursão do resto] para mostrar, como em um atalho, que um *4* não pode ser encontrado [na expansão de *1 : 3*] lembra muito a situação de alguém que abandona a procura por um pinheiro ao ser informado de que pinheiros nunca crescem no solo daquela região.[7]

O EXEMPLO DO "BOSQUE DE PINHEIROS"

Vejamos com mais cuidado essa situação, descrita na citação de Wittgenstein, a respeito do seu bosque sem pinheiros e da idéia de um "atalho" para nos darmos conta de tal ausência. Claramente, o filósofo está se referindo ao critério da recursão do resto como um "atalho" em relação... a exatamente qual "estrada principal"? No caso da afirmação de que "pinheiros nunca ocorrem na região", tal testemunho poderia nos poupar do exaustivo trabalho de percorrer todo o bosque, árvore por árvore, à procura de um pinheiro. Nesse caso, o "atalho" seria a informação de que esse tipo não nasce naquele tipo de solo. Tal garantia seria de fato uma alternativa muito mais expedita para algo que também poderíamos ter constatado de nossa forma "cabeça dura", trabalhosa. Daí introduzirmos a metáfora do "atalho".

Mas, e no caso da divisão *1 :* 3, de que "atalho" estaríamos falando? Não é difícil encontrar uma resposta completamente satisfatória para nossa pergunta. No caso daquela divisão, é claro, o jeito mais trabalhoso, prescindindo do "atalho", seria prosseguir dividindo, percorrendo, uma por uma, as etapas da operação *1 : 3* à procura de um *4*, até descobrirmos que os resultados parciais obtidos – uma seqüência inteira de algarismos *"3"* – ...não teria fim.

Aqui nos deparamos com o primeiro indício – leve, temos de admitir – de que, talvez, a metáfora da "descoberta empírica" no parque de pinheiros não seja mesmo tão adequada. Afinal, quando chegaríamos a descobrir que a divisão de *1: 3* não tem fim (da mesma maneira que concluímos, no caso dos pinheiros)? Isto é muito importante porque, é claro, sem termos a certeza de haver chegado ao fim, sequer poderíamos ter certeza de que algum *4* não estaria, afinal, escondido no trecho que fica para além de nossa teimosia. Deveríamos apenas confiar que essa divisão não nos reservaria alguma surpresa marota como a divisão *1499 : 4500*, que, em suas primeiras casas, também produz *0,333*, mas que, a partir da quarta casa, de repente, começa a produzir algarismos *1*:

$$\frac{1499}{4500} = 0{,}3331111... \ ?$$

Voltemos à idéia dos "caminhos alternativos". A dificuldade toda é que, realmente, se seguirmos as regras da divisão para o caso de *1 : 3*, de fato só obtemos o algarismo *3*, após a vírgula. Daí a tendência de falarmos de uma maneira "direta" (i.e., alternativa à prova) que, apesar de ser extremamente trabalhosa, nos permitiria estabelecer, de modo vagaroso, mas definitivo, a constituição inteira de toda a expansão dessa divisão. Claro, o próprio fato de essa expansão ser infinita nos impediria de jamais completarmos nossa empreitada.Mas, poderíamos retrucar: se em qualquer ponto dessa expansão qualquer algarismo diferente de um *3*, de repente, surgisse, bastaria termos tido paciência de acompanhar o processo até aquele ponto para perceber nosso erro.

Para ilustrarmos a força dessa idéia, vejamos um par de citações. No *Principles of Mathematics*, de Bertrand Russell, esse método de definição de expansões infinitas (o cálculo "teimoso", passo a passo) aparece claramente contrastado com sua alternativa "eficiente". Lá o autor fala da "definição extensional" (o método "cabeça dura") em oposição ao método intensional (o "atalho") e pondera que, pelo menos em "termos lógicos", aquele seria igualmente efetivo. Russell escreve:

> [...] logicamente a definição extensional pareceria aplicável da mesma forma a classes infinitas, mas, na prática, se fôssemos tentá-la, a morte nos alcançaria a meio caminho de nossa louvável empreitada [sic], impedindo-nos de atingir nossos objetivos.[8]

A citação de Lord Russell pode parecer um pouco estranha, mas não é fácil dizer que alternativa deveríamos tomar em seu lugar. Afinal, dadas as regras para a divisão – esse algoritmo que todos aprendemos na escola –, não estaria mesmo determinado (em algum sentido dessa palavra) que este processo geraria somente algarismos

3's? Se nós aceitamos dizer, depois de reconhecermos o ciclo entre resto e dividendo, coisas como "a resposta de *1 : 3* é necessariamente uma seqüência infinita de *3*'s ", então o que diríamos antes de nos darmos conta desse ciclo? Diríamos que tal questão não estaria ainda "determinada"? Que todos aqueles *3*'s ainda não se encontravam verdadeiramente lá? Que a prova tê-los-ia produzido? A todos eles? Que sentido haveria em uma solução assim? Não estaríamos tentando apenas forçar uma solução tão absurda como a idéia de que, antes de estarmos cientes da existência de uma torta dentro de um armário (numa sala qualquer), também ela... não estaria "realmente" lá?

No entanto, a imagem de uma seqüência infinita, como um novo continente à espera de alguém que o descobrisse, também não parece ser bem a solução ideal. Se essa seqüência é realmente tão grande assim – de fato, infinita –, como conseguimos, através de uma simples prova, ter certeza da existência de tantos *3*'s? Voltando à citação de Russell, o que deveríamos entender exatamente por "se tivéssemos uma vida eterna, os dois caminhos seriam realmente equivalentes"? Em um trecho imediatamente seguinte nos *Principles of Mathematics,* de Russell, encontramos:

> [...] apesar de uma noção geral poder ser definida dessas duas maneiras [por uma prova, ou da maneira "direta"], particularmente as classes, salvo quando *acontecem de ser finitas*, somente podem ser definidas intencionalmente, i.e., como objetos denotados por tais e tais conceitos. Acredito que essa distinção seja *puramente psicológica*. *Logicamente a definição extensional pareceria igualmente aplicável a classes infinitas*.[9]

O que significa dizer que o fato de não podermos repassar "até o fim" uma classe "infinita" seja apenas um "impedimento de caráter puramente psicológico"?

O pivô de nosso problema está no fato de termos o processo de divisão com vírgula descrito por regras efetivas completamente independentes de sua infinitude. Uma vez determinado o processo

de divisão, por que não poderíamos perguntar: "da maneira como nós o estabelecemos, tem esse processo um fim, ou não?" Poderíamos, com base em suas regras, ensinar a alguém esse processo e, a seguir, perguntar a esse alguém sobre a infinitude do cálculo que acabara de dominar. E, aparentemente, essa pessoa não teria mais do que duas possibilidades de resposta. Ou bem teria de nos responder que aquela divisão termina sim, mostrando-nos o fim, ou bem descobriria que ela, afinal, não tem fim. Que outra resposta seria possível? Que caso intermediário poderíamos ter, salvo a existência, ou não, de um fim para aquele processo?

