

La genèse du groupe de renormalisation wilsonien*

Sébastien Rivat¹

11 décembre 2024

À paraître dans la *Revue d'Histoire des Sciences* (volume 78, 2025)

Résumé : Les méthodes du groupe de renormalisation (GR) sont l'un des chefs-d'œuvre théoriques de la physique d'après-guerre dont les ressorts historiques restent encore largement inappréciés. Cet article retrace la genèse du GR de Kenneth Wilson de 1956 à 1965, en se penchant tout particulièrement sur sa relation avec le GR de Murray Gell-Mann et Francis Low publié en 1954. Je défends la thèse selon laquelle il n'y a, au final, que très peu de continuité méthodologique et conceptuelle entre leurs versions respectives. L'article conclut brièvement sur l'évolution du GR wilsonien de 1965 jusqu'au début des années 1970.

Mots-clés : histoire de la physique au 20^e siècle ; théorie quantique des champs ; groupe de renormalisation ; Kenneth Wilson ; Murray Gell-Mann ; Francis Low.

Abstract: Renormalisation Group (RG) methods are one of the theoretical masterpieces of postwar physics whose historical development still remains largely unexplored. This article traces the origins of Kenneth Wilson's RG from 1956 to 1965, with a particular focus on its relationship to Murray Gell-Mann and Francis Low's RG published in 1954. I argue that there is ultimately little methodological and conceptual continuity between their respective versions. The article briefly concludes with the evolution of the Wilsonian RG from 1965 to the early 1970s.

Keywords: history of 20th-century physics; quantum field theory; renormalization group; Kenneth Wilson; Murray Gell-Mann; Francis Low.

1. Introduction

Nous venons de célébrer les cinquante ans du groupe de renormalisation (GR) de Kenneth Wilson et les soixante-dix ans de celui de Murray Gell-Mann et Francis Low, dans leur

* Ce travail a été partiellement soutenu par la Fondation Volkswagen [projet 9D181].

¹ Sébastien Rivat, Centre de Philosophie Mathématique de Munich, LMU Munich, Geschwister-Scholl-Platz 1, 80539 Munich, Allemagne. Courriel : sebastien.rivat@lmu.de

formulation canonique publiée respectivement en 1974 et 1954². L'occasion semble propice pour revenir sur ces développements majeurs de l'histoire de la physique contemporaine, et d'autant plus propice qu'ils n'ont pour l'instant reçu que très peu d'attention de la part des historiens. Ceux-ci se sont en effet principalement concentrés sur la première partie du 20^e siècle, et tout particulièrement sur ce qui est aujourd'hui souvent considéré comme les deux pierres angulaires de la physique contemporaine, à savoir la relativité et la mécanique quantique non relativiste³. Pour l'œil averti, il ne fait toutefois aucun doute que ce qui s'est passé après 1945 est tout aussi important et révolutionnaire, aussi bien pour notre manière de formuler les théories physiques que de concevoir le monde. Les méthodes du GR, dont Wilson, Gell-Mann et Low sont trois figures incontournables, ont à cet égard joué un rôle fondamental. Elles ont notamment permis aux physiciens — et ce dans la plupart des domaines de la physique contemporaine, de la cosmologie à la gravité quantique — d'étudier systématiquement les systèmes physiques échelle par échelle et d'identifier les conditions sous lesquelles ces systèmes participent parfois tous de manière significative à la production de certains phénomènes physiques.

Je me propose de retracer ici la genèse du GR wilsonien dans les années 1960, en me concentrant tout particulièrement sur sa relation avec le GR formulé par Gell-Mann et Low en 1954⁴. Il existe bien quelques travaux historiques préliminaires à ce sujet, notamment de Silvan Schweber et Tian Yu Cao⁵. Leur traitement reste cependant très sommaire et laisse quelque peu en suspens la question cruciale de savoir s'il existe une continuité conceptuelle et méthodologique suffisamment significative entre les travaux de Gell-Mann et Low et ceux de Wilson. Je compte montrer dans ce qui suit que, malgré le fait que Wilson ait eu Gell-Mann comme directeur de thèse de 1958 à 1960, qu'il ait régulièrement interagi avec Low au début des années 1960, et qu'il ait été

² Murray Gell-Mann et Francis E. Low, Quantum Electrodynamics at Small Distances, *Physical Review*, 95/5 (1954): 1300-1312 ; Kenneth G. Wilson et John B. Kogut, The Renormalization Group and the ϵ -Expansion, *Physics Reports*, 12/2 (1974): 75-199.

³ Du côté de la mécanique quantique, voir, par ex., Olivier Darrigol, *From c-Numbers to q-Numbers: The Classical Analogy in the History of Quantum Theory* (Berkeley: University of California Press, 1992) ; Jagdish Mehra et Helmut Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory (Vol. 1-6)* (New York: Springer, 2001). Du côté de la relativité, voir, par ex., John Earman, Michel Janssen, et John Norton, éd., *The Attraction of Gravitation: New Studies in the History of General Relativity*, Einstein studies (Boston: Birkhäuser, 1993) ; Michel Janssen, John Norton, Jürgen Renn, Tilman Sauer et John Stachel, éd., *The Genesis of General Relativity* (Dordrecht: Springer, 2007). Pour quelques exceptions notables concernant la physique d'après-guerre, voir, par ex., Andrew Pickering, *Constructing Quarks: A Sociological History of Particle Physics* (Chicago: University of Chicago Press, 1984) ; Lillian Hoddeson, Laurie Brown, Michael Riordan et Max Dresden, éd., *The Rise of the Standard Model: Particle Physics in the 1960s and 1970s* (New York: Cambridge University Press, 1997) ; David Kaiser, *Drawing Theories Apart: The Dispersion of Feynman Diagrams in Postwar Physics* (Chicago: University of Chicago Press, 2005).

⁴ Voir Gell-Mann et Low, 1954, *op. cit.* in n. 2 ; Kenneth G. Wilson, Model Hamiltonians for Local Quantum Field Theory, *Physical Review*, 140/2B (1965): B445-57.

⁵ Voir, par ex., Tian Yu Cao et Silvan S. Schweber, The Conceptual Foundations and the Philosophical Aspects of Renormalization Theory, *Synthese*, 97/1 (1993): 33-108 ; Silvan S. Schweber, Hacking the Quantum Revolution: 1925-1975, *The European Physical Journal H*, 40/1 (2015): 53-149.

incontestablement influencé par leur article de 1954, il n'en reste pas moins que la continuité entre leurs travaux demeure très faible. Plus précisément, je compte montrer que Wilson poursuit une méthodologie radicalement différente de celle de Gell-Mann et Low, et fournit une interprétation physique explicite de l'idée de « transformation du groupe de renormalisation » et d'« échelle de renormalisation », contrairement à l'interprétation plutôt formaliste de Gell-Mann et Low en 1954, et ce *indépendamment* de sa rencontre avec la physique des états solides en 1965-1966 (plus connue aujourd'hui sous le nom de physique de la matière condensée). En un mot : nous avons affaire à deux formulations et conceptions du GR très différentes l'une de l'autre en 1954 et 1965, et dont on retrouve aujourd'hui certaines traces dans la théorie moderne du GR.

Quelques remarques préliminaires s'imposent. (i) L'histoire du GR est très riche et ne se réduit en aucun cas aux travaux de Wilson, Gell-Mann et Low. Léo Kadanoff est une autre figure majeure dans le cadre de la physique des états solides⁶. Ernst Stückelberg, André Petermann, Nikolay Bogoliubov et Dmitry Shirkov (entre autres) sont à l'origine d'une tradition plus mathématique des méthodes du GR⁷. Les travaux de Wilson, Gell-Mann et Low semblent toutefois avoir eu un impact bien plus significatif sur la physique de la matière condensée et des particules, et apparaissent dès lors comme un point de départ privilégié si l'on veut comprendre le développement conceptuel et méthodologique de la théorie moderne du GR. (ii) J'ai déjà abordé l'histoire des travaux de Wilson de 1956 à 1971 dans un autre article dédié à son premier concept de théorie effective⁸. Bien que mon angle d'attaque soit différent — je compte traiter exclusivement de sa première version du groupe de renormalisation —, cet article recoupe un certain nombre d'éléments discutés ci-dessous et en fournit à certaines occasions une analyse plus détaillée. Les lectrices et lecteurs y seront toutefois référés uniquement lorsque cela sera nécessaire. Pour le reste, le récit ci-dessous se suffit à lui-même. (iii) L'histoire du GR est particulièrement importante pour l'histoire de la physique française d'après-guerre, notamment vis-à-vis des travaux d'Édouard Brézin, Claude Itzykson, Jean Zinn-Justin, Jean-Bernard Zuber, et bien d'autres dans les années 1970-80. Aborder cette histoire m'entraînerait toutefois bien au-delà du contexte historique traité ici. Mais je réfère les lectrices et lecteurs à un récent article de Julia Menzel sur ce sujet⁹.

⁶ Leo P. Kadanoff, Scaling Laws for Ising Models near T_c , *Physica Physique Fizika*, 2/6 (1966): 263-72.

⁷ Ernst Stückelberg et André Petermann, La Normalisation des Constantes dans la Théorie des Quanta, *Helvetica Physica Acta*, 26 (1953): 499-520 ; Nikolai N. Bogoliubov et Dmitry V. Shirkov, On the Renormalization Group in Quantum Electrodynamics, *Doklady AN SSSR*, n° 103 (1955) ; Application of the Renormalization Group to Improve the Formulae of Perturbation Theory, *Doklady AN SSSR*, n° 103 (1955) ; *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (New York: Interscience Publishers, 1959). Pour plus de détails sur cette tradition, voir Laurie M. Brown, éd., *Renormalization: From Lorentz to Landau (and Beyond)* (Springer, 1993) ; James D. Fraser, The Twin Origins of Renormalization Group Concepts, *Studies in History and Philosophy of Science*, 89 (2021): 114-28.

⁸ Sébastien Rivat, Drawing Scales Apart: The Origins of Wilson's Conception of Effective Field Theories, *Studies in History and Philosophy of Science*, 90 (2021): 321-38.

⁹ Julia H. Menzel, Wilsonian Renormalization in the 1970s: Labor Markets, Geopolitics, and the Rise of a New Theory, *Historical Studies in the Natural Sciences*, 51/5 (2021): 605-33.

Le reste de l'article est organisé de la manière suivante. La section 2 retrace les premiers pas de Wilson vers la physique des hautes énergies à travers son travail de thèse. La section 3 clarifie le lien entre ce travail et l'article de Gell-Mann et Low de 1954, et fournit une analyse succincte de certains de ses éléments clés afin de faciliter la comparaison avec le GR wilsonien par la suite. La section 4 dépeint l'évolution des travaux de Wilson de 1961 à 1965 et explique la manière dont il en vint à formuler sa première version du GR en 1965. La section 5 analyse les résultats de Wilson à la lumière des travaux de Gell-Mann et Low. La section 6 clôt le récit en revenant brièvement sur l'évolution du GR wilsonien de 1965 jusqu'à sa formulation canonique de 1974, et en expliquant succinctement comment les différences les plus significatives entre le GR de Wilson et de Gell-Mann et Low se retrouvent aujourd'hui dans la théorie moderne du GR.

2. Un premier pas vers les hautes énergies (1956-1960)

Pour bien comprendre la trajectoire de Wilson et la relation qu'il entretient avec les travaux de Gell-Mann et Low, il est nécessaire de revenir aux années 1950 et à l'intérêt précoce que Wilson porte pour la structure des théories quantiques des champs (TQCs) à hautes énergies. Plaçons nous donc en 1956 à Caltech. Wilson vient juste d'avoir été accepté dans le *Graduate Program* du département de physique — l'équivalent américain d'un master et d'un doctorat — après avoir fait ses études de licence à Harvard de 1954 à 1956. Richard Feynman y occupe la position de professeur depuis 1951, après une année sabbatique passée au Brésil, et le jeune Gell-Mann vient juste d'y arriver en 1955, après un passage par Chicago et Columbia.

