Ilmestynyt teoksessa: L. Haaparanta, E. Hyvönen, J. Seppänen and J. Silvonen (eds.)
Älyn oppihistoria – matka logiikan, psykologian ja tekoälyn juurille, Finnish Artificial Intelligence Society, Espoo, 1995, s. 198-198.

Laskettavuuden teorian varhaishistoria

Panu Raatikainen
Helsingin yliopisto

Nykyaikaisen logiikan keskeisenä tutkimuskohteena ovat erilaiset formalisoidut teoriat. Erityisesti vuosisadan vaihteen aikoihin matematiikan perusteiden tutkimuksessa ilmaantuneiden hämmentävien paradoksien (Russell 1902, 1903) jälkeen (ks. kuitenkin jo Frege 1879, Dedekind 1888, Peano 1889; vrt. Wang 1957) keskeiset matemaattiset teoriat on pyritty tällaisten vaikeuksien välttämiseksi uudelleen muotoilemaan täsmällisesti keinotekoisessa symbolikielessä, jonka lauseenmuodostussäännöt on täsmällisesti ja yksikäsitteisesti määrätty. Edelleen teoriat on pyritty aksiomatisoimaan, ts. on pyritty antamaan joukko peruslauseita, joista kaikki muut – tai ainakin mahdollisimman monet – teorian todet lauseet voidaan loogisesti johtaa tarkoin määrättyjen päättelysääntöjen mukaisesti (erityisesti Hilbert 1904, 1918, 1927; ks. myös Russell 1908, Zermelo 1908; vrt. Kleene 1952, §§ 14-15).

Formaalisen järjestelmän (Post 1921; Gödel 1931, vrt. Shoenfield 1967, s. 2-6) luonnehdinnassa on kolme keskeistä osaa:
(1) Ensiksi meidän on määriteltävä formaalisen järjestelmämme kieli. Annamme kielen merkkien joukon, aakkoston, sekä tietyt lauseenmuodostussäännöt, joiden avulla muodostetut merkkijonot (ja vain ne) ovat tämän kielen hyvinmuodostettuja ilmaisuja: kaavoja ja lauseita.
(2) Formaalisen järjestelmän seuraava osa ovat peruslauseet eli aksioomat. Ne voivat olla mitä tahansa järjestelmän kielen lauseita. Aksioomia joko on äärellinen määrä, jolloin voidaan antaa niiden luettelo, tai vaihtoehtoisesti meillä on jokin äärellisesti esitettävä sääntö, jonka avulla voimme ratkaista mielivaltaisesta annetusta kaavasta, onko se aksiooma.
(3) Kolmas formaalisen järjestelmän muodostavista osasista ovat päättelysäännöt. Jokainen näistä säännöistä toteaa, että tiettyjen ehtojen vallitessa kaava, jota kutsumme johtopäätökseksi, voidaan päätellä ts. johtaa toisista kaavoista, joita kutsumme premisseiksi.

Voimme myös määritellä, mitä tarkoitetaan formaalisen järjestelmän teoreemoilla: (i) jokainen aksiooma on teoreema; (ii) jos kaikki premissit ovat teoreemoja, niistä päättelysäännön avulla johdettu johtopäätös on myös teoreema.

Formalisoitu teoria on tällaisen järjestelmän kaikkien teoreemojen joukko. Formalisoidun teorian todistus on äärellinen kaavajono, jonka jokainen jäsen on joko ko. teorian aksiooma tai on saatu jonon aiemmista jäsenistä teorian päättelysääntöjä soveltamalla. Sanomme toisinaan myös, että lause on todistuva tai johdettavissa; tämä on yhtäpitävää sen kanssa että lause on teoreema.

On tärkeää huomata, että edellä esitetyssä formaalisen järjestelmän alustavassa luonnehdinnassa esiintyi toistumiseen "säännön" käsite. Oletamme, että nämä säännöt ovat "mekaanisia" rutiineja, ts. on olemassa äärellinen ohjejoukko, jota mekaanisesti seuraamalla tehtävä voidaan suorittaa. Yksittäistapauksissa (konkreettiset lauseenmuodostus- ja päättelysäännöt) on helppo nähdä, että annetut säännöt todellakin täyttävät tämän vaatimuksen, mutta yleistä tarkastelua varten meidän olisi kyettävä jotenkin määrittelemään tämä mekaanisen menetelmän tai ratkaisumenetelmän käsite. Tämä onkin esityksemme keskeinen ongelma.

Ratkaisumenetelmä formaaliselle järjestelmälle **F** on menetelmä, jonka avulla voimme ratkaista äärellisellä määrällä askelia jokaisesta annetusta **F**:n lauseesta, onko se **F**:n teoreema vai ei. Joukkoa, jolle on olemassa ratkaisumenetelmä, sanotaan ratkeavaksi. Sanomme, että joukko voidaan tuottaa mekaanisesti, jos on olemassa äärellinen ohjejoukko, jota mekaanisesti seuraamalla joukon jäsenet voidaan yksi kerrallaan luetella. Tällaisia joukkoja sanotaan myös puoliratkeaviksi, sillä ao. menetelmä tuottaa äärellisen monen askelen jälkeen joukon oletetun jäsenen, mikäli se todella on kyseisen joukon jäsen. Jos oletettu jäsen ei sen sijaan olekaan kyseisen joukon jäsen, emme tämän menetelmän avulla saa ikinä tietää tätä. Eikä mikään takaa *a priori*, että tämän selvittämiseksi on olemassa jokin toinen mekaaninen menetelmä.