Primeiros confrontos com o caso de *1 : 3*

O que sugeriria Wittgenstein então? Que outra possibilidade de resposta haveria além das duas que mencionamos? Comecemos expondo um contra-argumento do filósofo, que aparece ainda em sua fase intermediária, sobre a afirmação da infinitude da resposta da divisão de *1 : 3*. Nossa situação acima era: temos um processo, "completamente definido por suas regras" e dele perguntamos se tem ou não fim, se ele acaba ou não. Wittgenstein aqui, como em tantos outros lugares, procurará distinguir dois sentidos para certas palavras, um empírico, anterior à prova, e outro matemático, uma regra, posterior a esta. Tomemos as palavra "fim", "acabar". Já empregávamos essas palavras independentemente de qualquer divisão. Podíamos dizer "minha aula acaba às 10:00", e também que "minha aula não acaba antes das dez". Mesmo em relação a operações aritméticas, podíamos falar em "términos" e até afirmar que não as tínhamos acabado, como no caso: "desculpe-me, professora, mas eu ainda não acabei minha divisão".

Para melhor entender o argumento de Wittgenstein, montemos uma situação imaginária. Tomemos uma pessoa, um aluno, em uma aula, executando uma divisão de *1 : 3*. Ele obtém um primeiro *3* como resposta, um segundo, um terceiro e, em seguida, o interrompemos com nossa pergunta direta: "Essa divisão tem

fim?". Wittgenstein sugere então uma resposta curiosa, mas claramente possível: "Você pergunta se vou terminá-la? Sim, é claro que vou terminá-la, eu ainda tenho mais de quinze minutos até o final da aula". E, com orgulho, acrescenta: "Nunca deixo nada para a aula seguinte". Ora, algo de estranho se passou. Aquele aluno certamente não compreendera nossa pergunta ou, pelo menos, não no sentido em que ele deveria tê-la compreendido. Não estávamos perguntando se ele iria terminar aquela sua implementação específica de *1 : 3* em um certo intervalo de tempo (até o fim da aula). Não estávamos interessados especificamente naquele aluno, naquela pessoa, naquela ocasião temporal específica ("até o fim da aula"). Nossa pergunta era mais abstrata do que isso.

O que estávamos perguntando seria, mais propriamente, se "se termina 'a divisão' *1 : 3*". Ou seja, como argumentaria Wittgenstein, nossa pergunta não pedia uma resposta empírica, mas sim uma regra matemática. Até porque, em se tratando de pessoas que sequer sabem sobre a recursão do resto de divisões, poderíamos esperar qualquer tipo de resposta, como: "Já a terminei faz tempo, professora, aqui está a resposta". Wittgenstein escreve:

> Se nós olharmos um homem dividindo *1* por *3*, então a questão se ele sempre vai escrever *3*'s é como uma questão da física – como perguntarmos se um cometa sempre descreverá uma parábola.[10]

Seguindo a abordagem de Wittgenstein, estaríamos aqui em um jogo lingüístico completamente diferente, um novo emprego para termos antigos. Antes da noção da recursão do resto, tínhamos frases como "fulano terminou a divisão no fim da aula". Agora passa a fazer sentido um novo tipo de frase – "a divisão *1 : 3* não termina" –, uma frase atemporal, ou, segundo o filósofo, uma regra. Sua sugestão, como sempre, seria: temos agora uma nova regra que descarta como sem sentido qualquer afirmação, como a do aluno acima, que envolva a execução do processo de divisão *1 : 3* e sua finalização. Isto é: não estamos querendo afirmar que "freqüen-

temente não se terminam as divisões *1 : 3*" ou mesmo que "*1 : 3* é sempre uma divisão que as pessoas não costumam terminar (até porque sempre poderia aparecer um caso como o do "Joãozinho"...). Estamos, isto sim, afirmando: "não se termina a divisão *1 : 3*". Uma regra.

As regras da operação de divisão

Voltemos agora à nossa questão original, o caso de divisões como *1 : 3* e *1 : 7* e a "descoberta" de sua periodicidade. Nosso problema era: mesmo antes de nos darmos conta da recursão do resto *1* (e, portanto, do absurdo de se procurar um resto zero nesse desenvolvimento), a seqüência de algarismos *1* já parecia em algum sentido estar lá, presente nos restos sucessivos que obtínhamos ao executar nossas divisões, quer notássemos a repetição dos algarismos no resultado, quer não. Uma pessoa poderia nada saber sobre a recursão e, ainda assim, ao executar os passos do processo de divisão com vírgula para *1 : 3*, obteria sempre como restos parciais o algarismo *1* e como resultados parciais o algarismo *3*. Já teríamos assim, ainda que apenas "potencialmente", a seqüência infinita de *3*'s inscrita nas próprias regras de execução da divisão de *1 : 3*, na maneira certa de implementá-la.

Se distinguirmos duas operações independentes na conhecida divisão com resto, uma que encontra a divisão parcial (":") e outra que encontra o resto ("**%**"), então, a partir de uma divisão inicial e seu resto,

$$a : b = c_1 \text{ e } a \% b = r_1,$$

poderíamos, por exemplo, definir precisamente a seqüência de casas decimais depois da vírgula ("c_i"), de acordo com o quadro A:

Tabela A - Definição da seqüência de casas decimais depois da vírgula

(1) Nova casa da expansão, $c_{n+1} = (r_n.10) : b$ (2) Encontrar o novo resto, $r_{n+1} = c_n - (c_{n+1} \acute{} \ b)$ (3) Novo resto é igual a 0? Em caso afirmativo, nossa divisão terminou. Em caso negativo, volte ao passo (1)

Assim, o fato que nos parecia perturbador era que, quando seguíamos as regras como as formuladas na Tabela A acima, para o caso da divisão *1 : 3*, três coisas realmente aconteciam, independentemente de sabermos qualquer coisa a respeito da recursão do resto, coisas estas que mais tarde provaremos ser verdadeiras.

1) não conseguíamos terminar a divisão (não encontrávamos um zero como resto);

2) encontrávamos vários algarismos *3* repetidos;

e

3) não encontrávamos qualquer outro algarismo além de 3.

Daí, como não imaginarmos que essa repetição de 3's "já estivesse lá", inscrita no funcionamento de nossa máquina, independentemente de nosso conhecimento? Se há um caso em que parecemos descobrir algo, de uma forma inteiramente análoga a alguém que descobre uma torta em seu armário, esse caso é o das dízimas periódicas. A situação é mesmo desalentadora para o filósofo. Podemos até mesmo simpatizar com seu esforço, mas sua batalha dá a impressão de estar perdida antes mesmo de ter começado.

