À maneira de um Colar de Pérolas?

André Porto
Universidade Federal de Goiás/CNPq
andre.porto.ufg@gmail.com

Abstract :

This paper offers an overview of various alternative formulations for Analysis, the theory of Integral and Differential Calculus, and its diverging conceptions of the topological structure of the continuum. We pay particularly attention to Smooth Analysis, a proposal created by William Lawvere and Anders Kock based on Grothendieck's work on a categorical algebraic geometry. The role of Heyting's logic, common to all these alternatives is emphasized.

Keywords: Continuum, Smooth Analysis, John Bell, Lawvere-Kock Axiom, infinitesimals.

1. Introdução

Uma reta pode ser imaginada como sendo constituída apenas por pontos, como se ela fosse um imenso "colar de pérolas", cada ponto encontrando-se imediatamente precedido por um ponto anterior, e sucedido por um seguinte, de tal maneira que a reta inteira não fosse mais do que uma imensa sequência uniforme de componentes, à maneira de um colar de pérolas? Como sabemos, essa pergunta desempenhou um papel fundamental na filosofia pré-socrática grega e recebeu uma resposta negativa por Aristóteles, no livro VI da Física, resposta essa que foi tomada como tendo sido definitiva durante toda a idade média e início do modernismo:

> ...nada que seja contínuo pode ser composto de 'indivisíveis': e.g. a linha não pode ser composta por pontos, a linha sendo contínua e o ponto, indivisível.[1]

A argumentação de Aristóteles para isso parece bem razoável. Dois pontos quaisquer, distintos, sempre determinam um segmento de reta. E, no interior desse segmento, unindo os dois pontos iniciais, haverá sempre novos pontos, diferentes dos dois primeiros. Como conceber dois pontos que ainda sejam distintos, mas que sejam tão próximos, um do outro, que não haja nenhum intervalo entre eles, dois pontos imediatamente "justapostos"? Nas palavras de Aristóteles:

> ... as extremidades de dois pontos não podem ser um (já que em um indivisível não pode haver extremidade como sendo distinta de outra parte), nem

---

[1] Aristóteles. *The Works of Aristotle*, trad. William David Ross (Oxford: Claredon Press, 1962), 231a25.

justapostas (já que aquilo que não tem partes não pode ter extremidade, a extremidade, e a coisa da qual se é o extremo, como sendo distintas). [2]

Como dissemos, a argumentação aristotélica, rejeitando a imagem do colar de pérolas, foi aceita por todo o período medieval e mesmo depois sobreviveu na boca de importantes filósofos e até mesmo de ilustres matemáticos, como podemos ver, por exemplo, na seguinte lista compilada por John Bell:[3]

Leibniz: Um ponto não pode ser considerado uma parte de uma linha.

Kant: O espaço e o tempo são quanta continua ... pontos e instantes, meras posições ... e de meras posições, vistas como sendo capazes de ser dadas anteriormente ao espaço e o tempo, nem o espaço, nem o tempo, podem ser construídos.

Poincaré: ... entre elementos do continuum [está pressuposto] uma conexão íntima que os torna uma totalidade, da qual o ponto não anterior à linha, mas a linha ao ponto.

Weyl: Pontos exatos de tempo ou de espaço não são elementos atômicos últimos, subjacentes à duração ou à extensão que é nos dada na experiência.

Brouwer: O contínuo linear não pode ser exaurido pela interpolação de novas unidades e, portanto, jamais pode ser pensado como uma mera coleção de unidades.

Como todos sabemos, a despeito das consagradas vozes dissidentes, a opinião hegemônica entre os matemáticos da atualidade não segue a sugestão aristotélica. Na concepção mais difundida, presente na maioria dos textos de matemática contemporâneos, a reta não “passaria de um mero conjunto de pontos”. Encontramos essa afirmação explicitamente formulada, ou implicitamente utilizada, em quase todos os nossos livros de Cálculo ou de Análise contemporâneos. Um exemplo apenas deverá ser suficiente:

... o conjunto números x que satisfazem $|x-a|<\varepsilon$ pode ser visualizado como a **coleção dos pontos** cuja distância de a é menor do que ε. **Esse conjunto de pontos é o “intervalo”** de $a-\varepsilon$ até $a+\varepsilon$... O **conjunto** $\mathbb{R}$ **de todos os números reais** é considerado também um **“intervalo”**, e às vezes é denotado por $(-\infty,\infty)$. [4] [Grifo meu]

Na verdade, no caso da matemática clássica, a analogia com o “colar de pérolas” pode ser levada muito mais longe do que apenas a ideia de tomar o contínuo como sendo “constituído por seus pontos”. Segundo a Teoria dos Conjuntos normalmente aceita (em contextos clássicos), existiria uma maneira de irmos “pinçando, um a um, todos os pontos de uma reta”, em uma sequência ininterrupta de escolhas que teria seu início com a reta completa, e terminaria quando “não restasse mais nenhum ponto a ser retirado”, à maneira de um colar pérolas da qual todas as pérolas tivessem sido removidas.

Estamos nos referindo aqui, é claro, ao famoso teorema de Zermelo de que todo o conjunto pode ser bem-ordenado, uma consequência quase imediata de seu controverso Axioma da Escolha. A publicação desse resultado por Zermelo em 1904

[2] Aristóteles. *The Works of Aristotle*, 231a25.
[3] Lane. *A Primier of Infinitesimal Analysis* (Cambridge: Cambridge University Press, 1998), 1-2.
[4] Spivak. *Calculus* (Londres: Addison Wesley Publishing Company, 1973), 54-5.

produziu uma grande controvérsia no mundo matemático. A querela envolveu uma longa lista de iminentes matemáticos, como Henry Poincaré, Emile Borel, René Baire, Jacques Hadamard, Henri Lebesgue, Julius Köning, Philip Jourdain, Felix Bernstein e Arthur Schoenflies, todos esses, críticos do resultado de Zermelo![5] A contrariedade desses matemáticos não advinha propriamente do resultado geral Zermelo – qualquer conjunto pode ser bem-ordenado –, mas, sim, de sua aplicação ao contexto de um certo conjunto especial, exatamente o tema de nosso artigo, o conjunto de pontos do contínuo. Se qualquer conjunto pode ser bem-ordenado e, além disso, aceitarmos que uma reta não seja nada mais do que um conjunto de pontos, então a conclusão de Zermelo pareceria inevitável: teria de haver uma maneira de irmos pinçando, item por item, cada ponto da reta, numa sequência que bem-ordenaria os reais. O problema era: exatamente de que *ordenação* estaríamos falando aqui?