Nykyaikaisessa laskettavuuden teoriassa ratkeavia ja mekaanisesti tuotettuja eli puoliratkeavia joukkoja vastaavat rekursiiviset ja rekursiivisesti numeroituvat joukot. Teorian keskeinen tulos on, että on todella olemassa mekaanisesti tuotettuja eli puoliratkeavia joukkoja, jotka eivät ole ratkeavia.

Lyhyt esihistoria

Laskenta- ja ratkaisumenetelmät ovat yhtä vanhoja kuin matematiikka itse. Niitä käsitellään esimerkiksi Eukleideen *Elementassa* (kirjoitettu noin 320-330 eaa.). Siinä esitetään mm. menetelmä kahden luvun suurimman yhteisen tekijän ratkaisemiseksi; sitä kutsutaankin nykyisin Eukleideen algoritmiksi (Boyer 1994, s. 175). Sana “algoritmi” taas on erinäisten sekaannusten kautta vääntynyt 800-luvulla eläneen arabimatemaatikon Al-Khwarizmin nimestä (Boyer 1994, s. 326).

Myöhäiskeskiajalla Raymundus Lullus (1235-1315) kehitteli järjestelmää, joka yhdistelisi käsitteitä mekaanisesti tyhjentäen kaikki vaihtoehdot ja tuottaisi kaikki “totuudet”. Hän uskoi, että tämä menetelmä auttaisi muhamettilaisten käännyttämisessä kristinuskoon. Hänen nimellä *Ars Magna* tunnettu järjestelmänsä oli lähinnä fantastista filosofista spekulaatiota, mutta ajatuksella oli valtaisa vaikutus. (Kneale & Kneale 1962, s. 241-2; Hermes 1980)

Yksi Lullusta paljon vakavasti otettavampi ajattelija, johon nämä fantasiat vaikuttuvat syvästi, oli yleisnero Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), jonka väitöskirja *De Arte Combinatoria* (1666) on ensimmäinen todellinen yritys yleisen laskentamenetelmän suuntaan. Leibniz oli yksi ensimmäistä, jotka työskentelivät binaarijärjestelmien avulla. Hän suunnitteli yleistä järjen kalkyyliä (*calculus raticionator*) ja todellakin kehitti Boolen algebran osia. Leibniz haaveili ajattelun mekanisoinnista, niin että inhimillisen elämän ongelmat voitaisiin käsitellä komiteassa, joka istuisi pöydän ääressä ja sanoisi: “Calculemus” – “Laskekaamme!”. (Kneale & Kneale 1962; Davis 1983, 1987; Hermes 1980)

Erottelu rekursiivisen ja rekursiivisesti numeroituvan joukon välillä voidaan jäljittää takaisin epäformaaliseen erotteluun ratkaisumenetelmän ja tuottamismenetelmän välillä; tämäkin esiintyy jo Leibnizillä (1666), kun hän erittelee käsitteet *ars iudicandi* (todistuksen korrektisuuden tarkistaminen) ja *ars inveniendi* (todistuksen löytäminen). (Odiferri 1989, s. 144; Hermes 1980)

Vuoden 1834 tienoilla Charles Babbage kehitteli “Analyyttisen koneen” ajatusta. Sen oli tarkoitus reikäkorteilla ohjelmoituna suorittaa laskutoimituksia. Babbage pohti, mitä operaatiota todella tarvittaisiin. Hän päätyi seuraaviin operaatioihin: yhteen, kerto- ja (rajoitettu) vähennyslaskuoperaatiot, operaatioiden yhdistäminen, operaatioiden iterointi, ehdollinen iterointi ja ehdollinen siirto. (Gandy 1988)

Jos tarkastelemme Babbagen koneen sijasta idealisoitua konetta, jolla on potentiaalisesti rajaton muisti, Babbagen operaatiot tuottavat kaikki Turing-laskettavat funktiot! (Gandy 1988) Babbage myös esitti koneensa laskentakyvyistä teesin, jota voidaan pitää nk. Churchin teesin (ks. alla) versiona (Gandy 1988). Mikään ei kuitenkaan viittaa siihen, että laskettavuuden teorian myöhemmät kehittäjät olisivat tunteneet Babbagen työtä.

Ratkaisuongelma

Nk. ratkaisuongelmaa ("Entscheidungsproblem") lähestyttiin ensiksi boolelaisen logiikan algebran näkökulmasta. Sen muotoili (ja ratkaisi osittain) ensimmäisenä Ernst Schröder (Schröder 1890-1905; ks. Hermes 1980). Saman tradition piirissä Leopold Löwenheim todisti 1915 monadisen (vain yksipaikkaisia predikaatteja sisältävän) predikaattilogiikan ratkeavuuden (Löwenheim 1915; ks. myös Gandy 1988).