Bien que la situation va changer rapidement d'ici peu, nous sommes également à une période où la TQC jouit toujours d'une aura considérable et continue d'attirer les étudiants les plus brillants de la physique théorique¹⁰. Le succès des méthodes de renormalisation perturbatives dans le cadre de l'interaction électromagnétique vers la fin des années 1940 est toujours présent dans les esprits. Il est certes vrai que le comportement à hautes énergies de la théorie qui en résulte — l'électrodynamique quantique — est devenu plus incertain aux yeux des physiciens depuis peu¹¹. Les tentatives d'appliquer les mêmes méthodes aux interactions forte et faible n'ont également pas été aussi fructueuses que prévu : par exemple, dans le cas des modèles relativistes de l'interaction forte les plus réalistes, la valeur physique de la constante de couplage semble être trop grande pour pouvoir appliquer directement les méthodes perturbatives traditionnelles. Malgré cela, les

¹⁰ Pour l'histoire de la TQC jusqu'au début des années 1950, voir, par ex., Olivier Darrigol, *Les Débuts de la Théorie Quantique des Champs, 1925-1948* (Thèse de 3e cycle, France, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 1982) ; Silvan S. Schweber, *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga* (Princeton: Princeton University Press, 1994) ; Alexander Blum, *The State is not Abolished, It Withers Away: How Quantum Field Theory Became a Theory of Scattering*, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 60 (2017): 46-80.

¹¹ Pour plus de détails, voir Alexander Blum, manuscrit sur la consistance de la théorie quantique des champs dans la physique d'après-guerre (Cambridge: Cambridge University Press, sous contrat).

physiciens ont tout de même réussi à développer un certain nombre de modèles phénoménologiques dont le succès est indisputable. C'est par exemple le cas du modèle de l'interaction forte développé par Geoffrey Chew en 1953-1954¹². Et, de manière plus générale, il faut bien noter qu'il n'existe à ce stade pas d'alternative théorique plus probante que la TQC pour tenter de rendre compte des phénomènes subatomiques de manière complète et fondamentale.

Pour simplifier quelque peu, on peut dire que les physiciens qui s'intéressent à la TQC sont confrontés à deux problèmes théoriques fondamentaux au cours des années 1950 : (1) Comment unifier les particules subatomiques — dont le nombre a explosé depuis les années 1940 — ainsi que leurs interactions ? (2) Quelle est la structure des TQCs à hautes énergies ? Ces deux problèmes sont, bien entendu, reliés entre eux, comme cela est par exemple particulièrement clair dans la dissertation de Steven Weinberg¹³. Ils prennent également des formes légèrement différentes selon le contexte. Par exemple, le problème (2) revient dans sa formulation traditionnelle à résoudre le « problème de la renormalisation », c'est-à-dire, dans le cas le plus simple conceptuellement, à définir une théorie renormalisée qui reste prédictive lorsque l'on envoie à l'infini le paramètre d'énergie qui délimite son domaine (aussi appelé « échelle de coupure » ou *cut-off*). Mais, depuis peu, ce problème semble également être intimement lié au problème de comprendre la « structure non perturbative » des TQCs, c'est-à-dire leur structure lorsque la valeur de la constante de couplage est trop grande pour pouvoir utiliser les méthodes perturbatives traditionnelles. Les travaux de Gell-Mann et Low, d'une part, et de Lev Landau, Alexei Abrikosov et Isaak Khalatnikov, d'autre part, suggèrent en effet dès 1954 que la constante de couplage nue de l'interaction électromagnétique possède une valeur très grande à hautes énergies et pose donc le même type de problème que l'interaction forte¹⁴. Il s'avère que Wilson ne porte que très peu d'intérêt pour le problème (1). En revanche, il va rapidement concentrer tous ses efforts sur le problème (2), et ce au moins jusqu'au début des années 1970.

Wilson s'attaque toutefois à ce problème de manière plutôt indirecte dans son travail de thèse. Tout débute par un rendez-vous avec Gell-Mann fin 1958, une fois son programme d'étude (*coursework*) terminé. Gell-Mann lui suggère d'appliquer l'équation de Low à

¹² Geoffrey F. Chew, Pion-Nucleon Scattering When the Coupling is Weak and Extended, *Physical Review*, 89/3 (1953): 591-93 ; Comparison of the Cut-Off Meson Theory with Experiment, *Physical Review*, 95/6 (1954): 1669-75 ; Method of Approximation for the Meson-Nucleon Problem when the Interaction is Fixed and Extended, *Physical Review*, 94/6 (1954): 1755-59 ; Renormalization of Meson Theory with a Fixed Extended Source, *Physical Review*, 94/6 (1954): 1748-54.

¹³ Steven Weinberg, The Role of Strong Interactions in Decay Processes (PhD thesis, Princeton University, 1957).

¹⁴ Voir, entre autres, Gell-Mann et Low, 1954, *op. cit.* in n. 2 ; Lev. D. Landau, Alekseï Abrikosov, et Isaak Khalatnikov, On the Quantum Theory of Fields, *Il Nuovo Cimento*, 3/1 (1956): 80-104. Voir également Blum, *op. cit.* in n. 11, pour plus de détails.

des processus d'interaction entre kaons (ou K-mésons) et nucléons¹⁵. Cette équation, également connue sous le nom d'équation de Chew-Low, n'a pour l'instant été appliquée qu'à des processus d'interaction entre pions et nucléons, et dont l'énergie caractéristique est donc relativement basse comparée aux processus impliquant des kaons¹⁶. Schématiquement, l'équation de Low prend la forme d'une équation intégrale non linéaire reliant l'amplitude pour un processus d'interaction entre mésons et nucléons à une énergie donnée avec toutes les amplitudes du même type, dont les états initiaux et finaux sont identiques mais dont les états intermédiaires possèdent une énergie arbitraire. Il s'agit, en quelque sorte, d'une équation de dispersion. Pour ce qui nous importe ici, il faut noter deux choses. (i) Chew et Low dérivent cette équation à partir de modèles de l'interaction forte relativement simples, les modèles dits à « source fixe » ou « statiques ». Comme leur nom l'indique, ces modèles décrivent les interactions entre les pions et une source statique — un nucléon — avec deux états différents (proton et neutron). (ii) Bien qu'elle soit dérivée à partir d'un modèle particulier, Chew et Low obtiennent avec cette équation un ensemble de contraintes phénoménologiques non perturbatives, qui sont largement indépendantes du modèle choisi et semblent dès lors pouvoir fournir des informations sur la structure d'un modèle hypothétiquement complet de l'interaction forte (si un tel modèle existe)¹⁷.

Wilson va très rapidement dévier de la suggestion initiale de Gell-Mann et s'intéresser tout particulièrement aux propriétés à hautes énergies des solutions de l'équation de Low pour différents modèles statiques et dans une approximation particulière — l'approximation dite « à un méson », dans laquelle les états du système impliquant de multiples mésons sont ignorés. Il est important de noter ici que son travail s'appuie de manière essentielle sur les méthodes perturbatives traditionnelles. En d'autres termes, Wilson étudie la structure à hautes énergies de certaines solutions *perturbatives* de l'équation de Low. Il est également remarquable qu'il fasse déjà usage d'un ordinateur pour évaluer numériquement le comportement de leur développement perturbatif à des ordres élevés. Cet usage reste toutefois largement heuristique. Le résultat le plus important à ses yeux — et qui semble en effet être le plus significatif avec du recul — est obtenu de manière analytique : Wilson se rend compte fin 1959 que ces solutions perturbatives prennent une forme étonnamment simple à hautes énergies¹⁸. Par exemple,

¹⁵ Kenneth G. Wilson, *An Investigation of the Low Equation and the Chew-Mandelstam Equations* (PhD thesis, California Institute of Technology, 1961), <https://resolver.caltech.edu/CaltechETD:etd-10222002-104500>.

¹⁶ Voir Francis E. Low, *Boson-Fermion Scattering in the Heisenberg Representation*, *Physical Review*, 97/5 (1955): 1392-98 ; Geoffrey F. Chew et Francis E. Low, *Effective-Range Approach to the Low-Energy p-Wave Pion-Nucleon Interaction*, *Physical Review*, 101/5 (1956a): 1570-79 ; *Theory of Photomeson Production at Low Energies*, *Physical Review*, 101/5 (1956b): 1579-87. Pour plus de détails, voir Rivat, 2021, *op. cit.* in n. 8.

¹⁷ Voir, en particulier, Chew et Low, 1956a, *op. cit.* in n. 16, 1570.

¹⁸ Voir, en particulier, les lettres de Wilson à Gell-Mann datant du 19 octobre 1959 et du 7 janvier 1960 (Murray Gell-Mann Papers. #10219-MS. California Institute of Technology Archives and Special Collections Repository. Boîte 22, Dossier 27).

dans le cas du modèle statique le plus simple, Wilson trouve l'expression asymptotique suivante pour des mésons de masse m et d'énergie $k \rightarrow \infty$:

$$A_{if}(k) \sim \frac{g_s}{1 - c g_s \ln \frac{k}{m}}, \quad (1)$$

où g_s prend la forme d'un développement en g_r , la constante de couplage renormalisée, et c est une constante¹⁹.

Comme nous allons le voir sous peu, cette découverte va jouer un rôle fondamental dans la trajectoire intellectuelle de Wilson. Pour l'instant, bien que ces propriétés aient beau être remarquables pour tout physicien féru de séries perturbatives en TQC, on peut se poser la question de leur pertinence, et ce sous plusieurs angles. Premièrement, l'intérêt principal de l'équation de Low tient au fait qu'elle correspond à une équation non perturbative. En principe, cette équation peut fournir un certain nombre d'informations cruciales vis-à-vis du comportement des solutions de modèles de l'interaction forte pour lesquels la valeur de la constante de couplage est trop grande pour pouvoir utiliser des méthodes perturbatives traditionnelles. Dès lors, il est quelque peu étonnant que Wilson étudie la forme asymptotique des solutions *perturbatives* de cette équation. Elles ne semblent en effet présenter à ce point que très peu d'intérêt pour la physique de l'interaction forte. Deuxièmement, l'équation de Low est une équation largement phénoménologique, qui ne donne aucun détail sur la structure des champs quantiques impliqués dans la physique de l'interaction forte. Notamment, elle ne requiert pas de spécifier un hamiltonien particulier. Il est dès lors à nouveau quelque peu étonnant que Wilson l'utilise pour essayer de mieux comprendre la structure de la TQC. Troisièmement, l'équation de Low est censée fournir des informations générales sur les modèles de l'interaction forte à basses énergies. Or Wilson l'utilise à hautes énergies, et on peut se demander à nouveau si la simplicité des solutions perturbatives qu'il obtient dans ce régime est pertinente. Il s'avère que Wilson reconnaît par la suite le caractère quelque peu incongru de son étude :

« L'objectif de Murray était d'utiliser l'équation pour rendre compte des processus de diffusion K-p de manière phénoménologique. Mais je devins fasciné par le comportement à hautes énergies des solutions de l'équation de Low, bien qu'elle ne soit qu'une approximation physique raisonnable, si tant est qu'elle le soit, seulement à basses énergies²⁰. »

¹⁹ Voir Wilson, 1961, *op. cit.* in n. 15, part. II, sec. D, pour plus de détails.

²⁰ Kenneth G. Wilson, The Origins of Lattice Gauge Theory, *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 140 (2005): 5, ma traduction. Voir également Kenneth G. Wilson, The Renormalization Group and Critical Phenomena, *Reviews of Modern Physics*, 55/3 (1983): 589.

À ce stade, il semble donc que Wilson soit avant tout en train de se faire les dents sur des problèmes de la TQC qui peuvent être formulés indépendamment d'un modèle particulier, et sans que ces problèmes ne soient directement pertinents pour le problème qui l'intéresse au plus haut point, à savoir le comportement à hautes énergies des TQCs.