A questão da finitude ou não daquela operação, no entanto, claramente, está ligada à terceira observação (acima). É a convicção a respeito da não-ocorrência de um algarismo, o algarismo zero na expansão dos restos de *1 : 3* e *1 : 7*, que define a operação como sendo infinita. Caso contrário, afinal de contas, ela teria um fim. Vejamos então esse tipo de afirmação com mais cuidado. Aqui tem início, novamente, a argumentação do filósofo.

Consideremos a outra divisão favorita de Wittgenstein: *1 : 7*. Ao executarmos essa operação, encontramos o algarismo 2 (na terceira casa), e também não encontramos o algarismo 6. Quando afirmamos que encontramos o algarismo *2* e não encontramos o algarismo *6* em *1 : 7*, estamos falando em termos de cálculo ou de experimento? Vamos nos explicar melhor. Quando fazemos afirmações sobre a obtenção (ou não) de certos algarismos, estamos falando de como as pessoas dividem, de como têm costumado dividir (incluindo aqui os computadores, é claro) ou estamos falando de como se divide *1 : 7*, independentemente do tempo e de um agente calculador?

Ou seja, estamos fazendo uma afirmação sobre como os agentes calculadores efetivamente se comportam (nesse caso teríamos de incluir, é claro, os erros e as hesitações), ou sobre como eles deveriam se comportar (da maneira correta, i.e., livre de erros)? Em outras palavras, estamos falando de regras, em como se faz ou estamos fazendo uma afirmação empírica sobre como as pessoas (ou máquinas) geralmente se comportam (por mais confiáveis que elas possam ser, como é o caso dos computadores)? O filósofo procura nos chamar a atenção para o que ele chama de "uma distinção gramatical". Sua pergunta é: estamos formulando nossos comentários como regras, ou seja, atemporalmente, ou como questões de fato, afirmações empíricas, temporais?

Vejamos o que acontece quando passamos a atentar para a distinção sugerida por Wittgenstein. Podemos dizer, diante da execução das primeiras dez casas da divisão *1 : 7*, que "encontra-se o algarismo *2* na terceira casa depois da vírgula daquela divisão". Poderíamos até mesmo afirmar que não se encontra entre elas o algarismo *6* (nessas dez primeiras casas). Essas frases estariam sendo formuladas, é claro, atemporalmente. Ou seja, baseados em nosso cálculo, faz sentido formularmos a resposta como uma regra: encontra-se *2*, não se encontra *6*.

Vejamos agora uma afirmação como "não ocorre o algarismo *6* nessa divisão". Nesse caso, na ausência do argumento sobre a

recursão do resto, o que diríamos de uma afirmação assim? Aparentemente nossa única opção seria concordar com Wittgenstein e formular nossa afirmação como as pessoas, e mesmo os computadores, não têm encontrado (até agora) nenhum algarismo *6* e nem o algarismo *0* (que poria um fim à operação). Baseados em nossa implementação, pudemos afirmar "encontra-se *2*", mas, sem o recurso ao argumento do ciclo do resto/dividendo, temos de nos contentar com a afirmação temporal: "não temos encontrado *6* na divisão *1 : 7*". Ou seja, não podemos nos livrar das referências a um tempo específico e a agentes executores específicos, que, assim, retirariam de nossa afirmação exatamente o caráter de regra geral, acorrentando-a ao nível de uma mera afirmação empírica.

Há uma outra forma importante de abordar as conseqüências das distinções que procuramos traçar anteriormente. Em matemática, nunca estamos afirmando nada sobre o comportamento de um agente calculador específico, por mais confiável que seja. Não estamos dispostos a tomar ninguém, pessoa ou máquina, por mais confiáveis que estas possam ser, como o modelo de executar corretamente qualquer processo matemático. E isto se daria porque nos reservamos sempre o direito de desqualificar qualquer executor como estando em erro, seja ele qual for. Ainda que todas as calculadoras e computadores do mundo começassem de repente a fornecer "%@√!##" como resposta para a divisão *1 : 7*, isto de forma alguma nos levaria a admitir aquilo como sendo a resposta correta daquela divisão. Pensaríamos antes em algum novo fenômeno físico desconhecido que estaria afetando o comportamento de nossas máquinas.

Vale a pena comparar com mais cuidado a situação de uma divisão como *1 : 7* com, por exemplo, uma multiplicação *25 x 25*. Para aquela operação, temos também as regras que definem o conhecido algoritmo da "multiplicação de números de mais de um algarismo". Mas, além dessas regras, temos também *625*, o resultado da operação. E exatamente por isso, por termos o resultado independentemente do processo, que podemos afirmar que "execu-

tar-se aquela operação é obter-se 625 como resposta". Wittgenstein escreve:

> Se a regra +1 o leva uma vez de 4 para 5, talvez outra vez o leve de 4 para 7. Por que isto é impossível? O problema aparece: o que tomamos como critério para "agir-se segundo a regra". Seria, por exemplo, um sentimento de satisfação que acompanha o ato de agir segundo a regra? Ou uma intuição (intimação) que me diz que agi corretamente? Ou serão certas conseqüências práticas do procedimento que determinam se realmente segui a regra?[11]

Para o nosso caso, independentemente de se tratar de um sentimento ou do comportamento de algum agente específico, o importante é que estamos fazendo nossa regra depender da ocorrência de algo específico: a experiência de um certo sentimento, intuição, ou do comportamento de determinada máquina ou pessoa. Tal opção introduziria, segundo o filósofo, um caráter empírico à afirmação. Ele próprio, então, reclama:

> Neste caso seria possível que *4 + 1* às vezes resultasse em *5* e, outras vezes, em outra coisa. Ou seja, seria pensável que uma investigação experimental mostrasse que *4 + 1* sempre resulta em *5*.[12]

Finalmente, Wittgenstein conclui:

> Se a proposição de que a regra leva de *4* para *5* não é tida como sendo uma proposição empírica, então *isto*, o resultado, deve ser tomado como o critério para alguém ter agido segundo a regra.[13]

O que aconteceria se seguíssemos a argumentação de Wittgenstein? Se aceitarmos a sugestão do filósofo, como lidar com casos de infinitudes como *1 : 7 = 0,142857142...*? Não teria Wittgenstein, com sua argumentação, apenas banido todos os casos

de infinitude, sobrando-nos apenas os cálculos finitos como *25 x 25 = 625*? Não seria ele, afinal, apenas mais um finitista disfarçado, em que pesem suas famosas negativas como "finitismo e behaviorismo são tão parecidos como dois ovos. Os mesmos absurdos, o mesmo tipo de respostas".[14]

Para entendermos o núcleo da sugestão de Wittgenstein para um caso como *1 : 7*, precisamos deixar o momento lógico que estivemos analisando, a situação antes da adoção do critério da recursão, para explorarmos o que, no entender do filósofo, acontece após essa adoção, após passarmos a usar recursão do resto como critério corretor.