[*Huomautus:* Tämä voi muuten selittää sen, miksi traditionaalisessa aristoteelisessa logiikassa ei pohdittu ratkeavuusongelmia; Aristoteleen syllogistiikka voidaan tulkita monadiseksi predikaattilogiikaksi, jonka ongelmat voidaan aina ratkaista. Vasta Fregen uusi logiikka (Frege 1879) toi mukanaan niin paljon loogista ilmaisuvoimaa (kvanttorit ja monipaikkaiset relaatiot), että myöhemmin ratkeamattomiksi osoittautuneiden teorioiden muotoilu kävi mahdolliseksi logiikassa (Fregen oma järjestelmä oli tosin ristiriitainen ja siksi triviaalisti ratkeava.)]

Vaikutusvaltaisessa Hilbertin ja Ackermannin logiikan oppikirjassa vuodelta 1928 ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan ratkaisuongelmaa, "Entscheidungsproblem", kutsutaan "matemaattisen logiikan pääongelmaksi" (Hilbert & Ackermann 1928).

Ongelman positiiviseen ratkaisuun, jota Hilbert ja hänen seuraajansa ilmeisesti odottivat (ks. Gandy 1988), olisi riittänyt jonkin erityisen ratkaisumenetelmän esittäminen. Negatiivinen tulos olisi sitä vastoin edellyttänyt yleisen ratkaisumenetelmän käsitteen täsmällistä matemaattista määritelmää. Mutta tällaista ei tuolloin ollut olemassa, eikä tämän intuitiivisen ja epäformaalisen käsitteen täsmällistä matemaattista määrittelyä pidetty yleensä edes mahdollisena. Toisin kuitenkin kävi.

Emil Postin työ 1920-luvulta

Yhdysvalloissa aiheen parissa työskenteli jo 1920-luvun alussa yksikätinen ja syrjäänvetäytyvä nuori matemaatikko Emil Post. Hän esitti väitöskirjassaan (Post 1921) ratkaisumenetelmän lauselogiikalle – oppikirjoista tutun totuustaulumenetelmän. Edelleen Post oli ensimmäinen loogikko, joka tarkasteli (jo väitöskirjassaan) formalisoituja järjestelmiä nykyaikaisessa mielessä yleisesti.

Matemaattisen logiikan vallitseva perusteoria oli tuohon aikaan Russellin ja Whiteheadin *Principia Mathematica* (Russell&Whitehead 1910-1913), johon voitiin upottaa koko klassinen matematiikka. Väitöskirjansa jälkeen Post yritti löytää ratkaisumenetelmiä yhä laajemmille *Principian* osateorioille ja näin mekanisoida matematiikan. Pian hän turhautui näihin turhiin yrityksiin.

Abstrakti formalisoitujen järjestelmien tarkastelu johti Postin määrittelemään kanoniset järjestelmät ja näiden erityistapauksena normaalijärjestelmät – näitä on alettu kutsua kirjallisuudessa Postin järjestelmiksi. Post oli vakuuttunut, että kanonisen järjestelmän käsite oli riittävän yleinen kattaakseen *Principia Mathematican* (tämän täsmällinen todistus olisi erittäin työläs) tai minkä tahansa muun logiikan järjestelmän. Hän myös todisti, että jokainen kanoninen järjestelmä voidaan palauttaa normaalijärjestelmään. Nämä tarkastelut rohkaisivat Postin olettamaan, että kaikki merkkijonot, jotka voidaan tuottaa "äärellisellä menetelmällä", voidaan tuottaa normaalijärjestelmällä. Martin Davis on osuvasti kutsunut tätä oletusta "Postin teesiksi" (vrt. "Churchin teesi", ks. alla).

Yksinkertaisella diagonaaliargumentin sovellutuksella Post päätyi toteamaan (ilmeisesti jo vuonna 1922): "… ei ole olemassa äärellistä menetelmää, jonka avulla voitaisiin yhdenmukaisesti todeta mielivaltaisesta normaalijärjestelmästä ja mielivaltaisesta … [sanasta], tuottaako [kyseinen] järjestelmä tämän [sanan] vai ei." (Post 1941) Post päätteli, ettei mikään symbolisen logiikan järjestelmä (mukaan lukien *Principia Mathematica*) voi olla täydellinen. (Post 1941)

Näin Post saavutti abstraktissa muodossa sekä Gödelin epätäydellisyystuloksen että Churchin ratkeamattomuuslauseen jo 1920-luvulla (Davis 1982, Gandy 1988). Tiettävästi Post jopa luennoi *Principian* epätäydellisyydestä Columbian yliopistossa 1920-luvulla (Davis 1982).

Postin varhaisella työllä ei ollut mitään vaikutusta muihin alan tutkijoihin. Hänen oma ympäristönsä ei ollut vastaanottavainen (1920-luvulla hän elätti itsensä opettamalla New Yorkin kouluissa), eikä Post myöskään ollut täysin tyytyväinen tulosten pohjalla olleeseen "psykologiseen" käsiteanalyysiin. Postin maanis-depressiivisellä mielisairaudella lienee myös ollut oma osansa siinä, ettei hän julkaissut näitä töitään. Postin vuonna 1941 laatima laaja selonteko varhaistyöstään julkaistiin postuumisti vasta vuonna 1965 (Davis 1965).