3. Rencontre avec le groupe de renormalisation de Gell-Mann et Low (1960-1961)

Il existe toutefois un lien fondamental qui va jouer par la suite un rôle décisif pour Wilson. Les expressions perturbatives simplifiées qu'il obtient s'avèrent être très similaires à celles trouvées par Gell-Mann et Low en 1954, et cela l'amène à s'intéresser de plus près à leur travail²¹. Wilson le résume de la manière suivante lors d'un entretien avec David Levin en 1995 :

« À l'origine, j'étais censé développer un modèle pour des particules étranges, mais j'en vins à m'intéresser aux propriétés abstraites du modèle plutôt qu'aux particules étranges. [...] Ce fut ma première introduction à la théorie du groupe de renormalisation, qui allait par la suite devenir importante pour moi²². »

Pour mieux comprendre ce lien, il nous faut revenir quelque peu en arrière. Cela va par ailleurs nous permettre de mieux discerner en section 5 les différences conceptuelles et méthodologiques entre la première version du GR de Wilson en 1965 et celle de Gell-Mann et Low en 1954.

Reprenons tout d'abord un peu d'altitude historique. La TQC a été rongée depuis ses origines par de nombreux problèmes mathématiques, le plus fameux d'entre eux étant le problème des divergences ultraviolettes. Les physiciens se rendirent en effet compte dès la fin des années 1920 que les premiers modèles quantiques de l'interaction électromagnétique généraient automatiquement des prédictions infinies lorsqu'ils prenaient en compte les contributions de processus physiques impliquant des énergies

²¹ Le moment où Wilson lit l'article de Gell-Mann et Low et fait le lien avec son propre travail de thèse n'est pas tout à fait clair. L'article de Gell-Mann et Low est cité dans la version finale de sa thèse (Wilson, 1961, *op. cit.* in n. 15). Mais il n'apparaît ni dans un premier article manuscrit datant du 7 janvier 1960 et intitulé « Solutions of the Low Equation in the One Meson Approximation for Large Energies » (Murray Gell-Mann Papers. #10219-MS. California Institute of Technology Archives and Special Collections Repository. Boîte 22, Dossier 27), ni dans la correspondance entre Wilson et Gell-Mann de juillet 1959 à mai 1960. À noter que la date de la lettre de Wilson à Gell-Mann du « 2 décembre 1960 » semble être erronée ; elle correspond sans doute au 2 décembre 1959. Wilson a probablement fini de rédiger sa thèse en mai 1960, ce qui suggère qu'il ait fait le lien avec l'article de Gell-Mann et Low entre janvier et mai 1960. Il faut toutefois noter que Wilson avait probablement déjà rencontré le GR tel qu'il est introduit dans le livre de Bogoliubov et Shirkov en 1959 (voir Kenneth G. Wilson, Entretien avec les collaborateurs du projet *The Physics of Scale* datant du 6 juillet 2002, Part. I <https://authors.library.caltech.edu/5456/1/hrst.mit.edu/hrs/renormalization/Wilson/index.html>).

²² David I. Lewin, Nobel Laureate Espouses Physics, Education, and Breadth of Knowledge, *Computers in Physics*, 9/6 (1995): 572, ma traduction.

arbitrairement hautes. Après deux décennies de tribulations, certaines plus réussites que d'autres, et interrompues partiellement par la Seconde Guerre mondiale, ils trouvèrent finalement une solution suffisamment satisfaisante grâce aux méthodes de renormalisation perturbatives mentionnées ci-dessus. Bien que cette solution apportât un réconfort certain — les premières prédictions de l'électrodynamique quantique s'avèrent être remarquablement précises —, les méthodes de renormalisation perturbatives restèrent néanmoins très suspicieuses aux yeux de nombreux physiciens. Dans les termes mémorables de Feynman, les infinies dues aux hautes énergies semblaient avoir été mises « sous le tapis »²³. Et il n'était pas tout à fait clair à ce moment si ces infinies n'allaient pas ressurgir d'une manière ou d'une autre, et révéler que la construction perturbative des TQCs est, au final, purement et simplement inconsistante²⁴.

L'article de Gell-Mann et Low s'inscrit précisément au cœur du débat du début des années 1950 sur la consistance mathématique de l'électrodynamique quantique renormalisée²⁵. Ils commencent à s'intéresser dès l'été 1953 au comportement asymptotique des propagateurs renormalisés $D_R(k^2, e_R^2, m)$ et $S_R(k, e_R^2, m)$ des photons et des électrons à hautes énergies $k \rightarrow \infty$, avec e_R^2 et m la charge et la masse renormalisées des électrons²⁶. Ils sont alors confrontés à deux obstacles déjà bien connus à ce stade. Premièrement, le développement perturbatif de ces propagateurs diverge lorsque m tend vers zéro. Dans le cas des électrons, et pour en donner une forme schématique, le propagateur

$$S_R(k, e_R^2, m) = [1 + e_R^2 \ln(k^2/m^2) + \dots + e_R^4 [\ln(k^2/m^2)]^2 + \dots] / k \quad (2)$$

tend vers l'infini dans la limite $m \rightarrow 0$ à cause des logarithmes en k^2/m^2 . Il ne semble donc pas possible de prendre naïvement cette limite pour obtenir une expression simplifiée à hautes énergies ($k \gg m$)²⁷. Deuxièmement, le développement perturbatif est tel que les termes d'ordre plus élevé en e_R^2 contribuent plus que les termes d'ordre moins élevé. Il n'est donc pas possible de négliger la série infinie de termes d'ordre plus élevé pour obtenir une expression simplifiée à hautes énergies.

En même temps, Gell-Mann et Low ont de très bonnes raisons de croire que le comportement d'échelle de ces propagateurs n'est pas simplement polynomial dans ce régime — par exemple, en $1/k$ pour le propagateur des électrons. Tout indique que ce comportement est modifié par les corrections radiatives provenant de l'interaction entre

²³ Richard P. Feynman, The Development of the Space-time View of Quantum Electrodynamics, *Physics Today*, 19/8 (1966): 43-44.

²⁴ Voir également Blum, *op. cit.* in n. 11, pour plus de détails.

²⁵ Voir Fraser, 2021, *op. cit.* in n. 7 ; Blum, *op. cit.* in n. 11, pour plus de détails.

²⁶ Murray Gell-Mann, Entretien avec Sara Lippincott datant du 17-18 juillet 1997 (Oral History Project, California Institute of Technology Archives, 1997), 28-29, http://resolver.caltech.edu/CaltechOH:OH_Gell-Mann_M.

²⁷ À noter que les limites $m \rightarrow 0$ et $k \rightarrow \infty$ ne sont équivalentes que dans la mesure où $D_R(k^2, e_R^2, m)$ et $S_R(k, e_R^2, m)$ ne dépendent que de k/m (ce qui requiert d'absorber le facteur en $1/k$ ou $1/k^2$).

les électrons et les photons (comme cela est apparent avec l'équation 2). Et il existe également de très bonnes raisons de croire que la singularité en $m = 0$ des propagateurs renormalisés est un artefact mathématique résultant de l'application des méthodes de renormalisation perturbatives. Par exemple, il est facile de vérifier que le propagateur nu régularisé au moyen d'une échelle de coupure λ n'est pas singulier en $m = 0$.

D'où le problème fondamental : comment obtenir des informations plus précises et fiables sur le comportement d'échelle des quantités renormalisées à hautes énergies ? Je ne vais donner ici qu'une esquisse très partielle de la nouvelle méthode développée par Gell-Mann et Low. À mon sens, elle est déjà largement apparente dans le cas simplifié du propagateur des électrons, lorsque l'on ignore la contribution des photons « virtuels » et la dépendance par rapport à la charge renormalisée des électrons²⁸. Premièrement, Gell-Mann et Low réexpriment de manière simplifiée la relation entre le propagateur nu $S_0(k, \lambda, m) = s_0(k/m, k/\lambda)/k$ et le propagateur renormalisé en ignorant la dépendance en $1/k$:

$$s_0(k/m, k/\lambda) = z(\lambda/m)s_R(k/m), \quad (3)$$

avec λ une échelle de coupure, s_R l'expression simplifiée du propagateur renormalisé et z le facteur de renormalisation dit de la « fonction d'onde » (et qui correspond ici à la « constante » de renormalisation associée à la variable de champ des électrons). Deuxièmement, ils s'appuient sur l'hypothèse cruciale et bien connue en 1953-1954 que l'électrodynamique quantique est renormalisable (au sens de Dyson). Cela implique en particulier que l'équation 3 reste (approximativement) valide à n'importe quelle énergie $k \gg m$ et pour n'importe quelle valeur de l'échelle de coupure $\lambda \gg m$ ²⁹.

Troisièmement, ils utilisent le fait que le propagateur nu ne soit pas singulier en $m = 0$ pour ignorer les termes finis en m des deux côtés de l'équation 3. Cela leur permet d'obtenir une relation fonctionnelle approximative à hautes énergies : $s_0(k/\lambda) = z(\lambda/m)s_R(k/m)$. Comme les deux quantités z et s_R divergent dans la limite $m \rightarrow 0$ bien que s_0 reste parfaitement fini, Gell-Mann et Low se rendent compte qu'il doit y avoir des « annulations fantastiques³⁰ » entre les divergences de z et s_R . Et cela veut donc dire qu'il doit être possible de réécrire les fonctions z et s_R de telle manière à ce que ces annulations soient explicites. C'est le point fort de l'article à mon sens. Dans ce cas simplifié, il

²⁸ Voir Gell-Mann et Low, 1954, *op. cit. in* n. 2, sect. III. Pour plus de détails, voir Rivat, 2021, *op. cit. in* n. 8 ; Fraser, 2021, *op. cit. in* n. 7 ; Blum, *op. cit. in* n. 11. Pour simplifier, j'utilise les termes de particules virtuelles et de nuage virtuel. Mais il existe de bonnes raisons de ne pas prendre trop au sérieux ces expressions. Voir Sébastien Rivat, Renormalization Scrutinized, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 68 (2019): 23-39, pour un traitement détaillé de la renormalisation perturbative.

²⁹ Bien sûr, cela requiert que la méthode perturbative reste fiable pour n'importe quelle valeur de k . Comme le note Fraser (2021, *op. cit. in* n. 7, 122), il est également nécessaire d'assumer que cette égalité reste vraie même si les séries perturbatives divergent.

³⁰ Gell-Mann et Low, 1954, *op. cit. in* n. 2, 1303.

s'avère que la relation fonctionnelle approximative à hautes énergies possède en effet des solutions fonctionnelles générales en k/λ , λ/m , et k/m , pour lesquelles ces annulations apparaissent explicitement³¹. De manière plus générale, si l'on prend de nouveau en compte la dépendance de $s_R(k/m)$ sur e_R , la solution dans le cas de s_R prend la forme suivante :

$$s_R\left(\frac{k}{m}, e_R\right) = A(e_R)H\left[\frac{k}{m}\phi(e_R)\right], \quad (4)$$

avec A , H et ϕ des fonctionnelles dont il est en principe possible de trouver l'expression perturbative à un ordre donné à partir de l'expression perturbative de s_R . Le même traitement s'applique au propagateur renormalisé des photons d_R et à la charge renormalisée e_R . Rétrospectivement, Gell-Mann et Low viennent de trouver une nouvelle méthode pour resommer les termes du développement perturbatif de s_R , d_R et e_R , et obtenir des informations plus précises et fiables sur leur comportement d'échelle à hautes énergies.