A sugestão de Wittgenstein

A proposta de Wittgenstein para o que obtemos, uma vez de posse da prova, é simples. Ao nos darmos conta da recorrência do resto na divisão *1 : 7*, estabelecemos a regra de que repetir, depois da vírgula, os algarismos 142857 um certo número de casas decimais deverá resultar na mesma coisa do que executar a divisão *1 : 7* até aquele ponto. Segundo o filósofo: "a repetição passa então a funcionar como um novo critério para a correta execução do algoritmo da divisão, no caso *1 : 7*".[15]

Desde o início, havia duas repetições envolvidas na divisão *1 : 7*. Em primeiro lugar, executar o algoritmo da divisão era repetir os passos 1, 2 e 3 da Tabela A. Mas, no entanto, também acontecia (para pessoas adequadamente treinadas) que, ao executarmos tal processo, certos algarismos reapareciam. A sugestão de Wittgenstein reza que, ao aceitarmos o argumento do ciclo resto/dividendo, elevamos a segunda repetição (dos algarismos) a um novo critério para estar executando a divisão *1 : 7*. A repetição dos algarismos "142857" deixa de ser uma constatação sobre algo que (na maior parte das vezes) acontecia para (a maior parte dos) agentes e passa a ser um critério de correção daquela operação.

O filósofo afirma: “Aqui estou adotando um novo critério para ver se dividi isto corretamente – e é isso que é marcado pela palavra ‘deve’.”[16]

Antes do argumento da recursão, tínhamos apenas o fato (empírico) de que, caso “seguíssemos as regras como realmente fazemos, sendo preparados como somos, então isto [a repetição] sempre ocorria”.[17]

Em contraste, depois, elevamos a repetição à condição de critério de correção: “Depois tomamos a recursão como critério: “deve acontecer” (um “deve” atemporal).[18]

Em uma outra passagem, o filósofo comenta:

> Todo mundo se sente desconfortável com o pensamento de que uma proposição possa dizer que tal e tal não ocorre em uma série infinita – por outro lado, não há nada demais sobre uma ordem dizendo que isto não deve ocorrer nesta série, por mais longe que seja continuada.[19]

É precisamos tornar claro o caráter radical da sugestão de Wittgenstein. Dito de uma forma muito resumida, mas direta, seu argumento afirma que, longe de determinarmos completamente como é a expansão completa da divisão de *1 : 7* (seja lá o que “determinar completamente” possa querer dizer aqui), afirmamos apenas que “tal operação, executada até uma casa decimal que escolhermos, deverá resultar equivalente à ordem: repita o padrão ‘142857’ até aquela mesma casa decimal”.

Temos agora mais um critério para decidir se alguém está executando tal divisão. Isso porque o que quer que essa pessoa faça deverá agora concordar com o que outra pessoa, que tomamos como seguindo corretamente a ordem, “repetir uma vez atrás da outra os algarismos 1*42857*”, venha a obter.

> A questão da recorrência é agora uma questão estritamente geométrica. A pessoa vai ser persuadida que se repetir este padrão aqui, deverá haver o mesmo numeral repetido (um novo critério *de que ele fez tal e tal*).[20]

O caráter radical da proposta de Wittgenstein emerge de forma ainda mais clara na ênfase do filósofo em uma simetria entre as duas possibilidades de correção (da cópia para a execução do algoritmo, e da execução do algoritmo para a cópia). Depois de aceitarmos o argumento da recursão, tanto o resultado da repetição do padrão "*142857*", um certo número de casas, passa a funcionar como critério corretor para a divisão de *1 : 7* até aquele ponto como também o inverso se dá. Ou seja, passa a fazer sentido usarmos a própria execução da divisão de *1 : 7* até uma casa decimal qualquer como critério corretor para a repetição do padrão "*142857*" (até aquela casa decimal)**.**

A proposta desta simetria tão radical aparece de forma bem explícita em um trecho escrito por Wittgenstein em 1942, nos *Remarks on the Foundations of Mathematics*, na última menção ao problema das dízimas periódicas por nós encontrada. O filósofo afirma:

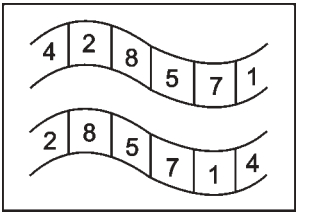
> Suponha que quando executássemos uma divisão, ela não nos levasse ao mesmo resultado do que a cópia do seu período. Isto poderia acontecer, por exemplo, devido a termos alterado nossas tabuadas, sem que nos tivéssemos dado conta disto (mas também poderia acontecer por passarmos a copiar de uma forma diferente).[21]

A sugestão de Wittgenstein soa completamente não-intuitiva e mesmo absurda. A situação não parece ser simétrica. Afinal, quando poderíamos imaginar que alguém usasse um algoritmo complicado como o da divisão de *1 : 7* para corrigir a simples repetição mecânica de um padrão de algarismos "*142857*"? O sentido inverso, a cópia servindo como critério corretor para o processo de divisão, isso sim nos parece mais plausível. Que uma criança, ao aprender sobre o ciclo do resto, repassasse suas antigas e suadas divisões agora amparada pela poderosa luz que o critério da repetição lança sobre suas operações, tal situação até que poderia ser bem razoável. Afinal, é muito mais fácil enganar em algum passo das

várias divisões parciais, multiplicações e subtrações que compõem o processo da divisão do que enganar na repetição de "*142857*". Como imaginar, no entanto, o contrário, a divisão servindo como critério corretor para a cópia?

Talvez pudéssemos sugerir uma situação ilustrativa, em socorro ao filósofo. Vamos imaginar que realmente pedíssemos a uma primeira pessoa que repetisse sempre o padrão "*142857*" (digamos, até a 500ª casa decimal), e a uma segunda pessoa que dividisse *1 : 7* até o mesmo ponto.[22] Mais tarde, ao recebermos em duas fitas as respostas de nossos dois "ajudantes", percebemos que, em um ponto qualquer, os algarismos de uma fita concordam, não com os algarismos da casa correspondente na outra fita, mas, surpreendentemente, com os algarismos da casa imediatamente anterior!

