Ilmestynyt teoksessa: Kari Raivio, Jan Rydman & Anssi Sinnemäki (toim.): *Rajalla*, Gaudeamus, Helsinki, 2007.

Logiikka ja ajattelun rajat

PANU RAATIKAINEN

Antiikin ajoista asti matematiikassa on pyritty muotoilemaan tietyn matematiikan osa-alueen teoria aksiomaattisesti. Toisin sanoen on pyritty löytämään äärellinen joukko peruslauseita eli aksioomia, joista kaikki tämän aihealueen todet lauseet voidaan loogisesti johtaa. Klassinen esimerkki on tietysti Eukleideen geometria ja sen aksioomat.

Nykyaikainen logiikka on kuitenkin tuottanut **tuloksia**, jotka osoittavat, että tällainen ihanne on yleisessä tapauksessa mahdotonta saavuttaa. Matemaattinen tietomme tulee olemaan ikuisesti epätäydellistä, ja kaikkia matemaattisia ongelmia ei ole mahdollista edes periaatteessa ratkaista, vaikka aikaa olisi käytettävissä loputtomiin.

Matematiikan teoriat voidaan jakaa kahteen erilaiseen ryhmään. Toiset, esimeriksi abstraktissa algebrassa käytetyt teoriat, kuten ryhmä- tai kuntateorian aksioomat, ovat sellaisia, että hyvin monenlaiset ja eriskummallisetkin matemaattiset struktuurit toteuttavat niiden aksioomat. Mikä tahansa struktuuri, joka toteuttaa esimerkiksi ryhmäteorian aksioomat, on ryhmä. Aksioomat jättävät joitakin kysymyksiä avoimeksi, mutta ei ole mielekästä puhua näiden väittämien totuudesta tai epätotuudesta absoluuttisesti. Ne toteutuvat toisissa ryhmissä ja toisissa eivät.

Toisaalta on joitakin perustavia matemaattisia teorioita, joiden kohdalla tilanne on varsin toisenlainen. Esimerkiksi luonnollisten lukujen teoriassa tavoitteenamme on kuvata yhtä yksikäsitteistä matemaattista struktuuria, luonnollisten lukujen joukkoa. Mikäli yritys aksiomatisoida luonnollisten lukujen teoria jättää jonkin luonnollisiin lukuihin liittyvän kysymyksen avoimeksi, joudutaan toteamaan, että aksiomatisointiyritys on jollain tavalla puutteellinen – eikä niinkään, että mikä tahansa matemaattinen struktuuri, joka toteuttaa valitut aksioomat, on luonnollisten lukujen joukko.

Epätäydellisyystulokset liittyvät erityisesti tällaisiin jälkimmäisen tyyppisiin teorioihin, joissa voidaan puhua väittämien totuudesta jossain mielessä absoluuttisesti.

Vuonna 1930 nuori – tuolloin vasta 24-vuotias – itävaltalainen loogikko Kurt Gödel osoitti, että yleisessä tapauksessa – muutamia hyvin yksinkertaisia poikkeustapauksia lukuun ottamatta – täydellisen teorian ihanne on mahdoton toteuttaa.

Ensiksi, hän todisti, että kaikkein kattavimmissakin tuolloin tunnetuissa joukko-opin aksioomajärjestelmissä (Russellin ja Whiteheadin *Pricipia Mathematican* järjestelmä PM tai Zeremelo-Fraenkel joukko-oppi ZF) on niiden kielessä ilmaistavia yksinkertaisia lukuteoreettisia lauseita, jotka ovat tosia mutta joita ei voida todistaa näissä teorioissa. Toiseksi, Gödel osoitti, että erityisesti lausetta, joka sanoo, että kyseinen teoria on ristiriidaton, ei voida todistaa tässä teoriassa itsessään. Näitä kutsutaan yleisesti Gödelin ensimmäiseksi ja toiseksi epätäydellisyyslauseeksi.