Le point le plus important pour nous tient au fait que Wilson vient de trouver en cette fin d'année 1959 des expressions perturbatives asymptotiques qui prennent une forme fonctionnelle remarquablement similaire à celle trouvée par Gell-Mann et Low en 1954. Par exemple, si l'on substitue g_S à la place de e_R dans l'équation 4, et que l'on fait l'hypothèse que la série g_S est une fonction analytique F de g_R , on retrouve exactement l'équation 1 avec :

$$A(e_R) = -\frac{1}{c}$$

$$H\left(\frac{k}{m}, e_R\right) = \frac{1}{\ln\left[\frac{k}{m}\phi(e_R)\right]} \quad (5)$$

$$\phi(e_R) = e^{-\frac{1}{cF(e_R)}}.$$

Il s'agit bien sûr d'une manière quelque peu simplifiée de reconstruire l'analogie formelle entre les expressions de Wilson et celles de Gell-Mann et Low. Mais cela illustre bien à mon sens le point clé pour Wilson : si l'on compare ces résultats avec les expressions obtenues dans le cadre de la renormalisation perturbative traditionnelle, les nouvelles méthodes de Wilson et de Gell-Mann et Low permettent de simplifier drastiquement la structure perturbative de la TQC à hautes énergies.

³¹ Voir Gell-Mann et Low, 1954, *op. cit. in n. 2*, 1304.

Malgré ces similarités, l'impact des travaux de Gell-Mann et Low sur Wilson reste néanmoins très limité. Premièrement, et comme nous l'avons vu ci-dessus, Wilson a découvert relativement tard — vers la fin 1959 — que les solutions perturbatives de l'équation de Low se simplifient à hautes énergies, et il ne fait probablement le lien avec les travaux de Gell-Mann et Low que quelques mois, si ce n'est quelques semaines, avant de soumettre le manuscrit de sa thèse (la défense a lieu en juin 1960). Il n'a, en d'autres termes, probablement pas le temps d'approfondir le lien lors de son travail de thèse, et cela semble être confirmé par le fait qu'elle ne contienne qu'une application très limitée de la méthode fonctionnelle de Gell-Mann et Low. Wilson n'en tire qu'une sorte d'addendum sans grande conséquence pour le reste de son travail. Deuxièmement, il est fort probable que Wilson n'ait pas tout compris à leur article et ait été forcé de « réinventer » leur méthode pour arriver à sa première version du GR en 1965. Wilson confirme ce point dans son entretien avec Cao datant de 1991³². Et il semble qu'il n'ait également pas eu l'occasion de discuter du GR avec Gell-Mann au moment où il fait le lien : ce dernier se trouve en Europe en 1959-1960 et Wilson vient de rejoindre Harvard en novembre 1959 comme *Junior Fellow*. À ma connaissance, il n'y pas de trace d'un échange sur ce thème entre Wilson et Gell-Mann, ni entre Wilson et Low d'ailleurs, qui se trouve au MIT à ce moment, et que Wilson rencontre régulièrement lors de son passage à Harvard de novembre 1959 à janvier 1962, avant de partir au CERN pour un an³³. Troisièmement, il semble que Wilson n'ait pas non plus compris grand-chose au traitement du GR de Bogoliubov et Shirkov dans leur ouvrage de 1959³⁴. Dans un sens, cela explique pourquoi la méthode de Gell-Mann et Low et le traitement de Bogoliubov et Shirkov sont très différents de la méthode discrète que Wilson développe en 1965 (comme nous allons le voir dans les sections 4 et 5).

Pourtant, Wilson insiste dans une lettre à Wolfhart Zimmermann datant du 13 janvier 1965 que le travail de Gell-Mann et Low a joué un rôle fondamental dans sa trajectoire vers le GR³⁵. Comment expliquer cette influence si, dans le détail, sa méthode est au final très différente de la leur ? À mon sens, l'impact de Gell-Mann et Low est double à ce stade : (i) Wilson réalise qu'il est nécessaire de mettre en œuvre de nouvelles méthodes pour comprendre la structure des TQCs à hautes énergies ; (ii) il se rend compte que les « constantes » de couplage renormalisées prennent la forme d'une séquence continue indexée par un paramètre arbitraire au lieu de prendre une valeur fixe à une échelle physique donnée. Il va sans dire que l'idée d'une telle séquence est assez révolutionnaire

³² Kenneth G. Wilson, Entretien avec Tian Yu Cao datant du 10 décembre 1991 (American Institute of Physics - Oral History Interviews. 4 parts), <https://www.aip.org/history-programs/niels-bohr-library/oral-histories/34476>.

³³ Voir Ibid. ; Wilson, 2002, *op. cit.* in n. 21.

³⁴ Wilson, 1991, *op. cit.* in n. 32 ; Bogoliubov et Shirkov, 1959, *op. cit.* in n. 7. Wilson cite le livre dans sa thèse (1961, *op. cit.* in n. 15, 49).

³⁵ Voir également Wilson, 1983, *op. cit.* in n. 20, 589.

au début des années 1950³⁶. Comme nous allons le voir en section 5, qu'on l'interprète comme une série de « conditions de renormalisations » indexées par des points de soustraction, ou comme une série de régularisations indexées par des échelles de coupure, cette séquence n'en reste pas moins largement formelle dans leur travail. Wilson sera le premier à interpréter le GR en des termes explicitement physiques. Autrement dit, il sera le premier à ouvrir la porte à un traitement des phénomènes « échelle par échelle » dans le cadre de la physique des particules.

4. De la dissertation de 1961 au groupe de renormalisation de 1965

Après avoir défendu sa thèse, Wilson va se rapprocher sensiblement durant les deux années qui suivent du programme de la matrice S, qui est en plein essor depuis la fin des années 1950 grâce aux travaux de Chew, Gell-Mann, Marvin Goldberger, Stanley Mandelstam, et Steven Frautschi, entre autres³⁷. Cependant, Wilson trouve rapidement ce nouveau programme peu satisfaisant, comme il en témoigne rétrospectivement :

« J'en vins à rejeter la théorie de la matrice S parce que les équations de cette théorie, même si on pouvait les écrire, étaient trop compliquées et inélégantes pour constituer une théorie ; en revanche, l'existence d'une approximation de couplage fort ainsi qu'une approximation de couplage faible pour la théorie des mésons à source fixe m'a aidé à penser que la théorie quantique des champs pouvait faire sens³⁸. »

Cet intérêt pour la TQC va néanmoins l'éloigner des courants dominants de la physique des particules du début des années 1960, à savoir le programme de la matrice S et le programme des courants d'algèbre³⁹.

Selon ses propres mots, Wilson commence à se mettre « sérieusement » à travailler de nouveau sur la TQC durant l'été 1963⁴⁰. Il s'intéresse tout particulièrement au modèle simplifié de l'interaction entre pions et nucléons avancé par Tsung-Dao Lee en 1954⁴¹. Ce modèle a l'avantage d'être à la fois exactement soluble et de posséder des caractéristiques similaires aux modèles réalistes de l'interaction forte. Par exemple, ce modèle génère des divergences ultraviolettes et doit être renormalisé ; mais, dans la

³⁶ Voir, par ex., Silvan S. Schweber, Hans A. Bethe, et Frederic de Hoffmann, *Mesons and Fields: Volume I, Fields* (Evanston: Row, Peterson & Co, 1955), part. IIC.

³⁷ Voir, par ex., Pickering, *op. cit. in n. 2*, sect. 3.4 ; James T. Cushing, *Theory Construction and Selection in Modern Physics: The S-Matrix* (Cambridge: Cambridge University Press, 1990).

³⁸ Wilson, 1983, *op. cit. in n. 20*, 590, ma traduction. Voir également Wilson, 1991, *op. cit. in n. 32*.

³⁹ Voir, par ex., Pickering, 1984, *op. cit. in n. 37* ; Tian Yu Cao, *From Current Algebra to Quantum Chromodynamics: A Case for Structural Realism* (Cambridge: Cambridge University Press, 2010), pour les courants d'algèbre.

⁴⁰ Wilson, 1991, *op. cit. in n. 32*.

⁴¹ Tsung-Dao Lee, Some Special Examples in Renormalizable Field Theory, *Physical Review*, 95/5 (1954): 1329-34. Voir Blum, *op. cit. in n. 11*, pour plus de détails historiques.

mesure où il est exactement soluble, il fournit un cadre mathématiquement bien défini pour mieux comprendre la structure des TQCs réalistes à hautes énergies. Wilson continuera d'utiliser ce modèle jusqu'au début des années 1970⁴². De manière plus générale, cet intérêt renouvelé pour les modèles simplifiés de la TQC s'inscrit dans la continuité de son travail de thèse et se retrouve renforcé par son engagement progressif avec la tradition de recherche dite des « modèles de la théorie des champs »⁴³. Cette tradition se développe dans les années 1950-1960 à partir d'un certain nombre de travaux s'attachant à mieux comprendre la structure mathématique de la TQC à partir de modèles simplifiés, et constitue l'un des ancêtres de ce que l'on appelle aujourd'hui la « théorie constructive des champs »⁴⁴. Au sein de cette tradition, le modèle formulé par Léon van Hove en 1952 jouera également un rôle particulièrement crucial pour Wilson par la suite⁴⁵.

Cette rencontre avec la tradition des modèles de la théorie des champs va avoir une importance conceptuelle et méthodologique singulière pour Wilson. Comme il en rend compte rétrospectivement, l'ensemble des modèles simplifiés qu'il collectionne depuis le début des années 1960 va lui servir de « laboratoire théorique » pour mettre en œuvre de nouvelles méthodes et tester de nouvelles hypothèses⁴⁶. Par exemple, il peut évaluer si certains phénomènes théoriques comme l'existence d'une singularité à hautes énergies sont robustes vis-à-vis des différents modèles de son laboratoire. Et dans la mesure où ces modèles sont pour la plupart largement irréalistes, Wilson n'a aucun scrupule à dénaturer leur structure et à introduire des hypothèses radicalement nouvelles. Il faut noter à cette occasion que les modèles de la théorie des mésons, dont le modèle statique fait partie, ont largement perdu de leur attrait depuis le début des années 1960. Wilson en fait la fâcheuse découverte dès 1959 lorsqu'il se rend compte lors d'une courte visite à Berkeley que même Chew — l'un de leurs ardents défenseurs au début des années 1950 — ne leur porte plus aucun intérêt⁴⁷.

⁴² Voir, par ex., Wilson, 1965, *op. cit. in n. 4* ; Model of Coupling-Constant Renormalization, *Physical Review D*, 2/8 (1970): 1438-72 ; Renormalization Group and Strong Interactions, *Physical Review D*, 3/8 (1971c): 1818-46.

⁴³ On retrouve par exemple cette appellation dans Sydney A. Bludman, Unified Theories of Elementary Particles, *Physics Today*, 19/2 (1966): 55.

⁴⁴ Voir, par ex., Léon van Hove, Les Difficultés de Divergences pour un Modèle Particulier de Champ Quantifié, *Physica*, 18/3 (1952): 145-59 ; Lee, 1954, *op. cit. in n. 41* ; Walter E. Thirring, A Soluble Relativistic Field Theory, *Annals of Physics*, 3/1 (1958): 91-112 ; Kenneth A. Johnson, Solution of the Equations for the Green's Functions of a Two Dimensional Relativistic Field Theory, *Il Nuovo Cimento*, 20/4 (1961): 773-90. Pour un bref aperçu historique de la théorie constructive des champs dans le cadre de la formulation axiomatique et algébrique de la TQC, voir Arthur Jaffe, Constructive Quantum Field Theory, in *Mathematical Physics 2000*, éd. par Athanassios Fokas, Alexander Grigoryan, Tom Kibble et Boguslaw Zegarlinski (World Scientific, 2000), 111-27.

⁴⁵ Voir Rivat, 2021, *op. cit. in n. 8*, 327, pour plus de détails.

⁴⁶ Wilson, 2005, *op. cit. in n. 20*, 6.

⁴⁷ Voir Kenneth G. Wilson, Lettre à Murray Gell-Mann datant du 12 septembre 1959 (Murray Gell-Mann Papers. #10219-MS. California Institute of Technology Archives and Special Collections Repository. Boîte 22, Dossier 27, 1959).

