

Mercados financieros y su naturaleza fractal

Enric Rillo Soaz

enricrillo@uoc.edu

Fecha: 15, junio 2022 (semestre 2)

Tutor: Josep María Coromina Barnadas

Índice

<u>Abstract / Resumen</u>	06
Introducción	07
1. <u>LA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS EN LOS RENDIMIENTOS LOGARITMICOS.</u>	
1.1. Metodología	14
1.2. Análisis	15
1.3. Conclusiones.....	19
2. <u>LAS RACHAS y LOS CISNES NEGROS EN LAS SERIES FINANCIERAS</u>	
2.1. Metodología	20
2.2. Análisis	21
2.3. Conclusiones.....	28
3. <u>LA DIMENSION FRACTAL DE LOS INDICES BURSATILES</u>	
3.1. Metodología	29
3.2. Análisis	32
3.3. Conclusiones.....	43
4. <u>LA RAZA CUADRADA DEL TIEMPO y LA VOLATILIDAD DEL MERCADO</u>	
4.1. Metodología	44
4.2. Análisis	45
5. <u>CLASIFICACION DE LOS INDICES SEGÚN SU MAL-COMPORTAMIENTO</u>	
5.1. Metodología	54
5.2. Análisis	55
6. <u>BUENOS INVERSORES e INVERSORES BUENOS</u>	
6.1 Sobre la estimación del riesgo.....	61
6.2 Sobre los activos de inversión vinculados al OSD.....	63
<u>Conclusiones Finales</u>	66
<u>Referencias bibliográficas</u>	68
<u>ANEXOS</u>	69

“Si se piensa en los tres estados del azar (dócil, sereno y salvaje) como si el dominio de éste fuera todo un mundo por derecho propio, con sus particulares leyes de la Física, entonces el azar dócil es como la fase sólida de la materia: energías densas, estructuras estables, volúmenes bien definidos. Todo permanece en su lugar. El azar salvaje, en cambio, es como la fase gaseosa de la materia: energías sutiles, sin estructura ni volumen determinado. No sabemos qué puede hacer ni a dónde se dirigirá. El azar sereno, sería el caso intermedio entre los dos anteriores, el equivalente al estado líquido. Propuse por primera vez algunas de estas ideas sobre el azar en 1964, en un congreso internacional de Lógica y Filosofía de la Ciencia celebrado en Jerusalén.”

The (mis) Behaviour of Markets. A fractal view of Risk, Ruin and Reward.

Benôit Mandelbrot. 2004

Abstract (english)

The purpose of this paper is to investigate the fractal nature of markets and their sensitivity to risk events called "black swans". Aspects linked to the epistemological problem named as "the decline of large numbers".

The study of fractality and randomness in the financial series has focused on the following selected market indices: IBEX 35, XAU/USD GOLD, US BOND 30 years, NIKKEI 225, DOW JONES IND., BITCOIN, PETROLEO BREND, SILVER, NASDAQ 100 and BOVESPA. This choice was intended to cover different types of stock market indices, such as American fixed income, equities of various currency zones, future indices of raw materials and finally new assets in the form of cryptocurrencies. Likewise, the historical length of the series of prices and daily returns has been delimited, to the period of about 7,000 days. Specifically from December 1993 to August 2021, with the exception of BITCOIN which due to its youth did not reach the time series to fill such an interval. For the analysis of fractality in the time series, all the calculations have been made in Excel sheets and time partitions of the historical series have been taken as follows: 1:1 (window of 6996 days), 1:2 (3498 days), 1:4 (1749 days), 1:8 (875 days) 1:16 (437 days) and 1:32 (219 days) and 1:64 (109 days).

To this end, different methodologies were applied according to the hypothesis tests proposed in reference on the one hand, to the fractal nature of the Financial Markets and to non-Gaussian behavior, on the other. These hypotheses are relevant to know the more or less chaotic nature of each type of financial asset / stock market index, and therefore to finally deepen the management of investment portfolios in complex and chaotic environments.

From the quantitative analyses carried out, an attempt was made to extract reflections on the dialogue on financial economics, about the two competing theories: theory of Efficient Markets (EMT) and theory of Fractal Markets (FMT). This controversy at the same time focuses on the dialectic found between the two types of "memory" that are attributed to the nature of financial markets: the short memory of the return to the mean and the long memory of fractal tendencies.

This is the theoretical dichotomy about the nature of the financial series that is intended to be faced in this work, through a set of hypotheses to be tested. These analytical tests are as follows:

- 1) Do financial markets behave according to a normal Gauss distribution, as supported by the classical Theory of Efficient Markets on which it intends to rely? Or on the contrary, do markets behave under the model of a leptokurtic bell with heavy tails, as a Cauchy-type distribution?
- 2) Financial markets are subject to significant impacts as a result of the appearance of the black swans described by N. Taleb.
- 3) Financial markets have in most cases a fractal long memory that makes them self-similar. And therefore it cannot be said how the Theory of Efficient Markets interprets that they behave, in most cases, randomly?
- 4) Are market prices the result of the deformation of chronological time associated with a fractality index of fractional Brownian motion? Can a relationship be found between the range and the standard deviation along the time series, from Mandelbrot's perspective and from Einstein's equation on the square root of time?
- 5) Can the nature of the state of different investment assets, portfolios and stock index be classified according to attributes and variables on their fractal values and their heavy tails? Can we balance investment portfolios with four types of assets/risk levels, based on a quadrant made up of assets: a solid, liquid, gaseous and plasma nature?

From analyses on these hypotheses, numerous results have been obtained on the most representative quantitative values: kurtosis, asymmetry, behavior of frequency distributions compared to the normal distribution curve, estimation of streaks of positive and negative returns, analysis of the ten positive and negative swans of each market, Hurst coefficients according to various methodologies, as well as the relationship between volatility and the fractal index, or the variations of the fractality coefficients according to the markets and according to the time windows.

In the final section of this paper, two problems arising from financial investment related to the ethics of finance are pointed out. On the one hand, the miscalculation of risks by the investment community, due to erroneous theoretical assumptions about the normality in distributions, this has caused crises such as that of 2008. And on the other hand the bad decision in the investment criteria on assets, indices or companies that do not respect the principles of CSR (Corporate Social Responsibility). In these two senses, a reflection is proposed on whether in the financial markets, there are "good investors" in terms of the calculation of risk. And if there are "good investors" whose underlying investments follow ethical principles according to CSR criteria.

As a summary of the final conclusions, we can outline the following:

1.- The Hypothesis that established that logarithmic returns behave according to a Gauss bell, is discarded in favor of the alternative hypothesis, such that: the daily logarithmic returns in all market indices, behave following a leptokurtic bell with heavy tails (similar to the Levy or Cauchy model).

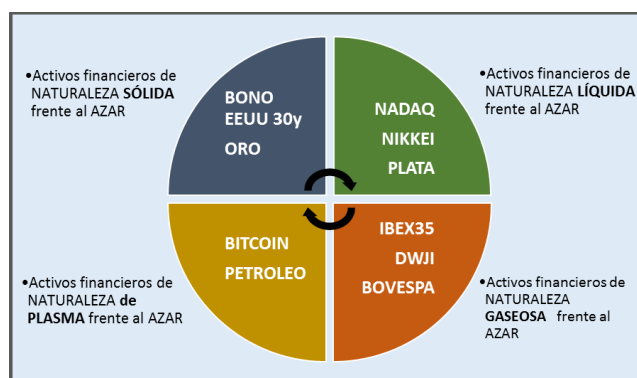
2. - From the second hypothesis raised in this work, we can give as a result the following: financial markets are subject to relevant impacts, as a result of the appearance of the "black swans" described by N. Taleb. And average returns are affected by these, as a result of an overall effect on the markets, and with an increasingly common frequency, regardless of their fractal index.

3- However, it is verified that the number of streaks (positive and negative) shown by all markets is similar and is estimated at around 50% for positive and negative ones.

4. - Financial markets have in most cases a fractal long memory that makes them self-similar. Therefore, it cannot be said how the Theory of Efficient Markets interprets that they behave, in most cases, randomly. Although, if we analyse fractality over the historic period from 1993 to 2021, markets are going through different states of fractality. In which the "black noise" predominates where the series with a level of persistence manifest themselves as long-term trends, moving away from the statistical average. It can also be added that, from 1993 to 2021, the markets in general present, especially in the most recent period from 2014 to 2021, a propensity to manifest themselves either persistent or anti-persistent, to the detriment of random or Brownian movement.

5. - According to their fractal coefficient, we can classify these into three groups: those of persistent fractality with long memory trends (NASDAQ, BOVESPA, DWJI, PETROLEO); those of random behavior or Brownian movement with H close to 0.50 (IBEX35, NIKKEI 225, SILVER, BITCOIN) and those that manifest movements of constant return to the mean or anti-persistence with values of $H < 0.5$ (GOLD and US BOND and). According to these data, the Theory of Efficient Markets would only be more adjusted for markets such as: SILVER and BITCOIN, associated with random movement. Similarly, Fractal Market Theory, where the investor can think of medium and long-term strategies, would be only suitable for markets such as: IBEX35, NIKKEI 225, NASDAQ, BOVESPA, DWJI and PETROLEO.

6. - Markets have been classified according to the nature or state of randomness or turbulence or risk, according to the parameters selected to design the four quadrants. In order to form an investment portfolio based on these market indices, the following statements have been assigned, from highest to lowest level of risk and turbulence:



Keys: "Mandelbrot", "fractal", "financial markets", "Hurst", "rescaled range", "black swans", "volatility".

Resumen (castellano)

El propósito de este trabajo es investigar sobre la naturaleza fractal de los mercados y la sensibilidad de éstos a los acontecimientos denominados “cisnes negros”. A estos aspectos subyace el problema epistemológico que plantea “el declive de los grandes números”¹.

El estudio de la fractalidad y la aleatoriedad en las series financieras, se ha centrado en los siguientes índices de mercado seleccionados: IBEX 35, XAU/USD ORO, BONO EEUU 30 años, NIKKEI 225, DOW JONES IND., BITCOIN, PETROLEO BREND, PLATA, NASDAQ 100 y BOVESPA. Con esta elección se pretendió abarcar diferentes tipos de índices bursátiles, como son la renta fija americana, la renta variable de diversas zonas monetarias, los índices a futuro de materias primeras y finalmente los nuevos activos en forma de criptomonedas. Así mismo se ha delimitado la longitud histórica de las series de precios y rentabilidades diarias, al período de unos 7.000 días. Concretamente desde diciembre de 1993 hasta agosto de 2021, con la excepción del BITCOIN que por su juventud no alcanzaba a la serie temporal a llenar tal intervalo. Para el análisis de la fractalidad en las series temporales, se han hecho todos los cálculos en hojas de Excel y se han tomado particiones temporales de la serie histórica según sigue: 1:1 (ventana de 6996 días), 1:2 (3498 días), 1:4 (1749 días), 1:8 (875 días) 1:16 (437 días) y 1:32 (219 días) y 1:64 (109 días).

Para tal objetivo, se aplicaron metodologías distintas según las pruebas de hipótesis planteadas en referencia por un lado, a la naturaleza fractal de los Mercados Financieros y al comportamiento no-gaussiano, por el otro. Estas hipótesis son relevantes para conocer la naturaleza caótica de cada tipo de activo financiero (índice bursátil) frente al azar. Además sirve para profundizar en la gestión de carteras de inversión en entornos complejos y caóticos. De los análisis, se intentó extraer reflexiones sobre el conflicto en materia de Economía financiera, acerca de las dos teorías enfrentadas: la Teoría de los Mercados Eficientes (TME) y la Teoría de los Mercados Fractales (TMF). Dicha controversia a la vez, se centra en la dialéctica de dos tipos de “memoria”: la memoria corta del retorno a la media y la memoria larga de las tendencias fractales.

Estas problemáticas teóricas sobre la naturaleza de las series financieras se pretenden abordar mediante un conjunto de hipótesis a probar, bajo la forma de cuestiones analíticas como las siguientes:

- 1) Los mercados financieros, ¿se comportan según una distribución normal de Gauss, como sustenta la Teoría clásica de Mercados Eficientes? ¿O por el contrario, los mercados se comportan bajo el modelo de una campana leptocúrtica con colas pesadas, a modo de distribución tipo de Cauchy?;
- 2) ¿Los mercados financieros están sometidos a impactos relevantes fruto de la aparición de los cisnes negros descritos por N. Taleb?
- 3) Los mercados financieros tienen en la mayoría de casos una memoria larga fractal que los hace autosimilares. Entonces ¿puede o no afirmarse, como interpreta la Teoría de Mercados eficientes, que éstos se comporten en la mayoría de casos aleatoriamente?
- 4) ¿Son los precios de mercado, fruto de la deformación del tiempo cronológico asociado a un índice de fractalidad del movimiento browniano fraccionario? ¿Puede encontrarse una relación entre el rango y la desviación standart a lo largo de la serie temporal, desde la perspectiva de Mandelbrot y desde la ecuación de Einstein sobre la raíz cuadrada del tiempo?
- 5) ¿Se pueden clasificar la naturaleza el estado, de los distintos activos de inversión, carteras e índices bursátiles, en función de atributos y variables sobre sus valores fractales y sus colas pesadas? ¿Podemos equilibrar las carteras de inversión con cuatro tipos de activos/niveles de riesgo, según un cuadrante formado por activos de naturaleza sólida, líquida, gaseosa y de plasma?²

¹ Javier Izquierdo Martín. Empiria: Revista de metodología de ciencias sociales, ISSN 1139-5737, Nº 1, 1998, págs. 51-84. Ver en <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=199620>

² Ha sido estimulante encontrar el siguiente artículo científico sobre el paralelismo entre la “multifractalidad” en los plasmas y en los mercados financieros: V.P. Budaev, [Turbulence in magnetized plasmas and financial markets: comparative study of multifractal statistics](#), Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Volume 344, Issues 1–2, 2004, Pages 299-307, ISSN 0378-4371

Para finalizar, se apuntan dos problemas relacionados con la ética de las finanzas. Por un lado, el mal cálculo de los riesgos por parte de la comunidad inversora, debido a supuestos teóricos erróneos (la normalidad en las distribuciones de los Rendimientos). Por otro, la falta de criterios de inversión que respeten los principios de la RSC (Responsabilidad Social Corporativa). En estos dos sentidos, se propone una reflexión sobre los “buenos inversores” en cuanto al cálculo del riesgo. Y sobre “inversores buenos” en cuanto a los principios éticos acordes a los criterios de la RSC.

Como resumen de las conclusiones finales, podemos esquematizar las siguientes:

1.- La Hipótesis que establecía que las rentabilidades logarítmicas se comportan de acuerdo a una campana de Gauss, queda descartada en favor de la hipótesis alternativa, tal que: las rentabilidades logarítmicas diarias en la totalidad de los índices de mercado, se comportan siguiendo una campana leptocúrtica con colas pesadas (semejantes al modelo de Levy o Cauchy).

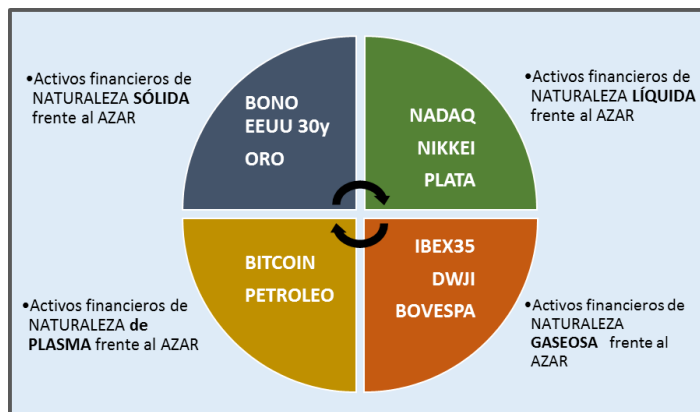
2.- De la segunda hipótesis planteada en este trabajo, podemos dar como resultado lo siguiente: los mercados financieros están sometidos a impactos relevantes, fruto de la aparición de los “cisnes negros”. Y las rentabilidades medias se ven afectadas por éstos, como consecuencia de un efecto global en los mercados, y con una frecuencia cada vez más habitual, independientemente de su índice fractal.

3- Sin embargo, está verificado que el número de rachas (positivas y negativas) que muestran todos los mercados es similar y se estima alrededor del 50% para las positivas y negativas.

4.- Los mercados financieros tienen en la mayoría de casos una memoria larga fractal que los hace autosimilares. Por ello no puede afirmarse como interpreta la Teoría de Mercados Eficientes que éstos se comporten en la mayoría de casos, aleatoriamente. Aunque durante el período de 1993 a 2021, los mercados pasan por distintos estados de fractalidad, predominando el “ruido negro” donde las series se manifiestan con persistencia a largo plazo, alejándose de la media estadística. Además, los mercados en general presentan sobre todo en el periodo más reciente de 2014 a 2021, una propensión a manifestarse o bien persistentes o bien anti-persistentes, en perjuicio del movimiento aleatorio o browniano.

5.- Según su coeficiente fractal, podemos clasificar éstos en tres grupos: los de fractalidad persistente con tendencias de memoria larga (NASDAQ, BOVESPA, DWJI, PETROLEO); los de comportamiento aleatorio o movimiento browniano con H cercanos a 0,50 (IBEX35, NIKKEI 225, PLATA, BITCOIN) y los que manifiestan movimientos de constante retorno a la media o antipersistencia con valores de $H < 0,5$ (ORO y BONO EEUU y). Según estos datos, la Teoría de los Mercados Eficientes sería solamente más ajustada para mercados como: PLATA y BITCOIN, asociados al movimiento aleatorio. Del mismo modo, la Teoría de Mercados Fractales, donde el inversor puede pensar en estrategias a medio y largo plazo, sería adecuada para mercados como: IBEX35, NIKKEI 225, NASDAQ, BOVESPA, DWJI y PETROLEO.

6.- Finalmente, se han clasificado los distintos mercados según la naturaleza o estado de aleatoriedad/turbulencia/riesgo de acuerdo a los parámetros seleccionados para diseñar los cuatro cuadrantes.



Palabras clave: “Mandelbrot”, “fractalidad”, “mercados financieros”, “Hurst”, “rango reescalado”, “cisnes negros”, “volatilidad”

INTRODUCCIÓN

Mi curiosidad por lo fractal nace de la frase de Mandelbrot: “*el mundo es rugoso y no liso*”³. Esta frase resume el concepto de “dimensión fraccionaria”. Y hace referencia a que la esencia (noúmeno) del fenómeno tampoco es ideal, en el sentido dado por la filosofía helénica de Platón y a la Geometría asociada del griego Euclides. Por otro lado, sabemos gracias a Nicholas Nassim Taleb (y con Wilfredo Pareto) que el mundo tampoco es gaussiano y que la ley de potencias parece regir lo fenoménico. Y que además, los “cisnes negros” se manifiestan en el fenómeno, con más frecuencia de lo que el modelo “normal” de la campana de Gauss nos presenta.

Estas dos grandes ideas de finales del siglo XX (la geometría no-euclídea y la distribución no-gaussiana), han removido no solamente a la Estadística aplicada en las Finanzas, sino a la ciencia de cualquier disciplina que quiera estudiar las irregularidades y las excepciones. Estas ideas han afectado a la Ciencia en general: desde la Econofísica, la Física termodinámica de fluidos, la Geología de los terremotos o la Medicina del corazón y el ritmo de la respiración de un pulmón (que es a su vez un fractal). También ha cambiado el modo cómo interpretamos el fenómeno de las series de tiempo, leído bajo la dialéctica del orden y el caos.

Aun reconociendo mi justa preparación en Estadística y el bajo conocimiento en programación informática, me he esforzado de modo autodidacta por diseñar todos los cálculos en hojas de Excel, así como para comprender los distintos métodos e interpretaciones que actualmente se modelan para analizar el fenómeno de la fractalidad en los mercados financieros. Ya sea a través de páginas web especializadas (en inglés y español) así como a través de la lectura de artículos y tesis de otros estudiantes de todo el mundo, que han realizado fabulosos trabajos universitarios sobre el tema. Con la inconsciencia del ignorante, he ido investigando basándome en la intuición, gráficos, perspectivas e interpretaciones, a medida que se abrían nuevas preguntas sin respuesta, sobre este apasionante mundo de la fractalidad en las series de tiempo. Por todo ello, me ha sido muy satisfactorio realizar este TFM con el objetivo de completar mis estudios del Máster de la UOC, pudiendo profundizar en el universo fractal de las series financieras. Así mismo, doy gracias a los profesores del Máster UOC, por haberme dado libertad total para hacerlo.

JUSTIFICACION

El contexto de esta problemática o estado de la cuestión, se remonta a la disciplina que estudia cómo modelar desde el punto de vista estocástico, la series de precios y rentabilidades en los mercados financieros. De los estudios de Benôit Mandelbrot tanto en los fractales de la Naturaleza como en las Finanzas, nos surge una pregunta inevitable: ¿podemos tratar los mercados financieros como se tratan los sistemas biológicos? A parte de esta cuestión que trasciende a la pregunta económica, destacamos la figura de Bachelier que a principios del siglo XX publicó uno de los primeros estudios sobre la cuestión en “*Théorie de la Spéculation*”, donde planteaba la doble pregunta, de si los mercados financieros se comportan o no de forma gaussiana en la distribución de frecuencia de sus precios y si el comportamiento de los precios es o no un fenómeno aleatorio. Bachelier ha sido el iniciador de una disciplina que años más tarde se denominó Econofísica, de la que se han nutrido posteriores científicos, tanto Economistas como Físicos o Químicos. Entre los economistas destacamos: Samuelson (1956), N. Mantegna, Yakovenko o los célebres Mandelbrot y Taleb.

Desde la aparición en la Historia Moderna de las Crisis financieras (crash de 1929) la perspectiva epistemológica sobre el comportamiento de los Mercados financieros (Behavioral Finance) ha cambiado radicalmente. Ya Joseph Penso de la Vega (cordobés que murió en Ámsterdam, 1650- 692) señaló el loco comportamiento de los mercados, en su obra “*Confusión de Confusiones*” o “*Diálogos curiosos entre un filósofo agudo, un mercader discreto y un accionista erudito, describiendo el negocio de las acciones, su origen, su etimología, su juego y su enredo*”. En ella, aparece (en la edición de 1688) una introducción de otro

³ Mandelbrot. La Geometría fractal de la Naturaleza. 1977. Edición española de 2003 2ª Edición. Tusquets Editores.

visionario especulador y contable como es fue Duarte Núñez de Acosta, quien escribiera: "El juego de la Bolsa es un verdadero laberinto y un mapa de tinieblas."

Bachelier con sus estudios hizo surgir la Teoría de los Mercados Eficientes. Tesis que denuncia, que los mercados financieros se comportan según un movimiento browniano, es decir que el devenir de las cotizaciones es aleatorio y los precios son independientes del pasado, al reflejar en el presente toda la información posible sobre su precio. Markowitz (1952) se basó en Bachelier para teorizar sobre la eficiencia del mercado, por medio del método de la frontera eficiente de la cartera de inversión.

Eficiente significa que el mejor análisis del presente es el propio mercado al ajustar la oferta y la demanda, y procesar la información que aportan los actores del mercado para estimar el valor justo de la inversión. Pero la eficiencia depende entonces de la información y de su análisis. La pregunta que surge entonces es: ¿qué información es la relevante y cómo debe interpretarse? Pero hoy en día lo que sobra es información (el peligro de la "infoxicación") por eso ya hay proyectos de Bigdata orientados a analizar todo ese magma de sobreinformación que aparece hora a hora, minuto a minuto, sobre los mercados y los activos financieros. Es en este contexto es donde nace la idea propuesta por Eugene Fama (1970) sobre los "grados de eficiencia": "débil" cuando es insuficiente para gestionar el riesgo, "semifuerte" cuando el precio del activo es ya un fiel reflejo de la realidad de su precio. Y finalmente, el estadio de eficiencia fuerte del Mercado, que haría no-gestionable el riesgo del inversor. Según estos tres grados de eficiencia, teorizados por la Economía del TME, no puede predecirse con antelación el precio futuro.

Pero estos tres estados que teorizó Fama, pueden contraponerse a los tres estados del azar (sólido, líquido y gaseoso) que Mandelbrot enunció en una conferencia a inicios de los años cincuenta. Como también al cuadrante de Taleb sobre los niveles fenoménicos de sucesos extremos (extremistán).

Siguiendo la línea de la Historia reciente, debemos hacer referencia al modelo CAPM, pensado en los años sesenta, por tres economistas (Sharpe, Lintner y Mossin). El Modelo CAPM trata de valorar el riesgo asumido en función del parámetro β que pone en relación el riesgo del activo con el riesgo general del mercado. Siendo matemáticamente un coeficiente entre la covarianza del activo-y-mercado y la varianza del propio mercado. Beta mide la correlación entre el riesgo sistémico y riesgo del activo.

Todo ello parece indicar que el azar se traduce en medida de riesgo y el riesgo es un objeto de estudio de la Estadística. Por eso H. Markowitz junto a W.F. Sharpe, en los años 60-70 usaron los conceptos de la Estadística clásica (varianza y covarianza) para mesurar el riesgo de una teórica cartera de inversión, a través de dos variables: la agitación (varianza) del activo per-se y el nivel de contagio de ese activo con otros (correlación o covarianza). Es como medir el nivel de nerviosismo del activo que habita en un mercado financiero, con el contagio de la agitación en los activos vecinos. Esa elección equilibrada de activos a su vez equilibrados, determinará el nivel óptimo de la frontera eficiente de la cartera de inversión. Finalmente a finales de los años noventa, aparece el modelo de valoración de riesgo denominado VaR o value at risk (creado por la gestora JP Morgan), que comienza a vislumbrar el riesgo de la no-normalidad en las inversiones financieras. Por ello pretende estimar la afectación de los activos a los fenómenos extremos que causarían una pérdida máxima esperada apoyado en un número máximo de desviaciones standart que sufriría el activo sobre el valor de la media esperada.

Pero frente a estas teorías nacidas entre los cincuenta y setenta del siglo XX que se apoyaban en la idea de aleatoriedad browniana, y distribución normal $\bar{\mu}$ gaussiana, como también en la ausencia de una memoria larga que influyera en el devenir de las series de los precios, aparecerán herejes como Mandelbrot (Fractalidad en los mercados) o Taleb (The Black Swan), afirmando lo contrario.

Ambos autores, confirman que los análisis de mercado que parten del supuesto de un \bar{m} ercado eficiente filtran la alta probabilidad de ocurrencia de eventos extraordinarios. Y es el modelo que se sustenta en la \bar{c} ampana de Gauss un modelo de idealización casi platónico de los fenómenos reales. Mandelbrot y Taleb contradicen a los teóricos del Mercado Eficiente, afirmando

que el azar tiene tendencias (memoria larga fractal) y que las frecuencias se distribuyen según una campana de Gauss deformada, con colas atípicas y gruesas. La voluntad de este trabajo es contraponer a la hipótesis de la eficiencia en los mercados, la tesis de la fractalidad de los mercados, a través de los cálculos sobre fractalidad y cisnes negros.

En este trabajo se pretende analizar el riesgo de los activos en función de su índice de fractalidad, es decir partiendo del supuesto de que: existe una Memoria Larga en el tiempo y apoyándonos en el hecho de que aparecen con mayor frecuencia de la esperada por la campana de Gauss, esos fenómenos extremos o cisnes negros, de colas gruesas que hinchan la campana de distribución Normal. Con el fin de poder establecer criterios fundados de clasificación de los distintos índices bursátiles en cuatro grados o estados de naturaleza financiera, recogiendo las ideas de los tres grados de turbulencia de Mandelbrot, así como la idea de Taleb sobre el cuadrante de aleatoriedad. En los cuadrantes aquí propuestos, se clasificarán los activos o índices en cuatro naturalezas: sólida, líquida, gaseosa y de plasma.

OBJETIVOS

Los objetivos concretos están vinculados, de acuerdo a esta perspectiva fractal aplicada al análisis de los Mercados financieros, en el modo siguiente:

- Los mercados financieros no siempre se pueden modelar según el clásico “paseo aleatorio” o “movimiento browniano”. Es decir, frente a una “memoria corta” (retorno a la media) puede advertirse un cierto nivel de “memoria larga” en las series de tiempo a través del estudio fractal.
- Los mercados financieros no pueden representarse en cuanto a su distribución de frecuencia de los rendimientos logarítmicos, bajo una campana de Gauss. Es decir, debemos tener en cuenta las distribuciones con “colas gruesas” como fenómenos que integran los eventos extra-normales.
- El tercer objetivo es clasificar los distintos activos financieros o índices de mercado, aprovechando los atributos de la fractalidad por un lado y de la distribución de frecuencias con “colas gruesas” por otro. Estableciendo unas pautas o guías generales para los inversores de acuerdo a estos parámetros cuantitativos, con el fin de clasificar los activos según su naturaleza en cuatro categorías (según un cuadrante de mal comportamiento): activos de capital sólido, activos de capital líquido, activos de capital gaseoso y activos de capital-plasma.

Los objetivos específicos de acuerdo a los anteriores objetivos generalistas, se concretan en uno de tipo más práctico, según estos puntos:

- Aplicación del método de análisis de frecuencias (curvas con Kurtosis, análisis de eventos históricos extraordinarios, análisis de rachas positivas y negativas), para calcular las formas de distribución de las rentabilidades, bajo la existencia de fenómenos de “cola gruesa”.
- Aplicación del método del rango reescalado para estimar el coeficiente de Hurst y la Dimensión fractal de la serie de tiempo, en cada uno de los índices/activos.
- Aplicación de la problemática de la multifractalidad y el tiempo mercantil. Aproximación intuitiva bajo métodos experimentales como: el análisis del coeficiente de Hurst para periodos de tres retornos a la media de la serie; el análisis relacional entre tiempo cronológico y tiempo mercantil con la mediación del movimiento browniano. O el estudio comparado entre la ecuación de Einstein sobre la volatilidad y la raíz cuadrada del tiempo y la ecuación del coeficiente de Hurst en Mandelbrot.
- Diseño de unos “cuadrantes-de-mal-comportamiento” para la clasificación de activos Financieros / índices bursátiles, en función de su coeficiente medio de Hurst, su estimador de rachas, su nivel de curtosis y otras variables encontradas, vinculadas a la rentabilidad logarítmica. Este cuadrante de “mal-comportamiento” servirá para la clasificación de los

índices de mercado estudiados, asignándoles un estado de aleatoriedad entre: sólido, líquido, gaseoso o de plasma.

ALCANCE y METODOS

La **metodología** empleada para el análisis cuantitativo se basa en los cálculos y gráficos obtenidos con el programa EXCEL. Realizando distintas plantillas cada hoja de cálculo con 6.996 filas de datos históricos sobre precios de cierre y los consiguientes rendimientos logarítmicos diarios, para los diversos índices bursátiles analizados.

Estableceremos 5 hipótesis de estudio, que justificaran nuestro procedimiento de cálculos, así como el análisis posterior sobre los resultados obtenidos en las series históricas de los distintos índices bursátiles.

1ª Hipótesis: Los mercados financieros, ¿se comportan según una distribución normal de Gauss como la Teoría clásica de Mercados Eficientes enuncia? ¿O por el contrario, los mercados se comportan bajo el modelo de una campana de Gauss leptocúrtica con colas pesadas?

La Hipótesis nula, tal que H_0 : las rentabilidades logarítmicas se comportan como una campana de Gauss. La Hipótesis alternativa, tal que H_1 : las rentabilidades logarítmicas se comportan como una campana leptocúrtica con colas pesadas. Se realizará el contraste de hipótesis mediante los métodos de:

- Análisis de la distribución de frecuencias según campanas de Gauss.
- Estudio de asimetría y Kurtosis en la distribución de la Serie de 6996 días, particionada en 4 partes iguales de 1.750 días (4 periodos de 7 años).
- Análisis de los máximos rendimientos y las máximas pérdidas, para la toma en consideración en la gestión de inversión.

2ª Hipótesis: Los mercados financieros están sometidos a impactos relevantes fruto de la aparición de los cisnes negros descritos por N. Taleb.

La Hipótesis nula, tal que H_0 : las rentabilidades medias no se ven afectadas por los cisnes negros. La Hipótesis alternativa, tal que H_1 : las rentabilidades medias se ven afectadas por los cisnes negros. Se realizará el contraste de hipótesis mediante los métodos de:

- Análisis de las rachas (test de rachas positivas y negativas) en la Serie histórica
- Análisis los diez eventos de máxima rentabilidad y los diez eventos de mínima rentabilidad diaria, en la Serie temporal de 6.995 días.

3ª Hipótesis: Los mercados financieros tienen en la mayoría de casos una memoria larga fractal que los hace autosimilares. Por ello no puede decirse como interpreta la Teoría de Mercados eficientes que éstos se comporten, en la mayoría de casos, aleatoriamente.

La Hipótesis nula, tal que H_0 : las rentabilidades se comportan según un movimiento browniano aleatorio. La Hipótesis alternativa, tal que H_1 : las rentabilidades siguen patrones fractales autosimilares en base a un movimiento browniano fraccionario que las aleja del modelo del paseo aleatorio. Se realizará el contraste de hipótesis mediante los métodos de:

- Análisis de la Dimensión Fractal mediante el método del Rango Reescalado y la estimación del Coeficiente de Hurst (H). Aplicado a Series temporales de 6.995 días particionadas en intervalos (1:1, 1:2, 1:4, 1:8, 1:16, 1:32 y 1:64) formados por ventanas de igual número de días.
- Análisis de la Dimensión Fractal mediante el método del DFA (Análisis de Fluctuación sin tendencia) estimando el Coeficiente de Escala Monofractal (alfa) aplicado a la Serie de 6.996 días, particionada de siete modos o ventanas de tiempo de diferente escala.

- c) Análisis de la Variación de Coeficientes Fractales obtenidos según las particiones de la Serie de 6.996 días: (1:1, 1:2, 1:4, 1:8, 1:16, 1:32 y 1:64)
- d) Análisis la Variación de Coeficientes Fractales obtenidos en función de la longitud en días para los que se cubre un ciclo de tres retornos a la media de la Serie temporal.

4ª Hipótesis: Plantear un análisis de la deformación del tiempo cronológico asociado a un índice de fractalidad del movimiento browniano y ver cómo se distorsiona cuando el coeficiente de Hurst de la serie financiera es diferente de $H=0,5$. Estudiamos además la relación del rango y la desviación standart a lo largo de la serie temporal, tanto desde el punto de vista del rango reescalado como de la ecuación de Einstein (la desviación standart crecer según la raíz cuadrada del tiempo). Reflexionar sobre la posible relación entre los coeficientes fractales y el orden de magnitud de la volatilidad en términos de desviación standart y rango.

La Hipótesis nula, H_0 : Los mercados financieros en sus series de rendimientos logarítmicos diarios, no siguen un patrón de escalamiento fundado sobre la relación Rango y Desviación Standart, que sea proporcional a un exponente fraccional del tiempo.

La Hipótesis alternativa, tal que H_1 : Los mercados financieros en sus series de rendimientos logarítmicos diarios, sí siguen un patrón de escalamiento fundado sobre la relación Rango y Desviación Standart, que sea proporcional a un exponente fraccional del tiempo. Y además este patrón es similar a la evolución del tiempo a modo de una “espiral de Teodoro de Cirene”.

Para analizar las hipótesis, estableceremos el siguiente procedimiento:

- a) Análisis de la conversión del tiempo mercantil browniano (Cronos) en tiempo mercantil fractal (Aión) y su efecto simulado sobre los precios diarios, en el IBEX35.
- b) Análisis de la relación entre el Rango y la desviación standart en términos de regresión lineal para la ventana de tiempo de 108 días, aplicado a todos los mercados bursátiles de este estudio. Encontrando un mismo patrón.
- c) Estudio de la relación entre Rango y Desviación standart para todas las particiones o ventanas de la serie histórica desde 1993 hasta 2021. Obteniendo la ecuación del coeficiente de Hurst pero en el ajuste de ecuación de potencia. Comparación entre la ecuación de potencia de Einstein y la ecuación de regresión lineal de Mandelbrot.
- d) Estimación del $E(R/S)$ a través de la ecuación de potencia einsteniana, para cualquier horizonte teórico de tiempo que se propusiera un inversor.
- e) Representación de la relación R/S y las ventanas de tiempo (horizontes del inversor) en paralelo a la gráfica de la Espiral de Teodoro de Cirene y a la gráfica de un teórico movimiento browniano (que escalará con la raíz cuadrada del tiempo).
- e) Relación a estudiar entre la inversión del Rango reescalado (esta vez como S/R) y las posibles interpretaciones a considerar sobre la volatilidad del mercado.

5ª Hipótesis: Se puede clasificar los distintos activos de inversión, carteras o índices bursátiles, en función de atributos y variables sobre valores estimados fractales y de colas pesadas. Con el fin de equilibrar las carteras de inversión con cuatro tipos de activos/niveles de riesgo: activos de naturaleza sólida, líquida, gaseosa y de plasma.

La Hipótesis nula, tal que H_0 : Los activos financieros no pueden clasificarse en base a su naturaleza, más o menos inherente al caos o a la fractalidad. La Hipótesis alternativa, tal que H_1 : Los activos financieros Sí pueden clasificarse en base a su naturaleza, más o menos inherente al caos o a la fractalidad.

Se diseñarán unos Cuadrantes-de-mal-Comportamiento, en base a dos ejes cualitativos: Fractalidad y Cisnes Negros, El eje de Fractalidad tiene un umbral de valores según la Dimensión fractal asociada a la Serie del activo o según el Coeficiente de Hurst. El eje de Colas pesadas, tiene una escala de valores en base a una ponderación de los resultados obtenidos en anteriores hipótesis.

FUENTES DE OBTENCION DE DATOS

Las fuentes de obtención de la información y los datos, han sido recogidas en función de la naturaleza primaria o secundaria, que se detalla a continuación.

Las fuentes primarias, consideradas como “datos de origen”, se extraen de las principales webs en internet que ofrecen las bases de datos históricos de los distintos índices bursátiles. He escogido una teórica cartera de índices que incluyen diversos activos de naturaleza distinta para que al final del trabajo pueda clasificar esta naturaleza del índice /activo financiero, en función su especificidad: renta fija EEUU, renta variable americana (industria y tecnológica), renta variable japonesa, renta variable española, renta variable sudamericana, futuros de petróleo, de plata y de oro y finalmente una criptomoneda. Estas fuentes se especifican en la siguiente Tabla resumen.

FUENTE		INDICE	Inicio	Final	Nº de días	TIPO de ACTIVO
INVESTING.COM	1	IBEX 35	07/12/1993	03/08/2021	6.996	Renta VARIABLE ESPAÑA
INVESTING.COM	2	XAU/USD ORO	07/12/1993	20/10/2020	6.996	Renta VARIABLE COMMODOTY
INVESTING.COM	3	BONO EEUU 30 y	07/12/1993	26/12/2019	6.996	Renta FIJA EEUU
YAHOO.FINANCE.COM	4	NIKKEI 225	04/01/1993	05/07/2021	6.996	Renta VARIABLE JAPÓN
YAHOO.FINANCE.COM	5	DOW JONES INDUS	22/10/1993	04/08/2021	6.996	Renta VARIABLE EEUU industrial
YAHOO.FINANCE.COM	6	BITCOIN	18/07/2010	22/08/2021	4.054	CRIPATOMONEDAS
YAHOO.FINANCE.COM	7	PETROLEO BREND	22/07/1993	27/11/2020	6.996	Renta VARIABLE COMMODOTY
YAHOO.FINANCE.COM	8	PLATA	01/10/1993	29/07/2021	6.996	Renta VARIABLE COMMODOTY
YAHOO.FINANCE.COM	9	NASDAQ 100	01/10/1993	14/07/2021	6.996	Renta VARIABLE EEUU tecnológico
YAHOO.FINANCE.COM	10	BOVESPA	28/04/1993	12/08/2021	6.996	Renta VARIABLE BRASIL

- (1) Precio diario de cierre, del índice español de las principales 35 empresas de España (euros).
- (2) Precio diario de cierre, de una Onza de Oro en “dólares USA”.
- (3) Precio diario de cierre, del BONO EEUU a 30 años (dólares USA).
- (4) Precio diario de cierre, del índice japonés de los 225 valores más líquidos (yenes).
- (5) Precio diario de cierre, del índice americano de las empresas industriales (dólares USA).
- (6) precio diario de cierre, de la criptomoneda BITCOIN
- (7) Precio diario de cierre, del índice del petróleo Brentd (dólares USA) por “barril”.
- (8) Precio diario de cierre, del índice de la Plata en dólares USA por “onza”.
- (9) Precio diario de cierre, del índice NASDAQ de EEUU sobre las 100 empresas tecnológicas.
- (10) Precio diario de cierre, del índice BOVESPA de las 50 principales empresas de Brasil en “reales”.

Otras fuentes de información a modo de consulta (para comparación de resultados obtenidos), serán las tesis y trabajos científicos o técnicos, publicados en internet sobre los análisis de la fractalidad en los índices de los mercados financieros mundiales. Dichos trabajos aparecen en la Bibliografía.

1 LA DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS EN LOS RENDIMIENTOS LOGARITMICOS.

1.1 Metodología

Partiremos de la Serie histórica de cotizaciones de cierre diarias, de longitud 6.995 datos (filas en Excel), dividiéndola en cuatro ventanas de tiempo de 1750 días.