Se, além disto, fôssemos informados de que a fita "mais atrasada" (a de baixo, em nosso desenho) tinha sido executada pela pessoa que deveria apenas "repetir o padrão "*142857*", então, poderia argumentar Wittgenstein: com base em nossa nova conexão entre as duas ordens, faria sentido imaginarmos que o "copista" do padrão "*142857*" errara (com certeza tendo deixando passar algum algarismo sem copiar).



Isso porque se, ao executar a divisão *1 : 7*, depois de um "*2*", digamos, falhássemos em encontrar o próximo algarismo (no caso o *8*), estaríamos em uma tal confusão que nada indicaria que na próxima casa "voltaríamos ao normal", encontrando um "*5*". Em oposição à cópia, para a pessoa que executa o algoritmo da divisão, uma vez tendo ocorrido um engano em alguma casa, esse engano tende a "desvirtuar toda a operação", daquele ponto em diante. O importante é: pode fazer sentido que usássemos o algoritmo da divisão para estabelecermos enganos na execução de cópias.

É claro que, depois de um exame mais cuidadoso, a situação poderia novamente inverter-se. Poderíamos chegar à conclusão de

que a pessoa que dividiu, em algum ponto escreveu inadvertidamente duas vezes o mesmo algarismo, ou ainda que havíamos contado erradamente as casas decimais e que, de fato, as respostas não estavam "defasadas" uma em relação à outra. No primeiro caso então, usando uma maneira de falar cara ao filósofo, diríamos que apenas o copista executou realmente a ordem que lhe foi dada, mas que a pessoa que dividiu não "seguiu os passos do algoritmo da divisão, pois repetiu o algarismo tal e tal". Alternativamente, no segundo caso, diríamos que ambos, copista e executor da divisão, seguiram as suas ordens. A operação de contagem das casas decimais é que não teria sido realmente executada.

Críticas à sugestão de Wittgenstein

No parágrafo anterior procuramos empregar um modo de falar muito característico de Wittgenstein. Afirmamos, por exemplo, que, baseados na convicção de que havíamos errado na contagem das casas e no novo critério da equivalência entre cópia e divisão, "faria sentido chamar" a atividade que nossos ajudantes fizeram, de, respectivamente, "dividir *1 : 7*" (até a 500ª casa) e "repetir '*142857*'" (até aquela casa decimal), mas não faria sentido chamar o que havíamos feito de "contagem". "Fazer sentido chamar tal evento de ..." "não chamaríamos tal outro evento de ...". Temos aqui um vistoso exemplo da estranha e profundamente idiossincrásica maneira de o filósofo exprimir-se, mais um componente muito importante do conhecido "jargão wittgensteineano".[23]

Um exemplo ilustrativo típico deve bastar. Na seção inicial dos *Remarks on the Foundation of Mathematics*, em resposta ao seu eterno "interlocutor imaginário" que lhe acusa de não reconhecer que há a maneira correta de seguir uma série como *2, 4, 6, 8, ...*, encontramos a seguinte afirmação: "Neste caso não chamaríamos de 'continuação da série' e também, presumivelmente, nem de 'inferência'."[24]

O jargão de Wittgenstein tem algo funesto, um certo traço frustrante e incomodativo. Parece haver muito mais em jogo do que o filósofo nos dá a entender. Não se trata apenas do que vamos usar como critério para chamar isto ou aquilo de "divisão", de "erro" ou de "cópia". Existe também o correto, a maneira certa de copiar, digamos, o padrão "*142857*". E isso de forma completamente independentemente da maneira que, por uma ou outra razão, aconteçamos de nos referir a tal atividade e mesmo aos critérios que usamos para embasar tal decisão.

Para além dessa trama cruzada de imputações de erro e de utilização de critérios de correção, tem de haver a maneira certa de repetir, por exemplo, o padrão "*142857*"! Haveria uma maneira que seria a certa. Essa maneira estaria lá, independente de nossa execução ou a da execução de qualquer um outro agente, de critérios de correção e de maneiras de a ela nos referirmos. É um fato que todos nós chegamos a executar apenas um segmento inicial finito das infinitas repetições do padrão como "*142857*" em que se constituiria a resposta da divisão *1 : 7*. Mas a idéia daquela expansão iria muito mais além, ela seria claramente infinita.

O próprio Wittgenstein reconhece isso:

> [...] você estaria inclinado a usar expressões como: "Os passos já estariam *efetivamente* tomados, mesmo antes que eu os executasse na escrita, oralmente, ou em pensamento". E parecia como se fossem de alguma forma *sui generis* predeterminados, antecipados – de uma forma como somente o ato de significação pode antecipar a realidade.[25]

Longe de termos apenas "critérios cruzados" de correção, da ordem "copie!" para a ordem "divida!" (e vice-versa), teríamos, isso sim, uma (e a mesma) maneira certa de executar essas duas ordens. Assim, novamente em oposição ao que defende o filósofo, o que de fato obtemos com a prova da recursão do resto é algo bem distinto e muito mais forte do que meramente uma nova possibilidade de checagem cruzada. Teríamos descoberto que, sem que suspeitá-

ssemos, ambas as ordens de fato se refeririam a uma mesma seqüência infinita, a seqüência (a partir da vírgula): "*1, 4, 2, 8, 5, 7, 1, 4, 2, 8, 5, 7,1, 4, 2, ...*". De alguma forma teríamos conseguido "vislumbrar o infinito" e, ainda que de modo indireto, nos teria sido dado a conhecer a composição inteira daquela cadeia infinita de números.

Pronto. Umas poucas palavras e nos encontramos completamente distantes das estranhas sugestões do filósofo e dos argumentos que, com dificuldade, vínhamos formulando. Anteriormente havíamos tomamos o cuidado de distinguir dois tipos de afirmações que nos pareceram muito diferentes: uma regra como "calcula-se *25 x 25* e obtém-se *625*" e uma afirmação empírica (temporal) como "fulano acaba de executar a operação *25 x 25* e obteve *625*" (ou, caso tenha errado, *525*), Lá dissemos que, quanto ao primeiro caso, o processo permanecia como que ligado à resposta: executar a operação *25 x 25* era obter *625* no final do processo.[26] Já no segundo caso, processo e resultado permaneciam independentes um do outro. Em casos assim, podíamos afirmar coisas como "Fulano executou o processo, multiplicou *25 x 25* e obteve *525*"(!).

O problema é que, no segundo caso, em que processo e resultado aparecem independentes, não estaríamos falando de regras, algo que se aplicaria indistintamente a qualquer falante e a qualquer execução. Estaríamos, isto sim, nos referindo à maneira como as pessoas têm costumado agir, ou como uma pessoa (nosso "Fulano") agiu daquela vez em que se pôs a executar a operação *25 x 25*. Ou bem fixamos o que seria seguir uma regra, determinando diretamente o que deveria ser obtido, independentemente de qualquer agente executor, ou bem tomamos o comportamento de um (grupo de) agente(s) como modelo. Nesse segundo caso, seguir tal regra seria apenas "agir como aquelas pessoas costumam agir".