A relação ordinária de ordem dos reais, "<", não poderia nos fornecer tal ordenamento, pois como já afirmava Aristóteles, o conjunto dos pontos à direita de uma certa cota não possui um "primeiro elemento", i.e., não existe "o primeiro ponto à esquerda de um ponto dado", um ponto que esteja "imediatamente justaposto" a ele. Mas, nesse caso, qual seria então essa função que enumeraria os reais, nos fornecendo, para cada ponto, um "ponto seguinte naquela tal sequência infinita enumeradora"? Que operação seria essa que nos permitiria exaurir, um a um, a totalidade dos pontos de uma reta?

Exatamente aqui encontramos o lado mais frágil da argumentação proposta por Zermelo: teríamos apenas uma "garantia vazia da existência de tal função". Ela "precisaria existir" (em um sentido completamente abstrato de "existência") apenas por que a reta *teria de ser* um conjunto de pontos, e de um conjunto de pontos (não vazio), podemos sempre "eleger, um a um, cada um de seus elementos". Tal era o conteúdo do famoso Axioma da Escolha, de Zermelo. Em outras palavras, a existência da tal função seria apenas uma decorrência direta de termos tomado a reta como sendo um *conjunto* (de pontos) e de aceitarmos o novo Axioma de Zermelo: mesmo em contextos infinitos, é "sempre possível escolhermos", ainda que "arbitrariamente" um "próximo elemento", ainda que não tenhamos nenhum critério matemático para individualizar qual deveria ser esse "próximo elemento".

As reações aos argumentos de Zermelo foram vigorosas. Segundo Borel, "nenhum matemático poderia aceitar esse raciocínio como válido ... tais argumentos estão fora do reino da matemática". Por sua vez, Baire afirmava "Me recuso ... a atribuir qualquer significado ao ato de supor que uma escolha tenha sido feita em cada subconjunto de um conjunto dado".[6]

Muitos desses matemáticos aceitavam o condicional de Zermelo de que, se aceitarmos o axioma, sua conclusão se seguiria: o contínuo teria de ser bem-ordenado. O problema para esses matemáticos, no entanto, era o inverso. Como tantas vezes ocorre na história do pensamento, ao invés de tomar o argumento de Zermelo como um *modus ponens*, esses matemáticos o entendiam como um *modus tollens*: como não

[5] Ewald. *From Kand to Hilbert: A Souce Book in the Foundations of Mathematics,* Vol. 1. (Oxford: Oxford University Press, 1996), 1075

[6] Ewald. From Kand to Hilbert: A Souce Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1, 1076, 1080

parece ser *aceitável a conclusão de que os reais possam ser bem-ordenados* – a ideia do "colar de pérolas" – logo o *axioma de Zermelo deve envolver algo de errado* (a despeito de seu caráter razoavelmente intuitivo).

O objetivo deste artigo, no entanto, não é o de estender a polêmica em torno do Axioma da Escolha e a concepção clássica do Contínuo. Pretendemos antes registrar algo que talvez seja menos conhecido: apesar de atualmente hegemônica, a concepção clássica do contínuo como um mero "conjunto de pontos" não é, de maneira nenhuma, universal. Propostas alternativas, em que a reta não é vista como uma reunião de pontos e de que, juntando pontos, um a um, jamais teremos um segmento contínuo, permanecem sendo exploradas.

Além do conhecido exemplo da Análise proposta pelo intuicionismo original do próprio Brouwer e sua noção de "sequência de escolha", temos mais recentemente a proposta de uma Análise mais puramente computacional, feita por Bishop, sem apelo à controversa noção de escolha de Brouwer.[7] Ainda dentro do contexto construtivista, temos as propostas do Construtivismo Russo.[8] utilizando a concepção (clássica) de "função computável" e a Tese de Church. Além disso temos, já fora do universo construtivista e intuicionista propriamente ditos (mas ainda assim mantendo a lógica de Heyting e a recusa da lei do terceiro excluído!), a Análise Suave de Lawvere-Koch[9], resultante dos famosos trabalhos de Grothendieck sobre a estrutura da Análise Clássica desde um ponto de vista categorial.

2. Um Universo de Funções Contínuas

Antes de entrarmos diretamente no problema de como o ponto poderia deixar de ser uma parte da reta – como pensar a microestrutura de uma reta como distinta da de um colar de pérolas – temos de deixar mais claro como devemos entender a expressão "parte de uma reta" no contexto matemático que estamos tratando aqui. Não estamos nos perguntando, é claro, se ao cortamos um barbante em partes muito pequenas, as menores possíveis, digamos, se algumas dessas partes seriam tão pequenas que envolveriam apenas um "único ponto". Essa pergunta seria claramente absurda.

Não estamos lidando aqui com contextos empíricos, nossa pergunta é "matemática". Quando afirmamos que nas análises propostas por Brouwer, por Bishop ou por Lawvere-Kock *o contínuo não é constituído de pontos*, ou que *um ponto não é uma parte de uma reta*, estamos entendendo a expressão "separar a reta em partes" como "existir uma função" no contexto daquelas teorias, que "produza uma tal separação do contínuo", "segregando-o naquele tipo de partes". Assim, a concepção divergente da estrutura topológica do contínuo, do que sejam suas partes

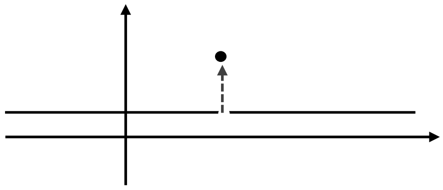
[7] Bishop. *Constructive Analysis* (Berlin: Sprneger-Verlag, 1985).

[8] Bridges. *Varieties do Constructive Mathematics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1987). Ver também Aberth, Oliver. *Computable Calculus* (San Diego: Academic Press, 2004).