Post osallistui kuitenkin myöhemmin merkittävästi laskettavuuden teorian kehittämiseen. Churchin julkaisujen (ks. alla) rohkaisemana Post julkaisi 1936 (Post 1936) oman luonnehdintansa laskettavuudelle. Tämä riippumaton analyysi muistuttaa hämmästyttävän paljon Turingin samana vuonna esittämää määritelmää, ja on osin jopa elegantimpi. Postin vuonna 1944 julkaisema sisältörikas artikkeli (Post 1944) taas viitoitti kypsäksi tieteeksi kehittyneen laskettavuuden teorian suunnan pitkäksi aikaa eteenpäin: se toi keskusteluun mm. "luovat" ja "yksinkertaiset" joukot, erilaiset palautusmenetelmät ja ratkeamattomuuden asteet.

Rekursiiviset funktiot ja Gödel

Rekursiota on käytetty matematiikassa vähintäänkin Eukleideen ajoista asti, vaikka sana onkin uusi. Dedekind (1888) ja Peano (1889) käyttivät klassisissa lukuteorian aksiomatisoinneissaan yhteenlasku-, kertolasku- ja eksponenttioperaatiota määriteltäessä nk. palautuskaavoja eli rekursiota.

Hilbert käytti 1904 (Hilbert 1905) sanaa "rekurrente" ja 1923 (ilmeisesti ensimmäistä kertaa; Hilbert 1923) sanaa "Rekursion". Rekursion ("rekurrierend") käsitettä korosti myös Skolem, joka peräänkuulutti rekursiivista ajattelutapaa matematiikan perusteissa. Skolem todisti myös monien tunnettujen funktioiden (primitiivi-) rekursiivisuuden. (Skolem 1923)

Kirjoituksessaan äärettömästä (Hilbert 1926) Hilbert laajensi termin alaa huomattavasti tarkastelemalla yleisempiä rekursion muotoja (jotka käyttävät useampaa kuin yhtä muuttujaa). Ackermann todistikin (Ackermann 1928), että näin saadaan funktioita, jotka eivät ole nykytermein primitiivirekursiivisia. Primitiivirekursiiviset funktiot eivät näin tyhjennä intuitiivisesti laskettavien funktioiden joukkoa. Hilbert kuitenkin väitti, että on ristiriidatonta olettaa, että kaikki lukuteoreettiset funktiot ovat rekursiivisia tässä yleistetyssä mielessä.

Vuonna 1930 tuolloin vasta 24-vuotias Kurt Gödel (Gödel 1931) todisti kuuluisat epätäydellisyystuloksensa. Nämä olivat vakava isku Hilbertin ohjelmalle. Gödel osoitti, ettei klassisen äärettömän matematiikan täydellinen formalisointi eikä “finitistinen” ristiriidattomuustodistus sille ollut mahdollinen edes mahtavassa *Principia Mathematican* teoriassa.

Nekin harvat, jotka kunnolla ymmärsivät tuloksen – mukaan lukien Gödel itse – olivat kuitenkin epävarmoja siitä, voitaisiinko epätäydellisyystulokset yleistää ja miten. Gödel toki totesi, että tulokset voitaisiin todistaa myös Zermelon, Fraenkelin ja von Neumannin joukko-opeille sekä Hilbertin koulukunnan esittämille lukuteorian formalisoinneille. Mutta kuten erityisesti Kleene on korostanut (ks. esim. Kleene 1967, 1976, 1988), ilman täsmällistä ratkaisumenetelmän käsitettä epätäydellisyystuloksia ei voida yleistää. Nimittäin, yleistetyn epätäydellisyystuloksen esittäminen edellyttää yleistä formalisoidun teorian käsitettä, joka puolestaan edellyttää – kuten alussa totesimme – täsmällistä ratkaisumenetelmän käsitettä. Sellaista Gödelillä ei ollut käytössään (ks. myös Gödelin myöhemmät kommentit tämän kirjoituksen lopussa). Kaikki, mitä Gödel vuonna 1930 todisti, oli yhden erityisen, joskin varsin vahvan ja tuolloin keskeisessä asemassa olleen formaalisen järjestelmän, *Principia Mathematican* epätäydellisyyden.

Epätäydellisyystodistuksessaan Gödel joka tapauksessa myös määritteli täsmällisesti funktiot, joita hän kutsui nimellä “rekursiv”; hänen määritelmänsä kattaa funktiot, joita on alettu Rózsa Péterin ehdotuksesta 1934 (Péter 1934; ks. myös Kleene 1936) kutsua primitiivirekursiivisiksi erotuksena yleisemmillä rekursiolla määritellyistä funktioista.

Gödel oli kirjeenvaihdossa lahjakkaan nuoren ranskalaisloogikon Jacques Herbrandin kanssa, joka kuoli vielä vuoden 1931 kuluessa 23 vuotiaana vuorikiipeilyonnettomuudessa. Kirjeessään Gödelille aiemmin samana vuonna Herbrand ehdotti määritelmää “yleisille rekursiivisille funktioille“. Gödel täsmensi ja kehitti ehdotusta, ja esitti oman määritelmänsä kevään 1934 Princetonin luennoissaan (Gödel 1934). Kleenen ja Rosserin luentomuistiinpanoista on kiertänyt kopioita, mutta ne julkaistiin vasta 1965 (Gödel 1934). Kleene toimitti hieman määritelmän yksityiskohtia ja julkaisi määritelmänsä 1936 (Kleene 1936). Kleenen viimeistelemässä muodossa tunnemme nykyisinkin yleiset rekursiiviset funktiot (eli Herbrand-Gödel -rekursiiviset funktiot).