Tais sugestões sobre regras e sentenças empíricas acabaram nos parecendo por demais restritivas, no entanto, três ou quatro parágrafos atrás. Ao lidarmos com a divisão *1 : 7*, afigurou-se-nos mandatório imaginar uma espécie de caso intermediário entre aqueles dois tipos de afirmações. Além de podermos falar de como

as pessoas realmente agem, executando certas ordens, e de como elas deveriam agir (apontando as respostas que deveriam obter), haveria uma terceira possibilidade. Poderíamos falar "na maneira certa de se executar uma ordem" de forma, de um lado, independente do que as pessoas fazem ou deixam de fazer, mas, de outro, como que "apontando diretamente para o processo em si" sem o ligarmos a qualquer resposta explicitamente dada.

Essa terceira entidade seria uma espécie de híbrido entre as duas anteriores. Ela teria a estrutura de uma formulação (como a tabela A) que, no entanto, seria independente de qualquer intérprete-executor. Ela seria capaz de vencer o hiato entre processo e execução, sem que, para isso, precisássemos recorrer a qualquer agente executor. Poderíamos ver tal entidade de duas maneiras. Como uma regra, ela seria "uma esquisita máquina lógica que contém suas execuções antes mesmo de estas serem executadas".[27]

Ou então, alternativamente, poderíamos vê-la, como um tipo estranho de resposta, algo em uma supra-realidade, em que o resultado do processo estivesse, de alguma forma, já executado (por algum super-agente)**.** Como exemplo, em geometria teríamos a idéia de uma linha infinita que já ligaria, ainda que de forma "muito abstrata", dois pontos quaisquer:

> Apesar de ser dito em Euclides que uma linha pode ser desenhada entre dois pontos quaisquer, de fato a linha já existe mesmo que ninguém a tenha traçado. A idéia é que há um reino da geometria em que as entidades geométricas já existem. O que no mundo ordinário chamaríamos de possibilidade, no mundo geométrico seria realidade.[28]

A RESPOSTA DO FILÓSOFO: O ARGUMENTO DAS CONTINUAÇÕES NÃO-STANDARD

A argumentação de nosso interlocutor imaginário está toda apoiada em uma concepção extremamente natural e difundida de como deveríamos entender qualquer identidade matemática, como:

1 : 7 = 0, 1428...

Segundo essa concepção tão ordinária de uma equação matemática, o que uma afirmação assim realmente asseriria seria uma identidade de denotação: cada lado daquela equação denotaria um e o mesmo objeto. E é nesse ponto que a idéia de uma expansão infinita, com uma existência totalmente independente de critérios cruzados de correção, por um lado, e a de execuções empiricamente atualizadas, por outro, se impõe de forma quase incontornável. Essa expansão infinita seria exatamente o objeto abstrato identicamente denotado pelos dois lados daquela equação.

Seria ela que nos permitiria falar no processo de divisão de dois números como *1* e *7*, por um lado, de forma totalmente independente de respostas (sempre parciais), e, por outro, de maneira atemporal e independente de qualquer agente executor.

O importante é que, segundo nosso interlocutor, assim como afirmávamos que "dividir *1 : 7* até a oitava casa decimal era encontrar 0,14285714", também faria sentido afirmar: "Dividir-se *1 : 7* é produzir um certo segmento (inicial) de uma seqüência, a seqüência *142857142857142857*...". Teríamos, assim, o aparecimento de novo critério geral para haver executado aquele processo: a cópia, não de uma resposta empírica qualquer, mas daquele (uma parte inicial) objeto abstrato, aquela expansão.

Entretanto, tal "objeto abstrato" teria a estranha propriedade de jamais poder ser ("completamente") explicitável. Ou seja, em uma conversação, poderíamos apenas indiretamente indicá-lo (digamos, usando o segmento inicial da expansão, *0,14284714*....), mas nunca determinar, completa e exaustivamente, o objeto mencionado para nosso interlocutor. É exatamente essa combinação, entre inexprimibilidade e fixação de sentido, que será explorada por Wittgenstein em seu argumento.

Mas, voltemos ao nosso novo objeto, a "expansão infinita *142857142857 142857*...". Com base nela, cada processo ("cópia do padrão '*142857*'", "execução da divisão *1 : 7*") estaria associado a

essa expansão infinita. Cada algoritmo infinito estaria associado a um "objeto infinito" desses, sua "expansão atemporal". Poderíamos mesmo imaginar os vários processos se distinguindo uns dos outros, na medida em que fôssemos avançando mais e mais casas decimais, e percebêssemos que as seqüências a eles associadas divergem. Por exemplo, a divisão *1499 : 4500* só lograria se distinguir da divisão *1 : 3* a partir da quarta casa decimal:

1499 : 4500 = 0,333111...
1 : 3 = 0,333333...

Já tomando outro conhecido número como ilustração, poderíamos dizer que p se distinguiria de *277 : 120* somente na quinta casa decimal depois da vírgula:

p = 0,3141595...
377 : 120 = 0,3141666...

A essa altura, Wittgenstein nos chama a atenção para certas pequenas possibilidades de enganos que parecem ganhar vida embaladas na assimetria proposta por nosso interlocutor entre o nosso "acesso" (sempre parcial) às expansões infinitas e seu caráter de critério último de decisão, de regra matemática atemporal. Wittgenstein imagina um professor ensinando a um aluno a série infinita dos números pares. Após algumas dificuldades, o aluno finalmente "toma posse" da regra e executa vários trechos corretamente. Ele escreve, por exemplo,

2, 4, 6, 8, 10...

e continua a operação corretamente, mesmo para números mais elevados:

32, 34, 36, 38, ...

Assim, após alguns testes, declaramos que tal aluno domina a série dos pares. Aqui tem início o argumento de Wittgenstein. Ele pergunta: Como poderemos ter certeza de que o aluno aprendeu aquele processo que lhe ensinávamos e não um outro qualquer que tivesse a incômoda propriedade de coincidir com ele em suas casas iniciais (como o caso de p e de 377/120)? Até onde precisaríamos continuar a série para determinarmos exatamente o processo infinito pretendido?[29]

O problema que nos ronda aqui é claro. Em analogia ao caso de execuções de divisões até casas decimais específicas, imaginamos também uma "resposta infinita" – a expansão decimal 2, 4, 6, ... – que fixaria exatamente o processo pretendido. Essa fixação última, é claro, não seria nunca completamente implementável: jamais poderíamos escrever a lista completa de todos os pares para determinar o que entendemos por "número par".