- **Paso 1:** se grafica una distribución teórica de frecuencias según la distribución estándar del modelo Z-Normal de Gauss. Con esta distribución teórica se dibuja la campana de Gauss.
- **Paso 2:** se calculan los datos estadísticos principales (desviación estándar, Media, Error típico, Mediana, Moda, Varianza, Curtosis, Coeficiente de asimetría, Rango, Mínimo y Máximo) para cada periodo o ventana de tiempo de 1.750 días, con la ayuda de las herramientas de “Análisis de Datos” que proporciona Excel.
- **Paso 3:** Se realiza la Tabla de distribución de frecuencias reales, Se grafican en un mismo gráfico, las dos distribuciones de frecuencias (la ideal de Gauss y la real obtenida de la Serie financiera de 1.750 días). Por ejemplo para los primeros 1.750 días de precio de cierre del IBEX35, se obtiene la siguiente gráfica comparativa de distribuciones de frecuencia entre la campana ideal de Gauss (azul) y la realidad del IBEX35 (rojo).
- **Paso 4:** Se capturan los datos de las “colas pesadas” en una tabla que nos dará la información para luego esquematizarla en dos imágenes. Las fechas de mayores rentabilidades diarias y mayores pérdidas de rendimiento logarítmico, así como la frecuencia de los eventos de cola, positivas y negativas.
- **Paso 5:** Se complementa con un análisis con el METODO q-q PLOT (cuantiles) para determinar si sigue la Distribución Normal y se obtiene la gráfica comparativa:

1.2 Cálculos y análisis.

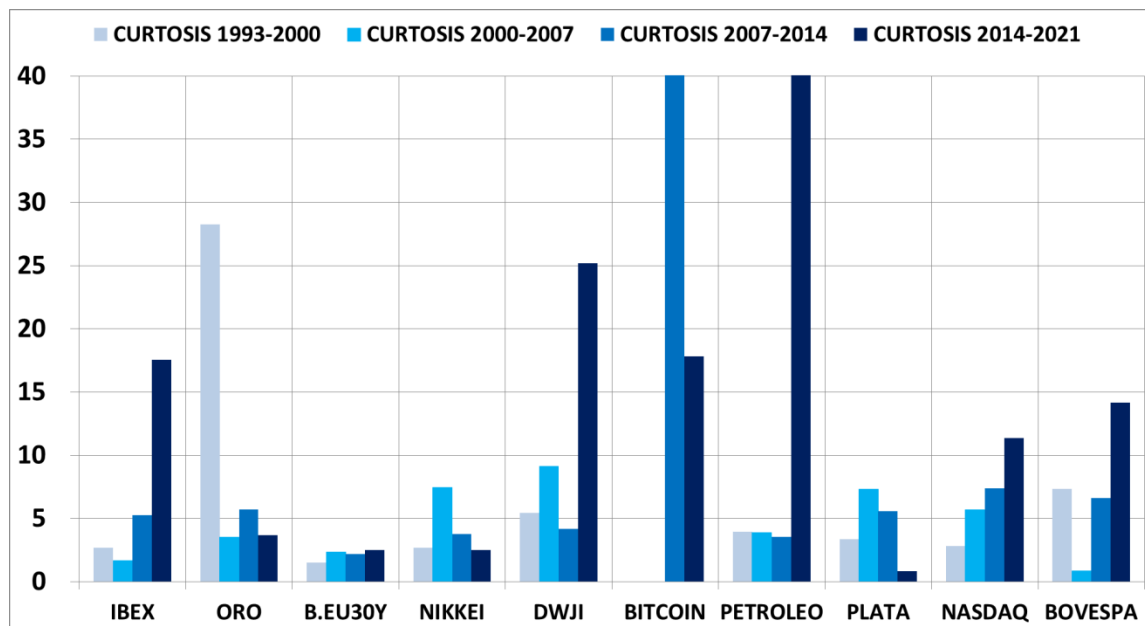
Comenzamos resumiendo los datos obtenidos por periodos anuales que conforman las ventanas de 1.750 días (Ver Anexo 1).

Tabla 1. Curtosis, Asimetría y Rango por periodos y por Índices.

	IBEX	ORO	B.EU30Y	NIKKEI	DWJI	BITCOIN	PETROLEO	PLATA	NASDAQ	BOVESPA
CURTOSIS 1993-2000	2,69	28,24	1,52	2,69	5,43		3,93	3,37	2,83	7,35
CURTOSIS 2000-2007	1,68	3,53	2,32	7,46	9,14		3,90	7,31	5,68	0,86
CURTOSIS 2007-2014	5,26	5,69	2,18	3,76	4,18	60,05	3,53	5,59	7,40	6,61
CURTOSIS 2014-2021	17,56	3,69	2,49	2,49	25,18	17,84	57,27	0,81	11,34	14,16
ASIMETRIA 1993-2000	0,18	2,13	0,27	0,18	-0,55		-0,41	0,11	-0,25	0,51
ASIMETRIA 2000-2007	-0,16	-0,38	0,09	-0,16	-0,04		-0,80	-0,83	0,43	-0,20
ASIMETRIA 2007-2014	0,19	-0,27	-0,10	-0,57	-0,05	1,72	-0,57	-0,64	-0,15	0,03
ASIMETRIA 2014-2021	-1,47	-0,12	0,18	-0,15	-1,10	-1,52	-3,18	-0,02	-0,73	-1,10
RANGO 1993-2000	0,14	0,14	0,08	0,14	0,14		0,24	0,14	0,20	0,46
RANGO 2000-2007	0,14	0,13	0,11	0,14	0,14		0,22	0,27	0,27	0,15
RANGO 2007-2014	0,23	0,19	0,16	0,25	0,19	2,49	0,21	0,32	0,23	0,26
RANGO 2014-2021	0,23	0,23	0,16	0,16	0,25	0,84	0,60	0,24	0,23	0,29

Fuente: elaboración propia.

Gráfico 1. Curtosis por períodos e Índices.



Fuente: elaboración propia

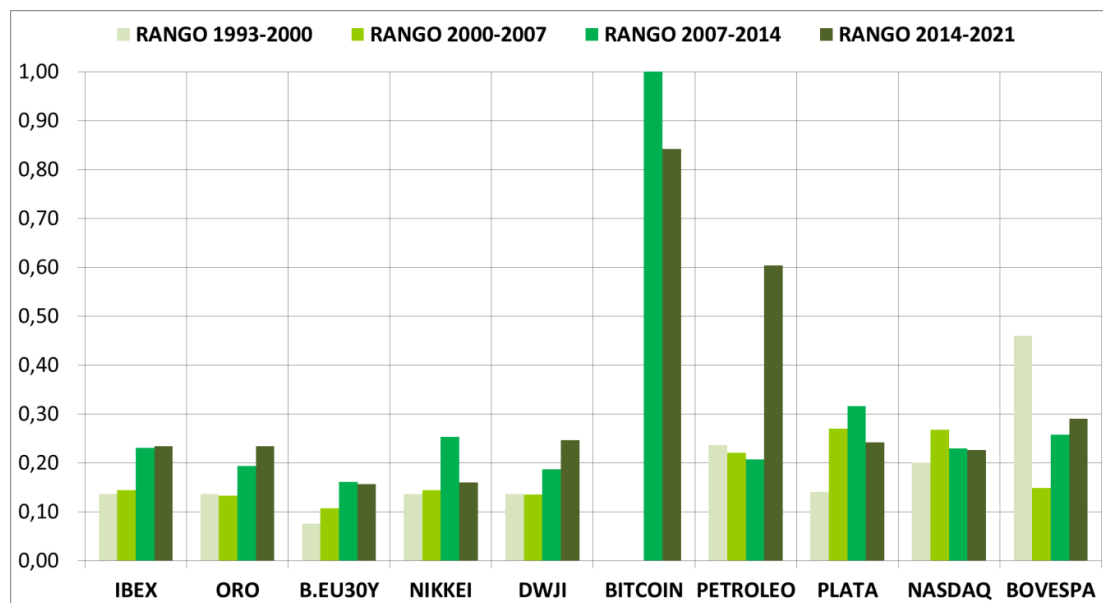
El nivel de Curtosis, permite agrupar a los Índices en tres categorías:

- 1) más altas las encontramos en el PETROLEO y BITCOIN
- 2) nivel medio-alto en ORO, IBEX, y DWJ.
- 3) nivel bajo en BONOS EEUU, NIKEI, PLATA, NASDAQ y BOVESPA

El análisis de los Rangos, de mayor a menor, nos proporciona la siguiente clasificación de los Índices:

- 1) BITCOIN, PETROLEO
- 2) BOVESPA
- 3) ORO, IBEX, DWJ, BONOS EEUU, NIKEI, PLATA, NASDAQ.

Gráfico 2. Rango por periodos y por Índices.

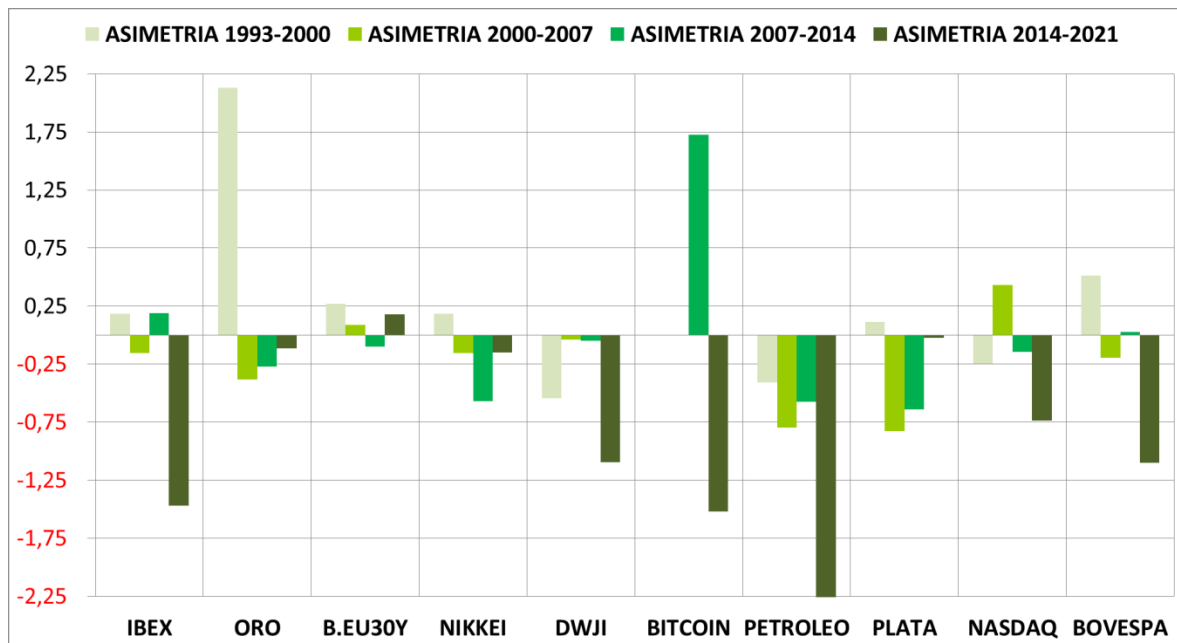


Fuente: elaboración propia.

La tercera clasificación es en orden a los niveles de asimetría observados:

- 1) ORO, BITCOIN y PETROLEO
- 2) IBEX, DWJI, BOVESPA
- 3) BONOS EEUU, NIKEI, PLATA, NASDAQ

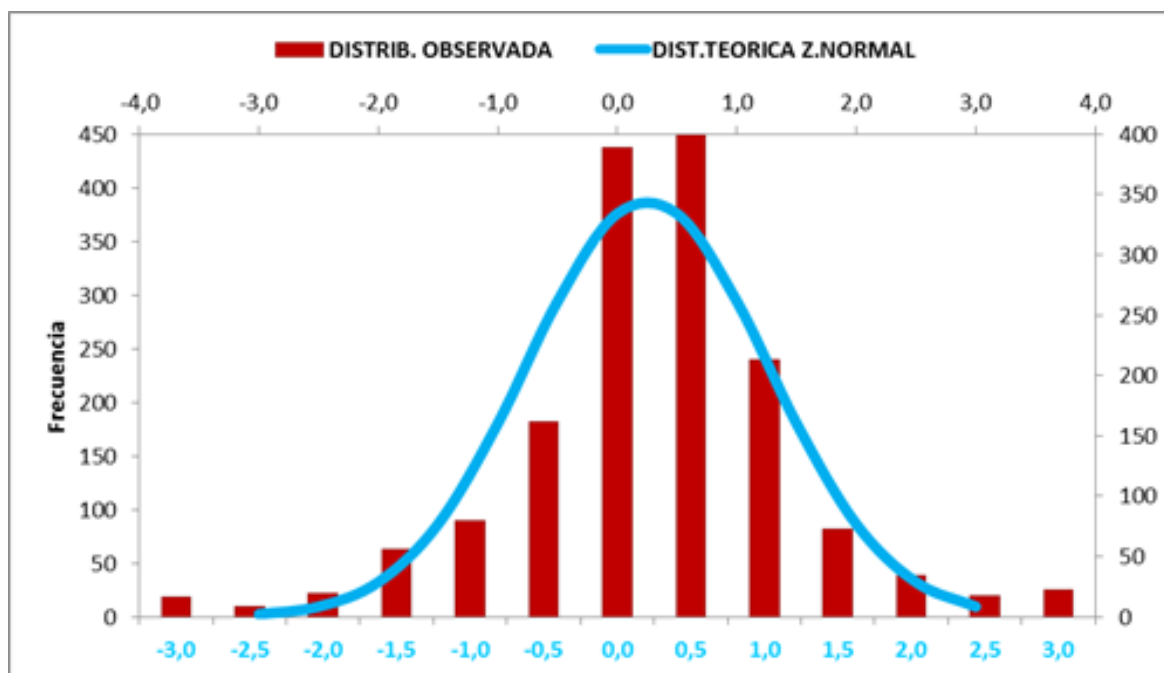
Gráfico 3. Asimetría por periodos y por Índices.



Fuente: elaboración propia.

A continuación la representación de las curvas de frecuencias del rendimiento logarítmico por cada periodo y para cada Índice (Ver Anexo 2). Por ejemplo, el NIKKEI 225 para el periodo de 2007-2014, la importancia de colas gruesas en los extremos de la campana, así como una concentración puntiaguda en el centro que denota alto nivel de leptokurtosis:

Gráfico 4. Distribución de frec.de rendimientos logarítmicos diarios para el NIKKEI, 2007 a 2014. Ver el anexo al final de este TFM, para todos los índices de mercado.



Fuente: elaboración propia.

Posteriormente hemos representado las curvas de los precios de cierre diario en los cuatro periodos históricos, para cada uno de los índices. (Ver Anexo 3).

En base a los datos cuantitativos obtenidos, se ha realizado un resumen que posibilite tomar decisiones al inversor en base a una estrategia de riesgo sustentada en el análisis histórico de los distintos Índices de mercado (a partir del Anexo 4).

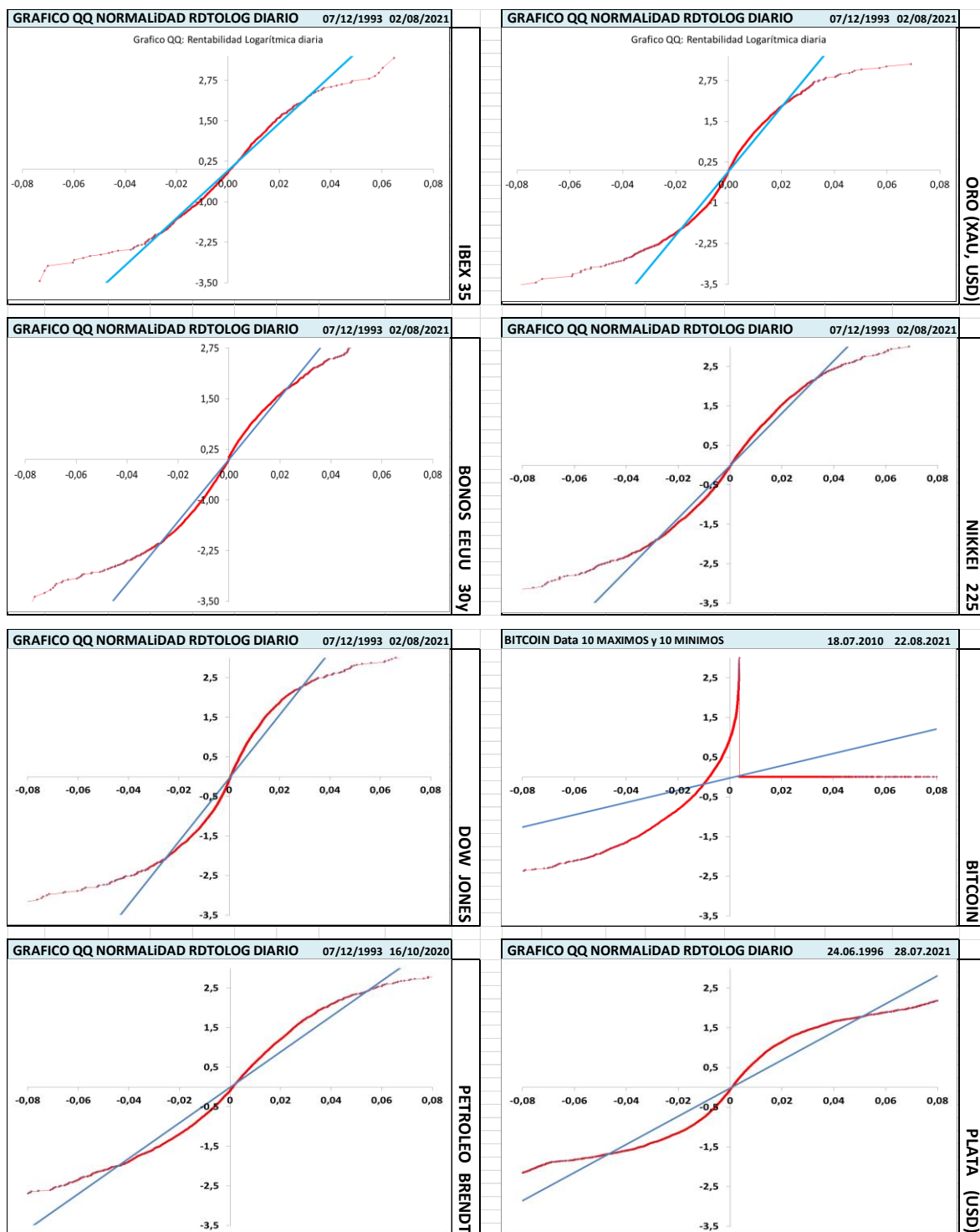
Gráfico 5. Esquema de las “colas gruesas” de rentabilidad diaria positiva y negativa, en los distintos Índices, desde 1993 a 2021.



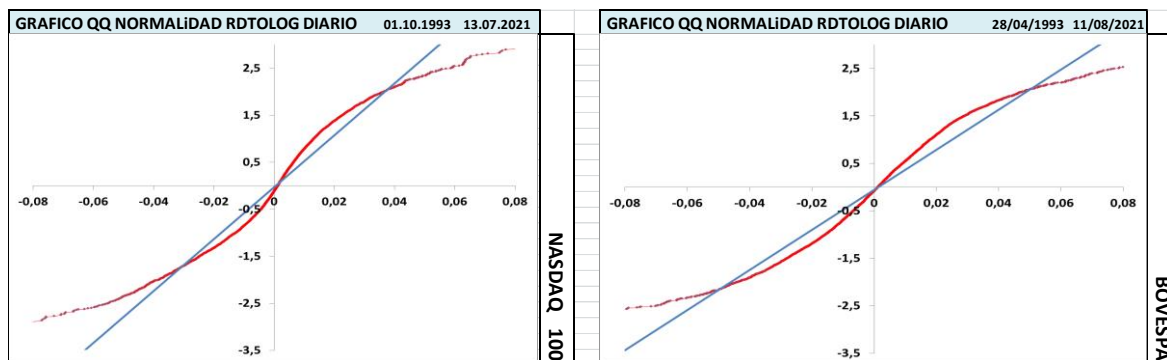
Fuente: elaboración propia.

Finalmente para acabar esta primera hipótesis del TFM , analizamos por el método de cuantiles si las distribución de los rendimientos logarítmicos en este periodo histórico de diciembre de 1993 a agosto de 2021, sigue la distribución normal o por el contrario se aleja de ella:

Gráfico 6. Gráficos de Cuantiles comparativos con la distribución Normal en los rendimientos logarítmicos diarios, desde 1993 a 2021.



Fuente: elaboración propia.



Fuente: elaboración propia.

De los gráficos anteriores, destaca el del BITCOIN por su exagerada anormalidad, fuera del resto de índices de mercado. Seguidos por la gran divergencia respecto a la representación de la recta normal, los mercados siguientes: ORO, PLATA y DWJI. Siendo el PETROLEO en este tipo de análisis gráfico el índice que más cercano a la normalidad se manifiesta.

1.3 Conclusiones

En esta 1ª Hipótesis que plantea si los mercados financieros, ¿se comportan según una distribución normal de Gauss como la Teoría clásica de Mercados Eficientes enuncia? Podemos contestar después de las distintas pruebas realizadas, que en la mayoría de ocasiones todos los Índices, en mayor o menor medida, se comportan fuera de las pautas que dictan las Leyes de los Grandes Números. Es decir, que las distribuciones en las series temporales de rendimientos logarítmicos diarios, se distribuyen en campanas gaussianas deformadas por leptocurtosis y por colas gruesas de eventos improbables según la ley de normalidad estadística.

Por lo tanto, la Hipótesis nula H_0 , que establecía que “las rentabilidades logarítmicas se comportan como una campana de Gauss” queda descartada en favor de la Hipótesis alternativa, tal que H_1 : las rentabilidades logarítmicas diarias en la totalidad de los índices de mercado, se comportan siguiendo una campana leptocúrtica con colas pesadas.

2 LAS RACHAS y LOS CISNES NEGROS EN LOS MERCADOS

2.1 Metodología

Se parte de una hoja Excel para realizar una plantilla que sirva para todos los índices de mercado estudiados. Se siguen los siguientes pasos:

- **Paso 1:** A partir de la Serie original de cotización diaria de cierre, calculamos los rendimientos logarítmicos diarios.
- **Paso 2:** Se establece el criterio de variable dicotómica, asignando las rentabilidades diarias negativas al número (-1) y las rentabilidades positivas al número (+1).
- **Paso 3:** se formula una condición para que cuando aparezcan más de una variable (+1) o (-1) consecutivas, obtengamos verdadero si se cumple la consecución de dos o más valores iguales (sean estos positivos o negativos). Paso 4: Con la formula contar de Excel se cuentan el número de casos de rachas positivas y de casos de rachas negativas. Se obtiene el número total de rachas sean las positivas más las negativas
- **Paso 5:** se calculan los valores estadísticos de las rachas (MEDIA de RACHAS, DESV_STD. de RACHAS y ESTIM. Z de RACHAS).
- **Paso 6:** Se obtiene por tablas el p-valor de las rachas. Si éste es mayor a 0,5, entonces la distribución de las rachas es un fenómeno aleatorio. Ya podremos graficar las rachas positivas (azul) y las rachas negativas (rojo) para intuir el fenómeno de la aleatoriedad.
- **Paso 7:** Se filtra con la herramienta de EXCEL, de la base de datos, aquellas 20 rentabilidades logarítmicas diarias más amplias o extremas: diez de máximas pérdidas y diez de máximo beneficio. Para recogerse en una Tabla resumen. Se grafican estos datos para tener una visión intuitiva del fenómeno de los cisnes negros.
- **Paso 8:** Gráficos de diferencia entre la serie de días de cisnes negros y blancos, sobre la serie completa de 6995 días, de los rendimientos logarítmicos diarios.

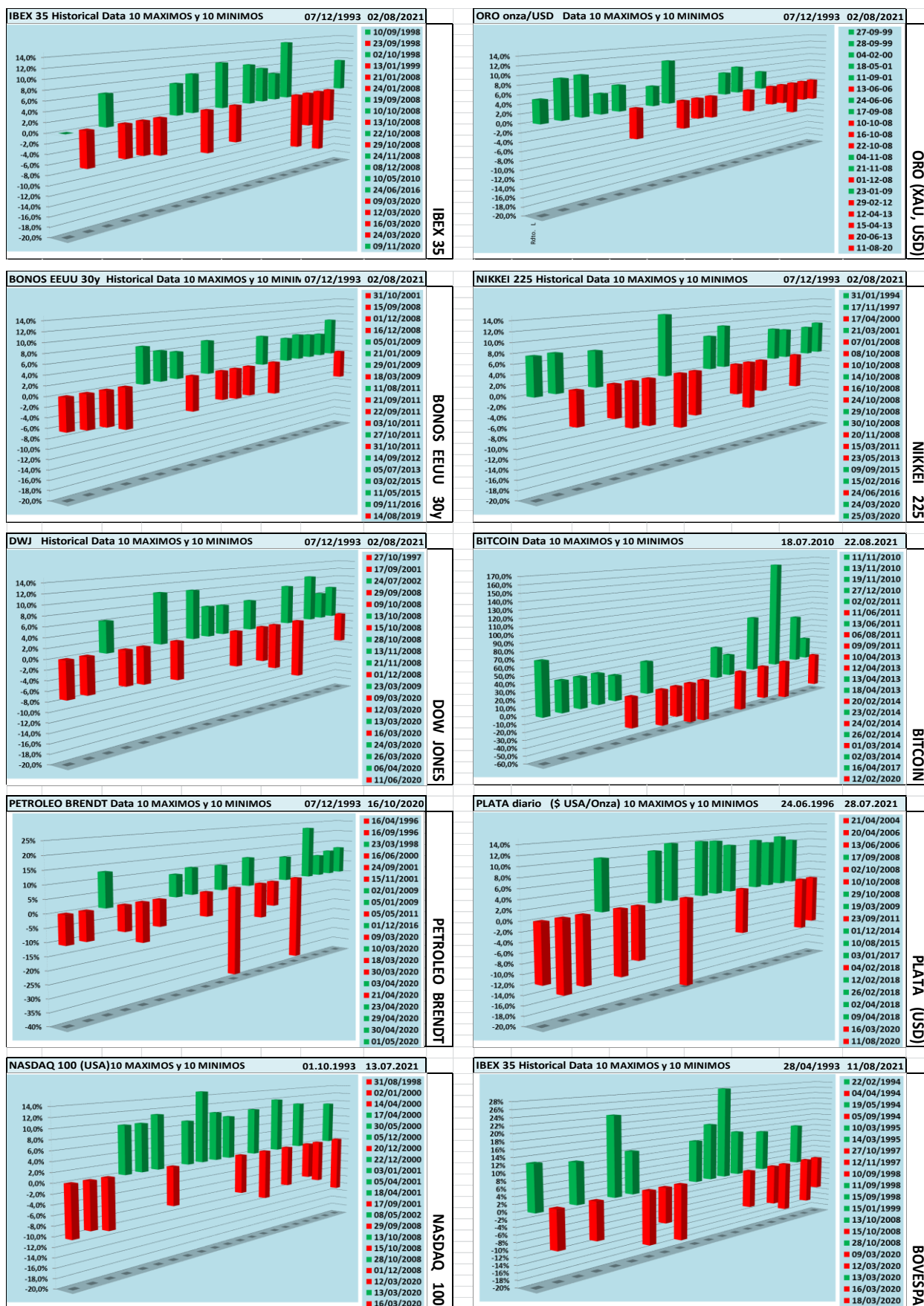
2.2 Cálculos y análisis.

Al recoger los datos filtrados de los veinte días excepcionales desde 1993 a 2021, en cada uno de los índices, de la forma siguiente (Ver toda la Tabla en Anexo 5), podemos representar de forma expresiva con qué frecuencia se vieron afectados y con qué intensidad, los mercados en esta periodo de años.

NIKKEI 225		10 MAXIMOS y 10 MINIMOS				04/01/1993	02/07/2021	
Id	Date	Open	High	Low	Close	Valor de cier	Volumen:10	Rdto. LOG
266	31/01/1994	18.791	20.229	18.791	20.229	20.229	0	0,08
1206	17/11/1997	15.154	16.283	15.154	16.283	16.283	0	0,08
1799	17/04/2000	20.342	20.342	18.604	19.009	19.009	0	-0,07
2027	21/03/2001	12.184	13.104	12.101	13.104	13.104	0	0,07
3696	07/01/2008	14.549	14.668	14.439	14.501	14.501	139,8	-0,07
3884	08/10/2008	10.012	10.012	9.160	9.203	9.203	205,5	-0,10
3886	10/10/2008	9.016	9.016	8.115	8.276	8.276	247,3	-0,10
3887	14/10/2008	8.408	9.456	8.408	9.448	9.448	169,3	0,13
3889	16/10/2008	9.401	9.401	8.458	8.458	8.458	186,2	-0,12
3895	24/10/2008	8.391	8.391	7.647	7.649	7.649	194,7	-0,10
3898	29/10/2008	7.742	8.212	7.742	8.212	8.212	222,9	0,07
3899	30/10/2008	8.270	9.031	8.270	9.030	9.030	220,6	0,09
3913	20/11/2008	8.150	8.150	7.703	7.703	7.703	154,3	-0,07
4472	15/03/2011	9.442	9.442	8.228	8.605	8.605	415,7	-0,11
5010	23/05/2013	15.740	15.943	14.484	14.484	14.484	595,2	-0,08
5576	09/09/2015	17.758	18.771	17.757	18.771	18.771	201,7	0,07
5678	15/02/2016	15.248	16.155	15.244	16.023	16.023	232,2	0,07
5767	24/06/2016	16.334	16.389	14.864	14.952	14.952	263	-0,08
6683	24/03/2020	17.207	18.100	17.197	18.092	18.092	147,3	0,07
6684	25/03/2020	18.447	19.564	18.447	19.547	19.547	147,7	0,08

NIKKEI 225

Graf.7. Cisnes verdes y rojos de rendimientos log. diarios en % junto a fechas cronológicas



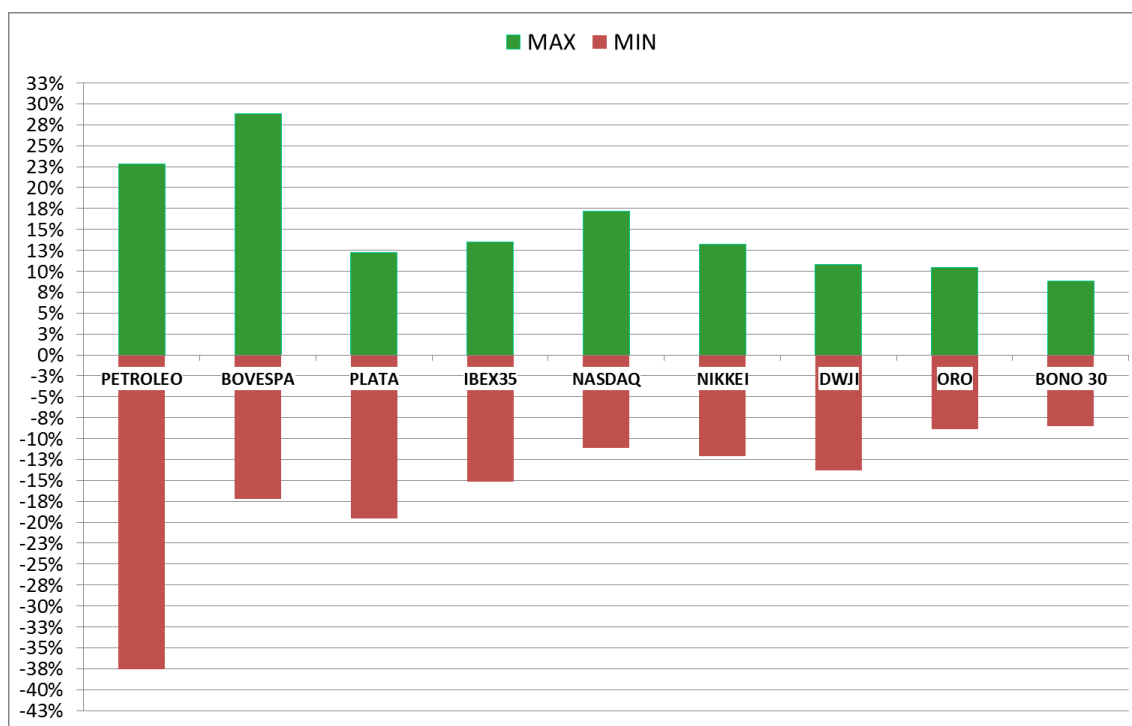
Fuente: elaboración propia.

Se observa como los distintos mercados, reflejan en su serie histórico numerosos eventos excepcionales con un rango de rentabilidades log. diarias que van desde rentabilidades negativas de -38% hasta rentabilidades positivas de +23%. La mayor caída diaria del IBEX 35 en estos casi 30 años, fue del -15,2%. Debemos poner al margen de este análisis, el caso del BITCOIN que no guarda comparación con las demás series históricas, todo y siendo el índice más joven de todos.

Tabla 2. Resumen del Anexo 5.

INDICE	MAX	MIN	RANGO
BITCON	163%	-86%	249%
PETROLEO	22,8%	-37,6%	60%
BOVESPA	28,8%	-17,2%	46%
PLATA	12,2%	-19,5%	32%
IBEX35	13,5%	-15,2%	29%
NASDAQ	17,2%	-11,1%	28%
NIKKEI	13,2%	-12,1%	25%
DWJI	10,8%	-13,8%	25%
ORO	10,4%	-8,9%	19%
BONO 30	8,8%	-8,5%	17%

Gráf.8. Rangos de intensidad (de mayor a menor) de los Cisnes Negros (verdes y rojos)



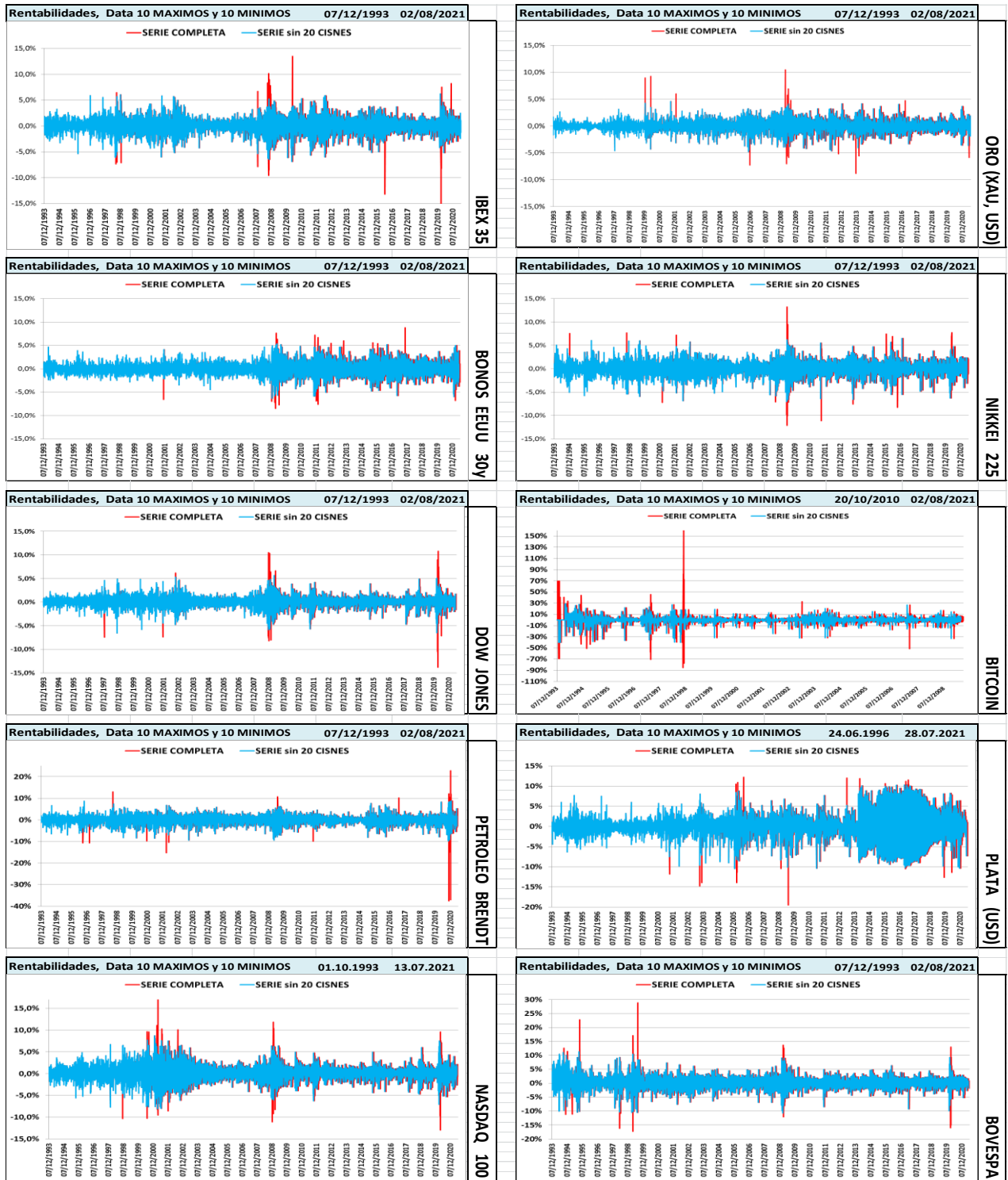
Fuente: elaboración propia.

Se puede observar que al margen del BITCOIN, el PETROLEO es el índice más afectado a los Cisnes Negros. Establecemos una clasificación:

- 1) PETROLEO y BOVESPA
- 2) PLATA; IBEX35, NASDAQ, NIKKEI y DWJI
- 3) ORO y BONO EEUU30y.

Ahora podemos ver cómo se distinguen estos cisnes (rojo), en el tiempo cronológico, por su intensidad sobre la Serie de rendimientos logarítmicos del periodo de 12/1983 a 08/2021 (azul).

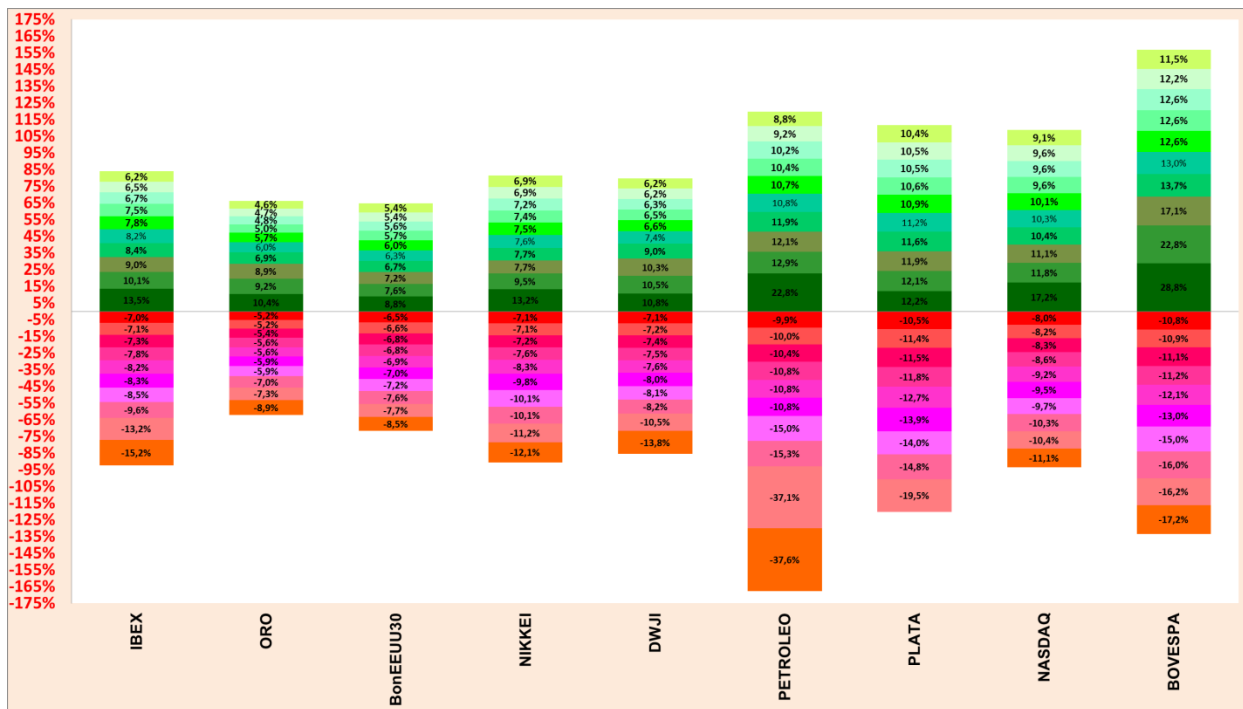
Graf.9. Cisnes en rojo sobre el fondo azul del rendimiento logarítmico diario (12(1983 a 08/2021)



Fuente: elaboración propia.

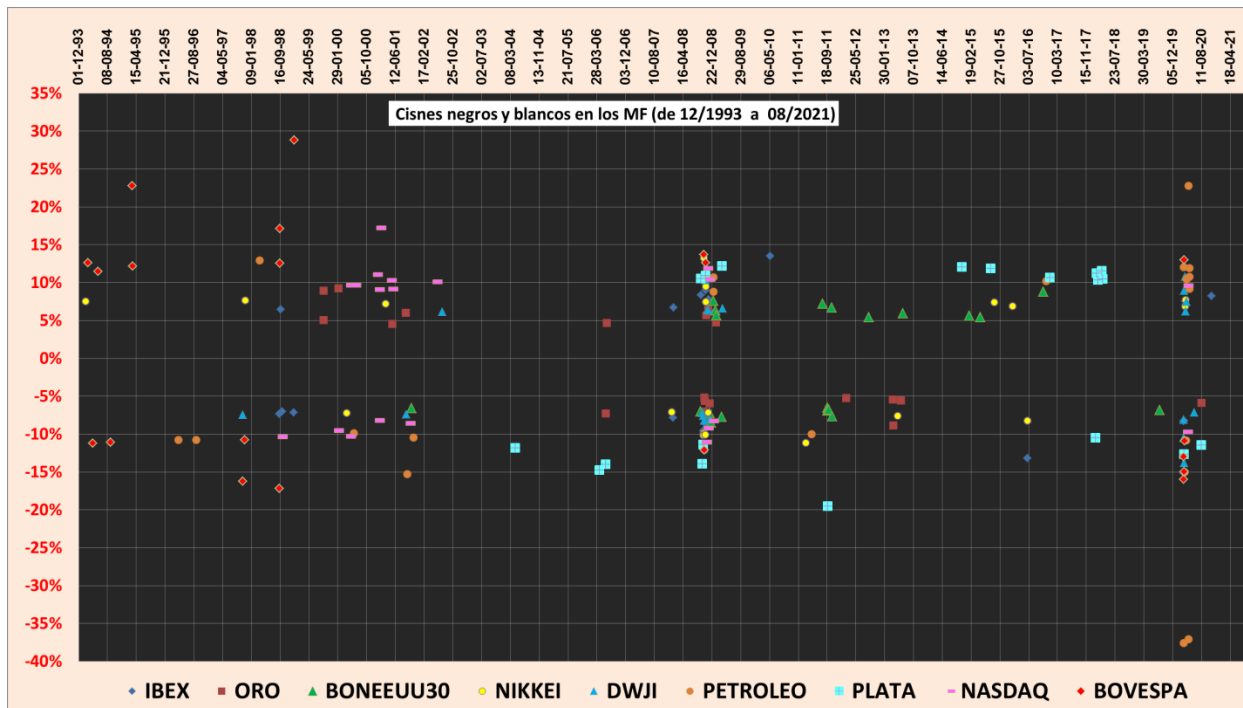
Finalmente en lo que se refiere a los eventos extraordinarios, representamos su efecto en el tiempo (frecuencia) y en su intensidad (impulso) por medio de estos dos gráficos:

Gráf. 10. Detalle de la intensidad de los cisnes en %



Fuente: elaboración propia.