Church ja hänen teesinsä

Princetonin yliopistossa Yhdysvalloissa työskenneltiin aiheen kimpussa jo ennen Gödelin saapumista sinne. Alonzo Church ja tämän oppilaat Stephen Kleene ja J. Barkley Rosser kehittivät siellä nk. λ-kalkyyliä. 1930-luvun alusta alkaen Church kehitteli uutta λ-notaatioonsa perutuvaa yleistä tyypitöntä matematiikan perusteiden postulaattijärjestelmää (Church 1932, 1933). Kleene ja Rosser kuitenkin todistivat 1934, että Churchin järjestelmä oli ristiriitainen (Kleene & Rosser 1935)

Hieman kuin puolivahingossa jäljelle jäi kuitenkin λ-määriteltävien funktioiden käsite. Churchin mukaan kunnia käsitteen eristämisestä 1931-32 kuuluu hänen itsensä ohella yhtä lailla Kleenelle (Church 1936). Kleene osoitti 1933 – vastoin Churchin ennakko-oletusta – että tämä yksinkertainen funktiojoukko oli itse asiassa varsin kattava. Vuonna 1933 Church ensin spekuloi asialla, ja keväällä 1934 hän esitti suoraan kuuluisan teesinsä, jonka mukaan intuitiivisesti laskettavat funktiot ovat täsmälleen λ-määriteltävät funktiot (Kleene 1981, Davis 1982). Näin ensimmäistä kertaa joku väitti suoraan onnistuneensa määrittelemään täsmällisesti intuitiivisen ratkeavuuden tai laskettavuuden käsitteen. Tätä samastamista on Kleeneä (Kleene 1952) seuraten alettu kutsua Churchin teesiksi. Kleene muistelee: “Kun Church esitti teesinsä, istuin alas kumotakseni sen diagonalisoimalla ulos λ-määriteltävien funktioiden joukosta. Mutta, huomattuani pian, ettei diagonalisointia voitaisi tehdä efektiivisesti, minusta tuli yhdessä yössä teesin kannattaja.” (Kleene 1981)

Tuolloin myös Gödel saapui Princetoniin. Hän oli Churchin mukaan (kirje Kleenelle, ks. Kleene 1981) kuitenkin “täysin tyytymätön” teesiin. Church ja Gödel väittelivät aiheesta, mutta Gödel ei vakuuttunut. Kevään 1934 luennoissaan Gödel kuitenkin esitti varovaisesti, että näyttäisi siltä kuin kaikki mekaanisesti laskettavat funktiot voitaisiin määritellä käyttämällä kaikkein yleisimpiä rekursioita. Tämä vaikuttaa aivan Churchin teesiltä. Gödel on kuitenkin myöhemmin kieltänyt tämän: (kirje Davisille 1965): “… ei ole totta, että alaviite 3 olisi Churchin teesin ilmaus… Tuohon aikaan en ollut ollenkaan vakuuttanut, että rekursion käsitteeni [Herbrand-Gödel -rekursiivisuus] kattaisi kaikki mahdolliset rekursiot. “ (ks. Davis 1982)

Kevään 1934 luentojen jälkeen Gödel koki hermoromahduksen ja vietti seuraavat kolme vuotta enimmäkseen mielisairaalassa kärsien syvästä masennuksesta (Dawson 1984). Tämä voi selittää sen, miksi Gödel ei näytä juuri osallistuneen teorian kehittelyyn näinä ratkaisevina vuosina (hän kuitenkin havaitsi esitettävyyden käsitteen absoluuttisuuden (ks. alla) ja todisti valinta-aksiooman ristiriidattomuuden).

Kleene todisti 1935, että Herbrand-Gödel -rekursiiviset funktiot ja λ-määriteltävät funktiot ovat itse asiassa ekvivalentit (Kleene 1936a). Tämä vahvisti edelleen uskoa Churchin teesiin Princetonissa. Teesin valtaisa merkitys ymmärrettiin pian; mahdollistihan se lopultakin ratkaisuongelman yleisen tarkastelun. Church julkaisi teesinsä 1936 ja todisti sekä lukuteorian että predikaattilogiikan ratkeamattomiksi (Church 1936, 1936a): ei ole olemassa mitään yleistä menetelmää ratkaista mielivaltaisesta annetusta lauseesta, onko se (lukuteorian/logiikan) teoreema (ks. myös Kleene 1936). Edelleen Churchin teesi mahdollisti Gödelin epätäydellisyyslauseiden yleistämisen: Kleene julkaisikin ensimmäisen yleistetyn epätäydellisyystuloksen 1936 (Kleene 1936)

Esitettävyys: Formalisoitujen teorioiden näkökulmasta ratkaisumenetelmät voidaan tulkita seuraavasti. Ominaisuus P voidaan ratkaista annetussa formalisoidussa teoriassa **T**, jos ominaisuutta vastaa teoriassa **T** kaava $\varphi(x)$, ja jokaisesta luvusta n voidaan todistaa teoriassa **T** joko $\varphi(\mathbf{n})$ tai $\neg\varphi(\mathbf{n})$. Koska todistukset voidaan luetella mekaanisesti, tiedämme tällöin aina annetusta luvusta n äärellisen askelmäärän jäkeen, päteekö $P(n)$ vai $\neg\ P(n)$. Jos teoria **T** tällä tavoin ratkaisee ominaisuuden P, sanotaan, että P voidaan esittää teoriassa **T**. Myös tämän käsitteen määritteli ensimmäisenä Gödel epätäydellisyystodistuksessaan (hän käytti termiä “Entcheidungsdefinit”; Gödel 1931, kts. myös 1934), vaikka Hilbert ennakoikin sitä jo 1904 (Hilbert 1905).