Dito com outras palavras, da mesma forma que o critério último e decisivo para afirmarmos quando "fulano multiplicou *25 x 25*" era a obtenção da resposta certa, *625*,[30] aqui também nos pareceria se impor como critério último para afirmar algo como "fulano compreendeu nossa explicação": nada mais, nada menos do que "fulano está de posse daquela expansão infinita que tínhamos em mente". Wittgenstein escreve:

> Sua idéia, então, é que você sabe a aplicação da regra da série de forma independente de lembrar-se de aplicações concretas a números específicos. E você talvez diria: "É claro! Pois a série é infinita e o pedaço que desenvolvi é finito".[31]

O problema com essa sugestão, é claro, estaria na não-explicitabilidade daquele objeto: nunca podemos listar a série inteira dos pares para o nosso aluno. Como afirmamos anteriormente, tal objeto combinaria duas propriedades que, juntas, nos parecem agora um pouco incômodas. Por um lado, aquela expansão total não-empírica funciona como o critério último para a determinação de

compreensão por parte de nosso aluno. E, por outro, esse objeto-árbitro final não seria jamais completamente explicitável.

Voltemos alguns parágrafos atrás, a imagem dos vários algoritmos se distinguindo, baseados nos objetos abstratos a eles associados, suas expansões decimais infinitas. Como vimos, p, por exemplo, poderia se distinguir do processo de divisão de *377 : 120* já a partir da quinta casa decimal depois da vírgula:

p = 0,3141595...
377 : 120 = 0,3141666...

Apoiado nesses novos "objeto atemporais", Wittgenstein imagina a curiosa possibilidade de um engano generalizado e não detectado no entendimento de nossos algoritmos infinitos por parte de nossos agentes. Cada agente teria uma compreensão distinta, digamos, da série dos pares, ou a execução da divisão *1 : 7*. Apenas essa discrepância nunca seria notada porque as séries infinitas (distintas) por eles associadas a esses procedimentos concordariam em seus segmentos iniciais, apenas divergindo a partir de valores muito altos, valores (ainda) não alcançados.

Voltemos ao exemplo do professor ensinando a série dos pares ao aluno. O professor dá explicações e exemplos até um número qualquer, digamos, até 1000:

2, 4, 6, 8, 10...
352, 354, 356, 358...
992, 994, 996, 998...

Após alguns testes, o professor está pronto a decretar o domínio do aluno sobre a série dos pares, quando então Wittgenstein introduz o tal tipo de engano de que falávamos. O professor pede ao aluno que continue agora a série de um ponto além dos exemplos que eles até agora haviam explicitado. O filósofo escreve:

> Vamos supor que tenhamos feito exercícios e lhe dado testes até o número *1000*. Agora mandamos o aluno continuar a série (digamos, +*2)* além de 1000 – e ele escreve *1000, 1004, 1008, 1012*.[32]

O aluno pareceria ter errado, não há dúvida. No entanto, logo adiante, o filósofo nos explica que seu erro tinha sido de um tipo especial. "É natural para essa pessoa entender a nossa ordem e nossas explicações como nós entenderíamos a ordem: 'Some *2* até *1000*, *4* até *2000*, *6* até *3000* e assim por diante'".[33]

O que o filósofo propõe é que nosso aluno tenha formado uma interpretação não-standard do predicado "ser par". Ele imagina assim, em sua pequena narração, duas maneiras de compreender a ordem "vá listando os números pares": a maneira do professor (a standard) e a do aluno (não-standard). Todos os exemplos, todas as explicações trocadas entre os dois, haviam sido sempre entendidos de duas formas diferentes (i.e., associados a duas séries infinitas distintas), que, no entanto, coincidiam até o número *1000*. E, é claro, tal confusão teria permanecido indetectada, caso o aluno e o professor não tivessem tentado executar a série mais adiante, para além do ponto de divergência dessas séries.

E aqui chegamos ao cerne da questão proposta por Wittgenstein: generalizar tal situação. Sua pergunta é: "Por que não poderíamos imaginar que a mesma curiosa cisão de compreensões ocorrida entre o aluno e seu professor nos rondaria também a todos?"

Apoiados nesses novos objetos "não diretamente acessíveis", as séries infinitas, por que não poderíamos imaginar contínuas falências não detectadas de comunicação? Ou seja, como poderíamos evitar que a introdução desses objetos abstratos infinitos acabe abrindo espaço para duvidarmos constantemente da compreensão alheia?[34]

Em uma passagem sobre a mesma situação, em uma de suas palestras de 1939, Wittgenstein escreve:

> Suponha que eu ensine Lewy a elevar números ao quadrado dando-lhe a regra e calculando exemplos. E suponha que esses exemplos sejam tomados da série dos números de 1 a 1.000.000. Somos tentados a dizer: "Não podemos realmente saber que ele não diferirá de nós quando elevar ao quadrado números maiores do que, digamos, 1.000.000.000. E isto mostra que nunca sabemos com certeza o que outra pessoa entende".[35]

O argumento do filósofo procede de forma notavelmente paralela a um outro conhecido argumento cético, em filosofia, envolvendo não conceitos matemáticos, mas estados de consciência. Em um trecho de suas *Investigações filosóficas,* Wittgenstein, novamente apoiado na idéia de um certo "algo" por detrás de nossa compreensão das palavras que designam as cores, sugere a possibilidade de que, sem que pudéssemos perceber, metade das pessoas visse vermelho de uma forma diferente da outra metade: "A suposição seria possível – apesar de não verificável – que uma parte da humanidade tivesse uma sensação de vermelho e a outra parte, outra."[36]

Assim como no caso de nossas "sensações internas de vermelho", pareceríamos correr constantemente o risco de que, certo dia, uma nova casa decimal fosse calculada (ou um novo objeto vermelho nunca antes observado), que, para nossa surpresa, efetuasse a segregação de todos nós em dois tipos de dois tipos de "somadores +2" (ou de dois tipos de "olhadores de vermelho").

Encontramos, em vários trechos de Wittgenstein sobre filosofia da matemática, o recurso ao argumento das "continuações não-standard" de séries simples, sempre como forma de o filósofo contrapor-se à idéia de seqüências definidas, atemporais, funcionando como os reais determinadores de processos matemáticos. Somos constantemente alertados para a conexão entre a introdução dessas entidades e o sentido de imaginar possibilidades de enganos generalizados e sistemáticos na compreensão do prosseguimento de séries para além de nossas reticências.