Nekin harvat, jotka ymmärsivät tulokset – mukaan lukien Gödel itse – olivat kuitenkin epävarmoja siitä, voitaisiinko epätäydellisyystulokset yleistää ja miten. Ilman täsmällistä ja yleistä ratkaisumenetelmän käsitteen määritelmää epätäydellisyystuloksia ei kuitenkaan voida täysin yleistää.

Matematiikassa on kautta sen historian esitetty ratkaisu- tai laskentamenetelmiä tiettyjen yksittäisten ongelmien ratkaisemiseksi. Tutuimpia ovat menetelmät kahden kokonaisluvun yhteen- ja kertolaskun suorittamiseksi. Annettu tehtävä voidaan suorittaa aina täysin mekaanisesti sääntöjä seuraamalla, ilman minkäänlaista kekseliäisyyttä tai luovuutta. Laskenta- ja ratkaisumenetelmiä käsitellään esimerkiksi Eukleideen *Elementassa* (kirjoitettu noin 330–320 eaa.). Siinä esitetään muun muassa menetelmä kahden luvun suurimman yhteisen tekijän ratkaisemiseksi; sitä kutsutaankin nykyisin Eukleideen algoritmiksi. Yleisemmin, tällaisia mekaanisia laskenta- ja ratkaisumenetelmiä kutsutaan nykyaikana usein algoritmeiksi.

Ratkaisumenetelmän esittämiseksi jollekin yksittäiselle matemaattiselle ongelmalle riittää, että esittää jonkin konkreettisen ratkaisu- tai laskentamenetelmän, joka sopii yhteen intuitiivisen ratkaisumenetelmän käsitteen kanssa. Kielteinen vastaus eli se johtopäätös, ettei mitään ratkaisumenetelmää jollekin ongelmalle ole olemassakaan, sitä vastoin edellyttäisi yleisen ratkaisumenetelmän käsitteen täsmällistä matemaattista määritelmää. Tällaista ei ennen 1930-lukua kuitenkaan ollut olemassa, eikä tämän intuitiivisen ja epäformaalisen käsitteen täsmällistä matemaattista määrittelyä pidetty edes mahdollisena.

1930-luvulla ongelman kimpussa työskenteli omilla tahoillaan useitakin loogikoita, mukana myös Gödel. Tärkeimmän työ teki kuitenkin nuori brittiloogikko Alan Turing. Yleisimmin Turing esitetään tietokoneen keksijänä. Tämä pitää paikkansa, mutta on toisaalta harhaanjohtavaa: Turingin kaikkein merkittävin, koko matemaattis-luonnontieteellisen maailmankuvan perusteita horjuttava löytö on paljon teoreettisempi ja syvempi. Voidaan nimittäin sanoa, että Turing osoitti haaveen täydellisestä matemaattisesta tiedosta kertakaikkisesti mahdottomaksi.

Tämän perinteisen kannan vaikutusvaltaisin edustaja 1900-luvun alussa oli tuon ajan matematiikan voimahahmo, saksalainen David Hilbert, jonka ympärille ryhmittyi kokonainen koulukunta johtavia nuoren polven matemaatikoita ja loogikoita. Hilbert halusi osoittaa, ettei mitään ratkaisemattomia ongelmia ole olemassa. Hänen mukaansa täytyy olla mahdollista esittää sellainen menetelmä, joukko täsmällisiä sääntöjä, joita mekaanisesti soveltamalla mikä tahansa matemaattinen ongelma ratkeaa – tämä on Hilbertin kuuluisa ”ratkaisuongelma”. Hilbert ilmaisi näin hyvin laajasti vallinneen käsityksen matematiikan luonteesta.

Nuori Turing sen sijaan aavisteli, että totuus on päinvastainen – ettei mitään yleistä mekaanista menetelmää matemaattisten ongelmien ratkaisemiseksi ole olemassa. Turing otti ennakkoluulottomasti tehtäväkseen ratkaisumenetelmän yleisen määritelmän löytämisen. Hän työskenteli aiheen kimpussa täydellisessä yksinäisyydessä vuoden, ja esitti ratkaisunsa vasta 23 vuoden ikäisenä keväällä 1936. Hän yhdisti ennennäkemättömällä tavalla äärimmäisen tarkkanäköisen filosofisen käsiteanalyysin vaativaan matemaattiseen työhön ja kykeni esittämään ensi näkemältä mahdottomalta vaikuttavan asian. Hän esitteli täysin yleisen, vakuuttavan ja matemaattisen täsmällisen määritelmän mekaanisesta ratkaisu- ja laskentamenetelmästä.