Jokainen ominaisuus, joka on esitettävissä, on siis ratkeava. Mutta esitettävyys on tietysti suhteellista valittuun formalisoituun teoriaan. Gödel kuitenkin havaitsi 1935-36, että esitettävyys on tietyssä täsmällisessä mielessä “absoluuttinen” (Gödel 1936). Kävi näet ilmi, että esitettävyys ei ole lainkaan herkkä valitun teorian yksityiskohdille. Kaikki alkeislukuteorian sisältävät formalisoidut teoriat – heikoista lukuteorioista aina joukko-oppiin – esittävät täsmälleen samat joukot, nimittäin rekursiiviset (eli Turing-ratkeavat) joukot! (Gödel 1936, 1946)

Turing ja hänen koneensa

Englantilainen matemaatikko Alan Turing seurasi valmistumisensa jälkeen vuonna 1935 topologina tunnetun M.H.A. Newmanin matemaattisen logiikan luentoja Cambridgessa. Luennoilla käsiteltiin Gödelin epätäydellisyyslausetta ja tuolloin vielä avoinna ollutta ratkaisuongelmaa. Turing innostui aiheesta ja työskenteli sen parissa omatoimisesti. Vuotta myöhemmin tuolloin vasta 23-vuotias Turing yllätti Newmanin tuomalla tälle kirjoituksen, jossa esitettiin idealisoidun koneen määritelmä ja tähän ratkaisumenetelmän analyysiin perustuen todistettiin (Churchin em. työstä täysin riippumattomasti) predikaattilogiikan ratkaisuongelma ratkeamattomaksi. (Hodges 1988)

Turingin työn tarkoituksena oli alusta alkaen juuri logiikan ratkaisuongelman todistaminen ratkeamattomaksi. Ratkaisumenetelmän käsitteen analyysissään hän tarkasteli inhimillistä laskentaa, ja abstrahoi siitä kaikki epäolennaiset rajoitukset pois. Jäljelle jäi ajatus koneesta, jossa on potentiaalisesti ääretön, ruutuihin jaettu nauha, jota kone lukee, johon se kirjoittaa tai josta se “pyyhkii” pois merkkejä. (ks. Turing 1936-7)

Turing oli siis täysin tietämätön niin Churchin ja Kleenen λ-määriteltävyyttä koskevasta työstä kuin Herbrandin ja Gödelin yleisistä rekursiivisista funktioista. Vasta kun käsikirjoitus oli jo painovalmis, Churchin työ tuli hänen tietoonsa (Hodges 1988, Kleene 1981), ja hän lisäsi artikkelin (Turing 1936-7) liitteeseen todistuksen Turing-laskettavuuden (kuten sitä nykyisin kutsutaan) ja l-määriteltävyyden ekvivalenttisuudesta. Turing viettikin seuraavat 2 vuotta Princetonissa jatko-opiskelijana Churchin ohjauksessa.

Näin intuitiivinen ratkaisumenetelmän käsite sai lähes yhtäaikaisesti kolme näennäisen erilaista, mutta ekvivalenttia täsmällistä määritelmää Manner-Euroopassa (Herbrand-Gödel), Yhdysvalloissa (Church-Kleene) ja Englannissa (Turing). Tämän lisäksi myös Post oli päätynyt Turingista – vaikkakaan ei aivan täysin Churchin ja Kleenen työstä – riippumatta Turingin koneen kaltaiseen käsitteeseen (Post 1936).

Tätä yllättävää yhdenmukaisuutta onkin pidetty yhtenä vahvimmista argumenteista Churchin teesin (sitä kutsutaan myös – oikeutetusti – Churchin-Turingin teesiksi) puolesta. Korostettakoon, että tämä teesi väittää intuitiivisen ja epäformaalisen käsitteen ja täsmällisen matemaattisen käsitteen olevan ekvivalentteja, eikä sitä ei näin voida täsmällisesti todistaa. Sen puolesta voidaan kuitenkin esittää monia vakuuttavia argumentteja (ks. erityisesti Kleene 1952; § 62); teesi onkin loogikkopiireissä nykyisin lähes universaalisti hyväksytty.

Gödel vakuuttuminen

Edellä olemme todenneet Gödelin skeptisen asenteen Churchin teesiä kohtaan. Turingin analyysiin tutustuttuaan Gödel kuitenkin hyväksyi Churchin teesin (täsmällinen ajankohta näyttää olevan hämärän peitossa; tämän on kuitenkin täytynyt tapahtua vuoteen 1946 mennessä, ks. sitaatti alla), josta oli nyt tullut Churchin-Turingin teesi.