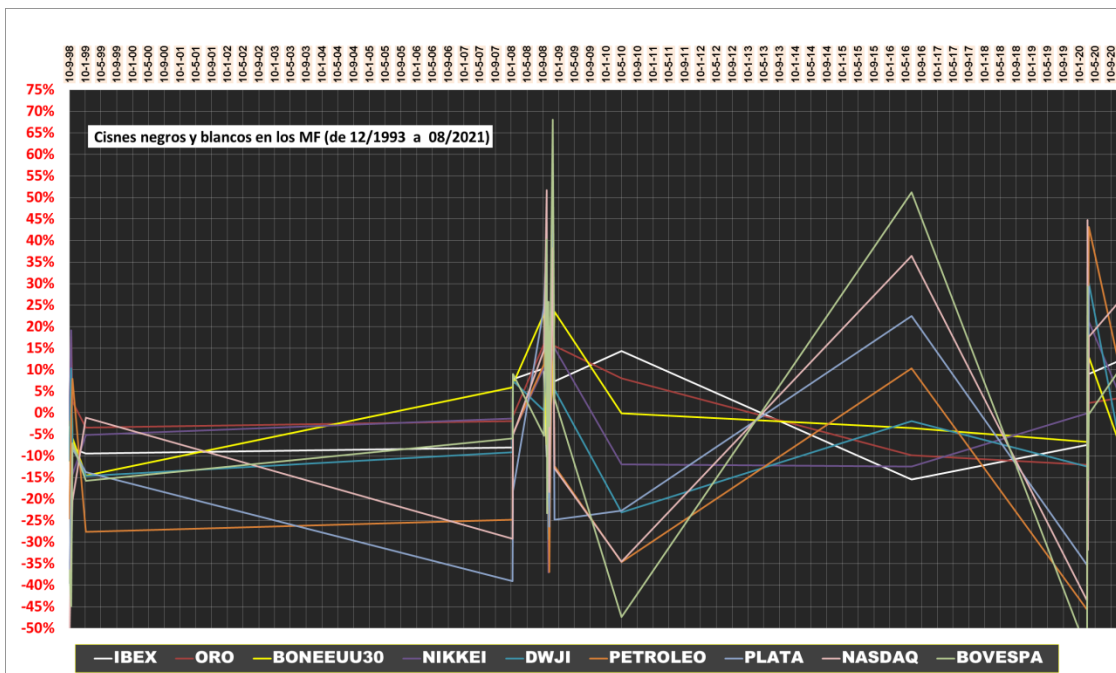
Gráf.11. Dispersión y concentración de los cisnes desde 12/1983 a 08/2021.



Fuente: elaboración propia

Se puede también apreciar, como los Mercados se correlacionan o no entre sí con los eventos extraordinarios. Por ejemplo el BONO EEUU 30y parece ir desajustado respecto a la sensibilidad de los otros índices de mercado. Además puede notarse como aparecen “clústers” de turbulencia cignica, concentrándose subidas y bajadas extraordinarias en cortos intervalos de tiempo. Esta correlación o sincronía que afecta a diversos índices según ritmo similar, se puede apreciar en este gráfico:

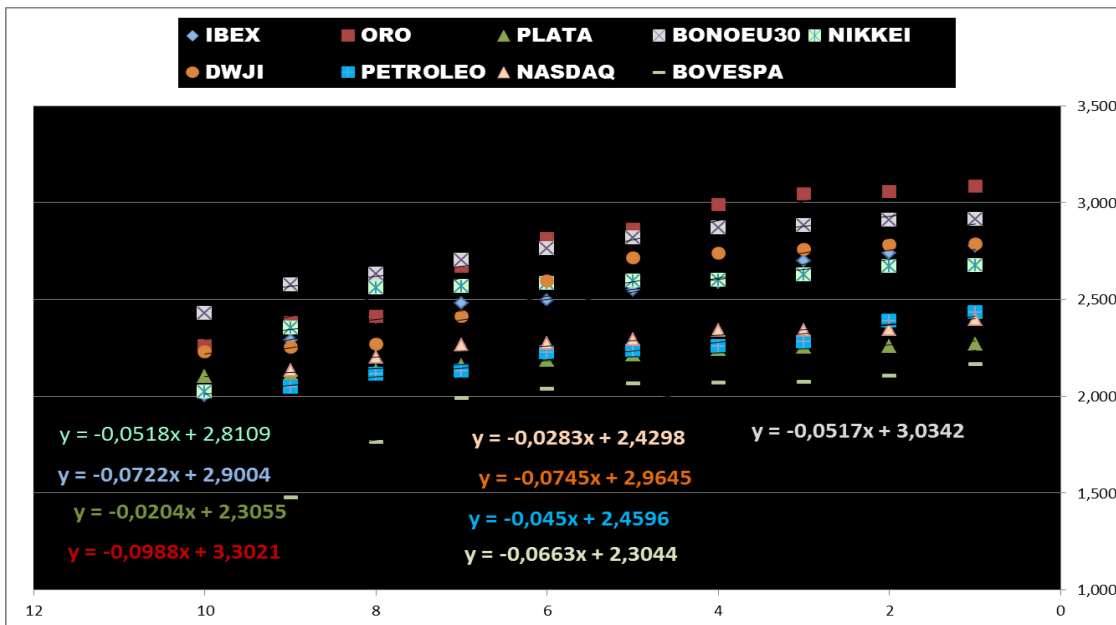
Gráf.12. Sensibilidad a los cisnes en sincronía entre diversos Mercados,



Fuente: elaboración propia

También podemos verificar la tendencia escalante de los cisnes, en cuanto a su intensidad (% de impulso arriba o abajo del rendimiento logarítmico diario). Si tomamos los valores de los cisnes negros en su intensidad en % y les aplicamos el (LN), luego los ordenamos de menor a mayor rentabilidad diaria, obtenemos una gráfico que expresa una relación lineal de pendiente escalante tanto entre los impulsos de rendimientos positivos como entre los rendimientos negativos. En el caso de la escalabilidad de los cisnes positivos obtenemos el siguiente gráfico.

Gráf.13 Escalamiento de la intensidad de los 10 cisnes positivos, según cada Mercado

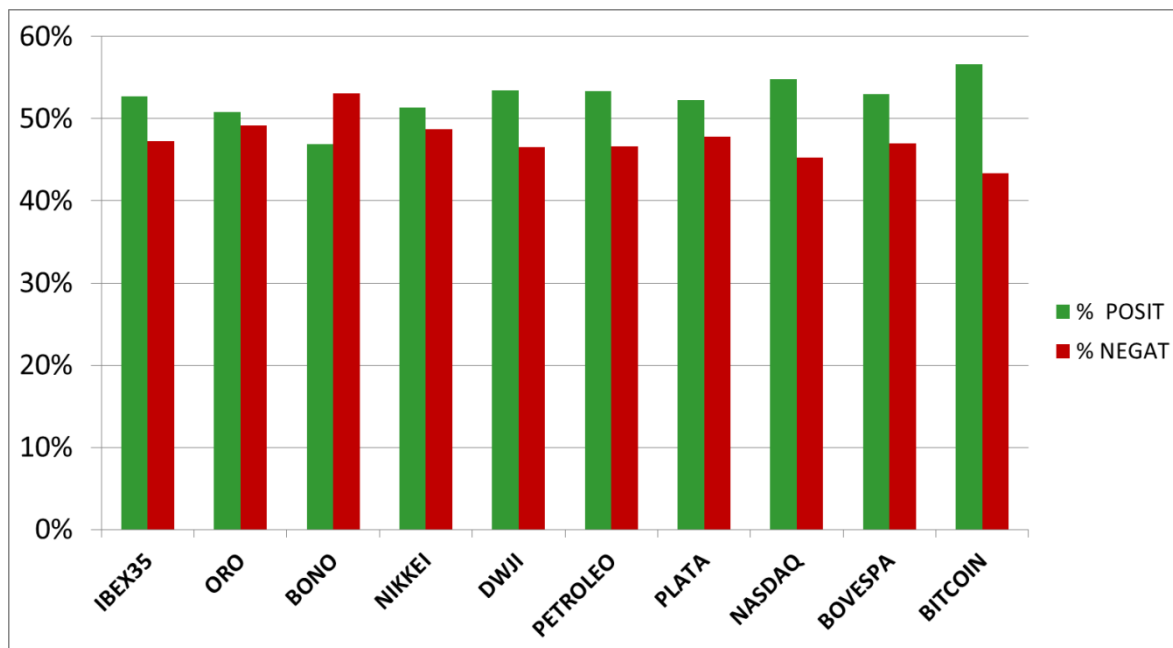


Fuente: elaboración propia

Pasamos ahora a analizar las “rachas” en la dinámica de los mercados.

De la obtención del número de rentabilidades positivas y días de rentabilidades logarítmicas negativas, se concluye que se relacionan casi al 50%, para todos los Índices (no incluimos al BITCOIN)

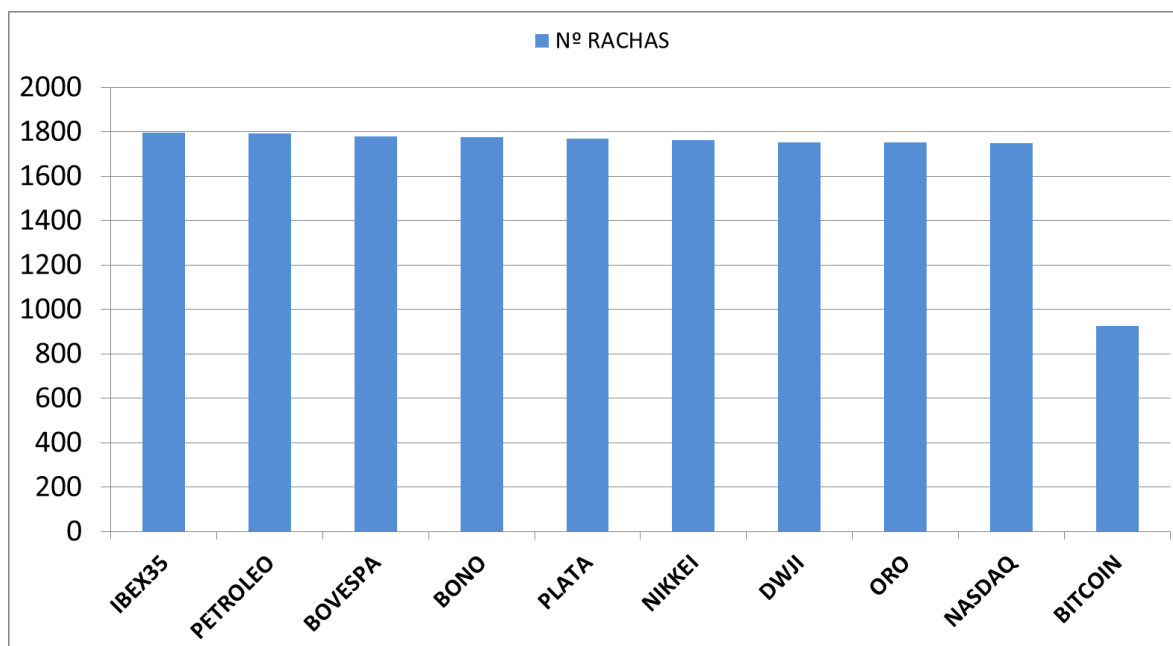
Graf.14. Días de rendimientos log positivos y negativos, desde 1993 hasta 08/2021.



Fuente: elaboración propia

Además se comprueba que todos los índices durante el mismo periodo de años (excepto el BITCOIN) mostraron el mismo número de rachas.

Graf.15. Número de rachas positivas más negativas, durante el periodo de 6996 días



Fuente: elaboración propia

Finalmente, representamos en el tiempo cronológico el fenómeno de las “rachas” positivas (verde) y negativas (rojo) para cada Índice de mercado.

Graf.16. Serie histórica de rachas positivas y negativas durante 6.996 días en rendimientos logarítmicos.

Mercados financieros y su naturaleza fractal



Fuente: elaboración propia

2.3 Conclusiones

De la segunda hipótesis planteada en este trabajo, podemos dar como resultado lo siguiente: los mercados financieros están sometidos a impactos relevantes fruto de la aparición de los cisnes negros, descritos por N. Taleb.

La Hipótesis nula, H0 que afirma que las rentabilidades medias no se ven afectadas por los cisnes negros, no es cierta. Este hecho se ha visto comprobado por los numerosos análisis descritos anteriormente entorno a dos ideas:

a) Análisis los diez eventos de máxima rentabilidad y los diez eventos de mínima rentabilidad diaria, en la Serie temporal de 6.995 días.

- Podemos clasificar los índices en tres grupos según el nivel de impulsividad de los “cisnes” (ya sean positivos o negativos: 1) PETROLEO y BOVESPA; 2) PLATA; IBEX35, NASDAQ, NIKKEI y DWJI y 3) ORO y BONO EEUU30y.
- Los “cisnes” o eventos excepcionales que engrosan las colas de la curva de distribución de frecuencias de los rendimientos logarítmicos diarios, se producen de forma agrupada, concentrándose en unos pocos días, a lo largo de la serie histórica de 6.996 días.
- Hay índices de mercado que sufren del mismo modo, de forma sincrónica los efectos de los “cisnes”. Y hay otros, los pocos, que parecen seguir otra pauta.
- Los cisnes en cuanto a su intensidad (ya sea de subidas o de crashes) siguen un patrón escalante perfectamente definido en % de incremento o de descenso. Y además este patrón es común a todos los mercados.

b) Análisis de las rachas (test de rachas positivas y negativas) en la Serie histórica de 6996 días.

- Los mercados se comportan del mismo modo, en cuanto al número de días positivos y negativos de rentabilidades logarítmicas diarias.
- Las rachas positivas y negativas están en una relación muy cercana al 50%.
- El número de rachas que muestran todos los mercados es similar y se estima alrededor de 1.770.

Tabla 3. Conteo del número de rendimientos positivos y negativos, como del número de rachas.

INDICE	RDTOS +	RDTOS -	Nº RACHAS	% POSIT	% NEGAT
IBEX35	3.686	3.309	1.794	53%	47%
ORO	3.551	3.440	1.751	51%	49%
BONO	3.281	3.714	1.774	47%	53%
NIKKEI	3.590	3.405	1.761	51%	49%
DWJI	3.738	3.257	1.753	53%	47%
PETROLEO	3.732	3.263	1.792	53%	47%
PLATA	3.653	3.342	1.768	52%	48%
NASDAQ	3.831	3.164	1.750	55%	45%
BOVESPA	3.708	3.287	1.780	53%	47%
BITCOIN	2.243	1.717	925	57%	43%

3 LA DIMENSION FRACTAL DE LOS INDICES de MERCADO

3.1 Metodología

Como se ha comentado anteriormente, el modelo matemático del movimiento browniano o paseo aleatorio ha sido una de las hipótesis básicas de partida de la teoría del mercado eficiente. Fue E. Samuelson quien propuso el movimiento geométrico browniano para la rentabilidad logarítmica en la serie temporal de precios. Dicho movimiento browniano se ajusta a: variaciones estacionarias e independientes, una distribución de Gauss en las frecuencias y una continuidad en la serie de rentabilidades. Por el contrario, Mandelbrot y Taleb propusieron un modelo basado en: la no-estacionariedad de la serie de los precios (donde la volatilidad no es constante), una dependencia a largo plazo (o memoria larga fractal), una distribución en forma de campana de Gauss leptocúrtica (con colas pesadas o gruesas) y una discontinuidad en la serie que contiene saltos en los precios.

Nuevos modelos se han diseñado para ajustarse a estas nuevas condiciones epistemológicas sobre el estudio de las series temporales financieras: modelo ARCH y modelo GARCH. Pero estos modelos estadísticos, aunque tomen como hipótesis las distribuciones acampanadas de Gauss con colas pesadas y una concentración de la varianza de la serie, no son suficientemente robustos para describir la fenomenología fractal y las cosas pesadas, en las series temporales. Pero fue Mandelbrot quien sugirió la hipótesis de un movimiento browniano pero de tipo fraccionario para describir la fractalidad en las series financieras. El otro aspecto sobresaliente es su teoría sobre el concepto de dimensión geométrica fraccionaria.

Las series temporales de precios o de rentabilidades dibujan trayectorias y cuevas, que según la teoría fractal pueden tener dimensiones no-enteras. Esto se contrapone a la geometría clásica (desde la geometría de Euclides) que describió el mundo bajo la premisa de que: un punto tiene dimensión=1, una línea tiene dimensión=2, un cuerpo de volumen tiene dimensión=3. Mandelbrot dice que las dimensiones de Euclides no sirven para describir la realidad y que el mundo es rugoso. Esto significa que por ejemplo, una entidad que esté entre el punto de dimensión=1 y el espacio vacío de dimensión=0, sería el conjunto denominado "polco de Cantor", no considerándose ni un espacio vacío, ni un punto. Otro ejemplo sería el de las entidades de dimensión entre 1 y 2, que en física serían los "coágulos", mientras que en estadística serían las series temporales de dimensión tal que $1 > D_f < 2$. Es decir todas las funciones representadas como líneas en el plano cartesiano con mayor o menor grado de rugosidad no diferenciable o sin tangente posible a esa curva. En ellas se incluirán las gráficas sobre series financieras. Un tercer estado de dimensión fraccionaria sería la de las entidades cuya dimensión está entre la línea y el volumen. En palabras de Mandelbrot, son más que una línea y menos que un volumen ($2 > D_f < 3$). Entre ellas, está el pulmón en la Biología y Medicina, una arborificación del tipo rizoma, un fluido no viscoso o una red sea ésta de internet por ejemplo. Mandelbrot aplica esta concepción de dimensión fractal para describir estados y fenómenos de la Naturaleza pero también para proponer nuevas aplicaciones en el campo de las series sobre los precios (véase su trabajo clásico sobre los precios del algodón). Partiendo de esta gran idea, Mandelbrot analiza y concluye que las Series temporales en los mercados financieros son de naturaleza fractal y se representan como dimensiones fraccionarias. Esto implica una serie de presupuestos científicos:

- La autoafinidad de la Serie en el tiempo, (que expresa una forma de autosimilitud geométrica o iteración de un modelo a diferentes escalas dentro de la propia figura).
- La dimensión fractal como valor de la rugosidad, variación de los precios de una serie financiera. Que permite clasificar dicha serie según el coeficiente de Hurst (dado que la Dimensión fractal = $2-H$ para entidades (funciones lineales) cuya dimensión está tal que $1 > D_f > 2$).
- El movimiento browniano o paseo aleatorio ($H=0,5$ y Dimensión fractal=1,5), sería entonces un caso particular de la Teoría fractal que enuncia el movimiento browniano fraccional. Ya que estimando el valor de H, obtenemos el valor de la Dimensión Fractal y con ésta podemos clasificar qué tipo de comportamiento mantendrá la serie temporal de precios, como veremos a continuación en la propuesta de las Hipótesis de este TFM.

- Los fenómenos de las Series temporales, de dimensión entre $1 > D_f > 2$ mediante el método de análisis fractal, explicarían en parte los siguientes aspectos en los mercados financieros: dependencia a largo plazo (subsistencia en las series de una “memoria larga”, inherente al proceso de formación de los precios). Y la aparición habitual de colas pesadas en la campana de Gauss o cisnes negros en las series (como ya se ha comprobado anteriormente).

Tras esta breve explicación de la “dimensión fractal”, detallamos el método utilizado para la estimación del Coeficiente de Hurst asociado al índice de dimensión fractal de las series temporales. Para calcularlo, se usará el método del Rango Reescalado anotado como (R/S) n. Esto es, Rango entre Desviación standart para un tipo de ventana o partición de la Serie histórica. El método se basa en una idea de Einstein (el movimiento browniano descubierto previamente por Brown): la distancia que recorre una partícula de polen, errática o al azar en el medio o estado de un fluido, se incrementa a medida que pasa el tiempo, pero en la relación de la raíz cuadrada de éste. Es decir que en finanzas, las series de rentabilidades logarítmicas varían su amplitud con la raíz cuadrada del tiempo transcurrido.

Ecuación para hallar el coeficiente de Hurst: $(R/S) n = \text{Constante} \times n^H$. Siendo (R/S) el cociente entre el rango y la desviación standart; la C una constante de proporcionalidad; “n” el número de datos por caja o ventana o intervalo de fechas en que se particiona la Serie de precios histórica; y (H) el Coeficiente de Hurst.

Dicho método se basa en la premisa de que la Serie tenderá a un valor medio igual a cero en cuanto a su desviación standart. Al final de cada partición de la Serie, hemos de obtener un valor igual a cero de la desviación standart. Los pasos a seguir para aplicar este método de estimación del Coeficiente de Hurst son los siguientes:

Paso 1: a partir de la Serie de precios de cierre diarios, se obtiene la rentabilidad diaria logarítmica.

Paso 2: se parte la Serie general en ventanas o cajas de igual número de días (datos). Estas particiones de la Serie se hacen de tal modo que una primera partición será 1:1, una segunda 1:2, tercera 1:4 y así sucesivamente hacemos particiones que contienen números de datos (días más pequeños) hasta llegar a la partición 1:64 (en este TFM).

Paso 3: se realiza los cálculos para cada una de las particiones de la Serie original que hemos decidido anteriormente.

Estos cálculos se detallan a continuación:

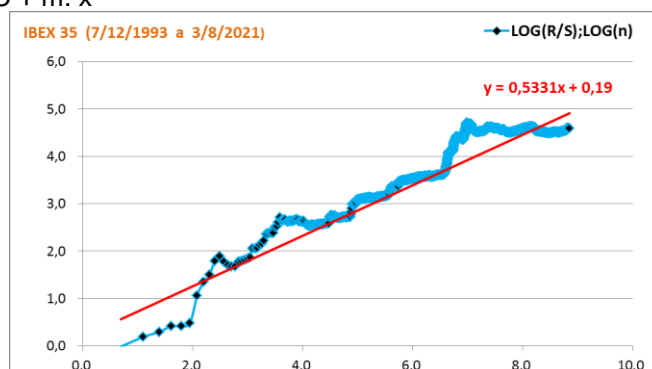
Cálculo de la Media y de la Desviación Standart

- Ajuste de la desviación de cada dato diario respecto a la Media.
- Suma acumulativa de esa desviación de cada dato, dentro de la partición.
- Se obtiene el valor máximo de la rentabilidad logarítmica diaria y el valor mínimo de ésta, para calcular el Rango como diferencia entre valor máximo y valor mínimo.
- Se obtiene el cociente del Rango Reescalado, dividiendo el Rango entre la Desviación standart.
- Una vez ya tenemos el valor de ;R/S para cada intervalo de \bar{n} aplicamos la ecuación ya comentada, aplicando logaritmos y realizamos una regresión lineal de modo que:

$$\text{Ln} (R/S) n = \text{Ln} (C \times n)$$

$$\text{Ln} (R/S) n = \text{Ln} (C) + H \times \text{Ln} (n)$$

$$Y = C + m. x$$



La pendiente ($m =$ coeficiente de X) de dicha ecuación será igual al coeficiente de Hurst.

La interpretación del Coeficiente de Hurst obtenido para cada una de las Series histórica de los distintos activos financieros o índices de mercado, nos refiere al siguiente esquema:

- Si H es tal que $0 < H < 0,5$ la serie de datos muestra antipersistencia (retorna rápidamente a la media). La antipersistencia en la Serie, quiere decir que el devenir de los precios sigue una trayectoria rugosa, muy rugosa. Es decir, que los precios dibujan en el tiempo un fenómeno recurrente de retorno a la media, como si tendiera al auto-equilibrio dinámico. Esta antipersistencia de la Serie, se asocia a un fenómeno denominado ruido rosa. Es como si la Serie tuviera una memoria-corta, que la hace retornar frecuentemente a su valor medio.
- Si H es tal que $H = 0,5$ se interpreta que la serie de datos pertenece a un fenómeno típico del movimiento browniano estándar (el recorrido aleatorio de la partícula de polen en el fluido). Es decir, de pura aleatoriedad. Esto quiere decir que no tiene memoria alguna, ni corta para retornar a la media, ni larga para persistir en una tendencia. En este caso se asocia a un proceso con ruido rojo o marrón. De este modo, no estarían relacionados los precios pasados con los precios futuros. Según esto, el inversor no podría realizar una gestión ventajosa del riesgo en esa inversión. De ahí la Tesis clásica de los Mercados Eficientes.
- Si H es tal que $0,5 < H < 1,0$ estaríamos ante un fenómeno de serie persistente de precios o rendimientos. Esto indicaría que los precios se mueven no aleatoriamente, sino de una forma que su devenir posee una memoria larga, que va decreciendo lentamente. O dicho de otro modo, que la memoria corta de retorno al precio medio de la Serie histórica, no influye en el devenir de los precios. Los precios se moverían según tendencias (alcista o bajista) de un modo persistente. En este caso se asocia a un proceso con ruido blanco. La serie de precios variará por largos ciclos o épocas de sequía y de inundación (en términos de Mandelbrot, el efecto José y el efecto Noé de la Biblia en su metáfora sobre el Egipto en tiempos de Moisés: 7 años de plagas y 7 años de ricas cosechas). Por lo tanto también podemos deducir que en estos casos la línea que dibuja los precios se vuelve más lisa y menos rugosa que en los dos casos anteriores.

La dimensión fractal será tal que a partir del coeficiente de Hurst (H), obtendremos con la fórmula Dimensión fractal = $2 - H$. Ya que las Series temporales en el espacio cartesiano, estarán entre la dimensión entera o euclídea de la línea ($d=1$) y la dimensión euclídea del plano ($d=2$).

Complementariamente al método del Rango Reescalado, aplicaremos el método denominado DFA (Análisis de Fluctuación de tendencia) con el que se obtiene un coeficiente o índice fractal denominado "alfa" (coeficiente de escalamiento) que se relaciona con la dimensión fractal de modo tal que: Hurst = $\alpha / 2$ y de este modo la Dimensión fractal = $2 - (\alpha / 2)$.

Dicho método sigue los siguientes pasos de cálculo:

Paso 1: Se obtiene la Media de la Serie

Paso 2: Se resta a cada dato de la serie, la media, y se acumula la diferencia en la serie integrada.

Paso 3: se divide la serie en ventanas de tiempo de tamaño K calculándose una regresión lineal para el conjunto de datos de esa ventana. En mi caso uso 8 tamaños de ventanas o particiones distintas (de 10 datos, de 50 datos, 100, 200, 400 y 600 datos) para una Serie histórica de precios de 6.995 días.

Paso 4: Restamos la tendencia lineal obtenida ($y=mX+C$) a cada uno de los datos de la ventana.

Paso 5: Con la serie sin tendencia lineal, se calcula la raíz cuadrática media (SRM) para cada ventana.

Paso 6: Calculamos el valor promedio de todos los valores obtenidos para la Función de Tendencia (F_n) en el conjunto de ventanas de igual tamaño.

Paso 7: Realizamos un gráfico de regresión lineal, con los datos obtenidos en cada una de las particiones realizadas. Según “ α ” que en la ecuación siguiente: $(F_k) = C \times K^\alpha$ y aplicando logaritmos Log a la ecuación. Siendo “ α ” la “m” de la recta de regresión.

Finalmente para complementar el análisis de fractalidad a través del coeficiente de Hurst, investigaré la fractalidad entendida como “memoria larga” en relación a la “memoria corta” de los ciclos formados por el movimiento de retorno a la media (memoria corta).

Paso 1: Se parte de la Serie original de rendimientos logarítmicos diarios y se filtran los días en que el ajuste a la media de la Serie fue igual a cero

Paso 2: con las fechas obtenidas con los filtros, construyo los ciclos de tres fechas (tres retornos a la media de la Serie) que serán las ventanas de tiempo a analizar.

Paso 3: Realizo una tabla que resuma los resultados de los distintos Coeficientes de Hurst obtenidos según el número de días que ha conformado cada ciclo de tres retornos a la media. Con estos datos construyo un gráfico que me muestra cómo la Serie estabiliza su coeficiente fractal para los ciclos más largos y por el contrario, para ciclos de menos días la Serie oscila más en su coeficiente fractal Se comprobará como los distintos activos o mercados siguen un mismo patrón:

En este apartado, quedaría por aplicar el método multifractal, pero en este TFM no me será posible realizarlo por motivos de tiempo y de desconocimiento para aplicarlo en EXCEL. Este método denominado MF-DFA (multifractal) es una generalización del método DFA (monofractal) puesto que éste, es un caso especial de Monofractalidad para cuando $q > 2$ siendo “q” el orden dentro de cada ventana. El método Multifractal es el que según Mandelbrot describiría mejor los procesos fractales en las series temporales. De hecho, con MF-DFA se puede obtener el espectro multifractal que refleja una perspectiva más fidedigna a las últimas tesis de Mandelbrot. Recientemente se han publicado trabajos en esta línea, como la hipótesis del mercado multifractal de Kristoufek (2012).

3.2 Cálculos y análisis.

De los cálculos para hallar Hurst para cada partición de la Serie histórica, se obtienen los siguientes datos para cada índice de mercado:

Tabla 5. Valores de coeficiente de escala para ventanas de tiempo de 10, 30, 60, 100, 200, 300, 400 y 600 días.

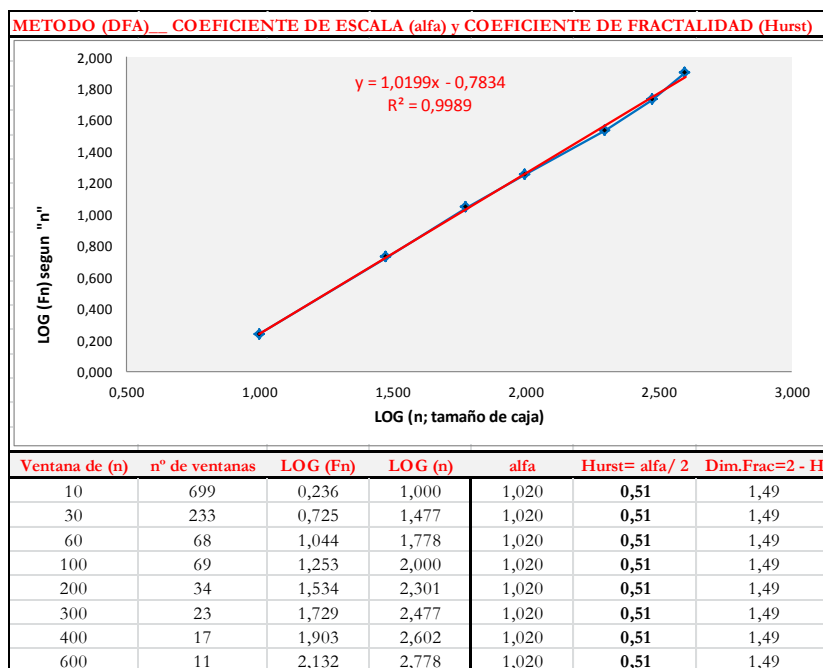
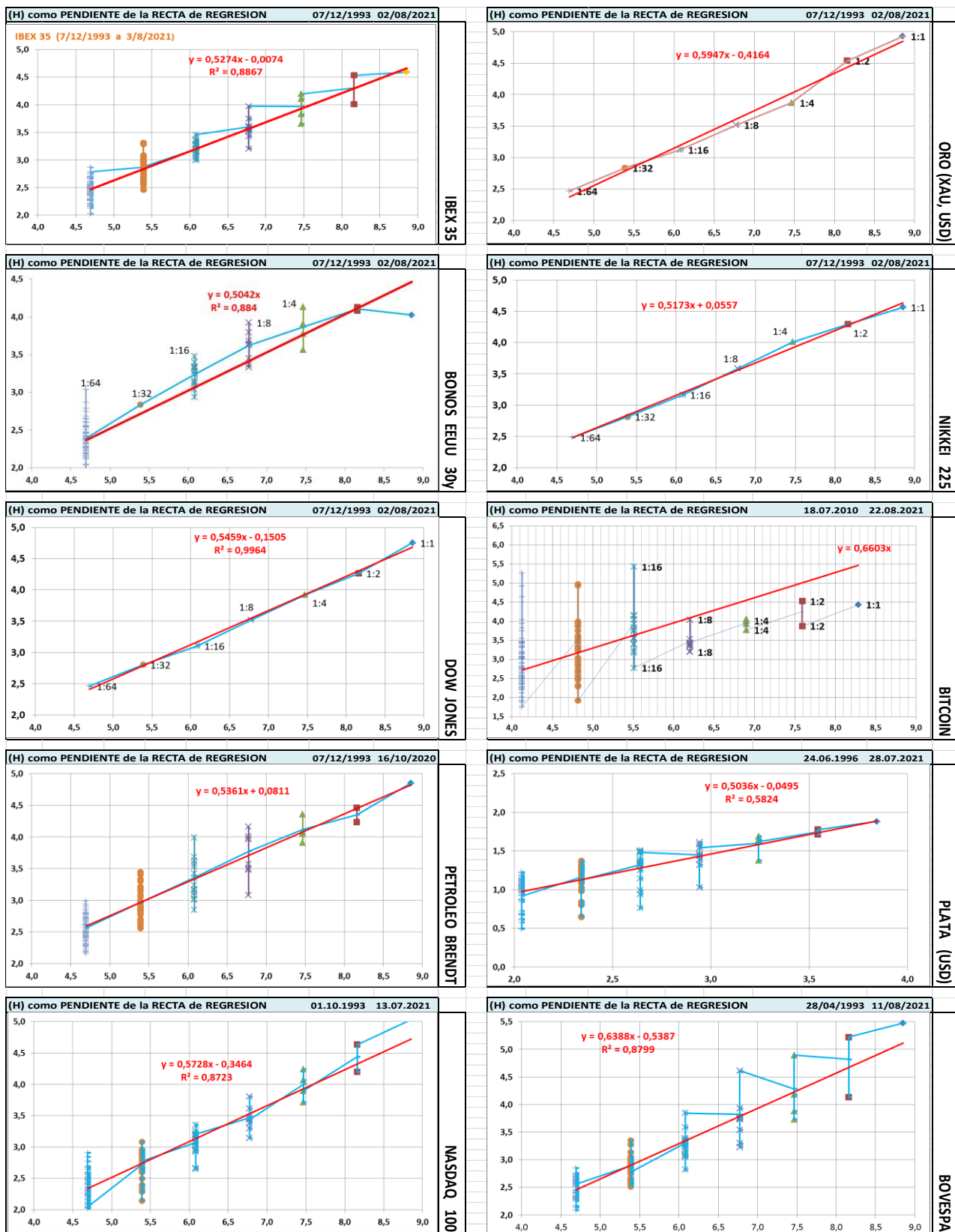


Tabla 4. Valores de Coeficiente de Hurst para cada partición y mercado (12/1993 a 08/2021).

IBEX 35 COEFICIENTE DE HURST por el METODO del RANGO REESCALADO 07/12/1993 02/08/2021										ORO (XAU) COEFICIENTE DE HURST por el METODO del RANGO REESCALADO 07/12/1993 02/08/2021											
Partición	Ventana	días SERIE	R / S	LOG (R/S)	LOG (n)	DIM.FRACTAL	(H) HURST	DELTA (H)			Partición	Ventana	días SERIE	R / S	LOG (R/S)	LOG (n)	DIM.FRACTAL	(H) HURST	DELTA (H)		
1:1	6.996	6996	98,52	4,59	8,85	1,48	0,518	0,012			1:1	6.996	6996	138,28	4,93	8,85	1,44	0,557	-0,03		
1:2	3.498	6996	74,13	4,31	8,16	1,47	0,528	0,000			1:2	3.498	6996	93,59	4,54	8,16	1,44	0,556	-0,03		
1:4	1.749	6996	52,96	3,97	7,47	1,47	0,532	-0,004			1:4	1.749	6996	48,10	3,87	7,47	1,48	0,519	0,01		
1:8	875	6996	36,55	3,60	6,77	1,47	0,531	-0,003			1:8	875	6996	33,69	3,52	6,77	1,48	0,519	0,01		
1:16	437	6996	24,56	3,20	6,08	1,47	0,526	0,002			1:16	437	6996	22,74	3,12	6,08	1,49	0,514	0,01		
1:32	219	6996	17,67	2,87	5,39	1,47	0,533	-0,005			1:32	219	6996	17,04	2,84	5,39	1,47	0,526	0,00		
1:64	109	6996	11,89	2,48	4,69	1,47	0,528	0,000			1:64	109	6996	11,78	2,47	4,69	1,47	0,525	0,00		
COEFICIENTE de HURST por promedio de las particiones									1,47	0,53	COEFICIENTE de HURST por promedio de las particiones									1,47	0,53
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del R/S									1,47	0,53	COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del R/S									1,41	0,59
BONOS EEUU COEFICIENTE DE HURST por el METODO del RANGO REESCALADO 07/12/1993 02/08/2021										NIKKEI 225 COEFICIENTE DE HURST por el METODO del RANGO REESCALADO 07/12/1993 02/08/2021											
Partición	Ventana	días SERIE	R / S	LOG (R/S)	LOG (n)	DIM.FRACTAL	(H) HURST	DELTA (H)		Partición	Ventana	días SERIE	R / S	LOG (R/S)	LOG (n)	DIM.FRACTAL	(H) HURST	DELTA (H)			
1:1	6.996	6996	55,91	4,02	8,85	1,55	0,455	0,05		1:1	6.996	6996	96,07	4,57	8,85	1,48	0,52	0,01			
1:2	3.498	6996	60,67	4,11	8,16	1,50	0,503	0,00		1:2	3.498	6996	73,21	4,29	8,16	1,47	0,53	0,00			
1:4	1.749	6996	47,80	3,87	7,47	1,48	0,518	-0,02		1:4	1.749	6996	55,22	4,01	7,47	1,46	0,54	-0,01			
1:8	875	6996	37,32	3,62	6,77	1,47	0,534	-0,03		1:8	875	6996	36,06	3,59	6,77	1,47	0,53	0,00			
1:16	437	6996	25,54	3,24	6,08	1,47	0,533	-0,03		1:16	437	6996	23,68	3,16	6,08	1,48	0,52	0,01			
1:32	219	6996	17,03	2,84	5,39	1,47	0,526	-0,03		1:32	219	6996	16,68	2,81	5,39	1,48	0,52	0,01			
1:64	109	6996	10,91	2,39	4,69	1,49	0,509	-0,01		1:64	109	6996	12,02	2,49	4,69	1,47	0,53	0,00			
COEFICIENTE de HURST por promedio de las particiones									1,49	0,51	COEFICIENTE de HURST por promedio de las particiones									1,47	0,53
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del R/S									1,50	0,50	COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del R/S									1,48	0,52
DOW JONES COEFICIENTE DE HURST por el METODO del RANGO REESCALADO 07/12/1993 02/08/2021										BIT COIN COEFICIENTE DE HURST por el METODO del RANGO REESCALADO 18.07.2010 22.08.2021											
Partición	Ventana	días SERIE	R / S	LOG (R/S)	LOG (n)	DIM.FRACTAL	(H) HURST	DELTA (H)		Partición	Ventana	días SERIE	R / S	LOG (R/S)	LOG (n)	DIM.FRACTAL	(H) HURST	DELTA (H)			
1:1	6.996	6996	115,84	4,75	8,85	1,46	0,537	-0,01		1:1	6.996	6996	84,34	4,43	8,85	1,50	0,50	0,03			
1:2	3.498	6996	71,10	4,26	8,16	1,48	0,523	0,01		1:2	3.498	6996	70,29	4,25	8,16	1,48	0,52	0,01			
1:4	1.749	6996	50,48	3,92	7,47	1,47	0,525	0,00		1:4	1.749	6996	52,05	3,95	7,47	1,47	0,53	0,00			
1:8	875	6996	33,79	3,52	6,77	1,48	0,520	0,01		1:8	875	6996	32,55	3,48	6,77	1,49	0,51	0,01			
1:16	437	6996	22,31	3,11	6,08	1,49	0,511	0,02		1:16	437	6996	51,67	3,94	6,08	1,35	0,65	-0,12			
1:32	219	6996	16,52	2,80	5,39	1,48	0,521	0,01		1:32	219	6996	34,31	3,54	5,39	1,34	0,66	-0,13			
1:64	109	6996	11,77	2,47	4,69	1,47	0,525	0,00		1:64	109	6996	27,16	3,30	4,69	1,30	0,70	-0,18			
COEFICIENTE de HURST por promedio de las particiones									1,48	0,52	COEFICIENTE de HURST por promedio de las particiones									1,42	0,58
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del R/S									1,46	0,54	COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del R/S									1,34	0,66
PETROLEO (COEFICIENTE DE HURST por el METODO del RANGO REESCALADO 07/12/1993 16/10/2020										PLATA (USD) COEFICIENTE DE HURST por el METODO del RANGO REESCALADO 07/12/1993 02/08/2021											
Partición	Ventana	días SERIE	R / S	LOG (R/S)	LOG (n)	DIM.FRACTAL	(H) HURST	DELTA (H)		Partición	Ventana	días SERIE	R / S	LOG (R/S)	LOG (n)	DIM.FRACTAL	(H) HURST	DELTA (H)			
1:1	6.996	6996	128,23	4,85	8,85	1,45	0,55	-0,02		1:1	6.996	6996	76,52	1,88	3,84	1,51	0,49	0,04			
1:2	3.498	6996	77,83	4,35	8,16	1,47	0,53	-0,01		1:2	3.498	6996	55,99	1,75	3,54	1,51	0,49	0,03			
1:4	1.749	6996	61,42	4,12	7,47	1,45	0,55	-0,02		1:4	1.749	6996	39,75	1,60	3,24	1,51	0,49	0,03			
1:8	875	6996	43,60	3,77	6,77	1,44	0,56	-0,03		1:8	875	6996	28,23	1,45	2,94	1,51	0,49	0,03			
1:16	437	6996	28,78	3,36	6,08	1,45	0,55	-0,02		1:16	437	6996	21,02	1,32	2,64	1,50	0,50	0,03			
1:32	219	6996	19,36	2,96	5,39	1,45	0,55	-0,02		1:32	219	6996	14,56	1,16	2,34	1,50	0,50	0,03			
1:64	109	6996	13,01	2,57	4,69	1,45	0,55	-0,02		1:64	109	6996	10,20	1,01	2,04	1,50	0,50	0,03			
COEFICIENTE de HURST por promedio de las particiones									1,45	0,55	COEFICIENTE de HURST por promedio de las particiones									1,51	0,49
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del R/S									1,46	0,54	COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del R/S									1,50	0,50
NASADQ 10 COEFICIENTE DE HURST por el METODO del RANGO REESCALADO 07/12/1993 02/08/2021										BOVESPA COEFICIENTE DE HURST por el METODO del RANGO REESCALADO 07/12/1993 02/08/2021											
Partición	Ventana	días SERIE	R / S	LOG (R/S)	LOG (n)	DIM.FRACTAL	(H) HURST	DELTA (H)		Partición	Ventana	días SERIE	R / S	LOG (R/S)	LOG (n)	DIM.FRACTAL	(H) HURST	DELTA (H)			
1:1	6.996	6996	153,97	5,04	8,85	1,43	0,57	-0,04		1:1	6.996	6996	238,61	5,47	8,85	1,38	0,62	-0,09			
1:2	3.498	6996	84,87	4,44	8,16	1,46	0,54	-0,02		1:2	3.498	6996	124,19	4,82	8,16	1,41	0,59	-0,06			
1:4	1.749	6996	54,60	4,00	7,47	1,46	0,54	-0,01		1:4	1.749	6996	72,51	4,28	7,47	1,43	0,57	-0,05			
1:8	875	6996	32,10	3,47	6,77	1,49	0,51	0,02		1:8	875	6996	45,75	3,82	6,77	1,44	0,56	-0,04			
1:16	437	6996	21,55	3,07	6,08	1,50	0,50	0,02		1:16	437	6996	27,24	3,30	6,08	1,46	0,54	-0,02			
1:32	219	6996	15,22	2,72	5,39	1,49	0,51	0,02		1:32	219	6996	18,07	2,89	5,39	1,46	0,54	-0,01			
1:64	109	6996	11,01	2,40	4,69	1,49	0,51	0,02		1:64	109	6996	12,18	2,50	4,69	1,47	0,53	0,00			
COEFICIENTE de HURST por promedio de las particiones									1,47	0,53	COEFICIENTE de HURST por promedio de las particiones									1,43	0,57
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del R/S									1,43	0,57	COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del R/S									1,36	0,64

Los datos anteriores se han obtenido según el método de regresión lineal en las gráficas que representan valores de Hurst para las correspondientes particiones.