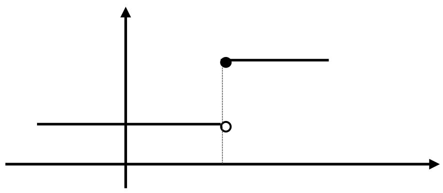
[9] Kock. *Synthetic Differential Geometry* (Cambridge: Cambridge University Press, 2006).

fica clara, por exemplo no fato de que nessas várias teorias (Brouwer, Bishop, Lawvere-Kock), *todas as funções são contínuas!*

Não temos, por exemplo, nem funções com "*blips*"



nem funções em "*degrau*"[10]



como na Análise Clássica. Nenhuma função teria o "poder de segregação suficiente" para particionar o contínuo em partes descontínuas, perfeitamente disjuntas entre si, mas que, tomadas conjuntamente, seriam capazes de reconstituir o contínuo. Como veremos abaixo, em todas essas propostas de análise, o contínuo é *coeso*. Ao contrário do que ocorre no contexto clássico e os famosos *Cortes de Dedekind*, aqui não podemos jamais dividir o contínuo em *duas partes disjuntas* ($A \cap B = \emptyset$) cuja reunião volte a *recobrir o todo* ($A \cup B = \mathbb{R}$).

Há diferenças importantes, no entanto, entre essas várias propostas no que concerne à questão da continuidade das funções. No contexto original de Brouwer, esse chega a *demonstrar* no seu sistema que todas as funções em um intervalo fechado são contínuas.[11] O mesmo acontece no contexto do Construtivismo Russo (Bridges & Richman, 1987, p. 2). Não é isso que ocorre, no entanto, na proposta de Bishop. Bishop jamais demonstra que todas as funções em intervalos fechados sejam contínuas. Apenas, em sua teoria *não aparece nenhum exemplo* de uma função que seja descontínua.

> ... todos os exemplos conhecidos de funções construtivas de R a R são contínuos. Note-se que não provamos que todas as funções de R a R são contínuas. ... Bishop simplesmente evita inteiramente o problema [de demonstrar a continuidade]. Como ele não pode nem provar, nem refutar tal conjectura, ele simplesmente restringe a atenção à classe de funções matematicamente interessantes, as funções uniformemente contínuas em cada intervalo fechado.[12]

---

[10] Para uma discussão exatamente sobre esses casos de descontinuidade, na Análise Suave e na Análise Construtiva, ver respectivamente Bell. *A Primer of Infinitesimal Analysis*, 5. e Aberth, Oliver. *Computable Calculus,* 4-5.

[11] Van Heijenoort. From Frege to Gödel: a source book in Mathematical Logic, 1879-1931 (Cambridge: Harvard, 1967).

463.

[12] Beeson. *Foundations of Constructive Mathematics* (Berlin: Springer-Verlag, 1985), 10.

De fato, o construtivismo de Bishop é perfeitamente *compatível* com a Análise Clássica: cada demonstração no interior dessa análise corresponde a uma demonstração classicamente válida.[13] Poderíamos até mesmo descrever a relação entre a *Análise de Bishop* e a *Análise Clássica* como sendo uma relação "quase parasitária". Nas palavras do matemático:

> Cada teorema provado com métodos idealistas [i.e., clássicos] representa um desafio: encontrar uma versão construtiva e dar uma prova construtiva.[14]

A Análise de Bishop como que "correria atrás" da versão clássica, extraindo o conteúdo construtivo de seus resultados e conceitos.

Encontramos aqui um agudo contraste com a situação da Análise Suave de Lawvere-Kock, nosso foco de interesse nesse artigo. Ao contrário da versão de Bishop, a Análise Suave é *incompatível* com sua congênere clássica. De fato, se substituirmos a lógica subjacente pela lógica clássica, nossa proposta alternativa sequer "levantaria do chão". Como veremos em mais detalhes adiante, num contexto lógico clássico, o axioma central daquela teoria – o Axioma de Lawvere-Kock – quando combinado com a estrutura vetorial (sobre o corpo dos números racionais) produziria imediatamente uma inconsistência no interior daquela teoria.

O ponto que gostaríamos de enfatizar aqui é o de que, a despeito da Análise Suave compartilhar com as versões intuicionistas a recusa da lei do terceiro excluído e uma estrutura topológica muito semelhante do contínuo[15] – onde um ponto jamais possa ser uma parte de uma reta, por exemplo – o *contexto de origem* dessas teorias é muito distinto, uma da outra. A proposta suave surge no interior da própria Análise Clássica, a teoria do contínuo tradicional. Os extraordinários trabalhos de Grothendieck são o coroamento de um longo esforço de fundamentação da topologia algébrica e da geometria algébrica, valendo-se dos métodos provenientes da Teoria das Categorias, de Eilenberg & Mac Lane. É nesse contexto que, para a surpresa dos próprios matemáticos (clássicos) envolvidos, a *Teoria dos Topos* criada por Grothendieck exigia, para sua viabilização, o relaxamento das leis da lógica!

Como veremos mais adiante, a falha da teoria clássica em nos oferecer uma distinção entre os conceitos de mera "*subsistência genérica*", $\neg\forall x Px$, e de "*existência efetiva*", $\exists x \neg Px$, bloqueia completamente a construção da valiosa vizinhança de *pontos infinitesimais* em torno de zero. Aproveitando-se mais uma vez das sutilezas daquela lógica, afirmaremos que tal vizinhança infinitesimal conterá pontos "*genericamente subsistentes*" que não serão, nem sequer *idênticos* a zero ("$\varepsilon = 0$"), nem *distintos* de zero ("$\varepsilon \neq 0$"), mas *indistinguíveis daquele ponto*, i.e., $\neg(\varepsilon \neq 0)$.