Como conseqüência da sugestão de nosso interlocutor, Wittgenstein propõe um espetacular estilhaçamento dos conceitos matemáticos, um estilhaçamento em que cada agente, a cada instante, poderia estar executando uma nova função matemática associada (erradamente) a velhas palavras. Tal explosão semântica, no entanto, seria silenciosa: jamais a notaríamos porque (ainda?) não teríamos atingido os valores que a tornariam aparente.[37] Talvez possamos incluir aqui um último trecho de Wittgenstein, novamente retirado de um contexto que trata dos estados de consciência: "Livre-se sempre da idéia de objeto privado da seguinte forma: assuma que ele constantemente se modifica, mas que você não nota as mudanças porque sua memória constantemente o trai".[38]

UM RÁPIDO SOBREVÔO SOBRE NOSSO CAMINHO ARGUMENTATIVO

No início de nosso texto, apresentamos o exemplo das dízimas periódicas como um poderoso e derradeiro contra-exemplo às teses de Wittgenstein sobre uma separação forte entre descobertas empíricas e regras matemáticas. O singelo exemplo de uma divisão como *1 : 7 = 0, 1428*... parecia ser exatamente uma espécie de híbrido entre aqueles dois tipos de teorias científicas, bem ao contrário do pretendido pelo filósofo.

Um pouco mais adiante em nossa exploração, fomos nos dando conta de que tal embaralhamento (entre descobertas empíricas e regras matemáticas) estava associado a uma outra entidade igualmente híbrida: a idéia de uma expansão infinita. De um lado, aquele estranho tipo de entidade funcionava como uma espécie de resposta, mas uma resposta jamais (inteiramente) explicitável. De outro, teríamos uma definição (como na definição A do algoritmo da divisão), a determinar exatamente o processo pretendido. Novamente, no entanto, diferentemente das definições ordinárias, essas expansões prescindiriam de qualquer agente executor para interpretá-las. Elas já estariam, como que "antecipadamente dadas", feitas.

As propostas do filósofo de interpretação de uma equação como *1 : 7 = 0, 1428*..., em termos da noção de "critérios de correção cruzada entre dois processos" (execução da divisão e cópia do padrão "142857"), aparece então como um tratamento alternativo para evitarmos precisamente a postulação de tais estranhas entidades. Vimos a seguir a réplica de nosso interlocutor imaginário, insistindo na necessidade de sua postulação. A contra-argumentação final de Wittgenstein nos chama a atenção para um estranho e inesperado preço a ser pago quando da aceitação desses "objetos abstratos não-explicitáveis": uma nova e corrosiva forma de ceticismo.

Abstract; This paper deals with Wittgenstein's extensive discussions about one of the most simple and elementary forms of infinity in mathematics: the infinite decimal expansions. We try to organize and present his several arguments into one single expository line. Toward the end, we introduce, although briefly, Wittgenstein's famous "rule-following" arguments and the idea of non-standard interpretation of infinite processes.

Key words: Wittgenstein, philosophy of Mathematics, decimal expansions.

Notas

1. Este artigo é uma adaptação do capítulo III de minha dissertação de mestrado apresentada à Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, em 1996.
2. *LFM*, palestra X, p. 92.
3. *WWK*, p. 33 e p. 135.
4. Ver especialmente parágrafos 30, 31, 35 e 36 da seção VII de parágrafo 42 da seção VIII.
5. Ver especialmente as páginas 182-191(1935) e 210-214 (1932-33).
6. Na quinta série do ensino fundamental, no caso atual, no Brasil.
7. *AWL*, p. 211.
8. Bertrand Russell, *Principles of mathematics*, p. 69.
9. Idem, ibidem. Grifo nosso.

10. *AWL*, p. 210.
11. *RFM*, parte VI, § 16, p. 319.
12. Idem, ibidem.
13. Idem, ibidem.
14. *LFM*, palestra XII, p. 111.
15. Cf. Frascolla (1995, p. 90).
16. *LFM*, palestra XIII, p. 129.
17. Idem, ibidem.
18. Idem, ibidem.
19. *RFM*, parte V, § 18, p. 276.
20. *LFM*, palestra XIV, p. 130.
21. *RFM*, parte IV, § 25. p. 236.
22. Podemos supor que a segunda pessoa não conhecesse o critério da repetição, para assegurarmos que ela realmente apenas executasse a divisão.
23. Para um comentário muito perspicaz sobre o assunto, cf. Frascolla (1995, p. vii).
24. *RFM*, parte I, § 116, p. 80 (grifo nosso).
25. *PI*, § 188, p. 76.
26. Um calculador prodígio só "calcula" por isso, porque suas respostas são corretas. Cf. *PI*, § 236, p. 87: "Calculadores prodígio que chegam à resposta certa mas não conseguem dizer como o fizeram. Deveríamos dizer que eles não calculam (uma família de casos)."
27. Baker & Hacker (1984, p. 124).
28. *LFM*, palestra XV, p. 144.
29. *PI*, § 145, p. 57-58.
30. Como no caso dos calculadores prodígio, ver nota 25.
31. *PI*, § 147, p. 58.

32. *PI*, § 185, p. 75.
33. Idem, ibidem.
34. O argumento dessa seção é apenas uma readaptação do famoso "argumento cético" proposto por Kripke no seu livro *Wittgenstein on rules and private language*. Não teremos espaço aqui para discutir nossos pontos de discordância e concordância com aquele livro tão iluminador e controverso.
35. *LFM*, palestra II, p. 27.
36. *PI*, §272, p. 95.
37. Kripke (1972, p. 60) escreve: "Wittgenstein inventou um nova forma de ceticismo. Pessoalmente eu estou inclinado a considerá-la como o problema cético mais radical e original que a filosofia viu até hoje, um problema que apenas uma conformação muito extraordinária de mente poderia produzir".
38. *PI*, p. 207.

Referências

BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. *Scepticism, rules and language*. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

DUMMETT, M. *Truth and other enigmas*. London: Duckworth, 1978.

FRASCOLLA, P. *Wittgenstiens's philosophy os mathematics*. London: Routledge, 1995.

KRIPKE. S. *Wittgenstein on rules and private language*. Oxford: Basil Blackwell, 1972.

RUSSELL, B. *Principles of mathematics*. New York: W.W. Norton, 1982.

WITTGENSTEIN, Ludwig. *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle:* conversations recorded by Friedrich Waismann. (*WWK*). Oxford: Basil Blackwell, 1979.

_____. *Philosophical Grammar*. (*PG*). Oxford: Basil Blackwell, 1974.

_____. *Wittgenstein Lectures, Cambridge 1932-1935*. (*AWL*). Edited by Alice Ambrose. Oxford: Basil Blackwell, 1979.

_____. *Wittgenstein Lectures on the Foundations of Mathematics*, 1939. (*LFM*). Edited by C. Diamond. Sussex: The Harvester, 1976.

_____. *Philosophical Investigations*. (*PI*). New York: Macmillan Publishing, 1968.

_____. *Remarks on the Foundations of Mathematics*. (*RFM*). 3.ed. Cambridge: The MIT Press, 1978.