Graf.17. Coeficientes de Hurst según la pendiente de la recta que forman los distintos valores obtenidos para cada ventana de tiempo.



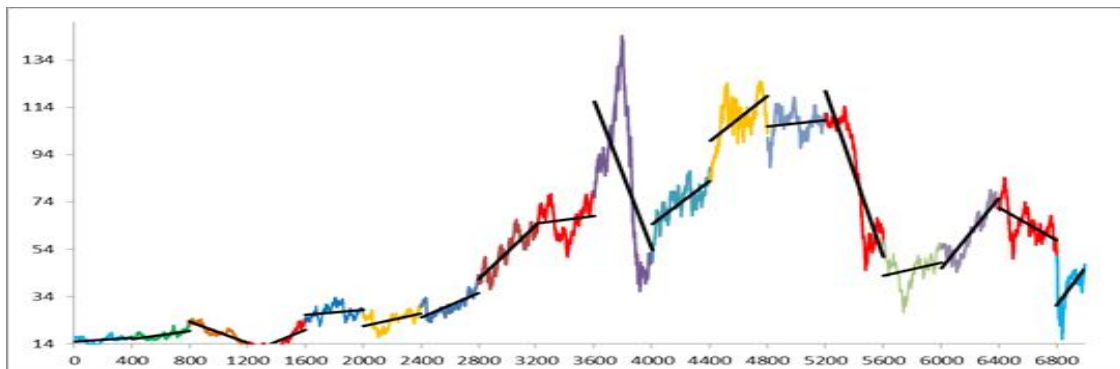
Fuente: Elaboración propia

Realizamos el cálculo del coeficiente escalante según el Método (DFA) obteniendo los siguientes índices de fractalidad para cada uno de los mercados:

Tabla 5. Valores de Coeficiente de escalamiento, para cada partición y mercado (12/1993 a 08/2021).

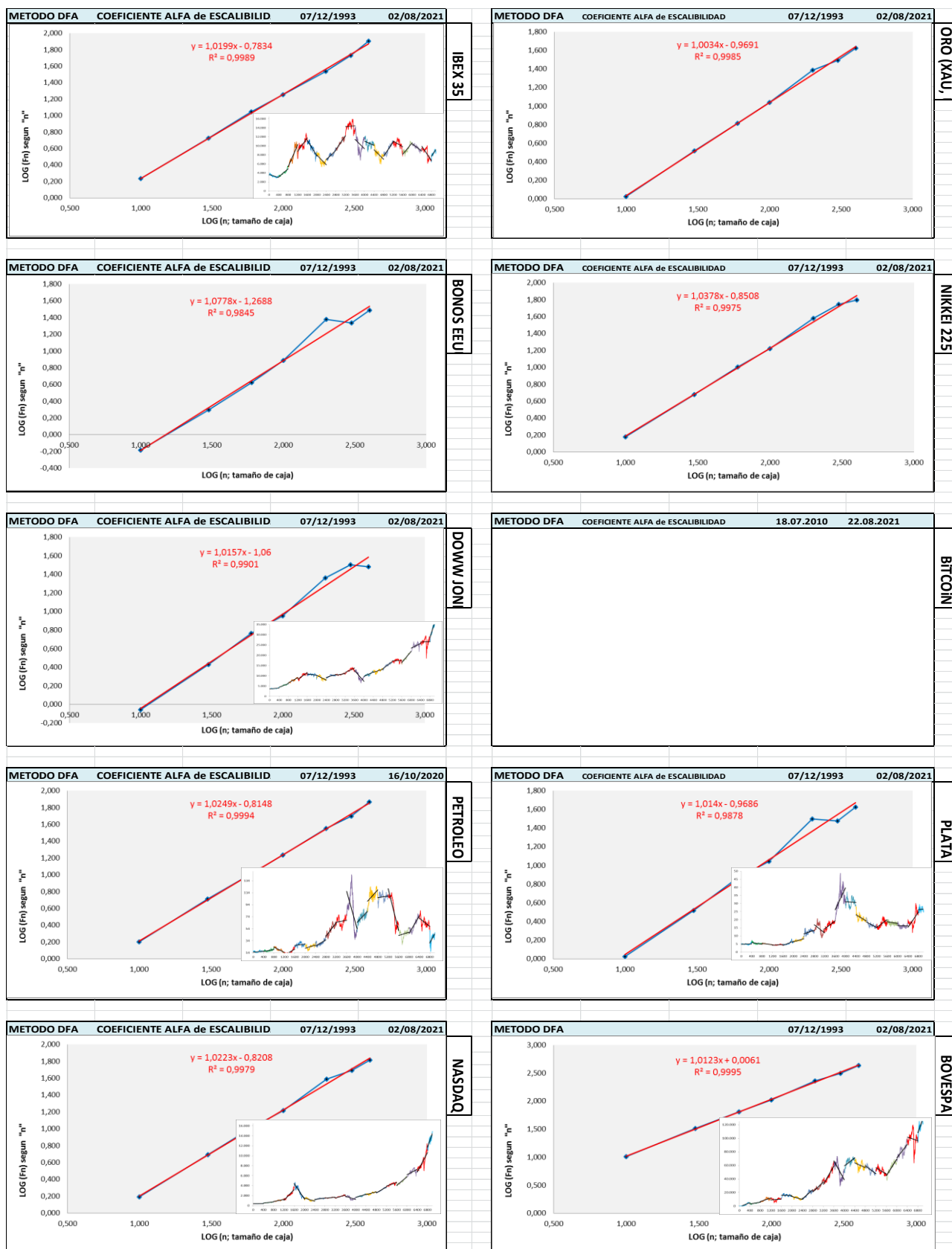
COEFICIENTE DE HURST por el METODO del DETENDRED FLUCTUATION										07/12/1993	02/08/2021
Ventana (n)	nº ventanas	LOG (Fn)	LOG (n)	alfa	H=alfa/2	Dim.Frac=2-H	(H) R/S	DELTA R/S/DFPA			
10	699	0	1,00	1,02	0,510	1,49					
30	233	1	1,48	1,02	0,510	1,49					
60	68	1	1,78	1,02	0,510	1,49					
100	69	1	2,00	1,02	0,510	1,49					
200	34	2	2,30	1,02	0,510	1,49					
300	23	2	2,48	1,02	0,510	1,49					
400	17	2	2,60	1,02	0,510	1,49					
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del DFA										0,510	1,49
10	699	0	1,00	1,08	0,539	1,46					
30	233	0	1,48	1,08	0,539	1,46					
60	68	1	1,78	1,08	0,539	1,46					
100	69	1	2,00	1,08	0,539	1,46					
200	34	1	2,30	1,08	0,539	1,46					
300	23	1	2,48	1,08	0,539	1,46					
400	17	1	2,60	1,08	0,539	1,46					
600	11	2	2,78	1,08	0,539	1,46					
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del DFA										0,539	1,46
10	699	0	1,00	1,02	0,508	1,49					
30	233	0	1,48	1,02	0,508	1,49					
60	68	1	1,78	1,02	0,508	1,49					
100	69	1	2,00	1,02	0,508	1,49					
200	34	1	2,30	1,02	0,508	1,49					
300	23	2	2,48	1,02	0,508	1,49					
400	17	1	2,60	1,02	0,508	1,49					
600	11	2	2,78	1,02	0,508	1,49					
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del DFA										0,508	1,49
10	699	0	1,00	1,02	0,512	1,49					
30	233	1	1,48	1,02	0,510	1,49					
60	68	1	1,78	1,02	0,510	1,49					
100	69	1	2,00	1,02	0,510	1,49					
200	34	2	2,30	1,02	0,510	1,49					
300	23	2	2,48	1,02	0,510	1,49					
400	17	2	2,60	1,02	0,510	1,49					
600	11	2	2,78	1,02	0,510	1,49					
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del DFA										0,510	1,49
10	699	0	1,00	1,02	0,511	1,49					
30	233	1	1,48	1,02	0,511	1,49					
60	68	1	1,78	1,02	0,511	1,49					
100	69	1	2,00	1,02	0,511	1,49					
200	34	2	2,30	1,02	0,511	1,49					
300	23	2	2,48	1,02	0,511	1,49					
400	17	2	2,60	1,02	0,511	1,49					
600	11	2	2,78	1,02	0,511	1,49					
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del DFA										0,511	1,49
10	699	0	1,00	1,00	0,502	1,50					
30	233	1	1,48	1,00	0,502	1,50					
60	68	1	1,78	1,00	0,502	1,50					
100	69	1	2,00	1,00	0,502	1,50					
200	34	1	2,30	1,00	0,502	1,50					
300	23	1	2,48	1,00	0,502	1,50					
400	17	2	2,60	1,00	0,502	1,50					
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del DFA										0,502	1,50
10	699	0	1,00	1,04	0,519	1,48					
30	233	1	1,48	1,04	0,519	1,48					
60	68	1	1,78	1,04	0,519	1,48					
100	69	1	2,00	1,04	0,519	1,48					
200	34	2	2,30	1,04	0,519	1,48					
300	23	2	2,48	1,04	0,519	1,48					
400	17	2	2,60	1,04	0,519	1,48					
600	11	2	2,78	1,04	0,519	1,48					
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del DFA										0,519	1,48
10	699	0	1,00	1,02	0,508	1,49					
30	233	0	1,48	1,02	0,508	1,49					
60	68	1	1,78	1,02	0,508	1,49					
100	69	1	2,00	1,02	0,508	1,49					
200	34	1	2,30	1,02	0,508	1,49					
300	23	2	2,48	1,02	0,508	1,49					
400	17	1	2,60	1,02	0,508	1,49					
600	11	2	2,78	1,02	0,508	1,49					
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del DFA										0,508	1,49
10	699	0	1,00	1,01	0,507	1,49					
30	233	1	1,48	1,01	0,507	1,49					
60	68	1	1,78	1,01	0,507	1,49					
100	69	1	2,00	1,01	0,507	1,49					
200	34	1	2,30	1,01	0,507	1,49					
300	23	1	2,48	1,01	0,507	1,49					
400	17	2	2,60	1,01	0,507	1,49					
600	11	2	2,78	1,01	0,507	1,49					
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del DFA										0,507	1,49
10	699	1	1,00	1,01	0,506	1,49					
30	233	2	1,48	1,01	0,506	1,49					
60	68	2	1,78	1,01	0,506	1,49					
100	69	2	2,00	1,01	0,506	1,49					
200	34	2	2,30	1,01	0,506	1,49					
300	23	2	2,48	1,01	0,506	1,49					
400	17	3	2,60	1,01	0,506	1,49					
600	11	3	2,78	1,01	0,506	1,49					
COEFICIENTE de HURST por REGRESION LINEAL del DFA										0,506	1,49

El Método DFA consiste en seccionar la Serie histórica de los 6996 días, en periodos o ventanas de tiempo según la tendencia local:



Los datos se han obtenido de la representación gráfica con la ecuación de regresión lineal correspondiente:

Gráfico 18. Valores del coeficiente alfa de escalamiento fractal, según el método DFA



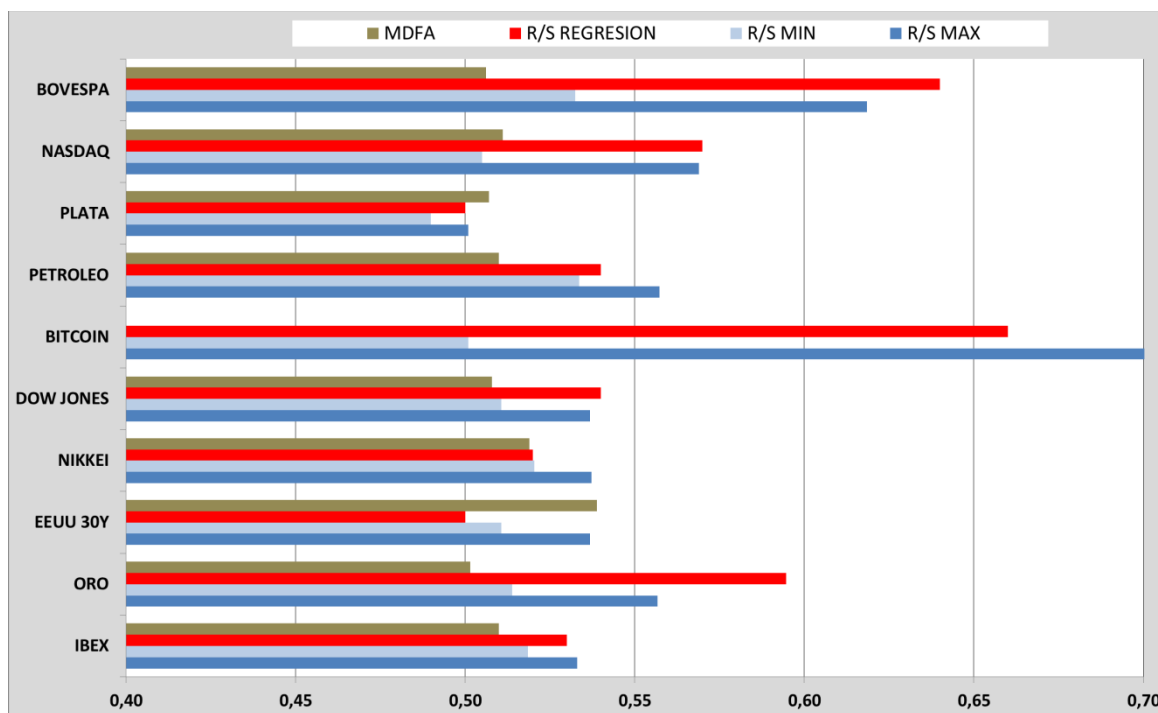
Fuente: Elaboración propia.

Recogemos los valores obtenidos del coeficiente de Hurst por el método del rango reescalado y los valores obtenidos del coeficiente de escalamiento por el método DFA. Ambos son índices de fractalidad de las series.

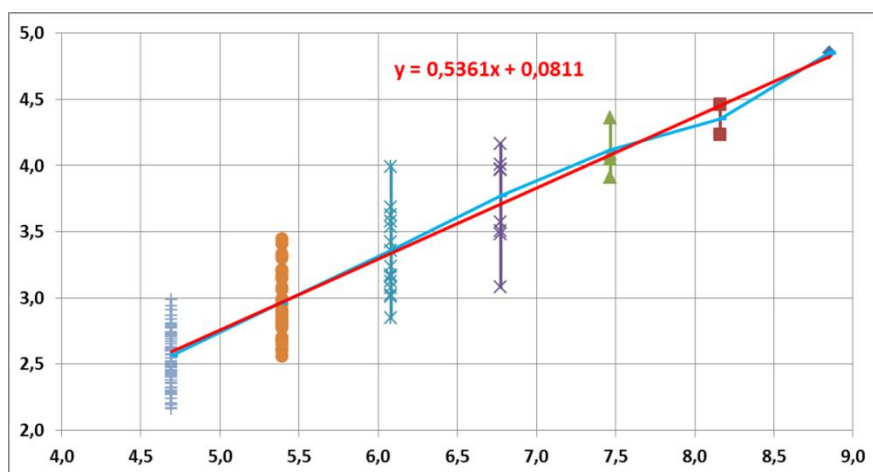
Tabla 6. Valores de Coeficiente de Hurst, según el método usado, para cada partición y mercado (12/1993 a 08/2021).

METODO	IBEX	ORO	EEUU 30Y	NIKKEI	DOW JONES	BITCOIN	PETROLEO	PLATA	NASDAQ	BOVESPA
R/S MAX	0,53	0,56	0,54	0,54	0,54	0,70	0,56	0,50	0,57	0,62
R/S MIN	0,52	0,51	0,51	0,52	0,51	0,50	0,53	0,49	0,50	0,53
R/S REGRESION	0,53	0,59	0,50	0,52	0,54	0,66	0,54	0,50	0,57	0,64
DFA	0,51	0,50	0,54	0,52	0,51		0,51	0,51	0,51	0,51

Gráfico 19. Variaciones del coeficiente de Hurst obtenidas según el método de estimación y rango según el método R/S

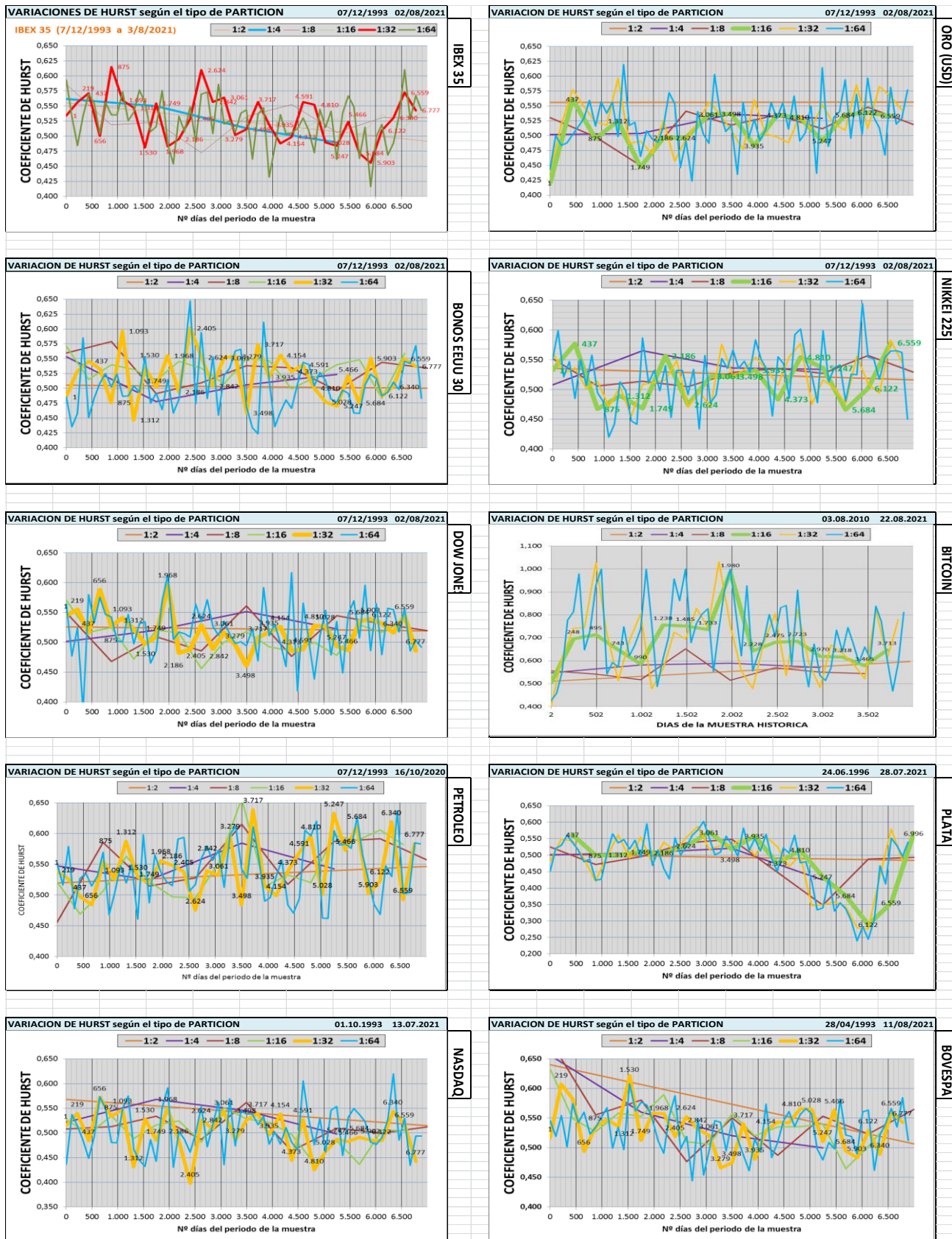


Estas variaciones en la estimación del valor del coeficiente de Hurst, no solo se dieron según el método empleado, sino también dentro del método R/S según la partición (colores distintos) de la Serie histórica. En el detalle del gráfico de regresión lineal ya se podía apreciar esta variación:



Ahora podemos apreciarlas también, en la representación cronológica de la Serie de 6996 días:

Gráf. 20. Variaciones de Hurst, según la partición de ventana de tiempo aplicada, sobre la Serie de tiempo cronológico de 12/1993 a 08/2021.

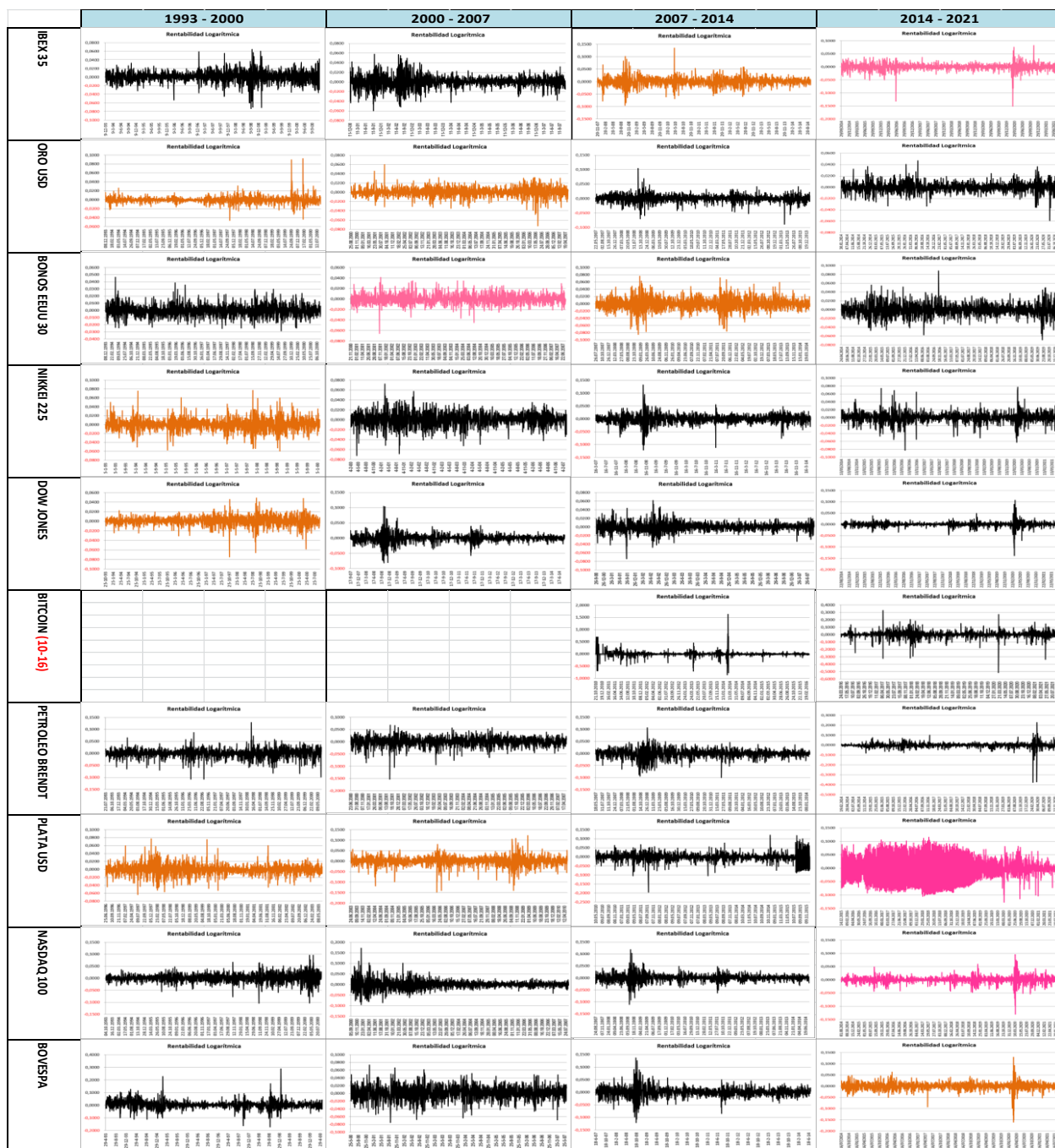


Fuente: elaboración propia

Finalmente, según la relación 1:4 (1.750 días o 7 años como ventana de tiempo) , se puede representar la evolución del rendimiento logarítmico diario como expresión de un tipo de “ruido fractal” que según la teoría , se definen del siguiente modo:

- **Ruido negro:** cuando la serie presenta persistencia o tendencias alejándose de la media o periodos cíclicos afectados por una “memoria larga”, siendo asociada a un $H > 0,5$
- **Ruido blanco o “marrón”** (en honor a Brown): cuando el movimiento de los valores de la serie de tiempo, presenta una aleatoriedad propia del movimiento browniano y $H=0,5$.
- **Ruido rosa:** cuando la Serie de tiempo presenta retornos continuos a la media, que expresan una “memoria corta”, gracias a la antipersistencia de la Serie. Siendo en estos casos, $H < 0,5$.

Gráf.21. Series fractales según el tipo de ruido asociado al valor del coeficiente de Hurst. De 1993 a 2021



Fuente: elaboración propia

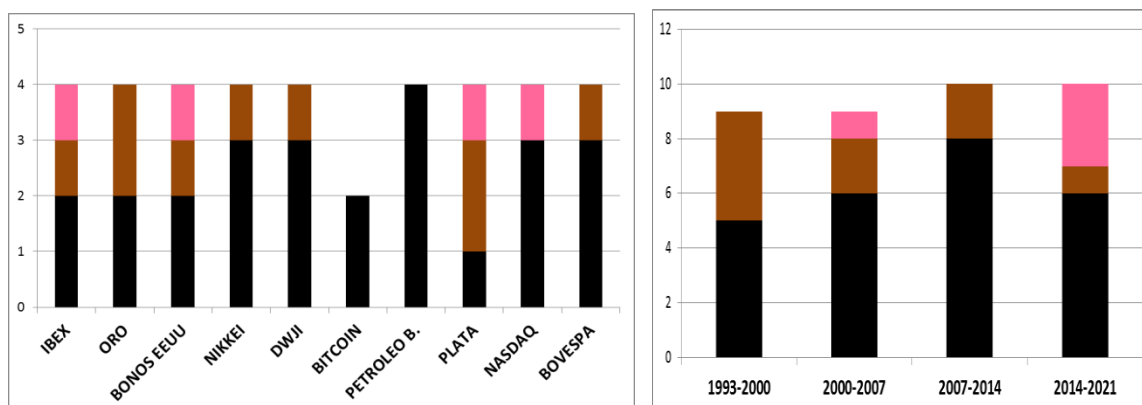
- Se observa que los mercados cambian su frecuencia de ruido, es decir su índice de fractalidad, a lo largo de una serie histórica compuesta en este caso, por ventanas de tiempo de unos 7 años (1750 días).
- Podemos apreciar también como el ruido que más predomina es el “negro”

Tabla 7. Cuadro de tipos de ruido según el mercado y según el periodo cronológico de la Serie

RUIDO	1993-2000	2000-2007	2007-2014	2014-2021
NEGRO	5	6	8	6
MARRON	4	2	2	1
ROSA	0	1	0	3

RUIDO	NEGRO	MARRON	ROSA
IBEX	2	1	1
ORO	2	2	0
BONOS EEUU	2	1	1
NIKKEI	3	1	0
DWJI	3	1	0
BITCOIN	2	-	-
PETROLEO B.	4	0	0
PLATA	1	2	1
NASDAQ	3	0	1
BOVESPA	3	1	0

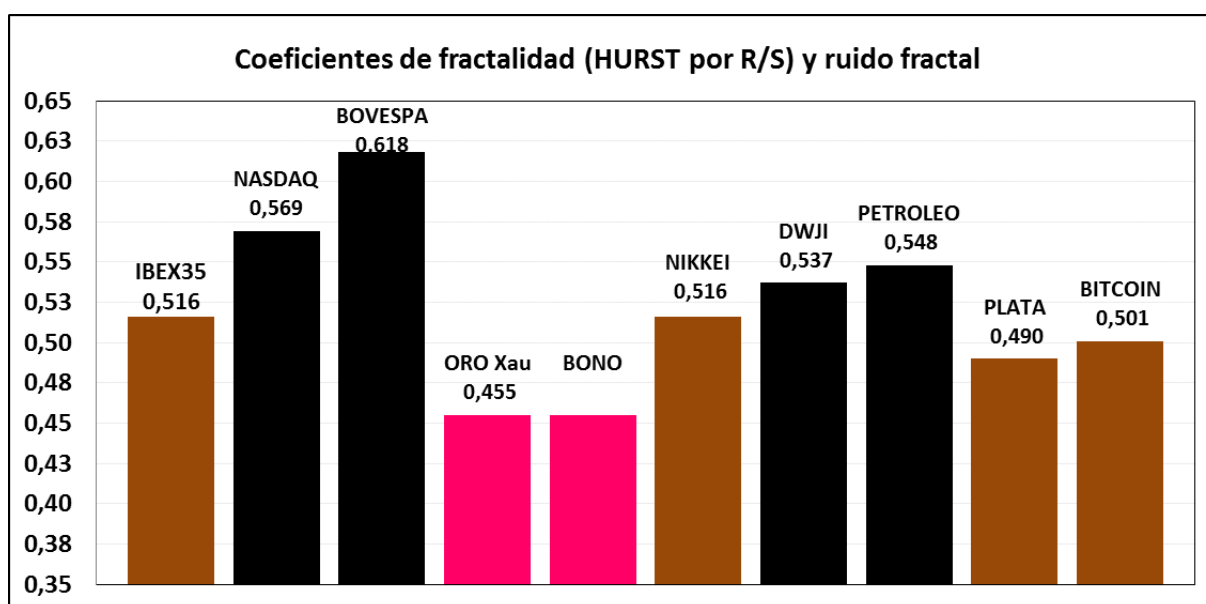
Gráf.22. Secuencia de tipos de ruido según el índice de mercado y según el período histórico



Fuente: elaboración propia

Finalmente esquematizamos los datos analizados sobre los índices de fractalidad a partir del H obtenido por regresión lineal de los R/S de cada partición, en los mercados financieros, en este gráfico. Tomando como rango para determinar $H=0,50 + 0,02 y - 0,02$

Gráf.23. Índices de fractalidad (H) por mercados y su frecuencia de ruido.



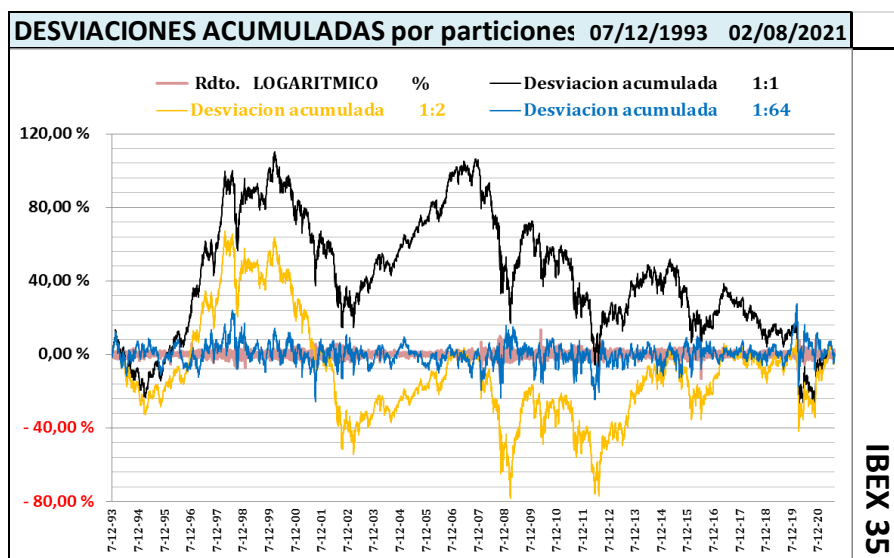
Fuente: elaboración propia

Después de haber analizado la fractalidad en los mercados por los métodos clásicos del Rango reescalado y del DFA, nos preguntamos sobre la relación entre el índice de fractalidad y las ventanas de tiempo en días elegidas como particiones de la Serie histórico. Ya hemos visto el caso en que las ventanas están constituidas por igual número de días. Era el caso por ejemplo de la partición 1:64 en la que se establecieron periodos temporales o ventanas de tiempo de 109 días a lo largo de los 6.996 días que conformaba la serie histórica financiera.

Tras este estudio, nos preguntamos qué sucedería si los periodos de análisis fractal se eligieran según un criterio de “memoria corta” como el de los ciclos de retorno a la media de la Serie temporal. Para ver si existía una relación oculta entre la “memoria larga” (del método del rango reescalado para ventanas de tiempo autosimilares) y la “memoria corta” (de los ciclos de 3 retornos a la media de la serie). Por ello decidí investigar qué sucede cuando analizamos la Variación de Coeficientes Fractales obtenidos en función de la longitud en días para los que se cubre un ciclo de tres retornos a la media de la Serie temporal.

Seleccionamos los días o fechas de la Serie histórica, en los que el ajuste a la media es igual a cero (del rendimiento logarítmico diario). Tomando como referencia la desviación standart acumulada de la serie de 6.996 días:

Gráf.24. Desviación acumulada según la partición elegida sobre la serie histórica de 6.996 días para el mercado IBEX35



En el caso del IBEX35 el filtro de esos días nos ofrece la siguiente Tabla 8:

IBEX 35 Historical Data						07/12/1993 02/08/2021		LN(R2/R1)	Y = X · m	Suma de Y
Id	Date	Open	High	Low	Close	Valor de cierre	Volumen:10	Rdto.	Ajuste a	Desviacion acumulada
								LOGARITMICO %	MEDIA	1:1
368	31/05/1995	3.226,0	3.228,2	3.195,5	3.226,5	3.226,5	0	0,02 %	0,00%	-11,89 %
391	03/07/1995	3.219,1	3.219,6	3.201,1	3.219,6	3.219,6	0	0,02 %	0,00%	-12,41 %
517	04/01/1996	3.717,7	3.725,8	3.700,3	3.718,2	3.718,2	0	0,01 %	0,00%	0,32 %
719	22/10/1996	4.402,6	4.410,7	4.384,8	4.403,4	4.403,4	0	0,02 %	0,00%	14,55 %
996	02/12/1997	7.136,0	7.161,7	7.088,4	7.136,6	7.136,6	0	0,01 %	0,00%	59,16 %
1143	10/07/1998	10.635,3	10.683,9	10.530,8	10.636,7	10.636,7	0	0,01 %	0,00%	97,12 %
1328	09/04/1999	10.100,6	10.239,1	10.009,5	10.101,9	10.101,9	0	0,01 %	0,00%	89,50 %
1559	08/03/2000	12.667,2	12.717,8	12.472,7	12.668,3	12.668,3	0	0,01 %	0,00%	109,07 %
1701	27/09/2000	10.956,0	11.047,8	10.899,1	10.957,6	10.957,6	6.366.500	0,01 %	0,00%	92,68 %
1772	15/01/2001	9.890,2	9.936,5	9.814,5	9.892,0	9.892,0	11.562.400	0,02 %	0,00%	81,51 %
2996	29/11/2005	10.604,2	10.657,9	10.583,0	10.620,1	10.620,1	120.000	0,01 %	0,00%	72,36 %
3101	28/04/2006	11.876,2	11.913,9	11.812,9	11.892,5	11.892,5	177.800	0,01 %	0,00%	82,28 %
3153	12/07/2006	11.569,5	11.630,9	11.525,8	11.537,3	11.537,3	125.400	0,02 %	0,00%	78,56 %
3311	22/02/2007	14.850,8	14.880,7	14.761,7	14.791,3	14.791,3	182.800	0,02 %	0,00%	101,31 %
3490	05/11/2007	15.708,8	15.846,4	15.685,5	15.825,9	15.825,9	235.000	0,01 %	0,00%	105,69 %
3847	06/04/2009	8.435,0	8.502,2	8.224,5	8.321,1	8.321,1	276.000	0,01 %	0,00%	36,67 %
4240	20/10/2010	10.841,1	10.915,3	10.806,7	10.896,9	10.896,9	172.940.000	0,01 %	0,00%	58,42 %
4347	22/03/2011	10.584,8	10.734,3	10.549,7	10.576,1	10.576,1	269.854.000	0,02 %	0,00%	54,01 %
4363	13/04/2011	10.814,6	10.867,1	10.767,6	10.786,0	10.786,0	219.983.000	0,01 %	0,00%	55,76 %
5056	30/12/2013	9.919,5	9.949,8	9.864,8	9.901,9	9.901,9	188.242.900	0,02 %	0,00%	38,01 %
5403	13/05/2015	11.366,0	11.430,9	11.282,4	11.324,6	11.324,6	249.275.600	0,02 %	0,00%	46,83 %
5839	20/01/2017	9.377,5	9.439,0	9.345,2	9.380,1	9.380,1	238.865.500	0,01 %	0,00%	22,20 %
5930	01/06/2017	10.891,6	10.909,1	10.836,4	10.881,0	10.881,0	434.893.600	0,01 %	0,00%	35,84 %
6018	03/10/2017	10.250,6	10.276,6	10.151,1	10.257,5	10.257,5	173.270.700	0,02 %	0,00%	28,77 %
6086	10/01/2018	10.423,2	10.474,9	10.399,1	10.428,3	10.428,3	210.844.800	0,02 %	0,00%	29,52 %
6221	23/07/2018	9.699,7	9.747,6	9.661,4	9.726,1	9.726,1	116.977.600	0,01 %	0,00%	20,75 %
6561	19/11/2019	9.288,0	9.327,5	9.234,4	9.259,2	9.259,2	121.796.100	0,01 %	0,00%	11,32 %
6945	24/05/2021	9.230,4	9.243,2	9.170,8	9.205,5	9.205,5	91.842.700	0,02 %	0,00%	5,64 %
6966	22/06/2021	9.073,7	9.073,7	8.998,8	9.053,3	9.053,3	137.668.000	0,02 %	0,00%	3,69 %
6971	29/06/2021	8.897,4	8.957,6	8.884,8	8.915,1	8.915,1	142.239.100	0,02 %	0,00%	2,09 %

La selección de estas fechas, nos sirve para construir los “ciclos de 3 retornos a la media” sobre el ajuste igual a cero respecto a la desviación acumulada de la serie de 6.996 días. Y esto se puede ver gráficamente de este modo (los puntos verdes dibujan un hilo de ciclos de retornos a la media):

Gráf.25. Ciclos de 3 retornos de ajuste cero a la desviación acumulada.



Esto nos permite obtener la Tabla de los ciclos de 3 retornos a la media (donde cada periodo de tiempo en forma de ciclo, está constituido por tres fechas).

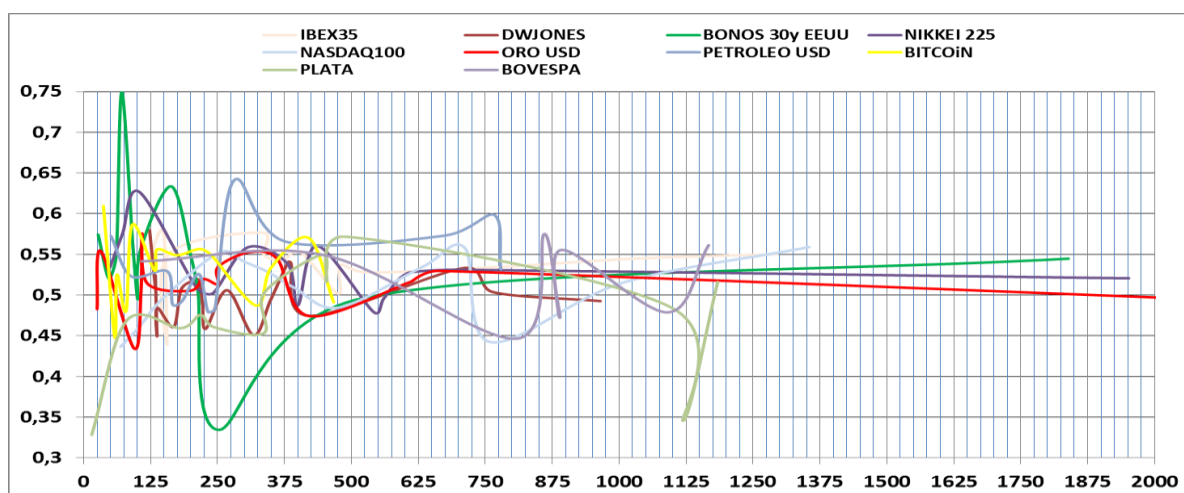
Habiendo realizado las mismas operaciones para todas las series históricas de los distintos índices de mercado estudiados, obtenemos la siguiente Tabla resumen:

Tabla 9. Resumen de valores de Hurst para los ciclos de tres retornos a la media, por mercados.

Dias del ciclo	IBEX	Dias del ciclo	DWJI	Dias del ciclo	BONOS EEUU	Dias del ciclo	NIKKEI 225	Dias del ciclo	NASDAQ 100	Dias del ciclo	ORO onza	Dias del ciclo	PETROLEO BRENDT	Dias del ciclo	PLATA	Dias del ciclo	BOVESPA	Dias del ciclo	BITCOIN
123	0,55	123	0,58	27	0,57	49	0,53	69	0,44	25	0,48	51	0,57	15	0,3284	109	0,54	36,86	0,61
149	0,58	131	0,53	47	0,52	72	0,57	104	0,46	32	0,55	88	0,52	80	0,4686	450	0,55	57,94	0,45
156	0,44	134	0,51	61	0,55	104	0,63	151	0,50	94	0,43	156	0,53	181	0,4594	809	0,45	61,93	0,53
157	0,55	134	0,52	71	0,75	210	0,51	254	0,55	107	0,50	166	0,49	218	0,4755	860	0,58	79,00	0,48
332	0,58	137	0,45	92	0,56	241	0,50	300	0,54	109	0,58	184	0,49	244	0,4606	889	0,47	90,88	0,59
337	0,55	137	0,48	101	0,49	306	0,56	344	0,53	118	0,51	215	0,53	337	0,4534	893	0,56	131,95	0,53
373	0,54	168	0,46	105	0,55	381	0,54	394	0,51	198	0,51	232	0,48	337	0,5029	1090	0,48	137,00	0,56
405	0,55	182	0,51	163	0,63	400	0,49	476	0,48	223	0,52	245	0,48	445	0,5497	1167	0,56	174,00	0,55
475	0,50	206	0,52	201	0,55	436	0,56	632	0,53	251	0,51	281	0,64	454	0,5166			217,00	0,56
479	0,54	215	0,52	213	0,51	542	0,48	712	0,56	251	0,53	378	0,57	489	0,5718			238,86	0,55
527	0,53	222	0,49	252	0,33	560	0,50	759	0,44	309	0,55	673	0,57	1100	0,4839			321,97	0,49
750	0,53	228	0,46	525	0,50	606	0,53	1008	0,52	361	0,54	767	0,60	1120	0,3459			349,86	0,53
1040	0,55	268	0,51	1839	0,54	695	0,53	1355	0,56	421	0,47	779	0,53	1184	0,5162			419,99	0,57
1295	0,55	317	0,45			1952	0,52			612	0,52							467,00	0,49

Y posteriormente graficamos los datos obtenidos (ver el Anexo

Gráf.26. Coeficiente de Hurst según la duración de los ciclos de 3 retornos a la media.