O que nos interessa sublinhar aqui é a ideia, sugerida por alguns desses matemáticos, de desvincularmos a lógica de Heyting de seu contexto original intuicionista e a encararmos como "a lógica suficientemente sutil" para lidar com o

---

[13] Bridges. Varieties do Constructive Mathematics, 2.
[14] Bishop. *Constructive Analysis,* 3.
[15] Para uma comparação da estrutura topológica dessas duas teorias, ver Bell. *The Art of the Intelligible - An Elementary Survey of Mathematics in its Conceptual Development.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

problema central que nos interessa aqui, o problema da continuidade e da variação em geral:

> Gostaria de enfatizar que reconhecer a importância central para a matemática clássica do cálculo de predicado de Heyting (i.e., da lógica intuicionista) não depende de maneira nenhuma de aceitar uma filosofia idealista subjetivista como o construtivismo; ... mas parecem ter sido os intuicionistas aqueles que pela primeira vez tiveram êxito em formular a lógica que vale para pelo menos uma certa porção definida da variação em geral.[16]
>
> … a lógica intuicionista permitiu que novos aspectos da paisagem lógico-matemática — invisíveis através das lentes da lógica clássica — pudessem ser discernidos. A lógica intuicionista provou ser um instrumento sutil, mais delicado do que a lógica clássica, para investigar o mundo matemático.[17]

3. Construindo o "Mundo Suave"

Comparada com a Análise Clássica, ou mesmo com a Análise intuicionista de Bishop, a estrutura matemática sobre a qual se assenta a Análise Suave é de uma simplicidade algébrica cristalina (a despeito, é claro, das sutilezas advindas do uso da lógica de Heyting como lógica subjacente). Ao invés de conceber os números reais como estruturas infinitárias, i.e., como sequências infinitas convergentes de números racionais, no espaço suave um número real é apenas e tão somente um vetor. Dito de outra forma, temos uma extensão vetorial sobre os números racionais (e sua estrutura algébrica de *corpo*, com seus dois grupos, o *aditivo* "$+$" e o *multiplicativo* "$\cdot$", ambos igualmente dotados de *elementos inversos* x^{-1}).[18] Assim, adotaremos a convenção de Kock[19] de usarmos a letra R para designar a "Reta Suave", indicando que esse é o conceito análogo, no contexto da Análise, ao de "Reta Real $\mathbb{R}$" clássico.

Sobre essa estrutura algébrica transparente, um único axioma é acrescentado, o Princípio da Microafinidade de Lawvere-Kock:

$$\forall f : \Delta \to R \ \forall \varepsilon : \Delta \ \exists! \, i : R \ (f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon \cdot i)$$[20]

Não nos deixemos impressionar aqui pela notação pouco usual, caraterística de uma teoria de tipos contemporânea. Tudo o que esse axioma afirma é que, no contexto da vizinhança infinitesimal Δ de 0, toda a função f, qualquer que seja ela, se comporta como se ela fosse um mero *polinômio de primeiro grau* (com inclinação "i")! Tomando $f(0) = a$, temos simplesmente:

---

[16] Lawvere. Variable Quantities and Variable Structures in Topoi. in: Variable Quantities and Variable Structures in Topoi. In Algebra, Topology and Category Theory, A Collection in Honor of Samuel Eilenberg. Editado por Heller, & Tierney, M, (Nova Iorque: Academic Press, 1976), 101-131.

[17] Bell. The Art of the Intelligible - An Elementary Survey of Mathematics in its Conceptual Development (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001), 209.

[18] É importante sublinhar: terão inversos todos os números q que sejam *distintos de zero* ($q \neq 0$). Os infinitesimais ε não serão distintos de zero, eles serão indistinguíveis de zero ($\neg(\varepsilon \neq 0)$) e *não terão inversos* (ao contrário do que ocorre na Análise Não-standard de Robinson).

[19] Kock. Synthetic Differential Geometry, 2.

[20] Bell. A Primer of Infinitesimal Analysis, 23 e 103. (Estamos usando ":" no sentido de "pertença ao domínio (em questão)".

$$f(\varepsilon) = a + \varepsilon \cdot i$$

"ε" sendo a variável que percorre o espaço infinitesimal ao entorno de zero, Δ, i.e., na nomenclatura e notação da teoria dos tipos contemporânea, um "habitante desse domínio", "$\varepsilon : \Delta$".

Ou seja, do ponto de vista geométrico, teremos a antiga ideia de que, nas vizinhanças infinitesimais de um ponto, uma curva qualquer "se comporta como se fosse uma reta", ou equivalentemente, "qualquer curva pode ser pensada, sim, como sendo constituída de "micro-linhetas" destituídas de curvatura. Como veremos, no entanto, essas micro-linhetas infinitesimais *não se confundem com pontos,* pois, diferentemente desses, *determinam uma inclinação*, um "vetor-tangente". Nas palavras de Bell:

> Uma vez ... que Δ não se reduz a um único ponto, ele será, por assim dizer, "grande o suficiente" para poder ter uma inclinação, mas " pequeno demais" para curvar-se.[21]

Concentremos agora nossa atenção nesse subespaço da reta real, a *micro-vizinhança infinitesimal* Δ *de* 0. Vejamos como esse subespaço é construído. Como qualquer teoria intensional, na Análise Suave a noção de "extensão", i.e., de "conjunto" ("de pontos") é pensada fregianamente como sendo a *extensão* de alguma *propriedade*. Ainda seguindo os passos de Frege, encaramos a própria noção de "propriedade" como sendo uma *função caraterística*, i.e., uma função sobre domínio inicial dado (no nosso caso, a linha suave R) e o contradomínio Ω dos valores de verdade.

Assim, pensamos numa *extensão* como sendo uma "função segregadora":

$$\Delta : R \to \Omega$$

Por sua vez, no caso do subespaço Δ, a propriedade que "efetivará a tal segregação" será a propriedade da "*nilpotência*",

$$[\lambda r : R. 2 \leq n \to r^n = 0]$$

i.e., a propriedade de ser um "número cujas potencias (maiores do que 1) sejam todas iguais a 0".

Uma vez que, se a segunda potência de um número for 0 ($r^2 = 0$), todas as outras potências seguintes também o serão, podemos simplificar tudo, e identificar a nilpotência apenas com a propriedade:

$$[\lambda r : R. r^2 = 0]$$

[21] Bell. A Primer of Infinitesimal Analysis, 23.

i.e., “ser um número cujo quadrado resulte em 0”. Lançando mão da notação mais familiar, dos conjuntos, poderíamos representar o subespaço Δ simplesmente como o seguinte subespaço[22] de R:

$$\Delta = \{x : R \mid x^2 = 0\}$$

Um leitor um pouco mais atento estranharia nosso argumento, nesse ponto. No contexto clássico usual dos números reais $\mathbb{R}$, não há nenhum número real r distinto de 0 cujo quadrado seja 0:

$$\forall r : \mathbb{R}\ (r \neq 0 \rightarrow r^2 \neq 0)$$

No contexto da Análise clássica, o único número real $\mathbb{R}$ com a propriedade da nilpotência seria o próprio 0 ! Assim, teríamos (naquele contexto, envolvendo “números reais *clássicos,* $\mathbb{R}$*”*)

$$\Delta = \left\{x : \mathbb{R} \mid x^2 = 0\right\} = \{0\}\ !$$

Mas, nesse caso, teríamos, sim, acabado de segregar uma “parte degenerada” do contínuo, i.e., teríamos obtido uma parte desse contínuo que consistiria em *um único ponto* apenas. Contrariando assim o que vínhamos insistindo desde o início, tal ponto único – $\{0\}$ – poderia ser, sim, uma *parte de uma reta*, e o princípio aristotélico que defendíamos acima estaria simplesmente errado!