Jälkipuheessaan vuoden 1934 Princetonin luentojen 1965 julkaistuun versioon (Gödel 1934) Gödel kirjoittaa: “Turingin työ antaa ‘mekaanisen menetelmän’ (eli ‘algoritmin’ tai ‘laskentamenetelmän’ tai ‘äärellisen kombinatorisen menetelmän’) käsitteen analyysin. Tämä käsite osoitetaan ekvivalentiksi ‘Turingin koneen’ käsitteen kanssa.”

Vuonna 1963 laatimassaan jälkikirjoituksessa klassisen epätäydellisyystodistuksen sisältävän artikkelinsa (Gödel 1931) englanninkieliseen käännökseen (teoksessa van Heijenoort 1967) Gödel taas toteaa: “Myöhempien edistysaskeleiden seurauksena, erityisesti sen tosiasian, että A.M. Turingin työn ansiosta voidaan nyt antaa täsmällinen ja kiistattoman sopiva formaalisen järjestelmän yleinen määritelmä, täysin yleinen versio … on nyt mahdollinen. Eli, voidaan todistaa täsmällisesti, että jokaisessa formaalisessa järjestelmässä, joka sisältää tietyn määrän äärellistä lukuteoriaa, on olemassa ratkeamattomia lauseita, ja että lisäksi minkä tahansa tällaisen järjestelmän ristiriidattomuutta ei voida todistaa tässä järjestelmässä.”

Gödel myös totesi vuonna 1946 Princetonin 200-vuotisjuhlaesitelmässään (Gödel 1946): “Tarski on painottanut luennossaan (ja mielestäni aivan oikeutetusti) yleisen rekursiivisuuden (tai Turing-laskettavuuden) käsitteen suurta merkitystä. Minusta näyttää siltä, että tämä merkitys johtuu siitä tosiasiasta, että tämän käsitteen kohdalla on onnistuttu ensimmäistä kertaa antamaan kiinnostavan epistemologisen käsitteen absoluuttinen, se on, valitusta formalismista riippumaton, määritelmä. Kaikissa muissa aiemmin käsitellyissä tapauksissa, kuten todistuvuuden tai määriteltävyyden kohdalla, käsite on onnistuttu määrittelemään vain suhteessa annettuun kieleen … Laskettavuuden käsitteen, vaikka se onkin vain erityisentyyppistä todistuvuutta tai ratkeavuutta, kohdalla tilanne on erilainen. Kuin ihmeen kautta ei ole välttämätöntä erottaa eri kertalukuja, ja diagonaalinen menetelmä ei johda määritellyn käsitteen ulkopuolelle.”

Näin laskettavuuden teorian kehittäjistä ehkä nerokkain hyväksyi viimeisenä, että teoria todella onnistui määrittelemään intuitiivisen ratkaisu- tai laskentamenetelmän käsitteen.

LÄHTEET

Ackermann, Wilhelm (1928) “Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen”, Mathematische Annalen 99, 118-133. Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 493-507.

Boyer, Carl B. (1994) Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osat I ja II, Art House, Juva.

Church, Alonzo (1932) “A set of postulates for the foundations of logic”, Annals of Mathematics (2) 33, 346-366.

_____ (1933) “A set of postulates for the foundations of logic (second paper)”, Annals of Mathematics (2) 34, 839-864.

_____ (1936) “An unsolvable problem of elementary number theory”, American Journal of Mathematics 58, 354-363. Julkaistu myös teoksessa Davis 1965, 89-107.

_____ (1936a) “A note on Entscheidungsproblem”, Journal of Symbolic Logic 1, 40-41; correction, ibid., 101-102. Julkaistu myös teoksessa Davis 1965, 110-115.

Davis, Martin (ed.) The Undecidable, Raven Press, New York.

_____ (1982) “Why Gödel didn’t have Church’s thesis”, Information and Control 54, 3-24.

_____ (1983) “The prehistory and early history of automated reasoning”, teoksessa J. Siekmann & G. Wrightson (eds.) Automation of Reasoning, vol. 1, Berlin, Springer-Verlag, 1-28.

_____ (1987) “Mathematical logic and the origin of modern computers”, teoksessa Studies in the History of Mathematics, 137-165. Washington, D.C., Mathematical Association of America.

_____ (1988) “Influences of mathematical logic on computer science”, teoksessa Herken 1988, 315-326.

Dawson, John W (1984) “Kurt Gödel in sharper focus”, The Mathematical Intelliger vol. 6, no. 4, 9-17.

Dedekind, Richard (1888) Was sind und was sollen die Zahlen?, Vieweg, Braunschweig.

Frege, Gottlog (1879) Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache das reinen Denkens, Nebert, Halle. Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 1-82.

Gandy, Robin (1988) “The confluence of ideas in 1936”, teoksessa Herken 1988, 55-111.