Kuinka tämä oli mahdollista? Turingin analyysi lähtee liikkeelle pohtimalla, kuinka ihminen – inhimillinen ”Laskija” – toimii ratkaistessaan jotain matemaattista ongelmaa jonkin mekaanisen ratkaisumenetelmän avulla. Turingin mukaan ”todellinen kysymys” on se, mitä mahdollisia prosesseja ihmismieli voi viedä läpi laskiessaan jotakin lukua. Hän halusi löytää sellaiset Laskijan operaatiot, jotka ovat niin yksinkertaisia ja perustavia, ettei niitä voida enää jakaa yksinkertaisempiin osiin. Turing kuvitteli, kuinka Laskija kirjoittaa symboleja ruutuihin jaetulle paperille samaan tapaan kuin lapsi laskentovihkoon. Hän päätteli, että paperin kaksiulotteisuus ei ole olennaista, joten hän yksinkertaisti asetelmaa keskittymällä yksiulotteiseen paperinauhaan, joka on jaettu ruutuihin. Edelleen Turing totesi, että inhimillinen muisti ja havaintokyky on välttämättä äärellinen: siispä käytössä voi olla vain äärellisen monta perussymbolia, ja Laskija voi ”kertasilmäyksellä” havaita symboleja vain äärellisen monesta ruudusta.

Turing ei siis tässä teoretisointinsa perustavimmassa osassa puhu lainkaan koneista vaan ihmismielen laskentatoimituksista. Koneet esiintyvät vasta tämän perustavamman analyysin tuotoksena ja yhteenvetona. Turingin tavoitteena oli alusta alkaen antaa kielteinen vastaus ”ratkaisuongelmaan”. Ratkaisumenetelmän käsitteen analyysissaan hän tarkasteli inhimillistä laskentaa ja poisti siitä kaikki epäolennaiset rajoitukset. Jäljelle jäi ajatus abstraktista, idealisoidusta koneesta, jossa on potentiaalisesti ääretön, ruutuihin jaettu nauha, jota kone lukee, johon se kirjoittaa tai josta se pyyhkii pois merkkejä jonkin äärellisen sääntöjoukon määräämänä. Tällaisia teoreettisia koneita kutsutaan nykyisin Turing-koneiksi. Turingin johtopäätös oli, että inhimillinen Laskija voi ratkaista ongelman täsmälleen silloin, kun Turing-kone voisi ratkaista sen.

Vakuuttavan käsiteanalyysin avulla Turing siis onnistui eristämään yleisen ratkaisumenetelmän käsitteen. Seuraavaksi hän osoitti tämän määritelmän avulla, että on olemassa ongelmia, joita ei kerta kaikkiaan voida ratkaista: ei ole mitään yleistä mekaanista menetelmää niiden ratkaisemiseksi. Ehkä yksinkertaisin tällainen ongelma on Turingin ”pysähtymisongelma”: ei ole mitään yleistä mekaanista menetelmää sen ratkaisemiseksi, pysähtyykö tietyn koneen laskenta joskus vai juuttuuko kone ”silmukkaan” ikuisiksi ajoiksi. Turingin suuri löytö on siis sen havaitseminen, että on olemassa ongelmia, joita mikään tietokone ei pysty periaatteessakaan ratkaisemaan, vaikka aikaa ja muistia olisi rajoittamattomasti. Myöhemmin loogikot ovat Turingin perustavaan analyysiin nojautuen löytäneet monenlaisia ratkeamattomia ongelmia matematiikan ja teoreettisen fysiikan eri osa-alueilta.