4. Números “genericamente subsistentes”

Chegamos a uma encruzilhada em que os caminhos da Análise Clássica e da Análise Suave claramente divergem um do outro. E, como veremos, a rota elegida pela versão suave, levando-a às vantagens que a noção de infinitesimal nos traz para a “álgebra do cálculo”, *sequer é logicamente viável* para o clássico, pois a distinção entre “números *genericamente subsistentes*, mas *indistinguíveis* de 0” e “números *efetivamente existentes* e *distintos* de 0” não está disponível a ele, dada sua adoção da lei do terceiro excluído clássica.

Voltemos ao Axioma de Lawvere-Kock, da Microafinidade:

$$\forall f : \Delta \rightarrow R\ \forall \varepsilon : \Delta\ \exists! i : R\ (f(\varepsilon) = f(0) + \varepsilon \cdot i)$$

Se qualquer função f, na vizinhança de 0, se comporta como um *polinômio de primeiro grau*, i.e., qualquer função f determina uma *única inclinação* i, fixando qual seja exatamente nosso polinômio, então, em particular, teríamos que a função identidade igualmente deveria determinar um polinômio assim, i.e., uma tal inclinação única.

---

[22] Tratando-se de uma teoria intensional, *estritamente falando* não temos nenhuma noção equivalente à noção extensional de “conjunto” em nosso contexto, algo como um “agregado totalmente arbitrário de elementos”, i.e., de “pontos”.

$$\forall \varepsilon : \Delta\ \exists!\, i : R\ (\mathbb{I}(\varepsilon) = \mathbb{I}(0) +\ \varepsilon \cdot i)$$

simplificando, teríamos então:

$$\forall \varepsilon : \Delta\ \ \exists!\, i : R\ (\varepsilon = 0 +\ \varepsilon \cdot i)$$

Mas, aceitemos (como hipótese, apenas como hipótese!) que, assim como no contexto clássico, também na Análise Suave o único número nilpotente fosse 0.

$$[\forall r : R\ (r \neq 0 \to r^2 \neq 0)]$$ [23]

Nesse caso, como vimos acima, o subespaço Δ teria de ser degenerado, i.e., ele conteria um único número racional:

$$\Delta = \{0\}$$

Logo, todos os números infinitesimais ε habitantes de Δ $(\varepsilon : \Delta)$ seria iguais a 0, e poderíamos então substituir $\varepsilon = 0$ na equação acima, obtendo:

$$\exists!\, i : R\ (0 = 0 +\ 0 \cdot i)$$

Nesse ponto temos de enfatizar que, por mais estranha que a *lógica* subjacente à Análise Suave possa parecer (não-clássica), à primeira vista, sua *álgebra* é absolutamente corriqueira, a familiar álgebra do *corpo dos números reais*. Ora, dado esse contexto algébrico, simplesmente *não é verdade* que exista um único número *i* entre os reais tal que:

$$0 = 0 +\ 0 \cdot i$$

De fato, temos *infinitos* números racionais que satisfazem a essa equação, por exemplo, o número 37:

$$0 = 0 +\ 0 \cdot 37$$

ou mesmo 0:

$$0 = 0 +\ 0 \cdot 0$$

Usando a dedução natural (intuicionista, é claro!) obtemos uma contradição entre as três linhas de raciocínio adotadas até agora e ... descartamos nossa hipótese:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall \varepsilon : \Delta\ \exists!\, i : R\ (\mathbb{I}(\varepsilon) = \mathbb{I}(0) +\ \varepsilon \cdot i)}{\forall \varepsilon : \Delta\ \ \exists!\, i : R\ (\varepsilon = 0 +\ \varepsilon \cdot i)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall r : R\ (r \neq 0 \to r^2 \neq 0)]}{\Delta = \{0\}}}{\forall \varepsilon : \Delta(\varepsilon = 0)}}{\exists!\, i : R\ (0 = 0 +\ 0 \cdot i)} \qquad \dfrac{R\ \textit{é um corpo}}{0 = 0 +\ 0 \cdot 37 \wedge\ 0 = 0 +\ 0 \cdot 0}}{\bot}}{\neg\forall r : R\ (r \neq 0 \to r^2 \neq 0)}$$

[23] Estamos empregando o colchete aqui para enfatizar o caráter hipotético de nossa assunção.

Assim, determinamos que a inferência da propriedade de "ser distinto de 0" para a propriedade de "não ser nilpotente" *não é compatível com o contexto suave*. Um único ponto não seria capaz de determinar uma inclinação. Precisamos distinguir o microvetor associado ao ponto 0, do conjunto degenerado {0}. Descartamos então nossa hipótese (de que o único número nilpotente seria 0) e, pela definição da negação, concluímos finalmente que:

$$\neg \forall r : R \ (r \neq 0 \rightarrow r^2 \neq 0)$$

Aqui, mas uma vez, vamos depender crucialmente de distinções que sequer são disponíveis a um clássico. Estamos nos referindo a distinção que já havíamos anunciado várias vezes acima, entre "*subsistência genérica*"("$\neg \forall x P x$") e "*existência efetiva*" ("$\exists x \neg P x$"). O ponto importante a ser lembrado é o de que aqui não podemos recorrer à regra clássica do terceiro excluído e concluir que, de uma *demonstração genérica* (*de que nem todos os números que falhem em ser distintos de* 0*, também falhem em ser nilpotentes*) possamos concluir também (como certamente faria um clássico) uma *efetiva afirmação de existência de um contraexemplo*, no nosso caso, a existência de um número r determinado que, a despeito de *ser distinto de* 0, ainda assim, *seja nilpotente*:

$$\exists r : R \ (r \neq 0 \rightarrow r^2 = 0)$$

Como antecipamos acima, caso aceitássemos essa passagem (caraterística do sistema clássico), de uma *demonstração geral de falha de universalidade* para uma efetiva *asserção de existência de um contraexemplo* (i.e., para uma asserção da *possibilidade de instanciação daquela falha geral em um contraexemplo efetivo*), acabaríamos produzindo uma contradição quase imediata no interior da teoria suave!