Fuente: elaboración propia.

Observamos como las variaciones del valor de Hurst (índice de fractalidad) siguen un patrón similar en casi todos los mercados analizados. Este patrón consiste en una intermitencia truculenta del valor de Hurst, cuando los ciclos son de 250 días como máximo. Y posteriormente, el valor de Hurst se va amortiguando para ciclos de 375 días o más. La tendencia a la estabilidad en un valor de Hurst se produce para ciclos de unos 1125 días, convergiendo el Coeficiente fractal con los valores estimados mediante el método tradicional del Rango Reescalado.

3.3 Conclusiones

Se pretendía confirmar y verificar la 3ª Hipótesis de este TFM: Los mercados financieros tienen en la mayoría de casos una memoria larga fractal que los hace autosimilares. Por ello no puede decirse como interpreta la Teoría de Mercados eficientes que éstos se comporten, en la mayoría de casos, aleatoriamente.

Pero primero quiero hacer unas consideraciones sobre los métodos de estimación del índice de fractalidad:

- El método del rango reescalado se demuestra más verosímil y eficiente que el método DFA para el cálculo de la fractalidad de las series temporales.
- El método del rango reescalado (propuesto por Mandelbrot) es un método que debe ajustarse debido a la gran variación de resultados, dentro de cada ventana de tiempo observada.
- El método del rango reescalado, varía además según el tamaño de la ventana ("n" en días) analizado. Por ejemplo, las particiones de 1:2, 1:2, 1:4, 1:8 nos ofrecen valores de Hurst a-nexactos. Mientras que las particiones más pequeñas como 1:132 y 1:64 ofrecen valores más exactos para determinar el índice de fractalidad de los mercados.
- Hemos experimentado otro método, que pretendía establecer alguna relación entre la memoria corta (de ciclos de 3 retornos a la media, a modo de onda) y la memoria larga del método del rango reescalado, y nos ha ofrecido un posible camino para experimentar nuevos análisis, que pretendan combinar la teoría de Mercados Eficientes y la teoría de Mercados fractales,

Respecto a la Hipótesis 3ª que pretendía comprobar este apartado del TFM, puedo extraer las siguientes conclusiones:

- Si analizamos la fractalidad de los índices de mercado estudiados, comprobamos que durante el período histórico de 1993 a 2021, los mercados pasan por distintos estados de fractalidad. En los que predomina el "ruido negro" las series con nivel de persistencia que manifiestan tendencias a largo plazo, alejándose de la media. Esto induce a pensar en que se manifiestan periodos cíclicos afectados por una "memoria larga", siendo asociada a un $H > 0,5$. Y que por lo tanto, la teoría de Mercados Eficientes no es realista.
- Se puede añadir que en el contexto de la serie histórica de 1993 a 2021, los mercados en general, presentan sobre todo en el periodo más reciente de 2014 a 2021, una propensión a manifestarse o bien persistentes o bien anti-persistentes, en perjuicio del movimiento aleatorio o browniano.
- Si analizamos los distintos índices de mercado según su sensibilidad fractal, podemos clasificar éstos en tres grupos: los de fractalidad persistente con tendencias de memoria larga (NASDAQ, BOVESPA, DWJI, PETROLEO); los de comportamiento aleatorio o movimiento browniano con H cercanos a 0,50 (IBEX35, NIKKEI 225, PLATA, BITCOIN) y los que manifiestan movimientos de constante retorno a la media o antipersistencia con valores de $H < 0,5$ (ORO y BONO EEUU y).
- Según estos datos, la Teoría de los Mercados Eficientes sería solamente adecuada según el tipo de mercado (IBEX, NIKKEI, PLATA y BITCOIN) asociada al movimiento aleatorio del mercado y la imposibilidad de estrategias de inversión puesto que el precio presente refleja el valor de mercado sin consideraciones a una memoria larga o a una tendencia persistente que recuerde la historia de la serie de rendimientos o precios.
- Del mismo modo, la Teoría de Mercados Fractales, donde el inversor puede pensar en estrategias a medio y largo plazo, sería solo adecuada para mercados como: NASDAQ, BOVESPA, DWJI y PETROLEO.

4. LA RAZ CUADRADA DEL TIEMPO y LA VOLATILIDAD DEL MERCADO.

4.1 Metodología

Partimos inicialmente de la teoría de Einstein, acerca de la desviación standart, que expresaría el paseo aleatorio o movimiento browniano (de una mota de polen en la superficie de un fluido). Y que según la ecuación einsteniana la desviación que sufre la partícula de polen es proporcional a la raíz cuadrada del suceder del tiempo.

Para estudiar esta teoría del movimiento de los valores de la serie temporal financiera, establecemos una analogía entre los rendimientos logarítmicos diarios como partículas del “polen financiero” que se mueven en la superficie del mercado de inversores.

Estudiamos como afecta la deformación del tiempo (en palabras de Mandelbrot) a las series de tiempo, en este caso a la serie financiera de rentabilidades logarítmicas diarias del IBEX35 para el periodo de 6.996 días.

4.2 Cálculos

Partimos de la hipótesis de que cuando el tiempo es “tiempo de Cronos” o tiempo lineal de la serie financiera, el tiempo no se deforma y el movimiento es aleatorio o con índice de fractalidad $H = 0,5$. A partir de esta premisa de trabajo, calculo el “tiempo de Aión” o tiempo deformado por los rendimientos diarios del IBEX35. Y establezco la formulación siguiente:

Tiempo del mercado = $(H / 0,50) \times$ tiempo. Donde H es el valor de Hurst obtenido según el método del rango reescalado para cada ventana de tiempo, y el “tiempo” es el número de días de cada ventana analizada.

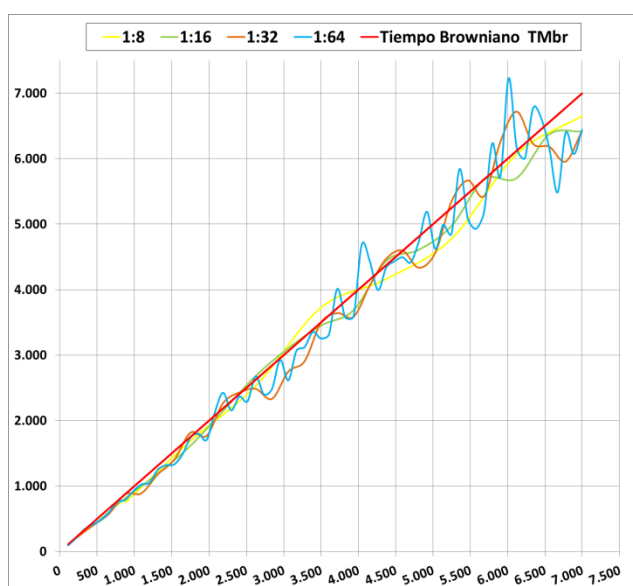
Obteniendo la siguiente Tabla para cada partición (1:1, 1:2, 1:4, 1:8, 1:16, 1:32 y 1:64)

Si graficamos la Tabla anterior para todas las particiones analizadas de la Serie histórica de tiempo, obtendremos la siguiente recta.

Tabla 10. Valores del tiempo mercantil para cada partición según el coeficiente de Hurst.

Gráf.27. Relación entre tiempo cronológico y tiempo deformado fractal, en el IBEX35

Particiones	Tiempo	COEF. HURST	Tiempo Mercantil	
			$Tm=(H/0,5)*Kronos$	Tiempo Browniano TMr
1:1	6996	0,52	6.762	6996
1:2	3.498	0,55	3.196	3498
1:2	6.996	0,49	7.176	6996
1:4	1.749	0,56	1.565	1749
1:4	3.498	0,54	3.229	3498
1:4	5.247	0,51	5.185	5247
1:4	6.996	0,50	7.064	6996
1:8	875	0,59	746	875
1:8	1.749	0,52	1.688	1749
1:8	2.624	0,52	2.528	2624
1:8	3.498	0,47	3.724	3498
1:8	4.373	0,53	4.162	4373
1:8	5.247	0,55	4.775	5247
1:8	6.122	0,50	6.070	6122
1:8	6.996	0,53	6.651	6996

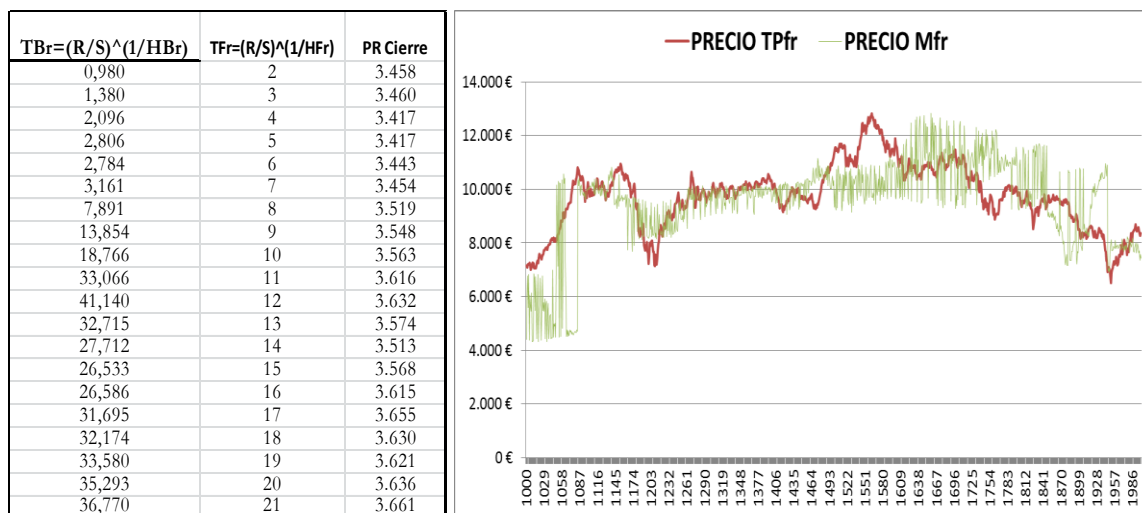


Fuente: elaboración propia

Si el IBEX35 siguiera un movimiento aleatorio asociado a $H=0,5$ el tiempo del eje X coincidiría con el tiempo del eje y, y trazaría una recta (color rojo) que expresa un movimiento browniano. Pero se comprueba que no es así y que el IBEX35 “deforma” el tiempo de Cronos, según su Coeficiente fractal de Hurst para cada tamaño de ventana en días analizada.

Si ahora aplicamos la conversión entre “tiempo browniano” y “tiempo fractal” a través de las siguientes ecuaciones de la tabla, para la serie diaria de los “precios de cierre” del IBEX35. Obtenemos una gráfica de cómo serían los “precios de cierre” diarios (en rojo) si el IBEX siguiera un movimiento completamente aleatorio (color verde).

Graf.28. Simulación de 1.000 días con los precios diarios de un IBEX35 de movimiento browniano



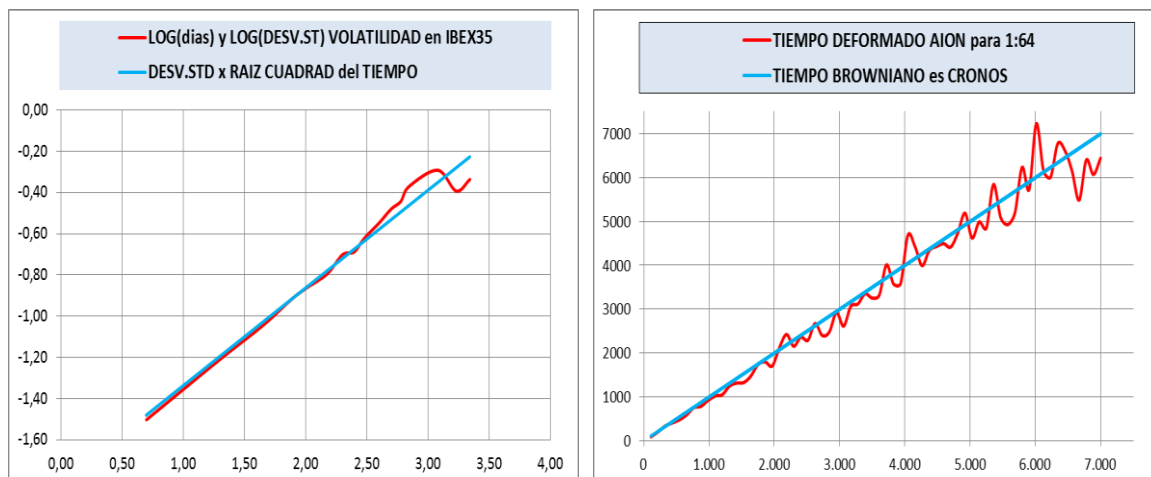
Fuente: elaboración propia

Para completar el análisis, establecemos una comparación entre la “deformación” del tiempo calculada por el método anteriormente indicada, y la calculada según la fórmula tradicional basada en la ecuación de Einstein: LOG (días) y LOG (DESV.EST).

Tabla 11. Valores de Logaritmo (tiempo) y Logaritmo(S) para la serie del IBEX35 de 2.200 días

DIAS	DESVEST	LOG(Dias)	LOG(DSVST)
5	0,0314	0,6990	-1,5031
20	0,0617	1,3010	-1,2097
45	0,0903	1,6532	-1,0443
75	0,1192	1,8751	-0,9237
100	0,1361	2,0000	-0,8661
150	0,1601	2,1761	-0,7956
200	0,1986	2,3010	-0,7020
250	0,2051	2,3979	-0,6880
300	0,2377	2,4771	-0,6240
400	0,2838	2,6021	-0,5470
500	0,3309	2,6990	-0,4803
600	0,3603	2,7782	-0,4433
700	0,4258	2,8451	-0,3708
1200	0,5110	3,0792	-0,2916
1700	0,4048	3,2304	-0,3928
2200	0,4606	3,3424	-0,3367

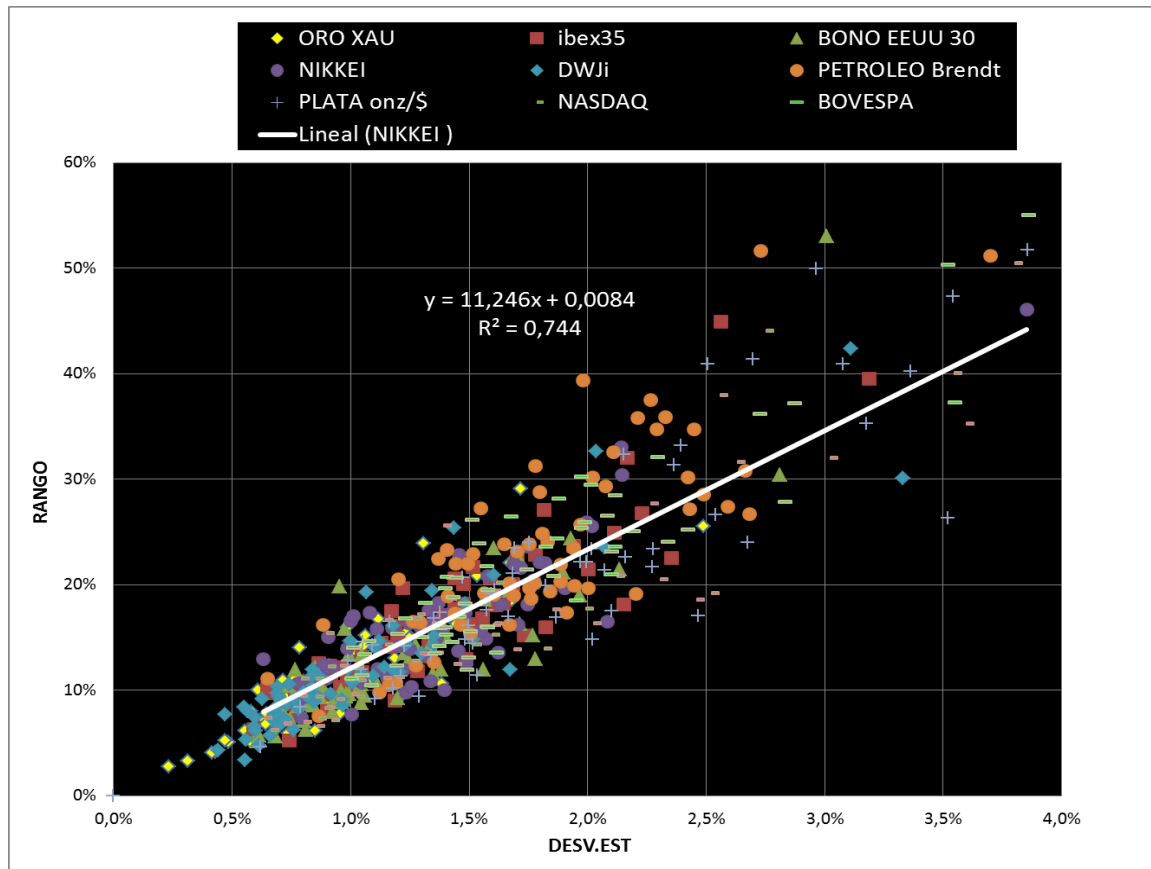
Graf.29. Comparación de deformaciones del tiempo entre los dos métodos de análisis



La volatilidad en las series financieras, se expresa como la desviación standart de los rendimientos logarítmicos diarios. Por eso queremos ahora investigar sobre la “volatilidad” en relación al coeficiente fractal. Puesto que el coeficiente de Hurst, como estimación de la fractalidad de la serie financiera, se obtiene mediante el método del rango reescalado cuya relación fundamental es el RANGO dividido entre la DESVIACION STANDART.

Primero vamos a analizar la relación entre RANGO y DESVIACION STANDART para una escala de partición (ventana de tiempo) 1:64. Es decir, considerando qué sucede en periodos de 108 días durante 6.996 jornadas de mercado.

Gráf 30. Relación entre RANGO y DESV.ST para periodos de 108 días en la Serie histórica de 6996 días.



Fuente: elaboración propia

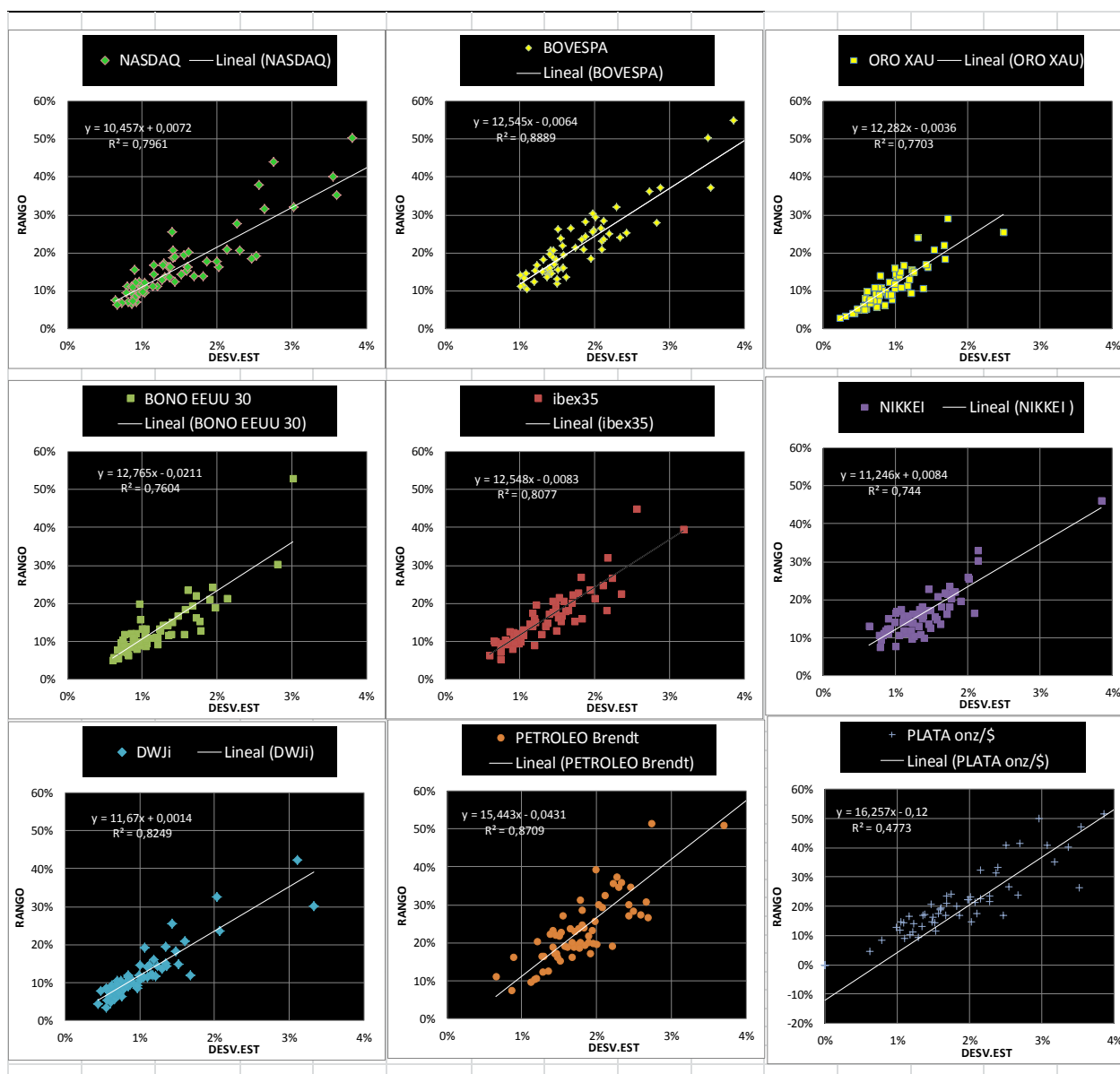
Y observamos que hay una relación lineal en todos los mercados analizados. Cuyas ecuaciones para cada índice de mercado, nos constatan que el RANGO es entre 10,5 y 15,5 veces la DESVIACION STANDART. En la que el 10,50 es asociado al H=0,50 (azar) del NIKKEI.

Tabla 12. Ecuaciones lineales que relacionan Hurst, Rango y DesvSt.

Tiempo de los periodos=108 días		10,39 días			INDICE	y=C . x + K		108 días	
RAIZ(C)t	y= C* x+K	LN(C):LN(t)	Escalam t		MERCADO	Rango = C . DESVST + K	E(HURST)	Escalar tiempo	RAIZ (tiempo)
IBEX35	12,55	-0,008	0,540	108^(0,54)	IBEX35	y = 12,55 x -0,008	0,540	108^(0,54)	12,53
NASDAQ	10,46	0,007	0,501	108^(0,50)	NASDAQ	y = 10,46 x + 0,007	0,501	108^(0,50)	10,39
BOVESPA	12,55	-0,006	0,540	108^(0,54)	BOVESPA	y = 12,55 x -0,010	0,540	108^(0,54)	12,53
ORO Xau	12,28	-0,004	0,536	108^(0,54)	ORO Xau	y = 12,28 x -0,004	0,536	108^(0,54)	12,53
BONO EU 30	12,76	-0,021	0,544	108^(0,54)	BONO EEUU 30	y = 12,76 x -0,021	0,544	108^(0,54)	12,53
NIKKEI	11,25	0,008	0,517	108^(0,52)	NIKKEI	y = 11,25 x +0,008	0,517	108^(0,52)	11,41
DWJI	11,67	0,001	0,525	108^(0,52)	DWJI	y = 11,67 x -0,001	0,525	108^(0,52)	11,41
PETROLEO	15,44	-0,043	0,585	108^(0,58)	PETROLEO	y = 15,44 x -0,043	0,585	108^(0,58)	15,11
PLATA	11,96	-0,100	0,530	108^(0,53)	PLATA	y = 11,96 x -0,100	0,530	108^(0,53)	11,96

Se obtiene una recta entre todos los índices que se ajusta al $R^2 = 0,74$ tal como $y = 11,25 x + C$

Gráf.31. Relación entre Rango y Desv.Standar en periodos de 108 días para cada mercado.



Fuente: elaboración propia

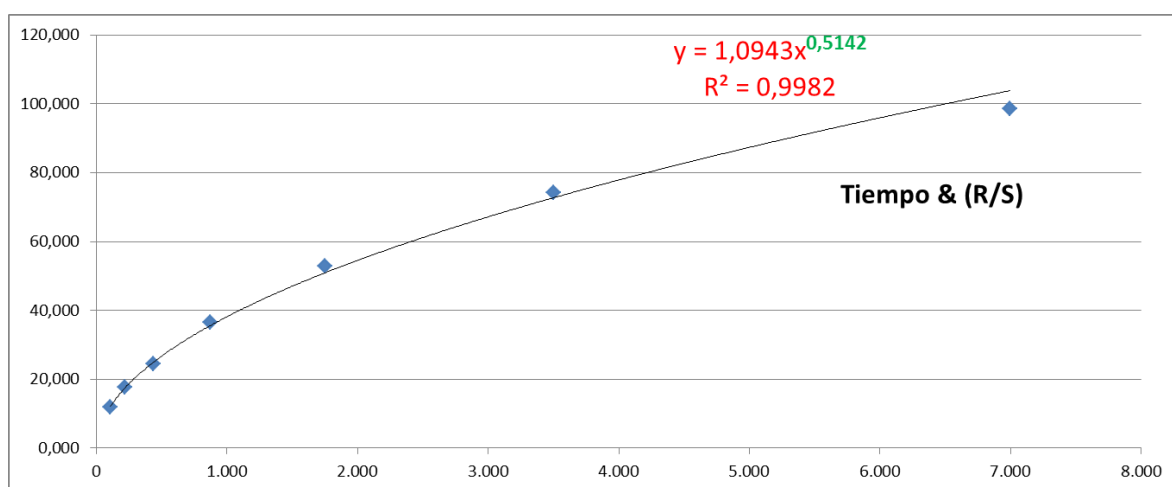
Ahora es el momento de preguntarse, qué sucede para las otras particiones de la Serie histórica de tiempo de 6.996 días (de 1993 a 2021). En el caso del IBEX35, obtenemos la siguiente Tabla de valores:

Tabla 13. Relación Rango/ Desviación Standart para distintas ventanas de tiempo.

Periodo	MEDIA	DESVEST	LN(t)	LN(r/s)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S) & LN(t)	LN(493,29)	LN(493,29/LN(t))
109		0,013	4,694	2,476	0,089	11,893	0,527	6,201	1,321
219		0,014	5,387	2,872	0,130	17,665	0,533	6,201	1,151
437		0,014	6,081	3,201	0,181	24,561	0,526	6,201	1,020
875		0,014	6,774	3,599	0,266	36,545	0,531	6,201	0,915
1.749		0,014	7,467	3,970	0,378	52,962	0,532	6,201	0,830
3.498		0,014	8,160	4,306	0,520	74,133	0,528	6,201	0,760
6.996		0,013	8,853	4,590		98,523	0,518	6,201	0,700

Y obtenemos este gráfico que pone en relación el eje y (R/S) con el eje x ("n" días para cada ventana de tiempo).

Gráf.32. Relación entre Rango Reescalado y el tiempo en días

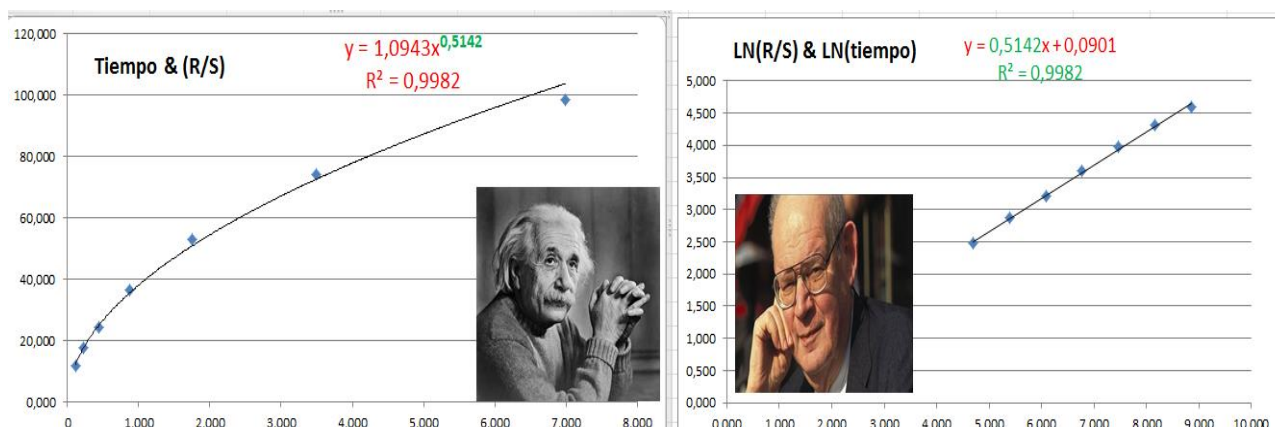


Fuente: elaboración propia

Si nos fijamos en la ecuación de potencial que describe perfectamente esta relación del (R/S) con el tiempo, se observa que el exponente (en verde) es el coeficiente de Hurst o índice de fractalidad del IBEX35 para la Serie histórica de 6.996 días. Y este valor coincide perfectamente, con el valor estimado mediante el método de regresión lineal de Mandelbrot.

Pero si analizamos bien la ecuación de potencial, ésta nos recuerda a la formulación de Einstein sobre la raíz cuadrada del tiempo y su relación con la desviación standart.

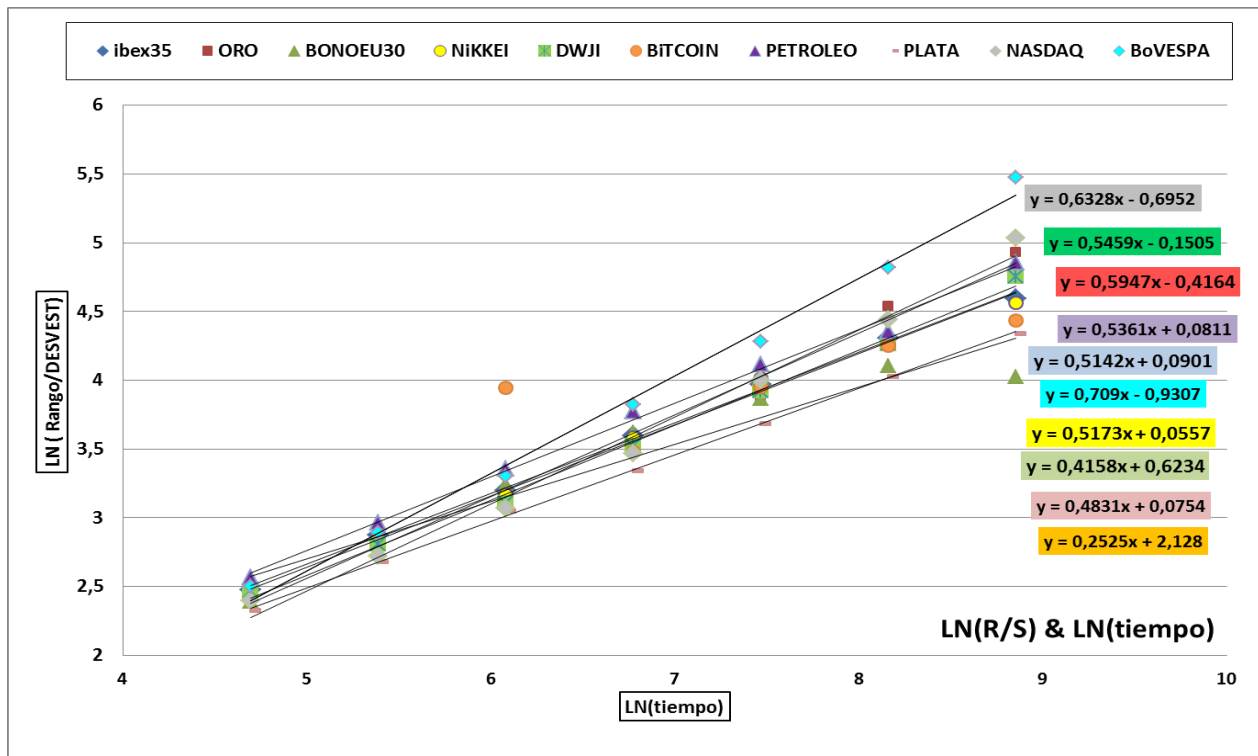
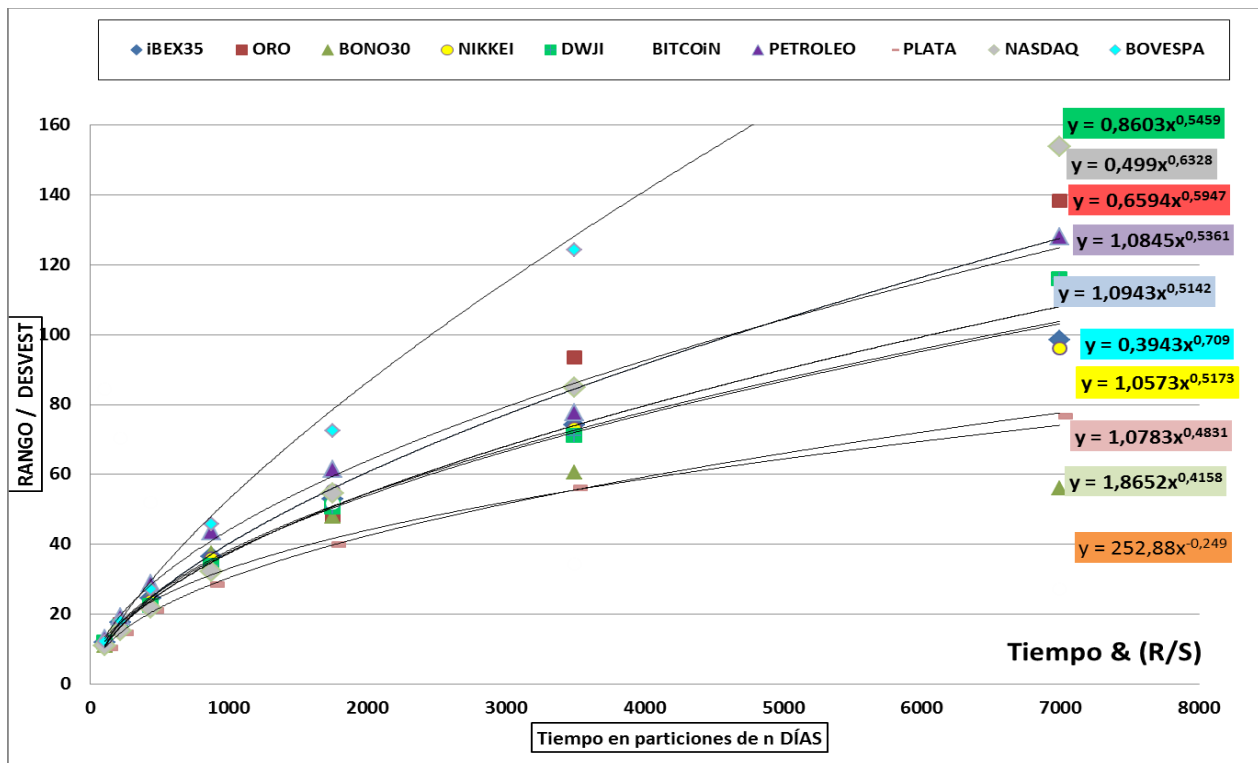
Gráf.33. Analogía entre la ecuación de Einstein y el método de Mandelbrot del LN (R/S): LN(n)



Fuente: elaboración propia

Si consideramos que la ecuación de potencial: $y = \text{Constante} * \text{Tiempo}^{\text{Hurst}}$ Y tenemos en cuenta que la "y" = (Rango/Desviación Standart). De modo que pueda leerse: **el Rango es igual a "C" veces la Desviación Standart multiplicado por el tiempo elevado a un exponente fraccionario**. Si aplicamos este procedimiento a todos los índices de mercado analizados obtendremos los siguientes gráficos.

Grafic.34 y Graf.35 Coeficientes de Hurst por la ecuación de Einstein y por el método de Mandelbrot.



Fuente: elaboración propia

Hemos llegado al mismo punto, con Einstein y con Mandelbrot: obtener el índice fractal de los distintos mercados financieros. Pero con la ecuación lineal de Mandelbrot, no podemos ir más allá.

Si tomamos la ecuación de Einstein, podemos estimar el valor de (R/S) para “n” días de una hipotética ventana de tiempo. Lo que supone para el inversor un valioso dato, creo.

Si recogemos los datos obtenidos por las ecuaciones de potencial, que describen el comportamiento fractal de cada mercado bursátil, podemos estimar con ellos la relación proporcional entre el Rango de los rendimientos logarítmicos diarios y la Desviación Standart asociada, para un horizonte de tiempo que desee el inversor.

Tomemos el ejemplo del IBEX35, considerando que partimos de la ecuación de potencial que lo define y caracteriza su fractalidad:

Tabla 14. Estimación de (R/S) en función del coeficiente de Hurst para el IBEX35, para cualquier horizonte de tiempo del inversor.

IBEX	$y=1,0943 * x^{0,5142}$		x= n días de la ventana de tiempo			y= RANGO / DESVEST	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)
6996	0,013	8,853	4,590		98,5	0,518	103,8
3498	0,014	8,160	4,306	0,520	74,1	0,528	72,7
1749	0,014	7,467	3,970	0,378	53,0	0,532	50,9
875	0,014	6,774	3,599	0,266	36,5	0,531	35,6
437	0,014	6,081	3,201	0,181	24,6	0,526	24,9
219	0,014	5,387	2,872	0,130	17,7	0,533	17,5
109	0,013	4,694	2,476	0,089	11,9	0,527	12,2
22							5,4
125							13,1
250							18,7

En la tabla tenemos que podemos estimar el valor de (Rango/S) mediante la fórmula de

$E(R/S) = 1,0943 * B^{0,5142}$ para el horizonte de inversión de 6996 días y el valor obtenido es muy aproximado al valor real.

$E(R/S) = 1,0943 * (6.996^{0,5142})$ para horizonte de inversión de 3.498 días

$E(R/S) = 1,0943 * (219^{0,5142})$ para horizonte de inversión de 219 días

Si lo realizamos sobre un horizonte de días no sabido previamente (en amarillo), obtendremos los resultados:

$E(R/S) = 5,4 = 1,0943 * (22^{0,5142})$ para horizonte de inversión de 22 días.

$E(R/S) = 13,1 = 1,0943 * (125^{0,5142})$ para horizonte de inversión de 125 días.

$E(R/S) = 18,7 = 1,0943 * (250^{0,5142})$ para horizonte de inversión de 250 días.

Este método lo he aplicado a todos los índices analizados (Ver Anexo 7)

Tabla 15. Ecuaciones, de potencial, fractales y coeficientes de Hurst según (R/S)

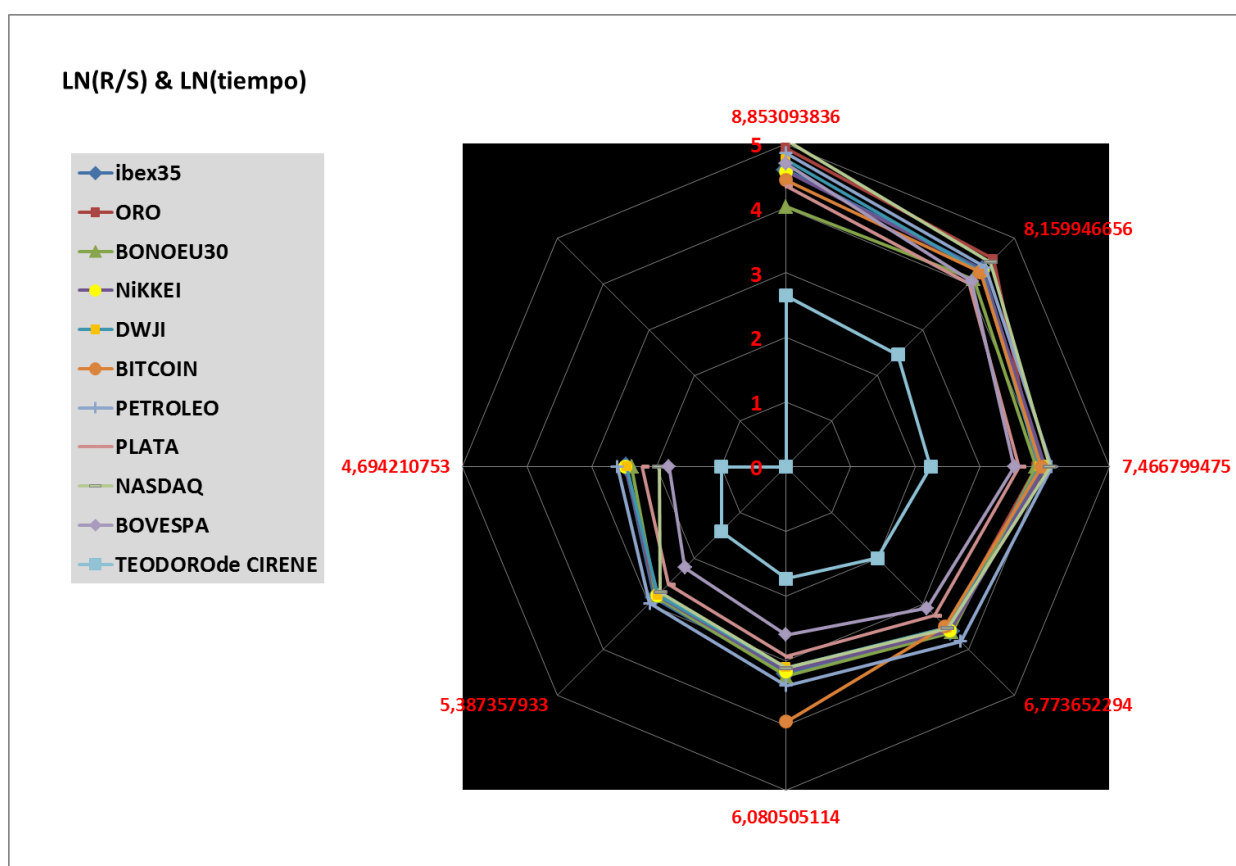
INDICE	$y = E(R/S)$	$x = \text{tiempo}$	Exponente
	Ecuación		Fractalidad
IBEX	$y = 1,0943 * x^{0,5142}$		0,514
NIKKEI	$y = 1,0573 * x^{0,5173}$		0,517
PLATA	$y = 1,0783 * x^{0,4831}$		0,483
PETROLEO	$y = 1,0845 * x^{0,5361}$		0,536
BONOS EEUU 30	$y = 1,8652 * x^{0,4158}$		0,416
ORO Xau	$y = 0,6594 * x^{0,5947}$		0,595
DWJI	$y = 0,8603 * x^{0,5459}$		0,546
NASDAQ	$y = 0,4990 * x^{0,6328}$		0,633
BOVESPA	$y = 0,3943 * x^{0,709}$		0,709
BITCOIN	$y = 8,6204 * x^{0,2494}$		0,249

Una última consideración sobre “la raíz cuadrada del tiempo”. Si la fractalidad escala con una raíz no-cuadrada del tiempo, o con un exponente de Hurst fraccionario, como así es aplicando ambas ecuaciones (de Einstein exponencial y de Mandelbrot lineal), podemos reconocer que recuerda mucho a una forma geométrica descubierta hace más de dos mil años, denominada “espiral de Teodoro de Cirene”.