Wilson développe au sein de son laboratoire théorique une toute première méthode dès 1963 pour aller au-delà des méthodes perturbatives traditionnelles et essayer de mieux comprendre le comportement à hautes énergies de la TQC. Cette méthode, qui est aujourd'hui connue sous le nom de « développement du produit d'opérateur » (DPO), prend la forme d'une hypothèse générale sur la structure des produits d'opérateurs à différents points d'espace-temps⁴⁸. Par exemple, dans le cas le plus simple d'un opérateur scalaire O localisé à deux points d'espace-temps x et y , Wilson conjecture que le produit $O(x)O(y)$ peut être développé en une série d'opérateurs locaux $O_n(x)$ avec des coefficients à valeurs complexes $c_n(x - y)$ lorsque x tend vers y . Intuitivement, si cette hypothèse est correcte, elle ouvre la voie à une nouvelle manière de renormaliser non perturbativement les quantités de la TQC. Elle suggère qu'il est en effet possible d'absorber au moyen d'un développement local d'opérateurs toutes les divergences qui proviennent de la multiplication d'opérateurs — ou plus précisément de « distributions » — localisés à différents points d'espace-temps. Il n'est donc pas étonnant que, derrière ce résultat très abstrait, Wilson pense avoir développé une nouvelle méthode qui aille au-delà des méthodes de renormalisation perturbatives traditionnelles et ouvre la voie à une meilleure compréhension des divergences ultraviolettes en TQC.

Wilson se retrouve malheureusement coupé dans son élan. Après avoir soumis le manuscrit pour publication et reçu le rapport anonyme — apparemment écrit par Arthur Wightman mais Wilson ne le sait évidemment pas —, il se rend compte que les dimensions des opérateurs locaux $O_n(x)$ ne sont pas « canoniques » mais « anormales », c'est-à-dire que leur comportement d'échelle dévie de celui associé à leur dimension physique : par exemple, $O(\lambda x) \propto |\lambda|^{n+\alpha} O(x)$, avec n la dimension physique de l'opérateur scalaire O , α la déviation et λ un paramètre d'échelle arbitraire adimensionné. Ne sachant pas comment obtenir systématiquement ces dimensions anormales, Wilson en vient à laisser son hypothèse de côté. Il ne la reprendra sérieusement que quelques années plus tard et n'en publiera les premiers résultats qu'en 1969⁴⁹.

Entre temps, Wilson a déjà commencé à travailler sur une autre méthode, et ce dès 1964, mais dans l'espace des moments cette fois-ci. Il s'agit de sa première version du GR, et dont il soumet les résultats pour publication le 14 juin 1965, juste après avoir soumis son article sur le DPO le 2 juin⁵⁰. L'histoire ne sera pas aussi cahoteuse dans ce cas : l'article apparaît quelques mois plus tard dans *Physical Review*. De nouveau, le but de Wilson dans cet article est de mieux comprendre le comportement à hautes énergies de la TQC, et tout particulièrement des TQCs qui traitent de l'interaction forte. Pour cela, il repart du modèle statique dont il a déjà fait usage dans sa thèse. La version qu'il utilise en 1965

⁴⁸ Kenneth G. Wilson, Products of Quantum Field Operators at Short Distances (Kenneth G. Wilson Papers, #14-22-4086. Division of Rare and Manuscript Collections, Cornell University Library. Boîte 1, Dossier 18, 1964).

⁴⁹ Voir Kenneth G. Wilson, Non-Lagrangian Models of Current Algebra, *Physical Review*, 179/5 (1969): 1499-1512 ; Wilson, 2002, *op. cit.* in n. 21.

⁵⁰ Wilson, 1965, *op. cit.* in n. 4.

inclut deux champs mésoniques chargés avec des états d'énergie $|k\rangle$ et interagissant avec une source statique — un nucléon — possédant deux états, proton $|p\rangle$ et neutron $|n\rangle$. Sans surprise, ce choix est à nouveau guidé par le fait que le modèle présente les mêmes problèmes que les TQCs réalistes (divergences ultraviolettes, renormalisation) tout en étant physiquement intuitif, simple et aisément manipulable⁵¹.

Il faut garder à l'esprit que nous sommes très loin de la chromodynamique quantique à ce moment-là, c'est-à-dire très loin d'avoir une théorie hypothétiquement complète de l'interaction forte — cela n'arrive qu'au début des années 1970 avec la découverte de la liberté asymptotique⁵². En 1964, et comme nous l'avons déjà vu, les physiciens n'ont à leur disposition qu'une collection disparate de modèles phénoménologiques qui fonctionnent assez bien à basses énergies mais dont les chances de survie à hautes énergies sont quasi-nulles. Par ailleurs, dans le cas des modèles relativistes les plus ambitieux et qui peuvent prétendre s'appliquer à toutes les énergies, la constante de couplage semble avoir une valeur trop grande pour pouvoir utiliser les méthodes perturbatives traditionnelles. Et tous les modèles réalistes — phénoménologiques ou non — ne peuvent pas être résolus de manière exacte. Cela concerne d'ailleurs aussi bien les modèles de l'interaction forte que les modèles des interactions électromagnétique et faible.

Pour contourner ces problèmes et trouver une méthode qui permette de résoudre — même de manière approximative — des modèles hypothétiquement fondamentaux avec une constante de couplage arbitraire, Wilson fait deux choses remarquables⁵³. Tout d'abord, il développe une *nouvelle méthode d'approximation* qui met sens dessus dessous la manière traditionnelle d'analyser la structure d'une théorie physique. On peut résumer l'analyse traditionnelle de la façon suivante : (i) la théorie, ou le modèle, est divisée en une partie « libre », qui décrit le comportement libre d'un certain nombre d'entités comme des particules ou des champs par exemple, et une partie d'« interaction », qui décrit les interactions entre ces entités et dont l'intensité est paramétrée par une constante de couplage adimensionnée g ; (ii) la partie d'interaction est traitée comme une perturbation vis-à-vis de la partie libre en assumant que la valeur de la constante de couplage est suffisamment petite $g \ll 1$. En un mot : la théorie, ou le modèle, est analysée en faisant l'hypothèse qu'elle décrit des entités fondamentales interagissant faiblement entre elles.

Wilson fait quelque chose de parfaitement orthogonal : (i) la théorie, ou le modèle, est divisée en une partie de « haute énergie », qui décrit le système avec ses interactions à

⁵¹ Ibid., B445-46.

⁵² Voir David Gross et Frank Wilczek, Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories, *Physical Review Letters*, 30/26 (1973): 1343-46 ; Hugh D. Politzer, Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?, *Physical Review Letters*, 30/26 (1973): 1346-49 ; Gerard 't Hooft, The Birth of Asymptotic Freedom, *Nuclear Physics B*, 254 (1985): 11-18.

⁵³ Il s'agit ici d'une reconstruction historique qui clarifie à mon sens la structure conceptuelle de ce que Wilson fait en 1965. Voir Rivat, 2021, *op. cit.* in n. 8, pour plus de détails.

hautes énergies, et une partie de « basse énergie », qui décrit le système avec ses interactions à basses énergies et dont l'importance relative de ses contributions est paramétrée par une échelle Λ ; (ii) la partie de basse énergie est traitée comme une perturbation vis-à-vis de la partie de haute énergie. En un mot : la théorie, ou le modèle, est analysée en faisant l'hypothèse qu'elle décrit des entités à différents niveaux qui ne dépendent que très peu les uns des autres. Schématiquement, Wilson renverse la manière d'analyser la structure d'une théorie physique H de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 H &= H_{\text{libre}} + gH_{\text{interaction}} \\
 &\quad \downarrow \\
 H &= H_{\text{haute énergie}} + \frac{1}{\Lambda} H_{\text{basse énergie}} .
 \end{aligned} \tag{6}$$

Dans le cas du modèle statique, ce renversement est justifié par le fait que la partie de basse énergie n'apporte que des contributions relativement modestes vis-à-vis des niveaux d'énergie de la partie de haute énergie, et ce quelle que soit la valeur de g . En revanche, pour que l'approximation reste valide, il semble à ce stade nécessaire d'introduire un « intervalle d'énergie » Λ suffisamment large entre les espaces des états des parties de basse énergie et de haute énergie. Comme nous allons le voir dans l'épilogue, Wilson se rendra compte d'ici peu que cette hypothèse n'est en fait pas essentielle⁵⁴.

Regardons de plus près la manière dont Wilson analyse l'effet de la partie de basse énergie sur les niveaux d'énergie de la partie de haute énergie. Il considère tout d'abord un hamiltonien défini sur la plage d'échelle $[0, \Lambda]$, avec Λ une échelle de coupure arbitraire, et introduit un « intervalle vide » d'ordre Λ entre une partie de basse énergie H_{lab} , définie sur la plage $0 < k < 1$ et décrivant l'interaction de mésons d'énergie k observés dans le laboratoire avec la source statique, et une partie de haute énergie H_0 définie sur la plage $\Lambda/2 < k < \Lambda$. Le hamiltonien $H_1 = H_0 + H_{\text{lab}}$ qui résulte de ce découpage possède une partie « non perturbée » de haute énergie H_0 et une « perturbation » de basse énergie H_{lab} . Il est également possible de trouver avec les méthodes perturbatives traditionnelles les états fondamentaux de H_0 , $|P\rangle$ et $|N\rangle$, ainsi que leur valeur propre ΛE_0 . Et ces états physiques doivent être distingués des états nus de la source : ils la décrivent avec un « nuage » de mésons virtuels dont l'énergie est d'ordre Λ . H_0 contient en effet un terme d'interaction mésons-source et ne doit donc pas être confondu avec le hamiltonien libre utilisé lorsque l'on applique les méthodes perturbatives traditionnelles. À partir de là, Wilson se rend compte que les opérateurs de création et d'annihilation de mésons de haute énergie ($\sim \Lambda$) contenus dans H_0 n'affectent pas les états décrivant des mésons de faible énergie (~ 1). Les états fondamentaux de H_0 sont donc très « dégénérés » : il existe de nombreux états $|P, k_1, \dots, k_l\rangle$ et $|N, k_1, \dots, k_m\rangle$ ayant la même valeur propre ΛE_0 que $|P\rangle$

⁵⁴ Voir Wilson, 1970, *op. cit.* in n. 42.

et $|N\rangle$, avec $|k_i\rangle$ l'état d'un méson de basse énergie $k_i \sim 1$. Pour trouver les niveaux d'énergie les plus bas de H_1 , le hamiltonien qui décrit les deux « tranches » $[0, 1]$ et $[\Lambda/2, \Lambda]$, il est donc possible d'utiliser la méthode des perturbations dégénérées, traditionnellement utilisée dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste.

Wilson réalise toutefois qu'il est plus simple et systématique d'introduire un hamiltonien effectif H_{eff} qui reproduise exactement ces niveaux d'énergie à partir des états fondamentaux du système, $|P, k_1, \dots, k_l\rangle$ et $|N, k_1, \dots, k_m\rangle$, et pour lequel il n'est donc pas nécessaire de calculer les états perturbés. À l'ordre le plus bas, H_{eff} est obtenu en projetant simplement $H_1 = H_0 + H_{\text{lab}}$ sur l'espace généré par ces états fondamentaux. H_0 se réduit à ΛE_0 . Pour ce qui est de H_{lab} , le nuage virtuel de haute énergie ($\sim \Lambda$) autour de la source affecte la probabilité qu'elle émette ou absorbe des mésons de basse énergie (~ 1) :

$$\langle P | a_k \tau | N, k \rangle = \alpha, \quad (7)$$

avec a_k l'opérateur d'annihilation d'un méson d'énergie k , τ l'opérateur associé à la source et spécifiant la transition d'un état neutron à un état proton, et α un nombre complexe ($0 < |\alpha| < 1$). L'effet du nuage virtuel peut donc être pris en compte en renormalisant l'opérateur associé à la source, $\tau_R = \tau/\alpha$, ce qui revient à renormaliser la constante de couplage entre la source et les mésons, $g_r = \alpha g_0$. Et on obtient au final un hamiltonien effectif encodant au niveau Λ les corrections provenant de l'interaction « renormalisée » entre la source et les mésons de basse énergie :

$$H_{\text{eff}} = \Lambda E_0 [g_0] + H_{\text{lab}}(\alpha g_0), \quad (8)$$

où la dépendance des niveaux d'énergie fondamentaux au niveau Λ sur g_0 est exprimée de manière explicite. Comme nous allons le voir ci-dessus, il s'agit de la première version d'une « transformation du groupe de renormalisation » au sens wilsonien.