Uma vez tendo "internalizado" (erradamente, do ponto de vista de Heyting!) aquela *negação de universalidade* em uma *afirmação existencial* (da *existência de um contraexemplo*), poderíamos agora *instanciar* aquele existencial com um número real específico ε_1 . Teríamos assim um contraexemplo específico, um "*infinitesimal individualizado*", para o qual efetivamente seria o caso de que:

$$\varepsilon_1 \neq 0 \ \wedge \varepsilon_1{}^2 \ = 0$$

Como esse infinitesimal (hipotético) seria distinto de 0 , ele teria o inverso multiplicativo usual (estamos no corpo dos reais!):

$$\varepsilon_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} = 1$$

Consideremos agora a expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon_1{}^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_1}}$$

Como estamos no contexto de um *corpo*, o corpo dos reais, poderíamos simplificar essa expressão (à direita), obtendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon_1}^{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon_1}} = \varepsilon_1 \cdot 1 = \varepsilon_1$$

Mas, como um dos componentes da conjunção (que concluímos acima, ao instanciarmos aquele existencial para r) era de que "$r^2 = 0$", poderíamos simplificar aquela expressão original de uma outra forma. Substituindo $r^2 = 0$, obtemos (à esquerda)

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \frac{1}{\varepsilon_1} = \boldsymbol{\varepsilon_1}^{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon_1}} = \varepsilon_1 \cdot 1 = \boldsymbol{\varepsilon_1}$$

Ora, nesse ponto entraríamos em contradição com o outro componente daquela conjunção obtida antes, i.e.:

$$\varepsilon_1 \neq 0$$

Temos aqui um exemplo das "sutilezas" sobre as quais falava Bell na citação acima, no final da segunda seção de nosso artigo. Não podemos, como faria um clássico, simplesmente "internalizar" a *negação de um universal*

$$\neg\forall r : R\ (r \neq 0 \to r^2 \neq 0)$$

e obter uma afirmação existencial

$$\exists r : R\ (r \neq 0 \to r^2 = 0)$$

Precisamos manter a ideia de "*subsistência meramente genérica*", não a confundindo com uma afirmação existencial, inferencialmente muito mais forte, e que acabaria produzindo uma contradição em toda a teoria.

O ponto crucial a ser frisado aqui é o de que, como vimos em detalhes acima, fomos capazes de extrair, do *Princípio da Microafinidade*, *não a existência*, mas, sim, *a subsistência de números nilpotentes* (indistintos de 0). Esses novos números serão habitantes do entorno infinitesimal Δ de 0.[24] Seguindo Bell, temos usado a variável "ε" para percorrer aquele subespaço.

$$\Delta = \{\varepsilon : R \mid \varepsilon^2 = 0\}$$

---

[24] Não iremos construir aqui a relação de ordem para a Reta Suave R e demonstrar que os números nilpotentes formam uma vizinhança ao redor de 0. Cf. Bell. *A Primer of Infinitesimal Analysis*, 19-22.

O importante é que, como veremos na seção seguinte, a subsistência desses números nilpotentes nos abrirá as portas para o maravilhoso “poder algébrico simplificador” que esses infinitesimais nilpotentes nos proporcionam. Mas, antes disso, temos ainda um pequeno passo a dar. Precisamos generalizar o Princípio da Microafinidade, convertendo-o numa *definição da própria operação de diferenciação*, i.e., da obtenção da *derivada de uma função g qualquer*.

Consideremos, por exemplo, um ponto qualquer, digamos, o ponto 2. Podemos “encarar funcionalmente” esse ponto como o resultado da aplicação de uma função “somar 2” ao ponto original 0:

$$2 = f_{+2}(0)$$

Logo em seguida, podemos compor uma função qualquer g com a função “somar 2”, obtendo uma nova função:

$$g \circ f_{+2}$$

Vamos agora instanciar o princípio da Microafinidade para essa nova função composta. Temos[25]

$$[g \circ f_{+2}](\varepsilon) = [g \circ f_{+2}](0) + i \cdot \varepsilon$$

Mas, de acordo com a própria definição da operação da composta, temos também que:

$$g\big(f_{+2}(\varepsilon)\big) = g\big(f_{+2}(0)\big) + i \cdot \varepsilon$$

Substituindo, por exemplo, $f_{+2}(\varepsilon) = 2 + \varepsilon$, obtemos finalmente que:

$$g(2 + \varepsilon) = g(2) + i \cdot \varepsilon$$

Generalizamos assim o Princípio da Microafinidade para qualquer ponto x em R:

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + i \cdot \varepsilon$$

Como veremos, isso efetivamente nos dará uma versão algébrica do processo de diferenciação, determinando a derivada de uma função f para um ponto qualquer x, i.e., determinando a inclinação i da microlinheta associada àquele ponto x.