Turingin työ osoittaa myös lopullisesti, että mikä tahansa tietyt ehdot täyttävä matemaattinen teoria on välttämättä epätäydellinen: jokaisen tällaisen teorian ulkopuolelle jää matemaattisia totuuksia, joita ei tuossa teoriassa voida todistaa. Erityistapauksissa tätä ennakoi jo Gödelin vuonna 1930 todistamat epätäydellisyystulokset, mutta vasta Turingin luoma käsitteellinen välineistö mahdollisti epätäydellisyystuloksen yleistämisen kaikille mahdollisille matemaattisille teorioille.

Yleisen muodon esittämiseksi tarvitaan yleistä formaalisen aksioomajärjestelmän käsitettä. Perinteisesti matemaattinen todistus on joistakin hyväksytyistä aksioomista askel askeleelta hyväksyttyjen sääntöjen (”päättelysääntöjen”) avulla johdettu jono lauseita, joka todistaa viimeiseksi esitetyn lauseen.

Turingin analyysin pohjalta on järkevää vaatia, että aksioomia on joko äärellinen määrä tai että on ainakin olemassa ratkaisumenetelmä sille, onko jokin annettu lause aksiooma vai ei, ja että on olemassa ratkaisumenetelmä sille, onko jokin lauseiden jono todistus – eli onko se tuotettu soveltamalla sovittuja päättelysääntöjä ja vain niitä. Tällä tavalla saadaan hyvin yleisluonteinen aksiomatisoidun teorian (tai ”formalisoidun järjestelmän”) määritelmä. Tällainen formalisoitu teoria voidaan tietyssä mielessä samastaa sellaisen Turing-koneen kanssa, joka tarkistaa mielivaltaisesta lauseiden jonosta, onko se todistus vai ei (todistus valitussa teoriassa).

Nyt voidaan todistaa, että epätäydellisyysominaisuus pätee kaikille tällaisille teorioille sillä olettamuksella, että ne sisältävät alkeislukuteorian – eli että niissä voidaan viedä läpi yhteen- ja kertolaskua – ja että ne ovat ristiriidattomia. Seuraavassa Gödelin epätäydellisyyslauseet yleisessä muodossa:

Ensimmäinen epätäydellisyyslause: Jokaiselle ristiriidattomalle matemaattiselle teorialle, joka sisältää alkeislukuteorian, voidaan löytää teorian kieleen kuuluva lause, joka on tosi mutta jota ei voi todistaa tässä teoriassa.

Toinen epätäydellisyyslause: Mikään ristiriidaton matemaattinen teoria ei voi todistaa omaa ristiriidattomuuttaan. (Gödel 1930, Turing 1936.)

Myös Gödel hyväksyi pian Turingin analyysin ja tavan yleistää epätäydellisyystulokset.

Ratkeamattomuuden ja epätäydellisyyden välillä on muutoinkin kiinteä yhteys; jos teoria on täydellinen, on olemassa (periaatteessa) myös ratkaisumenetelmä sille, onko jokin lause todistettavissa tässä teoriassa vai ei. Riippuvuussuhde ei päde aina toisinpäin: on olemassa joitakin epätäydellisiä teorioita, joissa on kuitenkin ratkaisumenetelmä. Yleensä, aina kun teoria sisältää lukuteorian, voidaan teoria kuitenkin todistaa sekä epätäydelliseksi että ratkeamattomaksi.

RATKEAMATTOMUUSTULOKSET JA TAVALLINEN MATEMATIIKKA

Gödelin konstruoimat todistumattomat lauseet ja Turingin ratkeamattomat ongelmat olivat monimutkaisia teoreettisia rakennelmia, jotka oli muotoiltu juuri epätäydellisyys- ja ratkeamattomuustulosten todistamiseksi. Niillä ei ollut mitään ilmeistä luonnollista matemaattista merkityssisältöä. Siksi pidettiin pitkään epäselvänä, onko tuloksilla loppujen lopuksi kovinkaan suurta merkitystä tavallisen matematiikan näkökulmasta. Asiaan on kuitenkin saatu lisävalaistusta.