La espiral de Teodoro de Cirene, también llamada “espiral de Einstein”, o caracola de Cirene, evoluciona según una escala de raíces cuadradas, a partir de triángulos pitagóricos (rectángulos). De modo que podríamos decir, que el tiempo escala a modo semejante de una “espiral de Teodoro de Cirene”.

He hecho la analogía teórica, para posteriormente aplicar la grafía. Y he obtenido los siguientes dos gráficos (uno en el sistema de Einstein, el otro en el método de Mandelbrot). Lo he aplicado a todos los mercados bursátiles analizados en este TFM.

Gráf.36. Analogía entre el escalamiento fractal en los mercados y la evolución de la espiral de Teodoro de Cirene (azul), según el método de Mandelbrot LN(R/S) y LN (n)



Fuente: elaboración propia

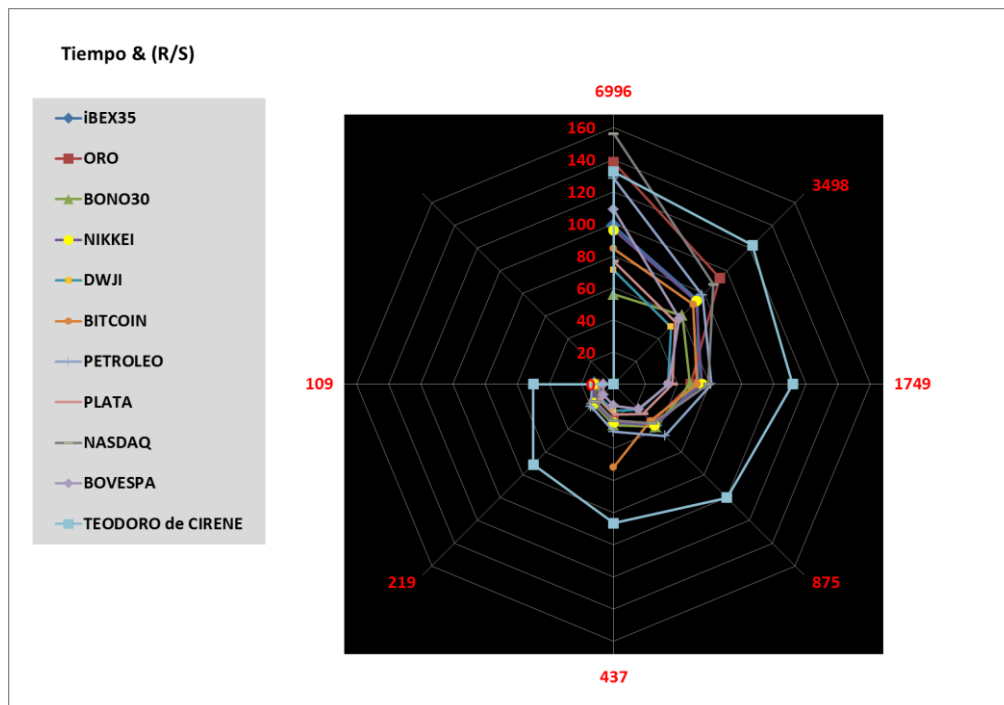
Es curioso observar como todos los índices de mercado evolucionan de forma paralela, sean estos deuda publica americana, mercados de futuro sobre metales y petróleo, bolsas europeas, sudamericanas, japonesas o americanas. Pareciese que si hay una mano invisible que mueve el mercado, ésta lo hiciese en forma de espiral escalante de tipo fractal.

Gráf.37 y 38. Analogía entre el escalamiento fractal en los mercados y la evolución de la espiral de Teodoro de Cirene (azul), según el método de la ecuación de potencial

$$y = C * (x)^{\text{exponente fraccionario}}$$

$$(R/S) = \text{Constante} * (\text{tiempo})^{\text{Hurst}}$$

$$\text{Rango} = (\text{Constante} * \text{Desv.Standart}) * (\text{tiempo})^{\text{Hurst}}$$



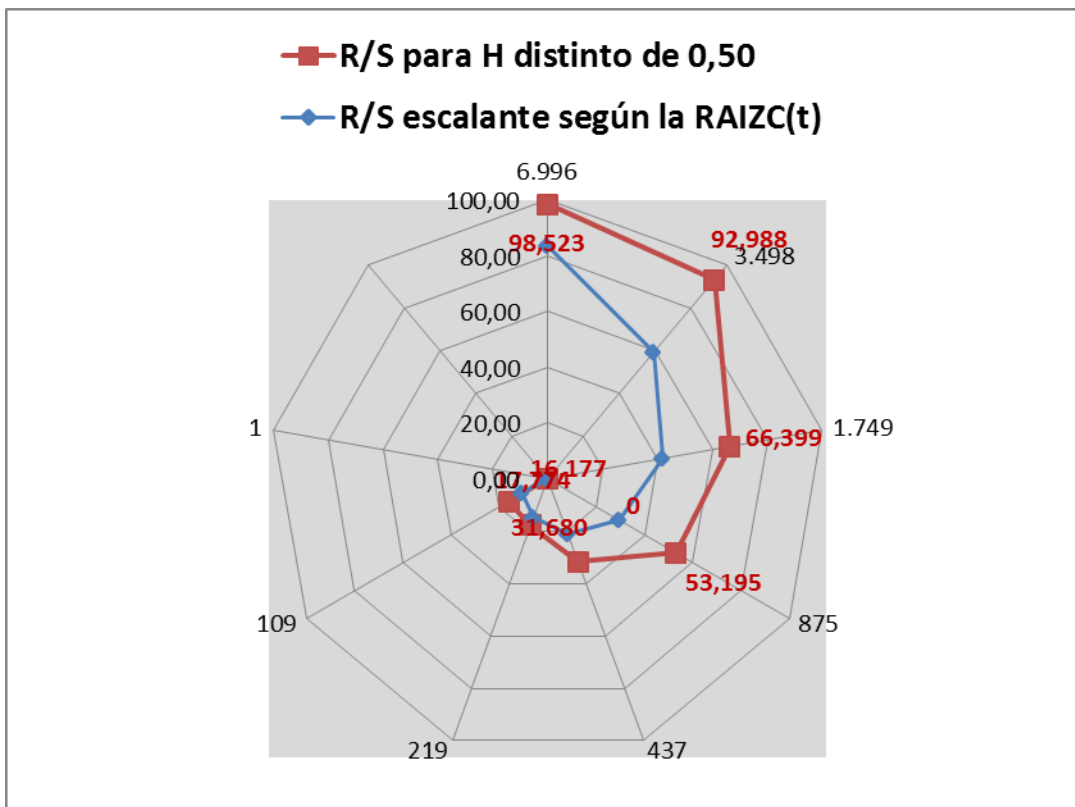
Fuente: elaboración propia

Finalmente, asociamos la forma en que evoluciona la “espiral de Teodoro de Cirene” y la forma con que evoluciona la desviación estándar de un movimiento aleatorio o browniano (con H=0,5), bajo la misma formulación: a razón de una raíz cuadrada. La raíz cuadrada del tiempo en el caso del movimiento browniano y la raíz cuadrada de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el caso de la espiral de Einstein. Por ello, podemos representar el movimiento browniano, evolucionando de forma similar a una espiral de Teodoro.

Tabla 16. Valores (R/S) para coeficientes de Hurst según la ventana de tiempo

Particiones	n inicial	n final	R/S	H
		1	0	
1:64	1	109	16,177	0,593
1:32	1	219	17,774	0,534
1:16	1	437	31,680	0,568
1:8	1	875	53,195	0,587
1:4	1	1.749	66,399	0,562
1:2	1	3.498	92,988	0,555
1:1	1	6.996	98,523	0,518
Particiones	n inicial	n final	R/S	H
1:64	1	109	10,455	0,500
1:32	1	219	14,786	0,500
1:16	1	437	20,911	0,500
1:8	1	875	29,572	0,500
1:4	1	1.749	41,821	0,500
1:2	1	3.498	59,144	0,500
1:1	1	6.996	83,642	0,500

Gráf.39. Comparación entre (R/S) de un mov. Browniano y la serie real IBEX35



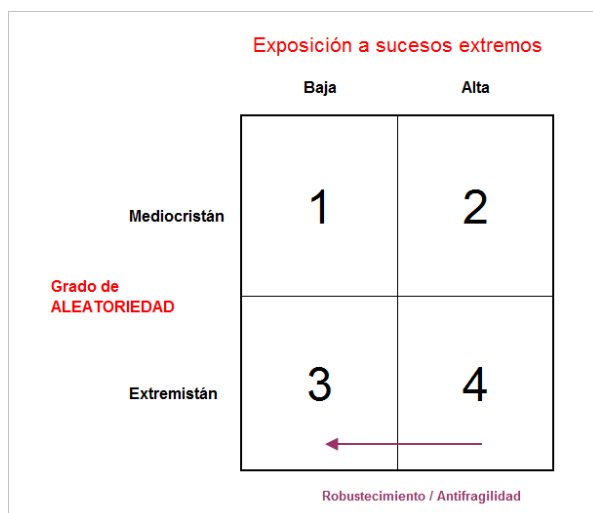
Fuente: elaboración propia

5 CLASIFICACION DE LOS INDICES SEGÚN SU MAL-COMPORTAMIENTO

5.1 Metodología

Se trataría de diseñar unos cuadrantes que dividan un espacio cartesiano en cuatro partes correspondientes a los cuatro estados o naturalezas o fases de estado del “capital financiero” o del activo/índice bursátil/mercado: sólido, líquido, gaseoso y de plasma. Recordando la teoría del cuadrante de Nicholas Taleb:

Tabla 16: Cuadrante de aleatoriedad y sucesos extremos del tipo “cisne negro”.



Fuente: Nicholas Taleb, “Black Swan”

También nos hacemos eco en este capítulo, de la idea de Mandelbrot (junto a Richard. H. Hudson) expresada en su libro “Fractales y Finanzas”, cuando dice al comienzo del libro cuyo título es: “Escrito para el lector científico”.

“Los tres estados de la materia _sólido, líquido y gaseoso_ se conocen desde hace tiempo. Una distinción análoga entre los tres estados de aleatoriedad _dócil, sereno y salvaje_ emana de la Matemática de la Geometría fractal.”

Es esta línea que se pretende clasificar los distintos índices de mercado, y en general para todo activo de inversión, ciertos criterios que conviertan las variables cuantitativas estudiadas alrededor de los “cisnes negros” y la fractalidad, en aspectos cualitativos que permiten clasificar en cuatro grupos los activos de acuerdo a su naturaleza de riesgo y turbulencia en: activos de naturaleza sólida, líquida, gaseosa y de plasma.

Para este proyecto seguiré los pasos siguientes:

Paso 1: Construyo las tablas a partir de los datos obtenidos durante el TFM. Estas tablas se basan en aspectos cuantitativos referentes a las Hipótesis de contraste trabajadas:

- Tabla 1: Sobre datos de la hipótesis de curtosis, asimetría y distribución de frecuencias sobre los rendimientos logarítmicos diarios para la Serie histórica de 12/1993 a 08/2021.
- Tabla 2: Sobre los datos específicos de la segunda Hipótesis: cisnes negros y rachas. Criterios seleccionados. Primer criterio de selección: la intensidad de los cisnes negros cuantificada en el Rango de las veinte rentabilidades logarítmicas diarias más extremas durante el periodo de 12/1993 a 08/2021 (con la excepción del BITCOIN que se enmarca en un periodo más corto). Segundo criterio seleccionado: la diferencia en % entre rachas positivas y negativas, ya que el número de rachas totales aparecidas en todos los índices es prácticamente el mismo.
- Tabla 3: Sobre el grado de fractalidad de los mercados y su coeficiente de Hurst estimado a partir de dos métodos seleccionados: el de la regresión lineal de los rangos reescalados para distintas ventanas de tiempo y el método de la ecuación exponencial basada en la

teoría de Einstein sobre la volatilidad de las series en función del tiempo elevado a un exponente fraccional. Se complementa con una segunda tabla que combina el aspecto fractal (en términos de Mandelbrot, el efecto José) con el aspecto de cisnes negros (en términos de Mandelbrot, el efecto Noé).

Paso 2: realizar las representaciones gráficas, por medio de gráficos de dispersión con iconos representativos de esferas (un color para cada índice de mercado). Se establecen criterios de asignación de cuadrantes mediante atributos cualitativos que definen la naturaleza de cada mercado: solido, liquido, gaseoso y de plasma. Estos criterios hacen referencia a las variables cuantitativas encontradas en los cálculos.

5.2 Cálculos y análisis

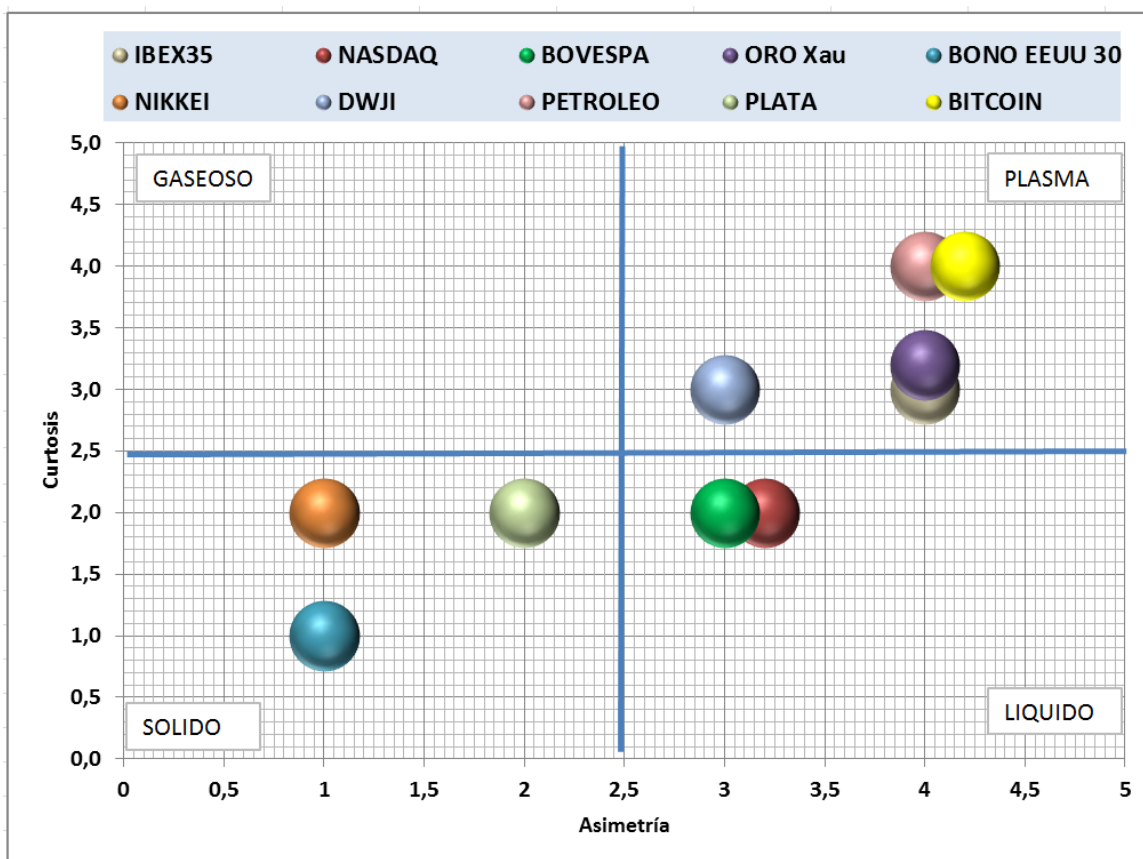
El primer cuadrante de estados del activo financiero, se diseña a partir de los valores obtenidos en la primera hipótesis, sobre variables cuantitativas referentes a: Curtosis y Asimetría.

COLAS GRUESAS y DISTRIBUCIÓN (Kurtosis, Coeficiente asimetría)					Particiones 1:4 para Serie histórica de 7000 días						
	HURST	Kurt. 1750	Kurt.3500	Kurt.5250	Kurt.6995	Asim. 1750	Asim.3500	Asim.5250	Asim.6995	Media (K)	Media (Asi)
IBEX35	0,51	2,69	1,68	5,26	17,54	0,18	-0,16	0,19	-1,48	6,79	-0,32
NASDAQ	0,71	2,83	5,69	7,40	11,34	-0,25	0,43	-0,15	-0,74	6,81	-0,18
BOVESPA	0,68	7,32	0,87	6,61	14,16	0,51	-0,20	0,03	-1,10	7,24	-0,19
ORO Xau	0,59	28,23	3,76	5,69	3,69	2,13	-0,39	-0,28	-0,12	10,34	0,34
BONO EEUU 30	0,42	2,27	4,18	2,49	0,27	0,09	-0,01	0,18	2,34	0,13	0,65
NIKKEI	0,52	1,68	7,46	5,52	0,18	-0,46	-0,57	-0,15	3,79	0,25	0,65
DWJI	0,53	5,43	4,18	4,14	25,18	-0,55	-0,04	-0,05	-1,09	9,73	-0,43
PETROLEO	0,53	3,43	3,53	3,90	57,27	-0,41	-0,80	-0,57	-3,18	17,03	-1,24
PLATA	0,51	3,37	5,60	7,31	0,81	0,11	-0,83	-0,64	-0,02	4,27	-0,35
BITCOIN	0,46			60,05	17,84			1,72	-1,52	38,95	0,10

Tabla 17. Valores de Curtosis y asimetría encontrados en la partición de 4 ventanas de tiempo de 1.750 días.

Kurtosis/asimetría	KURTOSIS	VALORACION	ASIMETRIA	VALORACION	ESTADO	ESTADO	VALORACION F
PETROLEO	MUY ALTA	4	MUY ALTA	4	8	Plasma	4
BITCOIN	MUY ALTA	4	MUY ALTA	4,2	8,2	Plasma	4
ORO Xau	ALTA	3,2	MUY ALTA	4	7,2	Plasma	4
IBEX35	ALTA	3	MUY ALTA	4	7	Plasma	4
DWJI	ALTA	3	ALTA	3	6	Plasma	4
NASDAQ	BAJA	2	ALTA	3,2	5,2	Líquido	2
BOVESPA	BAJA	2	ALTA	3	5	Líquido	2
NIKKEI	BAJA	2	MUY BAJA	1	3	Sólido	1
PLATA	BAJA	2	BAJA	2	4	Sólido	1
BONO EEUU 30	MUY BAJA	1	MUY BAJA	1	2	Sólido	1

Gráf.40. Categorización de la naturaleza de los índices de mercado en función de la curtosis y la asimetría.



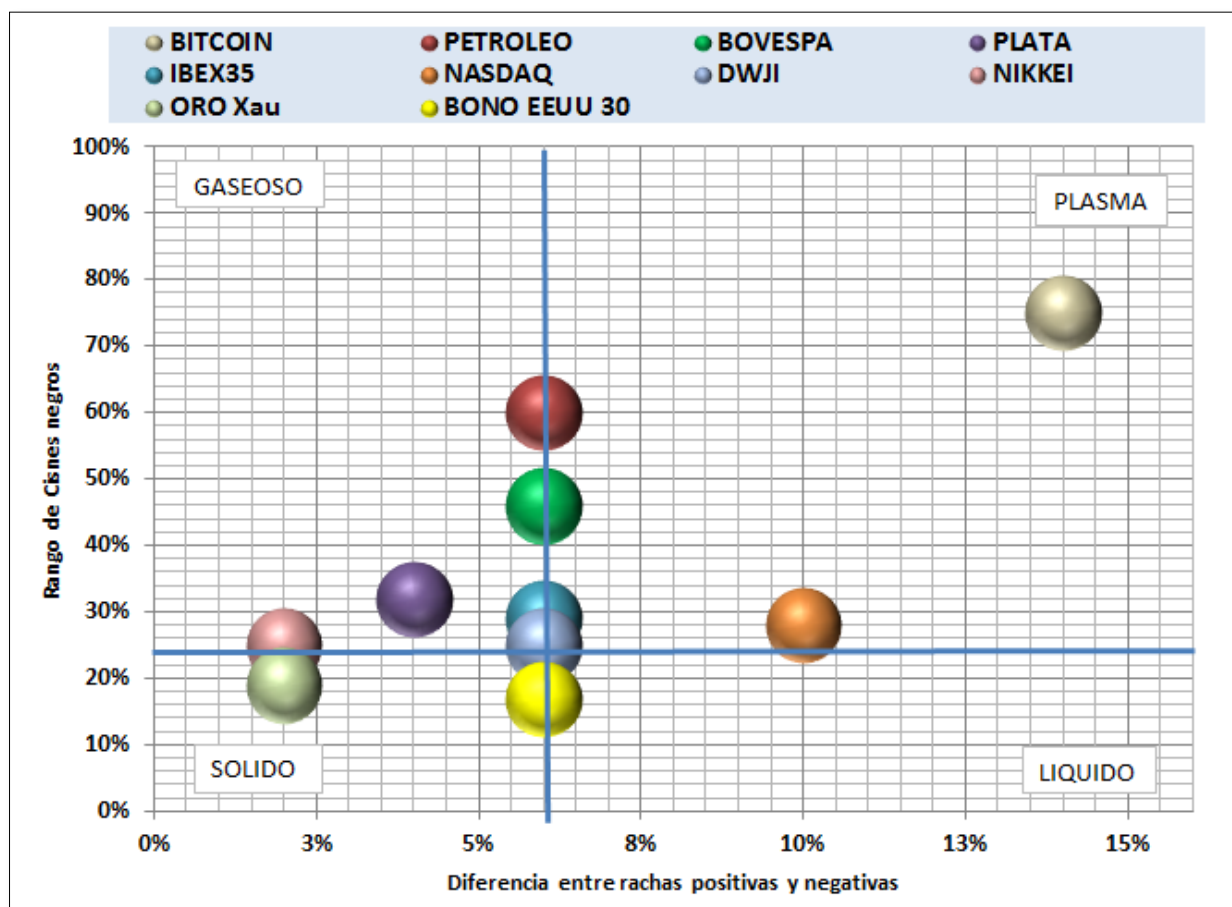
Fuente: elaboración propia

Continuando con el criterio de la Hipótesis segunda sobre “cisnes negros” dados los valores obtenidos, realizamos la Tabla Resumen para la clasificación la naturaleza de cada índice de mercado:

Tabla 18. Resumen de valoración de los índices de mercado según su intensidad de rachas y la diferencia entre rachas positivas y negativas. (El valor de rango del BITCOIN ha sido reducido para que pueda aparecer en el gráfico asociado).

CISNES NEGROS	RANGO	INTENSIDAD	DIF. RACHAS		VALORACION	ESTADO
			+ y -	CANTIDAD		
BITCOIN	75%	MUY ALTO	14%	MUY ALTA	4	Plasma
PETROLEO	60%	MUY ALTO	6%	ALTA	4	Plasma
BOVESPA	46%	MUY ALTO	6%	ALTA	4	Plasma
PLATA	32%	ALTO	4%	BAJA	3	Gaseoso
IBEX35	29%	ALTO	6%	ALTA	3	Gaseoso
NASDAQ	28%	ALTO	10%	MUY ALTA	3	Gaseoso
DWJI	25%	ALTO	6%	ALTA	3	Gaseoso
NIKKEI	25%	ALTO	2%	BAJA	3	Gaseoso
ORO XAU	19%	MEDIO	2%	BAJA	1	Solido
BONO EEUU 30	17%	MEDIO	6%	ALTA	1	Solido

Gráf.41. Categorización de la naturaleza de los índices de mercado en función de la sensibilidad a las rachas.



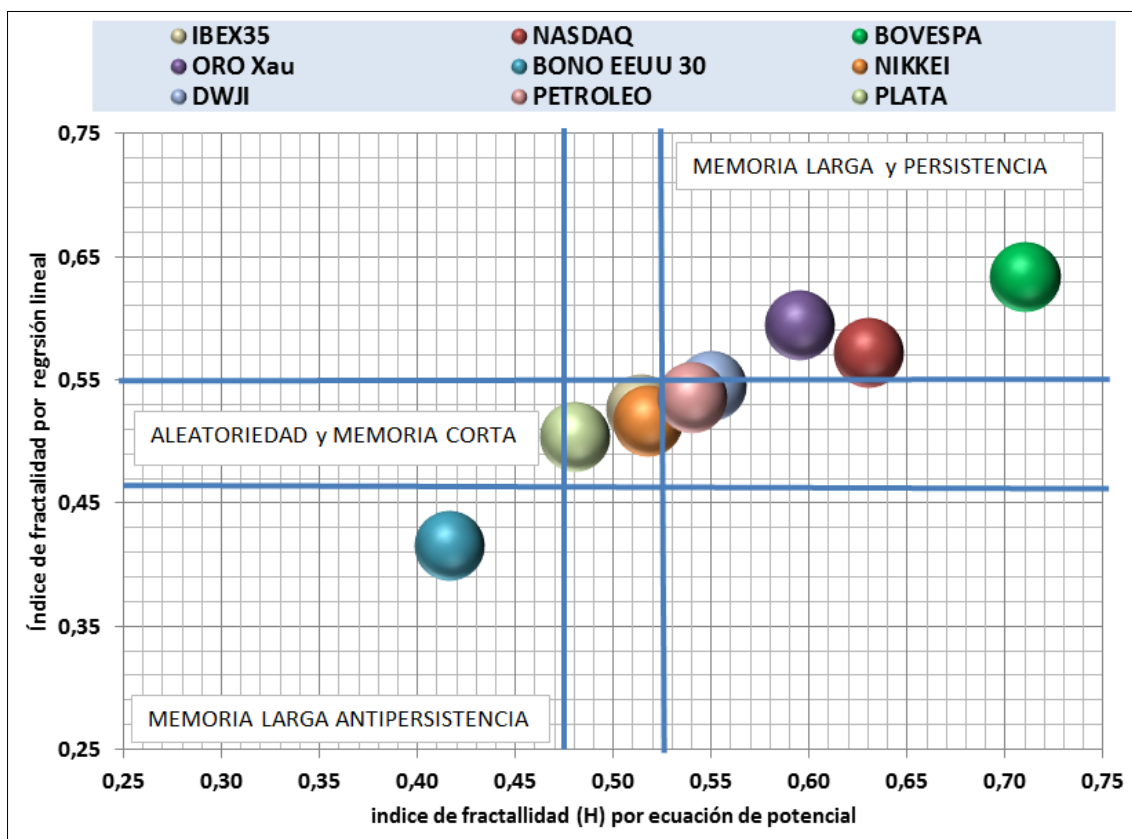
Fuente: elaboración propia

En cuanto a la clasificación de los mercados por el criterio de la hipótesis tercera: la fractalidad. Los clasificaré según su índice de fractalidad, después de recoger los valores estimados de Hurst, según los diferentes métodos aplicados. Se decide seleccionar el valor estimado del coeficiente de urst según el método de la regresión lineal del Rango re-escalado (ecuación de Mandelbrot tal que $\ln(R/S) : \ln(n)$ y por el método propuesto de análisis del (R/S) para distintos horizontes de tiempo del inversor (ecuación de potencial einsteniana). Estos resultados se resumen en la tabla siguiente:

Tabla 19. Resumen de índices fractales obtenidos según distintas metodologías.

INDICE de MERCADO	$y = C \cdot X^H$ $(R/S) = C \cdot \text{Tiempo}^{\text{HURST}}$	H FRACTALIDAD	METODO del RANGO REESCALADO (R/S) en VENTANAS de TIEMPO.							H= $\ln(R/S) : \ln(n)$	DFA
			R/S 1:1	R/S 1:2	R/S 1:4	R/S 1:8	R/S 1:16	R/S 1:32	R/S 1:64		
IBEX35	$y = 1,0943 \cdot X^{0,5142}$	0,51	0,52	0,53	0,53	0,53	0,53	0,53	0,53	0,53	0,51
NASDAQ	$y = 0,4990 \cdot X^{0,6328}$	0,63	0,57	0,54	0,54	0,51	0,51	0,51	0,51	0,57	0,51
BOVESPA	$y = 0,3943 \cdot X^{0,709}$	0,71	0,62	0,59	0,57	0,56	0,54	0,54	0,53	0,63	0,51
ORO Xau	$y = 0,6594 \cdot X^{0,5947}$	0,59	0,56	0,56	0,52	0,52	0,51	0,53	0,53	0,60	0,50
BONO EEUU 30	$y = 18652 \cdot X^{0,4158}$	0,42	0,46	0,50	0,52	0,53	0,53	0,53	0,51	0,42	0,54
NIKKEI	$y = 1,0573 \cdot X^{0,5173}$	0,52	0,52	0,53	0,54	0,53	0,52	0,52	0,53	0,52	0,52
DWJI	$y = 0,8603 \cdot X^{0,5459}$	0,55	0,54	0,52	0,53	0,52	0,51	0,52	0,53	0,55	0,51
PETROLEO	$y = 1,0845 \cdot X^{0,5361}$	0,54	0,55	0,53	0,55	0,56	0,55	0,55	0,55	0,54	0,51
PLATA	$y = 1,0783 \cdot X^{0,4831}$	0,48	0,49	0,49	0,49	0,49	0,50	0,50	0,49	0,50	0,51
BITCOIN	$y = 8,6204 \cdot X^{0,2494}$	0,25	0,50	0,52	0,53	0,51	0,65	0,66	0,70	0,66	-

Gráf.42. Coeficientes de Hurst según la ecuación de potencial y la regresión lineal de (R/S)



Fuente: elaboración propia

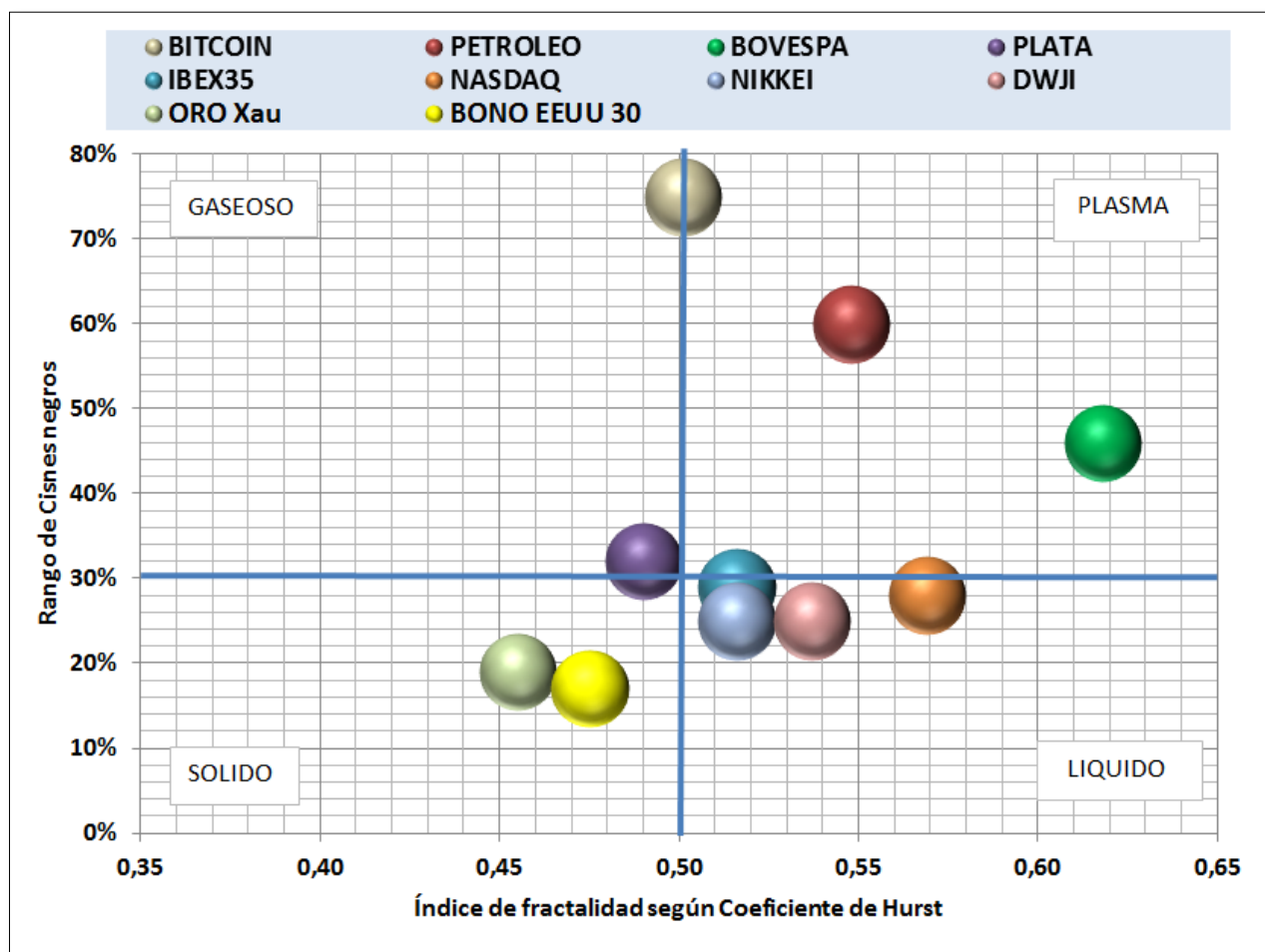
Con este gráfico no podemos categorizar la naturaleza del mercado, según los cuatro estados de aleatoriedad, puesto que no queda bien definido el criterio que permita asignar un estado de sólido sin apenas turbulencias a un valor de índice de fractalidad asociado. Lo que sí permite, es determinar la persistencia (memoria larga de tendencia) o la antipersistencia (memoria corta de retorno a la media). Hasta el punto que nos encontramos con paradojas del lenguaje, ya que el índice de fractalidad tal que $H < 0,5$ señala una “persistencia-de-memoria-corta o una persistencia-de-retorno-a-la media”. Hecho que dificulta las definiciones de los mercados y así mismo la categorización del activo en términos de aleatoriedad y de predeterminación.

Podemos combinar dos criterios de categorización de los mercados: su índice de fractalidad y su rango de cisnes negros. Con esto, se puede categorizar con más justificación y definición de los estados o naturalezas de los activos financieros.

Tabla 20. Criterios de asignación de la naturaleza de cada Mercado, en función de la sensibilidad a los cisnes negros y de su índice de fractalidad y azar.

CISNES / FRACTALIDAD	RANGO	INTENSIDAD	COEFICIENTE de HURST	PERSISTENCIA ANITPERSISTENCIA	ESTADO	VALORACION
BITCOIN	75%	MUY ALTO	0,50	ALEATORIO	Plasma	4
PETROLEO	60%	MUY ALTO	0,55	PERSISTENCIA	Plasma	4
BOVESPA	46%	MUY ALTO	0,62	PERSISTENCIA	Plasma	4
PLATA	32%	BAJO	0,49	ALEATORIO	Gaseoso	3
IBEX35	29%	BAJO	0,52	PERSISTENCIA	Líquido	3
NASDAQ	28%	BAJO	0,57	PERSISTENCIA	Líquido	3
NIKKEI	25%	BAJO	0,52	ALEATORIO	Líquido	3
DWJI	25%	BAJO	0,54	ALEATORIO	Líquido	3
ORO Xau	19%	MUY BAJO	0,46	ANTIPERSISTENCIA	Sólido	1
BONO EEUU 30	17%	MUY BAJO	0,48	ANTIPERSISTENCIA	Sólido	1

Gráf.43. Naturaleza de los Mercados en función de su sensibilidad a “cisnes” y su índice de fractalidad.



Fuente: elaboración propia

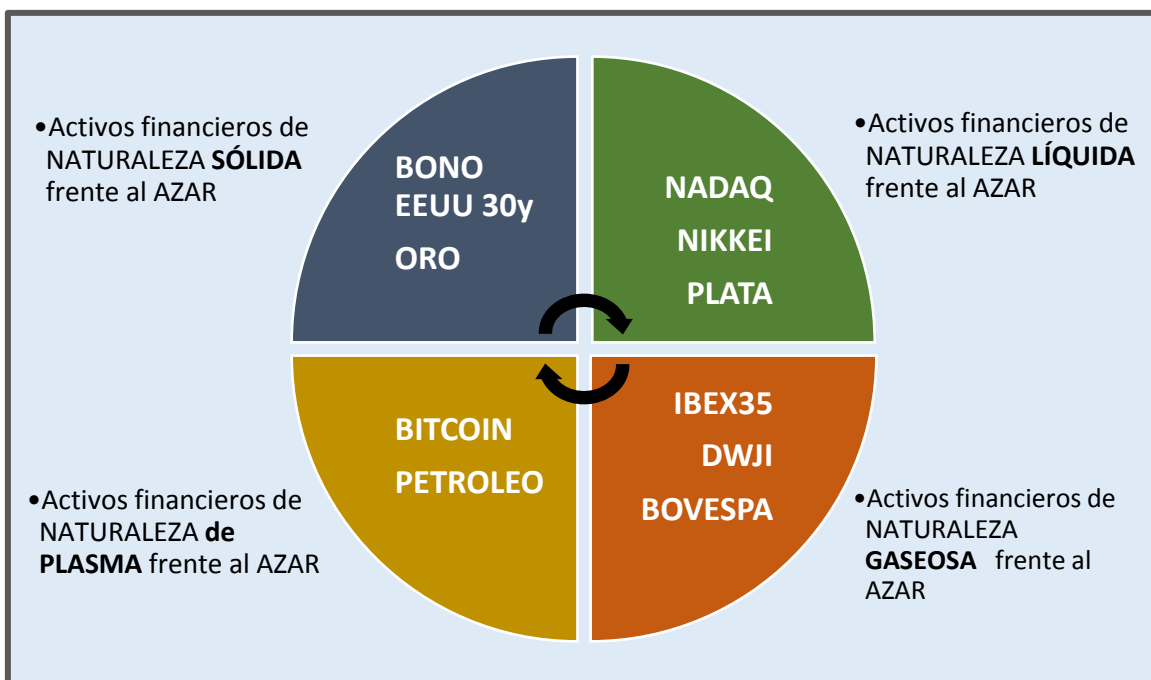
Como criterio de asignación de la naturaleza o estado de riesgo o caósmosis, a cada índice de mercado, hemos cuantificado los valores obtenidos en cada uno de los cuadrantes anteriores, de tal modo que se pueden resumir en las siguientes evaluaciones:

Tabla 21. Asignación de estados de riesgo según los resultados de los cuadrantes obtenidos

NATURALEZA del INDICE frente al AZAR	KURTOSIS y ASIMETRIA	CISNES NEGROS	CISNES NEGROS & PERSISTENCIA	VALORACION MEDIA	EVALUACION FINAL
PETROLEO	4	4	4	4,0	Plasma
BITCOIN	4	4	4	4,0	Plasma
IBEX35	4	3	3	3,3	Gaseoso
DWJI	4	3	3	3,3	Gaseoso
BOVESPA	2	4	4	3,3	Gaseoso
NASDAQ	2	3	3	2,7	Líquido
NIKKEI	1	3	3	2,3	Líquido
PLATA	1	3	3	2,3	Líquido
ORO Xau	4	1	1	2,0	Sólido
BONO EEUU 30	1	1	1	1,0	Sólido

Como conclusión final, los distintos mercados pueden clasificarse según la asignación siguiente:

Gráf. 44. Cuadrante de asignación de la naturaleza caótica y turbulenta, de cada uno de los índices analizados.



6. BUENOS INVERSORES e INVERSORES BUENOS

Dos problemas surgidos de la inversión financiera relacionada con la la ética de los inversores son:

1.- por un lado el mal cálculo de los riesgos en los agentes financieros o los inversores.

2.- por otro lado la mala racionalidad de los criterios de inversión sobre activos, índices o empresas que no cumplen con los criterios vinculados a la Responsabilidad Social Corporativa.

En estos dos sentidos, podemos reflexionar sobre si estos agentes de los mercados financieros, son “buenos inversores” en cuanto al cálculo del riesgo. Y por otra parte, si son “inversores buenos” en cuanto a si sus inversiones siguen criterios acordes a los principios de RSC.

6.1 ¿Buenos Inversores? Sobre la estimación del riesgo.

Benôit Mandelbrot abre su prefacio a la segunda edición en lengua inglesa de “Fractales y Finanzas”⁴ afirmando que la crisis de otoño de 2008 tuvo múltiples causas, pero *“hay una cosa menos obvia: nuestra comprensión más que limitada del funcionamiento de los mercados, del movimiento de los precios y de la evolución de los riesgos”*. Y añade: *“la causa fundamental de la crisis fue puramente humana: el exceso de optimismo”*.

Abro un paréntesis al texto de Mandelbrot, Ahora a las Crisis, en realidad deberíamos llamarlas “Cisnes”, pues la misma crisis de otoño de 2008 fue un auténtico “cisne negro”. De hecho, los cisnes negros se han asimilado a la explosión de “burbujas”. Y el mismo término “burbuja” es el símbolo de que la naturaleza de los mercados financieros es en términos generales, o bien gaseosa o bien de plasma (para el caso de las criptomonedas y para el trading de alta frecuencia). Las turbulencias cada vez más frecuentes que sufren los índices bursátiles han ido afectando a la esencia turbulenta de los mercados.

Mandelbrot denuncia en su libro, al tiempo que nos pone en alerta, cuando afirma que desde 2008 se produce *“un fenómeno nuevo para nuestra generación: un exceso de confianza en nuestra comprensión de los mercados financieros”*.⁵ Si los mercados financieros y en general los activos de inversión, en general podemos decir que están definidos por un “estado gaseoso”, esto se justifica porque esencialmente su precio es volátil, etéreo y produce burbujas. Lo cual nos muestra que el Capitalismo en este estado gaseoso es esencialmente un capital-deuda. Mandelbrot, recuerda que al basarse en el cálculo de probabilidades de impago mal hechas, el sistema financiero se hundió con la crisis de las hipotecas subprime. Y esto se debió fundamentalmente, a que *“Wall Street hizo más préstamos que nunca”*.⁶ Tanto es así, que el autor nos dice un dato clarificador: *“En el Bearn Stearns la razón entre el Capital prestado y el Capital efectivo se disparó a 33:1”*.

Todo parece señalar que el Capital ha mutado de naturaleza, en los últimos cuarenta años, ha pasado de estado-líquido a estado-gaseoso, en cuanto a la relación que media entre capital-deuda (gas) y capital-efectivo (líquido). Y esto no solo ha sucedido en los mercados financieros, sino también en las economías de los Estados cada vez más endeudados respecto a su PIB. En esta atmósfera general del capitalismo gaseoso, se entiende perfectamente las medidas del Banco Central Europeo en su gestión del problema entorno a nuevas reglas y condiciones centradas alrededor de BASILEA: probability default, loss given default, exposure at default...⁷

Mandelbrot insiste en que se trata de un problema de comprensión científica acerca de la naturaleza de los mercados. Y afirma: *“el error reside en los supuestos subyacentes tras los modelos”*. ¿Qué modelos? Los del análisis estadístico del riesgo y las series temporales. Según el profesor Mandelbrot: *“deberíamos fijarnos en las acciones explosivas concentradas, las*

⁴ B. Mandelbrot. Fractales y Finanzas. Una aproximación matemática a los mercados. Tusquets Editores. 2ª Edición. 2010.