5. Diferenciação como uma operação algébrica

Tomemos um exemplo. Apliquemos a versão generalizada do Princípio da Microafinidade, por exemplo, à *função quadrática* $x \mapsto x^2$. Obtemos então que:

[25] Deixamos de lado, para simplificar, todas as usuais declarações de domínio “$\forall f : \Delta \to R\ \forall \varepsilon : \Delta\ \exists! i : R$”.

$$(x+\varepsilon)^2 = x^2 + i \cdot \varepsilon$$

Expandindo o binômio à esquerda, temos que:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 = x^2 + i \cdot \varepsilon$$

Simplificando, obtemos:

$$2 \cdot x \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 = i \cdot \varepsilon$$

Lançando mão da nilpotência obtida acima, podemos substituir $\varepsilon^2 = 0$ obtendo:

$$2 \cdot x \cdot \varepsilon + 0 = i \cdot \varepsilon$$

Simplificando mais uma vez, obtemos finalmente que:

$$2 \cdot x = i$$

Obtivemos aqui uma versão puramente algébrica do conhecido resultado de que a derivada da *função quadrática* $x \mapsto x^2$ é a *função* $x \mapsto 2x$. Na verdade, poderíamos reapresentar o Princípio generalizado da Microafinidade

$$g(x+\varepsilon) = g(x) + i \cdot \varepsilon$$

num arranjo mais conhecido:

$$\frac{g(x+\varepsilon) - g(x)}{\varepsilon} = d$$

É importante notar aqui que, diferentemente da Análise Clássica, temos efetivamente um quociente onde o *denominador é um número* (apesar de ser um infinitesimal "meramente subsistente, genérico"). Nas palavras de Kock:

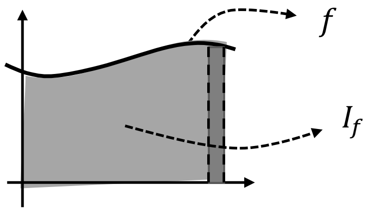
> O processo Fundamental de Diferenciação (formação de derivadas direcionais) passa aqui a fazer parte da álgebra, uma vez que o uso clássico dos processos limite é eliminado em favor do uso de subespaços infinitesimais da linha numérica R e dos espaços vetoriais de coordenadas R^n.[26]

Temos aqui uma volta do conceito de "*incremento diferencial infinitesimal*" como um conceito fundamental do cálculo, anterior até mesmo ao processo de obtenções de *derivadas* e, como veremos a seguir, de *integrais*.

6. O Teorema Fundamental do Cálculo

[26] Kock. Synthetic Differential Geometry, 12.

Tomemos uma função f qualquer e pensemos na função que representa a *integral* I_f daquela função f original, entendida aqui como a função que descreve o incremento de área sob aquela curva f.

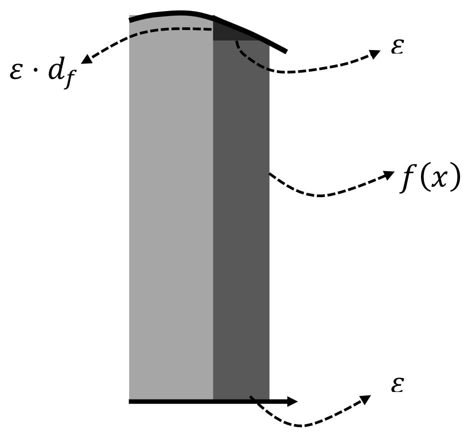


Um ponto inicial importante aqui é que o Princípio da Microafinidade (geral) valerá, tanto para a *função original* f, quando para a *função que descreve seus incrementos de área*, I_f:

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + d_f \cdot \varepsilon$$

$$I_f(x+\varepsilon) = I_f(x) + d_{I_f} \cdot \varepsilon$$

Consideremos agora a área produzida por um *incremento infinitesimal* $x + \varepsilon$ na função I_f:



Temos então que valor da função integral I_f, incluindo o incremento será:

$$\overbrace{I_f(x+\varepsilon)}^{área+incremento} = \overbrace{f(x) \cdot \varepsilon}^{retângulo} + \overbrace{\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot d_f}{2}}^{triângulo^{27}} + \overbrace{I_f(x)}^{área\ até\ x}$$

Já de início, a nilpotência do produto $\varepsilon \cdot \varepsilon = 0$ nos permite desconsiderar diretamente toda a área do triângulo. Obtemos então:

$$I_f(x+\varepsilon) = f(x) \cdot \varepsilon + I_f(x)$$

[27] O próprio Princípio da Microafinidade nos assegura que se trata aqui *realmente de um triângulo!*

E como, de acordo com o que frisamos acima, a função I_f também respeita o Princípio da Microafinidade, temos também que:

$$I_f(x+\varepsilon) = I_f(x) + d_{I_f} \cdot \varepsilon$$

Logo, substituindo $I_f(x+\varepsilon) = I_f(x) + d_{I_f} \cdot \varepsilon$ na equação anterior, concluímos que:

$$I_f(x) + d_{I_f} \cdot \varepsilon = f(x) \cdot \varepsilon + I_f(x)$$

Simplificando toda essa expressão, obtemos finalmente que:

$$d_{I_f} = f(x)$$

A despeito do caráter profundamente singelo das operações algébricas envolvidas, não nos deixemos enganar: o que acabamos de obter aqui não é, nada mais, nada menos, do que o *Teorema Fundamental do Cálculo*:

> A derivada d_{I_f} de uma função integral I_f de uma função f qualquer é igual àquela própria função f

É a esse tipo de resultado que nos referíamos acima, quando falávamos no "maravilhoso poder algébrico simplificador dos infinitesimais nilpotentes". Uma demonstração *puramente algébrica* do teorema central do Cálculo Diferencial e Integral, envolvendo apenas um punhado de pequenos passos extremamente simples e transparentes.

7. Cortes de Dedekind e Coesão

A despeito do quão atraente possa ser a simplicidade algébrica da Análise Suave, nosso foco de interesse nesse artigo não era a comparação entre os vários procedimentos de cálculo associado às propostas de análise.[28] Nosso principal interesse era a concepção alternativa da microestrutura topológica do contínuo, que chamamos de aristotélica, onde, diferentemente da versão usual clássica, a reta jamais poderia ser constituída de pontos.