À ce stade, Wilson a développé une nouvelle méthode d'approximation perturbative qui ne dépend pas de la valeur de la constante de couplage. Cela n'est toutefois pas suffisant pour étudier le comportement du modèle à hautes énergies. H_0 est en effet défini sur la plage $\Lambda/2 < k < \Lambda$ et donc peu susceptible de fournir des informations intéressantes dans la limite des hautes énergies $\Lambda \rightarrow \infty$. Il en va de même pour H_{lab} qui est défini sur la plage $0 < k < 1$. Pour remédier à ce problème, Wilson fait une deuxième chose remarquable : il développe une *nouvelle méthode computationnelle*, discrète et itérative⁵⁵. Il commence par « découper » l'espace des états du modèle statique en une série infinie de tranches continues $\Lambda^n/2 < k < \Lambda^n$ ($n \geq 1$). Ces tranches ont une largeur d'ordre Λ^n et sont séparées les unes des autres par un « intervalle vide » de même ordre. Puis, en utilisant sa

⁵⁵ Pour plus de détails, voir Rivat, 2021, *op. cit.* in n. 8.

nouvelle méthode d'approximation, Wilson obtient une série de corrections pour les niveaux d'énergie fondamentaux du modèle effectif $H_{\text{eff},n}$ au niveau Λ^n :

$$\begin{aligned}
& \Lambda^n E_0[g_0] + H_{n-1}, \\
& \Lambda^n E_0[g_0] + \Lambda^{n-1} E_0[g_0 \alpha(g_0)] + H_{n-2}, \\
& \dots, \\
& \Lambda^n E_0[g_0] + \Lambda^{n-1} E_0[g_0 \alpha(g_0)] + \dots + H_{lab},
\end{aligned} \tag{9}$$

où les mésons de « haute énergie » ($\sim \Lambda^m, 1 \leq m \leq n$) sont successivement éliminés de l'espace des états du modèle effectif. En d'autres termes, Wilson calcule étape par étape la manière dont les corrections de haute énergie s'accumulent à travers les échelles d'énergie. Cette transformation génère également une séquence de « paramètres » de couplage allant de la constante de couplage nu g_0 à la constante renormalisée g :

$$g_n = g_0, \quad g_{n-1} = g_n \alpha(g_n), \quad \dots, \quad g = g_1 \alpha(g_1). \tag{10}$$

Chaque paramètre de couplage g_m ($1 \leq m \leq n$) dans la séquence encode les effets qui proviennent des mésons du niveau Λ^{m+1} au travers de $\alpha(g_{m+1})$ et indirectement les effets virtuels des niveaux $\Lambda^{m+1}, \dots, \Lambda^n$ au travers de g_{m+1} . Il s'agit de la première version du « groupe de renormalisation » au sens wilsonien.

Une fois la séquence d'hamiltoniens et de paramètres de couplage effectifs obtenue, la dernière étape consiste à étudier sa limite à hautes énergies. Rien n'interdit en effet d'inverser la relation fonctionnelle entre g_n et g_{n-1} , du moins dans ce cas suffisamment simple. La valeur du paramètre de couplage g_n à haute énergie ($\sim \Lambda^n$) peut dès lors être déterminée à partir de sa valeur « physique » g à basse énergie (~ 1). De la même manière, les niveaux d'énergie les plus bas au niveau Λ^n peuvent être déterminés à partir de cette relation fonctionnelle et de l'expression des niveaux d'énergie fondamentaux $E_0[g]$ à un niveau donné. Et, du moins en principe, il est également possible de prendre la limite $n \rightarrow \infty$ pour obtenir des informations sur les niveaux d'énergie fondamentaux du modèle défini sur l'ensemble des tranches. Il reste bien entendu de nombreuses choses à dire sur le reste de l'article. Mais, au point où nous sommes arrivés, il semble que nous ayons tout ce dont nous avons besoin pour comprendre la rupture conceptuelle et méthodologique entre les travaux de Wilson en 1965 et ceux de Gell-Mann et Low en 1954.

5. Le groupe de renormalisation wilsonien à la lumière des travaux de Gell-Mann et Low

Regardons de plus près la relation entre la première version du GR wilsonien et celui de Gell-Mann et Low. À mon sens, la rupture conceptuelle et méthodologique s'opère sur quatre plans.

Premièrement, Wilson développe une nouvelle méthodologie quasi-algorithmique pour analyser et résoudre les problèmes physiques⁵⁶. La première étape consiste à diviser un problème complexe et insoluble impliquant une plage d'échelle continue et infinie en une série infinie de problèmes plus simples et approximativement solubles impliquant chacun une plage d'échelle continue et finie. Wilson implémente, en d'autres termes, une méthode de type « diviser pour régner » à travers les échelles. Le modèle statique initial ne peut en effet pas être directement résolu avec les méthodes perturbatives traditionnelles, du moins pas pour une constante de couplage arbitraire. Wilson décide donc de découper l'espace des états du modèle en une série de tranches continues. Cela revient à remplacer le modèle initial par une série de modèles similaires — il faut noter à cette occasion que Wilson ne discrétise pas entièrement le modèle initial comme il fera plus tard en 1970⁵⁷. Bien que ces modèles réduits soient toujours définis sur une plage continue, ils ont l'avantage d'être chacun délimités par une échelle de coupure et donc d'être approximativement solubles avec les méthodes perturbatives traditionnelles⁵⁸. Néanmoins, il semble peu recommandable d'essayer de les résoudre un par un. La deuxième étape consiste dès lors à reconceptualiser cette série infinie de problèmes plus simples en un problème récursif : schématiquement, $H_{\text{eff},n}(g_n) = f[H_{\text{eff},n-1}(g_{n-1})]$, avec H_{lab} le cas de base et f une fonctionnelle donnée. Dans le cas du modèle statique, f est déterminée par $E_0[g_n]$ et $g_{n-1} = g_n \alpha(g_n)$. Et en combinant ces deux étapes, Wilson obtient une version préliminaire de l'« analyse multi-échelle » qui forme la marque de fabrique de sa formulation du GR à partir des années 1970 : (i) on décompose un système physique impliquant de nombreuses échelles caractéristiques différentes en un ensemble de systèmes physiques distincts à des échelles différentes ; (ii) on évalue la manière dont un système à une échelle donnée affecte le système à l'échelle suivante.

En comparaison, Gell-Mann et Low semblent être à des années lumières de cette nouvelle méthodologie. Il n'y a pas de tentative de résoudre les problèmes de manière algorithmique dans leur travail. Il n'y a également pas de découpage systématique d'un système selon des échelles physiques différentes. Gell-Mann et Low souhaitent avant tout

⁵⁶ L'impact de l'intérêt précoce de Wilson pour les ordinateurs sur cette nouvelle méthode est plus longuement développé dans Rivat, 2021, Ibid. J'utilise le terme 'quasi-algorithmique' dans le sens où la méthode est, à proprement parler, algorithmique, mais le problème physique ne peut être résolu de manière exacte par un ordinateur, dans la mesure où le hamiltonien à chaque échelle est défini sur une plage continue.

⁵⁷ Voir Wilson, 1970, *op. cit.* in n. 42.

⁵⁸ Voir Wilson, 1965, *op. cit.* in n. 4, B446, pour quelques exemples.

obtenir une expression simplifiée d'un problème dans un régime particulier, à savoir les hautes énergies. Et, pour cela, il leur est seulement nécessaire de distinguer le régime des basses énergies du régime des hautes énergies. À cette occasion, et comme nous allons le voir plus en détail ci-dessous, il est important de noter que la charge physique renormalisée chez Gell-Mann et Low est une constante dont la valeur est déterminée expérimentalement à basses énergies. La charge nue, qu'elle soit déterminée à une échelle arbitraire finie λ ou en prenant la limite $\lambda \rightarrow \infty$, semble avoir un caractère plutôt formel. Et le comportement à hautes énergies des propagateurs renormalisés est déterminé à partir d'un paramètre physique k , qui, pour simplifier quelque peu, correspond à l'énergie caractéristique d'un électron ou d'un photon échangé lors d'un processus d'interaction. Dans une large mesure, Gell-Mann et Low conceptualisent donc toujours les systèmes physiques à partir d'une simple division entre le niveau de basse énergie et le niveau de haute énergie. Je rejoins également ici James Fraser sur l'idée que Gell-Mann et Low ont toujours à ce stade une vision « à deux niveaux » de la renormalisation entre les quantités nues de la théorie régularisée, qui prennent pour la plupart une valeur infinie lorsque l'on enlève le régulateur, et les quantités de la théorie renormalisée, qui prennent une valeur fixe déterminée expérimentalement à basses énergies⁵⁹.

Deuxièmement, Wilson développe en 1965 une version préliminaire de la transformation du groupe de renormalisation « à gros grain » (et ce indépendamment de sa rencontre avec la physique des états solides en 1965-1966). Cette transformation s'opère schématiquement de la manière suivante dans sa version achevée du début des années 1970 (aussi bien avec une fonction de partition qu'avec une intégrale de chemin) : étant donné un système dont l'espace des configurations est délimité par une échelle de coupure Λ_0 , on intègre les configurations de haute énergie sur une plage infinitésimale $[\Lambda_0 - \delta\Lambda, \Lambda_0]$ et on définit une théorie effective délimitée par l'échelle $\Lambda_0 - \delta\Lambda$ et dont les variables, paramètres et termes d'interaction encodent les effets physiques associés à cette plage. L'analyse peut être répétée si besoin. Et pour des énergies suffisamment basses $\Lambda \ll \Lambda_0$, ces effets peuvent être typiquement approximés à l'aide d'un développement local et les termes d'interaction d'ordre supérieur de ce développement ignorés.

À première vue, Wilson semble faire quelque chose de très différent en 1965. Le hamiltonien effectif $H_{\text{eff},n}$ est défini en ignorant simplement les états excités d'ordre Λ^n et en projetant le hamiltonien H_n sur l'espace des états généré par les états fondamentaux $|P_n, k_1, \dots, k_l\rangle$ et $|N_n, k_1, \dots, k_m\rangle$, avec $k_i \leq \Lambda^{n-1}$. En d'autres termes, il ne semble pas que Wilson intègre les degrés de liberté de haute énergie du système et prenne en compte leurs effets sur le système de basse énergie comme il le fait au début des années 1970. Cela est toutefois trompeur. Wilson ne s'appuie en effet pas sur les méthodes perturbatives traditionnelles. La partie « non perturbative » $H_{n,0}$ du hamiltonien H_n contient une partie libre et une partie d'interaction. Il en va de même pour la « perturbation » H_{n-1} . Dès lors,

⁵⁹ Voir Fraser, 2021, *op. cit.* in n. 7, sect. 3.

lorsque Wilson résout $H_{n,0}$ de manière approximative, les états fondamentaux $|P_n\rangle$ et $|N_n\rangle$ incluent les effets du nuage virtuel au niveau Λ^n . Et ces effets sont directement encodés dans les paramètres et opérateurs renormalisés de $H_{\text{eff},n}$. Bien entendu, Wilson ne garde que les effets de haute énergie les plus simples en 1965 — il ne publiera une version généralisée de sa transformation qu'en 1970⁶⁰. Il n'empêche que la méthode préliminaire de 1965 contient déjà les éléments conceptuels et méthodologiques clés de sa transformation du GR du début des années 1970 : les états de haute énergie sont éliminés et leurs effets virtuels pris en compte au travers des paramètres et des termes d'interaction du hamiltonien effectif⁶¹. Et il va sans dire que Gell-Mann et Low sont à nouveau à des années lumières d'une telle méthode à gros grains.