⁵ Ibíd., Prefacio a la segunda edición.

⁶ Ibíd., Prefacio a la segunda edición

⁷ Ramón Trías y Antoni March. “La influencia de Basilea II en la gestión del riesgo hipotecario”. 2008. Artículos breve sobre el tema en la web de Iberfinanzas.com

discontinuidades, lo que el saber financiero dice que no debería suceder y llama marginales estadísticos.⁸ Todo se resume en la afirmación rotunda de Mandelbrot: *“Si hacemos caso a las fórmulas de los libros (de estadística), el desplome del 29 de setiembre de 2008 nunca debería haber ocurrido: las posibilidades eran de una entre mil millones. Y sin embargo, ocurrió”*.⁹

En sintonía con la tesis de Mandelbrot, Pablo Triana en su libro¹⁰ *“The number that killed Us”*, afirma que *“el verdadero culpable de la crisis crediticia de 2007-2008 e, indirectamente, de la actual crisis del euro, fue un modelo matemático conocido como Valor en Riesgo (VaR)”*. Según el profesor Triana, *“el VaR permitió a Wall Street y a la City de Londres construir posiciones enormemente apalancadas en el tipo de valores venenosos (CDO de alto riesgo y similares) que eventualmente se derrumbaron y desataron el caos”*. El enorme apalancamiento al que se refiere Triana, nos revela otra vez, la naturaleza gaseosa de los mercados financieros. Junto a esta naturaleza gaseosa por turbulenta del capital, aparece el concepto de métodos erróneos de “valoración del riesgo”. Estas dos premisas definen el problema.

Sabemos que el VAR (Value at Risk) es una de las fórmulas más empleados para diseñar carteras de inversión. Y el profesor Triana afirma: *“La adopción del VaR fue un error. Los formuladores de políticas y muchos banqueros confiaron demasiado en un brebaje nacido para subestimar el riesgo y permitir un comportamiento imprudente. Las matemáticas tuvieron su oportunidad y fallaron miserablemente”*.

Triana ya se preguntaba un año después del 2008, en otro de sus libros: *“Lecturing Birds on flying. Can Mathematical Theories, destroy the financial markets”*¹¹ si pueden las teorías de la matemática estadística del riesgo, destrozar a los mercados financieros. En este libro carga contra el método de Black-Scholes en su capítulo *“The Black Scholes Conundrum”* y en su último capítulo se pregunta *“Should the Nobel Prize in Economics, be eliminated?”* en clara referencia a los últimos nobeles en Economía que han sido los defensores de la Teoría de los Mercados Eficientes y sus distribuciones de probabilidad basadas en el modelo gaussiano de normalidad.

El prólogo a este libro de Triana, lo realizó el profesor Nicholas Nassim Taleb. En dicho prefacio, establece siete tesis. Taleb comienza su escrito con una declaración de principios, diciendo que está en el Foro Mundial de Davos 2009, y de pronto piensa que *“todo estos años, no se habían dado cuenta de que sus modelos subestimaban los riesgos de eventos raros de alto impacto, lo que permite la acumulación de grandes posiciones que están en el proceso de destruir los mercados libres, el capitalismo y las finanzas...Pero los académicos entre ellos, igualmente equivocados acerca de los modelos (de hecho, ellos eran los que alimentaban a los banqueros con malos modelos), equivocados acerca del mundo, equivocados acerca de la noción misma de conocimiento, equivocados acerca de todo...”*¹²

Está claro que en este contexto epistemológico sobre las series de tiempo, la estadística y los sistemas turbulentos, debe invertirse aún mucho tiempo de estudio, y muchos proyectos de investigación que profundicen en la gestión del riesgo en entornos de complejidad y fractalidad. El mismo Mandelbrot, reconocía que *“se necesita un Proyecto Apolo para la Economía”*.¹³

En este caso, la ética responsable de inversión en los mercados financieros va ligada inevitablemente a la capacidad de conocimiento de los inversores y las herramientas estadísticas de los modelos mejorados, sobre el fenómeno de la turbulencia y de la fractalidad. Si la Ética es conocimiento, en las últimas crisis el desconocimiento de los mercados financieros ha sido irresponsabilidad social.

⁸ B. Mandelbrot. *Fractales y Finanzas. Una aproximación matemática a los mercados*. Prefacio a la 2ª edición

⁹ *Íbid.*

¹⁰ Triana, Pablo. *The Number That Killed Us*. John Wiley & Sons Inc (2011).

¹¹ Triana, Pablo. *“Lecturing Birds on flying. Can Mathematical Theories, destroy the financial markets”*. John Wiley & Sons Inc (2009). Libro accesible en: <https://uberty.org/wp-content/uploads/2015/07/Pablo-Triana-Nassim-Nicholas-Taleb-Lecturing-Birds-on-Flying.pdf>

¹² Triana, Pablo. *“Lecturing Birds on flying. Prólogo de Nassim Nicholas Taleb*.

¹³ B. Mandelbrot. *Fractales y Finanzas. Una aproximación matemática a los mercados*. Prefacio 2ª Edición.

6.2 ¿Inversores buenos? Sobre los activos de inversión vinculados a la ODS.

El segundo problema que quiero plantear entorno a la ética en las finanzas, se refiere a los nuevos mercados, y posibilidades de inversión que se abren gracias al horizonte de la RSC y de la OSD, en finanzas.¹⁴ Contexto nuevo centrado en una nueva idea de desarrollo y crecimiento que se enmarca políticamente en la Agenda 2030 monitorizada por la ONU.

Si en el primer apartado de este capítulo dedicado a la Ética en las finanzas, nos referimos a los “buenos inversores” como aquellos que deben conocer otros modelos estadísticos de riesgo que permitan domesticar y gestionar, en lo posible, la incertidumbre, el azar, la fractalidad y los cisnes negros, ahora debemos hablar de los “inversores buenos” o aquellos inversores que tienen preocupación por los valores y principios que sustentan aquellos activos financieros o empresas en las que ellos invierten.

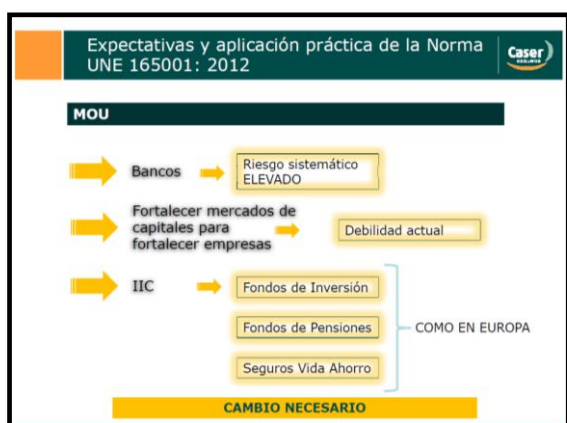
Hay pues dos tipos de responsabilidad respecto al mundo de las Finanzas: la responsabilidad del conocimiento sobre modelos de riesgo y la responsabilidad social sobre modelos de desarrollo sostenible. Aquí enlazo con el título de un informe de KPM denominado: “Finanzas Sostenibles e integración en el marco de la gestión de Riesgos”.¹⁵ En él encontramos los conceptos fundamentales: sostenibilidad, integración, gestión de riesgos. Pues una ideal gestión del CFO o del Inversor en mercados financieros, debería integrar la “sostenibilidad” con el “riesgo”. KPMG señala en esta integración del riesgo en la gestión del CFO, cuatro tipos de riesgos a gestionar: riesgo de crédito, riesgo operacional, riesgo de mercado y riesgo de liquidez.

Según este informe, el desarrollo sostenible es “el desarrollo que satisface las necesidades del presente sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras para satisfacer sus necesidades”.¹⁶ Si seguimos las directrices según la normativa de la CE para el Desarrollo Sostenible¹⁷ se trataría de:

- a) Reorientar los flujos de Capital hacia inversiones sostenibles.
- b) Integrar la Sostenibilidad en la gestión de riesgos.
- c) Fomentar una mayor transparencia y visión a largo plazo.

Estas directrices generales deben permitir cambiar la concepción sobre la inversión financiera, que pase de ser una mera “especulación” a una inversión en el futuro de toda la sociedad. La norma UNE165001 en este sentido de un contexto de riesgo sistémico, va más allá de la inversión financiera de los agentes del mercado y alcanza también al ahorra privado de las personas. Pues la gestión de Desarrollo Sostenible comprendería en el ámbito de las Finanzas los siguientes campos: Fondos de inversión, Fondos de pensiones, Seguros de vida y el Capital-Riesgo.

Gráf.45: UNE165001, 2012.



¹⁴ CNMV. Las Finanzas Sostenibles.

https://www.cnmv.es/DocPortal/Publicaciones/Fichas/Finanzas_Sostenibles.pdf

¹⁵ KPM. “Finanzas Sostenibles e integración en el marco de la gestión de Riesgos”. 2020. KPMG Asesores SL.

¹⁶ Íbid.

¹⁷ Ver la Norma UNE165001. 2012

Fuente: Caser Seguros. Expectativas y aplicación práctica de la Norma UNE165001. 2012.

Si ahondamos en la política de ESG (Enviromental & Social Governance) que en español es ASG, orientada al análisis de inversiones financieras, podemos señalar como lo hace el informe KPMG, dos líneas fundamentales en la gestión del riesgo financiero según una matriz de riesgo cuyos dos ejes serían:

1.- Dimensión financiera:

1.1 Riesgo estructural: riesgo ESG que afectan a la estabilidad financiera y al conjunto de activos (préstamos, inversiones, ahorro).

1.2 Riesgo transitorio: riesgo en el modelo subyacente de los activos, junto a los riesgos operacionales.

2.- Dimensión extra-financiera: El efecto para la Sociedad, que puede provocar la inversión en determinados activos financieros y de inversión. Y el efecto sobre las entidades de inversión o los bancos, en función de su política RSC, sobre la imagen corporativa ante el mercado. (Aunque en este último caso, debemos ser conscientes de muchas entidades hacen mal uso de éstos, concretado en el “greenwashing”).

La combinación de los dos análisis permitirá luego hacer recomendaciones de inversión sobre las empresas. Junto a éste, también se debe analizar el contexto macroeconómico donde actúa cada empresa. Por ejemplo, la divisa principal con la que trabaja.

Por otro lado, de forma complementaria, el CFO debe tener presente para la gestión inversora, los siguientes criterios ISR (Inversión Socialmente Responsable):

1. Excluir empresas de la cartera posible de inversión, por motivos de comportamiento y prácticas contrarias a los criterios de Sostenibilidad y Responsabilidad. (Excluir actividades de negocio vinculadas a sectores como el armamento, los pesticidas, etc.)

2. Incluir la selección de las mejores empresas con una buena situación financiera, que al mismo tiempo hayan adoptado prácticas y una cultura corporativa asociada a la ASG.

3. Establecer relaciones con las empresas, a través del dialogo y conferencias, con el objetivo de ayudar a mejorar sus prácticas ASG.

4. Integrar los criterios ASG dentro del análisis financiero clásico. Gestionando las carteras de inversión, no solo por rentabilidad financiera sino además por rentabilidad social y medioambiental.

Gráf.46. Inversión de Impacto respecto a las Rentabilidades



Fuente: Estudio SPAINSIF, 2020.

Para cerrar el capítulo de la OSD en Finanzas, no podemos olvidar el cambio que han sufrido en los últimos años los mercados financieros, respecto a la nueva generación de activos financieros nacidos con el ADN de la OSD y la RSC. Entre estos, destacan los denominados “Bonos OSD”¹⁸ entre los que se clasifican los siguientes tipos: Bonos OSD corporativos, Bonos OSD de Bancos y Corporaciones, Bonos OSD respaldados por Proyectos Sociales, Bonos OSD

¹⁸ Informe de la ONU titulado: “Bonos OSD. Potenciar los Mercados de Capital para los OSD”. 2019

Soberanos y municipales. Otros productos y expresiones de la actividad financiera orientada por OSD son: microcréditos, banca ética, crowdfunding para proyectos sociales, etc.

Además han aparecido numerosos índices con el sesgo de la ISR, de los que se pueden destacar, la familia de índices MSCI ISR:

- MSCI ESG Universal Indexes: índice que valora más a las empresas con mejores rating de ASG, durante los últimos 12 meses. Excluyendo las empresas pertenecientes a sectores como el armamentístico o del tabaco entre otras.
- MSCI ESG Leaders Indexes: incluye empresas con puntuación más alta en criterios ASG y que además constituyan el 50% de la capitalización de cada sector.
- MSCI SRI Indexes: índice similar al anterior, pero selecciona las empresas que representan el 25% de la capitalización de cada sector.

En cuanto a la resiliencia de estos los nuevos Fondos de Inversión aparecidos en el sector financiero, se ha demostrado que éstos muestran mayor tasa de supervivencia que los Fondos tradicionales. Si comparamos con qué Fondos de Inversión contaba un inversor hace 10 años y con cuales cuenta ahora, podemos comparar el ratio de los Fondos tradicionales respecto a los Fondos con criterios ESG. Y mientras que el 50% de los Fondos tradicionales ha sobrevivido, lo ha hecho el 73% de los Fondos ESG.

Tabla 22. ¹⁹ Supervivencia de los FI (tradicionales frente a los ESG) después cinco y diez años

Category	5-Year				10-Year			
	Sustainable Funds		Traditional Funds		Sustainable Funds		Traditional Funds	
	Number	Survivorship Rate (%)	Number	Survivorship Rate (%)	Number	Survivorship Rate (%)	Number	Survivorship Rate (%)
Global Large-Cap Blend Equity	117	76.1	1,265	70.0	92	52.2	1,376	45.9
Global Large-Cap Growth Equity	42	90.5	243	81.1	37	75.7	224	47.8
Global Emerging Markets Equity	39	87.2	571	71.5	16	87.5	296	48.0
US Large-Cap Blend Equity	27	92.6	443	69.5	19	84.2	527	46.9
Europe Large-Cap Blend Equity	67	83.6	596	72.3	70	70.0	744	46.2
Eurozone Large-Cap Equity	68	97.1	477	75.1	58	91.4	616	42.9
EUR Corporate Bond	48	91.7	349	74.8	30	80.0	259	47.1
All Categories		86.3		72.2		72.0		45.9

Source: Morningstar Direct, Morningstar Research, Data as of 31/12/2019.

Este es un fenómeno de largo alcance, puesto que los Fondos y las inversiones basadas en criterios ISG apuntan a un incremento en los próximos años, ya que tanto la sociedad como los gobiernos apoyan este crecimiento como se manifiesta en la Agenda 2030.

Gráf.46. Evolución mundial de la inversión en activos ASG



Fuente: <https://www.estrategiasdeinversion.com/actualidad/noticias/bolsa-espana/isr-las-siglas-de-la-rentabilidad-del-presente-n-442415>. (2019)

¹⁹ <https://www.morningstar.es/es/news/203255/%C2%BFbaten-los-fondos-sostenibles-a-sus-rivales.aspx>

CONCLUSIONES

Tras los cálculos y razonamientos elaborados durante este TFM se ha llegado a las siguientes conclusiones

1.- En todos los Mercados estudiados, se ha comprobado que las rentabilidades logarítmicas diarias se comportan siguiendo una campana de distribución leptocúrtica con colas pesadas (semejantes al modelo de Levy o Cauchy).

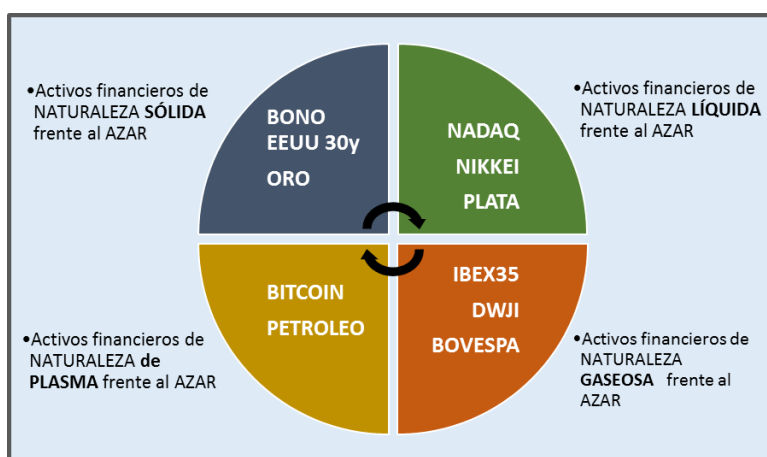
2.- Todos los mercados analizados, están sometidos a impactos relevantes fruto de la aparición de los "cisnes negros" descritos por N. Taleb. Sus rentabilidades medias se ven afectadas por éstos, como consecuencia de un efecto global en los mercados, y con una frecuencia cada vez más habitual en los últimos siete años, independientemente de su índice fractal.

3- Queda verificado que el número de rachas (positivas y negativas) que muestran todos los índices es similar y éste se estima alrededor del 50% para las positivas y negativas.

4.- Los mercados financieros tienen en la mayoría de casos una memoria larga fractal que los hace autosimilares. Por ello no puede decirse como interpreta la Teoría de Mercados eficientes que éstos se comporten, en la mayoría de casos, aleatoriamente. Aunque si analizamos la series financieras en el período histórico de 1993 a 2021, los mercados pasan por distintos estados de fractalidad. En los que predomina el "ruido negro" donde las series con nivel de persistencia se manifiestan en tendencias a largo plazo. También se puede añadir que, de 1993 a 2021, los mercados en general presentan sobre todo en el periodo más reciente de 2014 a 2021, una propensión a manifestarse o bien persistentes o bien anti-persistentes, en perjuicio del movimiento aleatorio o browniano.

5.- Según su coeficiente fractal, podemos clasificar éstos en tres grupos: los de fractalidad persistente con tendencias de memoria larga (NASDAQ, BOVESPA, DWJI, PETROLEO); los de comportamiento aleatorio o movimiento browniano con H cercanos a 0,50 (IBEX35, NIKKEI 225, PLATA, BITCOIN) y los que manifiestan movimientos de constante retorno a la media o antipersistencia con valores de $H < 0,5$ (ORO y BONO EEUU y). Según estos datos, la Teoría de los Mercados Eficientes sería ajustada para mercados cuyo Hurst es igual o cercano a 0,5 asociados al movimiento aleatorio. Del mismo modo, la Teoría de Mercados Fractales, donde el inversor puede pensar en estrategias a medio y largo plazo, sería solo adecuada para mercados como: IBEX35, NIKKEI 225, NASDAQ, BOVESPA, DWJI y PETROLEO.

6.- Finalmente, se han clasificado los distintos mercados según la naturaleza o estado de aleatoriedad/turbulencia/riesgo de acuerdo a los parámetros seleccionados para diseñar los cuatro cuadrantes. Con el fin de conformar una cartera de inversión basada en estos índices de mercado se ha asignado los siguientes estados, de mayor a menor nivel de azar e inestabilidad:



Los resultados obtenidos en este trabajo sobre valores de fractalidad en los diferentes índices de mercados, pueden compararse con los resultados obtenidos en otros trabajos de investigación. Por ejemplo en lo que se refiere al IBEX35, se ha obtenido un valor de Coeficiente

de Hurst estimado de 0,51 - 0,53. En el primer estudio comparativo (y uno de los mejores trabajos sobre fractalidad que se han consultado²⁰) encontramos un valor de HURST= 0,51 Mientras que en otros estudios se han obtenido $H=0,57 - 0,58$ (La hipótesis fractal...Aplicación del R/s al caso español)²¹; pero en otro de los trabajos²² el coeficiente de Hurst del IBEX35 = 0,50 según el estadístico de Ljung-Box, mientras que por el método de regresión lineal simple obtuvieron un $H=0,63$. En un tercer trabajo consultado²³ el coeficiente de Hurst obtenido para el IBEX35 de 1991 a 2000 fue de $H=0,63$. En el cuarto trabajo²⁴ consultado se obtuvo un valor medio de $H=0,49$ para el periodo de 2000 a 2013. Para valorar en la justa medida estas comparaciones, habría que señalar que cada estudio ha tomado un período de la series histórica distinto. En la totalidad de los estudios consultados, ninguno había tomado una serie tan actual, ni tampoco tan larga de 7000 días, como la que se ha empleado en este TFM.

Por lo que se refiere a las recomendaciones, después de la experiencia investigadora aquí descrita, se abren nuevas preguntas sin poder contestar aún. Estas preguntas versan sobre las siguientes cuestiones:

1) Mandelbrot desechó la idea de monofractalidad en las Series financieras, y se decantó por la idea de multifractalidad con el método de cálculo del espectro multifractal. No he podido en mi caso aplicar tal metodología por falta de conocimiento. Pero habiendo consultado otros trabajos científicos sería interesante profundizar en un futuro por esta vía.

2) Otro de los temas a investigar sería el aspecto del activo financiero como “estado de plasma” tal como recoge el estudio ya citado, sobre el tema de la analogía entre “multifractalidad” en los mercados como el ruso y la multifractalidad en la física termodinámica de los plasma.²⁵

3) La siguiente línea de investigación puede ser la relación subyacente entre la distribución y frecuencia de los “cisnes negros” y el coeficiente de fractalidad en periodos o ventanas de tiempo determinados. Solo he encontrado dos trabajos. En el primero de ellos se señalaba un relación inversa (poco justificada a mi parecer) entre el valor de Hurst y el impacto de los cisnes negros en los mercados. En el segundo trabajo consultado, que me ofrece más garantías (Prieto Funes. “Fractales en Finanzas: una triple aplicación”) se admitía claramente que no hay ningún signo que muestre una relación entre ambos fenómenos: la fractalidad y las colas pesadas de eventos extraordinarios.

4) Un cuarto tema a investigar sería sobre la relación entre la curva del (S/R) y el horizonte del inversor, vinculados ambos al coeficiente de Hurst. Este patrón indicaría una posible deducción acerca de cómo varía la curva de distribución de frecuencias en función de la ventana de tiempo para la estrategia a largo o a corto plazo del inversor. Se ha intentado encontrar la relación entre la volatilidad y las “colas pesadas” en términos de (S/R) y de qué % representa la Desv. Standart respecto a su Rango para cada ventana de tiempo, sin poder finalizar el análisis con éxito. (Ver cálculos y tabla en Anexo 8 y su gráfico asociado).

5) Finalmente creo que la herramienta de los cuadrantes de mal comportamiento para calificar los mercados o los activos que componen una cartera de inversión, en los cuatro estados posibles de turbulencia puede ser un método, desarrollado científicamente, práctico para equilibrar el riesgo de los inversores. Es necesario por esto, añadir el cuarto estado de aleatoriedad (plasma) a la clasificación de tres estados de azar, que pensaron Mandelbrot y Taleb.

²⁰ PRIETO FUNES, I. (2016) Fractales en Finanzas: una triple aplicación. Universidad Pontificia Comillas de Madrid.

²¹ DOLDAN, R.F. (2003) La hipótesis fractal como marco para la investigación de los mercados financieros. Aplicación del análisis R/S al caso español. Universidad de La Coruña

²² BLASCO de LAS HERAS, N & SANTAMARIA, M. (1994) Memoria a Largo plazo en el Mercado de Valores español. Universidades de Zaragoza y Navarra.

²³ MUÑOZ SAN MIGUEL. (2005). Movimiento browniano y geometría fractal. IBEX5. Revista electrónica de Comunicaciones y trabajos de ASEPUMA. Universidad de Sevilla.

²⁴ LATORRE PELLEGERO, M. (2014). Procedimientos numéricos para el cálculo de Cuantificadores bursátiles. Universidad de Zaragoza.

²⁵ V.P. BUDAEV. Turbulence in magnetized plasmas and financial markets: comparative study of multifractal statistics, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Volume 344, Issues 1–2,2004, Pages 299-307,ISSN 0378-4371

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIBROS:

Bachelier, L. (1900) Theory of speculation. En *The Random Character of Stock Market Prices*. Risk Books, 2000 (editor P. Cootner). Ver texto original en archivo PDF descargable, en el enlace http://www.nundam.org/item?id=ASENS_1900_3_!7__21_0

Beran, Jan, 1994. *Statistics for Long-Memory Processes*. Ver en enlace de <http://books.google.com>.

Falconer, K. J. (1990). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons.

Mandelbrot, Benoit. (1997). *Fractals and Scaling in Finance*. Springer New York.

Mandelbrot, Benoit and Hudson. (2004). *The (mis) Behavior of Markets*. math.yale.edu. (en español) *Fractales y finanzas: una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar*. Barcelona: Tusquets editores.

Mandelbrot, Benoît. (1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. Tusquets Editores.

Peters, Edgar. (1996). *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Peters, Edgar.(1993). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. John Wiley & Sons, Inc.

Taleb, Nassim N. (2007). *The black swan: the impact of the highly improbable*. Nueva York: Random House.

Taleb, Nassim N. (2012). *Antifragile: Things That Gain From Disorder*. Londres: Penguin.

Triana, Pablo.(2011). *The Number That Killed Us*. John Wiley & Sons Inc.

Triana, Pablo. "Lecturing Birds on flying. Can Mathematical Theories, destroy the financial markets". John Wiley & Sons Inc (2009). Libro accesible en: <https://uberty.org/wp-content/uploads/2015/07/Pablo-Triana-Nassim-Nicholas-Taleb-Lecturing-Birds-on-Flying.pdf>

ARTÍCULOS CIENTÍFICOS:

Acula Opazo y Álvarez Marín A. (2017) "Dependencia serial de largo plazo en el índice bursátil chileno, a través del coeficiente de Hurst y Hurst ajustado", *Journal of Economics, Finance and Administrative Science*, Vol. 22 Issue: 42, pp.37-50. Ver en <https://11doi.org/110.11081JEFAS-02-2017-0047>

Budaev, V.P, (2004). Turbulence in magnetized plasmas and financial markets: comparative study of multifractal statistics, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 344, Issues 1–2, p. 299-307.

Duarte J. y Mascareñas, J. (2014). Comprobación de la eficiencia débil en los principales mercados financieros latinoamericanos. *Estudios Gerenciales*. Vol. 30, p.365-375.

Fama, E.F. (1963). Mandelbrot and the stable paretian hypothesis. *The Journal of Business*, 36:420—429.

Fama, E. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Financ.* 25, 383-417.

Izquierdo Martín, J.(1998). El declive de los Grandes Números. *Empiria: Revista de metodología de ciencias sociales*, ISSN 1139-5737, N° 1, págs. 51-84.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=199620>

Hurst, H.E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Volume 116, Pages 770--799.

Mandelbrot, B. & Wallis J.R. (1969). Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long run statistical dependence. *Water Resources Research*, Vol. 5.5, 967-988.

Mandelbrot B. y Wallis, J. R. (1968). Noah, Joseph, and operational hydrology. *Water Resources Research* 4, no. 5:909-918.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36:394-419.

Osborne, E.(1959). M. F. M. Brownian motion in the stock market. *Operations Research*, N°7. Páginas 145-173.

Samuelson, Paul A. (1965). Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, N° 6, p.13-23.

Trías, R. y March, A. (2008). La influencia de Basilea II en la gestión del riesgo hipotecario. Ver en la web de [http:// lberfinanzas.com](http://lberfinanzas.com)

TRABAJOS UNIVERSITARIOS:

Batlle, A. y Grebol, S. (2009). *Fractales en los Mercados financieros*. Tesis Universidad Pompeu Fabra.

Blasco de Las Heras, N & Santamaría, M. (1994) *Memoria a Largo plazo en el Mercado de Valores español*. Universidades de Zaragoza y Navarra.

Doldán, R.F. (2003) *La hipótesis fractal como marco para la investigación de los mercados financieros. Aplicación del análisis R/S al caso español*. Universidad de La Coruña

Muñoz San Miguel, J. (2002). *La dimensión fractal en el mercado de capitales*. Tesis en Facultad de Economía, Sevilla.

Muñoz San Miguel, J. (2002).. *Movimiento Browniano y Geometría fractal*. XII Jornadas ASEPUMA.

León, Carlos y Vivas Francisco. (2010). *Dependencia de largo plazo y la regla de la raíz del tiempo para escalar la volatilidad en el mercado colombiano*. Estudio para el Banco de la República de Colombia.

Prieto Funes, Ignacio.(2016) *Fractales en Finanzas: Una triple aplicación. Contraste de la aleatoriedad, la gestión de cisnes negros, y el Behavioral Finance*. Universidad Pontificia Comillas, Madrid.

Rodríguez Aguilar, R. (2012) *El coeficiente de Hurst y el parámetro alfa-estable para el análisis de las series financieras*. Román Rodríguez Aguilar. Escuela superior de Economía.

FUENTES ELECTRONICAS:

<https://algotradingacademia.com/son-los-mercados-aleatorios/>

<https://www.tradingsys.org/exponente-de-hurst-y-formaciones-de-precios/>

<https://www.afi.es/webAfi/descargas/1914098/1368472/Guia-practica-Sostenibilidad-y-Gestion-de-Activos-Afi-y-Allianz-Global-Investors.pdf> AFI: Guía práctica de Sostenibilidad y Gestión de Activos

<https://www.cnmv.es/porta/verDoc.axd?t=%7Bc5c9ca9b-d492-42ab-9f02-c369d26ec35d%7D>
CNMV: obligatoriedad de divulgación de información relativa a la sostenibilidad en el sector financiero

<https://environment.yale.edu/teeb/foundations/intro/> Yale University.

https://am.jpmorgan.com/blobgim/1383683505205/83456/JPM52791_JPMAM_ESG_Integration_Brochure.pdf J.P.MORGAN. "Building Stronger Portfolios – ESG Integration"

<https://assets.kpmg/content/dam/kpmg/xx/pdf/2020/02/sustainable-investing.pdf>
KPMG. Sustainable investing: fast-forwarding its evolution – KPMG: KPM. "Finanzas Sostenibles e integración en el marco de la gestión de Riesgos". 2020. KPMG Asesores SL.

<https://www.morningstar.es/es/news/203255/%C2%BFbaten-los-fondos-sostenibles-a-sus-rivales.aspx>

https://www.cnmv.es/DocPortal/Publicaciones/Fichas/Finanzas_Sostenibles.pdf
CNMV. Las Finanzas Sostenibles.

ANEXOS

INDICE

Anexo 1. Pruebas de Curtosis, asimetría y Rango

Anexo 2. Gráficos de campanas de Gauss en comparación con datos reales.

Anexo 3. Gráficos de la curvas de precios de cierre diarios en los 4 periodos históricos.

Anexo 4. Estrategia de riesgo sustentada en el análisis histórico.

Anexo 5. Veinte eventos extraordinarios de la Rentabilidad Logarítmica (12/2013-08/2021)

Anexo 6. Valores de Hurst para distintos ciclos de duración y según los índices de mercado.

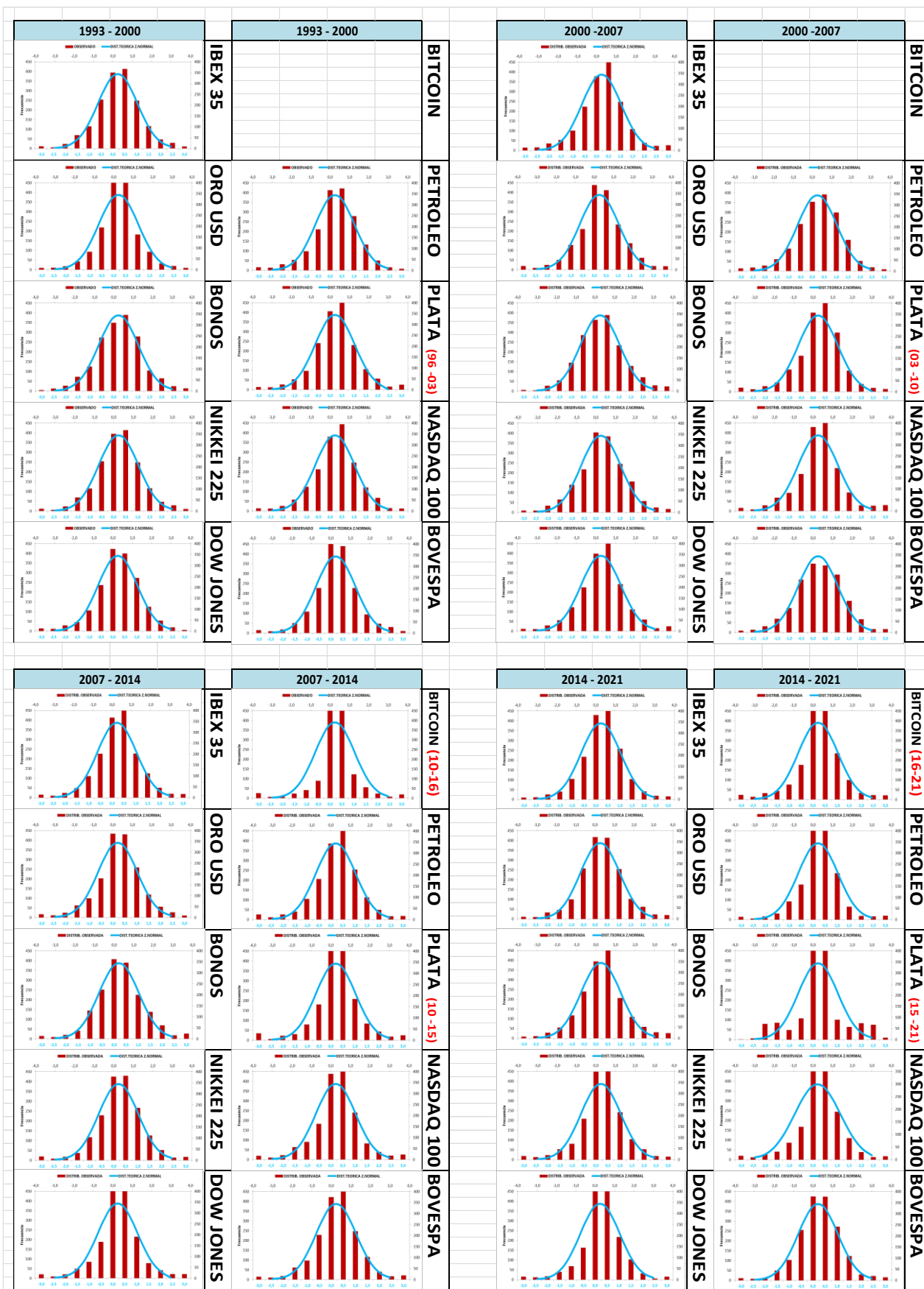
Anexo 7. Estimación del (R/S) a partir de la ecuación de Einstein para cada mercado en función del horizonte del inversor.

Anexo 8. Relación (DESVEST/RANGO) y Tiempo (horizonte del inversor).

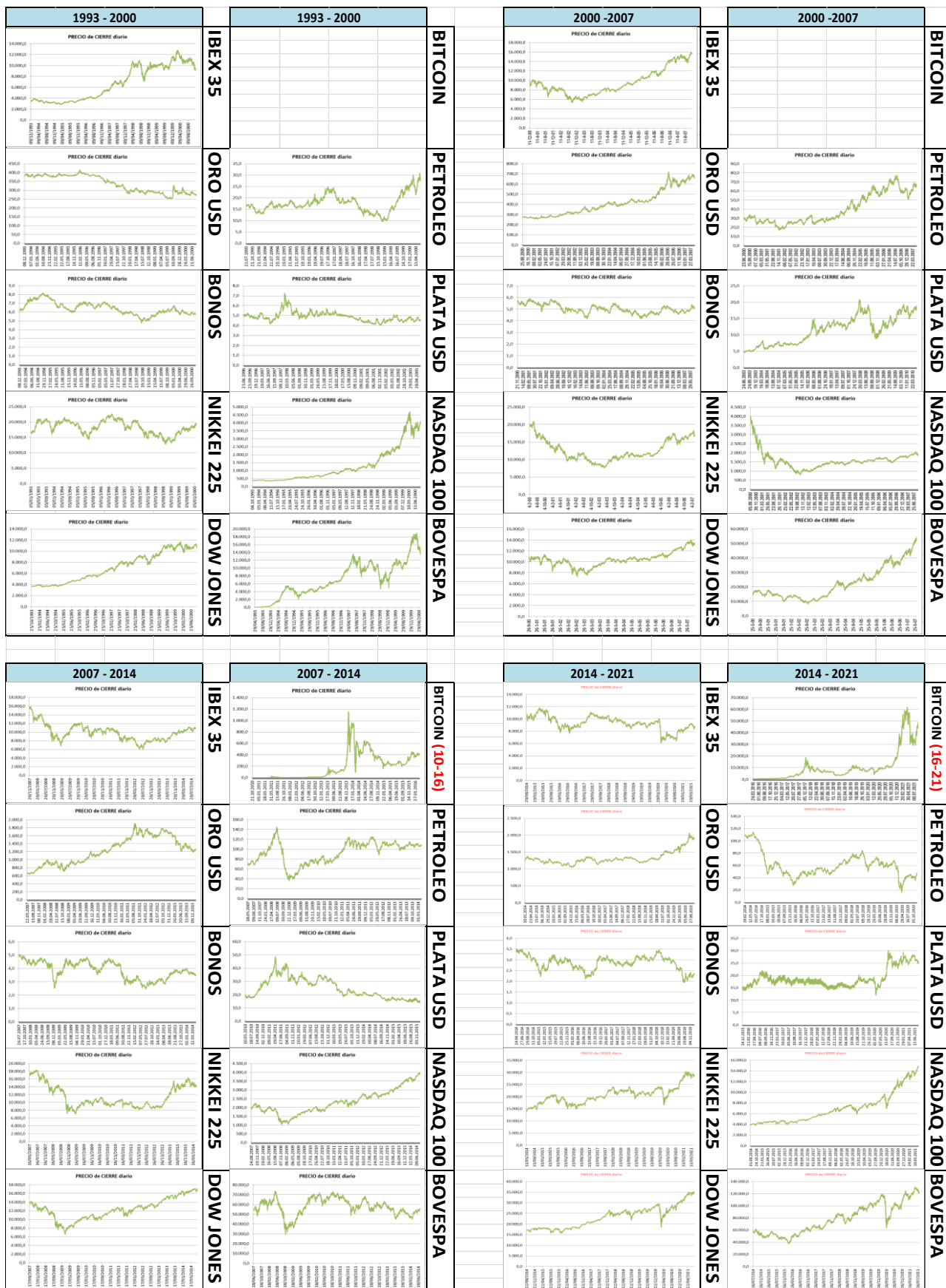
Anexo 1. Pruebas de Curtosis, asimetría y Rango

1993 - 2000		1993 - 2000		2000 -2007		2000 -2007	
Media	0,0001	IBEX 35	BITCOIN	Media	-0,0001	IBEX 35	BITCOIN
Error típico	0,0003			Error típico	0,0003		
Mediana	0,0002			Mediana	-0,0001		
Moda	#N/A			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0139			Desviación estándar	0,0140		
Varianza de la muestra	0,0002			Varianza de la muestra	0,0002		
Curtosis	2,6880			Curtosis	1,6781		
Coefficiente de asimetría	0,1818	Coefficiente de asimetría	-0,1560				
Rango	0,1362	Rango	0,1446				
Media	-0,0002	ORO USD	PETROLEO	Media	0,0005	ORO USD	PETROLEO
Error típico	0,0002			Error típico	0,0002		
Mediana	-0,0003			Mediana	0,0005		
Moda	0,0000			Mediana	0,0015		
Desviación estándar	0,0075			Moda	0,0000		
Varianza de la muestra	0,0001			Desviación estándar	0,0190		
Curtosis	28,2398			Varianza de la muestra	0,0004		
Coefficiente de asimetría	2,1279	Curtosis	3,9271				
Rango	0,1387	Coefficiente de asimetría	-0,4077				
Media	-0,0000	BONOS EEUU 30	PLATA USD	Media	-0,0001	BONOS EEUU 30	PLATA USD
Error típico	0,0002			Error típico	0,0003		
Mediana	0,0000			Mediana	0,0000		
Moda	0,0000			Moda	0,0000		
Desviación estándar	0,0082			Desviación estándar	0,0136		
Varianza de la muestra	0,0001			Varianza de la muestra	0,0002		
Curtosis	1,5232			Curtosis	3,3738		
Coefficiente de asimetría	0,2673	Coefficiente de asimetría	0,1136				
Rango	0,0752	Rango	0,1406				
Media	0,0001	NIKKEI 225	NASDAQ 100	Media	-0,0001	NIKKEI 225	NASDAQ 100
Error típico	0,0003			Error típico	0,0003		
Mediana	0,0002			Mediana	-0,0001		
Moda	#N/A			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0139			Desviación estándar	0,0188		
Varianza de la muestra	0,0002			Varianza de la muestra	0,0004		
Curtosis	2,6880			Curtosis	2,8321		
Coefficiente de asimetría	0,1818	Coefficiente de asimetría	-0,2480				
Rango	0,1362	Rango	0,2000				
Media	0,0006	DOW JONES	BOVESPA	Media	0,0036	DOW JONES	BOVESPA
Error típico	0,0002			Error típico	0,0008		
Mediana	0,0007			Mediana	0,0033		
Moda	0,0000			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0098			Desviación estándar	0,0319		
Varianza de la muestra	0,0001			Varianza de la muestra	0,0010		
Curtosis	5,4265			Curtosis	7,3518		
Coefficiente de asimetría	-0,5469	Coefficiente de asimetría	0,5114				
Rango	0,1231	Rango	0,4604				
Media	-0,0002	IBEX 35	BITCOIN (10-16)	Media	-0,0001	IBEX 35	BITCOIN (16-21)
Error típico	0,0004			Error típico	0,0003		
Mediana	0,0003			Mediana	0,0004		
Moda	0,0000			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0174			Desviación estándar	0,0135		
Varianza de la muestra	0,0003			Varianza de la muestra	0,0002		
Curtosis	5,2624			Curtosis	17,5584		
Coefficiente de asimetría	0,1899	Coefficiente de asimetría	-1,4679				
Rango	0,2307	Rango	0,2338				
Media	0,0004	ORO USD	PETROLEO	Media	0,0002	ORO USD	PETROLEO
Error típico	0,0003			Error típico	0,0002		
Mediana	0,0007			Mediana	0,0002		
Moda	0,0000			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0131			Desviación estándar	0,0085		
Varianza de la muestra	0,0002			Varianza de la muestra	0,0001		
Curtosis	5,6939			Curtosis	3,6929		
Coefficiente de asimetría	-0,2726	Coefficiente de asimetría	-0,1162				
Rango	0,1931	Rango	0,1059				
Media	-0,0002	BONOS EEUU 30	PLATA USD	Media	-0,0002	BONOS EEUU 30	PLATA USD
Error típico	0,0004			Error típico	0,0003		
Mediana	-0,0003			Mediana	0,0000		
Moda	0,0000			Moda	0,0000		
Desviación estándar	0,0173			Desviación estándar	0,0141		
Varianza de la muestra	0,0003			Varianza de la muestra	0,0002		
Curtosis	2,1782			Curtosis	2,4858		
Coefficiente de asimetría	-0,0986	Coefficiente de asimetría	0,1763				
Rango	0,1613	Rango	0,1565				
Media	-0,0001	NIKKEI 225	NASDAQ 100	Media	0,0004	NIKKEI 225	NASDAQ 100
Error típico	0,0004			Error típico	0,0003		
Mediana	0,0004			Mediana	0,0007		
Moda	#N/A			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0174			Desviación estándar	0,0154		
Varianza de la muestra	0,0003			Varianza de la muestra	0,0002		
Curtosis	7,4630			Curtosis	7,4010		
Coefficiente de asimetría	-0,5682	Coefficiente de asimetría	-0,1465				
Rango	0,2535	Rango	0,2296				
Media	0,0001	DOW JONES	BOVESPA	Media	0,0000	DOW JONES	BOVESPA
Error típico	0,0003			Error típico	0,0005		
Mediana	0,0005			Mediana	0,0006		
Moda	#N/A			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0134			Desviación estándar	0,0189		
Varianza de la muestra	0,0002			Varianza de la muestra	0,0004		
Curtosis	9,1437			Curtosis	6,6108		
Coefficiente de asimetría	-0,0474	Coefficiente de asimetría	0,0253				
Rango	0,1871	Rango	0,2577				
Media	-0,0001	IBEX 35	BITCOIN (10-16)	Media	-0,0001	IBEX 35	BITCOIN (16-21)
Error típico	0,0004			Error típico	0,0003		
Mediana	0,0003			Mediana	0,0004		
Moda	0,0000			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0174			Desviación estándar	0,0135		
Varianza de la muestra	0,0003			Varianza de la muestra	0,0002		
Curtosis	5,2624			Curtosis	17,5584		
Coefficiente de asimetría	0,1899	Coefficiente de asimetría	-1,4679				
Rango	0,2307	Rango	0,2338				
Media	0,0004	ORO USD	PETROLEO	Media	0,0002	ORO USD	PETROLEO
Error típico	0,0003			Error típico	0,0002		
Mediana	0,0007			Mediana	0,0002		
Moda	0,0000			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0131			Desviación estándar	0,0085		
Varianza de la muestra	0,0002			Varianza de la muestra	0,0001		
Curtosis	5,6939			Curtosis	3,6929		
Coefficiente de asimetría	-0,2726	Coefficiente de asimetría	-0,1162				
Rango	0,1931	Rango	0,1059				
Media	-0,0002	BONOS EEUU 30	PLATA USD	Media	-0,0002	BONOS EEUU 30	PLATA USD
Error típico	0,0004			Error típico	0,0003		
Mediana	-0,0003			Mediana	0,0000		
Moda	0,0000			Moda	0,0000		
Desviación estándar	0,0173			Desviación estándar	0,0141		
Varianza de la muestra	0,0003			Varianza de la muestra	0,0002		
Curtosis	2,1782			Curtosis	2,4858		
Coefficiente de asimetría	-0,0986	Coefficiente de asimetría	0,1763				
Rango	0,1613	Rango	0,1565				
Media	-0,0001	NIKKEI 225	NASDAQ 100	Media	0,0004	NIKKEI 225	NASDAQ 100
Error típico	0,0004			Error típico	0,0003		
Mediana	0,0004			Mediana	0,0007		
Moda	#N/A			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0174			Desviación estándar	0,0154		
Varianza de la muestra	0,0003			Varianza de la muestra	0,0002		
Curtosis	7,4630			Curtosis	7,4010		
Coefficiente de asimetría	-0,5682	Coefficiente de asimetría	-0,1465				
Rango	0,2535	Rango	0,2296				
Media	0,0001	DOW JONES	BOVESPA	Media	0,0000	DOW JONES	BOVESPA
Error típico	0,0003			Error típico	0,0005		
Mediana	0,0005			Mediana	0,0006		
Moda	#N/A			Moda	#N/A		
Desviación estándar	0,0134			Desviación estándar	0,0189		
Varianza de la muestra	0,0002			Varianza de la muestra	0,0004		
Curtosis	9,1437			Curtosis	6,6108		
Coefficiente de asimetría	-0,0474	Coefficiente de asimetría	0,0253				
Rango	0,1871	Rango	0,2577				

Anexo 2. Gráficos de campanas de Gauss en comparación con datos reales.