Gostaríamos de retomar nosso tema principal e enfatizar algo que nos parece importante: a conexão entre essa visão alternativa e a lógica de Heyting subjacente,

[28] Para mais detalhes da proposta Suave, sugerimos Bell, John. *A Primer of Infinitesimal Analysi,* Kock. *Synthetic Differential Geometry,* ou mesmo Lavendhomme. *Basic Concepts do Synthetic Differential Geometry* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996).

conforme ficou sugerido nas citações de Lawvere e Bell acima. Voltemos a ideia de "*coesão*", ou de "*indecomponibilidade*", que antecipamos acima:

> Chamaremos um espaço S de *coesivo* ou *indecomponível*, ou um *continuum* (genuíno) se, para qualquer parte, ou subconjuntos U e V de S, sempre que $U \cup V = S$ e $U \cap V = \emptyset$, então um de U, V deve ser $= \emptyset$, ou, equivalentemente, um de U, V deve ser $= S$. Claramente, S é coesivo precisamente quando seus únicos subconjuntos destacáveis são $\emptyset$ e S em si.[29] (Bell, 2014, p. 8)

O contínuo intuicionista e o suave são "inexauríveis" no sentido de que jamais conseguimos segrega-los tão exaustivamente que os separemos em duas partes, completamente disjuntas uma da outra, mas sem nenhum "espaço intermediário" entre elas. Ou bem perdemos a *cobertura* (no exemplo acima, $U \cup V \neq S$), ou bem perdemos a *disjunção* ($U \cap V \neq \emptyset$). Na imagem do intuicionista Dirk Van Dalen:

> O continuo [intuicionista] tem, por assim dizer, uma natureza viscosa, não se pode simplesmente sacar um ponto fora. [30]

É claro que, dado que algumas das versões do contínuo intuicionistas são compatíveis com a teoria clássica (como a de Bishop, como vimos acima), nessas teorias não é possível demonstrar-se, por exemplo, o teorema de que todas as funções tenham de ser contínuas (caso contrário a compatibilidade cairia por terra). Como já observamos, é "apenas o caso" que, no contexto dessas teorias, não apareça nenhum exemplo de função que falhe em ser contínua.

O contraste entre a lógica clássica e a de Heyting, todavia permanece. A propriedade da *coesão* é *totalmente incompatível* com a versão clássica. No entanto, é possível demonstrar que, mesmo mantendo-se a própria Teoria dos Conjuntos tradicional (de Zermelo-Fraenkel) intacta e substituindo apenas a lógica subjacente clássica pela versão de Heyting, a existência de espaços coesos torna-se, se não *demonstrável* na teoria, pelo menos *consistente* com ela.[31]

> Observamos que, na teoria dos conjuntos clássicos, os únicos espaços coesos são o trivial espaço vazio e os espaços de um só ponto. Mas verifica-se que a existência de espaços coesos não-triviais é consistente com TIC [Teoria Intuicionista dos Conjuntos]. Na verdade, é consistente com o TIC que $\mathbb{R}$ seja ele próprio também coeso.[32]

Já no contexto da Análise Suave, é claro, todas as funções, sendo suaves (i.e., sendo deriváveis até qualquer ordem n[33]) também tem de ser contínuas, é claro.

> Na análise infinitesimal suave, o princípio da constância garante que esses [intervalos] tenham a propriedade muito mais forte da indecomponibilidade ... na AIS [Análise Infinitesimal Suave] todos os intervalos em R são indecomponíveis.[34]

---

[29] Bell. *Intuitionistic Set Theory* (Londres: College Publications, 2014), 8.

[30] Van Dalen *apud* Bell. The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy (Milão: Polimétrica, 2006), 280.

[31] Na literatura, essa teoria recebe o nome de "Teoria Intuicionista dos Conjuntos", ou TIC.

[32] Bell. Intuitionistic Set Theory, 8.

[33] Mais uma vez essa análise realiza um antigo sonho, acalentado, por exemplo, por Lagrange: o uso uniforme da série de Taylor para nos fornecer aproximações dos pontos de R. Cf. (Ferrraro, 2012)

[34] Bell. The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy, 301-2.

Para finalizar, acompanhando a imagem metaforicamente rica de Van Dalen sobre o contínuo intuicionista que oferecemos acima, temos a seguinte descrição, oferecida por Bell, para o contraste entre a imagem clássica e a suave, agora no contexto específico do contínuo temporal e da Análise Suave:

> Classicamente, o tempo é representado como uma sucessão de instantes discretos, "agoras" isolados, onde o tempo, por assim dizer, tivesse parado. O Princípio da Microlinearidade, no entanto, sugere que o tempo deva ser considerado como uma pluralidade de microextensões temporais que se sobrepõe, uma às outras, cada uma das quais podendo ser tomada como representando um "agora" (ou "*presente especioso*") e nas quais o tempo por assim dizer ainda continuaria passando. Essa concepção da natureza do tempo é semelhante àquela proposta por Aristóteles (Física, Livro 6, Capítulo IX) para refutar o paradoxo da flecha de Zenão.[35]

A concepção aristotélica, de uma reta que jamais poderia ser constituída por seus pontos, permanece como uma opção, talvez mais viva do que tenha sido nos últimos 500 anos.

8. Referências

Aberth, Oliver. *Computable Calculus.* San Diego: Academic Press, 2004.

Aristotle. *The Works of Aristotle*. Tradução de William David Ross. Oxford: Claredon Press, 1962.

Beeson, Michael. *Foundations of Constructive Mathematics.* Berlin: Springer-Verlag, 1985.

Bell, John. *A Primer of Infinitesimal Analysis.* Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

________. *Intuitionistic Set Theory.* Londres: College Publications, 2014.

________. The Art of the Intelligible - An Elementary Survey of Mathematics in its Conceptual Development. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

________. *The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy*. Milão: Polimétrica, 2006.

Bishop, E., & Bridges, D. *Constructive Analysis.* Berlin: Sprneger-Verlag, 1985.

Bridges, D., & Richman, F. *Varieties do Constructive Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

Ewald, William. *From Kand to Hilbert: A Souce Book in the Foundations of Mathematics* (Vol. 1). Oxford: Oxford University Press, 1996.

Ferrraro, G., & Panza, M. *Lagrange's Theory of Analytical Functions and the ideal of purity of method.* Archive for History of Exact Sciences*,* 66, no.2 (2012): 95-197.

Kock, Anders. *Synthetic Differential Geometry.* Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

Lavendhomme, René. *Basic Concepts do Synthetic Differential Geometry.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[35] Bell, John. A Primer of Infinitesimal Analysis. 10.

Lawvere, William. *Variable Quantities and Variable Structures in Topoi*. In *Algebra, Topology and Category Theory, A Collection in Honor of Samuel Eilenberg*. Editado por Heller, & Tierney, M, 101-131. Nova Iorque: Academic Press, 1976.

Spivak, Michael. *Calculus.* Londres: Addison Wesley Publishing Company, 1973.

Van Heijenoort, Jean. *From Frege to Gödel: a source book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard, 1967.