Hilbert oli kuuluisassa vuonna 1900 esittämässään luettelossa tärkeimmistä matematiikan avoimista ongelmista esittänyt kymmenentenä ongelmana niin sanotun Diofantoksen yhtälöiden ratkaisuongelman (nimitys juontaa juurensa antiikin kreikkalaisesta matemaatikosta Diofantoksesta). Diofantoksen yhtälöt ovat yksinkertaisesti yhtälöitä, jotka muodostetaan kokonaislukuja sekä yhteenlasku- ja kertolaskuoperaatioita yhdistämällä ja joiden mahdolliset ratkaisut rajoitetaan kokonaislukujen joukkoon.

Esimerkiksi yhtälöä $3x^2 + 2xy = 5y^2$ kutsutaan yksikertaisesti vain ”yhtälöksi”, jos sille haetaan ratkaisuja reaalilukujen joukosta, mutta ”Diofantoksen yhtälöksi”, jos ratkaisuksi haetaan vain kokonaislukuja. Ero on tärkeä. Esimerkiksi yhtälöllä $x^2 + y^2 = 2$ on äärettömän monta ratkaisua reaalilukujen joukossa, mutta vain 4 eri ratkaisua kokonaislukujen joukossa (x ja y ovat joko +1 tai –1). Yhtälöllä $x^2 + y^2 = 3$ on myös äärettömän monta ratkaisua reaalilukujen joukossa, mutta jos sitä tarkastellaan Diofantoksen yhtälönä, sillä ei ole lainkaan ratkaisua (siis kokonaislukujen joukossa). Hilbertin kymmenes ongelma on siis esittää yleinen menetelmä, jolla voidaan ratkaista mistä tahansa tällaisesta yhtälöstä, onko sillä ratkaisua kokonaislukujen joukossa. Vaikuttaa yksinkertaiselta; totuus asiasta on kuitenkin yllättävä.

Turingin luomat välineet mahdollistivat kysymyksen siitä, voisiko tämä ongelma ehkä ollakin ratkeamaton. 1950-luvun alussa kaksi nuorta amerikkalaista loogikkoa, Julia Robinson ja Martin Davis, alkoivat aluksi toisistaan riippumatta, myöhemmin yhteistyössä, tutkia asiaa. Myöhemmin joukkoon liittyi filosofina mainetta niittänyt Hilary Putnam. He kutsuivat ”eksponentiaalisiksi Diofantoksen yhtälöiksi” yhtälöitä, joiden muodostamisessa voidaan yhteen- ja kertolaskun lisäksi käyttää myös eksponenttioperaatiota. Esimerkiksi $2x^y + z^y = 0$ eksponentiaalinen Diofantoksen yhtälö mutta ei tavallinen Diofantoksen yhtälö. Ero on siinä, että edellisissä eksponenttina voi esiintyä muuttujia, kun taas jälkimmäisissä vain vakioita (mikä voidaan palauttaa tavalliseksi kertolaskuksi; esimerkiksi $x^3 = x \times x \times x$).

Vuonna 1962 Davis, Putnam ja Robinson saavuttivat yhdessä tärkeän tuloksen: he osoittivat, että kysymykseen eksponentiaalisten Diofantoksen yhtälöiden kokonaislukuratkaisuista ei ole olemassa ratkaisumenetelmää. Näin hyvin luonnollinen lukuteoreettinen ongelma – ongelma jonka koululainenkin ymmärtää – oli osoitettu absoluuttisesti ratkeamattomaksi.

Vuonna 1970 tuolloin vasta 22-vuotias venäläinen matemaatikko Juri Matjasevitš lisäsi viimeisen puuttuvan palasen ja todisti, että myös kysymys tavallisten Diofantoksen yhtälöiden ratkaisuista, eli Hilbertin kuuluisa kymmenes ongelma, on ratkeamaton. Ei siis ole mahdollista esittää yleistä menetelmää, jota seuraamalla voitaisiin ratkaista kustakin Diofantoksen yhtälöstä, onko sillä ratkaisuja vai ei.

Näiden tulosten seurauksena on myös mahdollista antaa Gödelin epätäydellisyystuloksille uusi muotoilu: Missään matemaattisessa teoriassa ei voida ratkaista kaikista Diofantoksen yhtälöistä, onko niillä ratkaisua vai ei. Jokaiselle teorialle löytyy yhtälöitä, joilla ei ole ratkaisua, mutta tätä ei voida todistaa kyseisessä teoriassa.