Anexo 3. Gráficos de la curvas de precios de cierre diarios en los 4 periodos históricos.



Anexo 4. Estrategia de riesgo sustentada en el análisis histórico.

RESUMEN para ESTRATEGIA de RIESGO			IBEX 35 Historical Data		
DIAS	1748	1751	1746	1750	1750 días x 4
INICIO	07/12/1993	11/12/2000	20/11/2007	29/09/2014	07/12/1993
FINAL	07/12/2000	19/11/2007	26/09/2014	03/08/2021	03/08/2021
MAXIMA RENTABILIDAD	0,077	0,072	0,135	0,082	0,135
MINIMA RENTABILIDAD	-0,060	-0,072	-0,096	-0,152	-0,152
RENTABILIDAD MEDIA	0,000	-0,000	-0,000	0,000	-0,000
COLAS GRUESAS GANAN	0,021	0,028	0,022	0,019	0,028
COLAS GRUESAS PERDID	0,024	0,037	0,028	0,026	0,037
DESV. STANDART	0,014	0,014	0,017	0,013	0,015
RESUMEN para ESTRATEGIA de RIESGO			XAU/USD ORO		
DIAS	1748	1751	1746	1750	1750 días x 4
INICIO	07.12.1993	25.08.2000	22.05.2007	30.01.2014	07.12.1993
FINAL	24.08.2000	21.05.2007	29.01.2014	20.10.2020	20.10.2020
MAXIMA RENTABILIDAD	0,0923	0,0598	0,1044	0,0469	0,1044
MINIMA RENTABILIDAD	-0,0463	-0,0729	-0,0888	-0,0589	-0,0888
RENTABILIDAD MEDIA	-0,0002	0,0005	0,0004	0,0000	0,0002
COLAS GRUESAS GANAN	0,0240	0,0200	0,0206	0,0246	0,0246
COLAS GRUESAS PERDID	0,0212	0,0229	0,0292	0,0309	0,0309
DESV. STANDART	0,0075	0,0100	0,0131	0,0085	0,0098
RESUMEN para ESTRATEGIA de RIESGO			BONO EEUU30 años		
DIAS	1748	1751	1746	1750	1750 días x 4
INICIO	07.12.1993	21.11.2000	26.07.2007	24.04.2014	07.12.1993
FINAL	20.11.2000	25.07.2007	23.04.2014	26.12.2019	26.12.2019
MAXIMA RENTABILIDAD	4,7%	4,1%	7,6%	8,8%	8,8%
MINIMA RENTABILIDAD	-2,9%	-6,6%	-8,5%	-6,8%	-8,5%
RENTABILIDAD MEDIA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
COLAS GRUESAS GANAN	2,7%	3,0%	2,5%	3,3%	3,3%
COLAS GRUESAS PERDID	2,5%	1,8%	2,4%	2,7%	2,7%
DESV. STANDART	0,0082	0,0094	0,0173	0,0141	0,0122
RESUMEN para ESTRATEGIA de RIESGO			NIKKEI 225		
DIAS	1748	1751	1746	1750	1750 días x 4
INICIO	04/01/1993	04/02/2000	16/03/2007	13/05/2014	04/01/1993
FINAL	03/02/2000	15/03/2007	12/05/2014	05/07/2021	05/07/2021
MAXIMA RENTABILIDAD	7,7%	7,2%	13,2%	7,7%	13,2%
MINIMA RENTABILIDAD	-6,0%	-7,2%	-12,1%	-8,3%	-12,1%
RENTABILIDAD MEDIA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
COLAS GRUESAS GANAN	3,0%	2,3%	1,7%	1,9%	3,0%
COLAS GRUESAS PERDID	2,3%	2,9%	2,5%	3,1%	3,1%
DESV. STANDART	0,0139	0,0140	0,0174	0,0128	0,0145
RESUMEN para ESTRATEGIA de RIESGO			Dow Jones Industrial		
DIAS	1748	1751	1746	1750	1750 días x 4
INICIO	22/10/1993	26/09/2000	17/09/2007	22/08/2014	22/10/1993
FINAL	25/09/2000	14/09/2007	21/08/2014	04/08/2021	04/08/2021
MAXIMA RENTABILIDAD	4,9%	6,2%	10,5%	10,8%	10,8%
MINIMA RENTABILIDAD	-7,5%	-7,4%	-8,2%	-13,8%	-13,8%
RENTABILIDAD MEDIA	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
COLAS GRUESAS GANAN	1,9%	2,2%	2,4%	1,1%	2,4%
COLAS GRUESAS PERDID	3,0%	2,7%	2,8%	2,5%	3,0%
DESV. STANDART	0,0098	0,0105	0,0134	0,0118	0,0114
RESUMEN para ESTRATEGIA de RIESGO			BITCOIN		
DIAS	0	1978			1750 días x 4
INICIO			21.10.2010	24.03.2016	21.10.2010
FINAL			23.03.2016	22.08.2021	
MAXIMA RENTABILIDAD			163,1%	32,7%	163,1%
MINIMA RENTABILIDAD			-85,7%	-51,5%	-85,7%
RENTABILIDAD MEDIA			0,4%	0,2%	0,3%
COLAS GRUESAS GANAN			1,4%	2,2%	2,2%
COLAS GRUESAS PERDID			2,2%	2,9%	2,9%
DESV. STANDART			0,0970	0,0448	0,0709

RESUMEN para ESTRATEGIA de RIESGO		PETROLEO BRENDT (\$ USA/barril)				
DIAS	1748	1751	1746	1750	1750 días x 4	
INICIO	22.07.1993	23.06.2000	18.05.2007	19.02.2014	22.07.1993	
FINAL	22.06.2000	17.05.2007	18.02.2014	27.11.2020	27.11.2020	
MAXIMA RENTABILIDAD	12,9%	6,8%	10,7%	22,8%	22,8%	
MINIMA RENTABILIDAD	-10,8%	-15,3%	-10,0%	-37,6%	-37,6%	
RENTABILIDAD MEDIA	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	
COLAS GRUESAS GANAN	1,8%	1,5%	1,9%	2,1%	2,1%	
COLAS GRUESAS PERDID	3,5%	3,5%	3,5%	2,0%	3,5%	
DESV. STANDART	0,0190	0,0195	0,0181	0,0255	0,0205	
RESUMEN para ESTRATEGIA de RIESGO		PLATA diario (\$ USA/Onza)				
DIAS	1748	1751	1746	1750	1750 días x 4	
INICIO	24.06.1996	24.06.2003	10.05.2010	14.12.2015	24.06.1996	
FINAL	23.06.2003	09.05.2010	13.12.2015	29.07.2021	29.07.2021	
MAXIMA RENTABILIDAD	7,7%	12,2%	12,1%	11,6%	12,2%	
MINIMA RENTABILIDAD	-6,4%	-14,8%	-19,5%	-12,7%	-19,5%	
RENTABILIDAD MEDIA	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	
COLAS GRUESAS GANAN	2,4%	1,8%	2,3%	4,9%	4,9%	
COLAS GRUESAS PERDID	3,0%	2,9%	3,5%	5,0%	5,0%	
DESV. STANDART	0,0136	0,0229	0,0226	0,0398	0,0247	
RESUMEN para ESTRATEGIA de RIESGO		NASDAQ 100 (USA)				
DIAS	1748	1751	1746	1750	1750 días x 4	
INICIO	01.10.1993	05.09.2000	24.08.2007	01.08.2014	01.10.1993	
FINAL	01.09.2000	23.08.2007	31.07.2014	14.07.2021	14.07.2021	
MAXIMA RENTABILIDAD	9,6%	17,2%	11,8%	9,6%	17,2%	
MINIMA RENTABILIDAD	-10,4%	-9,5%	-11,1%	-13,0%	-13,0%	
RENTABILIDAD MEDIA	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	
COLAS GRUESAS GANAN	2,0%	3,2%	2,6%	1,7%	3,2%	
COLAS GRUESAS PERDID	2,9%	2,4%	2,9%	3,4%	3,4%	
DESV. STANDART	0,0188	0,0210	0,0154	0,0133	0,0171	
RESUMEN para ESTRATEGIA de RIESGO		BOVESPA				
DIAS	1748	1752	1746	1750	1750 días x 4	
INICIO	28/04/1993	25/05/2000	18/06/2007	16/07/2014	28/04/1993	
FINAL	24/05/2000	15/06/2007	15/07/2014	12/08/2021	12/08/2021	
MAXIMA RENTABILIDAD	28,8%	7,3%	13,7%	13,0%	28,8%	
MINIMA RENTABILIDAD	-17,2%	-7,5%	-12,1%	-16,0%	-17,2%	
RENTABILIDAD MEDIA	0,4%	0,1%	0,0%	0,0%	0,1%	
COLAS GRUESAS GANAN	3,0%	1,8%	2,1%	2,1%	3,0%	
COLAS GRUESAS PERDID	2,4%	3,3%	2,3%	1,8%	3,3%	
DESV. STANDART	0,0319	0,0178	0,0189	0,0171	0,0214	

Anexo 5. Veinte eventos extraordinarios de la Rentabilidad Logarítmica (12/2013-08/2021)

IBEX 35 Historial Data 10 MAXIMOS y 10 MINIMOS								07/12/1993	02/08/2021
Id	Date	Open	High	Low	Close	Valor de c Volumen:10	Rtdo. LOG		
1187	10/09/1998	8402	8402	7739	7904	7904	0	-0,07	
1196	23/09/1998	7694	8018	7694	8008	8008	0	0,06	
1203	02/10/1998	7361	7361	6870	7157	7157	0	-0,07	
1269	13/01/1999	9802	9802	9061	9322	9322	0	-0,07	
3540	21/01/2008	13477	13494	12626	12626	545200		-0,08	
3543	24/01/2008	12557	13107	12491	13107	13107		0,08	
3711	19/09/2008	10779	11558	10779	11558	708000		0,08	
3726	10/10/2008	9443	9462	8835	8998	596400		-0,10	
3727	13/10/2008	9559	9956	9357	9956	407600		0,10	
3734	22/10/2008	9584	9595	8928	8995	8995		-0,09	
3739	29/10/2008	8376	8650	8260	8650	8650		0,09	
3757	24/11/2008	8174	8623	8093	8623	345000		0,08	
3767	08/12/2008	8894	9062	8825	9037	214800		0,06	
4123	10/05/2010	9059	10352	9059	10352	10352		0,13	
5691	24/06/2016	8264	8328	7743	7788	108447500		-0,13	
6637	09/03/2020	7884	8023	7621	7709	598769200		-0,08	
6640	12/03/2020	7041	7078	6347	6391	723609100		-0,15	
6642	16/03/2020	6331	6363	5815	6107	583614700		-0,08	
6648	24/03/2020	6433	6167	6404	6717	301211900		0,08	
6809	09/11/2020	6972	7535	6946	7459	751200600		0,08	

XAU/USD ORO: precio diario de una Onza de Oro en dólares 07.12.1993 19.10.2020									
Id	Date	Open	High	Low	Close	Valor de c Volumen:10	Rtdo. L		
1511	27/09/1999	273	283	283	283	283	0	0,05	
1512	28/09/1999	283	309	309	309	309	0	0,09	
1605	04/02/2000	288	315	315	315	315	0	0,09	
1939	18/05/2001	274	286	286	286	286	0	0,05	
2021	11/09/2001	274	289	289	289	289	0	0,06	
3257	13/06/2006	605	605	562	563	563	0	-0,07	
5872	24/06/2006	1254	1359	1252	1316	1316	0	0,05	
3847	17/09/2008	777	868	776	864	864	0	0,10	
3864	10/10/2008	915	935	828	851	851	0	-0,07	
3868	16/10/2008	849	850	785	806	806	0	-0,05	
3872	22/10/2008	777	777	722	730	730	0	-0,06	
3881	04/11/2008	724	769	723	765	765	0	0,06	
3894	21/11/2008	745	802	744	800	800	0	0,07	
3900	01/12/2008	816	819	769	771	771	0	-0,06	
3939	23/01/2009	857	904	853	899	899	0	0,05	
4747	29/02/2012	1785	1791	1688	1695	1695	0	-0,05	
5038	12/04/2013	1561	1565	1478	1479	1479	0	-0,05	
5039	15/04/2013	1478	1496	1337	1353	1353	0	-0,09	
5087	20/06/2013	1352	1349	1277	1278	1278	0	-0,06	
6946	11/08/2020	2027	2032	1902	1911	1911	0	-0,06	

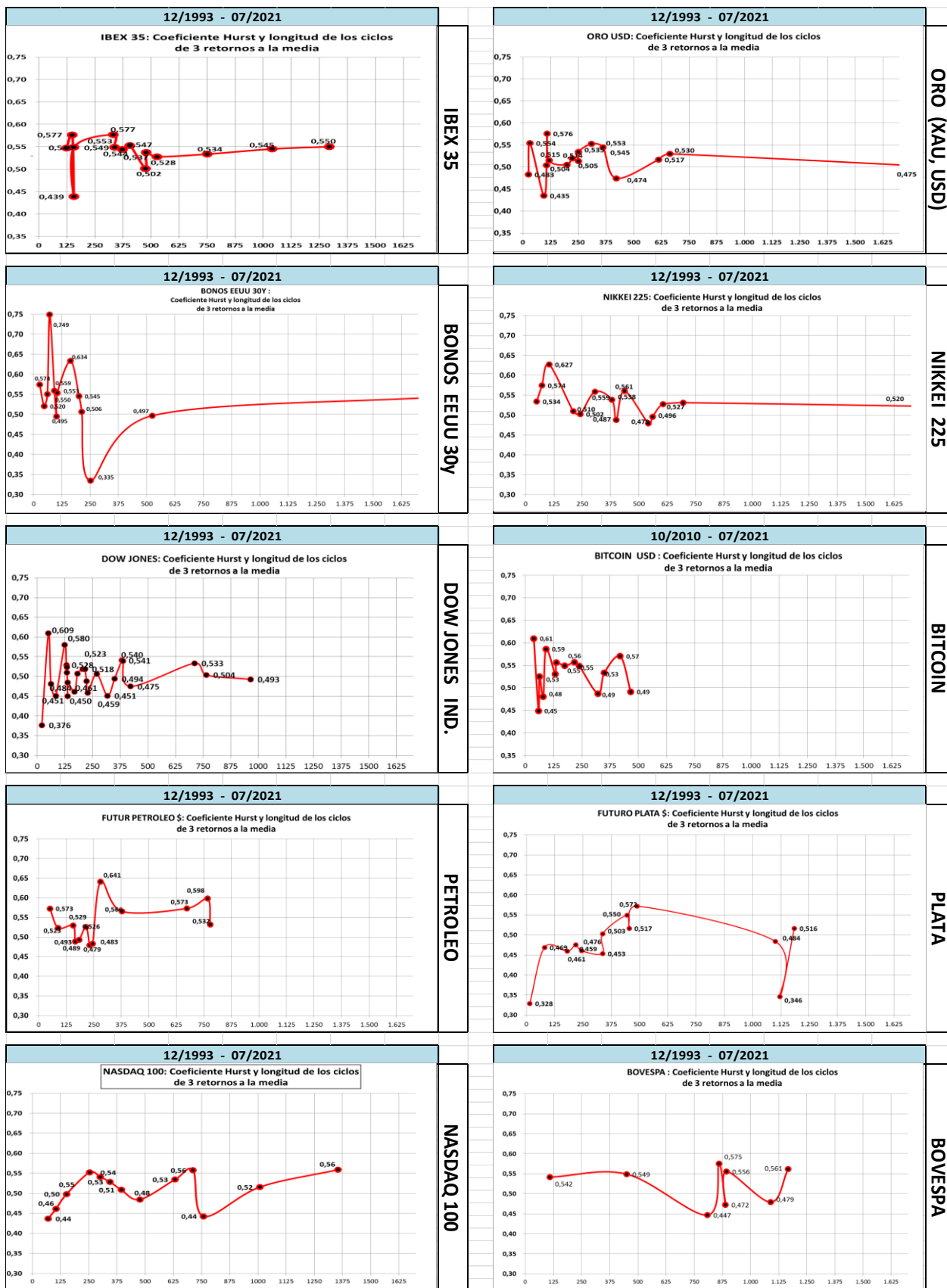
BONO EEUU30 años 10 MAXIMOS y 10 MINIMOS								07.12.1993	25.12.2018
Id	Date	Open	High	Low	Close	Valor de c Volumen:10	Rtdo. LOG		
1985	31/10/2001	4,87	4,87	4,87	4,87	4,87	0	-0,07	
3786	15/09/2008	4,02	4,02	4,02	4,02	4,02	160	-0,07	
3838	01/12/2008	3,20	3,20	3,20	3,20	3,20	135	-0,07	
3849	16/12/2008	2,72	2,72	2,72	2,72	2,72	114	-0,09	
3861	05/01/2009	3,03	3,03	3,03	3,03	3,03	129	0,08	
3872	21/01/2009	3,18	3,18	3,18	3,18	3,18	185	0,06	
3878	29/01/2009	3,62	3,62	3,62	3,62	3,62	165	0,06	
3911	18/03/2009	3,54	3,54	3,54	3,54	3,54	144	-0,08	
4514	11/08/2011	3,53	3,82	3,51	3,77	3,77	117	0,07	
4542	21/09/2011	3,21	3,25	2,99	3,00	3,00	118	-0,07	
4543	22/09/2011	2,99	3,00	2,77	2,80	2,80	123	-0,07	
4550	03/10/2011	2,92	2,94	2,72	2,72	2,72	127	-0,07	
4567	27/10/2011	3,22	3,46	3,20	3,45	3,45	131	0,07	
4569	31/10/2011	3,37	3,38	3,13	3,13	3,13	189	-0,08	
4789	14/09/2012	2,94	3,11	2,94	3,09	3,09	106	0,05	
4999	05/07/2013	3,51	3,72	3,49	3,71	3,71	253	0,06	
5491	03/02/2015	2,26	2,39	2,25	2,39	2,39	204	0,06	
5573	11/05/2015	2,89	3,05	2,88	3,05	3,05	171	0,05	
6039	09/11/2016	2,62	2,89	2,52	2,86	2,86	96	0,09	
6884	14/08/2019	2,16	2,17	2,02	2,02	2,02	70	-0,07	

NIKKEI 225 10 MAXIMOS y 10 MINIMOS										04/01/1993	02/07/2021
Id	Date	Open	High	Low	Close	Valor de c Volumen:10	Rtdo. LOG				
1266	31/01/1994	18.791	20.229	18.791	20.229,12	20.229,12	0	0,08			
2206	17/11/1997	15.154	16.283	15.154	16.283,32	16.283,32	0	0,08			
1799	17/04/2000	20.342	20.342	18.604	19.008,64	19.008,64	0	-0,07			
2027	21/03/2001	12.184	13.104	12.101	13.103,94	13.103,94	0	0,07			
3696	07/01/2008	14.549	14.668	14.439	14.500,55	14.500,55	139,8	-0,07			
3884	08/10/2008	10.012	10.012	9.160	9.203,32	9.203,32	205,5	-0,10			
3886	10/10/2008	9.016	9.016	8.115	8.276,43	8.276,43	247,3	-0,10			
3887	14/10/2008	8.408	9.456	8.408	9.447,57	9.447,57	169,3	0,13			
3889	16/10/2008	9.401	9.401	8.458	8.458,45	8.458,45	186,2	-0,12			
3895	24/10/2008	8.391	8.391	7.647	7.649,08	7.649,08	194,7	-0,10			
3898	29/10/2008	7.742	8.212	7.742	8.211,90	8.211,90	222,9	0,07			
3899	30/10/2008	8.270	8.031	8.270	9.029,76	9.029,76	226,6	0,09			
3913	20/11/2008	8.150	8.150	7.703	7.703,04	7.703,04	154,3	-0,07			
4472	15/03/2011	9.442	9.442	8.228	8.605,15	8.605,15	415,7	-0,11			
5010	23/05/2013	15.740	15.943	14.484	14.483,98	14.483,98	595,2	-0,08			
5576	09/09/2015	17.758	18.771	17.757	18.770,51	18.770,51	201,7	0,07			
5678	15/02/2016	15.248	16.155	15.244	16.022,58	16.022,58	232,2	0,07			
5767	24/06/2016	16.334	16.389	14.864	14.952,02	14.952,02	263	-0,08			
6683	04/03/2020	17.207	18.100	17.197	18.092,35	18.092,35	147,3	0,07			
6684	25/03/2020	18.447	19.564	18.447	19.564,63	19.564,63	147,7	0,08			

Dow Jones Industrial Average (ADJI)								22/10/1993	03/08/2021
Id	Date	Open	High	Low	Close	Valor de c Volumen:10	Rtdo. LOG		
1015	27/10/1997	7714	7714	7160	7161	7161	9183	-0,07	
1991	17/09/2001	9580	9580	8883	8921	8921	56560	-0,07	
2205	24/07/2002	7698	8202	7533	8191	8191	56865	0,06	
3762	29/09/2008	11140	11140	10365	10365	38594		-0,07	
3770	09/10/2008	9262	9448	8579	8579	8579	43674	-0,08	
3772	13/10/2008	8462	9428	8462	9388	9388	39929	0,11	
3774	15/10/2008	9302	9309	8530	8578	8578	37435	-0,08	
3783	28/10/2008	8179	9082	8175	9065	9065	37216	0,10	
3795	13/11/2008	8281	8877	7965	8835	8835	47660	0,06	
3801	21/11/2008	7552	8072	7449	8046	8046	56901	0,06	
3806	01/12/2008	8827	8827	8141	8149	8149	32101	-0,08	
3882	23/03/2009	7279	7781	7279	7776	7776	51560	0,07	
6641	09/03/2020	24992	24992	23706	23851	23851	75043	-0,08	
6644	12/03/2020	21855	22838	21154	21201	21201	90826	-0,11	
6645	13/03/2020	21974	23190	21285	23186	23186	84308	0,09	
6646	16/03/2020	20918	21668	20116	20189	20189	77013	-0,14	
6652	24/03/2020	19722	20738	19649	20705	20705	79934	0,11	
6654	26/03/2020	21468	22595	21427	22552	22552	70518	0,06	
6661	06/04/2020	21694	22783	21694	22680	22680	61076	0,07	
6707	11/06/2020	26283	26294	25083	25128	25128	64778	-0,07	

BITCOIN (BTC) USD										18.07.2010	22.08.2021
Id	Date	Open	High	Low	Close	Valor de c Volumen:10	Rtdo. LOG				
25	13/11/2010	0	0	0	0	0	0	0,2192K	0,41		
31	19/11/2010	0	0	0	0	0	0	0,216K	0,41		
69	27/12/2010	0	0	0	0	0	0	0,494K	0,41		
106	02/02/2011	1	1	1	1	1	1	5,63K	0,34		
235	11/06/2011	15	24	24	24	24	13	121,87K	-0,43		
237	13/06/2011	20	19	25	16	16	16	73,42K	0,44		
291	06/08/2011	7	10	10	6	6	6	102,41K	-0,51		
325	09/09/2011	5	7	7	4	4	4	217,43K	-0,44		
904	10/04/2013	165	230	266	105	105	105	190,18K	-0,57		
906	12/04/2013	117	125	140	54	54	54	556,47K	-0,71		
907	13/04/2013	93	117	130	86	86	86	238,35K	0,45		
912	18/04/2013	109	93	113	86	86	86	172,98K	0,31		
1220	20/02/2014	112	262	272	109	109	109	109,12K	-0,86		
1223	23/02/2014	310	256	349	220	220	220	38,55K	0,82		
1224	24/02/2014	174	310	317	132	132	132	95,1			

Anexo 6. Valores de Hurst para distintos “ciclos” de duración y según los índices de mercado.



Anexo 7. Estimación del (R/S) a partir de la ecuación de Einstein para cada mercado en función del horizonte del inversor.

IBEX		$y=1,0943 * x^{0,5142}$		x= n días de la ventana de tiempo			y= RANGO / DESVEST	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)	
6996	0,013	8,853	4,590		98,5	0,518	103,8	
3498	0,014	8,160	4,306	0,520	74,1	0,528	72,7	
1749	0,014	7,467	3,970	0,378	53,0	0,532	50,9	
875	0,014	6,774	3,599	0,266	36,5	0,531	35,6	
437	0,014	6,081	3,201	0,181	24,6	0,526	24,9	
219	0,014	5,387	2,872	0,130	17,7	0,533	17,5	
109	0,013	4,694	2,476	0,089	11,9	0,527	12,2	
22							5,4	
125							13,1	
250							18,7	

NIKKEI		$y=1,0573 * x^{0,5173}$		x= n días de la ventana de tiempo			y= RANGO / DESVEST	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)	
6996		8,853093836	4,565064873		96,1	0,515646277	103,1	
3498	0,01462441	8,159946656	4,293266791	0,500568836	73,2	0,526139076	72,0	
1749	0,01453633	7,466799475	4,011307487	0,379869028	55,2	0,537219126	50,3	
875	0,01440629	6,773652294	3,585321384	0,250341733	36,1	0,529304019	35,2	
437	0,01433484	6,080505114	3,164716716	0,165206097	23,7	0,520469378	24,6	
219	0,01411299	5,387357933	2,814021127	0,118166603	16,7	0,522337881	17,2	
109	0,01383549	4,694210753	2,486498225	0,086871617	12,0	0,529694629	12,0	
22							5,2	
125							12,9	
250							18,4	

PLATA		$y=0,8404 * x^{0,5094}$		x= n días de la ventana de tiempo			y= RANGO / DESVEST	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)	
6996	0,02644616	8,853093836	4,3376021	2,023760958	76,5	0,515646277	76,4	
3498	0,02556313	8,159946656	4,005628458	1,403577619	54,9	0,526139076	53,7	
1749	0,02469641	7,466799475	3,60585096	0,909148691	36,8	0,537219126	37,7	
875	0,02443118	6,773652294	3,258440097	0,635429079	26,0	0,529304019	26,5	
437	0,02424536	6,080505114	2,933828128	0,45579962	18,8	0,520469378	18,6	
219	0,02371944	5,387357933	2,572754739	0,310768914	13,1	0,522337881	13,1	
109	0,02348135	4,694210753	2,221454563	0,216515224	9,2	0,529694629	9,2	
22							4,1	
125							9,8	
250							14,0	

PETROLEO		$y=1,1773 * x^{0,5267}$		x= n días de la ventana de tiempo			y= RANGO / DESVEST	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)	
6996	0,02074122	8,853093836	4,853958272	2,66	128,2	0,515646277	124,7	
3498	0,02069074	8,159946656	4,362356033	1,623017757	78,4	0,526139076	86,6	
1749	0,02053257	7,466799475	4,10838207	1,249369956	60,8	0,537219126	60,1	
875	0,02018911	6,773652294	3,817209009	0,918142232	45,5	0,529304019	41,7	
437	0,01974402	6,080505114	3,385335431	0,582999259	29,5	0,520469378	29,0	
219	0,01924058	5,387357933	2,983849029	0,380265858	19,8	0,522337881	20,1	
109	0,01884178	4,694210753	2,606381489	0,255304894	13,5	0,529694629	14,0	
22							6,0	
125							15,0	
250							21,6	

BONOS EEUU30		$y=1,8652 * x^{0,4158}$		x= n días de la ventana de tiempo			y= RANGO / DESVEST	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)	
6996	0,01277419	8,853093836	4,023739381	0,714202036	55,9	0,45450093	74,0	
3498	0,01277419	8,159946656	4,105477026	0,474955306	60,7	0,503125474	55,5	
1749	0,01229637	7,466799475	3,866928477	0,38869469	47,8	0,517882995	41,6	
875	0,01222725	6,773652294	3,619632054	0,305251342	37,3	0,534369332	31,2	
437	0,01213889	6,080505114	3,240339532	0,21041787	25,5	0,532906308	23,4	
219	0,01198887	5,387357933	2,835173826	0,142076396	17,0	0,52626424	17,5	
109	0,01184055	4,694210753	2,38929297	0,092105387	10,9	0,508987154	13,1	
22							6,7	
125							13,9	
250							18,5	

Mercados financieros y su naturaleza fractal

ORO Xau		$y=0,6594 * x^{0,5947}$		$x= n \text{ días de la ventana de tiempo}$		$y= \text{RANGO / DESVEST}$	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)
6996	0,01002064	8,853093836	4,929306531	1,385689908	138,3	0,556789143	127,6
3498	0,01425788	8,159946656	4,538878628	0,656379283	93,6	0,556238762	84,5
1749	0,0139928	7,466799475	3,873197183	0,343718997	48,1	0,518722539	55,9
875	0,01372822	6,773652294	3,517306666	0,245432762	33,7	0,519262949	37,0
437	0,01354662	6,080505114	3,124212457	0,167879335	22,7	0,513808047	24,5
219	0,01354662	5,387357933	2,835786246	0,125815842	17,0	0,526377917	16,2
109	0,01337128	4,694210753	2,466724981	0,088127656	11,8	0,525482368	10,8
22							4,1
125							11,6
250							17,6

DWJI		$y=0,9671 * x^{0,5259}$		$x= n \text{ días de la ventana de tiempo}$		$y= \text{RANGO / DESVEST}$	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)
6996		8,853093836	4,75221094		115,8	0,515646277	101,7
3498	0,011377	8,159946656	4,264028699	0,808857271	71,1	0,526139076	70,7
1749	0,01136137	7,466799475	3,921524576	0,57349163	50,5	0,537219126	49,1
875	0,01090606	6,773652294	3,520177239	0,368520188	33,8	0,529304019	34,1
437	0,01063035	6,080505114	3,105238386	0,237211308	22,3	0,520469378	23,7
219	0,01033466	5,387357933	2,804494735	0,170715444	16,5	0,522337881	16,4
109	0,01017002	4,694210753	2,465376933	0,119679926	11,8	0,529694629	11,4
22							4,9
125							12,3
250							17,6

NASDAQ 100		$y=0,2978 * x^{0,7053}$		$x= n \text{ días de la ventana de tiempo}$		$y= \text{RANGO / DESVEST}$	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)
6996	0,01741259	8,853093836	5,049653279	2,681090506	156,0	0,515646277	153,4
3498	0,01718996	8,159946656	4,477514335	1,50932526	88,0	0,526139076	94,1
1749	0,01714838	7,466799475	4,079895168	0,959627335	59,1	0,537219126	57,7
875	0,01622657	6,773652294	3,534679651	0,543318603	34,3	0,529304019	35,4
437	0,01584757	6,080505114	3,111832181	0,350051545	22,5	0,520469378	21,7
219	0,01558405	5,387357933	2,74534161	0,240462136	15,6	0,522337881	13,3
109	0,01544401	4,694210753	1,964168015	0,1101	7,1	0,529694629	8,2
22							2,6
125							9,0
250							14,6

BOVESPA		$y=0,2247 * x^{0,6841}$		$x= n \text{ días de la ventana de tiempo}$		$y= \text{RANGO / DESVEST}$	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)
6996	0,02230118	8,853093836	4,689476307	2,386	108,8	0,515646277	95,9
3498	0,02193092	8,159946656	4,060456668	1,2419	58,0	0,526139076	59,7
1749	0,02141178	7,466799475	3,531956228	0,725	34,2	0,537219126	37,2
875	0,02120454	6,773652294	3,089466242	0,4575	22,0	0,529304019	23,1
437	0,02082826	6,080505114	2,595862162	0,2723	13,4	0,520469378	14,4
219	0,02030856	5,387357933	2,206907875	0,1807	9,1	0,522337881	9,0
109	0,0198843	4,694210753	1,811628678	0,1217	6,1	0,529694629	5,6
22							1,9
125							6,1
250							9,8

BITCOIN		$y=1,6027 * x^{0,4555}$		$x= n \text{ días de la ventana de tiempo}$		$y= \text{RANGO / DESVEST}$	
Periodo	DESVEST	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)
6996	0,07559011	8,853093836	4,434914308	6,375640351	84,3	0,500945137	90,4
3498	0,07559011	8,159946656	4,252606288	5,313105547	70,3	0,521156138	65,9
1749	0,07093196	7,466799475	3,95222563	3,69208528	52,1	0,529306518	48,1
875	0,07079154	6,773652294	3,482638362	2,303944445	32,5	0,514144838	35,1
437	0,06706523	6,080505114	3,944963632	3,465559348	51,7	0,648788803	25,6
219	0,0625162	5,387357933	3,535462649	2,144986185	34,3	0,656251672	18,6
109	0,0575148	4,694210753	3,301918866	1,562373065	27,2	0,703402348	13,6
22							6,6
125							14,5
250							19,8

Anexo 8. Relación (DESVEST/RANGO) y Tiempo (horizonte del inversor).

IBEX $y=1,0943 * x^{0,5142}$													
Periodo	DESVEST		x= n días de la ventana de tiempo				y= RANGO / DESVEST		S/R	Tiempo (días)	S/R	+ - 1St/ R	Tiempo (días)
	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)							
6996	0,0130937	8,853093836	4,590290771		98,5	0,518495664	103,8	1,0%	6.996	18,6%	37,3%	22	
3498	0,01425788	8,159946656	4,305863496	0,519945327	74,1	0,5276828	72,7	1,4%	3.498	8,2%	16,4%	109	
1749	0,0139928	7,466799475	3,969572614	0,378493873	53,0	0,531629733	50,9	2,0%	1.749	7,6%	15,3%	125	
875	0,01372822	6,773652294	3,598555157	0,266206286	36,5	0,531257732	35,6	2,8%	875	5,7%	11,5%	219	
437	0,01354662	6,080505114	3,201149694	0,181305366	24,6	0,526461147	24,9	4,0%	437	5,3%	10,7%	250	
219	0,01354662	5,387357933	2,871593218	0,130402554	17,7	0,533024398	17,5	5,7%	219	4,0%	8,0%	437	
109	0,01337128	4,694210753	2,4759283	0,088942467	11,9	0,527442936	12,2	8,2%	109	2,8%	5,6%	875	
22							5,4	18,6%	22	2,0%	3,9%	1.749	
125							13,1	7,6%	125	1,4%	2,8%	3.498	
250							18,7	5,3%	250	1,0%	1,9%	6.996	

NIKKEI $y=1,0573 * x^{0,5173}$													
Periodo	DESVEST		x= n días de la ventana de tiempo				y= RANGO / DESVEST		S/R	Tiempo (días)	S/R	+S- S / R	Tiempo (días)
	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)							
6996		8,853093836	4,565064873		96,1	0,515646277	103,1	1,0%	6.996	19,1%	38,2%	22	
3498	0,01462441	8,159946656	4,293266791	0,500568836	73,2	0,526139076	72,0	1,4%	3.498	8,3%	16,7%	109	
1749	0,01453633	7,466799475	4,011307487	0,379869028	55,2	0,537219126	50,3	2,0%	1.749	7,8%	15,6%	125	
875	0,01440629	6,773652294	3,585321384	0,250341733	36,1	0,529304019	35,2	2,8%	875	5,8%	11,7%	219	
437	0,01433484	6,080505114	3,164716716	0,165206097	23,7	0,520469378	24,6	4,1%	437	5,4%	10,9%	250	
219	0,01411299	5,387357933	2,814021127	0,118166603	16,7	0,522337881	17,2	5,8%	219	4,1%	8,1%	437	
109	0,01383549	4,694210753	2,486498225	0,086871617	12,0	0,529694629	12,0	8,3%	109	2,8%	5,7%	875	
22							5,2	19,1%	22	2,0%	4,0%	1.749	
125							12,9	7,8%	125	1,4%	2,8%	3.498	
250							18,4	5,4%	250	1,0%	1,9%	6.996	

PLATA $y=0,8404 * x^{0,5094}$													
Periodo	DESVEST		x= n días de la ventana de tiempo				y= RANGO / DESVEST		S/R	Tiempo (días)	S/R	+S- S / R	Tiempo (días)
	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)							
6996	0,02644616	8,853093836	4,3376021	2,023760958	76,5	0,515646277	76,4	1,3%	6.996	24,6%	49,3%	22	
3498	0,02556313	8,159946656	4,005628458	1,403577619	54,9	0,526139076	53,7	1,9%	3.498	10,9%	21,8%	109	
1749	0,02469641	7,466799475	3,60585096	0,909148691	36,8	0,537219126	37,7	2,7%	1.749	10,2%	20,3%	125	
875	0,02443118	6,773652294	3,258440097	0,635429079	26,0	0,529304019	26,5	3,8%	875	7,7%	15,3%	219	
437	0,02424536	6,080505114	2,933828128	0,45579962	18,8	0,520469378	18,6	5,4%	437	7,1%	14,3%	250	
219	0,02371944	5,387357933	2,572754739	0,310768914	13,1	0,522337881	13,1	7,7%	219	5,4%	10,7%	437	
109	0,02348135	4,694210753	2,221454563	0,216515224	9,2	0,529694629	9,2	10,9%	109	3,8%	7,6%	875	
22							4,1	24,6%	22	2,7%	5,3%	1.749	
125							9,8	10,2%	125	1,9%	3,7%	3.498	
250							14,0	7,1%	250	1,3%	2,6%	6.996	

PETROLEO $y=1,1773 * x^{0,5267}$													
Periodo	DESVEST		x= n días de la ventana de tiempo				y= RANGO / DESVEST		S/R	Tiempo (días)	S/R	+S- S / R	Tiempo (días)
	LN(n)	LN(R/S)	Rango (Rt)	(R/S)	LN(R/S):LN(n)	E(R/S)							
6996	0,02074122	8,853093836	4,853958272	2,66	128,2	0,515646277	124,7	0,8%	6.996	16,7%	33,3%	22	
3498	0,02069074	8,159946656	4,362356033	1,623017757	78,4	0,526139076	86,6	1,2%	3.498	7,2%	14,3%	109	
1749	0,02053257	7,466799475	4,10838207	1,249369956	60,8	0,537219126	60,1	1,7%	1.749	6,7%	13,4%	125	
875	0,02018911	6,773652294	3,817209009	0,918142232	45,5	0,529304019	41,7	2,4%	875	5,0%	9,9%	219	
437	0,01974402	6,080505114	3,385335431	0,582999259	29,5	0,520469378	29,0	3,5%	437	4,6%	9,3%	250	
219	0,01924058	5,387357933	2,983849029	0,380265858	19,8	0,522337881	20,1	5,0%	219	3,5%	6,9%	437	
109	0,01884178	4,694210753	2,606381489	0,255304894	13,5	0,529694629	14,0	7,2%	109	2,4%	4,8%	875	
22							6,0	16,7%	22	1,7%	3,3%	1.749	
125							15,0	6,7%	125	1,2%	2,3%	3.498	
250							21,6	4,6%	250	0,8%	1,6%	6.996	

S/R para (-1 St +1)	% del Rg	horiz invers
St 25	50%	x
St 20	40%	x
St 15	30%	22
St 10	20%	100
St 5	10%	400
St 3,25	7,50%	875
St 2,5	5,0%	1750