Troisièmement, Wilson formule une équation discrète du groupe de renormalisation pour des paramètres de couplage. Tout d'abord, il est clair en 1965 qu'il n'y a, à proprement parler, plus de « constantes » de couplage chez Wilson. Le paramètre g_m ($0 \leq m \leq n$) dépend explicitement du paramètre au niveau suivant. Il est également indexé à un ensemble de tranches, et donc au niveau auquel le hamiltonien effectif est défini. Et il peut s'agir du niveau « complet » dans la limite $n \rightarrow \infty$, qui prend en compte toutes les tranches d'énergie, ou du niveau du « laboratoire » pour $m = 0$, qui ne prend en compte que la première tranche⁶². Par ailleurs, le paramètre de couplage g_m est renormalisé dans le sens où il inclut des effets physiques provenant d'autres tranches — des tranches supérieures si l'on utilise $g_m = g_{m+1}\alpha(g_{m+1})$ et inférieures si l'on inverse cette relation. Dans les deux cas, cela suggère que m constitue donc bien une « échelle de renormalisation » physique. Et, de manière quelque peu surprenante du point de vue actuel, il s'agit d'une échelle de renormalisation *discrète*. Enfin, la relation de récursion est également susceptible de présenter des « points fixes » g^* définis par l'équation $g^* = g^*\alpha(g^*)$, aussi bien à basses énergies qu'à hautes énergies. Wilson en donne d'ailleurs une analyse étonnamment développée dans son article de 1965. Il s'avère même que la plupart des cas de figure — pôle de Landau, divergence asymptotique et liberté

⁶⁰ Wilson, 1970, *op. cit.* in n. 42.

⁶¹ Il faut noter à cette occasion qu'il existe déjà en 1965 des méthodes assez similaires dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste appliquée à des systèmes moléculaires. Pour quelques articles précurseurs, voir, par ex., John H. Van Vleck, On σ -Type Doubling and Electron Spin in the Spectra of Diatomic Molecules, *Physical Review*, 33/4 (1929): 467-506 ; Claude Bloch, Sur la Théorie des Perturbations des États Liés, *Nuclear Physics* 6 (1958): 329-47. Pour des articles plus récents, voir, par ex., James K. G. Watson, Different Forms of Effective Hamiltonians, *Molecular Physics*, 103/24 (2005): 3283-91 ; Frank Neese, Lucas Lang et Vijay G. Chilkuri, Effective Hamiltonians in Chemistry, in *Topology, Entanglement, and Strong Correlations. Modeling and Simulation*, éd. par Eva Pavarini et Erik Koch, vol. 10 (Jülich, Germany: Forschungszentrum Jülich, 2020). Dans la mesure où le père de Wilson, E. Bright Wilson, était un spécialiste de la chimie quantique, on peut se demander si Wilson n'a pas été introduit à la tradition des hamiltoniens effectifs par son père. Je n'ai malheureusement trouvé pour l'instant aucun indice qui suggère cela.

⁶² À noter que Wilson utilise le paramètre g à ce niveau et garde g_0 pour le paramètre nu.

asymptotique — y sont déjà apparents, et ce aussi bien à haute énergie qu'à basse énergie⁶³.

L'équation de Wilson possède quelques points communs avec les équations fonctionnelles que Gell-Mann et Low obtiennent pour la charge des électrons : par exemple, $e_2^2 = e_1^2 d_R(\lambda^2/m^2, e_1^2)$, avec e_2^2 la charge renormalisée à une échelle de soustraction λ , et e_1^2 et d_R la charge et le propagateur renormalisés à une valeur physique donnée. Ils semblent en effet avoir développé une relation fonctionnelle entre des « paramètres » de couplage renormalisés à des échelles distinctes, qu'ils peuvent dès lors utiliser pour évaluer le comportement de la charge à hautes énergies et distinguer différents cas de figure, tout comme Wilson. Malgré cela, il existe toutefois trois différences notables au-delà du caractère plutôt formel du GR chez Gell-Mann et Low, et dont je vais parler plus longuement ci-dessous. Tout d'abord, comme le note Alexander Blum, l'équation fonctionnelle de Gell-Mann et Low pour la charge renormalisée ne constitue pas une équation du groupe de renormalisation dans le sens actuel⁶⁴. Il en va de même pour l'équation différentielle qu'ils dérivent à partir de cette équation fonctionnelle. Ensuite, leur GR pour les paramètres de couplage prend une forme continue et non discrète. Enfin, leur GR s'appuie essentiellement sur les méthodes perturbatives traditionnelles et ne peut être étendu à des régimes pour lesquels la valeur du paramètre de couplage — la charge e_R — devient trop grande. En comparaison, l'analyse de Wilson s'applique en principe à n'importe quelle situation : il est juste nécessaire d'avoir à chaque fois une méthode appropriée pour trouver $E_0[g_n]$ et $g_{n-1} = g_n \alpha(g_n)$ selon la valeur de g_n .

Finalement, Wilson interprète explicitement la transformation du GR, l'équation pour le paramètre de couplage et l'échelle de renormalisation en des termes physiques, et offre ainsi un fondement physique explicite aux méthodes de renormalisation. Lorsque Wilson propose initialement de découper le modèle statique, chaque tranche constitue un niveau physique : le niveau où la source interagit avec des mésons d'une énergie donnée. En éliminant les états excités du système au niveau Λ^n et donc les processus d'interaction mésons-nucléon dont la distance caractéristique est relativement petite, Wilson définit un modèle effectif à gros grain qui ignore les aspects les plus raffinés du modèle au niveau Λ^n . Il en va de même pour la séquence de modèles effectifs au niveau Λ^n spécifiée par l'équation 9 : le dernier modèle $\Lambda^n E_0[g_0] + \Lambda^{n-1} E_0[g_0 \alpha(g_0)] + \dots + H_{lab}$ ne prend en compte que les déviations les plus fines, et donc des processus dont la distance caractéristique est relativement large pour le niveau Λ^n . De manière similaire, l'équation

⁶³ Wilson, 1965, *op. cit. in n. 4*, sect. VI. À la lumière de cet article, il est d'ailleurs étonnant que Wilson n'ait pas pris plus au sérieux le cas de figure de la liberté asymptotique en 1971. Il semble que la « bévue » de Wilson en 1971, à savoir le fait qu'il n'ait pas pensé que l'interaction forte puisse devenir asymptotiquement libre à hautes énergies, provienne plus de son ignorance des théories de jauge non abélienne que de la possibilité d'un tel cas (Wilson, 2005, *op. cit. in n. 20*, sect. 5).

⁶⁴ Voir Blum, *op. cit. in n. 11*, chap. 9.2 (« Return to the Renormalization Group in the 1960s ») ; Gell-Mann et Low, 1954, *op. cit. in n. 2*, appendix B.

10 décrit la manière dont les effets physiques des niveaux supérieurs affectent l'intensité de la force d'interaction entre mésons et le nucléon au niveau Λ^m : si $g_m < g_{m+1}$, les effets des mésons de haute énergie deviennent de moins en moins importants à basses énergies, ce qui rend la force d'interaction « effective » plus faible, et inversement pour $g_m > g_{m+1}$. Enfin, et comme nous l'avons vu ci-dessus, l'échelle de renormalisation m correspond à une échelle physique définie relativement aux niveaux Λ^m et Λ^n (ou au niveau de basse énergie pour l'équation inverse).

Gell-Mann et Low semblent de nouveau avoir une interprétation assez différente du GR et de ses paramètres. Tout d'abord, dans leur cas, une « transformation du GR » correspond simplement à un choix différent — et quelque peu arbitraire — de paramètre λ . Gell-Mann et Low ne prennent en effet pas explicitement en compte les effets physiques d'une autre « tranche » d'énergie pour définir les quantités renormalisées à une échelle donnée. Il semble donc approprié d'interpréter leur transformation comme un changement formel de « condition de renormalisation » paramétré par une échelle λ . Et leur équation du GR prend dès lors la forme d'une équation d'invariance vis-à-vis de la manière dont les quantités de la théorie sont renormalisées.

Qu'en est-il de l'« échelle de renormalisation » λ ? Les choses se compliquent quelque peu ici⁶⁵. Dans la section 3 de leur article, il semble qu'il n'y ait pas d'hésitation possible : λ correspond à une échelle de coupure ultraviolette arbitraire. Elle élimine en effet les modes de haute énergie des champs électroniques et photoniques, et ne peut être interprétée, à proprement parler, comme une échelle de renormalisation dans son sens actuel (dans le cadre de la renormalisation perturbative). La section 4 de l'article s'appuie sur une technique de régularisation et de renormalisation un peu plus alambiquée. Gell-Mann et Low introduisent deux « échelles de coupures » λ et λ' , selon leur propre terme. En pratique, cependant, il semble que ces échelles soient mieux interprétées comme des « points de soustraction » arbitraires pour deux quantités différentes, Γ et W , à partir desquels il est possible d'exprimer les propagateurs des électrons et des photons S et D (dans la notation de Gell-Mann et Low). Autrement dit, l'échelle λ' (resp. λ) paramétrise la partie finie d'une quantité divergente $\Gamma_{\lambda'}$ (resp. W_{λ}) qui est soustraite à la quantité divergente initiale Γ (resp. W), de telle sorte que la différence soit finie et dépende de λ' (resp. λ). Cette échelle n'élimine donc pas les modes de haute énergie. Et cette interprétation semble également être renforcée par le fait que Gell-Mann et Low utilisent λ' et λ pour fixer la valeur des propagateurs renormalisés : lorsque l'énergie de l'électron (resp. du photon) est égale à λ' (resp. λ), le propagateur renormalisé des électrons (resp. photons) est égal à leur propagateur nu. Gell-Mann et Low remarquent par ailleurs que si

⁶⁵ Pour différentes interprétations de ce paramètre dans l'article de Gell-Mann et Low, voir, par ex., Steven Weinberg, *Why the Renormalization Group is a Good Thing*, in *Asymptotic Realms of Physics, Essays in Honor of Francis E. Low*, éd. par Alan H. Guth, Kerson Huang et Robert L. Jaffe (Cambridge, MA: MIT Press, 1983), 6 ; Fraser, 2021, *op. cit. in n. 7*, 121 ; Blum, *op. cit. in n. 11*, chap. 3.3 (« Gell-Mann, Low and the Ultraviolet Behavior of QED »).

l'on remplace λ et λ' par des valeurs physiques — par exemple, la masse nulle des photons pour λ et la masse m des électrons pour λ' —, les propagateurs renormalisés sont égaux à ceux obtenus pour des points de soustraction physiques.

On pourrait être tenté d'attribuer une interprétation physique minimale à l'échelle λ (et λ') dans chaque cas de figure. (i) En tant qu'échelle de coupure, elle peut être interprétée comme une échelle d'énergie limite délimitant le domaine du modèle en question, et donc comme un « seuil physique » qui caractérise implicitement le type d'entité que le modèle peut décrire. (ii) En tant que point de soustraction, elle peut être interprétée comme l'échelle physique à laquelle le système devient nu et n'est donc plus affecté par des processus virtuels implicites. Il y a deux éléments en faveur de cette interprétation. D'une part, en section 4, les quantités renormalisées prennent leur valeur nue lorsque $k \rightarrow \lambda$, et si l'on prend $\lambda \rightarrow \infty$, on obtient les quantités nues originales, c'est-à-dire celles qui ne sont pas modifiées par des corrections radiatives. D'autre part, Gell-Mann et Low sont initialement motivés par une image plutôt physique de la charge effective des électrons : la valeur observée par une observatrice dépend de sa capacité à « passer au travers » du nuage de particules virtuelles qui entoure un électron au moyen de particules tests. Dans le cas hypothétique où il est possible de passer complètement au travers de ce nuage, l'observatrice mesure la charge nue des électrons.