EPÄTÄYDELLISYYSTULOKSET JA IHMISMIELI

Matemaattinen totuus on näin ollen tavallaan ”äärettömän syvä”. Sitä ei voida tiivistää mihinkään äärelliseen teoriaan. Tämä ei merkitse sitä, että jokin yksittäinen matemaattinen lause olisi absoluuttisesti mahdoton tietää, vaan sitä, ettei ole mitään yhtenäistä ja yleistä menetelmää kaikkien ongelmien ratkaisemiseksi.

Muun muassa kuuluisa matemaatikko-fyysikko Roger Penrose on väittänyt Gödelin ja Turingin tulosten osoittavan, että ihmismieli kykenee enempään kuin mikään mekaaninen kone. On ajateltu, että Gödelin tuloksen nojalla on jokaiselle teorialle, ja sitä vastaavalle koneelle, löydettävissä lause, jonka totuuden me ihmiset pystymme näkemään mutta kyseinen kone ei. Mieli ei siis ole mekaaninen, eli sitä ei voi kuvata tietokoneena. Tähän suosittuun ajattelutapaan sisältyy kuitenkin sekaannus. Oletetaan, että T on aksiomatisoitu teoria, jonka tiedetään sisältävän lukuteorian. Gödelin ensimmäisen lauseen muoto on:

Jos T on ristiriidaton, *niin* on olemassa tosi lause L, jota ei voi todistaa T:ssä.

Kuitenkin on vaikeaa ja usein mahdotonta tietää, onko joku annettu teoria T ristiriidaton vai ei. Itse asiassa ristiriidattomuus on itsessään ratkeamaton ongelma. Mutta ilman tietoa, että T on ristiriidaton, emme voi tietää mitään lauseen L totuudesta. Gödelin tulokset eivät kerro mitään ihmisen ylivertaisuudesta koneisiin nähden.

Päinvastoin, on järkevää uskoa, että lauseiden, jotka voidaan todistaa meille ihmisille ilmeisien aksioomien pohjalta, täytyy sisältyä johonkin formalisoituun teoriaan. Muutoin äärettömän määrän toisistaan täysin riippumattomia matemaattisia periaatteita täytyisi olla ilmeisiä ihmismielelle – ja tämä tuntuu erittäin epäuskottavalta. Gödelin tuloksista seuraakin, että on olemassa matemaattisia totuuksia, joita ei voida todistaa ihmismielelle ilmeisistä aksioomista.

RATKAISUMENETELMIÄ LAAJENTAMASSA

Viime vuosina on tehty erilaisia yrityksiä laajentaa laskettavuuden käsitettä niin, että Turingin analyysilla ratkeamattomiksi tuomitut ongelmat voitaisiin ratkaista. Vaikka tällaisia ajatuskulkuja on viime vuosina päästy esittelemään jopa johtavissa tiedelehdissä, nämä puheet ”hyperlaskettavuudesta” perustuvat pahoihin käsitteellisiin sekaannuksiin. Turingin asettamat rajat ratkeavuudelle ovat ja pysyvät.

On kuitenkin olemassa eräs luonteva ja mielenkiintoinen ratkeavuuden käsitteen yleistys. Hilary Putnam esitti vuonna 1965 ajatuksen ”yrityksen ja erehdyksen menetelmästä”. Samanlaisen ajatuksen esitti riippumattomasti Mark Gold samana vuonna. Sittemmin useat tutkijat ovat riippumattomasti päätyneet yhtäpitäviin käsitteisiin. Jeroslaw kutsui omaa versiotaan ”kokeelliseksi logiikaksi” (vuonna 1975). Myös Jaakko Hintikka on yhdessä Arto Mutasen kanssa tutkinut vastaavaa käsitettä ja sen sovelluksia. Ajatus on siis ilmeisesti varsin luonnollinen.