Gödel, Kurt (1931) "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", Monatshefte für Mathematik Physik 38, 173-198. Englanninkielinen käännös julkaistu teoksissa van Heijenoort 1967, 596-616, ja rinnakkain saksaksi ja englanniksi teoksessa Gödel 1986, 144-195.
_____ (1934) "On undecidable propositions of formal mathematical systems", monistetut luentomuistiinpanot, ylös kirjoittaneet S. Kleene ja J. Rosser, julkaistu korjattuna teoksissa Davis 1965, 41-81 ja Gödel 1986, 346-371.
_____ (1936) "Über die länge der Beweise", Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 7, 23-24. Julkaistu englanniksi teoksissa Davis 1965, 82-83 ja rinnakkain saksaksi ja englanniksi teoksessaGödel 1986, 396-99.
_____ (1946) "Remarks before the Princeton bicetennial conference on problems in mathematics", julkaistu teoksissa Davis 1965, 84-88 ja Gödel 1990, 150-153.
_____ (1986) Collected Works I, Oxford University Press.
_____ (1990) Collected Works II, Oxford University Press.
Herken, Rolf (ed.) (1988) The Universal Turing Machine. A Half-Century Survey, Oxford University Press, Verlagen Berlin.
Hermes, Hans (1980) "Recursion theory", teoksessa Agazzi (ed.) Modern Logic -- A Survey, D. Reidel, Dorecht, 173-195.
Hilbert, David (1905) "Über die Grundlagen die Logik und der Arithmetik", Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904, Teubner, Leipzig, 174-185.
_____ (1918) "Axiomatisches Denken", Mathematische Annalen 78, 405-415.
_____ (1923) "Die logischen Grundlagen der Mathematik", Mathematische Annalen 88, 151-165.
_____ (1926) "Über das Unendliche", Mathematische Annalen 95, 161-190. Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 367-392.
_____ (1927) "Die Grundlagen der Mathematik", Abhandlungen aus dem Mathematischen Semiar der Hambburgischen Universität 6, 65-85.
Hilbert, David & Wilhelm Ackermann (1928) Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin, Springer.
Hodges, Andrew (1988) "Alan Turing and the Turing Machine", teoksessa Herken 1988, 3-15.
Kleene, Stephen C. (1936) General recursive functions of natural numbers", Mathematische Annalen 112, 727-742. Julkaistu myös teoksessa Davis 1965, 236-253.
_____ (1936a) "λ-definability and recursiveness", Duke Mathematical Journal 2, 340-353.
_____ (1952) Introduction to Metamathematics, North Holland, Amsterdam.
_____ (1967) Mathematical Logic, John Wiley & Sons, New York.
_____ (1976) "The work of Kurt Ködel", Journal of Symbolic Logic 41, 761-778; addendum. ibid., 613.
_____ (1981) "Origins of recursive function theory", Annals of the History of Computing 3, 52-67.
_____ (1988) "Turing's analysis of computability, and major applications of it", teoksessa Herken 1988, 17-54.
Kleene, Stephen C. & J.B. Rosser (1935) "The inconsistency of certain formal logics", Annals of Mathematics (2) 36, 630-636.
Kneale, William & Martha Kneale (1962) The Development of Logic, Clarendon Press, Oxford.
Löwenheim, Leopold (1915) "Über Möglichkeiten Relativkalkül", Mathematische Annalen 76, 447-470. Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 228-251.
Odifreddi, Piergiorgio (1989) Classical Recursion Theory, North-Holland, Amsterdam.
Peano, Giuseppe (1889) Arithmetices principia, nova methodo exposita, Turin, Bocca. Julkaistu osittain englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 83-97.
Péter, Rózsa (1934) Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion" Mathematische Annalen 110, 612-632.
Post, Emil (1921) "Introduction to a general theory of elementary propositions", American Journal of Mathematics 43, 163-185. Julkaistu myös teoksessa van Heijenoort 1967, 264-283.
_____ (1936) "Finite combinatory processes. Formulation I", Journal of Symbolic Logic 1, 103-105. Julkaistu myös teoksessa Davis 1965, 288-291.
_____ (1941) "Absolutely unsolvable problems and relatively unsolvable propositions: Account of an anticipations". Julkaistu teoksessa Davis 1965, 338-433.
_____ (1944) "Recursively unsolvable sets of positive integers and their decision problems", Bulletin of the American Mathematical Society 50, 284-316. Julkaistu myös teoksessa Davis 1965, 305-337.

Russell, Bertrand (1902) “Letter to Frege”, julkaistu teoksessa van Heijenoort 1967, 124-125.
_____ (1903) Principles of Mathematics, Allen & Unwin, London.
_____ (1908) “Mathematical logic as based on the theory of types”; American Journal of Mathematics 30, 222-262. Julkaistu myös teoksessa van Heijenoort 1967, 150-182.
Russell, Bertrand & Alfred N. Whitehead (1910-1913) Principia Mathematica , Vols. I-III, Cambridge, Cambridge University Press.
Schröder, E. Vorlesungen über die Algebra die Logik I, Teubner, Leibzig1890; II.1. Leipzig, 1891, iii, Leipzig, 1985, II.2. Leipzig, 1905.
Shoenfield, Joseph R. (1967) Mathematical Logic, Addison-Wesley, Massachusetts.
Skolem, Thoralf (1923) “Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veräderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich”, Skrifter utgiv av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse, no. 6, 1-38. Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 302-333.
Turing, Alan M. (1936-7) “On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem”, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 42, 230-265; correction, ibid. 43, 544-546. Julkaistu myös teoksessa Davis 1965, 115-154.
van Heijenoort, Jean (ed.) (1967) From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, Cambridge, Mass., Harvard University Press.
Wang, Hao (1957) “The axiomatization of arithmetic”, Journal of Symbolic Logic 22, 145-158.
Zermelo, Ernst (1908) “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I”, Mathematische Annalen 65, 261-281. Julkaistu englanniksi teoksessa van Heijenoort 1967, 199-215.