Il semble toutefois que cette interprétation physique minimale ne soit pas tout à fait adéquate. Dans le premier cas de figure, Gell-Mann et Low sont en effet loin de considérer l'électrodynamique quantique comme une théorie effective dont le domaine est explicitement délimité par une échelle de coupure physique. L'échelle de coupure λ (et λ') n'a, au final, qu'un statut transitoire et ne prend de « sens physique minimal » que dans la limite $\lambda \rightarrow \infty$. À proprement parler, λ (et λ') ne constitue donc pas un « paramètre » de régularisation physique chez Gell-Mann et Low. Dans le deuxième cas, le « point de soustraction » λ (et λ') revêt également un caractère largement formel et ne jouit pas du même statut physique que l'échelle de renormalisation chez Wilson. Il ne correspond en effet ni à un seuil physique intermédiaire, ni à une échelle caractéristique d'interaction. Le paramètre physique clé chez Gell-Mann et Low est plutôt le paramètre k . C'est le paramètre que l'on envoie à l'infini pour évaluer le comportement asymptotique des quantités renormalisées et donc, dans la limite, la valeur « physique » des quantités nues. Et c'est également le paramètre « opérationnel » de l'observatrice dans l'image heuristique de Gell-Mann et Low. En un mot, le « point de soustraction » λ se réduit de nouveau à une échelle arbitraire sans signification physique particulière.

6. Épilogue : L'évolution du GR wilsonien de 1965 à 1974

Wilson est donc arrivé en 1965 à une première version du groupe de renormalisation qui semble être à la fois remarquablement proche de sa version aboutie du début des années 1970 et remarquablement différente du groupe de renormalisation de Gell-Mann et Low.

Les sept années qui suivent vont lui permettre de clarifier la structure conceptuelle et méthodologique de cette première version, et dont la version finale apparaît à mon sens vers 1971-1972, avant d'être enfin publiée dans le compte rendu des conférences de Princeton datant de 1974⁶⁶. Je vais conclure en retraçant brièvement l'évolution du GR wilsonien de 1965 à cette date clé⁶⁷.

Le premier élément décisif par la suite vient de la rencontre plutôt fortuite de Wilson avec la physique des états solides. Il est important de signaler ici qu'il existe déjà à ce stade des liens forts entre ce domaine de la physique statistique et la physique des particules, notamment en raison d'un transfert accru de concepts et de méthodes depuis la fin des années 1940⁶⁸. Malgré cela, Wilson ne s'est pour l'instant que très peu intéressé à la physique des états solides. C'est donc par un heureux hasard qu'il participe à un séminaire de Benjamin Widom à Cornell vers la fin de l'année 1965 ou au début de l'année 1966 au cours duquel ce dernier présente sa nouvelle « hypothèse d'échelle », selon laquelle l'équation d'état d'un système fluide prend une forme asymptotique remarquablement simple lorsque le système se rapproche d'un état critique. Wilson trouve particulièrement frappante la similarité du comportement d'échelle de cette équation avec ses propres résultats dans le cadre de la physique des particules. Il en vient à découvrir rapidement la « transformation par bloc » de Kadanoff⁶⁹. Il approfondit également sa connaissance des phénomènes critiques au travers de nombreuses conversations avec Michael Fisher. Et il ajoute dans son laboratoire théorique toute une variété de modèles simplifiés tels que le modèle d'Ising. Aux yeux de Wilson, que l'on parle de physique des particules ou des états solides, le système étudié implique dans chaque cas de nombreux degrés de liberté à différentes échelles qui ne participent pas tous avec la même importance à une échelle donnée.

Wilson passera les cinq années suivantes à essayer de mieux comprendre la structure exacte de la transformation du GR proposée en 1965. Les versions de Gell-Mann et Low et de Kadanoff lui apparaissent en effet bien trop simplifiées : ils ne prennent pas en compte les termes d'interaction d'ordre supérieur qui apparaissent automatiquement lorsque l'on se déplace d'une échelle à une autre, et qui correspondent, dans le cadre de la physique des particules, à des termes d'interaction non renormalisables (au sens de Dyson). Pour Wilson, tout modèle effectif semble en effet prendre la forme d'un développement en un paramètre d'échelle donné, et dont les termes d'interaction d'ordre

⁶⁶ Wilson et Kogut, 1974, *op. cit.* in n. 2.

⁶⁷ Pour plus de détails, voir Rivat, 2021, *op. cit.* in n. 8, sect. 7-10.

⁶⁸ Pour plus de détails, voir, par ex., Lillian Hoddeson, Ernest Braun, Jürgen Teichmann et Spencer Weart, éd., *Out of the Crystal Maze: Chapters from the History of Solid-State Physics* (Oxford: Oxford University Press, 1992) ; Arianna Borrelli, The Story of the Higgs Boson: The Origin of Mass in Early Particle Physics, *The European Physical Journal H*, 40/1 (2015): 1-52 ; Schweber, *op. cit.* in n. 4 ; Rocco Gaudenzi, *Historical Roots of Spontaneous Symmetry Breaking: Steps Towards an Analogy*, SpringerBriefs in History of Science and Technology (Cham: Springer International Publishing, 2022).

⁶⁹ Kadanoff, 1966, *op. cit.* in n. 5.

élevé encodent des effets de plus en plus raffinés provenant d'autres échelles. Il n'a toutefois pas de preuve que ce type de développement converge et qu'il existe un nombre fini de termes à chaque ordre. Wilson s'attèlera durant les années suivantes à essayer de démontrer que cela est bien le cas et, de manière plus générale, que l'espace dans lequel les modèles effectifs vivent est bien défini mathématiquement. Les résultats sont publiés en 1970⁷⁰. À ce stade, les termes non renormalisables sont devenus parfaitement acceptables pour Wilson, même dans le cadre de la physique des particules. L'idée d'intégrer les degrés de liberté de haute énergie est clarifiée. Les concepts d'« espace des théories » et de transformation du GR sont éclaircis. Wilson s'est même rendu compte qu'il n'a pas besoin de faire l'hypothèse d'une séparation d'échelle importante pour mettre en œuvre une transformation du GR : une telle séparation permet seulement de négliger les termes d'interaction d'ordre plus élevé⁷¹.

Wilson en vient durant les trois années qui suivent à clarifier la structure mathématique et conceptuelle du GR. Il publie tout d'abord deux articles en 1971 qui se concentrent sur le GR dans le cadre des phénomènes critiques⁷². Dans le premier, Wilson fournit pour la première fois une image topologique du « flot du groupe de renormalisation » dans l'espace des théories, qui est, selon ses propres termes, jonché par des « collines », des « ravins » et des « crêtes »⁷³. Dans le second article, Wilson clarifie la structure mathématique de cet espace. Il s'agit également de la première fois où Wilson intègre de manière explicite des degrés de liberté de haute énergie tel qu'il est commun de le faire aujourd'hui — le lien avec l'intégrale de chemin apparaît dans une série de notes de lecture en 1972⁷⁴. Wilson publie également un troisième article en 1971, cette fois dans le cadre de la physique des hautes énergies⁷⁵. C'est l'occasion pour lui de revenir sur les travaux de Gell-Mann et Low, et de fournir une analyse plus détaillée des comportements d'échelle des TQCs de l'interaction forte à hautes énergies — il ne prend, malheureusement pour lui, pas au sérieux la possibilité de la liberté asymptotique. À partir du printemps 1972, Wilson donne également une série de conférences sur le thème du GR qui seront rédigées par John Kogut, soumises pour publication le 2 juillet 1973, et

⁷⁰ Wilson, 1970, *op. cit. in n.* 42.

⁷¹ En comparaison, Wilson nous disait par exemple en 1965 : « Nous pouvons nous attendre à ce que la disparité d'énergie [entre les mésons de chaque tranche] soit d'une importance fondamentale dans l'élaboration d'une théorie de la renormalisation pour les hamiltoniens des théories relativistes » (Wilson, 1965, *op. cit. in n.* 4, B457, ma traduction).

⁷² Kenneth G. Wilson, Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture, *Physical Review B*, 4/9 (1971a): 3174-83 ; Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior, *Physical Review B*, 4/9 (1971b): 3184-3205.

⁷³ Wilson, 1971a, *op. cit. in n.* 72, 3180.

⁷⁴ Kenneth G. Wilson, Unpublished Lectures on the Renormalization Group given at Cornell, "Renormalization Group: II", Lecture Notes by J. Serene (Kenneth G. Wilson Papers, #14-22-4086. Division of Rare and Manuscript Collections, Cornell University Library. Boîte 1, Dossier 25, 1972).

⁷⁵ Wilson, 1971c, *op. cit. in n.* 42.

finalement publiées en 1974⁷⁶. Ce manuscrit de cent vingt-cinq pages deviendra la référence clé du GR wilsonien pour les décennies à venir.

L'histoire qui s'ensuit est particulièrement complexe et ne peut malheureusement pas être traitée ici. Mais il semble toutefois opportun de conclure par quelques mots sur l'impact respectif du GR de Wilson et de Gell-Mann et Low. D'une part, il semble que la tradition de recherche provenant des travaux de Wilson et de Kadanoff ait eu un fort impact sur la communauté des physiciens travaillant à l'intersection de la physique des particules et de la matière condensée. Cet impact semble toutefois être plus limité du côté de la physique des particules, probablement en partie du fait que le succès des théories de jauge non abélienne ait renforcé l'espoir d'une TQC renormalisable au début des années 1970⁷⁷. En comparaison, la tradition de recherche émanant de Gell-Mann et Low semble avoir eu un impact fondamental sur la physique des hautes énergies. Et il n'est pas rare de retrouver une distinction conceptuelle et méthodologique claire entre le GR wilsonien et le GR de Gell-Mann et Low (aussi appelé le GR du continuum) dans la physique actuelle. Comme le résume Matthew Schwartz dans un livre assez récent sur la TQC :

« L'expression « groupe de renormalisation » fait référence à l'invariance des observables lorsque l'on change la manière dont les choses sont calculées. Il existe deux versions du groupe de renormalisation utilisées en théorie quantique des champs : le groupe de renormalisation wilsonien et le groupe de renormalisation du continuum⁷⁸. »

Le premier est défini par la structure d'invariance que présente une théorie de basse énergie vis-à-vis de la valeur précise d'une échelle de coupure, après avoir intégré les degrés de liberté de haute énergie ; le second par la structure d'invariance que présente une théorie hypothétiquement définie à toutes les échelles d'énergie vis-à-vis de la condition de renormalisation imposée lorsque l'on soustrait ses divergences. Le premier se prête plus facilement à une interprétation physique claire : la théorie effective encode des effets physiques de haute énergie selon ses propres termes ; le second reste en grande partie une procédure formelle : de nouveaux termes paramétrisés par une échelle arbitraire sont introduits afin d'éliminer, d'une manière largement ad hoc, un certain nombre de divergences ultraviolettes. Et il semble, comme nous l'avons vu, que ces différences conceptuelles et méthodologiques soient déjà présentes dans les travaux préliminaires de Wilson et de Gell-Mann et Low sur le groupe de renormalisation.

⁷⁶ Wilson et Kogut, 1974, *op. cit.* in n. 2.

⁷⁷ Par exemple, le GR de Wilson et de Kadanoff semble jouer un rôle relativement mineur dans Weinberg, 1983, *op. cit.* in n. 65 ; Gerard 't Hooft, The Renormalization Group in Quantum Field Theory, in *Under the Spell of the Gauge Principle*, vol. 19 (World Scientific, 1994), 208-49.

⁷⁸ Matthew Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge: Cambridge University Press, 2013), 417, ma traduction.