Siihen päädytään, kun hieman muutetaan Turing-koneen ajatusta. Tällöin sallitaan koneen ”muuttaa mieltään” äärellisen monta kertaa. Kone tulostaa tuloksenaan äärellisen jonon kyllä- ja ei-vastauksia. Viimeinen ”kyllä” tai ”ei” on lopullinen, oikea vastaus. Nyt kuitenkin luovutaan siitä oletuksesta, että voidaan ratkaista, milloin kone on lopettanut laskemisen. Jos koneen viimeisin tuloste on ”kyllä”, tiedämme että tämä on vastaus, *ellei* kone vielä muuta mieltään. Ei ole kuitenkaan olemassa mitään ratkaisumenetelmää, joka kertoisi, aikooko kone vielä muuttaa mieltään vai ei.

Ongelmat, jotka voidaan ratkaista tällaisen menetelmän avulla, ovat tavallaan ”empiirisesti ratkeavia”. Jos nimittäin *oletetaan* aina, että viimeisin vastaus on lopullinen, erehdytään äärellisen monta kertaa, mutta saavutetaan lopulta oikea vastaus. Mutta vaikka olisikin saavutettu oikea vastaus, ei voida varmasti tietää, että näin on jo tapahtunut.

On kuitenkin tärkeää todeta, ettei tämä ole tarkoitettu millään tavalla Turingin analyysin kritiikiksi. Käsite on täysin erilainen. Se on kuitenkin luonnollinen käsite, ja tutkimisen arvoinen. Turingin menetelmiä soveltamalla on helppo todistaa, että on olemassa ongelmia, joita ei voida ratkaista edes tämän yleisemmän ja liberaalimman ratkaisumenetelmän avulla. Ei ole kuitenkaan ilmeistä, mitkä luonnolliset matemaattiset ongelmat voidaan ratkaista tällä menetelmällä.

Yrityksen ja erehdyksen menetelmällä voidaan ratkaista ”empiirisesti” esimerkiksi kysymys siitä, onko Diofantoksen yhtälöllä ratkaisuja kokonaislukujen joukossa. Sama pätee muihinkin tunnettuihin perinteisiin ratkeamattomiin ongelmiin tavallisen matematiikan piirissä. Voidaan siis kysyä, onko ylipäänsä olemassa mitään luonnollisia, tavallisen matematiikan ongelmia, jotka olisivat ratkeamattomia myös yrityksen ja erehdyksen menetelmän avulla. Asiaan on hiljattain saatu myönteinen vastaus.

On osoitettu (Raatikainen 2003), että ongelma siitä, onko annetulla eksponentiaalisella Diofantoksen yhtälöllä vain äärellisen määrä ratkaisua vai ei (siis ääretön määrä), on ratkeamaton jopa tässä yleisemmässä ja laajemmassa mielessä. Vaikka kysymys on melko yksinkertainen, se on hyvin vahvassa mielessä ratkeamaton. Sitä ei voida ratkaista edes ”empiirisesti”, yrityksen ja erehdyksen menetelmän avulla. Vastaukset tämänmuotoisiin kysymyksiin ovat siis – helppoja yksittäistapauksia lukuun ottamatta – kertakaikkisesti ihmismielen kykyjen tavoittamattomissa.

KIRJALLISUUS

Davis, Martin (2003). *Tietokoneen esihistoria Leibnizista Turingiin*. Helsinki: Art House.

Hodges, Andrew (2000). *Alan Turing, arvoitus*. Helsinki: Terra Cognita. (Alkuteos: Alan Turing: *The Enigma*, 1992.)

Raatikainen, Panu (1995). Laskettavuuden teorian varhaishistoria, teoksessa L. Haaparanta ym. (toim.): *Älyn ulottuvuudet ja oppihistoria – matka logiikan, psykologian ja tekoälyn juurille*. Suomen tekoälyseuran julkaisuja nro 13, Helsinki 1995, 189–198.

— (2003). Some strongly undecidable natural arithmetical problems, with an application to intuitionistic theories. *Journal of Symbolic Logic* 68, 262–266.

— (2005). Formalismin rajat. *Niin & Näin* 2/05, 29–35.